

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

PRISCILLA DUTRA FREIRES CODECO

**Modelo matricial de Leslie:
estudo do crescimento populacional do Brasil e
estados do Espírito Santo e Acre**

Campinas

2018

Priscilla Dutra Freires Codeco

**Modelo matricial de Leslie:
estudo do crescimento populacional do Brasil e estados
do Espírito Santo e Acre**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientadora: Sueli Irene Rodrigues Costa

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Priscilla Dutra Freires Codeco e orientada pela Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa.

Campinas
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C648m Codeco, Priscilla Dutra Freires, 1992-
Modelo matricial de Leslie : estudo do crescimento populacional do Brasil e estados do Espírito Santo e Acre / Priscilla Dutra Freires Codeco. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Sueli Irene Rodrigues Costa.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Leslie, Matriz de. 2. Álgebra linear. 3. Crescimento demográfico - Modelos matemáticos. I. Costa, Sueli Irene Rodrigues. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Matrix model of Leslie : study of the population growth of Brazil and states of Espírito Santo and Acre

Palavras-chave em inglês:

Leslie matrix

Linear algebra

Demographic growth - Mathematical models

Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada e Computacional

Banca examinadora:

Sueli Irene Rodrigues Costa [Orientador]

Cintya Wink de Oliveira Benedito

Grasiele Cristiane Jorge

Data de defesa: 13-12-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 13 de dezembro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof(a). Dr(a). CINTYA WINK DE OLIVEIRA BENEDITO

Prof(a). Dr(a). GRASIELE CRISTIANE JORGE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

À minha família, Luiz, Eliene e Letícia, meu porto seguro.

Agradecimentos

A Deus, pela força e coragem durante toda esta caminhada.

À Universidade Estadual de Campinas, em específico ao IMECC, pela oportunidade de realização do Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional.

À minha ilustre e paciente orientadora, Dra. Sueli Irene Costa, responsável pela orientação deste trabalho.

A todos os meus professores do mestrado, por tudo que me ensinaram.

Aos meus amados pais, Luiz Carlos e Eliene, por todo apoio dado a favor da minha educação.

À minha irmã, Letícia, pelo afeto e companheirismo.

Aos amigos do mestrado, pelo convívio e apoio constante.

A todos que de algum modo contribuíram para concretização desse trabalho.

*“O sucesso nasce do querer, da determinação
e persistência em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence
obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.”*
José de Alencar

Resumo

Neste trabalho estudamos o modelo matricial de Leslie, utilizado no estudo do crescimento populacional da parte feminina de uma determinada população. O modelo é uma aplicação de Álgebra Linear, e para tal, expomos os conceitos utilizados para sua estruturação, sendo eles: autovalores, autovetores, operadores lineares e diagonalização. Apresentamos de forma detalhada as demonstrações de resultados importantes sobre o tema, aplicamos estes resultados no estudo da população feminina do Brasil e, em específico, para os estados do Espírito Santo e Acre. Os dados foram coletados do IBGE, considerando faixas etárias com amplitude de cinco anos, de zero até a idade máxima de cem anos. Para os cálculos, foram utilizadas informações de 2010 a 2015. Com o estudo, objetiva-se exemplificar esta aplicação matricial e utilizar o modelo para comparação de projeções populacionais. Para a população feminina do Brasil e do Espírito Santo, encontramos um pequeno decaimento, enquanto que para o Acre, um pequeno aumento a longo prazo. Em comparação com as projeções do IBGE, encontramos pequenas diferenças nos resultados o que pode ser atribuído a outros modelos de previsão utilizados que levem em conta também variações das taxas de fertilidade e de mortalidade, as quais não são consideradas no modelo de Leslie. Um dos propósitos deste trabalho é colocar de forma clara e disponível aplicações de Álgebra Linear que podem ser trabalhadas em disciplinas de diversos cursos universitários.

Palavras-chave: Modelo matricial de Leslie. Álgebra Linear. Crescimento Populacional.

Abstract

In this work we study Leslie matrix model, used in the study of the population growth of the female part of a given population. The model is an application of Linear Algebra, and for this, we detail the necessary concepts involved in its structure which are eigenvalues, eigenvectors, linear operators and diagonalization. We have presented the proofs of the main results on this topic in a detailed form and applied these results in the study of the female population of Brazil and, specifically, to the states of Espírito Santo and Acre. The data collected were from IBGE, considering age ranges with amplitude of five years, from zero to the age of the maximum age of one hundred years. For the calculations we have used data from 2010 to 2015. The study aims to exemplify this matrix application to compare population projections. For the female population of Brazil and Espírito Santo, we could detect a small decrease, while for Acre, a small increase in a long period. In comparisons with the IBGE grow population projections, we have found some differences in the results which can be due to other models used, which may include variations on the fertility and mortality rates of the population what is not considered in the Leslie model. One of the purposes of this text is to set in a clear and available format applications of Linear Algebra to be used in several college courses.

Keywords: Leslie matrix model. Linear Algebra. Population growth.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Distribuição etária	29
Figura 2 – Modelo de Leslie para quatro faixas etárias	31
Figura 3 – Comportamento da função $Q(\lambda)$	34

Lista de tabelas

Tabela 1 – Intervalo de idade de acordo com a faixa etária	30
Tabela 2 – Taxas de nascimento e sobrevivência para ovelhas da Nova Zelândia . .	44
Tabela 3 – População residente no Brasil em 2010	48
Tabela 4 – Óbitos femininos de 2010 a 2015 no Brasil	49
Tabela 5 – Filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015 no Brasil	50
Tabela 6 – População residente no Espírito Santo em 2010	55
Tabela 7 – Óbitos femininos de 2010 a 2015 no Espírito Santo	56
Tabela 8 – Filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015 no Espírito Santo	57
Tabela 9 – População residente no Acre em 2010	61
Tabela 10 – Óbitos femininos de 2010 a 2015 no Acre	62
Tabela 11 – Filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015 no Acre	63
Tabela 12 – Projeção feminina IBGE - Brasil	67
Tabela 13 – Projeção da população feminina usando modelo de Leslie - Brasil (dados de 2010 a 2015)	68
Tabela 14 – Projeção feminina IBGE - Espírito Santo	69
Tabela 15 – Projeção da população feminina usando modelo de Leslie - Espírito Santo (dados de 2010 a 2015)	70
Tabela 16 – Projeção feminina IBGE - Acre	71
Tabela 17 – Projeção da população feminina usando modelo de Leslie - Acre (dados de 2010 a 2015)	72
Tabela 18 – Projeção da população feminina usando modelo de Leslie - Brasil (dados de 2015 a 2017)	75

Lista de abreviaturas e siglas

UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
IMECC	Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

Sumário

	Introdução	14
1	CONCEITOS PRELIMINARES	16
1.1	Autovalores e Autovetores de uma matriz	16
1.2	Diagonalização	21
1.3	Correlação de variáveis	24
2	MATRIZ DE LESLIE	27
2.1	Contextualização do modelo de Leslie	27
2.2	Modelo de Leslie	29
2.3	Comportamento da matriz de Leslie	33
2.3.1	Aplicação do modelo de Leslie em animais	44
3	APLICAÇÃO DO MODELO MATRICIAL DE LESLIE AO CRESCIMENTO POPULACIONAL NO BRASIL	47
3.1	Coleta de dados	47
3.2	Comparação dos dados	66
3.3	Correlação dos dados	72
3.4	Projeções para o Brasil pelo modelo de Leslie usando dados de 2015 a 2017	75
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
	REFERÊNCIAS	78

Introdução

A Álgebra Linear, como parte da Matemática, está presente em diversos cursos superiores. É notória a importância desse assunto, visto que, os modelos matemáticos lineares assumiram um importante papel juntamente com o desenvolvimento tecnológico e, como seria de se esperar, esse desenvolvimento estimulou o crescimento e aprofundamento nos estudos em Álgebra Linear.

Nos cursos superiores em que a Álgebra Linear está presente na grade curricular os conteúdos abordados são, geralmente, matrizes, sistemas lineares, espaços vetoriais, transformações lineares e aplicações. Um dos principais objetivos no ensino de Álgebra Linear deve ser o estabelecimento de uma relação entre tais assuntos.

Diante da importância dessa área, encontramos pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino-aprendizagem que abordam a Álgebra Linear na graduação. Destacamos a dissertação de [Fra07], na qual aborda em que medida um tratamento geométrico juntamente com os registros de representação (algébrico, gráfico e geométrico), com o auxílio de programas computacionais, atuam no ensino do graduando. [Car14] em sua tese, apresenta pesquisas nesta área, dentre elas, as concepções de estudantes sobre a Álgebra Linear, levantamento de registros do ensino de ensino-aprendizagem na década de 90, compreensão dos alunos sobre determinados temas e registro de representação em livros didáticos.

Os conceitos de Álgebra Linear são utilizados em diversas aplicações, como por exemplo na criptografia, genética, redes elétricas, programação linear usados nos mais diversos contextos, meteorologia entre outras. Escolhemos nesta dissertação abordar, em detalhes, a matriz de Leslie, que é bem conhecida, aplicada num caso específico de interesse geral justamente por esta utilizar grande parte dos assuntos tratados na disciplina de Álgebra Linear, deixando assim, um texto disponível para a utilização e motivação de disciplinas de graduação de diferentes cursos.

A matriz de Leslie foi formalizada na década de 1940 por Patrick Holt Leslie (1900-1974), mas sua primeira aparição foi em 1920, utilizada em trabalhos desenvolvidos pelo matemático Alfred J. Lotka. Este modelo matricial é utilizado em aplicações para descrever o crescimento populacional da parte da fêmea de uma população animal ou humana.

No Capítulo 1 introduzimos definições, teoremas e exemplos visando o estudo do modelo e análise dos resultados, a saber autovalores, autovetores, operadores lineares, diagonalização, produto interno e correlação de variáveis.

No Capítulo 2 é apresentado o modelo matricial de Leslie. Colocamos de forma detalhada definições, proposições com demonstrações e vários exemplos para ilustrar alguns resultados, incluindo a aplicação do modelo num caso clássico de população de ovelhas.

O Capítulo 3 é destinado a uma aplicação específica do modelo matricial de Leslie estudado no Capítulo 2. Utilizamos uma série de dados coletados no site do IBGE sobre a população feminina do Brasil e, em específico, para os estados do Espírito Santo e Acre. Realizamos, com a utilização de recursos computacionais os cálculos necessários para a análise do comportamento populacional nestes três casos, e também da correlação entre eles. Observamos algumas diferenças entre os cálculos aqui apresentados e as previsões para a distribuição populacional que consta nos dados do IBGE. Ponderamos que nestas previsões possivelmente foram utilizados outros métodos que possibilitam a inclusão da variação das taxas de fertilidade e mortandade, o que não é possível no modelo de Leslie. Também destacamos diferenças entre os resultados aqui obtidos e os de [Ono17], devido a diferentes faixas etárias e dados.

O uso de programas computacionais [MAT10] foi de fundamental importância no desenvolvimento deste trabalho viabilizando o cálculo de autovalores, autovetores e potências de matrizes para efetuar as projeções.

As considerações finais e referências bibliográficas finalizam este trabalho.

1 Conceitos preliminares

Neste capítulo apresentando as principais definições e resultados de Álgebra Linear a serem utilizados: autovalores, autovetores, operadores lineares, diagonalização e correlação de variáveis. Juntamente com os resultados, abordaremos alguns exemplos referentes às definições dadas. O propósito é tornar o texto mais acessível e autocontido. As principais referências utilizadas foram [AR01], [BCFW84], [SW08], [HR70] e [CDC90].

1.1 Autovalores e Autovetores de uma matriz

Definição 1. Se A é uma matriz complexa quadrada de ordem n , então um vetor não-nulo v em $\mathbb{C}^n$ é chamado um **autovetor** de A se Av é um múltiplo de v , ou seja, $Av = \lambda v$, para algum escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. O escalar λ é chamado de **autovalor** de A e dizemos que v é um autovetor associado a λ .

Exemplo 1. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

O vetor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$, podendo ser verificado facilmente, pois

$$Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3v.$$

Temos ainda que, qualquer múltiplo não nulo de v também será autovetor associado a λ , pois

$$A(\alpha v) = \alpha Av = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v) \Rightarrow A(\alpha v) = \lambda(\alpha v).$$

De forma geral, para encontrarmos os autovalores de uma matriz A de ordem n , reescrevemos $Av = \lambda v$ como $Av = \lambda Iv$, ou ainda,

$$(\lambda I - A)v = 0. \tag{1.1}$$

Para que λ seja um autovalor, é preciso existir uma solução não-nula desta equação. Dessa forma, a Equação (1.1), tem solução não-nula se, e somente se, $\det(\lambda I - A) = 0$. Este resultado pode ser verificado em [BCFW84, p.83] e em [AR01, p.227].

Definição 2. O polinômio $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ é chamado **polinômio característico** de A .

Consideremos mais alguns exemplos para a ilustração dos cálculos de autovalores, autovetores e polinômio característico.

Exemplo 2. *Vamos encontrar todos os autovetores e autovalores da matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Queremos vetores $v \in \mathbb{C}$ e escalares λ tais que $Av = \lambda v$. Considerando uma matriz identidade I de ordem 3, então a equação pode ser escrita como $Av = (\lambda I)v$, ou equivalentemente, $(\lambda I - A)v = 0$. Explicitando os cálculos,

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \lambda - 4 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ao efetuarmos a multiplicação das matrizes, encontraremos o sistema de equações lineares equivalentes a esta equação matricial. Para este caso, obtemos um sistema de três equações com três incógnitas. Se o determinante da matriz dos coeficientes fosse diferente de zero o sistema admitiria uma única solução, sendo $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Objetivamos encontrar os autovalores de A , ou seja, $v \neq 0$, tais que $(\lambda I - A)v = 0$. Para isso, queremos encontrar os valores de λ para os quais $\det(\lambda I - A) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} &= (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 2(\lambda - 2) = (\lambda - 2)[(\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2] = \\ &= (\lambda - 2)[\lambda^2 - 5\lambda + 6] = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 2) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

Para a equação acima temos as seguintes raízes: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Solucionando a equação $Av = \lambda v$ para $\lambda_1 = 2$, temos

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x + 2y \\ -x + y \\ y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z \text{ é qualquer} \end{matrix},$$

os autovetores são da forma $(0, 0, z)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(0, 0, 1)]$.

Para $\lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x + 2y \\ -x + y \\ y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 2y \\ y \text{ é um qualquer} \\ z = y \end{array}$$

os autovetores são da forma $(-2y, y, y)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(-2, 1, 1)]$.

