Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado

Curvas Mecânicas - A Conchóide

Antonio Remi Kieling Hoffmann

Orientadora: Prof.ª Dr.ª **Sueli Irene Rodrigues Costa**

Curvas Mecânicas - A Conchóide

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Antonio Remi Kieling Hoffmann** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 13 de Junho de 2008.

Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa
Orientadora

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa

Prof^a. Dr^a. Roberta Godoi Wik Atique

Prof^a. Dr^a. Claudina Izepe Rodrigues

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Crisllene Queiroz Custódio – CRB8a 162/2005

Hoffman, Antonio Remi Kieling
H675c Curvas mecânicas : a conchóide / Antonio Remi Kieling Hoffmann – Campinas, [S.P. : s.n.], 2008.

Orientadora : Sueli Irene Rodrigues Costa
Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Curvas mecânicas. 2. Conchóide. 3. Programa Computacional de Geometria Dinâmica. 4. Singularidades (Matematica). I. Costa, Sueli Irene Rodrigues. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

cqc (imecc)

Título em inglês: Mechanical curves : the conchoid

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Mechanical curves. 2. Conchoid. 3. Dynamical Geometry Software. 4. Singularities (Mathematics).

Área de concentração: Geometria

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa (IMECC-Unicamp)
Profa. Dra. Roberta Godoi Wik Atique (ICMC – USP-São Carlos)
Profa. Dra. Claudina Izepe Rodrigues (IMECC-Unicamp)

Data da defesa: 22/07/2008

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 22 de julho de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof. (a). Dr (a). ROBERTA GODOI WIK ATIQUE

Prof. (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Agradecimentos

Quero dizer *muito obrigado* as pessoas que se envolveram comigo durante todas as etapas deste curso de mestrado que culmina com a elaboração deste trabalho. Quero que todos aceitem minha gratidão, pelo simples fato de que em algum momento de nossas vidas fomos colocados frente a frente ou lado a lado por nos termos envolvidos com este projeto. Sou grato a minha linda e sempre esposa (Paty) aos meus queridos filhos (Gabi, Julia e Heron), quatro elementos indispensáveis a minha vida, pois é de vocês toda a contribuição e inspiração emocional necessária para a conclusão deste trabalho. Não poderia deixar de dizer *valeu* aos colegas de curso, aos professores e colaboradores. Um obrigado especial aos idealizadores deste curso, à minha orientadora professora Sueli Irene Rodrigues Costa, pela dedicação na minha orientação, ao Cefet-MA, e aos meus colegas da UNED - Imperatriz, aos quais reafirmo o meu desejo de me tornar cada vez mais comprometido com as ações que busquem um ensino público de qualidade. Um agradecimento especial a minha mãe (Dona Anna Edil), por me fazer acreditar que a escola não pode resolver todos os problemas, mas que sem ela não resolveremos nenhum.

Agradeço também aos leitores, a quem dedico os resultados deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma das curvas descritas por processos mecânicos: A Conchóide. Apresentamos breve relato sobre o surgimento da Conchóide de Nicomedes como uma forma de se “solucionar” um dos três clássicos problemas da geometria grega - o da trissecção do ângulo e abordamos o uso desta nos primórdios da Geometria analítica e do Cálculo no século XVII. Introduzimos a conchóide geral e analisamos com detalhes propriedades geométricas das conchóides de uma parábola. Discutimos a existência de singularidades - cúspides e pontos múltiplos, relacionando-os à evoluta e às curvas paralelas a uma parábola. Utilizamos o computador e programas livres de geometria dinâmica e cálculo simbólico para visualizar, experimentar e conjecturar os resultados a serem provados.

Abstract

We approach here one of the mechanical curves: The Conchoid. A brief description of the historical background of the Nicomedes'Conchoid, introduced to "solve" the angle trisection, one of the three classical problems of Greek geometry is presented and its use in the early times of the Calculus and Analytic Geometry in the XVII century is also described. We introduce the general conchoid and analyse the conchoids of a parabola. The existence of singularities such as cusps and multiple points is discussed and related to the evolute and parallel curves of a parabola. We have used the computer and free symbolic calculus and geometry software in visualising, experiencing and conjecturing results to be proved.

Sumário

Introdução

A idéia original dessa dissertação surgiu das propostas contidas no artigo [5]. Dentre as curvas planas descritas mecanicamente, focalizamos o estudo na conchóide. Neste estudo e ao longo de todo o trabalho fizemos uso do computador e de programas livres para a vizualização e cálculo, para a experimentação e formulação de conjecturas de forma próxima a que acreditamos que na devida proporção, um professor na universidade possa levar os alunos a desenvolver pequenos projetos de investigação em tópicos de Cálculo e Geometria Analítica.

Iniciamos pelo estudo da conchóide de Nicomedes, curva com histórica razão de existência e que figurou na matemática em diferentes épocas. Ela é frequentemente citada nos livros de história da matemática como uma das primeiras curvas de grau superior que aparece como uma "solução" do clássico problema de construção que é o da trissecção de um ângulo, nos livros de cálculo é citada como exemplo compondo exercícios e gráficos utilizados nas demonstrações e aplicações de conceitos do Cálculo diferencial.

No capítulo 1 introduzimos conceitos fundamentais de curvas planas, incluindo também resultados sobre evolutas e curvas paralelas.

No capítulo 2 estudamos um pouco sobre a história da Conchóide de Nicomedes, conhecemos o funcionamento do mecanismo de traçado e o resultado de sua aplicação na trissecção de um ângulo. A partir do funcionamento do "conchógrafo" e do traço por ele descrito, detalhamos com conceitos de geometria e álgebra a dedução das equações da conchóide e com conceitos do cálculo caracterizamos a conchóide da reta como uma família de curvas planas que diferem entre si, pela variação de parâmetros (reguláveis no compasso).

No capítulo 3 introduzimos o conceito geral de conchóide e o aplicamos sobre diferentes curvas. É interessante notar que quando o conceito de conchóide é aplicado sobre o círculo podemos produzir mecanicamente os limaçons que são curvas planas com recentes e interessantes aplicações em engenharia no projeto e construção de compressores.

Em especial aplicamos o conceito de conchóide sobre uma parábola e estudamos com detalhes a família de curvas assim produzida.

Baseados na análise feita sobre a conchóide da reta e usando os recursos dos programas livres Winplot [9], GeoGebra [13] e Maxima [11] produzimos diversos gráficos observando o comportamento destas curvas mediante a variação de parâmetros.

Podemos então obter caracterizações desta família de curvas. Detalhando principalmente a existência e a natureza de singularidades, a intersecção dos ramos da nova curva com a parábola base, a intersecção dos ramos positivo e negativo e a auto-intersecção do ramo negativo da conchóide da parábola. Descrevemos também a relação da conchóide com as curvas paralelas, a curvatura e a evoluta da parábola base.

A análise das diferentes possibilidades para a natureza geométrica de uma conchóide de parábola é sistematizada nas seções 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 e 3.3.

Visando a uma maior fluência de leitura, optamos por colocar alguns dos resultados obtidos nos capítulos 2 e 3 num formato mais “discursivo”.

Capítulo 1

CURVAS PLANAS

Curvas planas surgem nas mais diversas situações: as órbitas dos planetas com o sol num dos focos como conseqüência das leis da atração gravitacional, a trajetória de um projétil, o contorno de um objeto visto à distância, etc. Estas aparecem também de forma abstrata, como solução de muitos problemas dinâmicos tais como a equação

$$\left(x^2+y^2\right) - 8ax\left(x^2-3y^2\right) + 18a^2\left(x^2+y^2\right) = 27a^4,$$

que representa a deltóide, definida como o lugar geométrico gerado por um ponto P da circunferência de um círculo de raio a que rola no interior de um círculo de raio $3a$ (Fig. 1.1). Descrita na forma paramétrica a deltóide é dada por $(x,y) = \left(a\left(2\ \cos(2\mathrm{t})\right), a\left(2\ \mathrm{sen}(\mathrm{t}) - \mathrm{sen}(2\mathrm{t})\right)\right)$.

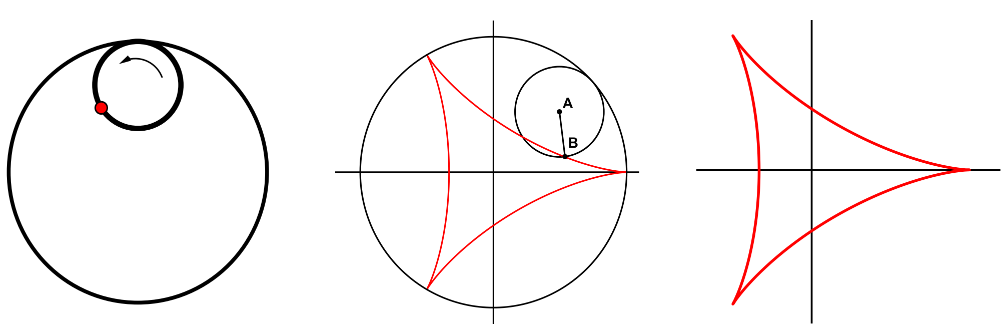


Figura 1.1: Mecânismo, Traçado e Gráfico da Deltóide.

Nos próximos capítulos daremos ênfase às curvas planas que, como esta, são descritas por aparatos mecânicos (mecanismos) e, mais especificamente, estudaremos a conchóide.

Resumimos a seguir conceitos fundamentais relacionados às curvas planas e alguns resultados particulares, com foco no que será desenvolvido nos próximos capítulos e também com o intuito de fixar notações. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [4] [3] [2], [17], [19], [1], [6] e [16].

1.1 Conceitos fundamentais

Seguiremos aqui a idéia intuitiva de uma curva descrevendo uma trajetória contínua dada pelo movimento de uma partícula sobre o plano, o que é baseado na representação paramétrica (vetorial). Formalmente, consideraremos neste trabalho uma ***curva plana parametrizada*** que é dada por um par de funções reais $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, definidas num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, supondo que estas tenham derivadas contínuas pelo menos até segunda ordem (f de classe C^k, $k \geq 2$).

Se $f'(t_0) \neq (0,0)$ dizemos que a f é ***regular*** em t_0 e se $f'(t_0) = (0,0)$ que ela é ***singular*** neste ponto.

O ***traço*** ou ***conjunto imagem*** C da curva parametrizada f é dado por:

$$C = \left\{ f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \in \mathbb{R}^2,\ t \in I \right\}.$$

Ao longo deste texto designaremos por curva tanto a função f como sua imagem ou traço $f(I) \subset \mathbb{R}^2$ e, salvo observação em contrário assumiremos a curva como de classe C^∞ regular, exceto em pontos isolados.

Num ponto regular, o vetor $f'(t_0)$ indica a direção da tangente à curva em $f(t_0)$. Num ponto singular a reta tangente à curva pode não existir.

Um tipo de ponto singular $f(t_0)$ de uma curva que será particularmente importante no que estudaremos é o ponto de ***cúspide*** que é caracterizado por:

1. $f'(t_0) = (0,0)$ e $f'(t) \neq (0,0)$ para pontos próximos a t_0 ($f(t_0)$ é uma singularidade isolada).
2. $\lim\limits_{t \to t_0^+} \dfrac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|} = \mathbf{v}_1, \quad \lim\limits_{t \to t_0^-} \dfrac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|} = \mathbf{v}_2 \quad$ e $\quad \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$.

Uma ***reparametrização*** de uma curva f é uma função $g : J \to \mathbb{R}^2$ tal que $g = f \circ \mu$ onde $\mu : J \to I$ é um difeomorfismo entre intervalos da reta, isto é, uma aplicação diferenciável (C^∞), invertível e com inversa diferenciável.

Sejam $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, $\mu(t) : J \to I$ e $g : J \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = (f \circ \mu)(t) = f(\mu(t))$. Assim temos, pela derivada da função composta,

$$g'(t) = \Big(f_1'(\mu(t))\, \mu'(t), f_2'(\mu(t))\, \mu'(t) \Big),$$

$$g'(t) = \mu'(t) f'(\mu(t)).$$

Sendo $\mu(t)$ um difeomorfismo podemos ter $\mu'(t) > 0$, $\forall\, t$ ou $\mu'(t) < 0$, $\forall\, t$. No primeiro caso dizemos que $g = f \circ \mu$ é uma reparametrização positiva (preserva a orientação de f), no segundo, dizemos que é uma reparametrização negativa (reverte a orientação da curva).

Todos os conceitos geométricos relativos às curvas tais como, comprimento de arco, curvatura sem sinal, evoluta, involuta e curva paralela, não dependem de particular reparametrização da curva. Também as noções de singularidade e de cúspide são preservadas, isto é, se um ponto $f(t_0)$ é singular ou de cúspide, também o será para qualquer reparametrização da curva f.

Para uma curva de classe C^2 regular ou com singularidades isoladas, o ***comprimento de arco*** de $f(t_0)$ a $f(t)$ é dado pela função

$$s = L_f(t) = \int_{t_0}^{t} |f'(u)|\; du, \quad t \in I. \tag{1.1}$$

Associando a variável t ao tempo decorrido, esta função mede o comprimento de arco da trajetória descrita, para cada instante, por uma partícula em movimento.

Como $|f'(t)|$ é uma função contínua, a função $L_f(t)$ é de classe C^1 e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\frac{ds}{dt} = L_f'(t) = |f'(t)|\,. \tag{1.2}$$

Assim para uma curva regular $\dfrac{d}{dt}L_f(t) = |f'(t)| > 0$ e, portanto, o comprimento de arco definirá um difeomorfismo, e a representação $g(s) = f \circ L_f^{-1}(s)$ é chamada parametrização pelo comprimento de arco. Notemos que neste caso $|g'(s)| = 1 \;\; \forall\, s$, ou seja, $g'(s) = T(s) = (\cos(\theta(s)), sen\,(\theta(s)))$ é o vetor tangente unitário. O vetor normal à curva $N(s)$, é obtido de $T(s)$ por um giro de $+90^0$ no sentido anti-horário em relação à $T(s)$, isto é, $N(s) = (-sen\,(\theta(s)), \cos(\theta(s)))$.

O par $\{T(s), N(s)\}$ é denominado ***Referencial de Frenet*** da curva em $g(s)$.

Na prática é muito difícil obter expressões explícitas para a reparametrização pelo comprimento de arco.

Um ***campo de vetores*** de classe C^k ao longo de uma curva f é uma aplicação $X : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^k.

Como exemplos importantes, podemos citar os campos tangente, $T(t)$, e normal, $N(t)$, de uma curva parametrizada regular, $f(t)$, que são campos de classe C^∞ ao longo de f e dados respectivamente por:

$$T(t) = \frac{\left(f_1'(t), f_2'(t)\right)}{\sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2}}, \tag{1.3}$$

e

$$N(t) = \frac{\left(-f_2'(t), f_1'(t)\right)}{\sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2}}. \tag{1.4}$$

Dados dois campos X e Y de classe C^k, $k \geq 2$, ao longo de f, e uma função $h : J \to \mathbb{R}^2$ de classe C^k, definimos a soma $(X + Y)(t) = X(t) + Y(t)$ e a

composição $(h\,X)\,(t) = h(t)X(t)$, também como campos de classe C^k ao longo de f e assim temos que:
$(X+Y)^{'} = X' + Y'$, $\quad (h\,X)^{'} = h'\,X + h\,X'$ $\quad$ e $\quad \langle X, Y\rangle^{'} = \langle X', Y\rangle + \langle X, Y'\rangle$.

Uma conseqüência deste último resultado é que, se $|X|$ é constante, $\langle X, X\rangle$ é constante e então o campo X' é perpendicular a X, para todo $t \in I$, isto é, $\langle X, X'\rangle = 0$.

Assim, com f parametrizada pelo comprimento de arco temos $|T(s)| = 1$ (constante) então $T'(s)$ é perpendicular a $T(s)$ e desse modo concluímos que, pela construção anterior de N, $N(s)$ e $T'(s)$ são paralelos para todo $s \in I$, isto significa que existe $K(s)$, tal que;

$$T'(s) = K(s)N(s), \tag{1.5}$$

$s \in I$ onde $K(s)$ é chamada ***função curvatura*** de f em $s \in I$.

Observamos que $K(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle = -\langle N'(s), T(s)\rangle$ portanto, temos que $K : I \to \mathbb{R}^2$ é uma função de classe C^{k-2}, quando f for de classe C^k.

Sendo $T(s) = (\cos(\theta(s))\,,\ sen\,(\theta(s)))$, sua derivada é dada por; $T'(s) = \theta'(s)\,(-\text{sen}\,(\theta(s))\,, \cos(\theta(s))) = \theta'(s)N(s)$, ou seja, $K(s) = \theta'(s)$, isto é $K(s)$ mede a variação da mudança de direção da reta tangente a f em $f(s)$. A curvatura então é uma medida de quanto a curva deixa de ser reta.

Como fica claro das expressões acima, a noção de curvatura é invariante por isometrias do plano.

Partindo de $|N(s)| = 1$, obtemos que $N'(s)$ é perpendicular a $N(s)$ e, portanto, paralelo a $T(s)$, então aplicando a equação (1.5) temos:

$$N'(s) = \left(-f_2^{''}(s), f_1^{''}(s)\right),$$

$$\left(-K(s)f_1^{'}(s), -K(s)f_2^{'}(s)\right) = -\,K(s)\left(f_1^{'}(s), f_2^{'}(s)\right) = -\,K(s)T(s).$$

donde tiramos as **equações de Frenet** para curvas planas:

$$\begin{cases} T'(s) = K(s)N(s) \\ N'(s) = -K(s)T(s). \end{cases}$$

Assim, tomamos $f : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular, e seja $g : J \to \mathbb{R}^2$ uma reparametrização pelo comprimento de arco de f e definimos a ***curvatura*** $K(t)$ de f em $t \in I$ pela função curvatura de g no ponto $s \in J$, tal que $g(s) = f(t)$.

Finalmente observamos que $|K(s)| = |g''(s)|$, módulo do vetor aceleração, quando parametrizamos pelo comprimento de arco.

Mas, como comentamos, na prática quase nunca conseguimos explicitar uma parametrização pelo comprimento de arco e por isto, vamos expressar a função curvatura de uma curva parametrizada $f\,(t)$ com parâmetro qualquer.

Seja $f : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular, definida por $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$.

Temos então que a função **curvatura** de f em $t \in I$ é dada pela expressão.

$$K(t) = \frac{f_1'(t)f_2''(t) - f_1''(t)f_2'(t)}{\left(\sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2}\right)^3}. \tag{1.6}$$

Prova: Consideremos $g : J \to \mathbb{R}^2$ a reparametrização positiva de f pelo comprimento de arco. Então, se escrevermos: $g\,(s(t)) = f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, temos;

$$(f_1'(t), f_2'(t)) = \frac{d}{ds}\left(g\,(s(t))\right) = \frac{d}{ds}\left[g\,(s(t))\right]\frac{d}{dt}\left(s(t)\right) = \frac{d}{ds}\left[g\,(s(t))\right]s'(t) \tag{1.7}$$

e

$$\left(f_1''(t), f_2''(t)\right) = f''(t) = \frac{d^2}{ds^2}\left[g\,(s(t))\right]\left(s'(t)\right)^2 + \frac{d}{ds}\left(g\,(s(t))\right)s''(t). \tag{1.8}$$

Temos também que:

$$T\,(s(t)) = \frac{d}{ds}\left[g(s(t))\right] = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2}}\left(f_1'(t), f_2'(t)\right),$$

e portanto,

$$N\,(s(t)) = \frac{1}{\sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2 + \left(f_2'(t)\right)^2}}\left(-f_2'(t), f_1'(t)\right). \tag{1.9}$$

Como

$$K\left(s(t)\right)=\left\langle \frac{d}{ds}\left[T\left(s(t)\right)\right],N\left(s(t)\right)\right\rangle =\left\langle \frac{d^2\left[g\left(s(t)\right)\right]}{ds^2},N\left(s(t)\right)\right\rangle ,$$

reescrevendo temos

$$K\left(s(t)\right)=\left\langle \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}},N\left(s(t)\right)\right\rangle ,$$

como $s'(t)=\sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2+\left(f_2'(t)\right)^2}$, e da expressão (1.9) para $N\left(s(t)\right)$, obtemos então a expressão (1.6).

Podemos também expressar a curvatura de $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$ por,

$$K\left(s(t)\right)=\frac{\det\begin{pmatrix} f_1'(t) & f_2'(t)\\ f_1''(t) & f_2''(t)\end{pmatrix}}{\left(\sqrt{\left(f_1'(t)\right)^2+\left(f_2'(t)\right)^2}\right)^3}. \tag{1.10}$$

Para ilustrar, veremos nos exemplos a seguir, a função curvatura da reta, do círculo e da elipse.

EXEMPLO 1: A curvatura de uma reta $r(t)$.

Se a curva é uma reta, é intuitivo que a curvatura seja zero uma vez que o ângulo θ que o vetor tangente faz com o eixo Ox é constante.

Seja $r(t)=(x_0,y_0)+t(a,b)$, $t\in\mathbb{R}$, temos: $r'(t)=(a,b)$ e $r''(t)=(0,0)$. Temos das equações (1.3), (1.4) e (1.10), respectivamente;

$T(t)=\dfrac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\quad N(t)=\dfrac{(-b,a)}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad$ e $\quad K(t)\equiv 0$.

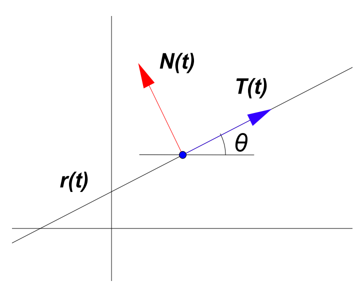


Figura 1.2: Reta $r(t)$ com curvatura $K(t)\equiv 0$.

EXEMPLO 2: A curvatura de um círculo $c(t)$ de raio r.

Se a curva é um círculo, é intuitivo que a curvatura seja diferente de zero, mas constante, e que tenha relação com o raio r do círculo.

Seja $c(t) = (x_0,\ y_0) + (r\cos(t),\ r\,\mathrm{sen}(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, temos: $c'(t) = (-r\,\mathrm{sen}(t), r\cos(t))$ e $c''(t) = (-r\cos(t), -r\,\mathrm{sen}(t))$. Temos então; $T(t) = (-\mathrm{sen}(t), \cos(t))$, $N(t) = (-\cos(t), -\mathrm{sen}(t))$ e $K(t) = \dfrac{1}{r}$.

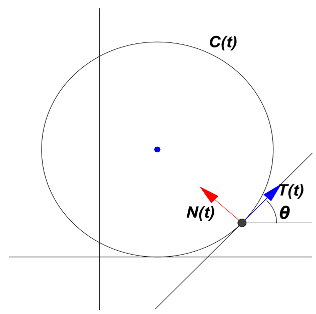


Figura 1.3: Círculo $c(t)$ com curvatura $K(t) = \frac{1}{r}$.

EXEMPLO 3: A curvatura de uma elipse $e(t)$, com semi-eixos a e b.

Uma curva desse tipo sugere curvatura não nula e variável.