Exemplo 3. Vamos encontrar todos os autovetores e autovalores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda - 3 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9.$$

Os autovalores são as raízes de $P(\lambda)$, portanto, $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

Se $\lambda_1 = -1$, o sistema $Av = \lambda v$ pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad e, \text{ assim,}$$

os autovetores associados são da forma $\left(z, \frac{5}{4}z, z\right)$, ou seja, pertencem ao subespaço $\left[\left(1, \frac{5}{4}, 1\right)\right]$. Se $\lambda_1 = 3$, o sistema pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad e, \text{ assim,}$$

os autovetores associados são da forma $(x, y, 0)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$.

Exemplo 4. Vamos encontrar todos os autovetores e autovalores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Os autovalores são as raízes de $P(\lambda)$, portanto, $\lambda_1 = -i$ e $\lambda_2 = i$. Se $\lambda_1 = -i$, o sistema $Av = \lambda v$ pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad e, \text{ assim,}$$

os autovetores associados são da forma $\left(x, \frac{1+i}{2}x\right)$, ou seja, pertencem ao subespaço $\left[\left(1, \frac{1+i}{2}\right)\right]$. Se $\lambda_1 = i$, o sistema pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad e, \text{ assim,}$$

os autovetores associados são da forma $\left(x, \frac{1-i}{2}x\right)$, ou seja, pertencem ao subespaço $\left[\left(1, \frac{1-i}{2}\right)\right]$.

Definição 3. Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente (LI)**, ou que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI, se a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

admite apenas a solução $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. No caso em que exista alguma solução não nula dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente (LD)**, ou que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD.

Teorema 1. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ autovetores de A associados a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente. Vamos supor que $v_1, v_2, \dots, v_n$ são linearmente dependentes (LD) para que possamos provar por contradição. Assim, poderemos concluir que $v_1, v_2, \dots, v_n$ são linearmente independentes (LI).

Por definição, um autovetor é não-nulo, então v_1 é LI. Considere r o maior inteiro tal que $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é LI. Estamos supondo que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é LD, assim, r satisfaz $1 \leq r < n$. Ainda, pela definição de r , $\{v_1, v_2, \dots, v_{r+1}\}$ é LD. Dessa forma, existem escalares $c_1, c_2, \dots, c_{r+1}$, não todos nulos, tais que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_{r+1}v_{r+1} = 0. \quad (1.2)$$

Multiplicando ambos os lados de (1.2) por A e usando a relação que,

$$Av_1 = \lambda_1v_1; Av_2 = \lambda_2v_2; \dots; Av_{r+1} = \lambda_{r+1}v_{r+1},$$

obteremos

$$A(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_{r+1}v_{r+1}) = A0 \Rightarrow Ac_1v_1 + Ac_2v_2 + \cdots + Ac_{r+1}v_{r+1} = 0 \Rightarrow$$

$$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \cdots + c_{r+1}\lambda_{r+1}v_{r+1} = 0. \quad (1.3)$$

Multiplicando ambos os lados de (1.2) por λ_{r+1} e subtraindo da equação resultante de (1.3), teremos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})v_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})v_2 + \cdots + c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})v_{r+1} = 0.$$

Sendo $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ LI, a equação implica que

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1}) = \cdots = c_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0.$$

Como $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são distintos, segue que,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0.$$

Substituindo em (1.2), teremos $c_{r+1}v_{r+1} = 0$. É assumido que v_{r+1} é autovetor, e portanto não nulo. Resultando em $c_{r+1} = 0$. O que contradiz o que supusemos a respeito das constantes, a saber, que os escalares $c_1, c_2, \dots, c_{r+1}$ não são todos nulos, como queríamos demonstrar. Logo, $v_1, v_2, \dots, v_n$ são linearmente independentes. $\square$

Definição 4. *Uma matriz quadrada B é dita **semelhante** a uma matriz quadrada A se existir uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.*

Uma observação da Definição (4) é que da mesma forma, A é dita semelhante a B , pois multiplicando a expressão $B = PAP^{-1}$ por P^{-1} à esquerda e por P à direita, tem-se

$$P^{-1}BP = P^{-1}PAP^{-1}P = A \Rightarrow A = P^{-1}BP.$$

Logo, diremos que as matrizes A e B são semelhantes.

Teorema 2. *Matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores.*

Demonstração. Considere A e B matrizes quadradas de ordem n e semelhantes. Assim, existe uma matriz inversível P tal que $B = PAP^{-1}$. Então,

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - PAP^{-1}) = \det(\lambda PIP^{-1} - PAP^{-1}) = \\ &= \det(P(\lambda I - A)P^{-1}) = \det(P)\det(\lambda I - A)\det(P^{-1}) = \\ &= \det(P)\det(P^{-1})\det(\lambda I - A) = \det(PP^{-1})\det(\lambda I - A) = \\ &= 1 \cdot \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A) = P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Logo, $P_B(\lambda) = P_A(\lambda)$. A igualdade dos polinômios característicos implica que as matrizes A e B têm os mesmos autovalores. $\square$

Observação: em geral matrizes com os mesmos autovalores não têm os mesmos autovetores.

Definição 5. Chamamos de **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico. A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão do subespaço $V(\lambda)$ de autovetores associados a λ .

Exemplo 5. Vamos encontrar a multiplicidade algébrica e geométrica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A são encontrados fazendo do $\det(\lambda I - A) = 0$. Para isso,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\lambda^2 = 0.$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$. Temos que λ_1 tem multiplicidade algébrica igual a um e λ_2 igual a dois. Se $\lambda_1 = 1$, o sistema $Av = \lambda v$ pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad e$$

os autovetores associados são da forma (z, z, z) , ou seja, pertencem ao subespaço $[(1, 1, 1)]$. Dessa forma, a multiplicidade geométrica de λ_1 é um.

Se $\lambda_1 = 0$, o sistema pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad e$$

os autovetores associados são da forma $(x, y, 0)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$. Dessa forma, a multiplicidade geométrica de λ_2 é dois.

1.2 Diagonalização

Definição 6. Uma matriz quadrada A é dita diagonalizável se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Neste caso, dizemos que P diagonaliza A . Ainda, sendo A diagonalizável, existe B diagonal, tal que $A = PBP^{-1}$.

Com base na Definição (6), se A for diagonalizável, podemos calcular A^n facilmente, pois

$$\begin{aligned} A^n &= (PBP^{-1})^n = \underbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1}) \dots (PBP^{-1})}_{n \text{ vezes}} = \\ &= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)BP^{-1} = PB^nP^{-1}. \end{aligned}$$

Este processo é bem mais simples que o usual para se obter a potência de uma matriz diagonalizável, uma vez que por B ser uma matriz diagonal, B^n é calculada diretamente. A saber,

$$B^n = \begin{bmatrix} a_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k^n \end{bmatrix}.$$

Teorema 3. Se A é uma matriz $n \times n$, então são equivalentes as seguintes afirmações:

- i) A é diagonalizável.
- ii) A tem n autovetores LI.

Demonstração. Suponha que A é diagonalizável. Existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal, digamos $P^{-1}AP = D$, onde

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Como $P^{-1}AP = D$, segue que $AP = PD$. Explicitando as multiplicações,

$$PD = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Denotaremos os vetores coluna de P por $p_1, p_2, \dots, p_n$. Então as sucessivas colunas de PD são da forma $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \dots, \lambda_n p_n$. Como as sucessivas colunas de AP são $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$, temos $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$. Por P ser inversível, seus vetores coluna são todos não nulos. Assim, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são autovalores de A e $p_1, p_2, \dots, p_n$ são autovetores associados. Por P ser invertível, segue que $p_1, p_2, \dots, p_n$, seus vetores colunas, são LI. Portanto, A tem n autovetores LI.

Reciprocamente, suponha que A tem n autovetores LI, $p_1, p_2, \dots, p_n$, associados aos autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente. Isto é, $Ap_i = \lambda_i p_i$, $1 \leq i \leq n$. Considere P , uma matriz cujos vetores coluna são $p_1, p_2, \dots, p_n$. A matriz resultante de AP é formada por vetores-coluna da forma $Ap_1, Ap_2, \dots, Ap_n$. Mas $Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2, \dots, Ap_n = \lambda_n p_n$, resultando em

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD,$$

onde D é uma matriz diagonal com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na diagonal principal. Como os vetores coluna de P são LI, P é invertível. Dessa forma, podemos escrever $P^{-1}AP = D$, ou seja, A é diagonalizável. $\square$

Sendo A uma matriz diagonalizável, o procedimento para a diagonalização consiste em três passos, descritos a seguir:

- i) Encontrar os autovetores LI de A , digamos $v_1, v_2, \dots, v_n$;
- ii) Construir a matriz P com os vetores coluna $v_1, v_2, \dots, v_n$;
- iii) Construir a matriz D diagonal, com as entradas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ na diagonal principal. Sendo λ_i o autovalor associado a v_i , para $i = 1, 2, \dots, n$. Por fim, teremos $A = PDP^{-1}$.

Em forma matricial,

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \downarrow & \downarrow & \vdots & \downarrow \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Teorema 4. *Se uma matriz A de tamanho $n \times n$ tem n autovalores distintos, então A é diagonalizável.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Então, pelo Teorema (1), $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI. Portanto, pelo Teorema (3), A é diagonalizável.

□

Concluindo este capítulo acrescentamos os conceitos necessários para definir correlação de variáveis ([BCRW84], Cap. 8) .

1.3 Correlação de variáveis

Consideremos um produto interno no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ definido para $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ por

$$\langle v, w \rangle = a_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot x_2 \cdot y_2 + \dots + a_n \cdot x_n \cdot y_n \quad (1.4)$$

onde, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i > 0$, para $0 \leq i \leq n$.

A norma de um vetor, segundo este produto interno, é definida por

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (1.5)$$

Da mesma forma como o que ocorre com o produto interno usual temos a chamada desigualdade de Schwarz:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|, \text{ o que implica em } -1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1. \quad (1.6)$$

Este número pode ser visto como o cosseno do ângulo entre estes dois vetores, quando o produto interno (1.4) é considerado.

Definição 7. *O coeficiente de correlação linear entre os vetores v e w é denotado pelo cosseno do ângulo entre eles:*

$$r = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Usando um produto interno (1.4) onde os números a_i representam uma ponderação (pesos) a ser estabelecida.

Exemplo 6. *Consideremos as médias de Matemática e Física de 4 salas de aula, S_1, S_2, S_3 e S_4 , dadas pelos vetores $m = (3.5, 5.0, 7.0, 6.0)$ e $f = (5.0, 5.0, 6.8, 6.0)$, respectivamente. Se não tivermos outras informações, como o número de alunos de cada sala podemos calcular a correlação entre estes dados. Esta será simplesmente o cosseno do ângulo entre estes dois vetores usando o produto usual ($a_i = 1$ para todo i). Como em (1.6),*

$$\langle m, f \rangle = 3.5 \times 5.0 + 5.0 \times 5.0 + 7.0 \times 6.8 + 6.0 \times 6.0 = 126.1,$$

$$\|m\| = \sqrt{\langle m, m \rangle} = \sqrt{3.5 \times 3.5 + 5.0 \times 5.0 + 7.0 \times 7.0 + 6.0 \times 6.0} = \sqrt{122.25} \approx 11.057,$$

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{5.0 \times 5.0 + 5.0 \times 5.0 + 6.8 \times 6.8 + 6.0 \times 6.0} = \sqrt{132.24} \approx 11.499,$$

logo,

$$r_1 = \frac{\langle m, f \rangle}{||m||||f||} \approx 0.992.$$

Por outro lado, se o número de alunos das salas S_1, S_2, S_3 e S_4 for de 30, 35, 30, 32, respectivamente, os números a_i s a serem considerados para ponderar de forma adequada os dados são:

$$a_1 = \frac{30}{127}, \quad a_2 = \frac{35}{127}, \quad a_3 = \frac{30}{127}, \quad a_4 = \frac{32}{127}.$$

Observamos que $\sum_{i=1}^4 a_i = 1$. Uma outra forma de calcular a correlação entre os vetores é ponderando os dados:

$$\langle m, f \rangle = \frac{30}{127} \times 3.5 \times 5.0 + \frac{35}{127} \times 5.0 \times 5.0 + \frac{30}{127} \times 7.0 \times 6.8 + \frac{32}{127} \times 6.0 \times 6.0 \approx 31.34,$$

$$||m|| = \sqrt{\langle m, m \rangle} = \sqrt{\frac{30}{127} \times 3.5^2 + \frac{35}{127} \times 5.0^2 + \frac{30}{127} \times 7.0^2 + \frac{32}{127} \times 6.0^2} \approx 5.51,$$

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{30}{127} \times 5.0^2 + \frac{35}{127} \times 5.0^2 + \frac{30}{127} \times 6.8^2 + \frac{32}{127} \times 6.0^2} \approx 5.72,$$

logo,

$$r_2 = \frac{\langle m, f \rangle}{||m||||f||} \approx 0.994$$

Também é usual considerar a correlação entre os dados que diferem das médias correspondentes. Como $\sum_{i=1}^4 a_i m_i = Ma$ (nota média de Matemática) e $\sum_{i=1}^4 a_i f_i = Fi$ (nota média de Física). Assim, a correlação de variáveis considerando as diferenças das médias será:

$$r_3 = \frac{\langle m - Ma(1, 1, 1, 1), f - Fi(1, 1, 1, 1) \rangle}{||m - Ma(1, 1, 1, 1)|| ||f - Fi(1, 1, 1, 1)||}.$$

Considerando a quantidade de alunos em cada sala, a correlação é calculada da forma:

Para Matemática

$$Ma = \frac{30}{127} \times 3.5 + \frac{35}{127} \times 5.0 + \frac{30}{127} \times 7.0 + \frac{32}{127} \times 6.0 = 5.370,$$

$$\bar{m} = m - Ma(1, 1, 1, 1) = \langle -1.87, -0.37, 1.63, 0.63 \rangle,$$

e

$$||\bar{m}|| = 2.568.$$

Para Física

$$Fi = \frac{30}{127} \times 5.0 + \frac{35}{127} \times 5.0 + \frac{30}{127} \times 6.8 + \frac{32}{127} \times 6.0 = 5.677,$$

$$\bar{f} = f - Fi(1, 1, 1, 1) = \langle -0.677, 0.677, 1.123, 0.323 \rangle,$$

e

$$||\bar{f}|| = 1.511.$$

Ainda,

$$\langle \bar{m}, \bar{f} \rangle = (-1.87) \times (-0.677) + (0.37)(-0.677) + (1.63)(1.123) + (0.63)(0.323) = 3.55046.$$

Logo,

$$r_3 = \frac{\langle \bar{m}, \bar{f} \rangle}{||\bar{m}|| ||\bar{f}||} = \frac{3.55046}{2.586 \times 1.511} = 0.909.$$

Se o valor do coeficiente de correlação linear, Definição (7), for:

- próximo de 1, temos que as duas listas estão fortemente correlacionadas;
- próximo de zero, não há qualquer relação entre as duas variáveis;
- próximo de -1, os dados estão fortemente correlacionados de forma inversa.