Seja a elipse $e(t) = (x_0 + a\cos(t), y_0 + b\,\mathrm{sen}(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, temos: $e'(t) = (-asen(t), b\cos(t))$ e $e''(t) = (-a\cos(t), -b\,\mathrm{sen}(t))$. Temos então; $T(t) = \dfrac{(-a\,\mathrm{sen}(t), b\cos(t))}{\sqrt{(-a\,\mathrm{sen}(t))^2 + (b\cos(t))^2}}$, $N(t) = \dfrac{(-b\cos(t), -a\,\mathrm{sen}(t))}{\sqrt{(-a\,\mathrm{sen}(t))^2 + (b\cos(t))^2}}$ e $K(t) = \dfrac{ab}{\left(\sqrt{a^2\mathrm{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}\right)^3}$.

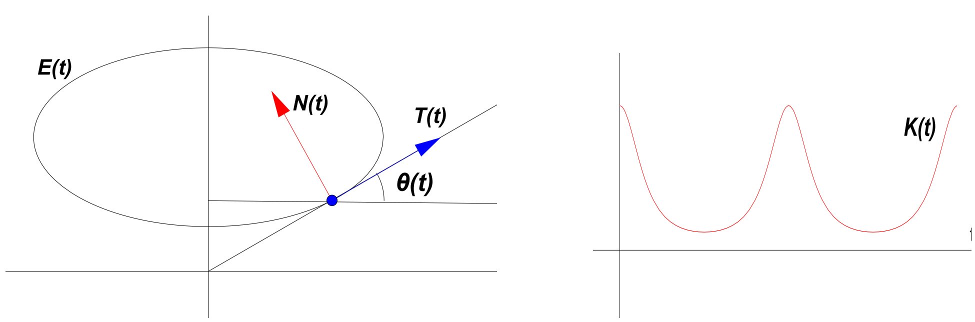


Figura 1.4: Elipse $e(t)$ com variação da curvatura $K(t)$.

1.2 Interpretações geométricas

Vimos que a taxa de variação do ângulo da tangente em relação ao comprimento de arco define a ***curvatura*** da curva. Sendo $\theta(s)$ o ângulo de inclinação do vetor tangente com o eixo Ox, $K(s) = \theta'(s)$. Sejam $f(t)$ uma curva plana

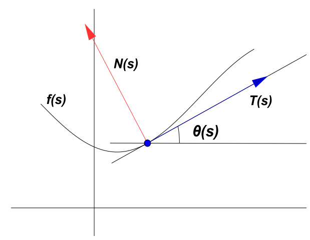


Figura 1.5: Vetores Unitários Tangente e Normal.

regular no ponto $P = f(t_0)$ tal que $K(t_0) \neq 0$. Considando um círculo que é tangente à curva em P e tenha ali a mesma curvatura, temos que o centro do círculo deve estar do lado de $f''(t)$.

Classicamente, a curvatura sem sinal de uma curva plana num ponto foi definida como o inverso do raio do círculo que melhor se aproxima à curva neste ponto. Este foi designado por **John Bernoulli** (1667-1748) como círculo osculador e também era conhecido como "círculo por três pontos consecutivos" de uma curva (círculo limite de círculos secantes por três pontos de uma curva).

O centro $C(t)$ do círculo osculador (centro de curvatura) vai estar na normal à curva, o vetor $\overrightarrow{PC} = C(t) - f(t)$ aponta da tangente para curva.

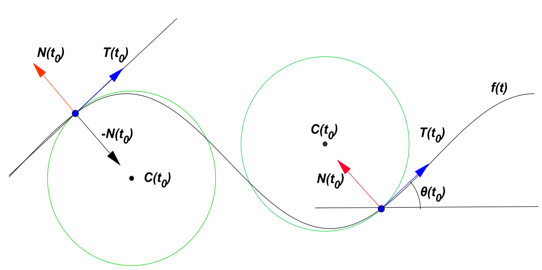


Figura 1.6: A senóide percorrida da esquerda para a direita, Vetores Tangentes e Normais e Círculos Osculadores.

Seja $\rho(t)$ o raio do círculo osculador e r o vetor posição do centro $C = (a, b)$

do círculo osculador. Então $\rho(t) = \dfrac{1}{|K(t)|}$ é chamado de ***raio de curvatura*** da curva f no ponto P e r é o vetor centro de curvatura da curva em P.

Na figura (Fig. 1.7), $r = \overrightarrow{OC}$ é igual à soma $\overrightarrow{OP} + \rho\,\overrightarrow{N}$, isto é; $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \rho\,\overrightarrow{N}$. Temos que $C(t) = (f_1(t), f_2(t)) + \rho(t)N(t)$ e portanto,

$$C(t) = (f_1(t), f_2(t)) + \frac{1}{K(t)}N(t). \tag{1.11}$$

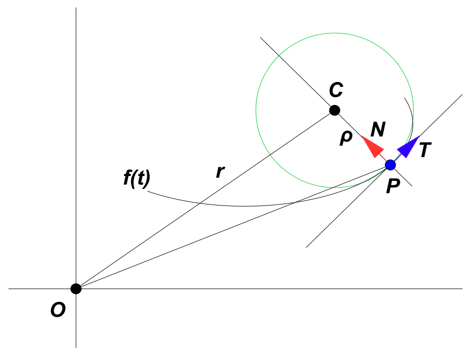


Figura 1.7: Centro de Curvatura.

EXEMPLO 4: Seja a parábola $f(t) = \left(t, pt^2\right)$, vamos determinar o vetor tangente unitário $T(t)$ (vetor velocidade), o vetor unitário normal $N(t)$ (vetor aceleração), a curvatura K e o raio de curvatura ρ para um ponto $f(t_0)$.

Temos $f'(t) = (1, 2pt)$ e $f''(t) = (0, 2p)$, então:

$$T(t) = \frac{(1, 2pt)}{\sqrt{1+4p^2t^2}}, \quad N(t) = \frac{(-2pt, 1)}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \quad \text{e} \quad K(t) = \frac{2p}{(1+4p^2t^2)\sqrt{1+4p^2t^2}},$$

sendo que $K(t)$ assume seu valor máximo em $t = t_0 = 0$ e $\lim\limits_{t\to\pm\infty} K(t) = 0$.

O raio de curvatura é dado como o inverso do módulo da curvatura, assim;

$$\rho(t) = \frac{1}{|K(t)|} = \frac{\left(1+4p^2t^2\right)\sqrt{1+4p^2t^2}}{2p}.$$

Mais especificamente (Fig. 1.8), sendo $p = 1$ e $t_0 = 1$, nosso exemplo fica, $f(t) = \left(t, t^2\right)$, $f'(t) = (1, 2t)$, $f''(t) = (0, 2)$, $|f'(t)| = \sqrt{1+4t^2} = v(t)$ e $|f''(t)| = 2$.

Então temos:

$f(1) = (1, 1)$, $f'(1) = (1, 2)$, $f''(2) = (0, 2)$, $|f'(1)| = \sqrt{5} = v(t)$ e $|f''(1)| = 2$.

Donde tiramos:

$$T(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad N(1) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad K(1) = \frac{2}{5\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \rho(1) = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

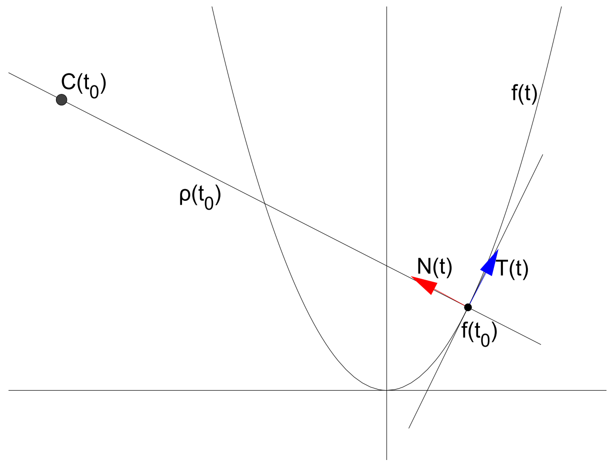


Figura 1.8: Vetor Tangente $T(t)$ e Normal $N(t)$, Raio de curvatura e Centro de curvatura da parábola.

O teorema fundamental das curvas planas é importante, pois é uma forma de dizer que a função curvatura de uma curva determina a curva a menos de um movimento rígido [19].

Teorema Fundamental das Curvas Planas ([4]): Seja $K : I \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^∞. Então, dados $t_0 \in I$, $P\,(P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$ e $V_0\,(V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$, com $|V_0| = 1$, existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco $f : I \to \mathbb{R}^2$, tal que a curvatura em cada ponto $f(s)$ é dada por $K(s)$, $f(s_0) = P$ e $f'(s_0) = V_0$.

1.3 Evoluta

A evoluta E_f de uma curva plana f é o lugar geométrico dos centros de curvatura desta. A evoluta só está definida para pontos onde a curvatura é não nula. Para uma curva regular $f : I \to \mathbb{R}^2$, temos $E_f : I \to \mathbb{R}^2$,

$$E_f(t) = f(t) + \frac{1}{K(t)} N(t) \tag{1.12}$$

onde $N(t)$ é o campo normal unitário de f ($N(t)$ é o girado de 90^o do vetor $\dfrac{f'(t)}{|f'(t)|}$).

EXEMPLO 5: Evoluta da ciclóide.

Seja a ciclóide dada por $f(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t))$, nesse caso, temos $K(t) = \left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(t)}{2}}\right)^3$ e $N(t) = \dfrac{(-\text{sen}(t), 1-\cos(t))}{\sqrt{2\,(1-\cos(t))}}$. Assim, a evoluta da ciclóide é dada por:

$$E_c(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \cos(t)) + \frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(t)}{2}}\right)^3} \frac{(-\text{sen}(t), 1-\cos(t))}{\sqrt{2\,(1-\cos(t))}}.$$

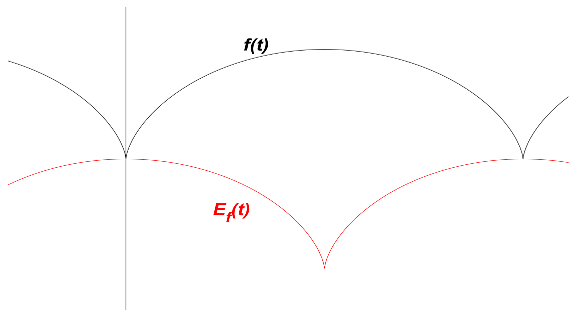


Figura 1.9: Evoluta da ciclóide.

A evoluta é uma curva regular se e somente se $K'(s) \neq 0$. Um ponto onde $K'(s) = 0$ será um ponto de singularidade da evoluta, como pode ser deduzido da expressão (1.13) a seguir.

Se $f(s)$ está parametrizada pelo comprimento de arco s, teremos $E_f(s) = f(s) + \frac{1}{K(s)}N(s)$, então temos que a derivada da evoluta é: $E_f'(s) = f'(s) + \left(\frac{1}{K(s)}\right)' N(s) + \left(\frac{1}{K(s)}\right) N'(s)$.

Das Equações de Frenet $T'(s) = K(s)N(s)$ e $N'(s) = -K(s)T(s) = -K(s)f'(s)$ então temos;

$$E_f'(s) = f'(s) + \left(\frac{1}{K(s)}\right)' N(s) + \left(\frac{1}{K(s)}\right)(-K(s))\, f'(s),$$

$$E_f'(s) = \left(\frac{1}{K(s)}\right)' N(s),$$

$$E_f'(s) = \frac{-K'(s)}{(K(s))^2} N(s). \tag{1.13}$$

Podemos concluir tembém da equação (1.13) que a reta normal à f em $f(s_0)$ é igual a tangente em E_f no ponto $E_f(s_0)$.

Geometricamente, podemos dizer que a evoluta E_f de f é uma curva que é tangente em cada instante a uma das retas normais de f. E também se diz que a curva E_f é a envolvente da família de retas normais a f e assim, a curva f pode ser obtida novamente de sua evoluta E_f por;

$$f(s) = E_f(s) + \frac{1}{K(s)} \frac{E_f'(s)}{\left|E_f'(s)\right|} \tag{1.14}$$

Tendo então o comprimento de arco L_{E_f} da evoluta de f e f obtida a partir de sua evoluta E_f, existe uma relação geométrica entre f e E_f que pode ser descrita da seguinte forma: "Cobrindo-se a evoluta E_f com um fio flexível e inextensível, com uma extremidade fixa em $E_f(s_0)$ e em seguida, desenrolando-se o fio até o ponto $E_f(s_1)$, parte do fio ainda continua recobrindo E_f e a outra parte sai pela tangente à E_f, no ponto $E_f(s_1)$ na direção de $E_f'(s_1)$".

Para simplificar a ilustração, e sem perder a generalidade, vamos assumir $K(s)$ e $K'(s)$ sempre positivas, onde K é sempre a curvatura de f (Fig 1.10).

Dizemos que f é uma ***involuta*** de E_f.

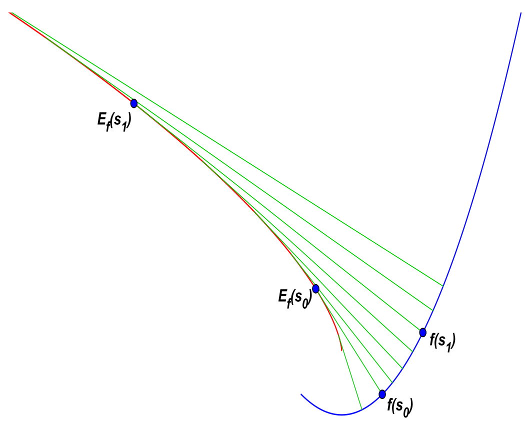


Figura 1.10: Uma curva construída a partir de sua evoluta.

Na evoluta podemos detectar os pontos de máximo e mínimo locais da curva original. Como já comentamos, os pontos onde a derivada da curvatura é zero são pontos críticos da evoluta, mas, além disto, temos que *a cúspides da evoluta correspondem máximos e mínimos locais de curvatura da curva original* (vértices) como será visto em 1.5.

1.4 Curvas paralelas

Dada uma curva plana regular $f(t)$ definimos duas curvas paralelas à f à distância $\lambda > 0$ por:

$$P_f(t)_{+\lambda} = f(t) + \lambda N(t) = (f_1(t), f_2(t)) + \lambda \frac{(-f_2'(t), f_1'(t))}{\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}} \tag{1.15}$$

e

$$P_f(t)_{-\lambda} = f(t) - \lambda N(t) = (f_1(t), f_2(t)) - \lambda \frac{(-f_2'(t), f_1'(t))}{\sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2}}. \tag{1.16}$$

EXEMPLO 6: Curva paralela a uma reta r.

Obviamente uma curva paralela a uma reta r por (x_0, y_0) e na direção de (a, b) é também uma reta.

Seja $r(t) = (x_0,\ \ y_0) + t(a, b)$, uma das paralelas a r e a uma distância λ desta é,

$$P_r(t)_\lambda = (x_0 + at, y_0 + bt) + \lambda \frac{(-b, a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Assim, mais especificamente para r por $(0, 1)$ na direção do vetor $(1, -1)$, isto é, $r(t) = (t, 1 - t)$ e sendo $\lambda = 2$ temos: $r'(t) = (1, -1)$, $r''(t) = (0, 0)$ e então temos;

$$P_r(t)_2 = (t, 1 - t) + 2 \frac{(-1, 1)}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = (t, 1 - t) + \sqrt{2}\,(1, 1)\,.$$

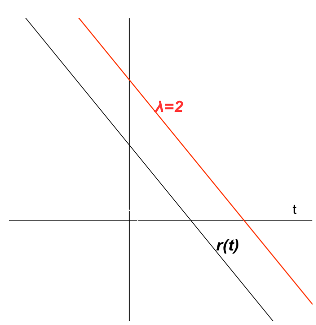


Figura 1.11: Reta $P_r(t)_\lambda$ paralela a $r(t)$.

EXEMPLO 7: Curva paralela a uma senóide f. Seja $f(t) = (t, sen(t))$, e uma curva $P_f(t)_\lambda$ paralela a $f(t)$ e a uma distância $\lambda = 2$ (aqui, a título de ilustração vamos desenhar os dois ramos, isto é, para $\lambda = 2$ e $\lambda = -2$).

Então, temos: $P_f(t)_{\pm 2} = (t, \text{sen}(t)) \pm 2\frac{(-\cos(t),1)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}$.

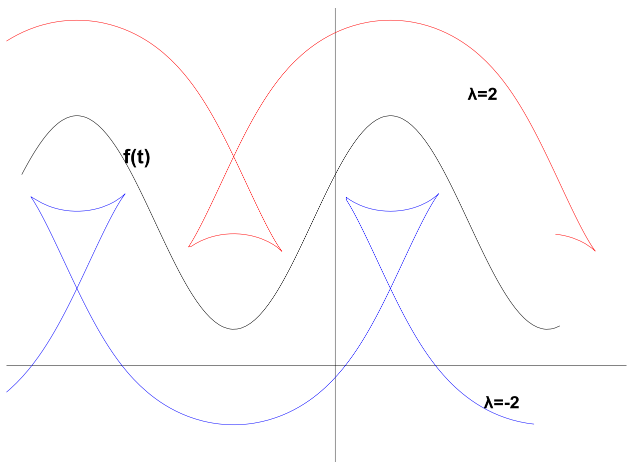
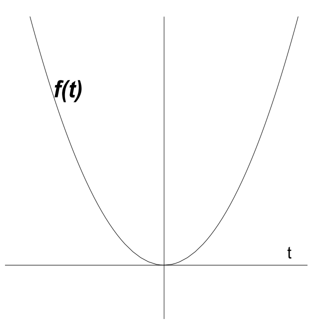


Figura 1.12: Curva $P_f(t)_{+\lambda}$ e $P_f(t)_{-\lambda}$ paralelas à curva gráfico da função seno com $\lambda = 2$ e $\lambda = -2$.

EXEMPLO 8: Seja a *parábola* dada por $f(t) = \left(t, pt^2\right)$.

Ilustraremos agora, sua curvatura, a evoluta e a família de paralelas;

1- Curvatura da Parábola; $K(t) = \dfrac{2p}{\left(\sqrt{1+4p^2t^2}\right)^3}$.



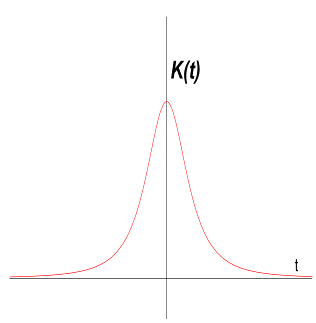


Figura 1.13: Parábola e Curvatura da Parábola.

2- Evoluta da Parábola : $E(t) = \left(-4p^2t^3, \dfrac{(4p^2+2p)\,t^2+1}{2p}\right).$

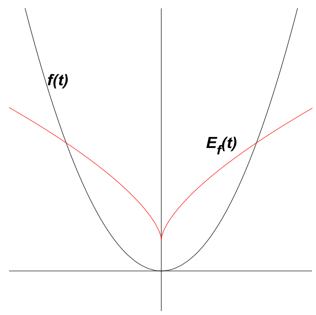


Figura 1.14: Evoluta da Parábola $f(t) = (t, pt^2)$.

3- Família de Paralelas à parábola : $P_f(t)_{\pm\lambda} = (t, pt^2) \pm \lambda\, \dfrac{(-2pt, 1)}{\sqrt{1+4p^2t^2}}.$

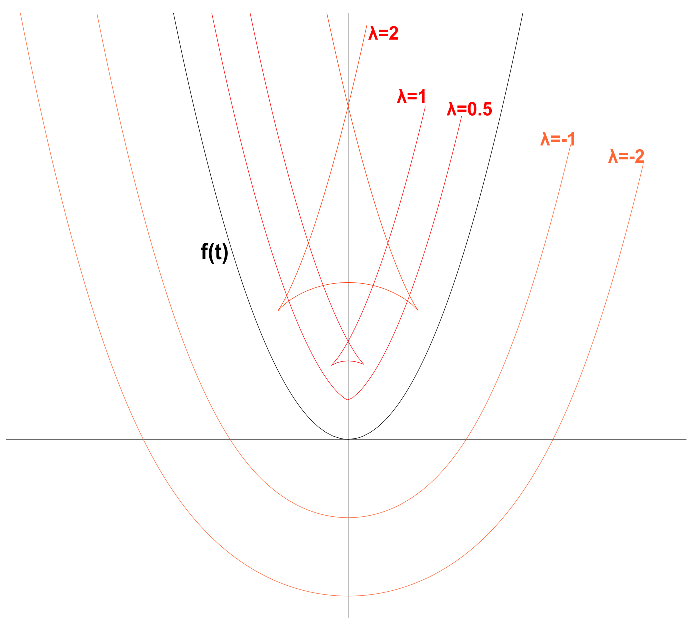


Figura 1.15: Família de Paralelas à Parábola $\lambda = -2, \ -1, \ 0.5, \ 1$ e 2.

EXEMPLO 9: Seja a *elipse* dada por $e(t) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t))$.

Ilustraremos agora, sua curvatura, a evoluta e a família de paralelas;

1- Curvatura da elipse : $K(t) = \dfrac{ab}{\left(\sqrt{(-a\,\mathrm{sen}(t))^2 + (b\cos(t))^2}\right)^3}.$

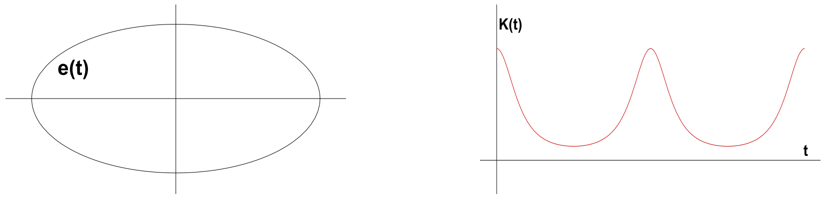


Figura 1.16: Elipse e Curvatura da Elipse.

2- Evoluta da Elipse:

$$E_e(t) = (a\cos(t), b\ \mathrm{sen}(t)) + \frac{(-a\ \mathrm{sen}(t))^2 + (b\cos(t))^2}{ab}\,(-b\cos(t), -a\ \mathrm{sen}(t)).$$

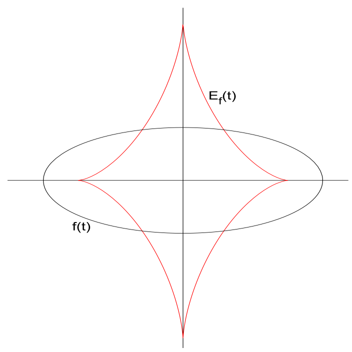


Figura 1.17: Evoluta da Elipse.