2 Matriz de Leslie

As referências utilizadas para este capítulo foram [Les45], [AR01], [Bac11], [Wan15], [Mes11], [Ono17] e [Ste13].

2.1 Contextualização do modelo de Leslie

Um dos modelos mais respeitados de crescimento populacional é o baseado em matrizes, introduzido inicialmente por Alfred J. Lotka na década de 20 e formalizado por Patrick Holt Leslie, [Les45], em 1945, no artigo intitulado “*On the use of matrices in certain population mathematics*”. O modelo de Leslie descreve o crescimento da porção feminina de uma população assumindo um tempo de vida máximo, subdividido em intervalos de tempos iguais, onde se considera taxas de fertilidade e mortalidade em cada faixa etária.

Com o objetivo de motivar e contextualizar o estudo do modelo de Leslie, iniciamos com o seguinte exemplo:

Exemplo 7. *Uma certa população de animais, formada por fêmeas, é distribuída em três faixas etárias. Tendo, 500 fêmeas na faixa de 0 – 1 ano, 300 na faixa 1 – 2 anos e 200 na faixa de 2 – 3 anos. Assumindo que estes animais não ultrapassam três anos de vida, com o passar do tempo, qual é o número de fêmeas em cada faixa etária?*

Para a resolução do exemplo, levamos em conta alguns fatores biológicos como o nascimento, o envelhecimento, a reprodução e a morte. Precisamos de mais informações acerca das fêmeas e, para isso, suponha que 50% das fêmeas da primeira faixa sobreviva para a próxima, que também, 50% da segunda faixa sobreviva para a terceira e, no máximo, as fêmeas sobrevivam até os 3 anos. Para a taxa de fertilização, considere que, em média, as fêmeas na faixa 0 – 1 não tenham filhotes, na faixa 1 – 2 tenham um filhote e na 2 – 3 tenham três. Após um ano, teremos na primeira faixa um total de $1.300 + 3.200 = 900$, que é resultante do número de fêmeas nascidas na segunda e terceira faixa. Para a segunda faixa, o número de fêmeas será formado das que sobrevivem na primeira faixa, 50% de 500, ou seja, 250. Por fim, na terceira faixa, o número de fêmeas será formado pelas sobreviventes da segunda, 50% de 300, ou seja, 150.

Os cálculos realizados anteriormente são expressos por meio da multiplicação de uma matriz e um vetor, como é exibido abaixo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.300 + 3.200 \\ \frac{1}{2}.500 \\ \frac{1}{2}.300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 250 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Seja L a matriz de ordem 3×3 anterior, N_0 o vetor que contém a população no momento da observação, N_1 o vetor que contém a população após um ano. Observe que, $N_1 = LN_0$. Para prosseguimento na análise, assumimos que as taxas de sobrevivência e fertilização se mantenham constantes. Assim, após dois anos, $N_2 = LN_1 = LLN_0 = L^2N_0$. De forma geral,

$$N_{t+1} = L^{t+1}N_0. \quad (2.1)$$

Aqui podemos utilizar recursos computacionais como o MatLab, Scilab, Mathematica ou Maxima e calcular as potências da matriz L para $t = 5, 10, 15$ e 20 anos. A seguir, os resultados obtidos com o auxílio do Matlab:

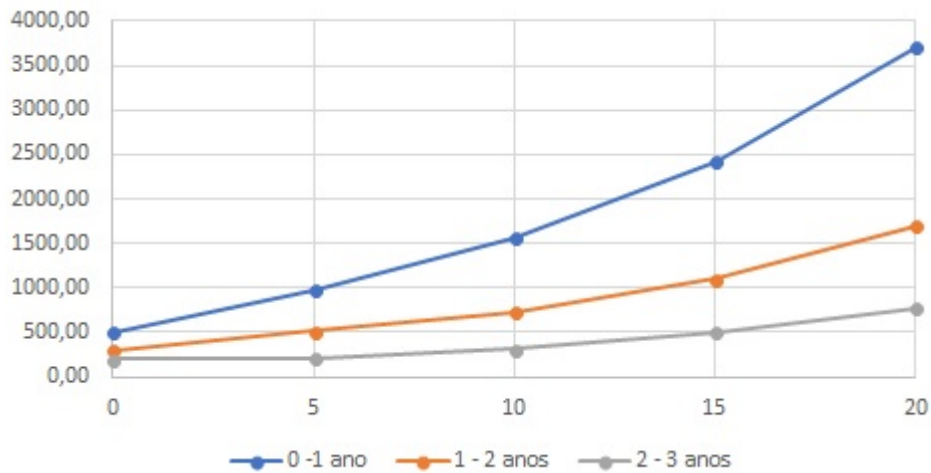
$$N_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$N_5 = \begin{pmatrix} 937.500 \\ 512.500 \\ 206.250 \end{pmatrix}$$

$$N_{10} = \begin{pmatrix} 1562.500 \\ 733.594 \\ 317.187 \end{pmatrix}$$

$$N_{20} = \begin{pmatrix} 3707.275 \\ 1695.629 \\ 780.109 \end{pmatrix}$$

Figura 1 – Distribuição etária



Ao observarmos os dados acima, percebe-se que, com o passar dos anos, a população por faixa etária cresce. Por outro lado, parece tender a uma estabilização percentual que cada faixa etária representa no todo. Será que tal comportamento é comum? Ou específico para esse caso? Ao estudarmos o modelo de Leslie seremos capazes de responder tais perguntas.

2.2 Modelo de Leslie

Patrick Holt Leslie, inicialmente, pesquisou roedores, procurando analisar alguns fatores tais como: os ciclos da lebre e de seu predador, a expansão territorial do esquilo cinzento à custa de o esquilo vermelho na Inglaterra, coleta de dados sobre ratos no bairro de Oxford, entre outros. Leslie aplicou os dados sobre ratos nos métodos desenvolvidos por Lotka para demografia humana, [Bac11].

Nesta seção estudamos e as propriedades da matriz de Leslie para descrever o crescimento da porção feminina de uma população que supõe - se ter um tempo de vida máximo. As fêmeas são divididas em classes de idade, todas com um número igual de anos. Usando dados sobre as taxas médias de natalidade e as probabilidades de sobrevivência de cada classe, o modelo proporciona uma previsão para o crescimento da população ao longo do tempo. Suponhamos que a população de fêmeas atinge, no máximo, uma idade L . Desta forma, dividimos a população em faixas etárias de igual duração. Considere n . O intervalo de idade de cada faixa etária pode ser representado na Tabela (1):

Tabela 1 – Intervalo de idade de acordo com a faixa etária

Faixa etária	Intervalo de idade
1	$\left[0, \frac{L}{n}\right)$
2	$\left[\frac{L}{n}, \frac{2L}{n}\right)$
3	$\left[\frac{2L}{n}, \frac{3L}{n}\right)$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\left[\frac{(n-2)L}{n}, \frac{(n-1)L}{n}\right)$
n	$\left[\frac{(n-1)L}{n}, L\right)$

Considerando que o número de fêmeas em cada faixa etária seja conhecido, no instante t , e assumindo que existam $N_{1,0}$ fêmeas na primeira faixa, $N_{2,0}$ na segunda, e assim consecutivamente, podemos construir o **vetor de distribuição etária**:

$$N_0 = \begin{bmatrix} N_{1,0} \\ N_{2,0} \\ N_{3,0} \\ \vdots \\ N_{n,0} \end{bmatrix}$$

Consideramos, para cada x com $1 \leq x \leq n$, $N_{x,t}$ o número de organismos que têm a idade x durante o ano t observado. Por exemplo, $N_{1,t}$ é o número de organismos que nasceram anterior ao tempo t e até a hora da observação. De forma geral, $N_{x,t}$ é o número de indivíduos com x anos até t , ou seja, no momento da observação e para $1 \leq x \leq n$, que é a idade máxima do organismo.

Estudamos o processo de envelhecimento observando a população em intervalos discretos de tempo, pois o modelo de Leslie requer que a duração entre dois tempos sucessivos seja igual à duração da faixa etária, como disposto na Tabela (1). É sabido que no decorrer do tempo, o número de fêmeas dentro de cada uma das n faixas muda, devido três processos biológicos: nascimento, morte e envelhecimento. Esses processos podem ser quantificados e descritos pelos seguintes parâmetros demográficos:

- s_x é a proporção de organismos com idade x até t que sobrevive até o ano $t + 1$. Em notação:

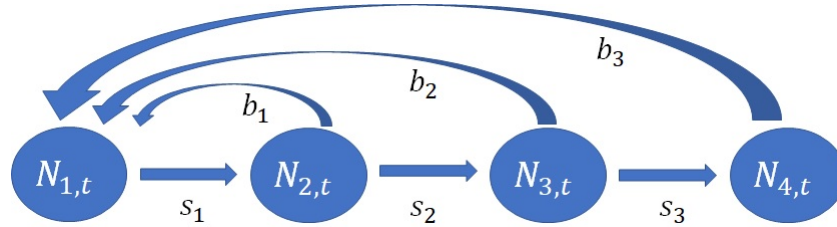
$$N_{x+1,t+1} = s_x N_{x,t}, \text{ com } 1 \leq x \leq n \text{ sendo } s_n = 0;$$

- b_x a taxa de fertilização dos organismos de idade x , o número médio de descendentes de um organismo de idade x , que sobreviverá até o momento da observação. A quantidade de filhotes pode ser descrita pela equação:

$$N_{1,t+1} = b_1 N_{1,t} + b_2 N_{2,t} + b_3 N_{3,t} + \cdots + b_n N_{n,t}.$$

Para exemplificar o comportamento, considere uma população com quatro faixas etárias. Como na Figura (2):

Figura 2 – Modelo de Leslie para quatro faixas etárias



A quantificação dos indivíduos presentes nas demais faixas etárias pode ser expressa pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} N_{2,t+1} &= s_1 N_{1,t} \\ N_{3,t+1} &= s_2 N_{2,t} \\ &\vdots \\ N_{n,t+1} &= s_{n-1} N_{n-1,t} \end{aligned}.$$

Reescrevemos as equações descritas acima em um único sistema linear, a saber:

$$N_{t+1} = \begin{cases} N_{1,t+1} = b_1 N_{1,t} + b_2 N_{2,t} + b_3 N_{3,t} + \cdots + b_n N_{n,t} \\ N_{2,t+1} = s_1 N_{1,t} \\ N_{3,t+1} = s_2 N_{2,t} \\ \vdots \\ N_{n,t+1} = s_{n-1} N_{n-1,t} \end{cases}. \quad (2.2)$$

Pode-se exibir o sistema (2.2) na forma matricial:

$$N_{t+1} = \begin{bmatrix} b_1 N_{1,t} + b_2 N_{2,t} + b_3 N_{3,t} + \cdots + b_n N_{n,t} \\ s_1 N_{1,t} \\ s_2 N_{2,t} \\ \vdots \\ s_{n-1} N_{n-1,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{1,t} \\ N_{2,t} \\ N_{3,t} \\ \vdots \\ N_{n,t} \end{bmatrix}$$

A decomposição do sistema (2.2) fornece as seguintes matrizes:

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } N_t = \begin{bmatrix} N_{1,t} \\ N_{2,t} \\ N_{3,t} \\ \vdots \\ N_{n,t} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A matriz L , chamada de **matriz de Leslie**, surge do modelo discreto e depende da idade para o crescimento populacional, sendo composta pelas taxas de fertilização e pelas taxas de indivíduos que sobrevivem para a próxima etapa. O vetor N_t fornece a distribuição etária das idades no momento t observado.

Do sistema linear:

$$N_{t+1} = LN_t,$$

obtêm-se

$$\begin{aligned} N_1 &= LN_0 \\ N_2 &= LN_1 = L^2 N_0 \\ N_3 &= LN_2 = L^3 N_0 \\ &\vdots \\ N_{t+1} &= LN_t = L^{t+1} N_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Em síntese,

$$N_{t+1} = L^{t+1} N_0. \quad (2.5)$$

Como é observado em [AR01, p.481], “se conhecermos a distribuição etária inicial e a matriz de Leslie, podemos determinar a distribuição etária das fêmeas em tempos posteriores”. Ainda, como aborda [Wan15], sabe-se que os autovalores de uma matriz Leslie são importantes para descrever o comportamento do modelo de população correspondente. Diante do exposto, detalharemos na próxima seção um estudo dos autovalores e autovetores da matriz de Leslie.

2.3 Comportamento da matriz de Leslie

O estudo do comportamento da matriz de Leslie vem por meio da investigação dos seus autovalores e autovetores. E este, se dá por meio do polinômio característico da matriz, como definido em (1.1). Desta forma, considerando a matriz exposta em (2.3), encontramos seu polinômio característico utilizando o desenvolvimento de Laplace na primeira linha,

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) = \det |L - \lambda I| &= \begin{vmatrix} b_1 - \lambda & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (b_1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} + \\
 &\quad b_3 \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & -\lambda \end{vmatrix} - \cdots + (-1)^{n-1} b_n \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & s_{n-1} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Com o desenvolvimento dos cálculos, obtemos:

$$P(\lambda) = \lambda^n - b_1 \lambda^{n-1} - b_2 s_1 \lambda^{n-2} - b_3 s_1 s_2 \lambda^{n-3} - \cdots - b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}. \quad (2.6)$$

Para a análise das raízes do polinômio $P(\lambda)$, é conveniente adicionarmos uma nova função em λ . Dividimos o polinômio encontrado em (2.6) por $\lambda \neq 0$:

$$\frac{P(\lambda)}{\lambda^n} = 1 - \left[\frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2 s_1}{\lambda^2} + \frac{b_3 s_1 s_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda^n} \right]. \quad (2.7)$$

A parte entre os colchetes será chamada de $Q(\lambda)$:

$$Q(\lambda) = \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2 s_1}{\lambda^2} + \frac{b_3 s_1 s_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda^n}. \quad (2.8)$$

Equivalentemente,

$$Q(\lambda) = 1 - \frac{P(\lambda)}{\lambda^n}. \quad (2.9)$$

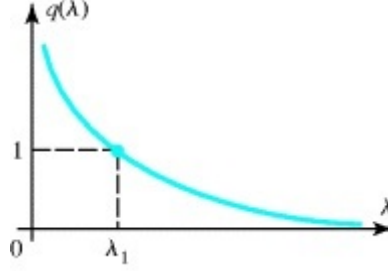
Se $P(\lambda)=0$, então $Q(\lambda) = 1$, com $\lambda \neq 0$. Como todos os b_i e s_i são positivos e ainda,

$$Q'(\lambda) = -\frac{b_1}{\lambda^2} - \frac{2b_2 s_1}{\lambda^3} - \frac{3b_3 s_1 s_2}{\lambda^4} - \cdots - \frac{nb_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda^{n+1}} < 0, \forall \lambda.$$

Conclui-se que: $Q(\lambda)$ é monótona decrescente para $\lambda > 0$; $Q(\lambda) \rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow 0$ e $Q(\lambda) \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \infty$.

O comportamento da função $Q(\lambda)$ pode ser observado no gráfico da Figura (3):

Figura 3 – Comportamento da função $Q(\lambda)$



Fonte: [AR01, p. 481]

Dada a continuidade de $Q(\lambda)$, existe um único valor $\lambda_1 = \lambda$, tal que $Q(\lambda) = 1$. Logo, $\lambda_1 = \lambda$ é o único autovalor positivo. [AR01, p. 481] sugere, como exercício, o estudo da multiplicidade algébrica de λ_1 para o polinômio $P(\lambda)$. Assim, o enunciamos como Lema (1) e, seu resultado, será utilizado na prova do Teorema (5).

Lema 1. *O autovalor positivo λ_1 de uma matriz de Leslie, cujo polinômio característico é $P(\lambda)$, é simples se, e somente se, $P'(\lambda_1) \neq 0$.*

Demonstração. Considere um polinômio arbitrário e com raízes distintas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}. \quad (2.10)$$

Suponha que $n_1 = 1$, ou seja, que a raiz do polinômio $P(\lambda)$ é simples. Dessa forma,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}.$$

Ao derivarmos $P(\lambda)$, teremos

$$P'(\lambda) = 1[(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}] + (\lambda - \lambda_1)[(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{n_i}]'.$$

Substituindo por λ_1 em $P'(\lambda)$, obtêm-se

$$P'(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda_1 - \lambda_i)^{n_i}.$$

Como foi considerado anteriormente, $\lambda_1 \neq \lambda_i, \forall i \neq 1$, então $P'(\lambda_1) \neq 0$.

Agora, suponhamos que $P'(\lambda_1) \neq 0$. Ao substituímos λ por λ_1 na derivada do polinômio (2.10), teremos:

$$P'(\lambda_1) = n_1(\lambda_1 - \lambda_1)^{(n_1-1)}[(\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda_1 - \lambda_i)^{n_i}] + (\lambda_1 - \lambda_1)^{n_1}[(\lambda_1 - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda_1 - \lambda_i)^{n_i}]',$$

encontramos $P'(\lambda_1) = 0$. Dessa forma, para que resulte em $P'(\lambda_1) \neq 0$ é preciso que algum fator da soma seja diferente de zero. É notório que a última parcela sempre será zero, independente do fator, pois $(\lambda_1 - \lambda_1)^{n_1} = 0$. Então, é forçoso que o expoente $n - 1 = 0$, ou seja, $n = 1$. Assim, λ_1 é uma raiz simples do polinômio $P(\lambda)$. $\square$

Teorema 5. (*Existência de um autovalor positivo*) Uma matriz de Leslie L tem um único autovalor positivo λ_1 . Este autovalor tem multiplicidade 1 e um autovetor associado v cujas entradas são todas positivas.

Demonstração. Já vimos que existe um único $\lambda > 0$ tal que $P(\lambda) = 0$, resultando um único autovalor positivo para matriz de Leslie, que denotamos por λ_1 .

Provamos que a multiplicidade algébrica de λ_1 é um, pelo Lema (1) temos que mostrar que $P'(\lambda_1) \neq 0$. A derivada, em relação à λ , do polinômio característico da matriz de Leslie, citado acima, é:

$$P'(\lambda) = -Q'(\lambda)\lambda^n + n(1 - Q(\lambda))\lambda^{n-1}.$$

Substituindo λ por λ_1 ,

$$P'(\lambda_1) = -Q'(\lambda_1)\lambda_1^n + n(1 - Q(\lambda_1))\lambda_1^{n-1}.$$

Como $Q(\lambda_1) = 1$, temos que

$$P'(\lambda_1) = -Q'(\lambda_1)\lambda_1^n, \text{ com } \lambda_1 \neq 0.$$

A derivada de $Q(\lambda)$, citada em (2.8), em relação à λ , é dada por

$$Q'(\lambda) = -\frac{b_1}{\lambda^2} - \frac{2b_2s_1}{\lambda^3} - \frac{3b_3s_1s_2}{\lambda^4} - \dots - \frac{nb_ns_1s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda^{n+1}}.$$

Substituindo λ por λ_1 ,

$$Q'(\lambda_1) = -\frac{b_1}{\lambda_1^2} - \frac{2b_2s_1}{\lambda_1^3} - \frac{3b_3s_1s_2}{\lambda_1^4} - \dots - \frac{nb_ns_1s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda_1^{n+1}}.$$

Por definição, os parâmetros s_i 's são positivos e não nulos e, ao menos um dos parâmetros b_i 's é não nulo. Como $\lambda_1 > 0$, então $Q'(\lambda_1) \neq 0$. Portanto, $P'(\lambda_1) \neq 0$, ou seja, λ_1 tem multiplicidade algébrica um.

Em decorrência da multiplicidade algébrica de λ_1 ser um, seu autoespaço associado terá dimensão um. Considere $v = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \cdots \ v_n]^T$ um autovetor associado a λ_1 , ou seja, $Lv = \lambda_1 v$. Em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \lambda_1 v_2 \\ \lambda_1 v_3 \\ \vdots \\ \lambda_1 v_n \end{bmatrix}.$$

O sistema linear,

$$\begin{cases} b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_{n-1} v_{n-1} + b_n v_n = \lambda_1 v_1 \\ s_1 v_1 = \lambda_1 v_2 \\ s_2 v_2 = \lambda_1 v_3 \\ \vdots \\ s_{n-1} v_{n-1} = \lambda_1 v_n \end{cases}.$$

Reescrevendo os componentes de um autovetor v em função da componente v_1 ,

$$\begin{cases} s_1 v_1 = \lambda_1 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{s_1 v_1}{\lambda_1} \\ s_2 v_2 = \lambda_1 v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{s_2 v_2}{\lambda_1} \Rightarrow v_3 = \frac{s_2 s_1 v_1}{\lambda_1^2} \\ s_3 v_3 = \lambda_1 v_4 \Rightarrow v_4 = \frac{s_3 v_3}{\lambda_1} \Rightarrow v_4 = \frac{s_3 s_2 s_1 v_1}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ s_{n-1} v_{n-1} = \lambda_1 v_n \Rightarrow v_n = \frac{s_{n-1} v_{n-1}}{\lambda_1} \Rightarrow v_n = \frac{s_{n-1} \cdots s_2 s_1 v_1}{\lambda_1^{n-1}} \end{cases}. \quad (2.11)$$

Um autovetor v associado a λ_1 , pode ser expresso como

$$v = \left(v_1, \frac{s_1 v_1}{\lambda_1}, \frac{s_2 s_1 v_1}{\lambda_1^2}, \frac{s_3 s_2 s_1 v_1}{\lambda_1^3}, \dots, \frac{s_{n-1} \cdots s_2 s_1 v_1}{\lambda_1^{n-1}} \right)^T \Rightarrow$$

$$v = v_1 \left(1, \frac{s_1}{\lambda_1}, \frac{s_2 s_1}{\lambda_1^2}, \frac{s_3 s_2 s_1}{\lambda_1^3}, \dots, \frac{s_{n-1} \cdots s_2 s_1}{\lambda_1^{n-1}} \right)^T$$

Portanto, qualquer autovetor associado ao autovalor λ_1 será múltiplo do autovetor:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{s_1}{\lambda_1} \\ \frac{s_2 s_1}{\lambda_1^2} \\ \frac{s_3 s_2 s_1}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{s_{n-1} \cdots s_2 s_1}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

É notório que todas as entradas de v são positivas, isso é justificado pois o autovalor λ_1 e todos os parâmetros s_i 's são positivos. $\square$

A partir do autovetor v , (2.12), podemos também escrever o autovetor que expresse a proporção de cada faixa etária. Considerando,

$$h = 1 + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2 s_1}{\lambda_1^2} + \frac{s_3 s_2 s_1}{\lambda_1^3} + \cdots + \frac{s_{n-1} \cdots s_2 s_1}{\lambda_1^{n-1}},$$

o autovetor proporção será da forma:

$$v_* = \frac{1}{h} v,$$

e a soma de suas coordenadas é um.

Objetivamos investigar o comportamento da distribuição etária ao longo do tempo. Para isso estudamos seu autovalor positivo e um autovetor associado. [AR01], sugere como exercício o Lema (2) que trata dos autovalores da matriz de Leslie, a saber:

Lema 2. (Autovalores de uma matriz de Leslie) Se λ_1 é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie L e λ_k é qualquer outro autovalor real ou complexo de L , então $|\lambda_k| \leq \lambda_1$.

Demonstração. Considere $\lambda_1 > 0$ um autovalor de L que satisfaz $Q(\lambda_1) = 1$. Como

$$Q(\lambda) = \frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2 s_1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda^n},$$

então,

$$1 = \frac{b_1}{\lambda_1} + \frac{b_2 s_1}{\lambda_1^2} + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda_1^n}.$$

Ou ainda,

$$1 = b_1 \lambda_1^{-1} + b_2 s_1 \lambda_1^{-2} + \cdots + b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \lambda_1^{-n}. \quad (2.13)$$

Seja $\lambda_k \neq 0$, um outro autovalor de L da forma:

$$\lambda_k = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Por λ_k ser autovalor de L , então $P(\lambda_k) = 0$ e, conseqüentemente, $Q(\lambda_k) = 1$. Tem-se

$$1 = \frac{b_1}{\lambda_k} + \frac{b_2 s_1}{\lambda_k^2} + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{\lambda_k^n}.$$

Substituindo $\lambda_k = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$,

$$1 = \frac{b_1}{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} + \frac{b_2 s_1}{r^2(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2} + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{r^n(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n}.$$

Ou ainda,

$$1 = \frac{b_1}{r}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-1} + \frac{b_2 s_1}{r^2}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-2} + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{r^n}(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n}. \quad (2.14)$$

Segundo o **Teorema De Moivre**, para todo n inteiro, então $([\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$. Dessa forma, (2.14) pode ser expresso como

$$1 = \frac{b_1}{r}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] + \frac{b_2 s_1}{r^2}[\cos(-2\theta) + i \operatorname{sen}(-2\theta)] + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{r^n}[\cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta)].$$

Temos, por meio de identidades trigonométricas, que $\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$ e $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen}(n\theta)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$1 = \frac{b_1}{r}[\cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)] + \frac{b_2 s_1}{r^2}[\cos(2\theta) - i \operatorname{sen}(2\theta)] + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{r^n}[\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)].$$

Isolando a parte real e a parte imaginária, obtêm-se

$$1 = \frac{b_1}{r} \cos(\theta) + \frac{b_2 s_1}{r^2} \cos(2\theta) + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{r^n} \cos(n\theta) \quad (2.15)$$

e,

$$0 = -\frac{b_1}{r} \operatorname{sen}(\theta) - \frac{b_2 s_1}{r^2} \operatorname{sen}(2\theta) - \cdots - \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{r^n} \operatorname{sen}(n\theta).$$

Utilizamos a desigualdade triangular e, para isso, tomemos o valor absoluto em ambos os lados da (2.15). Daí,

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{b_1}{r} \cos(\theta) + \frac{b_2 s_1}{r^2} \cos(2\theta) + \cdots + \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{r^n} \cos(n\theta) \right| \\ &\leq \left| \frac{b_1}{r} \cos(\theta) \right| + \left| \frac{b_2 s_1}{r^2} \cos(2\theta) \right| + \cdots + \left| \frac{b_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{r^n} \cos(n\theta) \right| \end{aligned}$$

É sabido que os parâmetros b_i 's e s_i 's são positivos. Assim,

$$1 \leq \frac{b_1}{|r|} |\cos(\theta)| + \frac{b_2 s_1}{|r|^2} |\cos(2\theta)| + \dots + \frac{b_n s_1 s_2 \dots s_{n-1}}{|r|^n} |\cos(n\theta)| \leq \frac{b_1}{|r|} + \frac{b_2 s_1}{|r|^2} + \dots + \frac{b_n s_1 s_2 \dots s_{n-1}}{|r|^n}, \text{ pois } |\cos(n\theta)| \leq 1$$

Logo,

$$1 \leq b_1 |r|^{-1} + b_2 s_1 |r|^{-2} + \dots + b_n s_1 s_2 \dots s_{n-1} |r|^{-n}. \quad (2.16)$$

De (2.13) e (2.16) temos, $|r| \leq \lambda_1$. Como

$$|\lambda_k| = \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \sqrt{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \sqrt{r^2} = |r|,$$

segue que,

$$|\lambda_k| \leq \lambda_1.$$

□

O Lema (2) não é suficientemente forte para os nossos objetivos de investigação dos autovalores de uma matriz de Leslie, pois uma condição importante é que $|\lambda_k| < \lambda_1$. Nesta situação, intitulamos λ_1 de **autovalor dominante** de L. O exemplo a seguir, encontrado em [AR01, p.482], ilustra uma situação em que isso não ocorre.

Exemplo 8. *Vamos encontrar os autovalores da matriz de Leslie*

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é dado por

$$P(\lambda) = |\lambda I - L| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -6 \\ -\frac{1}{2} & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

Os autovalores são encontrados quando $P(\lambda) = 0$, assim

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ e } \lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Note que, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$, ou seja, todos os autovalores têm valor absoluto igual a um. O autovalor λ_1 é o único positivo, mas não é dominante. Uma característica interessante da matriz L é que $L^3 = I$, ou seja, para qualquer escolha inicial da distribuição etária N_0 teremos

$$N_0 = N_3 = N_6 = \dots = N_{(3k)} = \dots$$

O vetor de distribuição etária oscila a cada três unidades de tempo, chamadas de **ondas populacionais**. Tais oscilações não aconteceriam se o autovalor λ_1 fosse dominante. Quais seriam as condições necessárias e suficientes para que λ_1 fosse dominante? A fim de responder estes questionamentos, o Lema (3) aborda as condições suficientes.

Lema 3. (Autovalor Dominante) Se duas entradas sucessivas b_i e b_{i+1} da primeira linha de uma matriz de Leslie L são não-nulas, então o autovalor positivo de L é dominante.

Para demonstrar este lema, são necessários alguns conceitos de grafo orientado, bem como o Teorema de Perron-Frobenius. A demonstração completa para decidir se o autovalor positivo desta matriz é dominante, pode ser consultada em [Mes11, p.68].

Se a população de fêmeas tem duas faixas etárias férteis sucessivas, então a matriz de Leslie tem um autovalor dominante. [AR01] afirma que esse fato sempre ocorrerá com populações reais se a faixa etária for tomada suficientemente pequena. Para darmos prosseguimento em nosso estudo, vamos supor que a condição desse Lema (3) está satisfeita. E ainda, vamos supor que L é diagonalizável, para demonstrar o Teorema (6) neste caso específico.