3- Família de Paralelas à elipse :

$$P_e(t)_{\pm\lambda} = (a\cos(t), b\ \mathrm{sen}(t)) \pm \lambda\frac{(-b\cos(t), -a\ \mathrm{sen}(t))}{\sqrt{a^2\mathrm{sen}^2(t) + b^2\ \cos^2(t)}}.$$

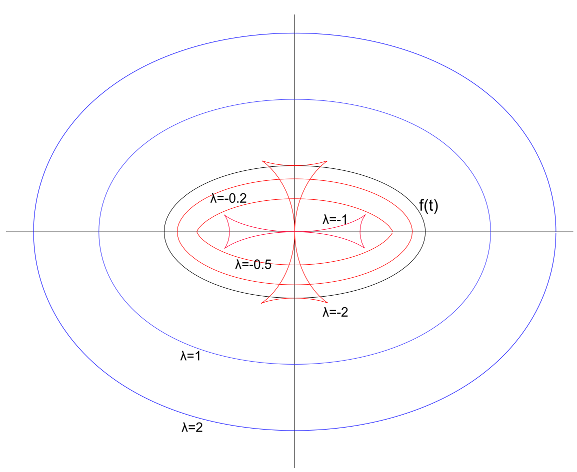


Figura 1.18: Família de Paralelas à Elipse $\lambda = -2,\ -1,\ -0.2,\ -0.5,\ 1\ \text{ e }\ 2.$

1.5 Singularidades da evoluta e da paralela.

Na seção anterior, observamos que, embora a parábola seja uma curva regular, sua evoluta, e algumas de suas paralelas apresentam singularidades, e isto ocorre em pontos onde $E_f'(t) = \mathbf{0}$ e $P_f'(t)_\lambda = \mathbf{0}$. Discutiremos a seguir estas ocorrências especificamente para o caso da parábola.

1.5.1 Cúspides da evoluta

Já observamos que a evoluta de uma curva não está definida em pontos onde a curvatura se anula. Veremos agora que a evoluta de uma curva plana regular apresenta singularidade do tipo cúspide nos pontos correspondentes a pontos de máximo ou de mínimo da curvatura.

Sendo $E_f(s) = f(s) + \dfrac{1}{K(s)}N(s)$, a evoluta de uma curva regular f parametrizada pelo comprimento de arco, temos que $E_f'(s)$ é dada pela (1.13) donde tiramos $\left|E_f'(s)\right| = \dfrac{|K'(s)|}{(K(s))^2}$. Temos ainda que $K(s) \neq 0 \; \forall \; s$ e $K'(s_0) = 0 \Leftrightarrow E_f'(s_0) = (0,0)$, e mais, se s_0 for um máximo local estrito para a curvatura então $K'(s_0) = 0$, e $K'(s) > 0$ para $s < s_0$ e $K'(s) < 0$ para $s > s_0$ ou seja, $K'(s)$ troca de sinal em s_0 e vice-versa para mínimo local estrito.

Então, para $K^{'}(s_0) = 0$ falta provar que sendo os limites laterais; $\displaystyle\lim_{s \to s_0^+} \frac{E_f'(s)}{\left|E_f'(s)\right|} = \mathbf{v}_1$ e $\displaystyle\lim_{s \to s_0^-} \frac{E_f'(s)}{\left|E_f'(s)\right|} = \mathbf{v}_2$ temos $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow K^{'}$ troca de sinal em s_0.

De fato,

$$\lim_{s \to s_0^+} \frac{E_f'(s)}{\left|E_f'(s)\right|} = \left(\lim_{s \to s_0^+} \frac{-K'(s)}{|K'(s)|}\right) N(s_0) = \begin{cases} N(s_0) & \text{se } \; K^{'}(s_0) < 0 \quad \text{para } \; s > s_0, \\ -N(s_0) & \text{se } \; K^{'}(s_0) > 0 \quad \text{para } \; s > s_0, \end{cases}$$

e

$$\lim_{s \to s_0^-} \frac{E_f'(s)}{\left|E_f'(s)\right|} = \left(\lim_{s \to s_0^-} \frac{-K'(s)}{|K'(s)|}\right) N(s_0) = \begin{cases} -N(s_0) & \text{se } \; K^{'}(s_0) > 0 \quad \text{para } \; s < s_0, \\ N(s_0) & \text{se } \; K^{'}(s_0) < 0 \quad \text{para } \; s < s_0, \end{cases}$$

e portanto $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow K^{'}$ troca de sinal em $s_0 \Leftrightarrow s_0$ é ponto de máximo ou de mínimo local estrito para K.

Resumindo temos a proposição:

Proposição 1.1 ([16]): *A máximos e mínimos locais (estritos) da função curvatura de uma curva regular correspondem cúspides (vértices) de sua evoluta.*

Conforme pode ser visto nas figuras (Fig. 1.13) e (Fig. 1.14), a curva $f(t)$ é a parábola (t, pt^2) cuja função curvatura é $K(t) = \dfrac{2p}{\left(\sqrt{1+4p^2t^2}\right)^3}$, e neste caso, $K'(t) = \dfrac{-24p^3t}{\left(\sqrt{4p^2t^2+1}\right)^5}$, sendo então $K'(t) = 0$ para $t_0 = 0$. Assim, como $E_f(t) = \left(-4p^2t^3, \dfrac{\left(4p^2+2p\right)t^2+1}{2p}\right)$ é a evoluta da parábola, a cúspide ocorrerá em $E_f(0) = \left(0, \dfrac{1}{2p}\right) = (0, \rho(0)) = \left(0, \dfrac{1}{K(0)}\right)$.

1.5.2 Cúspides de uma paralela

Como observamos nas figuras (Fig. 1.12), (Fig. 1.15) e (Fig. 1.18) da seção anterior, algumas das curvas paralelas a uma curva de classe C^k, $k \geq 2$, regular podem apresentar singularidades.

Quando e onde elas ocorrem?

Como as singularidades não dependem da reparametrização, consideremos a curva $f(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco, então, uma curva paralela a $f(s)$ segundo uma distância λ é dada por $P_f(s)_{+\lambda} = f(s) + \lambda N(s)$ e sua derivada é $P_f'(s)_{+\lambda} = f'(s) + \lambda N'(s)$ assim podemos escrever $P_f'(s)_{+\lambda} = f'(s) - \lambda K(s)T(s)$ que resulta em;

$$P_f'(s)_{+\lambda} = T(s)\left(1 - \lambda K(s)\right). \tag{1.17}$$

Como $T(s) \neq 0$ (f é regular) temos; $P_f'(s)_{+\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda K(s) = 1$ ou seja, $\lambda = \dfrac{1}{K(s)}$. Notemos que isto é equivalente a dizer que o ponto de singularidade de uma curva paralela ocorre quando ele coincide com o centro de curvatura da curva naquele ponto. Vejamos ainda que se $K(s)$ for crescente ou decrescente (monótona), isto é, $K^{'}(s) \neq 0$ no entorno daquele ponto, este será uma cúspide e que vale a recíproca.

Supondo, sem perda de generalidade, $K(s)$ crescente e positiva no entorno de s_0, temos de imediato que se a paralela for traçada considerando a distância $\lambda = \dfrac{1}{|K(s_0)|}$, a equação (1.17) é reescrita como $P_f'(s)_{\frac{1}{K(s_0)}} = T(s)\left(1 - \dfrac{1}{K(s_0)}K(s)\right)$, logo temos $P_f'(s_0)_{\frac{1}{K(s_0)}} = 0$.

Agora, observando que se $s > s_0$, $K(s) > K(s_0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \dfrac{1}{K(s_0)}K(s)\right) < 0$ e vice-versa, então calculando os limites laterais;

$$\lim_{s \to s_0^+} \frac{P_f'(s)}{\left|P_f'(s)\right|} = \lim_{s \to s_0^+} \frac{T(s)\left(1 - \dfrac{1}{K(s_0)}K(s)\right)}{\left|1 - \dfrac{1}{K(s_0)}K(s)\right|} = -T(s) = \mathbf{v}_1$$

e

$$\lim_{s \to s_0^-} \frac{P_f'(s)}{\left|P_f'(s)\right|} = \lim_{s \to s_0^-} \frac{T(s)\left(1 - \dfrac{1}{K(s_0)}K(s)\right)}{\left|1 - \dfrac{1}{K(s_0)}K(s)\right|} = T(s) = \mathbf{v}_2,$$

então sendo $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ fica caracterizada a cúspide da curva paralela. Reciprocamente a condição $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ implicará na monotonicidade de K.
Resumindo temos portanto:-

Proposição 1.2: *As singularidades de uma curva paralela a uma curva regular de classe C^k $f(t)$ com curvatura não nula à distância λ ocorrem exatamente nos pontos de interseção desta com a evoluta de f. Estas singularidades são cúspides se e somente se a curvatura de f for estritamente crescente ou decrescente no entorno desse ponto ($K'(t) \neq 0$).*

No caso de uma parábola, $f(t) = (t, pt^2)$, temos que a curvatura assume um máximo em $t = t_0 = 0$ (Exemplo 4, e Exemplo 8; Fig. 1.13) onde $K(0) = 2p$, e $K(t)$ é estritamente crescente para $t<0$ e estritamente decrescente para $t>0$, com $\lim\limits_{|t|\to\infty} K(t)=0$. Isto implicará que uma paralela $P_f(t)_{+\lambda}$ intersectará a evoluta uma única vez, no vértice desta, se $\lambda=\dfrac{1}{2p}$ e duas vezes se $\lambda>\dfrac{1}{2p}$. Donde temos a seguinte consequência da Proposição 1.2:-

Proposição 1.3: *Uma curva paralela $P_f(t)_{+\lambda}$ à uma parábola $f(t)=(t,pt^2)$.*

i) *Terá uma cúspide no ponto correspondente ao vértice, se $\lambda=\dfrac{1}{2p}$.*

ii) *Terá duas cúspides se $\lambda>\dfrac{1}{2p}$, em $P_f(t_*)_{+\lambda}$ e $P_f(-t_*)_{+\lambda}$ tais que $K(t_*)=\dfrac{1}{\lambda}$.*

iii) *Será uma curva regular se $\lambda<\dfrac{1}{2p}$.*

Observação: A curva $P_f(t)_{-\lambda}$ será sempre regular.

EXEMPLO 10: (Ilustração da Proposição 1.3 i)) Seja a parábola $f(t)=(t,t^2)$, então: $K(t)=\dfrac{2}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3}$, $E_f(t)=\left(-4t^3,\dfrac{6t^2+1}{2}\right)$ e $P_f(t)_{+\lambda}=\left(t,t^2\right)+\lambda\,\dfrac{(-2t,1)}{\sqrt{1+4t^2}}$.

Mas fazendo $K'(t)=0$ chegamos à
$K'(t)=\dfrac{-24t}{\left(\sqrt{4t^2+1}\right)^5}=0 \;\Leftrightarrow\; t=0=t_0 \Rightarrow K(t_0)=K(0)=2$ e então $\rho(t_0)=\dfrac{1}{2}$.

Agora, fazendo a paralela à parábola, com $\lambda=\rho(t_0)=\dfrac{1}{2}$, obtemos $P_f(t)_{\frac{1}{2}}=\left(t,t^2\right)+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(-2t,1)}{\sqrt{1+4t^2}}$ ou seja, $P_f(t)_{\frac{1}{2}}=\left(t-\dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}},t^2+\dfrac{1}{2\sqrt{1+4t^2}}\right)$ e assim, podemos produzir a figura (Fig. 1.19) onde se observa a cúspide da evoluta correspondendo ao vértice da parábola em $t_0=0$ e a paralela $P_f(t)_{\frac{1}{2}}$ com um ponto comum com a evoluta também em $t_0=0$.

EXEMPLO 11: (Ilustração da Proposição 1.3 ii)) Vamos agora, para exemplificar, fazer uma paralela à parábola, com $\lambda=\dfrac{1}{K(t_*)}\geq\dfrac{1}{K(t_0)}$, e assim, esta deve apresentar uma cúspide sobre a evoluta em t_*, isto é $E_f(t_*)=P_f(t_*)_{\frac{1}{K(t_*)}}$.

Tomemos então a parábola $f(t)=(t,t^2)$, com $f'(t)=(1,2t)$, $f''(t)=(0,2)$, $T(t)=\dfrac{(1,2t)}{\sqrt{1+4t^2}}$, $N(t)=\dfrac{(-2t,1)}{\sqrt{1+4t^2}}$, $K(t)=\dfrac{2}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3}$, $E_f(t)=\left(-4t^3,\dfrac{6t^2+1}{2}\right)$ e $P_f(t)_{+\lambda}=\left(t,t^2\right)+\lambda\,\dfrac{(-2t,1)}{\sqrt{1+4t^2}}$.

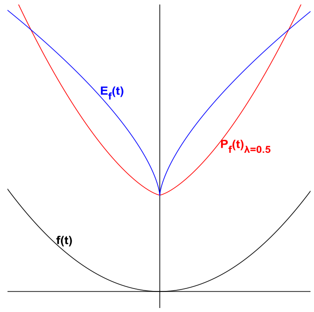


Figura 1.19: Evoluta e Paralela à parábola a uma distância $\lambda = \rho(t_0)$, onde t_0 é o ponto de curvatura máxima da parábola.

Como estamos interessados em determinar cúspides da paralela, ou seja, intersecções desta com a evoluta, tomemos $\lambda = 2 \Rightarrow K(t_*) = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_* = \pm\dfrac{\sqrt{4^{2/3}-1}}{2}$.

Isto significa que o traço da paralela à parábola, com $\lambda = \dfrac{1}{K(t_*)}$, terá cúspides em $f(t_*)$ e $f(-t_*)$.

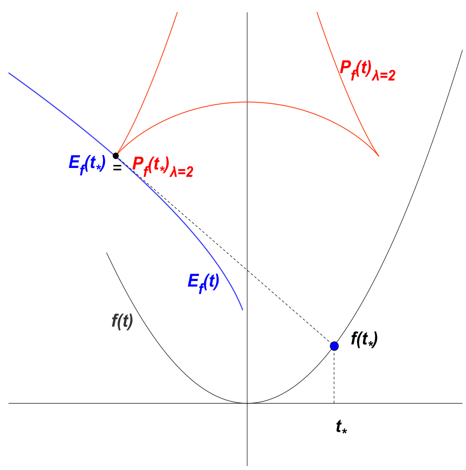


Figura 1.20: Singularidade da Paralela sobre a evoluta.

Capítulo 2

A Conchóide de Nicomedes

Neste capítulo introduzimos a conchóide de Nicomedes e suas propriedades geométricas inserindo aspectos históricos relacionados com sua origem e aplicações. Procuramos na bibliografia consultada um pouco do cenário no qual a conchóide foi criada e também referências a esta curva nos trabalhos de matemáticos do século XVII. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [7], [8], [15], [18], [14], [12] e [10]. Os programas computacionais de uso livre que utilizamos foram o Maxima para cálculos simbólicos e o GeoGebra para gráficos e como ferramenta de geometria dinâmica. Reproduzimos também o mecânismo clássico para o traçado da conchóide de Nicomedes.

2.1 A origem da Conchóide de Nicomedes

Uma das linhas de desenvolvimento da Matemática na Grécia antiga a que é designada como "geometria superior", voltada para o estudo de curvas e superfícies que não a reta e a circunferência e nem o plano e a esfera. Curiosamente, essas novas curvas e superfícies surgiram de tentativas de resolver o que hoje chamamos de os três problemas clássicos de construção geométrica (duplicação do cubo, trissecção de um ângulo e quadratura do círculo). É importante lembrar que por construção geométrica entende-se o uso dos instrumentos euclidianos constituídos de uma régua sem escala, e um compasso, que difere dos compassos modernos, tinham pelos postulados de Euclides

(325 aC. - 225 aC.), seu uso restrito às regras:

i) Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado e passando por um segundo ponto qualquer.

ii) Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos [7].

Hoje, sabemos que esses três problemas clássicos não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com os instrumentos euclidianos, porém, a busca de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas, como as seções cônicas, curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentes. O primeiro progresso real para a solução do problema da duplicação do cubo que consistia em duplicar o volume de um cubo de aresta a, é atribuído a Hipócrates (470 aC. - 410 aC.) e consiste na redução do problema à construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta de comprimentos a e $2a$. Em linguagem atual, denotando as médias proporcionais por x e y, temos;

$$a \div x = x \div y = y \div 2a.$$

Destas proporções resulta que $x^2 = ay$ e $y = \dfrac{2a^2}{x}$. Eliminando y, obtém-se que $x^3 = 2a^3$; assim, x é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo de aresta a. Depois da redução de Hipócrates, as tentativas subseqüentes de duplicação do cubo tomaram como caminho a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de retas dados. Daí surgiram notáveis soluções na forma de geometria superior, entre elas, a de Arquitas (428 aC. - 350 aC.), a de Eudoxio (410 aC. - 347 aC.) e as duas soluções atribuídas a Menaecmo (380 aC. - 320 aC.) que, segundo alguns autores, introduziu as secções cônicas para esse propósito. Nesta época a visão estática sobre as coisas já não mais se sustentava, e assim, atribui-se a Eratóstenes (276 aC. - 194 aC.) uma solução usando dispositivos mecânicos e outra, por volta da mesma época a Nicomedes (280 aC. - 210 aC.). Uma solução posterior foi oferecida por Apolônio (262 aC. - 190 aC.). Diócles (240 aC. - 180 aC.) inventou uma curva chamada cissóide (Fig. 2.1) com o objetivo de resolver o clássico problema da duplicação do cubo.

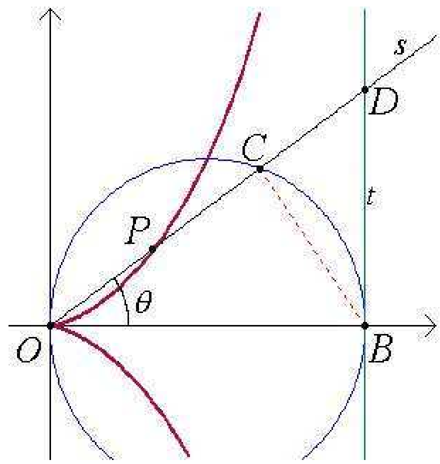


Figura 2.1: Cissóide de Diócles. *Sejam O e B os extremos de um diâmetro fixo numa circunferência de raio a. Seja t a tangente à circunferência em B. Desde O traçamos qualquer secante s que intersecta a circunferência e t nos pontos C e D, respectivamente. O lugar geométrico dos pontos P sobre s tais que $\overline{OP} = \overline{CD}$, para cada posição de s à medida que a mesma gira em torno de O é denominado cissóide.*

Dos três famosos problemas clássicos da antiguidade, o da trissecção do ângulo é o mais popular e o mais fácil de compreender. É provável que os gregos tenham sido levados a este problema através do esforço para construir um polígono regular de nove lados, para o que é necessário trissectar um ângulo de 60^0. O problema da trissecção, parece também ter sido reduzido primeiro ao que os gregos chamavam de um problema de neusis, que do verbo grego *"neuein"* significa apontar [7].

Qualquer ângulo agudo $\angle APC$ (Fig. 2.2) pode ser tomado como o ângulo entre uma diagonal AP e um lado PC de um retângulo $PCAD$.

Seja agora uma reta por P cortando AC em M e o prolongamento de AD em Q de tal forma que $\overline{MQ} = 2a$. Seja B o ponto médio de QM. Então $\overline{BQ} = \overline{AB} = \overline{BM} = \overline{AP}$, e PQ, em M, trissecciona o ângulo $\angle APC$. Assim o problema se reduz àquele de construir um segmento de reta $\overline{MQ}$ de um dado comprimento $2\overline{AP}$ entre AC e o prolongamento de AD, de modo que QM aponte para M conforme a figura (Fig. 2.2).

Se, desconsiderando as regras de uso dos instrumentos euclidianos, nos permitíssemos marcar em nossa régua um segmento $\overline{M'Q'} = 2AP$ e ajustássemos a régua de modo que ela passe por P e tenha as marcas M' e Q' em AC e no prolongamento de AD

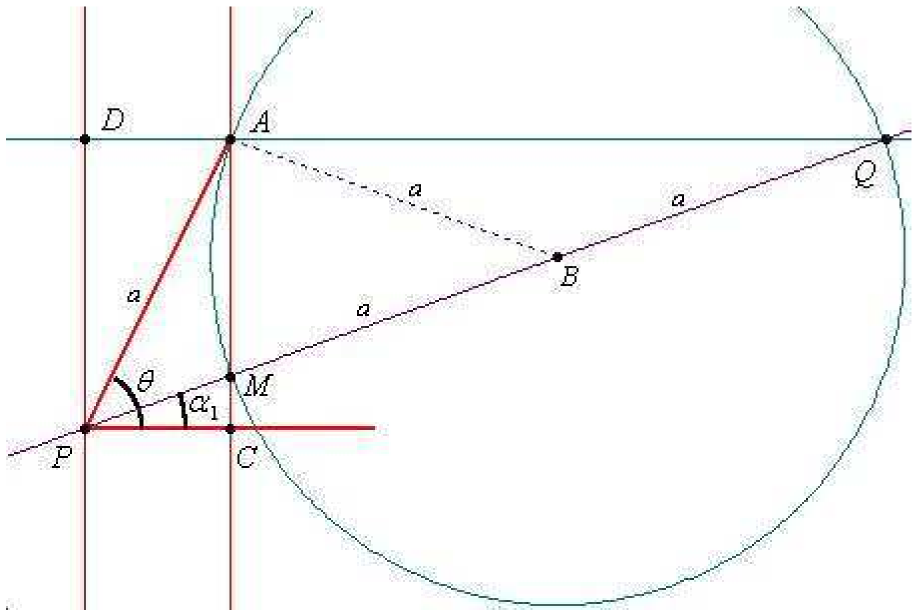


Figura 2.2: Redução do problema da trissecção à neusis.

respectivamente, o ângulo $\angle APC$ estará trisseccionado.

Foram descobertas várias curvas planas superiores que resolvem o problema de neusis ao qual o problema da trissecção pode ser reduzido. Uma delas, traçada por um dispositivo mecânico criado por Nicomedes, que é chamada de Conchóide de Nicomedes, é o objeto escolhido, juntamente com sua generalização para desenvolver este trabalho[1].

Outras curvas transcendentes (não algébricas) que multisseccionam um ângulo num número qualquer de partes são a quadratriz de Hípias (460 aC. - 400 aC.) (Fig. 2.3), e a espiral de Arquimedes (287 aC. - 212 aC.) (Fig. 2.4). A demonstração mais antiga para resolver o problema da trissecção de um ângulo usando cônicas é atribuída a Pappus (300 - 350 dC.).

O problema da quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado, já tinha em 1800 aC. uma "solução" apresentada pelos egípcios e que consistia em tomar um quadrado com lado igual $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado. A despeito de já ter sido demonstrado que a construção é impossível com os instrumentos euclidianos, até hoje esse problema fascina milhares de "quadradores de círculos" [7].

A curva inventada por Hípias, vista na figura (Fig. 2.3), é uma curva que se tornou

[1]Ver Seções 2.4 e 2.5. e capítulo 3

conhecida como quadratriz e que resolve tanto o problema da trissecção de um ângulo quanto o da quadratura de um círculo.

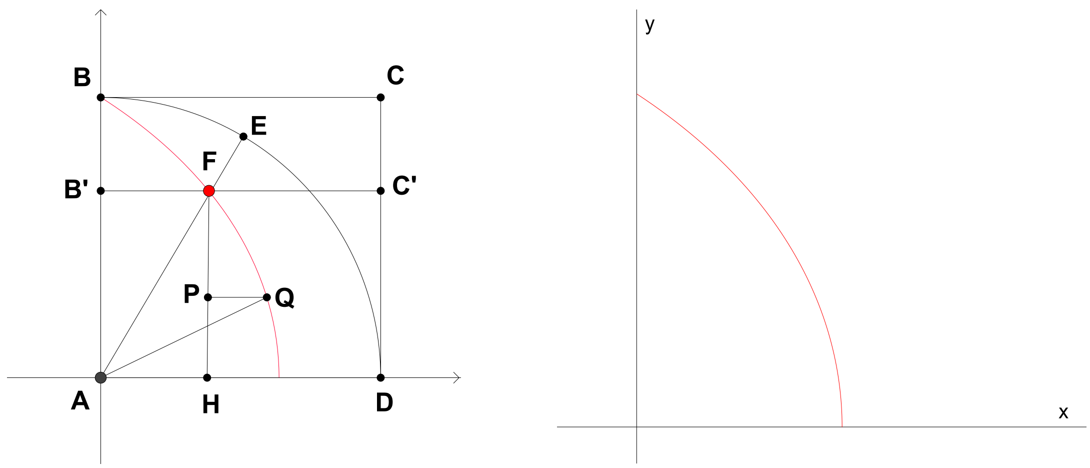


Figura 2.3: Quadratriz de Hípias. *No diagrama da quadratriz de Hípias, $ABCD$ é um quadrado e BED é parte de um círculo com centro em A e raio AB. Enquanto o raio AB gira em torno de A para se deslocar até a posição AD, a linha BC move-se paralela à ela mesma até finalmente coincidir com AD. Então o lugar geométrico do ponto de intersecção, F, do raio giratório AB com a linha móvel BC é a quadratriz. A relação entre os ângulos, arcos e segmentos é tal que temos;* $\dfrac{\angle EAD}{\angle BAD} = \dfrac{\widehat{ED}}{\widehat{BED}} = \dfrac{\overline{FH}}{AB}$. *Assim, tomando* $AB = 1$, $\angle EAD = \widehat{ED} = \dfrac{\overline{FH}\pi}{2}$, *para dividir* $\angle FAD$ *numa dada razão, digamos* $p : q$, *marcamos um ponto* P *sobre a linha divisória* FH *dividindo o raio* AB *proporcionalmente a* $p : q$. *Traçando uma linha por* P, *paralela a* AD *até a quadratriz em* Q, *temos que* AQ *divide o* $\angle FAD$ *na razão* $p : q$.

O gráfico da direita na figura (Fig. 2.3), é construído, apartir da equação que deduziremos abaixo.

Seja $r = f(\theta)$, o ponto F da quadratriz de Hípias é dado por:

$$\begin{cases} x = rcos(\theta) \\ y = rsen(\theta) \end{cases} . \tag{2.1}$$

Sendo $\overline{AB} = a$, das relações do diagrama tiramos que de $\dfrac{y}{a} = \dfrac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$, isto é, $\dfrac{rsen(\theta)}{a} = \dfrac{2\theta}{\pi}$, ou seja, $r = \dfrac{2\theta}{\pi}\dfrac{a}{sen(\theta)}$ e assim podemos reescrever a equação (2.1) e obter:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\theta}{\pi}\dfrac{a}{sen(\theta)}cos(\theta) = \dfrac{2\theta}{\pi}a \;\; cotg(\theta) \\ y = \dfrac{2\theta}{\pi}\dfrac{a}{sen(\theta)}sen(\theta) = a \;\; \dfrac{2\theta}{\pi} \end{cases} . \tag{2.2}$$

Donde tiramos $x = y \;\; cotg(\dfrac{y\pi}{2a})$, a equação da quadratriz de Hípias.

Já vimos que apesar de a solução do problema da trissecação do ângulo não poder ser resolvida com régua não graduada e compasso é extremamente fácil de executar a construção com instrumentos mecânicos e estes deram origem a novas curvas, entre elas a espiral de Arquimedes que é uma curva descrita por um ponto que se desloca a partir da origem com uma velocidade uniforme ao longo de uma semi-reta que gira, também com uma velocidade angular uniforme, em torno da origem. A origem da semi-reta é o pólo da espiral; a distância de um ponto da espiral ao pólo é o raio vetor desse ponto. Os ângulos de rotação são os ângulos polares que se contam a partir de uma posição inicial da semi-reta, designada por eixo polar, de zero para infinito. A cada valor do ângulo polar θ corresponde um valor para o raio vector ρ. As espirais destinguem-se segundo a relação que liga o raio vetor com o ângulo polar. No caso da espiral de Arquimedes, esta relação é expressa pela equação $\rho(\theta) = a\,\theta$. Neste caso, o raio vetor varia proporcionalmente ao ângulo polar.

Apresentamos a seguir, uma "solução" do problema da trissecção do ângulo com a espiral de Arquimedes.

2.1.1 Trissecção de um ângulo - A "Solução" de Arquimedes

Um ângulo $\angle AOB$ também pode ser trisseccionado ou mais geralmente, multisseccionado com a espiral de Arquimedes $r = a\,\theta$. Supondo que OB corte a espiral em P, façamos a trissecção do segmento OP com P_1 e P_2. Se as circunferências de centro O e raios $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ cortam a espiral em T_1 e T_2 trisseccionamos o ângulo $\angle AOB$, $\left|\vec{OP_2}\right| = \dfrac{\left|\vec{O}\,P\right|}{3} = \dfrac{a\,\theta}{3}$ (Fig. 2.4).

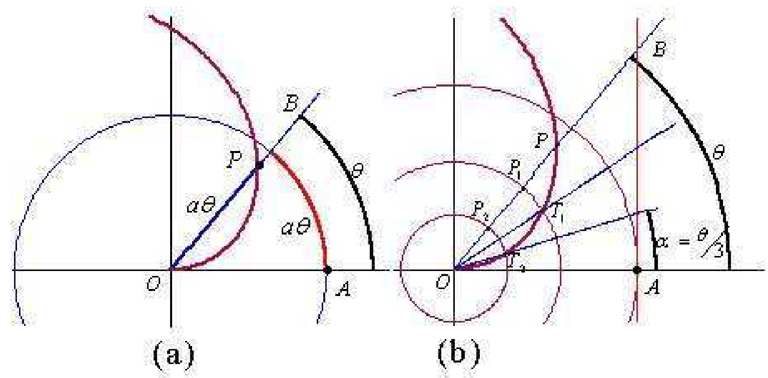


Figura 2.4: Trissecção do ângulo $\angle AOB$ com a espiral de Arquimedes.

2.2 O método da trissecção de um ângulo agudo que inspirou Nicomedes a criar a conchóide

A solução de Nicomedes para o problema da trissecção de um ângulo, mesmo contrariando as regras de uso dos instrumentos euclidianos, deu origem a uma das mais antigas curvas superiores. Seja um ângulo agudo com vértice em P, conforme a figura (Fig. 2.5), sobre um dos lados marca-se o ponto A tal que, $\overline{PA} = a$ e por ele traçamos uma perpendicular ao outro lado do ângulo definindo o ponto C, traça-se ainda por A uma paralela a PC. Tomamos então uma régua com dois pontos M e Q, previamente marcados, com $\overline{MQ} = 2a$. Agora é só ajustar a régua $\overline{MQ}$, passando pelo vértice P, de modo que o ponto Q pertença à paralela e M pertença à perpendicular traçada por A e assim, teremos o segmento $\overline{PM}$ definindo o ângulo $\angle MPC = \alpha_1$.

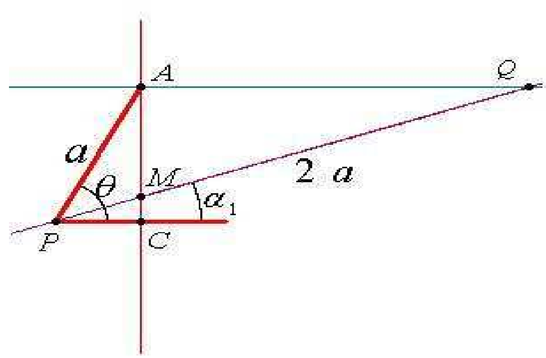


Figura 2.5: A solução de Nicomedes - Inspiração para o Conchógrafo.

Para mostrar que o ângulo α_1 é igual a um terço do ângulo θ, partimos de que ângulos alternos internos são iguais e este fato, por sua vez é uma conseqüência do quinto postulado de Euclides, cuja negação dá origem às "geometrias não euclidianas". Traçamos o segmento AB, onde B é o ponto médio de MQ (Fig. 2.6), então, como $\overline{AP} = a$, $\overline{MQ} = 2a$ e B é o ponto médio de $\overline{MQ}$, temos, $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{BM}$. Agora precisamos mostrar que o segmento $\overline{AB}$ é igual aos segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{BM}$.

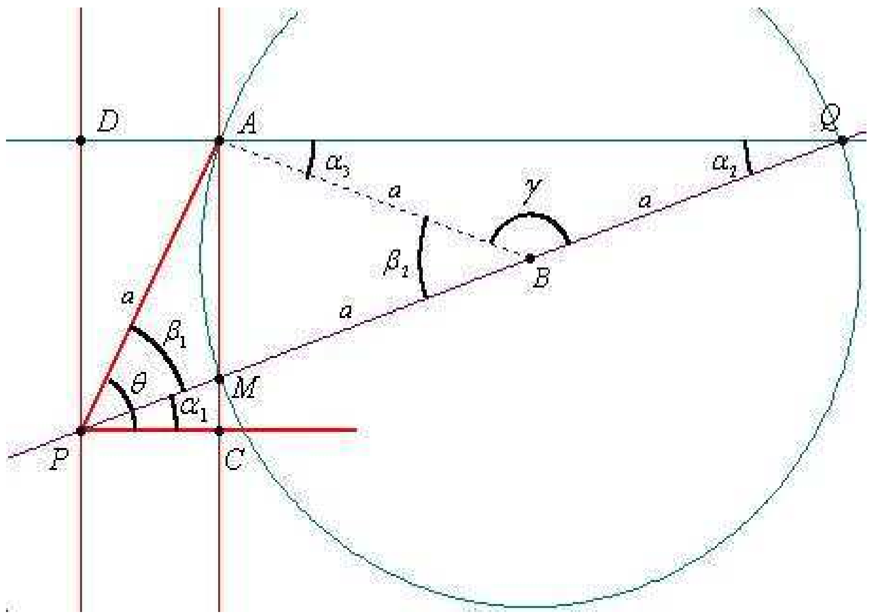


Figura 2.6: Trissecção do $\angle APC$: $\overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{BM} = \overline{AP}$, e $\theta = \beta_1 + \alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_1 = 3\alpha_1$.

Por construção o ângulo $\angle CAQ$ é reto, isto é, o triângulo ΔMAQ é retângulo em A e, portanto, é inscritível em um círculo de diâmetro $\overline{MQ}$, e como já foi dito, B é o ponto médio de $\overline{MQ}$, assim, sendo o triângulo retângulo ΔMAQ inscritível na circunferência de centro em B, obviamente ela contém os pontos M, A e Q , então $\overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{BM}$, uma vez que são todos raios da mesma circunferência, logo $\overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{BM} = \overline{AP}$. Como α_1 e α_2 são ângulos alternos internos, temos que $\alpha_1 = \alpha_2$. Devemos provar que $\alpha_2 = \alpha_3$ e que $\beta_1 = \beta_2$. Já vimos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BQ}$ são iguais, então o triângulo ΔABQ é isósceles e também temos que $\overline{AP}$ e $\overline{AB}$ são iguais, com isso o triângulo ΔPAB é isósceles. Como todo triângulo isósceles tem os ângulos das bases iguais, então, no triângulo ΔABQ, temos $\alpha_2 = \alpha_3$ e no triângulo ΔPAB, temos $\beta_1 = \beta_2$. Isto posto, resta provar que os ângulos $\alpha_1 = \dfrac{1}{3}\theta$.

Assim, sendo β_2 o ângulo externo do triângulo isósceles ΔABQ, temos; $\beta_2 = (180^0 - \gamma) = 180^0 - (180^0 - 2\alpha_1) = 2\alpha_1$. Logo, como $\theta = \beta_1 + \alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_1 = 3\alpha_1$, então $\alpha_1 = \dfrac{\theta}{3}$, e a trissecção pelo método de Nicomedes está demonstrada.

2.3 O compasso de Nicomedes

Baseado na construção descrita na seção anterior, Nicomedes idealizou um procedimento e um aparato mecânico capazes de traçar uma curva, que conteria o ponto Q, parte do segmento PQ que contém o ponto M apontado como o ponto que divide o segmento AC de tal forma que o ângulo $\angle MPC$ seja a terça parte do ângulo $\angle APC$ (Fig.2.6).

O mecanismo conhecido como Compasso de Nicomedes, é relativamente simples, conforme podemos ver na figura (Fig. 2.7).

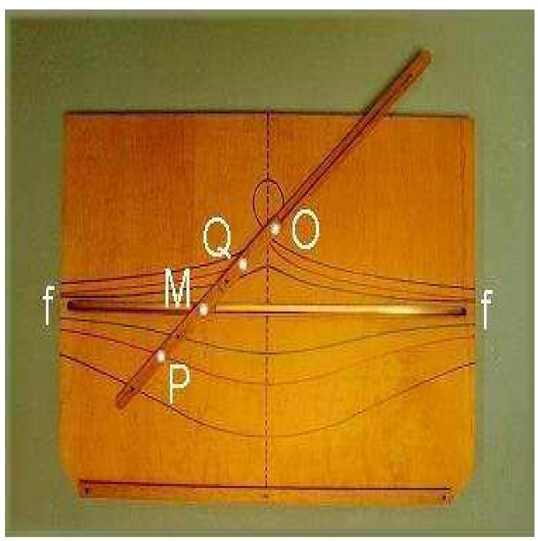


Figura 2.7: Foto do compasso de Nicomedes.

Para descrever a construção e o princípio de funcionamento, vamos utilizar o esboço do "conchógrafo" da figura (Fig. 2.8), onde a peça A em forma de um T contém um rasgo, que representa uma reta ℓ, na barra horizontal, e um pino guia, fixo na barra vertical, representando o pólo P. A peça B é uma barra que possui na sua extremidade um riscador, representando o ponto Q, um pino M que percorre o rasgo horizontal de A e um rasgo que desliza sobre o pino guia P. Uma vez definidas as constantes d e k

o compasso permite o traçado da conchóide da reta ℓ, com pólo em P e constante k, fazendo-se o ponto M percorrer o rasgo ℓ enquanto a barra desliza e gira em torno do pólo e o traçador Q desenha o ramo positivo da referida curva.

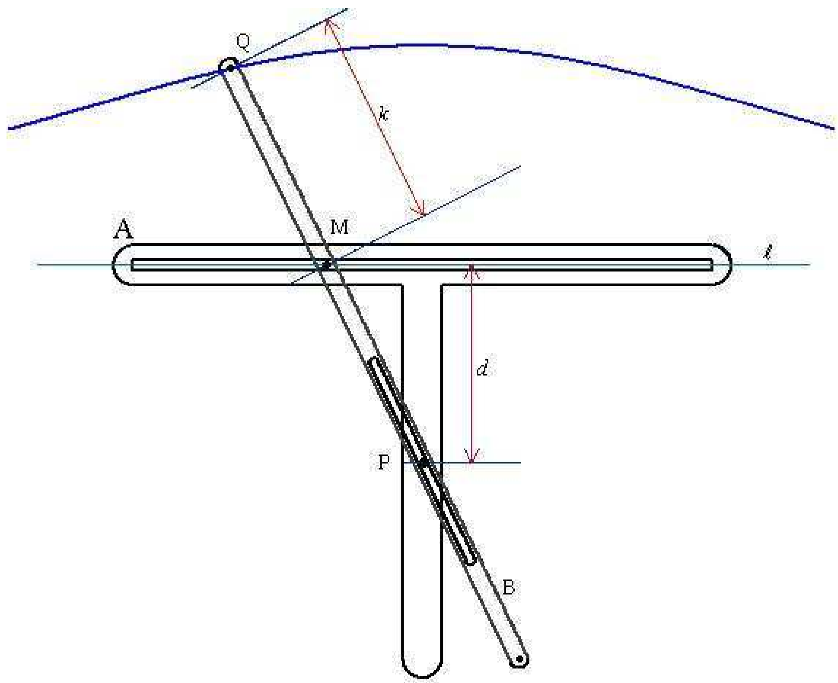


Figura 2.8: Esboço do Compasso de Nicomedes.

Se for adaptado um outro riscador, Q_1, entre o pólo P e o ponto M de modo que $\overline{MQ_1} = k$, este traçará o que chamamos de o ramo negativo de conchóide, já conhecido por Nicomedes, que se refere a este como conchóide do tipo I, II ou III, conforme as características geométricas dessa curva.

2.3.1 A trissecção do ângulo agudo com a conchóide de Nicomedes

A Conchóide de Nicomedes pode ser usada para resolver o clássico problema grego da trissecção de um ângulo. Dado um ângulo agudo $\angle APC$, queremos, com a ajuda da conchóide, construir um ângulo que é igual a um terço do ângulo dado (Fig. 2.9).

Seja, pois o ângulo agudo $\angle APC$ dado. Trace uma reta ℓ por A, perpendicular a PC, assim, sendo P o pólo, temos nossa primeira constante d, definida como sendo

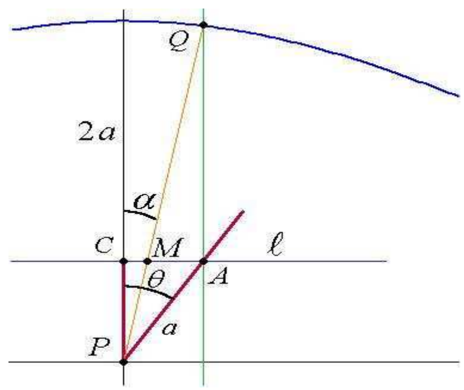


Figura 2.9: Trissecção do Ângulo $\angle APC$ com a Conchóide de Nicomedes.

$d = |\overline{PC}|$. Como vimos na secção anterior, (Fig. 2.6), para trissectar o ângulo, necessitamos de ter, para $a = |\overline{AP}|$, a medida $|\overline{MQ}| = 2a$, e isso define nossa segunda constante, k, que será regulada no compasso, sendo que essas constantes são justamente as que caracterizam a conchóide da reta como a conchóide especial denominada *Conchóide de Nicomedes*. Durante nosso trabalho, tivemos a oportunidade de confeccionar e utilizar um prótótipo como o da figura (Fig. 2.8) para, seguindo o roteiro descrito abaixo, proceder a trisecção de um ângulo agudo com boa aproximação.

Tracemos agora a conchóide da reta ℓ, por A e C, com pólo em P e constante k.

O próximo passo consiste em traçar por A uma reta m paralela a PC que intersecta a conchóide em Q e, então o, o segmento $\overline{PQ}$ trisecciona o ângulo $\angle APC$, isto é, o ponto M, na intersecção de $\overline{PQ}$ com a reta ℓ é tal que $\angle CPM = \frac{1}{3}\angle APC$ $(\alpha = \frac{\theta}{3})$. O elemento essencial para a trissecção do ângulo feita com a conchóide é a construção do ponto Q, na reta m, tal que a distância $|\overline{MQ}| = 2|\overline{PA}|$, onde M é a intersecção de ℓ com a reta PQ. Note que, a escolha do ponto A no lado PA do ângulo, determinará as constantes d e k, tais que, $d = |\overline{PC}|$ e conseqüentemente $k = 2|\overline{AP}|$, definindo a conchóide de Nicomedes, e ainda, para cada ângulo, é necessária uma nova conchóide. Isto está em contraste com algumas trissectrizes como a quadratriz de Hipias ou a espiral de Arquimedes, onde todos os ângulos podem ser trissectados pela mesma curva dada. Tanto quanto sabemos, todas as aplicações da conchóide feitas na antiguidade foram desenvolvidas pelo próprio Nicomedes. Parece ter sido só depois do século XVI quando a obra de Pappus e Eutocius (480 - 540 dC.) descrevendo a curva, tornou-a conhecida, que o interesse por ela foi retomado e assim a conchóide tornou-se um modelo utilizado por matemáticos do século XVII, para ilustrar seus novos métodos de cálculo e geometria analítica. Podia também ser utilizada, como foi o objetivo de sua invenção, para "resolver" os problemas da trissecção do ângulo e da duplicação do cubo, e conseqüentemente para cada problema cúbico ou quártico. Por esta razão Newton (1643 - 1727) sugeriu que a conchóide fosse tratada como uma curva padrão [12].

2.4 As equações da conchóide de Nicomedes

Partindo do funcionamento do mecanismo de traçagem vamos escrever equações algébricas que representem a conchóide da reta, a partir de diferentes parametrizações.

2.4.1 Equação cartesiana

Colocando-se o conchógrafo da figura (Fig. 2.8) sobre o plano cartesiano de modo que o pólo P coincide com a origem e o rasgo horizontal com a reta ℓ descrita por $\ell(x) = (x, d)$ deduzir-se a equação da conchóide, sob o olhar cartesiano a partie da figura (Fig.2.10).

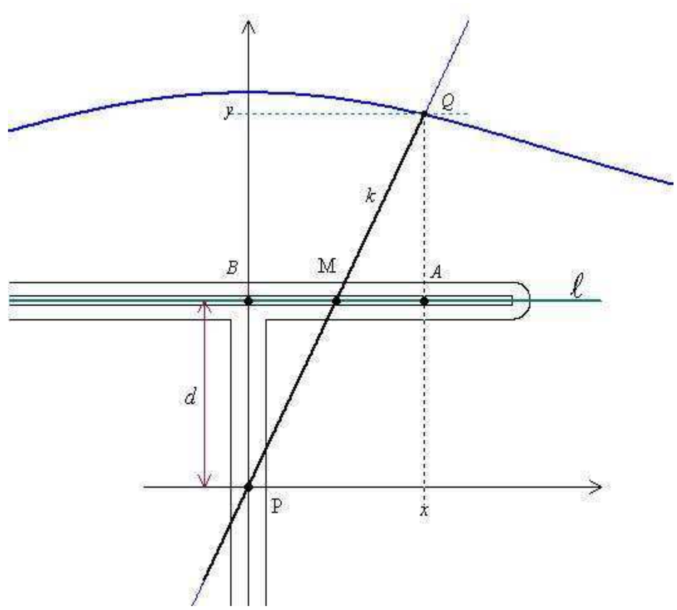


Figura 2.10: Diagrama para Equação Cartesiana.

Temos ΔPBM e ΔMAQ, triângulos semelhantes, donde tiramos a relação

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{MP}}, \tag{2.3}$$

assim, em coordenadas cartesianas temos; $\dfrac{y-d}{d} = \dfrac{k}{\sqrt{(x^2+y^2)}-k}$, $k > 0$, donde,

$$(x^2+y^2)(y-d)^2 = y^2k^2 \tag{2.4}$$

é a equação cartesiana, na forma implícita, que descreve a conchóide de uma reta ℓ com pólo na origem e constante k, se assumirmos valores positivos e negativos para k (ou para $(y-d)$) teremos dois ramos, como veremos na seção 2.6.