Teorema 6. Seja L uma matriz de Leslie e que possua duas entradas sucessivas b_i, b_{i+1} não nulas na primeira linha. Sejam ainda, λ_1 o autovalor positivo de L e v_* o autovetor associado cuja soma das coordenadas é um. Se N_k é o vetor que expressa as populações nas diferentes faixas etárias depois de k períodos e N_k^* é o vetor das proporções associado $\left(N_k^* = \frac{N_k}{\sum_{i=1}^k N_i}\right)$, teremos a longo prazo:

$$i) N_k^* \approx v_*; \quad ii) N_{k+1} \approx \lambda_1 N_k.$$

Demonstração. Faremos a prova deste teorema assumindo que a matriz de Leslie seja diagonalizável. Esta condição não é necessária mas simplifica bastante a demonstração. Se L é diagonalizável, então possui n autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, diferentes ou não, e n autovetores associados, $v_1, v_2, \dots, v_n$, linearmente independentes. Aqui chamamos o autovalor dominante de λ_1 . Seja P a matriz cujas colunas são os autovetores de L ,

$$P = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n].$$

A diagonalização de L é da forma:

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Segue que,

$$L^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1},$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. Logo, se N_0 é o vetor de distribuição etária inicial, então:

$$L^k N_0 = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} N_0, \quad (2.17)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$. Dividindo os dois membros da equação acima por $\lambda_1^k \neq 0$ e, substituindo $L^k N_0$ por N_k . Assim,

$$\frac{1}{\lambda_1^k} N_k = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1} N_0. \quad (2.18)$$

Como λ_1 é autovalor dominante, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, para $i = 2, 3, \dots, n$. Tem-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k = 0.$$

Tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ na equação matricial, assim:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} N_k \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1} N_0 =$$

$$P \begin{bmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \end{bmatrix} P^{-1} N_0.$$

Ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} N_k \right\} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} N_0. \quad (2.19)$$

A matriz P, formada por autovetores, é de ordem n. Desenvolvendo os cálculos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} N_k \right\} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & v_{3n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} N_{1,0} \\ N_{2,0} \\ \vdots \\ N_{n,0} \end{bmatrix}.$$

Efetuada a multiplicação,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} N_k \right\} = \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} N_{1,0} \\ N_{2,0} \\ \vdots \\ N_{n,0} \end{bmatrix}.$$

Devido a ordem das matrizes P^{-1} e N_0 , seu produto será uma matriz coluna. Denotando a primeira entrada dessa matriz pela constante c, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} N_k \right\} = \begin{bmatrix} cv_{11} \\ cv_{12} \\ \vdots \\ cv_{1n} \end{bmatrix}.$$

Podemos reescrever a Equação (2.19), como:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_1^k} N_k \right\} = cv_1. \quad (2.20)$$

Assim, tomando os vetores proporção correspondentes temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_k^* = v_*.$$

Onde c é uma constante positiva que depende do vetor de distribuição etária inicial N_0 .

Assim, (2.20) fornece

$$\frac{N_k}{\lambda_1^k} \approx cv_1, \quad (2.21)$$

para k grande, ou seja,

$$N_k \approx c\lambda_1^k v_1 \quad (2.22)$$

No instante k (k grande), a distribuição etária das fêmeas será proporcional às entradas do 1º autovetor v_1 associado a λ_1 . Analogamente, para valores grandes de k , temos

$$N_{k-1} \approx c\lambda_1^{k-1} v_1 \quad (2.23)$$

Ao compararmos as equações (2.22) e (2.23), têm-se

$$N_k \approx \lambda_1 N_{k-1}, \text{ onde } k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.24)$$

□

Observa-se assim que para valores grandes de k podemos obter, aproximadamente, a distribuição etária N_k , depois de k intervalos de tempo, multiplicando a distribuição etária N_{k-1} pelo autovalor dominante da matriz de Leslie. A Equação (2.22) fornece a distribuição etária da população a longo prazo e, dependendo do valor do autovetor dominante, teremos três possíveis casos. A população de cada faixa etária aumentará, diminuirá ou ficará estável a longo prazo, conforme $\lambda_1 > 1$, $\lambda_1 < 1$ ou $\lambda_1 = 1$, respectivamente.

Assim $\lambda_1 = 1$, a longo prazo determina uma população com taxa de crescimento populacional nulo. Observando a Equação (2.9), vemos que $\lambda_1 = 1$ é um autovalor se, e somente se, $Q(1) = 1$, isto é

$$b_1 + b_2 s_1 + b_3 s_1 s_2 + \dots + b_n s_1 s_2 \dots s_{n-1} = 1.$$

A expressão

$$R = Q(1) \quad (2.25)$$

é chamada de taxa líquida de reprodução da população. Observamos novamente da Equação (2.9) e da Figura (3), que teremos o autovalor positivo $\lambda_1 > 1$, $\lambda_1 < 1$ ou $\lambda_1 = 1$ conforme

$$Q(1) > 1, \quad Q(1) < 1 \text{ ou } Q(1) = 1. \quad (2.26)$$

Como colocado em [AR01, p. 484] esta taxa pode também ser interpretada como número médio de filhas por fêmea a longo prazo. Assim por exemplo se $Q(1)=1$, supondo um número aproximadamente igual de machos e fêmeas, teremos uma taxa de dois filhos por mulher portanto uma população global estável a longo prazo.

2.3.1 Aplicação do modelo de Leslie em animais

Para exemplificar o modelo de Leslie, utilizamos dados referentes a espécie de ovelhas domesticadas na Nova Zelândia, extraídos de [Cau67], onde supõe que as ovelhas estavam em um ambiente bem controlado. A Tabela (2), lista as taxas de reprodução e sobrevivência para a população feminina de uma determinada espécie:

Tabela 2 – Taxas de nascimento e sobrevivência para ovelhas da Nova Zelândia

Faixa etária	Taxa de natalidade	Taxa de sobrevivência
0 – 1	0.000	0.845
1 – 2	0.045	0.975
2 – 3	0.391	0.965
3 – 4	0.472	0.950
4 – 5	0.484	0.926
5 – 6	0.546	0.895
6 – 7	0.543	0.850
7 – 8	0.502	0.786
8 – 9	0.468	0.691
9 – 10	0.459	0.561
10 – 11	0.433	0.370
11 – 12	0.421	0.000

Fonte:[Cau67]

As ovelhas dão à luz apenas uma vez ao ano, o que dita um intervalo natural de um ano. Nas espécies em consideração, as ovelhas raramente vivem mais que 12 anos, o que nos dá um ponto de parada. A Tabela (2), nos fornece os s'_i s e os b'_i s, que permite o cálculo do polinômio característico, apresentado em (2.6.) Assim:

$$P(\lambda) = \lambda^{12} - 0.038025\lambda^{10} - 0.322135\lambda^9 - 0.375259\lambda^8 - 0.365559\lambda^7 - 0.381870\lambda^6 - 0.339866\lambda^5 \\ - 0.267097\lambda^4 - 0.195719\lambda^3 - 0.132641\lambda^2 - 0.070197\lambda - 0.025253.$$

O Lema (3) é satisfeito, pois existem mais de duas faixas etárias sucessivas férteis. Com o auxílio do [MAT10], encontramos o autovalor positivo da matriz de Leslie do exemplo, sendo $\lambda \approx 1.17557$.

O autovetor associado ao autovalor λ_1 é encontrado utilizando a forma (2.12), a saber:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.718800 \\ 0.596162 \\ 0.489377 \\ 0.395474 \\ 0.311516 \\ 0.237168 \\ 0.171485 \\ 0.114657 \\ 0.067395 \\ 0.032162 \\ 0.010123 \end{bmatrix}$$

O autovetor proporção encontrado é:

$$v' = \begin{bmatrix} 0.241294 \\ 0.173442 \\ 0.143850 \\ 0.118084 \\ 0.095426 \\ 0.075167 \\ 0.057227 \\ 0.041378 \\ 0.027666 \\ 0.016262 \\ 0.007761 \\ 0.002443 \end{bmatrix}$$

Portanto, se as ovelhas continuarem a se reproduzir e morrer no mesmo ritmo da pesquisa, a partir do autovalor obtido λ_1 , conclui-se do Teorema (6) que a população tende a um crescimento da ordem de 17.557% a cada ano. Observamos que para o produtor, será necessário uma avaliação de ampliação da colheita, em cada faixa etária, visto que com o alto crescimento, a fazenda em algum momento não irá comportar as ovelhas. Para isso o produtor terá que aumentar a taxa de mortandade das faixas etárias, visando obter um autovalor próximo de um, o que indica estabilização da população. Isso poderá ser determinado "acertando" os valores s_i para que a taxa de reprodução $R = Q(1)$, (2.26), seja desejada. No vetor proporção v' , observa-se que, no futuro, para 10000 ovelhas, por exemplo, haverá 2413 entre 0 e 1 ano de idade, 1734 entre 1 e 2 anos, 1439 entre 2 e 3 anos, e assim sucessivamente.

Outra aplicação, a de [Cor17], utiliza o modelo de Leslie para obter estimativas da taxa crescimento, taxa de reprodução e população máxima da população de tubarões do tipo MAKO, no oceano do Atlântico Norte e Sul. Com a aplicação dessas estimativas serem usadas para formular informativos de população máxima em modelos de avaliação de estoque de produção e idade, respectivamente.

3 Aplicação do modelo matricial de Leslie ao crescimento populacional no Brasil

3.1 Coleta de dados

Como descrevemos no segundo capítulo, com a matriz de Leslie conseguimos analisar o comportamento do crescimento da parte feminina de uma população animal ou humana. Neste capítulo, utilizamos dados coletados do site do IBGE dos anos de 2010 a 2015, com o intuito de observar o comportamento populacional e compará-lo com as projeções que foram apresentadas para os próximos anos. Nossa coleta de dados foi realizada neste site, pois se constitui no principal provedor de informações e de dados do país, atendendo as necessidades dos mais diversos segmentos da sociedade civil, como também dos órgãos das esferas governamentais federal, estadual e municipal. As informações ficam disponíveis em <https://www.ibge.gov.br/> e são de fácil acesso. Utilizamos dados referentes à população nos âmbitos nacional e dos estados do Espírito Santo e Acre. O site disponibiliza os dados em faixas etárias, divididas em cinco anos. Para a aplicação do modelo, precisamos do acumulado de nascimentos e de óbitos ocorridos de 2010 a 2015. Isso é necessário, pois o modelo é proposto para a quantidade de tempo igual a amplitude de cada faixa etária, ou seja, após cinco anos toda a população feminina terá mudado de faixa e o modelo fará a projeção.

Dividimos a pesquisa da seguinte forma: primeiro coletamos os dados para o Brasil, em seguida, para os Estados do Espírito Santo e do Acre. Foram calculados os parâmetros b_i e s_i de cada faixa etária, o polinômio característico, o autovalor positivo e o seu autovetor associado, e ainda, o autovetor proporção, para os respectivos dados.

Vale ressaltar que, padronizamos a última faixa etária sendo a de $[95, 100)$ anos, pois a partir desta o IBGE não agrupa em faixas etárias de 5 anos. Sendo apenas apresentados de 100 anos ou mais. Assim, nossas faixas são de $[0, 5)$ a $[90, 100)$ anos.

Para o Brasil, iniciamos coletando os dados sobre a população residente em 2010 dividida entre homens, mulheres e seus respectivos percentuais, dispostos na Tabela (3):

Tabela 3 – População residente no Brasil em 2010

Intervalo de Idade	Homens	Mulheres	% Homens	% Mulheres
[0, 5)	7025701	6781032	3,68	3,56
[5, 10)	7623609	7344159	4,00	3,85
[10, 15)	8727095	8440040	4,58	4,42
[15, 20)	8557608	8429180	4,49	4,42
[20, 25)	8627665	8613199	4,52	4,52
[25, 30)	8458790	8644127	4,43	4,53
[30, 35)	7718081	8026535	4,05	4,21
[35, 40)	6767177	7121014	3,55	3,73
[40, 45)	6319971	6688525	3,31	3,51
[45, 50)	5692722	6141925	2,98	3,22
[50, 55)	4825839	5308482	2,53	2,78
[55, 60)	3912544	4371889	2,05	2,29
[60, 65)	3033130	3470156	1,59	1,82
[65, 70)	2224862	2627927	1,17	1,38
[70, 75)	1675553	2069185	0,88	1,08
[75, 80)	1089024	1481662	0,57	0,78
[80, 85)	666031	995492	0,35	0,52
[85, 90)	311493	505310	0,16	0,26
[90, 95)	113116	206843	0,06	0,11
[95, 100)	2994	66437	0,02	0,03

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/200>

Para os dados de óbitos femininos, utilizamos os dados de 2010 a 2015 disponíveis no link <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654>. Na Tabela (4) dispomos os dados acumulados. A saber:

Tabela 4 – Óbitos femininos de 2010 a 2015 no Brasil

Intervalo de Idade	Mulheres
[0, 5)	99454
[5, 10)	9367
[10, 15)	11638
[15, 20)	23092
[20, 25)	27968
[25, 30)	35160
[30, 35)	46609
[35, 40)	58213
[40, 45)	77972
[45, 50)	109003
[50, 55)	142533
[55, 60)	178220
[60, 65)	212649
[65, 70)	248664
[70, 75)	297099
[75, 80)	352766
[80, 85)	391279
[85, 90)	351547
[90, 95)	221903
[95, 100)	100220

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654>

Outro dado necessário para o cálculo, é a quantidade de filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015. Para isso, o site do IBGE fornece os dados totais de filhas tidas nascidas vivas por ano, disponíveis em <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612>. A Tabela (5) apresenta os dados acumulados:

Tabela 5 – Filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015 no Brasil

Intervalo de Idade das mulheres	Filhas nascidas vivas
[0, 5)	0
[5, 10)	0
[10, 15)	66839
[15, 20)	1451483
[20, 25)	2148376
[25, 30)	2044161
[30, 35)	1584598
[35, 40)	770718
[40, 45)	186342
[45, 50)	12106
[50, 55)	1036
[55, 60)	0
[60, 65)	0
[65, 70)	0
[70, 75)	0
[75, 80)	0
[80, 85)	0
[85, 90)	0
[90, 95)	0
[95, 100)	0

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612>

Para que o modelo de Leslie seja implementado, precisamos dos parâmetros b_i e s_i , com $i = 1, 2, \dots, 20$, apresentadas na Seção (2.2). Para tal, utilizamos as informações das Tabelas 3, 4 e 5. Para o cálculo do parâmetro b_i , com $i = 1, 2, \dots, 20$, consideramos o número médio de filhas, nascidas por mulheres durante os anos de 2010 a 2015, na i -ésima faixa etária, ou seja

$$b_i = \frac{\text{quantidade de filhas na faixa } i \text{ (Tabela 5)}}{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 3)}}.$$

Resultando em:

- $[0, 5) : b_1 = 0,$
- $[5, 10) : b_2 = 0,$
- $[10, 15) : b_3 = 0.007919,$
- $[15, 20) : b_4 = 0.172197,$
- $[20, 25) : b_5 = 0.249428,$

- $[25, 30) : b_6 = 0.0236480,$
- $[30, 35) : b_7 = 0.197420,$
- $[35, 40) : b_8 = 0.108231,$
- $[40, 45) : b_9 = 0.027860,$
- $[45, 50) : b_{10} = 0.001971,$
- $[50, 55) : b_{11} = 0.000195,$
- $[55, 60), [60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95)$ e $[95, 100) :$
 $b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{16}, b_{17}, b_{18}, b_{19}$ e $b_{20} = 0$, respectivamente, pois nessas faixas não nascem filhos.