2.4.2 Equações paramétricas

Parâmetro Natural $x = t$**.**

Uma outra apresentação da Conchóide de Nicomedes, assumida como a conchóide de uma reta ℓ com relação a um ponto fora dela (Fig. 2.11), é dada a seguir.

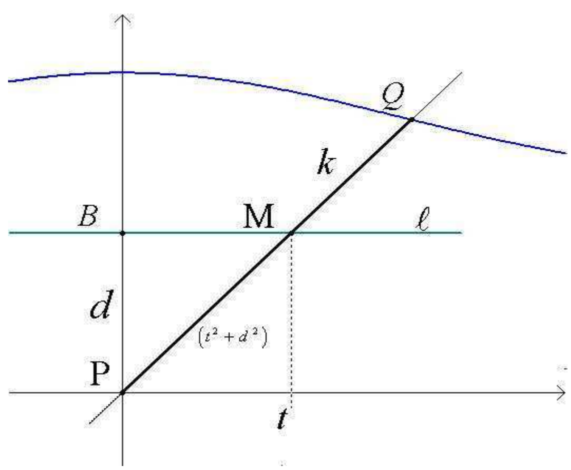


Figura 2.11: Diagrama para equação paramétrica da conchóide com parâmetro natural $x = t$.

Seja a reta $y = d$ e o pólo P na origem, então a conchóide desta reta com constante k, pode ser escrita como o vetor $\overrightarrow{PQ}$, onde,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + k\frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|}, \tag{2.5}$$

ou, em coordenadas;

$$Q(t) = (t, d) + k\frac{(t, d)}{\sqrt{t^2 + d^2}} \tag{2.6}$$

Assim, temos que a equação paramétrica da conchóide da reta ℓ com pólo P na origem e constante k, dada em função do parâmetro natural t é:

$$Q(t) = \left(t + k\frac{t}{\sqrt{t^2 + d^2}}, d + k\frac{d}{\sqrt{t^2 + d^2}}\right) \tag{2.7}$$

Distância $d(PM) = t$ ***como Parâmetro.***

Outra parametrização muito freqüente na bibliografia é a que, segundo a figura (Fig. 2.12), utiliza como parâmetro a distância do pólo à reta em cada instante e de acordo com a equação (2.5) fornece,

$$Q(t) = \left(\sqrt{t^2 - d^2}, d\right) + k\frac{(\sqrt{t^2 - d^2}, d)}{\sqrt{(t^2 - d^2) + d^2}} \tag{2.8}$$

donde temos,

$$Q(t) = \left(\sqrt{t^2 - d^2}\left(1 + \frac{k}{t}\right), d\left(1 + \frac{k}{t}\right)\right), \qquad d \leq t < \infty. \tag{2.9}$$

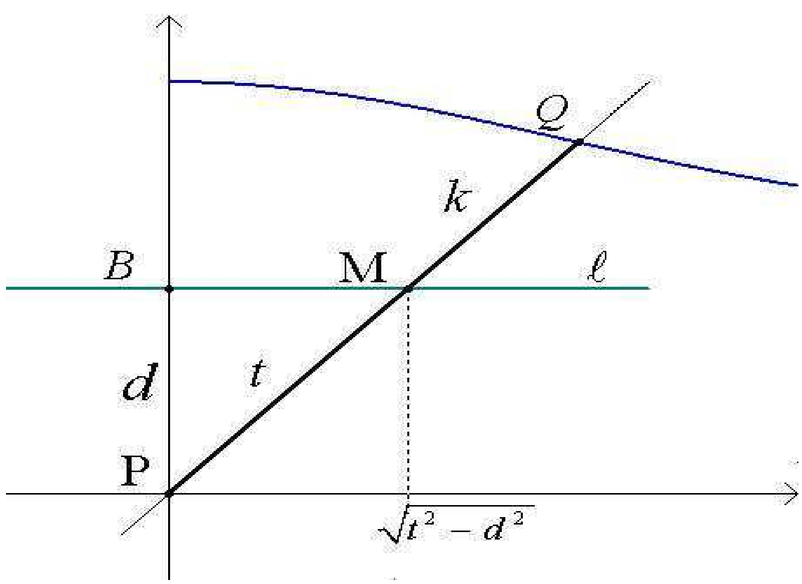


Figura 2.12: Parametrização da conchóide pela distância do pólo à reta em cada instante.

O Ângulo θ como Parâmetro.

Se considerarmos agora o parâmetro como sendo o ângulo θ, e na equação (2.9) substituirmos $t = \dfrac{d}{sen(\theta)}$, temos;

$$Q(\theta) = \left(\sqrt{\left(\frac{d}{sen(\theta)}\right)^2 - d^2} \left(1 + \frac{k}{\dfrac{d}{sen(\theta)}}\right), d\left(1 + \frac{k}{\dfrac{d}{sen(\theta)}}\right)\right),$$

donde resulta

$$Q(\theta) = \left(\left(\frac{d}{sen(\theta)} + k\right) cos(\theta), d + ksen(\theta)\right), \qquad 0 < \theta < 90. \tag{2.10}$$

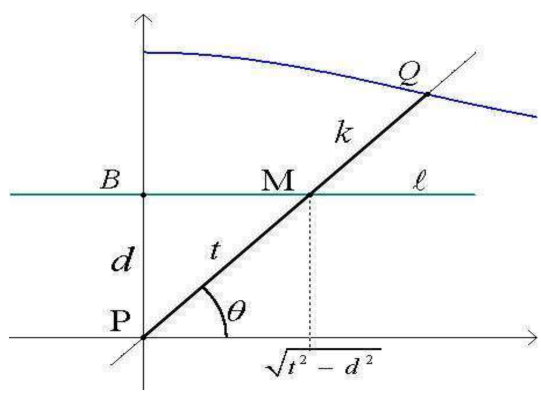


Figura 2.13: Parametrização pelo ângulo.

2.4.3 Equação na forma polar

A equação polar, pode ser facilmente obtida, se tomarmos a reta ℓ, cuja equação polar em relação à origem é $\ell = \rho(\theta) = \dfrac{d}{sen(\theta)}$ e pela figura (Fig. 2.14), vemos que a conchóide é dada por $r = \rho(\theta) + k$, então temos;

$$r = \frac{d}{sen(\theta)} + k, \tag{2.11}$$

que gera o ramo positivo para $0 < \theta < \pi$, e o ramo negativo para $\pi < \theta < 2\pi$, ou

$$r = \frac{d}{sen(\theta)} - k, \tag{2.12}$$

que gera o ramo positivo para $\pi < \theta < 2\pi$, e o ramo negativo para $0 < \theta < \pi$.

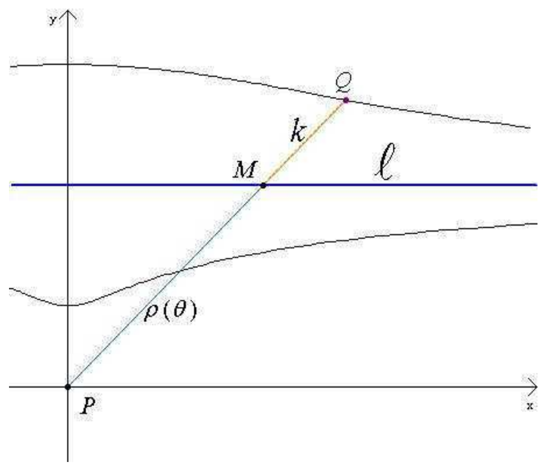


Figura 2.14: Gráfico polar da reta ℓ e da conchóide.

2.4.4 Três representações paramétricas da conchóide de Nicomedes

Resumimos aqui as três representações paramétricas da conchóide já deduzidas e ilustramos na figura (Fig. 2.15) a relação entre os parâmetros θ, t e z.

$$Q(\theta) = \left(\left(\frac{d}{sen(\theta)} + k\right) cos(\theta), \left(\frac{d}{sen(\theta)} + k\right) sen(\theta)\right), \quad 0 < \theta < 2\pi, \qquad (2.13)$$

$$Q(t) = \left(\sqrt{t^2 - d^2}\left(1 + \frac{k}{t}\right), d\left(1 + \frac{k}{t}\right)\right), \quad d \leq t < +\infty, \qquad (2.14)$$

e

$$Q(z) = \left(z + k\frac{z}{\sqrt{z^2 + d^2}}, d + k\frac{d}{\sqrt{z^2 + d^2}}\right), \quad -\infty < z < +\infty. \qquad (2.15)$$

2.5 Referências à conchóide no Século XVII

Conforme comentado na seção 2.3, a conchóide de Nicomedes foi uma curva modelo para os matemáticos do Séc. XVII e aparece como exemplo e motivação em trabalhos de Étienne Pascal (1588 - 1651) onde os limaçons[2] por ele propostos são conchóides

[2]Veja cap 3, seção 3.1

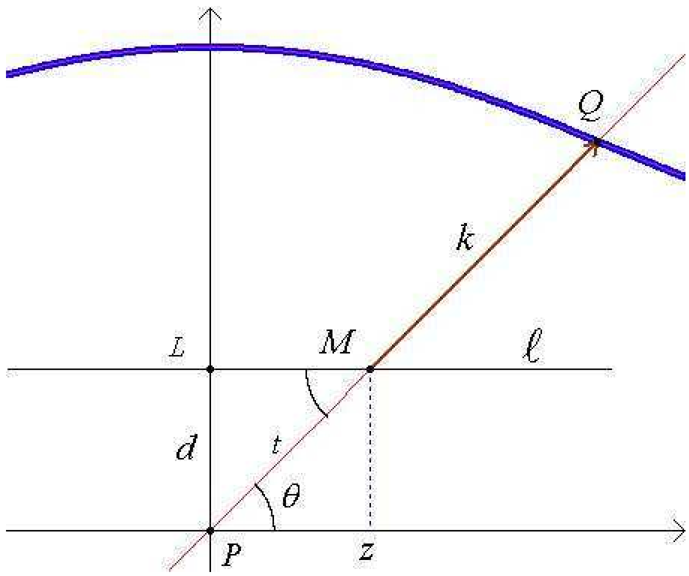


Figura 2.15: Parametrizações da conchóide de Nicomedes.

construídas a partir de círculos e em trabalhos de John Bernoulli (1667 - 1748) para expressar a derivada como um quociente de taxas, derivação implícita e na dedução das propriedades das tangentes a curvas.

2.5.1 O coeficiente angular da tangente como quociente de taxas

Como sabemos, a notação de Leibniz (1646 - 1716) é muito apropriada para expressar os resultados que conhecemos hoje como derivação composta de funções reais (regra da cadeia) e da inversa local (teorema da função inversa), e possibilita a dedução do coeficiente angular da tangente a uma curva plana como um quociente de taxas, isto é, se para uma curva diferenciável dada na forma paramétrica, $x = f_1(w)$ e $y = f_2(w)$, com $\dfrac{dx}{dy} \neq 0$ para algum valor de w, mostra-se que x é localmente inversível e que para $w = f_1^{-1}(x)$ vale $\dfrac{dw}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dw}}$. Como pela regra da cadeia $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dw}\dfrac{dw}{dx}$, concluímos que o coeficiente angular de uma reta tangente à curva num ponto, que é naturalmente expresso por limite coeficiente de retas secantes e leva à noção de derivada neste ponto é dado por;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dw}}{\frac{dx}{dw}}. \tag{2.16}$$

Naturalmente a expressão acima deverá dar o mesmo resultado, independente do parâmetro w que escolhermos para parametrizar uma curva. Ilustramos este fato com as três parametrizações apresentadas da conchóide. Tomando $w = t$, $w = z$ e $w = \theta$ temos respectivamente;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

assim, derivando cada uma das equações (2.13), (2.14) e (2.15) respactivamente em relação aos parâmetros θ, t e z temos:

$$Q^{'}(\theta) = \left(\frac{-ksen^3(\theta) + dsen^2(\theta) + dcos^2(\theta)}{sen^2(\theta)}, kcos(\theta)\right), \tag{2.17}$$

$$Q^{'}(t) = \left(\frac{t^3 + d^2k}{t^2\sqrt{t^2 - d^2}}, \frac{-dk}{t^2}\right), \tag{2.18}$$

$$Q^{'}(z) = \left(\frac{kd^2 + \left(\sqrt{z^2 + d^2}\right)^3}{\left(\sqrt{z^2 + d^2}\right)^3}, \frac{-kdz}{\left(\sqrt{z^2 + d^2}\right)^3}\right), \tag{2.19}$$

donde tiramos o coeficiente angular da reta tangente à conchoide para cada uma das equações (2.17), (2.18) e (2.19);

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\left(kcos(\theta)sen^2(\theta)\right)}{ksen^3(\theta) + dsen^2(\theta) + dcos^2(\theta)}, \tag{2.20}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-dk(\sqrt{t^2 - d^2})}{d^2k + t^3}, \tag{2.21}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{-kdz}{kd^2 + (z^2 + d^2)\sqrt{z^2 + d^2}}. \tag{2.22}$$

Temos então que as equações (2.20), (2.5.2) e (2.22) são iguais.

Estas igualdades podem também ser verificadas diretamente a partir das relações geométricas entre os parâmetros t, z e θ. A conchóide é interesante para ilustrar o cálculo do coeficiente angular como quociente e o método da derivada implícita, já utilizado por Leibniz. No caso da conchóide de Nicomedes dada pela equação cartesiana na forma implícita:

$$(y-d)^2(x^2+y^2)=k^2y^2, \tag{2.23}$$

observa-se que, se quisermos expressar y como uma função de x a partir da equação , é necessário resolver uma equação de quarto grau para encontrar x. Mas derivando implicitamente, esta equação, temos;

$$2(y-d)\frac{dy}{dx}(x^2+y^2)+(y-d)^2(2x+2y\frac{dy}{dx})=2k^2y\frac{dy}{dx},$$

donde:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x(y-d)^2}{(y-d)(x^2+y^2)+y(y-d)^2-k^2y}. \tag{2.24}$$

2.5.2 A construção da tangente à conchóide por J. Bernoulli

Nesta seção desenvolvemos com detalhes, usando a notação atual, um interessante resultado do final do século XVII. Conforme citado em [8], John Bernoulli, que estudou com Leibniz, demonstra em um trabalho de 1691/1692 uma construção geométrica da reta tangente a conchóide de Nicomedes num ponto. Esta é descrita considerando a figura (Fig. 2.16), onde *a reta tangente a conchóide num ponto Q pode ser construída como uma paralela à reta que liga M e F, sendo F tal que $\overline{FQ}$ é perpendicular ao eixo de simetria da conchóide e $\overline{PF}$ é perpendicular a PQ, e M é a interseção de $\overline{PQ}$ com a reta geratriz ℓ.*

Denotando por M o ponto tal que os triângulos ΔPML e ΔPQF sejam semelhantes, então a tangente em Q é paralela à reta que liga M e F (Fig. 2.16).

Podemos verificar este fato usando as deduções para o coeficiente angular da tangente como quocientes de derivadas das funções obtidas na seção anterior. Usando a

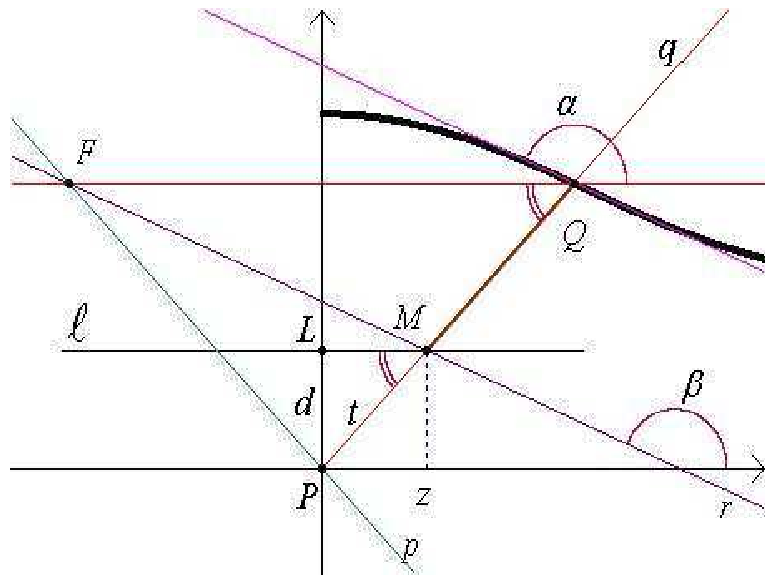


Figura 2.16: A construção da Tangente à Conchóide de Nicomedes em Q.

parametrização da conchóide pelo parâmetro t, temos que as coordenadas de um ponto Q da conchóide são;

$$Q = \left(\sqrt{t^2 - d^2}\left(1 + \frac{k}{t}\right), d\left(1 + \frac{k}{t}\right)\right). \tag{2.25}$$

Por construção o ponto F está sobre a horizontal traçada por Q. Logo,

$$F = \left(\xi, d(1 + \frac{k}{t})\right), \tag{2.26}$$

e as retas q por PQ e p por PF são perpendiculares ($\overline{PF} \perp \overline{PQ}$). Então, de $\left\langle \overline{PF}, \overline{PQ} \right\rangle = 0$, tiramos que $\xi = \dfrac{-d^2(t+k)}{t\left(\sqrt{t^2 - d^2}\right)}$.

Conhecidas as coordenadas de $M = \left(\sqrt{t^2 - d^2}, d\right)$ e de $F = \left(\dfrac{-d^2(t+k)}{t\sqrt{t^2 - d^2}}, d\left(1 + \dfrac{k}{t}\right)\right)$, dois pontos da reta r, podemos determinar o coeficiente angular m de r que é dado por

$$m = \frac{-dk\sqrt{t^2 - d^2}}{t^3 + d^2 k} \tag{2.27}$$

Como o coeficiente angular m da reta r é igual à tangente do ângulo, β, que essa reta faz com o eixo Ox no sentido anti-horário, temos

$$m = tg(\beta) = \frac{-dk\sqrt{t^2 - d^2}}{t^3 + d^2k}. \tag{2.28}$$

$\frac{dy}{dx}|_{(Q)}$ é o coeficiente angular da reta tangente a uma curva num dado ponto Q e, no nosso caso, a tangente do ângulo α que esta reta faz com o eixo horizontal é, pelas equações (2.16) e (2.5.2):

$$m = tg(\alpha) = \frac{dy}{dx}|_{(Q)} = \frac{-dk\sqrt{t^2 - d^2}}{t^3 + d^2k}. \tag{2.29}$$

Portanto, é imediato de (2.28) e (2.29) que:

$$m = tg(\alpha) = \frac{dy}{dx}|_{(Q)} = \frac{-dk\sqrt{t^2 - d^2}}{t^3 + d^2k} = tg(\beta),$$

logo os ângulos α e β são iguais e assim, demonstramos que as retas r e a reta tangente à Conchóide de Nicomedes em Q são paralelas.

Ou ainda usando a parametrização pelo parâmetro z que resulta em (2.15), temos que o coeficiente angular da reta tangente à conchóide num dado ponto Q é dado pela equação , denotando o ângulo que esta reta faz com o eixo horizontal por α temos;

$$m = tg(\alpha) = \frac{dy}{dx}|_{(Q)} = \frac{-kdz}{kd^2 + (z^2 + d^2)\sqrt{z^2 + d^2}}. \tag{2.30}$$

Por construção, temos, igualmente $F = \left(\xi, d\left(1 + \frac{k}{\sqrt{z^2 + d^2}}\right)\right)$ e $Q = \left(z + k\frac{z}{\sqrt{z^2 + d^2}}, d + k\frac{d}{\sqrt{z^2 + d^2}}\right)$ na mesma reta horizontal, e ainda as retas PF e PQ são perpendiculares, o que implica $\xi = \frac{-d^2}{z}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{z^2 + d^2}}\right)$, ou seja, o ponto F é

$$F = \left(\frac{-d^2}{z}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{z^2 + d^2}}\right), d\left(1 + \frac{k}{\sqrt{z^2 + d^2}}\right)\right)$$

Assim, sendo r a reta por M e F seu coeficiente angular m é;

$$m = \frac{-kdz}{kd^2 + (z^2 + d^2)\sqrt{z^2 + d^2}} \tag{2.31}$$

com isso, sendo β o ângulo que a reta r, faz com o eixo Ox, temos

$$tg(\beta) = m = \frac{-kdz}{kd^2 + (z^2 + d^2)\sqrt{z^2 + d^2}}. \tag{2.32}$$

Assim, como queríamos mostrar, das equações (2.30) e (2.32), verifica-se:

$$tg(\alpha) = \frac{dy}{dx}|_{(Q)} = \frac{-kdz}{kd^2 + (z^2 + d^2)\sqrt{z^2 + d^2}} = m = tg(\beta)$$

ou seja, os ângulos α e β são iguais, e, portanto a reta r é paralela à reta tangente à Conchóide de Nicomedes em Q.

2.6 A Geometria da Conchóide de Nicomedes

No capítulo 3 iremos introduzir uma aplicação especial da conchóide geral, fazendo a construção da conchóide, a partir de uma curva original plana qualquer que não seja a reta, especialmente a aplicação desta sobre a parábola, que por sua vez também é passível de construção por aparato mecânico, mas nesta seção trabalharemos para estabelecer as principais características geométricas da conchóide da reta.

A conchóide geral da reta descreve uma família de curvas a um parâmetro k. Como já comentamos, a conchóide de Nicomedes é um caso especial onde a constante k é escolhida em função da geometria do instrumento e do ângulo que se quer trissectar, são casos especiais da conchóide geral. A partir de curvas genéricas, Nicomedes já reconheceu três formas distintas que podem ser vistas nessa família de curvas [10]. A expressão geral da conchóide da reta, dada pela equação (2.5), onde k é uma constante positiva, define para o sinal + o ramo positivo da conchóide, isto é, aquele ramo cujos pontos localizam-se do lado da reta que é oposto ao pólo. O sinal $-$ define o ramo negativo, isto é, aquele ramo cujos pontos localizam-se do mesmo lado do pólo. Como vimos, sendo d a distância do pólo a reta ℓ e k a constante, teremos a equação paramétrica da conchóide dada na forma vetorial;

$$Q(t) = (t, d) \pm k\frac{(t, d)}{\sqrt{t^2 + d^2}}, \qquad -\infty < t < +\infty \tag{2.33}$$

Diferentes valores de k, produzem diferentes curvas, cujo comportamento está diretamente vinculado à relação $\frac{d}{k}$, conforme pode ser visto na figura (Fig. 2.17).

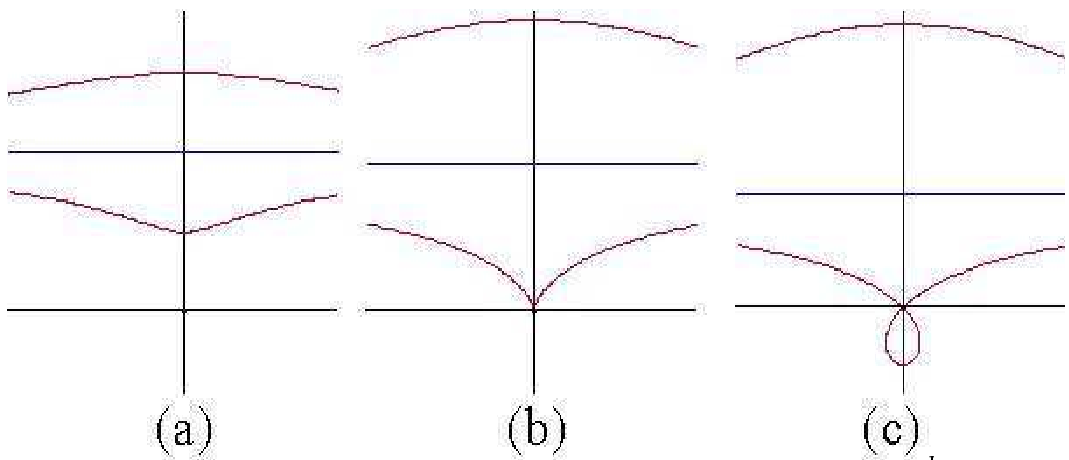


Figura 2.17: Conchóide da reta $\ell(t) = (t, d)$ com pólo $P(0,0)$ e $(\frac{d}{k} > 1)$ **(a)**; $(\frac{d}{k} = 1)$ **(b)** e $(\frac{d}{k} < 1)$ **(c)**.

Seguiremos discutindo com mais detalhe a existência de cúspide e laço nos ramos da conchóide, os quais caracterizam o que costuma-se denominar tipos I, II e III da conchóide.

Analisaremos o comportamento da conchóide da reta, com pólo na origem e constante k, dada por $Q(t) = (x(t), y(t))$, considerando os ramos positivo e negativo, em cada caso da relação $\frac{d}{k}$. Vamos mostrar que para $0 < k < d$ os dois ramos da conchóide são curvas regulares (suaves) (Fig. 2.17(a)), para $k = d$, no ramo negativo teremos uma cúspide[3] (Fig. 2.17(b)), e que, quando $k > d$ (Fig. 2.17(c)), no ramo negativo ocorre um laço.

Inicialmente vamos determinar os possíveis pontos singulares da conchóide dada pela parametrização conforme a equação (2.15).

i) Para o ramo positivo da conchóide, temos que a derivada é dada pela equação (2.19) que nunca se anula, donde concluímos que **o ramo positivo da conchóide é sempre uma curva regular**.

ii) Considerando a mesma parametrização, para o ramo negativo da conchóide, temos;

$$Q(z) = \left(z - k\frac{z}{\sqrt{z^2 + d^2}}, d - k\frac{d}{\sqrt{z^2 + d^2}}\right), \tag{2.34}$$

[3]Ver seção 1.1 - Singularidade tipo cúspide.

cuja derivada é,

$$Q^{'}(z) = \left(-\frac{d^2k - \left(\sqrt{z^2+d^2}\right)^3}{\left(\sqrt{z^2+d^2}\right)^3}, \frac{dkz}{\left(\sqrt{z^2+d^2}\right)^3} \right), \qquad (2.35)$$

mas como estamos interessados em localizar as singularidades, isto é, onde $Q^{'}(z) = \mathbf{0}$, tomamos $(\sqrt{z^2+d^2})^3 Q^{'}(z) = \left(-d^2k + \sqrt{z^2+d^2}, dkz\right)$ como $(z^2+d^2)^{(3/2)} > 0 \;\; \forall \;\; z$ e $-d^2k + (\sqrt{z^2+d^2}) \neq 0$ sempre que $d \neq k$. Podemos também afirmar que **quando $d \neq k$, o ramo negativo da conchóide é sempre uma curva regular**.

Para **k=d**, substituido na equação (2.34) e (2.35) temos:

$$Q(z) = \left(z - \frac{dz}{\sqrt{z^2+d^2}}, d - \frac{d^2}{\sqrt{z^2+d^2}} \right)$$

e

$$Q^{'}(z)\left[(z^2+d^2)\right]^{\frac{3}{2}} = \left(-d^3 + (z^2+d^2)^{\frac{3}{2}}, d^2z\right)$$

então; $Q^{'}(z) = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 0.$

2.6.1 Cúspide da conchóide de Nicomedes

Agora, para mostrar que existe **uma singularidade do tipo cúspide no ponto z=0, quando k=d, no ramo negativo da conchóide**, devemos mostrar que sendo $\mathbf{u}_1 = \lim_{z\to 0^-} \frac{Q^{'}(z)}{|Q^{'}(z)|}$ e $\mathbf{u}_2 = \lim_{z\to 0^+} \frac{Q^{'}(z)}{|Q^{'}(z)|}$, temos $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2$.

Para contornar algumas dificuldades de manipulação tomamos a equação polar da conchóide de Nicomedes, dada pela equação (2.11), onde o ramo negativo é descrito por

$$r = \frac{d}{sen(\theta)} + k, \quad \text{para} \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

ou por

$$r = \frac{d}{sen(\theta)} - k, \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \pi.$$

Como: $Q(\theta) = r\,(cos(\theta), sen(\theta))$ temos;

$$Q(\theta) = \left(\frac{d}{sen(\theta)} - k\right)(cos(\theta), sen(\theta)), \quad \text{com} \quad 0 < \theta < \pi$$

ou

$$Q(\theta) = \left(\frac{dcos(\theta) - ksen(\theta)cos(\theta)}{sen(\theta)}, \frac{dsen(\theta) - ksen^2(\theta)}{sen(\theta)} \right). \tag{2.36}$$

Se $k = d$ temos:

$$Q(\theta) = \left(\frac{dcos(\theta)\,(1 - sen(\theta))}{sen(\theta)}, \frac{dsen(\theta)(1 - sen(\theta))}{sen(\theta)} \right). \tag{2.37}$$

assim, a derivada e o vetor tangente unitário são respectivamente:

$$Q^{'}(\theta) = \left(\frac{d\left(sen^3(\theta) - 1\right)}{sen^2(\theta)}, -dcos(\theta) \right), \tag{2.38}$$

e

$$\mathbf{u} = \frac{Q^{'}(\theta)}{|Q^{'}(\theta)|} = \frac{\left(sen^3(\theta) - 1, -cos(\theta)sen^2(\theta)\right)}{\sqrt{(sen^3(\theta) - 1)^2 + cos^2(\theta)sen^4(\theta)}} \tag{2.39}$$

Conforme a definição de cúspide dada no capítulo 1, os vetores tangentes unitários da conchóide $\mathbf{u}(\theta) = \dfrac{Q^{'}(\theta)}{|Q^{'}(\theta)|}$, tendem para vetores opostos em $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ lembrando que de acordo com a figura, (Fig. 2.15) são equivalentes $z = 0$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, e portanto, a cúspide da conchóide da reta fica caracterizada por $Q(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$ e $Q^{'}(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$.

Como $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{Q^{'}(\theta)}{|Q^{'}(\theta)|}$, é uma indeterminação, vamos contorná-la, dividindo o numerador e o denominador por $cos(\theta)$, que resulta em:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{Q^{'}(\theta)}{|Q^{'}(\theta)|} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\dfrac{sen^3(\theta) - 1}{cos(\theta)}, -sen^2(\theta) \right)}{\sqrt{\dfrac{(sen^3(\theta) - 1)^2}{cos^2(\theta)} + sen^4(\theta)}} \tag{2.40}$$

Mas como $cos(\theta)$ entra no radical como $cos^2(\theta)$ e $cos(\theta) > 0$ para $\theta \to \dfrac{\pi}{2}^-$ e $cos(\theta) < 0$, para $\theta \to \dfrac{\pi}{2}^+$ e ainda $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{sen^3(\theta) - 1}{cos(\theta)} = 0$, temos que os limites laterais são dados por:

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\dfrac{sen^3(\theta) - 1}{cos(\theta)}, -sen^2(\theta) \right)}{\sqrt{\dfrac{(sen^3(\theta) - 1)^2}{cos^2(\theta)} + sen^4(\theta)}} = (0, -1)$$

e

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\left(\dfrac{sen^3(\theta) - 1}{cos(\theta)}, -sen^2(\theta) \right)}{-\sqrt{\dfrac{(sen^3(\theta) - 1)^2}{cos^2(\theta)} + sen^4(\theta)}} = (0, 1),$$

então, como queríamos mostrar, $\vec{\mathbf{u}}_1 = -\vec{\mathbf{u}}_2$.

2.6.2 Laço - Auto-intersecção da conchóide de Nicomedes

Para $k > d$ o ramo negativo da Conchóide da reta é uma curva regular, mas observando a figura (Fig. 2.17(c)), vemos que ela apresenta um comportamento característico, produzindo um laço.

Para o caso da equação em coordenadas cartesianas $(x^2+y^2)(y-d)^2 = k^2y^2$, a área do laço é

$$\mathbf{A} = d\sqrt{k^2 - d^2} - 2\,k\,d \ln \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - d^2}}{d} \right) + k^2 cos^{-1} \left(\frac{d}{k} \right)$$

e o nó ocorre no pólo $(0,0)$ no intervalo $d - k \leq x \leq 0$, [15].

Auto-intersecção pela Equação Polar.

Seja a Conchóide da reta, dada pela equação polar $r = \dfrac{d}{sen(\theta)} - k$, cujo gráfico (Fig. 2.17(c)), para $k > d$, obviamente tem uma auto intersecção, de modo que podemos escrever: $r(\theta_1) = r(\theta_2)$, donde tiramos que;

$$\frac{d}{sen(\theta_1)} - k = \frac{d}{sen(\theta_2)} - k$$

e isto implica $\theta_1 = \theta_2$ (trivial) ou $\theta_2 = \pi - \theta_1$.

Agora, pela figura (Fig. 2.18), podemos fazer, $sen(\theta_1) = \dfrac{d}{k}$, logo:

$r(\theta_1) = \dfrac{d}{sen(\theta_1)} - k = \dfrac{d}{\frac{d}{k}} - k$, isto é $r(\theta_1) = 0$, e assim, mostramos que o nó ocorre na origem, isto é, no pólo, quando $sen(\theta_1) = \dfrac{d}{k}$ e $sen(\theta_2) = sen(\pi - \theta_1) = \dfrac{d}{k}$.

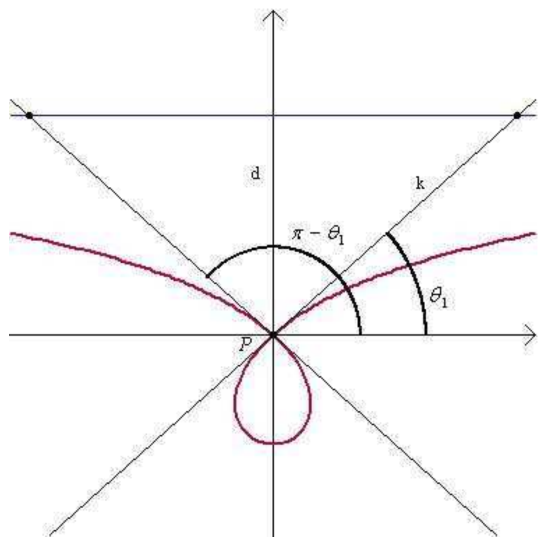


Figura 2.18: Laço no ramo negativo da Conchóide da reta para $k > d$, $\left(sen(\theta_2) = sen(\pi - \theta_1) = \frac{d}{k}\right)$.

Auto-intersecção pela Equação Paramétrica em z como parâmetro natural ($z = x$).

Aqui, o ramo negativo da conchóide da reta é dada pela equação (2.34) e fazendo novamente $Q(z_1) = Q(z_2)$, temos:

$$z_1 - k\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 + d^2}} = z_2 - k\frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + d^2}} \tag{2.41}$$

e

$$d - k\frac{d}{\sqrt{z_1^2 + d^2}} = d - k\frac{d}{\sqrt{z_2^2 + d^2}} \tag{2.42}$$

Da equação (2.42) resulta que, sendo, $k > 0$, $d > 0$ e $\sqrt{z^2 + d^2} > 0$ temos que $z_1 = \pm z_2$.

Substituindo na equação (2.41).

i) $z_1 = z_2$ (óbvio, uma solução trivial)

ii) $z_1 = -z_2$ temos que: $z_1 = \pm\sqrt{k^2 - d^2}$

Isso posto, podemos mostrar também que o nó ocorre em $Q(\sqrt{k^2 - d^2})$, ou seja,

$$Q(\sqrt{k^2 - d^2}) = \left(\sqrt{k^2 - d^2} - k\frac{(\sqrt{k^2 - d^2})}{\sqrt{(\sqrt{k^2 - d^2})^2 + d^2}}, d - k\frac{d}{\sqrt{(\sqrt{k^2 - d^2})^2 + d^2}}\right),$$

o que resulta em: $Q(\sqrt{k^2 - d^2}) = (0, 0)$.

Com os resultados acima, mostramos então que, a conchóide da reta dada por $Q(z) = \left(z \pm k\frac{z}{\sqrt{z^2 + d^2}}, d \pm k\frac{d}{\sqrt{z^2 + d^2}}\right)$ para $k > d$ é uma curva regular e no ramo negativo forma um laço para $-\sqrt{k^2 - d^2} \le z \le \sqrt{k^2 - d^2}$ com nó no pólo (Fig. 2.19).

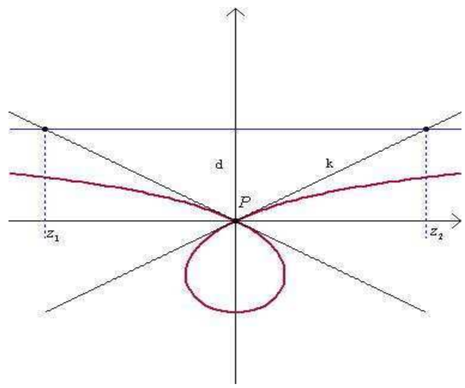


Figura 2.19: Laço no ramo negativo da Conchóide de Nicomedes para $k > d$, $P = Q(z_1) = Q(z_2)$ onde $z_1 = -\sqrt{k^2 - d^2}$ e $z_2 = \sqrt{k^2 - d^2}$.

Resumindo o desenvolvimento feito até aqui temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1 (**Características geométricas da conchóide da reta**): A conchóide da reta com parâmetros k e d, satifaz:

1) *O ramo positivo da conchóide da reta é sempre uma curva C^∞ regular simples.*

2) O ramo negativo satisfaz:

2.1) *Se $k < d$ o ramo negativo da conchóide da reta é uma curva C^∞ regular simples*;

2.2) *Se $k = d$ o ramo negativo da conchóide da reta é uma curva com uma cúspide sobre no pólo*;

2.1) *Se $k > d$ o ramo negativo da conchóide da reta é uma curva C^∞ regular com uma única auto-intersecção sobre o pólo.*

2.6.3 Localização da conchóide de Nicomedes

Sobre a localização da conchóide gerada pela reta $y = d$, com constante $k > 0$ podemos afirmar

i) Ambos os ramos são assintóticos à reta geratriz $y = d$. Para o ramo positivo temos: $\lim_{z \to -\infty} Q(z) = (-\infty, d^+)$ e $\lim_{z \to +\infty} Q(z) = (\infty, d^+)$. Para o ramo negativo a situação é idêntica, porém a conchóide se aproxima da reta por pontos da mesma região do pólo, isto é; $\lim_{z \to -\infty} Q(z) = (-\infty, d^-)$ e $\lim_{z \to +\infty} Q(z) = (\infty, d^-)$.

ii) O ramo positivo situa-se na faixa $d < y \leq d + k$ e o ramo negativo situa-se na faixa $d - k \leq y < d$.

iii) As intersecções da conchóide da reta $y = d$ com pólo na origem e constante k com os eixos coordenados ocorrem em $Q(0) = (0, d - k)$, para o ramo negativo e em $Q(0) = (0, d + k)$.

.

Capítulo 3

A Conchóide Geral

Neste capítulo estudaremos a conchóide geral, lugar geométrico obtido por mecanismo similar ao da conchóide de Nicomedes onde a reta como curva base é substituída por uma curva qualquer. Casos de especial interesse são aqueles em que a curva base também pode ser descrita mecanicamente, como por exemplo, o círculo, a elipse e a parábola. Escolhemos para analisar com detalhes a conchóide da parábola. Discutiremos especialmente a existência e natureza de singularidades e auto-intersecções e relação destas com as curvas paralelas, a curvatura e a evoluta da parábola geratriz.

A análise para diferentes possibilidades da natureza geométrica de uma conchóide de parábola é sistematizada nas seções 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 e 3.3. Discutimos o que pode ocorrer com as famílias de conchóides quando fixamos o pólo e variamos o parâmetro gerador e vice-versa. Em virtude de muitos sub-casos e visando à fluência de leitura optamos por omitir certos cálculos, deduzir os resultados num formato “discursivo” e agrupá-los no final da subseção, nas proposições 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

3.1 Descrição do lugar geométrico

A conchóide geral caracteriza-se como uma extensão do princípio utilizado por Nicomedes para obter a conchóide de uma reta que abordamos no capítulo 2. A conchóide geral, aqui denominada simplesmente *conchóide*, é uma nova curva, derivada de uma curva dada, e está diretamente vinculada a um ponto fixo $P = (a, b)$, daqui para frente também denominado pólo e uma constante positiva k.

Uma vez definida a posição do pólo em relação à curva original, e sendo d a distância do pólo à curva, a constante determinará o comportamento específico da conchóide, com estreita relação entre k e d conforme veremos. Podemos também considerar dois ramos associados ao valor da constante k, mas aqui, diferentemente do que ocorre com a conchóide da reta, os ramos podem circunstancialmente passar de um lado para o outro da curva original.

Seja S uma curva plana qualquer e $P = (a, b)$ um ponto fora dela. Sobre uma reta ℓ, passando por P e intersectando S no ponto M, tomemos Q_1 e Q_2, de modo que os segmentos, $Q_1M = Q_2M = k$, com k uma constante positiva dada. O lugar geométrico dos pontos Q_1 e Q_2 descreve a conchóide da curva S com relação ao pólo P e a constante k (Fig. 3.1).

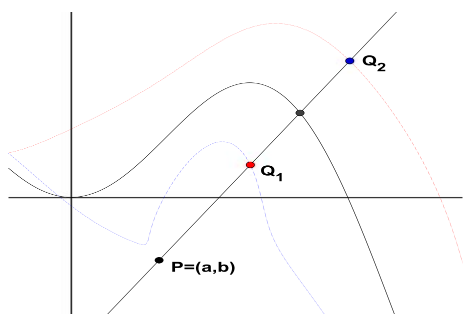


Figura 3.1: Lugar Geométrico de Q_1 e Q_2.

3.1.1 Expressão paramétrica da conchóide geral

Sejam S uma curva dada com representação paramétrica $S(t) = (g_1(t), g_2(t))$, $t_1 < t < t_2$, o pólo P com coordenadas (a, b) e ℓ uma reta que intersecta a curva S em $M = (g_1(t), g_2(t))$. A equação da reta ℓ é

$$g_2(t) - b = m(g_1(t) - a), \tag{3.1}$$

ou equivalentemente

$$m = \frac{g_2(t) - b}{g_1(t) - a}. \tag{3.2}$$

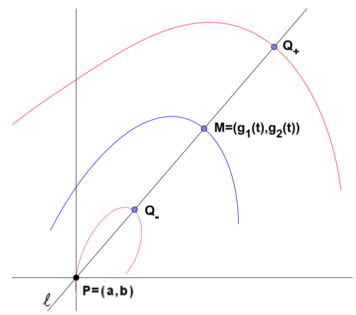


Figura 3.2: Conchóide Geral da Curva S (Q_1 ramo negativo e Q_2 ramo positivo).

A forma vetorial da conchóide é dada por

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} \pm k\frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}$$

onde, pela (Fig. 3.3),

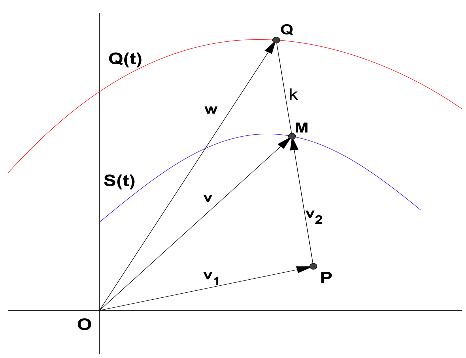


Figura 3.3: Representação Vetorial.

$$\mathbf{w} = \vec{OQ} = Q(t) = (f_1(t), f_2(t)),$$

$$\mathbf{v} = \vec{OM} = S(t) = (g_1(t), g_2(t)),$$

$$\mathbf{v}_2 = \vec{PM} = (g_1(t) - a, g_2(t) - b)$$

e

$$k = |\vec{MQ}|.$$

Assim temos a equação paramétrica,

$$Q(t) = (g_1(t), g_2(t)) \pm k\frac{(g_1(t) - a, g_2(t) - b)}{\sqrt{(g_1(t) - a)^2 + (g_2(t) - b)^2}}. \tag{3.3}$$

Os ramos da conchóide obtidos quando consideramos $+k$ e $-k$ correspondem respectivamente aos lugares geométricos gerados por pontos a cada instante mais longe ou mais próximos ao pólo em relação à curva original.

A conchóide pode ser expressa em coordenadas polares, considerando o pólo P na origem, e a curva S representada pela equação polar $r = \rho(\theta)$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$. A partir do mesmo pólo como teremos que ter $|PQ| = |\rho(\theta) \pm k|$ a equação polar da conchóide é representada por

$$r = \rho(\theta) \pm k, \qquad \text{com} \quad \theta_1 < \theta < \theta_2. \tag{3.4}$$

O que nos dá uma outra parametrização da conchóide;

$$Q(\theta) = (\rho(\theta) \pm k)(\cos(\theta), sen(\theta)), \qquad \text{com} \quad \theta_1 < \theta < \theta_2. \tag{3.5}$$

3.1.2 Conchóide de uma curva qualquer

Fixada uma curva base, é interessante observar famílias a um parâmetro de conchóides obtidas tanto fixando o pólo e variando k como famílias a dois parâmetros fixando k e variando a posição do pólo. Utilizamos o programa livre Geogebra para traçar estes gráficos e animações a partir destas variações.

Exemplo 3.1: Conchóide de uma senóide.

Seja a curva $S(t) = (t, \cos(t))$ e o pólo $P(a, b)$, conhecida a distância, d, do pólo à curva e adotamos uma constante k tal que, neste exemplo,$k < d$.

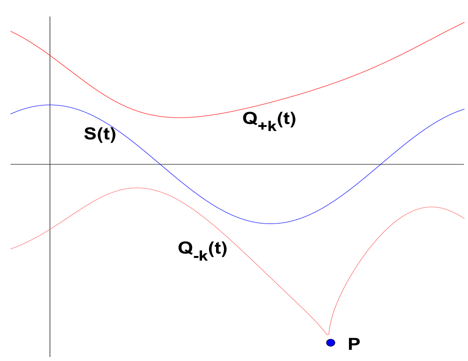


Figura 3.4: Conchóide da curva $S(t)$ com pólo $P = (a, b)$ e constante $k < d$.