O cálculo do parâmetro s_i , com $i = 1, 2, \dots, 20$, consiste em encontrarmos a fração de mulheres sobreviventes de uma faixa etária que passaram para a próxima faixa. Por exemplo, após 5 anos quantas mulheres passaram da faixa $[0, 5)$ para $[5, 10)$. Para isso, subtraímos a quantidade total de mulheres e os óbitos femininos, ocorrido de 2010 a 2015, em seguida, dividimos pelo total de mulheres na faixa, ou seja

$$s_i = \frac{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 3)} - \text{quantidade de óbitos na faixa } i \text{ (Tabela 4)}}{\text{quantidade de mulheres na faixa } i \text{ (Tabela 3)}}.$$

Resultando em:

- $[0, 5) : s_1 = 0.985334,$
- $[5, 10) : s_2 = 0.998725,$
- $[10, 15) : s_3 = 0.998621,$
- $[15, 20) : s_4 = 0.997260,$
- $[20, 25) : s_5 = 0.996753,$
- $[25, 30) : s_6 = 0.995932,$
- $[30, 35) : s_7 = 0.994193,$
- $[35, 40) : s_8 = 0.991825,$
- $[40, 45) : s_9 = 0.988342,$
- $[45, 50) : s_{10} = 0.982253,$
- $[50, 55) : s_{11} = 0.973150,$

- $[55, 60) : s_{12} = 0.959235,$
- $[60, 65) : s_{13} = 0.938721,$
- $[65, 70) : s_{14} = 0.905376,$
- $[70, 75) : s_{15} = 0.856417,$
- $[75, 80) : s_{16} = 0.761912,$
- $[80, 85) : s_{17} = 0.606949,$
- $[85, 90) : s_{18} = 0.304294,$
- $[90, 95) : s_{19} = -0.072809,$
- $[95, 100) : s_{20} = 0,$ pois consideramos que a partir dessa faixa não há sobreviventes.

Ao observarmos os parâmetros $b'_i s$, verifica-se que o Teorema (6) é satisfeito, pois existem mais de duas faixas etárias sucessivas férteis. Como foi explicitado em (2.6), o polinômio característico $P(\lambda)$ é dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^{20} - 0.007793\lambda^{17} - 0.169222\lambda^{16} - 0.244447\lambda^{15} - 0.231004\lambda^{14} - 0.192064\lambda^{13} \\ - 0.104684\lambda^{12} - 0.026726\lambda^{11} - 0.001869\lambda^{10} - 0.000182\lambda^9.$$

Com o auxílio do [MAT10], encontramos o autovalor positivo da matriz L , sendo $\lambda_1 \approx 0.996225$. Um autovetor associado ao autovalor λ_1 é encontrado utilizando a forma (2.12), a saber:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.989067 \\ 0.991549 \\ 0.993934 \\ 0.994967 \\ 0.995494 \\ 0.995202 \\ 0.993172 \\ 0.988786 \\ 0.980962 \\ 0.967204 \\ 0.944801 \\ 0.909720 \\ 0.857209 \\ 0.779038 \\ 0.669710 \\ 0.512193 \\ 0.312053 \\ 0.095316 \\ 0.006966 \end{bmatrix}.$$

O autovetor proporção encontrado:

$$v_* = \begin{bmatrix} 0.062589 \\ 0.061904 \\ 0.062060 \\ 0.062209 \\ 0.062274 \\ 0.062307 \\ 0.062288 \\ 0.062161 \\ 0.061887 \\ 0.061397 \\ 0.060536 \\ 0.059134 \\ 0.056938 \\ 0.053652 \\ 0.048759 \\ 0.041916 \\ 0.032057 \\ 0.019531 \\ 0.005966 \\ 0.000436 \end{bmatrix}.$$

Para o Espírito Santo, prosseguimos de forma análoga aos dados do Brasil. Para a Tabela (6), coletamos dados sobre a população residente em 2010 dividida entre homens, mulheres e seus respectivos percentuais:

Tabela 6 – População residente no Espírito Santo em 2010

Intervalo de Idade	homens	Mulheres	% Homens	% Mulheres
[0, 5)	123689	120506	3,52	3,43
[5, 10)	134988	129919	3,84	3,7
[10, 15)	153541	148835	4,37	4,23
[15, 20)	151377	150145	4,31	4,27
[20, 25)	162771	160595	4,63	4,57
[25, 30)	160898	161730	4,58	4,60
[30, 35)	147670	151806	4,20	4,32
[35, 40)	126600	132299	3,60	3,76
[40, 45)	120075	125114	3,42	3,56
[45, 50)	110798	117041	3,15	3,33
[50, 55)	95917	102951	2,73	2,93
[55, 60)	77998	82830	2,22	2,36
[60, 65)	54175	60515	1,54	1,72
[65, 70)	39390	45379	1,12	1,29
[70, 75)	29695	36334	0,84	1,03
[75, 80)	20761	26168	0,59	0,74
[80, 85)	12569	17670	0,36	0,50
[85, 90)	5640	8801	0,16	0,25
[90, 95)	1977	3575	0,06	0,10
[95, 100)	497	1146	0,01	0,03

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/200>

Foram coletados dados de 2010 a 2015 sobre a quantidade de óbitos femininos por faixa etária. Os dados estão disponíveis em <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654>, foram agrupados e dispostos na Tabela (7):

Tabela 7 – Óbitos femininos de 2010 a 2015 no Espírito Santo

Intervalo de Idade	Mulheres
[0, 5)	1821
[5, 10)	193
[10, 15)	250
[15, 20)	509
[20, 25)	628
[25, 30)	720
[30, 35)	960
[35, 40)	1182
[40, 45)	1547
[45, 50)	2010
[50, 55)	2691
[55, 60)	3248
[60, 65)	3474
[65, 70)	3959
[70, 75)	4872
[75, 80)	5816
[80, 85)	6738
[85, 90)	5956
[90, 95)	3768
[95, 100)	1702

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654>

É necessário a quantidade de filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015 no Espírito Santo, para os cálculos utilizados na matriz de Leslie. Assim, a Tabela (8), fornece os dados com as informações obtidas e agrupadas do site <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612>:

Tabela 8 – Filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015 no Espírito Santo

Intervalo de idade	Filhas nascidas vivas
[0, 5)	0
[5, 10)	0
[10, 15)	1182
[15, 20)	25835
[20, 25)	39476
[25, 30)	39970
[30, 35)	32019
[35, 40)	14910
[40, 45)	3157
[45, 50)	184
[50, 55)	15
[55, 60)	0
[60, 65)	0
[65, 70)	0
[70, 75)	0
[75, 80)	0
[80, 85)	0
[85, 90)	0
[90, 95)	0
[95, 100)	0

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612>

Calculamos os parâmetros b'_i s e s'_i s, apresentadas na Seção (2.2), com as informações das Tabelas (6), (7) e (8). Os parâmetros b'_i s resultaram em:

- $[0, 5) : b_1 = 0,$
- $[5, 10) : b_2 = 0,$
- $[10, 15) : b_3 = 0.007942,$
- $[15, 20) : b_4 = 0.172067,$
- $[20, 25) : b_5 = 0.245811,$
- $[25, 30) : b_6 = 0.247140,$
- $[30, 35) : b_7 = 0.210921,$
- $[35, 40) : b_8 = 0.112699,$
- $[40, 45) : b_9 = 0.025233,$
- $[45, 50) : b_{10} = 0.001572,$

- $[50, 55) : b_{11} = 0.000146$,
- $[55, 60), [60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95)$ e $[95, 100) :$
 $b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{16}, b_{17}, b_{18}, b_{19}$ e $b_{20} = 0$, respectivamente, pois nessas faixas não nascem filhos.

O cálculo do parâmetro s_i , com $i = 1, 2, \dots, 20$, estão apresentados abaixo:

- $[0, 5) : s_1 = 0.984889$,
- $[5, 10) : s_2 = 0.998514$,
- $[10, 15) : s_3 = 0.998320$,
- $[15, 20) : s_4 = 0.996610$,
- $[20, 25) : s_5 = 0.996090$,
- $[25, 30) : s_6 = 0.995548$,
- $[30, 35) : s_7 = 0.993676$,
- $[35, 40) : s_8 = 0.991066$,
- $[40, 45) : s_9 = 0.987635$,
- $[45, 50) : s_{10} = 0.982827$,
- $[50, 55) : s_{11} = 0.973861$,
- $[55, 60) : s_{12} = 0.960787$,
- $[60, 65) : s_{13} = 0.942593$,
- $[65, 70) : s_{14} = 0.912757$,
- $[70, 75) : s_{15} = 0.865911$,
- $[75, 80) : s_{16} = 0.777744$,
- $[80, 85) : s_{17} = 0.618676$,
- $[85, 90) : s_{18} = 0.323259$,
- $[90, 95) : s_{19} = -0.053986$,
- $[95, 100) : s_{20} = 0$, consideramos que a partir dessa faixa não há sobreviventes.

O Teorema (6) é satisfeito, pois existem mais de duas faixas etárias sucessivas férteis. Como foi explicitado em (2.6), o polinômio característico $P(\lambda)$ é dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^{20} - 0.007810\lambda^{17} - 0.168931\lambda^{16} - 0.240513\lambda^{15} - 0.240868\lambda^{14} - 0.204652\lambda^{13} \\ - 0.108658\lambda^{12} - 0.024111\lambda^{11} - 0.001484\lambda^{10} - 0.000135\lambda^9.$$

Com o auxílio do [MAT10], encontramos o autovalor positivo da matriz L , sendo $\lambda_1 \approx 0,999518$.

O autovetor associado ao autovalor λ_1 é encontrado utilizando a forma (2.12), a saber:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.985364 \\ 0.984374 \\ 0.983195 \\ 0.980334 \\ 0.976972 \\ 0.973091 \\ 0.967404 \\ 0.959223 \\ 0.947819 \\ 0.931991 \\ 0.908068 \\ 0.872881 \\ 0.823168 \\ 0.751715 \\ 0.651232 \\ 0.506736 \\ 0.313656 \\ 0.101441 \\ 0.005479 \end{bmatrix}.$$

O autovetor proporção:

$$v_* = \begin{bmatrix} 0.064004 \\ 0.063067 \\ 0.063003 \\ 0.062928 \\ 0.062745 \\ 0.062530 \\ 0.062281 \\ 0.061917 \\ 0.061394 \\ 0.060664 \\ 0.059651 \\ 0.058120 \\ 0.055867 \\ 0.052686 \\ 0.048112 \\ 0.041681 \\ 0.032433 \\ 0.020075 \\ 0.006493 \\ 0.000351 \end{bmatrix}.$$

Para o Acre, os dados sobre a população residente em 2010, dividida entre homens, mulheres e seus respectivos percentuais, foram dispostos na Tabela (9):

Tabela 9 – População residente no Acre em 2010

Intervalo de Idade	Homens	Mulheres	% Homens	% Mulheres
[0, 5)	39534	37958	5.39	5.18
[5, 10)	42008	40150	5.73	5.47
[10, 15)	44447	43260	6.06	5.90
[15, 20)	38440	38543	5.24	5.26
[20, 25)	35188	35147	4.80	4.79
[25, 30)	33369	34049	4.55	4.64
[30, 35)	29128	29977	3.97	4.09
[35, 40)	23836	23941	3.25	3.26
[40, 45)	19940	19988	2.72	2.73
[45, 50)	15765	15716	2.15	2.14
[50, 55)	12752	13208	1.74	1.80
[55, 60)	10349	10067	1.41	1.37
[60, 65)	7732	7342	1.05	1.00
[65, 70)	5733	6035	0.78	0.82
[70, 75)	4107	3872	0.56	0.53
[75, 80)	2846	2700	0.39	0.37
[80, 85)	1796	1679	0.24	0.23
[85, 90)	858	826	0.12	0.11
[90, 95)	359	460	0.05	0.06
[95, 100)	119	219	0.02	0.03

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/200>

Utilizamos os dados de 2010 a 2015, disponíveis em <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654>, para a coleta das informações referentes aos óbitos femininos. Dispomos os dados acumulados na Tabela (10):

Tabela 10 – Óbitos femininos de 2010 a 2015 no Acre

Intervalo de Idade	Mulheres
[0, 5)	819
[5, 10)	78
[10, 15)	90
[15, 20)	138
[20, 25)	134
[25, 30)	168
[30, 35)	196
[35, 40)	214
[40, 45)	245
[45, 50)	299
[50, 55)	389
[55, 60)	465
[60, 65)	475
[65, 70)	587
[70, 75)	677
[75, 80)	677
[80, 85)	687
[85, 90)	576
[90, 95)	346
[95, 100)	188

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2654>

Para a quantidade de filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015, coletamos os dados na página <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612>, site do IBGE. Tabela (11) com os dados acumulados:

Tabela 11 – Filhas tidas nascidas vivas de 2010 a 2015 no Acre

Intervalo de Idade das mulheres	Filhas nascidas vivas
[0, 5)	0
[5, 10)	0
[10, 15)	594
[15, 20)	10362
[20, 25)	11750
[25, 30)	9564
[30, 35)	6665
[35, 40)	3129
[40, 45)	832
[45, 50)	71
[50, 55)	14
[55, 60)	0
[60, 65)	0
[65, 70)	0
[70, 75)	0
[75, 80)	0
[80, 85)	0
[85, 90)	0
[90, 95)	0
[95, 100)	0

Fonte: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/2612>

Para a implementação do modelo de Leslie é preciso calcularmos os parâmetros b_i e s_i , apresentadas na Seção (2.2). Dessa forma, utilizamos as informações das Tabelas 9, 10 e 11. Os parâmetros b'_i com $i = 1, 2, \dots, 20$ estão apresentados abaixo:

- $[0, 5) : b_1 = 0,$
- $[5, 10) : b_2 = 0,$
- $[10, 15) : b_3 = 0.013731,$
- $[15, 20) : b_4 = 0.268843,$
- $[20, 25) : b_5 = 0.334310,$
- $[25, 30) : b_6 = 0.280889,$
- $[30, 35) : b_7 = 0.222337,$
- $[35, 40) : b_8 = 0.130696,$
- $[40, 45) : b_9 = 0.041625,$

- $[45, 50) : b_{10} = 0.004518,$
- $[50, 55) : b_{11} = 0.001060,$
- $[55, 60), [60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95)$ e $[95, 100) :$
 $b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{16}, b_{17}, b_{18}, b_{19}$ e $b_{20} = 0$, respectivamente, pois nessas faixas não nascem filhos.

Os parâmetros s'_i s, com $i = 1, 2, \dots, 20$, resultam em:

- $[0, 5) : s_1 = 0.978424,$
- $[5, 10) : s_2 = 0.998057,$
- $[10, 15) : s_3 = 0.997920,$
- $[15, 20) : s_4 = 0.996420,$
- $[20, 25) : s_5 = 0.996187,$
- $[25, 30) : s_6 = 0.995066,$
- $[30, 35) : s_7 = 0.993462,$
- $[35, 40) : s_8 = 0.991061,$
- $[40, 45) : s_9 = 0.987743,$
- $[45, 50) : s_{10} = 0.980975,$
- $[50, 55) : s_{11} = 0.970548,$
- $[55, 60) : s_{12} = 0.953809,$
- $[60, 65) : s_{13} = 0.935304,$
- $[65, 70) : s_{14} = 0.902734,$
- $[70, 75) : s_{15} = 0.825155,$
- $[75, 80) : s_{16} = 0.749259,$
- $[80, 85) : s_{17} = 0.590828,$
- $[85, 90) : s_{18} = 0.302663,$
- $[90, 95) : s_{19} = 0.247826,$
- $[95, 100) : s_{20} = 0$, consideramos que a partir dessa faixa não há sobreviventes.

É observado que o Teorema (6) é satisfeito, pois existem mais de duas faixas etárias sucessivas férteis. Assim, o polinômio característico $P(\lambda)$, explicitado em (2.6), é dado por:

$$P(\lambda) = \lambda^{20} - 0.013409\lambda^{17} - 0.261985\lambda^{16} - 0.324616\lambda^{15} - 0.271704\lambda^{14} - 0.214006\lambda^{13} \\ - 0.124976\lambda^{12} - 0.039447\lambda^{11} - 0.004229\lambda^{10} - 0.000973\lambda^9.$$

Com o auxílio do [MAT10], encontramos o autovalor positivo da matriz L , sendo $\lambda_1 \approx 1.04047$.

O autovetor associado ao autovalor λ_1 é encontrado utilizando a forma (2.12). Logo:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.940367 \\ 0.902035 \\ 0.865146 \\ 0.828518 \\ 0.793256 \\ 0.758640 \\ 0.724365 \\ 0.688867 \\ 0.655002 \\ 0.617548 \\ 0.576047 \\ 0.528069 \\ 0.474694 \\ 0.411854 \\ 0.326625 \\ 0.235208 \\ 0.133562 \\ 0.038852 \\ 0.009254 \end{bmatrix}.$$

O autovetor proporção é da forma:

$$v_* = \begin{bmatrix} 0.086888 \\ 0.081707 \\ 0.078376 \\ 0.075171 \\ 0.071989 \\ 0.068925 \\ 0.065917 \\ 0.062939 \\ 0.059950 \\ 0.056912 \\ 0.053658 \\ 0.050052 \\ 0.045883 \\ 0.041245 \\ 0.035785 \\ 0.028380 \\ 0.020437 \\ 0.011605 \\ 0.003376 \\ 0.000804 \end{bmatrix}.$$

A próxima seção traz uma análise dos resultados obtidos para as populações consideradas e comparações com as projeções do IBGE e com outro estudo populacional usando matriz de Leslie.

3.2 Comparação dos dados

A dissertação [Ono17], utiliza a matriz de Leslie aplicada à população feminina do Brasil, com o interessante objetivo de verificar a sustentabilidade do sistema previdenciário brasileira a longo prazo. Sua pesquisa analisou dados do IBGE, referentes a população de mulheres do Brasil, dividida em faixas etárias de 10 anos. Para o acumulado de nascimento e óbitos de 2010 a 2020, necessário para os cálculos dos parâmetros de fertilidade e sobrevivência, a autora multiplicou por dez dados de um ano, considerando as quantidades fixas no decorrer dos anos para os cálculos. O autovalor positivo encontrado foi de $\lambda \approx 1.00848$, indicando crescimento de 0,848% a cada dez anos.

A pesquisa aqui apresentada se difere dos resultados da dissertação [Ono17]. No recorte adotado para a população feminina do Brasil, como também para os estados do Espírito Santo e Acre, consideramos faixas de cinco anos e utilizamos os acumulados de nascimento e óbitos de 2010 a 2015, todos disponibilizados pelo IBGE. Para o Brasil,

encontramos o autovalor $\lambda \approx 0.996225$. Para esse cenário, onde contemplamos apenas as taxas de sobrevivência e natalidade, a população de mulheres brasileiras tende a um decrescimento bem pequeno da ordem de 0,3775% a cada 5 anos.

Em 2018 o site do IBGE disponibilizou a planilha de projeção para a população até 2060, disponível no site <https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?t=resultados>. Reunimos os dados de 2030 a 2060, de 5 em 5 anos, na Tabela (12).

Tabela 12 – Projeção feminina IBGE - Brasil

Idade	2030	2035	2040	2045	2050	2055	2060
[0, 5)	6654037	6330138	6059465	5847195	5671785	5483054	5258613
[5, 10)	6985900	6646363	6323461	6053551	5841839	5666895	5478538
[10, 15)	7177282	6980597	6641753	6319417	6049944	5838532	5663861
[15, 20)	7142889	7168912	6973050	6635057	6313409	6044510	5833479
[20, 25)	7217578	7130480	7157419	6962566	6625610	6304827	6036629
[25, 30)	7714059	7201834	7116357	7144248	6950430	6614606	6294775
[30, 35)	8472728	7692298	7183027	7099349	7128176	6935527	6600995
[35, 40)	8438085	8439591	7664189	7158362	7076626	7106437	6915100
[40, 45)	8578785	8388994	8393336	7624247	7122693	7043194	7073965
[45, 50)	8536458	8500200	8316353	8323746	7563258	7067565	6990866
[50, 55)	7826144	8416994	8386869	8210111	8220740	7472079	6984373
[55, 60)	6811458	7664408	8250753	8227267	8058871	8072809	7340157
[60, 65)	6215013	6602344	7439034	8016235	7999680	7841324	7858543
[65, 70)	5464296	5923895	6305561	7115536	7676222	7666987	7521177
[70, 75)	4405172	5064985	5505888	5874274	6640747	7173107	7171363
[75, 80)	3245094	3902531	4507406	4915432	5259045	5958073	6445168
[80, 85)	2140390	2669564	3235703	3758266	4114525	4417881	5018661
[85, 90)	1194404	1563596	1976064	2419249	2830025	3113604	3358671
90+	919928	1161569	1521483	1971456	2489591	3022439	3482771
Total	115139700	117449293	118957171	119675564	119633216	118843450	117327705
Taxa	—	1.020	1.0128	1.006	0.999	0.993	0.987

Os cálculos descritos a seguir, para as tabelas (13), (15) e (17), para as projeções populacionais femininas até 2060, foram feitos de forma computacional direta tomando as potências de ordem k da matriz de Leslie estabelecida a cada 5 anos e multiplicando pelo vetor da população feminina distribuída por faixa etária em 2010.

Para a análise do Brasil, utilizamos a Tabela (12) com as projeções do IBGE e a Tabela (13) das projeções encontradas utilizando as potências da matriz de Leslie.

Tabela 13 – Projeção da população feminina usando modelo de Leslie - Brasil (dados de 2010 a 2015)

Idade	2030	2035	2040	2045	2050	2055	2060
[0, 5)	7835835	7641765	7651108	7750638	7857351	7849533	7731633
[5, 10)	8121075	7720911	7529687	7538893	7636964	7742111	7734408
[10, 15)	8276698	8110717	7711063	7520083	7529278	7627223	7732237
[15, 20)	8122827	8265286	8099533	7700430	7509714	7518895	7616706
[20, 25)	6645599	8100574	8242643	8077344	7679335	7489141	7498297
[25, 30)	7280893	6624020	8074271	8215878	8051116	7654399	7464823
[30, 35)	8343942	7251278	6597077	041429	8182460	8018368	76232658
[35, 40)	8296255	8295489	7209171	6558768	7994733	8134945	7971807
[40, 45)	8431169	8228435	8227675	7150237	6505151	7929378	8068444
[45, 50)	8390047	8332882	8132511	8131761	7066883	6429317	7836940
[50, 55)	7683598	8241145	8184995	7988180	7987443	6941464	6315214
[55, 60)	6672481	7477293	8019870	7965227	7773697	7772980	6755085
[60, 65)	6061300	6400478	7172481	7692940	7640525	7456803	7456115
[65, 70)	5286508	5689867	6008261	6732956	7221522	7172318	6999855
[70, 75)	4211537	4786279	5151471	5439737	6095859	6538195	6493648
[75, 80)	3052426	3606834	4099053	4411810	4658685	5220600	5599424
[80, 85)	1924442	2325680	2748090	3123117	3361411	3549508	3977637
[85, 90)	942291	1168038	1411569	1667951	1895573	2040205	2154371
90+	249365	286734	355427	429533	507548	576812	620823
Total	115828287	118553704	120625956	122136913	123155248	123662197	123650730
Taxa	—	1.023	1.017	1.012	1.008	1.004	0.999

A convergência do modelo é observada nas taxas de crescimento ou decrescimento a cada 5 anos. Na Tabela (13), última linha, observa-se que como passar do tempo as taxas se aproximam do autovalor encontrado e nota-se, pelo modelo, que a partir de 2055 a população começa a diminuir, demorando um pouco mais para que a taxa de decrescimento se estabilize conforme o autovalor $\lambda \approx 0.996225$.

Para o Espírito Santo, encontramos o autovalor $\lambda \approx 0.999518$. Assim, a população de mulheres tende um pequeno decrescimento da ordem de 0,0482% a cada 5 anos. A planilha de projeção do IBGE para a população até 2060 está disponível no site <https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?#t=resultados>. Reunimos os dados de 2030 a 2060, de 5 em 5 anos, na Tabela (14) para o Espírito Santo.

Tabela 14 – Projeção feminina IBGE - Espírito Santo

Idade	2030	2035	2040	2045	2050	2055	2060
[0, 5)	133394	129288	126467	124546	122925	120579	117202
[5, 10)	139941	134764	130667	127856	125937	124321	121977
[10, 15)	143543	141338	136172	132079	129276	127358	125743
[15, 20)	142282	145316	143120	137963	133878	131079	129162
[20, 25)	138182	144439	147482	145298	140155	136079	133286
[25, 30)	148295	140567	146830	149882	147706	142576	138508
[30, 35)	160674	150371	142677	148942	151999	149831	144715
[35, 40)	161216	161691	151448	143797	150060	153117	150961
[40, 45)	169733	161552	162065	151887	144282	150535	153586
[45, 50)	167755	169461	161389	161932	151842	144302	150527
[50, 55)	154366	166639	168397	160464	161034	151063	143617
[55, 60)	131842	152451	164616	166408	158638	159228	149421
[60, 65)	121447	129040	149267	161222	163017	155463	156061
[65, 70)	109103	117046	124501	144095	155681	157449	150200
[70, 75)	90347	102671	110310	117476	136040	147017	148709
[75, 80)	66425	81924	93284	100368	107021	124001	134025
[80, 85)	41498	56319	69711	79571	85766	91609	106235
[85, 90)	23874	31530	43115	53609	61373	66291	70966
90+	21176	26747	34831	46769	60099	72441	82423
Total	2265093	2343154	2406349	2454164	2486729	2504339	2507324

Para a análise dos dados, utilizamos a Tabela (14), com as projeções do IBGE e a Tabela (15) das projeções encontradas utilizando as potências da matriz de Leslie.

Tabela 15 – Projeção da população feminina usando modelo de Leslie - Espírito Santo (dados de 2010 a 2015)

Idade	2030	2035	2040	2045	2050	2055	2060
[0, 5)	143146	140280	141896	145312	148363	148229	145525
[5, 10)	149778	140983	138160	139752	143116	146121	145989
[10, 15)	154785	149556	140773	137955	139544	142904	145904
[15, 20)	153891	154525	149305	140537	137724	139310	142664
[20, 25)	117909	153369	154001	148798	140060	137257	138838
[25, 30)	128564	117447	152770	153399	148217	139513	136720
[30, 35)	146846	127992	116925	152090	152716	147557	138891
[35, 40)	147449	145917	127183	116185	151128	151750	146624
[40, 45)	156834	146132	144613	126046	115147	149778	150394
[45, 50)	156602	154895	144325	142825	124488	113723	147926
[50, 55)	145114	153912	152235	141846	140372	122350	111770
[55, 60)	123945	141321	149889	148255	138138	136703	119152
[60, 65)	113633	119085	135779	144012	142442	132722	131343
[65, 70)	101453	107109	112249	127985	135744	134265	125102
[70, 75)	82877	92602	97765	102456	116819	123902	122551
[75, 80)	59288	71764	80185	84656	88717	101155	107288
[80, 85)	35063	46111	55814	62363	65840	68999	78673
[85, 90)	17258	21693	28528	34531	38583	40734	42688
90+	4894	5579	7012	9222	11162	12472	13168
Total	2139327	2190271	2229406	2258225	2278322	2289442	2291209

Para o Acre o cenário é diferente, pois encontramos o autovalor $\lambda \approx 1.04047$, isso indica que a população de mulheres prevista no modelo de Leslie tende a longo prazo um crescimento da ordem de 4,047% a cada 5 anos. A planilha de projeção do IBGE para a população até 2060 está disponível no site <https://www.ibge.gov.br/estatisticas-novoportal/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?#t=resultados>. Para o Acre, as projeções do IBGE estão na Tabela (16) de 2030 a 2060, de 5 em 5 anos.

Tabela 16 – Projeção feminina IBGE - Acre

Idade	2030	2035	2040	2045	2050	2055	2060
[0, 5)	39184	37868	36426	35017	33798	32747	31679
[5, 10)	40082	39008	37697	36260	34855	33635	32588
[10, 15)	40258	40048	38979	37669	36236	34833	33614
[15, 20)	41279	40112	39904	38840	37535	36106	34706
[20, 25)	43477	41038	39881	39679	38619	37318	35894
[25, 30)	45012	43267	40843	39694	39497	38443	37145
[30, 35)	42785	44793	43066	40655	39515	39320	38272
[35, 40)	37900	42477	44482	42770	40374	39244	39052
[40, 45)	34466	37609	42171	44171	42473	40094	38972
[45, 50)	33231	34146	37273	41803	43790	42112	39760
[50, 55)	28888	32699	33621	36718	41190	43153	41502
[55, 60)	22589	28101	31840	32762	35802	40180	42101
[60, 65)	18094	21590	26914	30533	31447	34391	38615
[65, 70)	13401	17066	20409	25477	28927	29814	32625
[70, 75)	10309	12384	15803	18929	23655	26869	27706
[75, 80)	7270	9105	10974	14036	16837	21061	23927
[80, 85)	4516	5932	7465	9029	11578	13912	17416
[85, 90)	2613	3214	4260	5392	6551	8422	10143
90+	1623	2256	2932	3887	5027	6282	8006
Total	506977	532713	554940	573321	587706	597936	603723

Na Tabela (17) encontra-se as projeções calculadas utilizando as potências da matriz de Leslie.