Exemplo 3.2: Conchóide de uma elipse.

Seja a elipse $e(t) = (p\,cos(t), q\,sen(t))$ e o pólo $P = (a, b)$, conhecida a distância, d, do pólo à curva adotamos uma constante, k, tal que, neste exemplo, $k = d$.

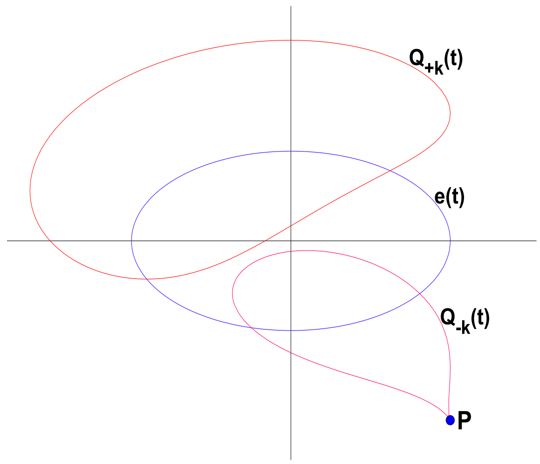


Figura 3.5: Conchóide da elipse $e(t)$ com pólo $P = (a, b)$ e constante $k = d$.

Exemplo 3.2: Conchóide de um círculo.

Seja a círculo $C(t) = (r\,cos(t), r\,sen(t))$ e o pólo $P = (a, b)$, conhecida a distância, d, do pólo à curva adotamos uma constante, k, tal que, neste exemplo temos $k = d$.

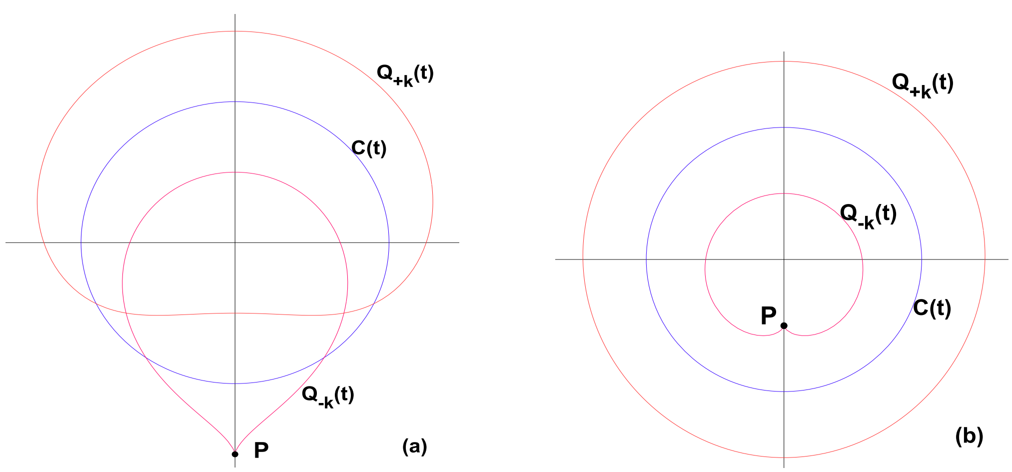


Figura 3.6: Conchóide da círculo $C(t)$ com constante $k = d$ e pólo $P = (a, b)$ fora do círculo **(a)** e no interior do círculo **(b)**.

Ilustramos no exemplo 3.2 duas possibilidades para a configuração destas conchóides. Seja o circulo $C(t)$, com centro na origem e raio r, dado por $C(t) = (r\cos t, r \text{ sen } t)$. A conchóide do círculo $C(t)$ com pólo $P = (a, b)$ e constante k é por definição

$$Q(t) = (r\cos(t),\ r\sin(t)) \pm k\frac{[(r\cos(t),\ r\sin(t)) - (a,b)]}{|(r\cos(t),\ r\sin(t)) - (a,b)|}, \tag{3.6}$$

A forma da conchóide do círculo depende da medida relativa da constante k, do raio r do círculo e da distância d entre o círculo e o pólo. Considerando $\delta(t)$ a função distância ao quadrado do pólo ao círculo $C(t)$, temos;

$$\delta(t) = (r\cos(t) - a)^2 + (r\text{sen}(t) - b)^2, \tag{3.7}$$

ou equivalentemente

$$\delta(t) = r^2 + a^2 + b^2 - 2r\left(a\cos(t) + b\text{sen}(t)\right).$$

Fazendo a derivada de $\delta(t)$ e determinando seus pontos críticos poderemos inferir sobre seus máximos e mínimos. Lembramos também que, sem perda de generalidade estamos trabalhando com $P(0, b)$, no eixo OY isto é $a = 0$ e $b < 0$, portanto, temos

$$\delta(t) = r^2 + b^2 + 2\,r\,b\,\text{sen}(t),$$

cuja derivada é

$$\delta'(t) = 2\,r\,b\cos(t). \tag{3.8}$$

Da equação (3.8), tiramos que os pontos críticos ocorrem em $t = \dfrac{\pi}{2}$ e $t = \dfrac{3\pi}{2}$, ou seja a distância do pólo ao círculo é dada por $|r - b|$, se $b > 0$ e $|r + b|$ se $b < 0$.

É importante considerar que teremos também uma distância crítica dada por $d^* = d + 2r$.

Um exemplo clássico de conchóide de círculo é o *limaçon de Pascal* que é um caso de conchóide "degenerada" onde o pólo é colocado sobre o círculo (Fig. 3.7).

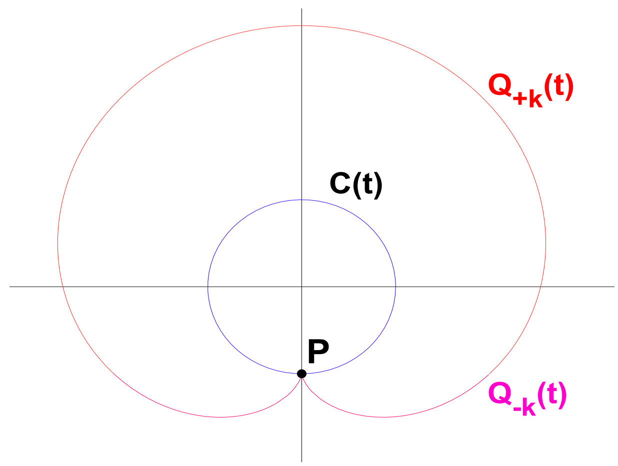


Figura 3.7: Limaçon de pascal, construído como uma conchóide do círculo $C(t)$ com pólo $P = (a, b)$ sobre o círculo e constante $k = r$ (cardióide).

Uma referência para o estudo das conchóides de um círculo é [14]. Existem também interessantes e bem recentes aplicações da conchóide do círculo na construção de máquinas rotativas de compressão e expansão de fluídos, como por exemplo, na fabricação de compressores do tipo limaçon-limaçon onde o perfil do rotor e da carcaça é usinado segundo curvas limaçon. Entre as características de desempenho dos compressores o rendimento volumétrico é um parâmetro chave na construção das curvas de eficiência dessas máquinas. O rendimento volumétrico é geralmente apresentado como uma razão entre o volume na cavidade quando a válvula de entrada se fecha e o volume na cavidade quando a válvula de descarga se abre. Sultan, em [21], apresenta uma análise matemática, mostrando que neste tipo de máquina a relação volumétrica é sinusoidal e a pressão e o torque podem ser obtidos em fórmulas fechadas. Em [20], o mesmo autor trata do problema da interferência e da eficiência volumétrica das máquinas limaçon estudando a inclinação das retas tangentes às curvas limaçon do rotor e da carcaça como forma de garantir que não ocorra interferência durante a operação normal da máquina, e o valor da folga radial mínima que separa as duas curvas limaçon através de um conjunto de equações não lineares que permitem calcular o valor da folga radial que é um parâmetro importante no projeto e na construção destas máquinas.

3.2 A conchóide da parábola

Nesta seção iniciamos o estudo e detalhamento da conchóide de uma parábola.

A definição de parábola como lugar geométrico dá suporte aos mecanismos para seu traçado: *parábola* é o lugar geométrico dos pontos P de um plano de modo que a distância desse ponto a uma reta ℓ fixa no plano é sempre igual a distância de P a um ponto fixo F do plano e que não pertence à reta ℓ. O ponto fixo P é denominado *foco* e a reta ℓ é chamada *diretriz* da parábola. A reta r que passa por F e é perpendicular a ℓ é o *eixo de simetria* da parábola. Sendo A a intersecção do eixo com a diretriz, então o ponto médio do segmento AF, que se encontra sobre a parábola é designado por V e denominado *vértice*. Um segmento retilíneo ligando quaisquer dois pontos distintos da parábola é denominada *corda*; em particular uma corda que passa pelo foco é denominada *corda focal*. A corda focal perpendicular ao eixo de simetria é denominada *latus rectum*.

Trabalharemos por simplicidade e sem perda da generalidade a situação em que a equação da parábola assume sua forma mais simples, ou seja, seu vértice está na origem $V = (0, 0)$ e seu eixo de simetria coincide com um ou outro dos eixos coordenados.

Na figura (Fig. 3.8b) temos então o vértice na origem, o eixo de simetria coincide com o eixo das ordenadas. Assim, o foco F está sobre o eixo OY; sejam $(0, b)$ as coordenadas do foco, então por definição a diretriz ℓ é a reta de equação $y = -b$. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola, por definição o segmento PL perpendicular a ℓ deve satisfazer

$$|PL| = |FP|.$$

Temos ainda que

$$|FP| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-b)^2}$$

e $|PL| = |(y + b)|$, donde a equação padrão da parábola é $y = px^2$, sendo $p = \dfrac{1}{4b}$.

Uma vez que a ordenada do foco é b, o comprimento do *latus rectum* é, em valor absoluto, igual $4b$.

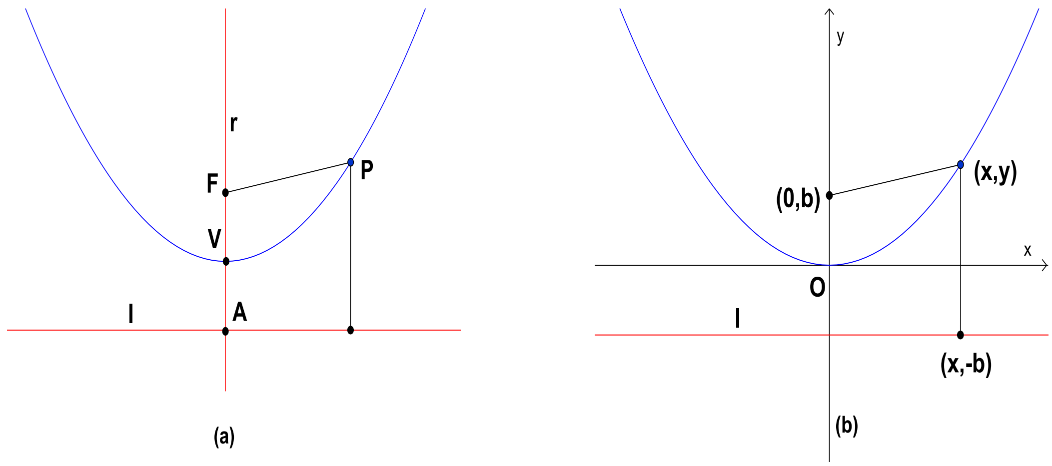


Figura 3.8: Parábola $y = px^2$

3.2.1 Explorando a conchóide da parábola

Considerando uma parábola expressa na forma paramétrica $\alpha(t) = (t, pt^2)$, escolhido o pólo $P = (a, b)$ e a constante k, temos da equação (3.3), que

$$Q(t) = (t, pt^2) \pm k\frac{(t-a, pt^2 - b)}{\sqrt{((t-a)^2 + (pt^2 - b)^2)}}, \tag{3.9}$$

é a equação geral da conchóide da parábola (t, pt^2) com pólo em (a, b) e constante k.

De uma análise preliminar da equação (3.9) subsidiada também pelas informações do capítulo 2 e pela definição de conchóide geral da seção 3.1 fica patente a relevância da relação entre a constante k e a distância do pólo à curva original, d, na configuração e características da conchóide da parábola. Apresentamos de imediato, como exemplos, diversos gráficos da conchóide da parábola (t, pt^2), com diferentes posições para o pólo e variando a constante k. A partir desses exemplos, podemos fazer conjecturas a respeito das características especiais do comportamento de cada nova curva com relação às constantes envolvidas, anotando as principais constatações, para posterior estudo, o que demonstra a poderosa ferramenta didática e de pesquisa que é um laboratório de informática constituído de programas para a produção de gráficos e programas de cálculo simbólico.

Exemplo 3.3: Parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ com pólo fora da concavidade da parábola, sobre o eixo de simetria em $P = (0, -1)$.

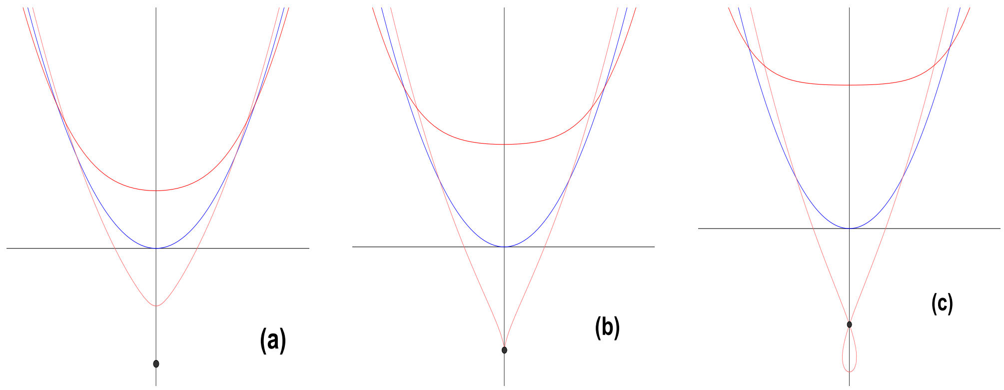


Figura 3.9: $k < d$ **(a)**, $k = d$ **(b)** e $k > d$ **(c)**.

Exemplo 3.4: Parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ com pólo fora da concavidade da parábola, em $P = (2, -1)$.

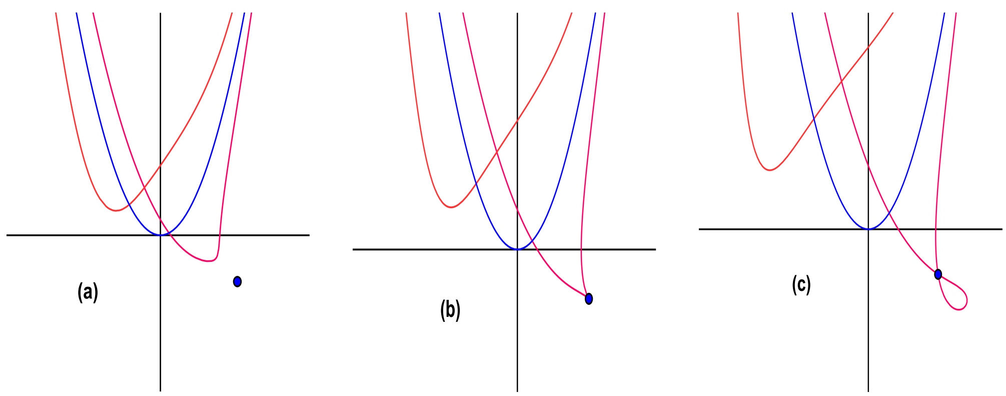


Figura 3.10: $k < d$ **(a)**, $k = d$ **(b)** e $k > d$ **(c)**.

Exemplo 3.5: Parábola $\alpha(t) = (t, 4t^2)$ com pólo fora da concavidade, em $P = (2, 4)$.

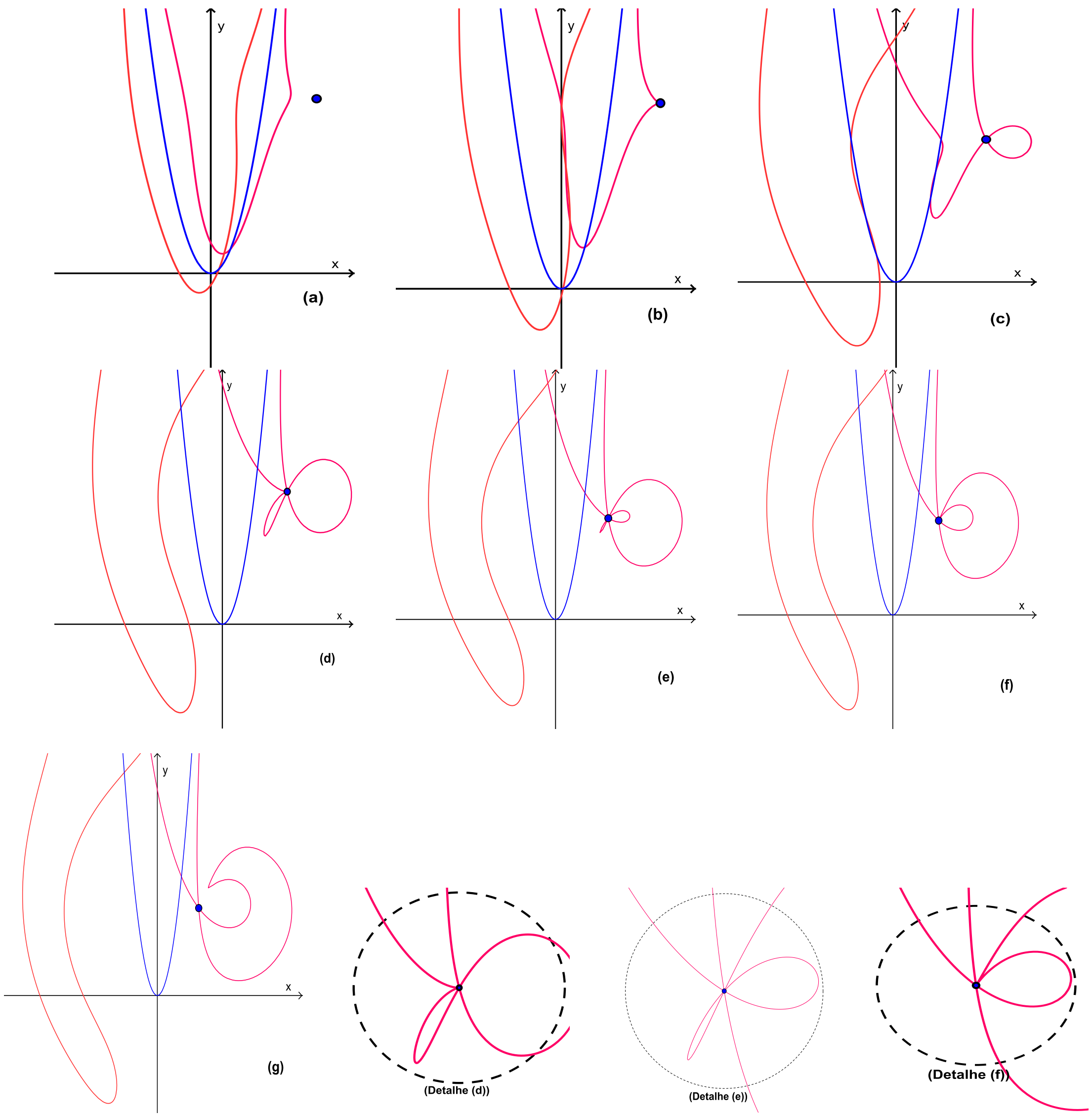


Figura 3.11: $k < d$ **(a)**, $k = d$ **(b)**, $d < k < d^*$ **(c)**, $k = d^*$ **(d)**, $d^* < k < d^{**}$ **(e)**, $k = d^{**}$ **(f)**, e $k > d^{**}$ **(g)**.

Exemplo 3.6: Parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ com pólo dentro da concavidade da parábola, sobre o eixo de simetria em $P = (0, 2)$.

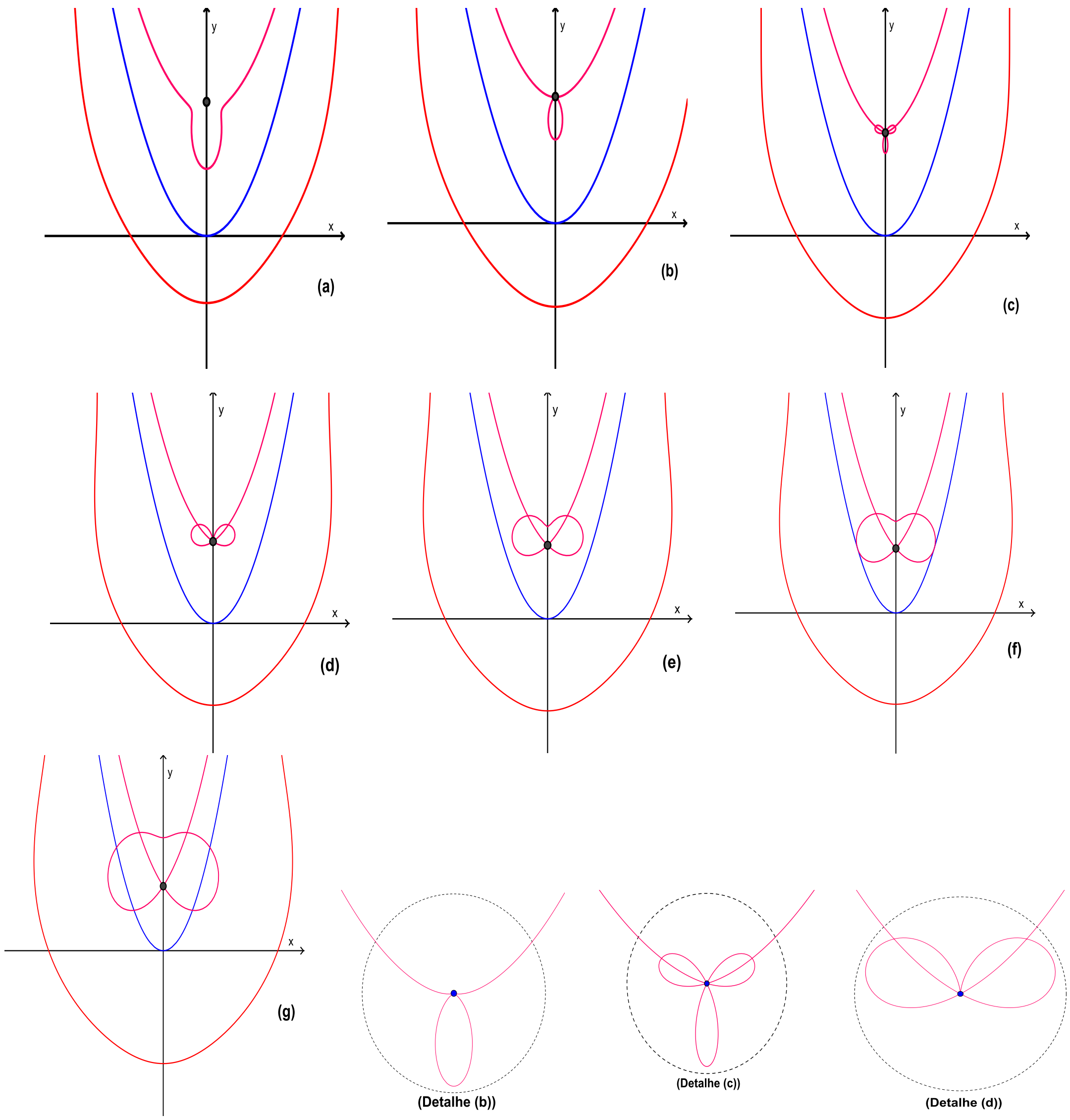


Figura 3.12: $k < d$ **(a)**, $k = d$ **(b)**, $d < k < d^*$ **(c)**, $k = d^*$ **(d)**, $k > d^*$ **(e)**, $k =$ corda por P **(f)** e $k >$ corda por P **(g)**.