Tabela 17 – Projeção da população feminina usando modelo de Leslie - Acre (dados de 2010 a 2015)

Idade	2030	2035	2040	2045	2050	2055	2060
[0, 5)	50411	51397	53405	55995	58741	61318	63613
[5, 10)	48811	49323	50288	52253	54787	57474	59995
[10, 15)	46237	48716	49227	50190	52151	54681	57362
[15, 20)	41885	46141	48614	49125	50086	52043	54567
[20, 25)	36857	41735	45976	48440	48949	49907	51856
[25, 30)	39694	36717	41576	45800	48256	48762	49716
[30, 35)	42640	39498	36536	41370	45574	48018	48522
[35, 40)	37821	42361	39239	36297	41100	45276	47704
[40, 45)	34303	37483	41983	38889	35972	40733	44872
[45, 50)	32950	33883	37023	41468	38412	35531	40233
[50, 55)	28598	32323	33238	36319	40679	37681	34855
[55, 60)	22313	27756	31371	32259	35249	39481	36571
[60, 65)	17929	21283	26474	29922	30769	33621	37657
[65, 70)	13348	16769	19906	24761	27986	28778	31446
[70, 75)	10324	12050	15138	17969	22353	25264	25979
[75, 80)	6690	8519	9943	12491	14828	18445	20847
[80, 85)	3833	5012	6383	7450	9359	11110	13820
[85, 90)	1990	2264	2961	3771	4402	5530	6564
90+	428	602	685	896	1141	1332	1674
Total	517060	553830	589966	625667	660795	694984	727853

Como percebemos, há uma diferença entre a estimativa utilizando o modelo matricial de Leslie e a projeção do IBGE. Não temos informação sobre qual modelo é usado pelo IBGE em suas projeções, observamos que ao contrário do que ocorre com animais de criação (como no exemplo do Capítulo 2), onde se tem um controle muito grande sobre as taxas, com populações humanas e mesmo com animais silvestres são muitos os fatores que afetam as taxas de fecundidade e mortalidade ao longo do tempo. Assim, diferenças nos resultados aqui obtidos com os dados do IBGE podem ser, também, devido a fatores tais como melhoria de atendimento médico à população em certo período, alteração da taxa de natalidade em algum período, migração de populações, diminuição de criminalidade, entre outros. Dados estes que, muito possivelmente, o IBGE têm acesso e que sejam considerados, ano a ano. Já para o modelo aqui utilizado, as taxas foram consideradas fixas, a partir de 2015.

3.3 Correlação dos dados

Para o Brasil e Espírito Santo, encontramos os seguintes vetores proporções, em (3.1):

$$v_B = \begin{bmatrix} 0.062589 \\ 0.061904 \\ 0.062060 \\ 0.062209 \\ 0.062274 \\ 0.062307 \\ 0.062288 \\ 0.062161 \\ 0.061887 \\ 0.061397 \\ 0.060536 \\ 0.059134 \\ 0.056938 \\ 0.053652 \\ 0.048759 \\ 0.041916 \\ 0.032057 \\ 0.019531 \\ 0.005966 \\ 0.000436 \end{bmatrix} \quad \text{e } v_{ES} = \begin{bmatrix} 0.064004 \\ 0.063067 \\ 0.063003 \\ 0.062928 \\ 0.062745 \\ 0.062530 \\ 0.062281 \\ 0.061917 \\ 0.061394 \\ 0.060664 \\ 0.059651 \\ 0.058120 \\ 0.055867 \\ 0.052686 \\ 0.048112 \\ 0.041681 \\ 0.032433 \\ 0.020075 \\ 0.006493 \\ 0.000351 \end{bmatrix}$$

Para o cálculo da correlação, não é necessário a ponderação dos dados, pois estamos considerando o Brasil como média. Assim, a correlação entre os vetores v_B e v_{ES} é muito alta, dada por:

$$r_1 = \frac{\langle v_B, v_{ES} \rangle}{||v_B|| ||v_{ES}||} \approx 0.999904622.$$

Para o Brasil e o Acre, encontramos os seguintes vetores proporções, em (3.1):

$$v_B = \begin{bmatrix} 0.062589 \\ 0.061904 \\ 0.062060 \\ 0.062209 \\ 0.062274 \\ 0.062307 \\ 0.062288 \\ 0.062161 \\ 0.061887 \\ 0.061397 \\ 0.060536 \\ 0.059134 \\ 0.056938 \\ 0.053652 \\ 0.048759 \\ 0.041916 \\ 0.032057 \\ 0.019531 \\ 0.005966 \\ 0.000436 \end{bmatrix} \quad \text{e } v_A = \begin{bmatrix} 0.086888 \\ 0.081707 \\ 0.078376 \\ 0.075171 \\ 0.071989 \\ 0.068925 \\ 0.065917 \\ 0.062939 \\ 0.059950 \\ 0.056912 \\ 0.053658 \\ 0.050052 \\ 0.045883 \\ 0.041245 \\ 0.035785 \\ 0.028380 \\ 0.020437 \\ 0.011605 \\ 0.003376 \\ 0.000804 \end{bmatrix}$$

Novamente da correlação, não é necessário a ponderação dos dados, pois estamos considerando o Brasil como média. Assim, a correlação entre os vetores v_B e v_A é dada por:

$$r_2 = \frac{\langle v_B, v_A \rangle}{||v_B|| ||v_A||} \approx 0.979796958.$$

Com as correlações encontradas acima, é observado que os dados do Brasil e do Espírito Santo estão mais fortemente ligados, quando comparado aos dados do Brasil e do Acre.

Calculamos a correlação entre as faixas etárias de 2030 da Tabela (12), com as projeções do IBGE, e da Tabela (13), com as projeções do modelo de Leslie, resultando em $r_3 \approx 0.978434508$. Ainda, utilizando as tabelas (12) e (13), calculamos a correlação entre os dados de 2060, resultando em $r_4 \approx 0.733007047$. Com isso vemos que a longo prazo os dados das projeções do IBGE e dos aqui encontrados pelo modelo de Leslie ficam menos relacionados.

3.4 Projeções para o Brasil pelo modelo de Leslie usando dados de 2015 a 2017

Em (3.1) e (3.2) consideramos no modelo de Leslie dados reais do IBGE do Censo Brasileiro de 2010 e de taxas de natalidade e mortandade dos anos de 2010 a 2015. Em virtude da discrepância observada entre as projeções feitas pelo modelo de Leslie com estes dados das projeções do IBGE, achamos interessante analisar o que ocorreria se considerássemos a matriz de Leslie construída a partir de dados da população feminina do Brasil de 2015, projetada do modelo anterior, dados de mortandade e natalidade de 2015 a 2017, já disponíveis no IBGE, devidamente normalizados para um período de 5 anos. Neste modelo de Leslie partindo destes novos dados obtivemos o autovalor $\lambda \approx 0.966604$ e as projeções descritas na Tabela (18).

Tabela 18 – Projeção da população feminina usando modelo de Leslie - Brasil (dados de 2015 a 2017)

Idade	2030	2035	2040	2045	2050	2055	2060
[0, 5)	6525335	6346687	6173747	5970086	5806383	5608429	5380370
[5, 10)	6784640	6461671	6284766	6113513	5911839	5749734	5553711
[10, 15)	6895165	6777861	6455214	6278486	6107404	5905932	5743988
[15, 20)	8167168	6887012	6769846	6447581	6271062	6100182	5898948
[20, 25)	6652761	8149714	6872294	6755379	6433802	6257661	6087146
[25, 30)	7291097	6635137	8128125	6854089	6737483	6416759	6241084
[30, 35)	8361835	7268257	6614353	8102664	6832618	6716378	6396658
[35, 40)	8321007	8325266	7236471	6585426	8067228	6802737	6687005
[40, 45)	8465633	8267027	8271259	7189527	6542705	8014895	6758607
[45, 50)	8436758	8387141	8190377	8194569	7122867	6482042	7940582
[50, 55)	7748174	8322390	8273446	8079350	8083485	7026310	6394173
[55, 60)	6761481	7589921	8152409	8104465	7914332	7918383	6882801
[60, 65)	6190685	6552883	7355764	7900898	7854433	7670167	7674092
[65, 70)	5458029	5899544	6244708	7009831	7529328	7485048	7309448
[70, 75)	4429651	5067398	5477313	5797774	6508137	6990454	6949343
[75, 80)	3295265	3934022	4500412	4864462	5149067	5779948	6208299
[80, 85)	2198477	2697184	3220009	3683600	3981577	4214527	4730905
[85, 90)	1190484	1513268	1856540	2216413	2535515	2740620	2900965
90+	428257	510657	649114	796360	950728	1087606	1175585
Total	113601902	115593040	116726167	116944473	116339995	114967811	112913710
Taxa	—	1.017	1.009	1.001	0.994	0.988	0.982

Observamos que a partir do modelo de Leslie para o Brasil, partindo destes novos dados, teremos um decrescimento populacional já no período de 2045 a 2050 com tendência a uma taxa de decrescimento de 3.34% a cada 5 anos. Existem outra previsões de decrescimento populacional para o Brasil, como no artigo [Mor15] prevê, segundo a

ONU, que a população brasileira vai desacelerar a partir de 2040. Observamos também que a correlação entre as previsões do IBGE e a feita pelo modelo de Leslie a partir dos dados 2015 a 2017, Tabelas (12) e (18), é maior que a calculada anteriormente com modelo de Leslie com dados 2010 a 2015, sendo $r_5 \approx 0.9917$ para 2030 e $r_6 \approx 0.9423$ para 2060. Estes dados indicam grande semelhança entre os percentuais das populações das respectivas faixas etárias nas previsões correspondentes, particularmente para 2030.

4 Considerações Finais

Neste trabalho procuramos ilustrar o uso de um modelo para crescimento populacional, que tem por base e relaciona importantes conceitos de Álgebra Linear. Acreditamos que aplicações como esta e o uso de recursos computacionais são elementos muito importantes na motivação para o ensino de Matemática em diversos cursos superiores. No primeiro capítulo introduzimos os conceitos e resultados de Álgebra Linear que são essenciais para a compreensão e utilização do modelo matricial de Leslie.

Apresentamos, de forma detalhada, o modelo no Capítulo 2, onde enunciamos e incluímos as provas de resultados importantes que garantem sua utilização: a existência e unicidade de um autovalor positivo, cuja multiplicidade é um, condições suficientes para a sua dominância. Com as condições propícias para o autovalor dominante, descrevemos com detalhes como este indica a tendência e taxa de crescimento/ decrescimento da população a longo prazo, exibimos o autovetor correspondente que indica que a proporção de fêmeas em cada faixa etária será constante. Ilustramos com exemplos este processo.

Utilizando dados do IBGE, aplicamos, no Capítulo 3, o Modelo de Leslie no desenvolvimento da população feminina do Brasil e dos Estados do Espírito Santo e Acre. Vale ressaltar que devido a estrutura do modelo, onde utilizamos apenas a população residente, a taxa de sobrevivência, de natalidade e não variações temporais destes dados, há uma diferença dos resultados obtidos via este modelo com as previsões do IBGE, como colocado nas conclusões do Capítulo 3.

Como destacado na introdução o uso de recursos computacionais foi fundamental, pois viabilizou o cálculo das projeções e comparações aqui apresentadas, exemplificando o quão importante é a incorporação destes no ensino de Álgebra Linear para os diferentes cursos.

Uma de nossas perspectivas futuras é a de desenvolver pesquisa conjunta com professores e alunos do curso de técnico em agropecuária do Instituto Federal do Espírito Santo - Campus Montanha, possibilitando maiores interações das áreas comuns e específicas, bem como coletar dados de rebanhos de pecuaristas da região de Montanha - ES, para a aplicação do modelo.

Referências

- [AR01] H. Anton and C. Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, Porto Alegre, 8ª edição, 2001.
- [Bac11] Nicolas Bacaër. The leslie matrix (1945). In *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, pages 117–120. Springer, 2011.
- [BCFW84] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo, and H. G. Wentzler. *Álgebra Linear*. Harper e Row do Brasil, São Paulo, 3ª edição, 1984.
- [Car14] V. C. Cardoso. *Ensino e aprendizagem da Álgebra Linear: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais*. Tese de Doutorado, Universidade estadual de Campinas - Unicamp. 2014.
- [Cau67] Graeme Caughley. Parameters for seasonally breeding populations. *Ecology*, 48(5):834–839, 1967.
- [CDC90] C. A. Callioli, H. H. Domingues, and R. C. F. Costa. *Álgebra linear e aplicações*. Atual Editora, São Paulo, 6ª edição, 1990.
- [Cor17] Enric Cortés. Estimates of maximum population growth rate and steepness for shortfin makos in the north and south atlantic ocean. *Collect. Vol. Sci. Pap. ICCAT*, 74(4):1822–1829, 2017.
- [Fra07] M. V. D. França. *Conceitos fundamentais de Álgebra Linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica*. Dissertação de Mestrado, Pontífica Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP. 2007.
- [HR70] K. Hoffman and R. Kunze. *Álgebra Linear*. Polígono, São Paulo, 1º edição, 1970.
- [Les45] P. H. Leslie. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika*, 33(3):183–212, nov 1945.
- [MAT10] MATLAB. *version 7.10.0 (R2010a)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2010.
- [Mes11] D. Mesquita. Matrizes de Leslie e valores próprios dominantes. *Matemática Universitária*, (n. 50/51), 2011.
- [Mor15] A. Moreira. Crescimento demográfico no Brasil vai desacelerar em 2040, prevê ONU. <https://www.valor.com.br/internacional/4154720/crescimento-demografico-no-brasil-vai-desacelerar-em-2040-preve-onu>, 2015.

-
- [Ono17] M. M. Onofre. *Matriz de Leslie aplicada aos modelos populacionais*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT. 2017.
- [Ste13] J. Stewart. *Cálculo*. Cengage CTP, São Paulo, 7^a edição, 2013.
- [SW08] A. Steinbruch and P. Winterle. *Álgebra Linear*. Pearson Makron Books, 2^a edição, 2008.
- [Wan15] W. Wanicharpichat. Explicit minimum polynomail, eigenvector and inverse formula of doubly leslie matrix. *Journal of Applied Mathematics e Informatics*, 33(3-4):247–260, 2015.