Exemplo 3.7: Parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$ com pólo dentro da concavidade da parábola em $P = (1, 5)$.

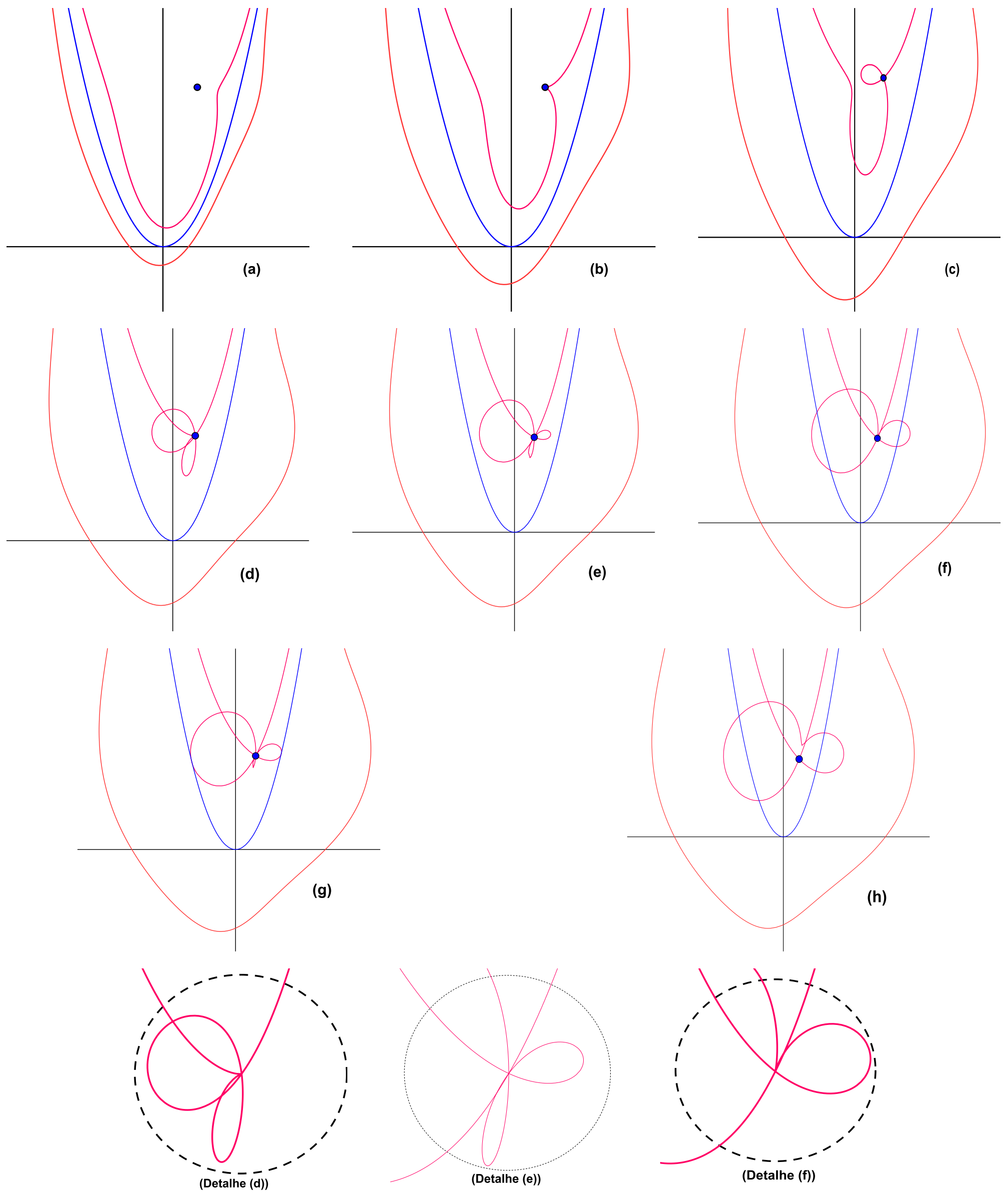


Figura 3.13: $k < d$ **(a)**, $k = d$ **(b)**, $d < k < d^*$ **(c)**, $k = d^*$ **(d)**, $d^* < k < d^{**}$ **(e)**, $k = d^{**}$ **(f)**, $k =$ corda por P **(g)** e $k >$ corda por P **(h)**.

Observações e Questões

Nos exemplos acima temos algumas situações características importantes que merecem atenção especial e levantam questões.

- Aqui, de maneira semelhante ao que ocorre na conchóide da reta, podemos verificar o mesmo comportamento da conchóide no que diz respeito à auto-intersecção (laço) e à ocorrência de cúspide ambos no ramo negativo $(-k)$. Estes fenômenos estão sempre vinculados à relação $\dfrac{d}{k}$?

- Diferentemente do que ocorre com a Conchóide de Nicomedes, aqui em algumas situações, qualquer um dos ramos da conchóide pode intersectar a curva original. Em quais situações isso ocorre? Qual o número de intersecções de cada ramo da conchóide com a parábola original?

- Ocorre também a intersecção entre os ramos positivo e negativo da conchóide da parábola. Quando isso ocorre?

- Outro aspecto interessante de se observar é o comportamento da conchóide da parábola numa faixa próxima à normal à parábola pelo pólo. Neste trecho a conchóide da parábola se assemelha à conchóide da uma reta. O que justifica esse comportamento?

- Há relação entre o foco da parábola e o pólo da conchóide?

- Há relação entre a excentricidade da parábola e o comportamento da conchóide?

- Qual o comportamento da conchóide quando o pólo sai do eixo de simetria?

- Observa-se em alguns casos a ocorrência de auto-intersecção do ramo negativo da conchóide da parábola em pontos diferentes do pólo. Em que circunstâncias isso ocorre? Quantas intersecções podem ocorrer?

- É possivel prever a localização ideal para o pólo, e conseqüentemente uma distância d do pólo à parábola, compatível para um comportamento esperado?

Partindo destas observações procuramos nas seções seguintes sistematizar o estudo para responder às questões aqui levantadas.

3.2.2 Pontos críticos da função distância do pólo $P = (a, b)$ à parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$

Pelo que foi visto, uma característica relevante é a distância do pólo à curva, assim essa avaliação pode ser feita considerando diferentes posições para o pólo e observando o comportamento da função distância ao quadrado do pólo à curva, $\delta(t)$. Sejam o pólo $P = (a, b)$ e a parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$, então $\delta(t)$ é dada por

$$\delta(t) = d^2(\alpha(t), P) = (t - a)^2 + (pt^2 - b)^2. \tag{3.10}$$

Sabemos também que esta função é estritamente positiva, pois, $P \notin \alpha(t)$ e assim $\delta(t)$ terá seu valor mínimo para algum $t = t_*$, e neste caso o segmento que une $\alpha(t_*)$ e $P = (a, b)$ é perpendicular à reta tangente à parábola em $\alpha(t_*)$. Procuremos então os pontos críticos de $\delta(t)$ fazendo $\delta^{'}(t) = 0$, isto é,

$$\delta'(t) = 4p^2t^3 + (2 - 4pb)t - 2a. \tag{3.11}$$

Temos obrigatoriamente uma raiz real, podendo haver até três raízes reais, ou seja, $\delta(t)$ pode apresentar até três pontos críticos. Designando as possíveis raízes distintas $t_*^{'}$, $t_*^{''}$ e $t_*^{'''}$, podemos assumir que $\delta(t)$ tem um mínimo global em $t = t_*^{'}$, de modo que $\delta(t_*^{'}) = d^2(\alpha(t_*^{'}), P)$ e assim $d = \sqrt{\delta(t_*^{'})}$. Consideraremos, se existirem as outras duas distâncias d^* e d^{**} (Fig. 3.14).

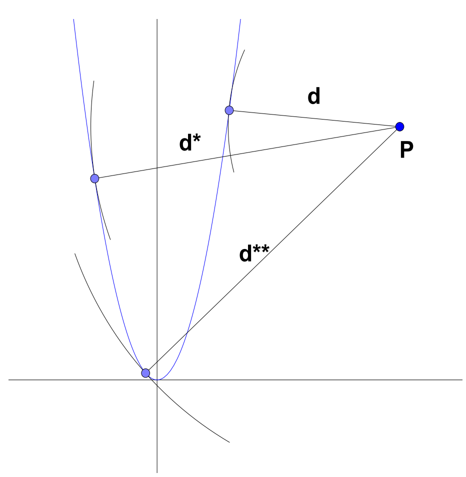


Figura 3.14: Distância do Pólo $P = (a, b)$ à parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$.

Fixando o pólo e variando o parâmetro k

Da expressão da conchóide geral e com uma prova análoga à que foi feita no capítulo 2 em 2.6.1 e 2.6.2 para a conchóide da reta, mostramos aqui que:- Se k for igual a d, d^* ou d^{**}, teremos nos pontos correspondentes a $t^{'}$, $t^{''}_*$ e $t^{'''}_{**}$ respectivamente cúspides na conchóide do ramo negativo. *O ramo positivo da conchóide será sempre uma curva suave*. Também a ocorrência de auto-enlaçamento da conchóide pode ser descrita em função da posição na reta do valor k em função das distâncias "críticas" d, d^* e d^{**} (Fig. 3.14).

Notemos que as possibilidades de um, dois ou três valores distintos para as raízes reais d, d^* e d^{**} correspondem à existencia de um, dois ou três círculos centrados em P e tangentes à parábola em $\alpha(t^{'}_*)$, $\alpha(t^{''}_*)$ e $\alpha(t^{'''}_*)$.

Disto resulta que, dependendo da relação $\dfrac{d}{k}$ poderemos ter para uma mesma parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$ e para um mesmo pólo $P = (a, b)$ conchóides $Q(t)$ com comportamentos diferentes, em função da constante k escolhida. Faremos a seguir uma análise ilustrando com as figuras (Fig. 3.11) e (Fig. 3.13), descrevendo as ocorrências em função do valor de k escolhido e de sua relação com d, d^* e d^{**}.

i) Se $k < d < d^* < d^{**}$ (Fig. 3.11(a)/Fig. 3.13(a)), temos que o ramo negativo da conchóide é uma curva suave para todo t.

ii) Se $k = d < d^* < d^{**}$ (Fig. 3.11(b)/Fig. 3.13(b)), temos que o ramo negativo da conchóide é uma curva com singularidade tipo cúspide em $t = t^{'}_*$ e tal que $Q(t^{'}_*) = (a, b)$.

iii) Se $d < k < d^* < d^{**}$ (Fig. 3.11(c)/Fig. 3.13(c)), temos que o ramo negativo da conchóide é uma curva com um laço, cujo nó ocorre sobre o pólo. No ramo negativo, sempre ocorrerá um laço quando $d < k$ e o laço estará sobre o pólo, pois existem $t^{'}_m$ e $t^{'}_n$, com $t^{'}_m < t^{'}_* < t^{'}_n$, tais que $d(\alpha(t^{'}_m), P) = d(\alpha(t^{'}_n), P) = k$ e $Q(t^{'}_m) = Q(t^{'}_n) = (a, b)$. Existe um círculo centrado em P e raio k que intersecta a parábola em $t^{'}_m$ e $t^{'}_n$.

iv) Se $d < k = d^* < d^{**}$ (Fig. 3.11(d)/Fig. 3.13(d)), temos que o ramo negativo da conchóide é uma curva com um laço, cujo nó ocorre sobre o pólo (no ramo negativo, sempre ocorrerá um laço devido ao fato de que $d < k$) e uma singularidade tipo cúspide em $t = t''_*$ e tal que $Q(t''_*) = (a, b)$, pois nesse ponto temos $k = d^*$. Existe um círculo centrado em P e raio k que intersecta a parábola em t''_m e t''_n e tangencia a parábola em t''_*, de modo que $Q(t''_m) = Q(t''_n) = Q(t''_*) = (a, b)$, (Detalhe (d)), nas figuras (Fig. 3.11) e (Fig. 3.13).

v) Se $d < d^* < k < d^{**}$ (Fig. 3.11(e)/Fig. 3.13(e)), temos que o ramo negativo da conchóide é uma curva com um "*laço duplo*", ambos com nó sobre o pólo, o primeiro laço devido ao fato de que $d < k$ e o segundo, que decorre de $d^* < k$ e por existir agora,um círculo centrado em P e com raio k, que intersecta a parábola em quatro pontos t_i. Assim, temos então quatro pontos t_i tais que $d(\alpha(t_i), P) = k$, o que implica $Q(t_i) = (a, b)$. Os pontos t_i, podem ser determinados fazendo-se a intersecção de um círculo com centro no pólo (a, b) e raio k, dado em coordenadas cartesianas por $(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = k^2$ com a parábola $y = px^2$ donde resulta, (Detalhe (e)), (Fig. 3.11) e (Fig. 3.13).

$$(pt^2 - b)^2 + (t - a)^2 = k^2. \tag{3.12}$$

Como estamos interessados nos pontos t_i, da equação (3.12), obtemos o polinômio

$$I(t, p, a, b, k) = p^2t^4 + (1 - 2pb)t^2 + a^2 + b^2 - k^2 = 0, \tag{3.13}$$

cujas raízes são os pontos t_i, para os quais teremos a distância do pólo à curva exatamente igual a k (Fig.3.15).

vi) Se $d < d^* < k = d^{**}$ (Fig. 3.11(f)/Fig. 3.13(f)), temos que o ramo negativo da conchóide é uma curva com um laço decorrente de $d < d^* < k$ e uma singularidade tipo cúspide em $t = t'''_*$, tal que $Q(t'''_*) = (a, b)$, pois nesse ponto temos $k = d^{**}$.

vii) Se $d < d^* < d^{**} < k$ (Fig. 3.11(g)/Fig. 3.13(g)), temos que o ramo negativo da conchóide é uma curva com um laço decorrente de $d < d^* < d^{**} < k$, o que como já dissemos resulta da existência de dois pontos t'''_n e t'''_m com $t'''_m < t'''_* < t'''_n$ tais que $d(\alpha(t'''_m), P) = d(\alpha(t'''_n), P) = k$ e $Q(t'''_m) = Q(t'''_n) = (a, b)$.

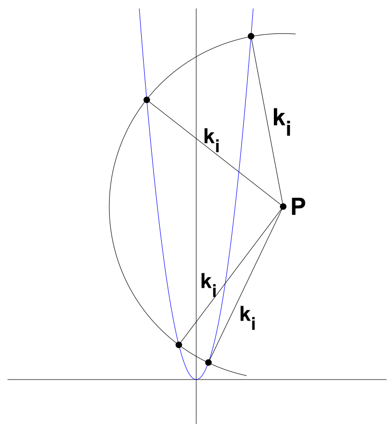


Figura 3.15: Pontos t_i tais que a distância do Pólo $P = (a, b)$ à parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$ é exatamente igual k_i.

Obs: Especialmente devido à simetria da parábola e pela localização do pólo, na figura (Fig. 3.12) por exemplo, existe um mesmo círculo centrado em P que tangencia a parábola em dois pontos distintos, $t_*^{'} = -t_*^{'}$ e isto resulta em $d = d^*$. Na figura (Fig. 3.12(b), Detalhe (b)), temos $Q(t_*^{'}) = Q(-t_*^{'}) = (a, b)$ e portanto ocorre aí uma cúspide dupla. Na figura (Fig. 3.12(c), Detalhe (c)) temos outra ocorrência particular e interessante, pois temos aí um círculo centrado em P e que devido à simetria intersecta a parábola em quatro pontos t_i, simétricos dois a dois, produzindo assim um "*laço duplo*", cujas "*laçadas*" são perfeitamente simétricas.

A influência da relação $\dfrac{d}{k}$ sobre as características da conchóide pode ser sistematizada através da função distância ao quadrado do pólo à parábola base localizando k nos intervalos em relação a d, d^* e d^{**}.

Proposição 3.1: ***Para conchóide da parábola*** $\alpha(t) = (t, pt^2)$ ***com pólo em*** $P = (a, b)$ ***e fator*** k ***considerando as raízes da equação (3.10) e a respectiva ocorrência de um, dois ou três círculos centrados em*** P ***com raios*** d***,*** d^* ***e*** d^{**} ***e tangentes à parábola em*** $\alpha(t_*^{'})$***,*** $\alpha(t_*^{''})$ ***ou*** $\alpha(t_*^{'''})$ ***temos***:

1) *O ramo positivo da conchóide da parábola é sempre uma curva* C^∞ *regular simples;*

2) *Se* $0 < k < d$ *o ramo negativo da conchóide da parábola é sempre uma curva* C^∞

regular simples;

3) *Se* $k = d$ *o ramo negativo da conchóide da parábola apresenta uma cúspide sobre o pólo*;

4) *Se* $d < k < d^*$ *o ramo negativo da conchóide da parábola é uma curva* C^∞ *regular com uma única auto-intersecção sobre o pólo*;

5) *Se* $k = d^*$ *o ramo negativo da conchóide da parábola apresenta uma auto-intersecção simples e um laço cuspidal sobre o pólo*;

6) *Se* $d^* < k < d^{**}$ *o ramo negativo da conchóide da parábola é uma curva* C^∞ *regular com dois enlaçamentos sobre o pólo*;

7) *Se* $k = d^{**}$ *o ramo negativo da conchóide da parábola é uma curva com uma auto-intersecção regular e um laço cuspidal sobre o pólo*;

8) *Se* $k > d^{**}$ *o ramo negativo da conchóide da parábola é uma curva* C^∞ *regular com uma única auto-intersecção sobre o pólo*;

3.2.3 Intersecção da conchóide com a curva original

Em alguns dos gráficos anteriores, verifica-se a ocorrência da intersecção da conchóide com a curva que lhe deu origem, fato que não tínhamos na conchóide da reta. Verifica-se também que ambos os ramos da conchóide podem ter intersecções com a parábola original e, além disso, em alguns gráficos temos a ocorrência de múltiplos pontos de intersecção, todos no ramo negativo da conchóide.

Observa-se que a intersecção da conchóide $Q(t)$ construída a partir da parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$ com pólo em $P = (a, b)$ e constante k ocorre quando $\overline{PQ}$ tiver intersecção dupla com a parábola, formando uma corda de comprimento igual a k (Fig 3.16).

Determinar o ponto de intersecção destas curvas é um problema que pode ser atacado de diferentes maneiras, tomando-se, no entanto o cuidado de que aqui temos duas curvas parametrizadas[1] e a intersecção dar-se-á quando existirem valores t_1 e t_2 tais que, $Q(t_1) = \alpha(t_2)$, isto é:

[1] Ver seção 1.1 - Curva parametrizada.

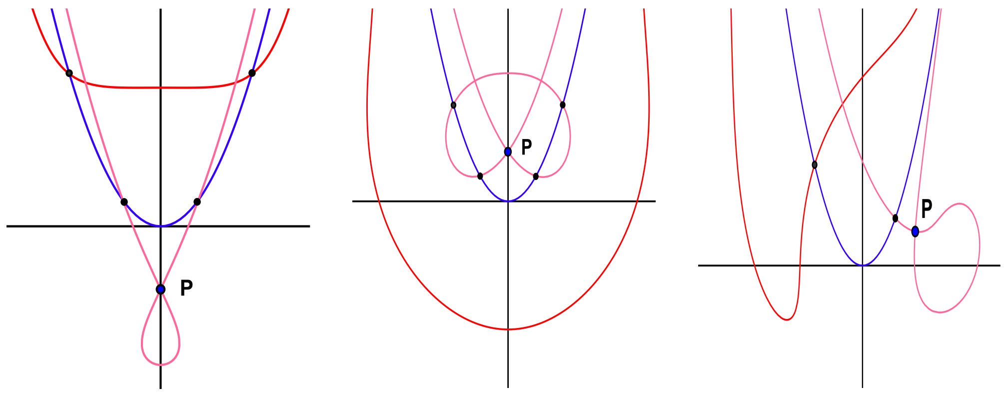


Figura 3.16: Intersecção da Conchóide $Q(t)$, com a parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$.

$$\left(t_1 \pm k\frac{(t_1-a)}{\sqrt{(t_1-a)^2+(pt_1^2-b)^2}}, pt_1^2 \pm k\frac{(pt_1^2-b)}{\sqrt{(t_1-a)^2+(pt_1^2-b)^2}}\right) = (t_2, pt_2^2). \quad (3.14)$$

Para simplificar notação, adotaremos $\sqrt{\Delta_1} = \sqrt{(t-a)^2+(pt^2-b)^2}$, e da equação (3.14) temos que:

$$t_2 - t_1 = k\frac{(t_1-a)}{\sqrt{\Delta_1}}, \quad (3.15)$$

e

$$pt_2^2 - pt_1^2 = k\frac{(pt_1^2-b)}{\sqrt{\Delta_1}} \qquad \Rightarrow \qquad p(t_2-t_1)(t_2+t_1) = k\frac{(pt_1^2)}{\sqrt{\Delta_1}}. \quad (3.16)$$

substituindo a equação (3.15) na equação (3.16) e manipulando os termos obtemos

$$t_2 = \frac{apt_1 - b}{p(t_1-a)}. \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.17) e o valor de $\sqrt{\Delta_1}$ na equação (3.15), obtemos o polinômio abaixo, em t_1, aqui descrito com os coeficientes que são funções dos parâmetros construtivos da conchóide, isto é, dependem das constantes p e k e das coordenadas (a, b) do pólo, ou seja.

$$
\begin{aligned}
P(t_1,p,a,b,k) &= p^2t_1^8 - 4ap^4t_1^7 + (4a^2p^4+p^2)t_1^6 + a(4bp^3-6p^2)t_1^5 + \\
&+ (a^2(13p^2-8bp^3) - k^2p^2 - 2b^2p^2 + 2bp)t_1^4 + \\
&+ (a(4k^2p^2+4b^2-8bp) - 12a^3p^2)t_1^3 + \\
&+ (a^2(-6k^2p^2+4b^2p^2+10bp) + 4a^4p^2 + b^2)t_1^2 + \\
&+ (a^3(4k^2p^2-4bp) + a(-4b^3p-2b^2))t_1 + \\
&+ (-a^4k^2p^2 + b^4 + a^2b^2).
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Este é um polinômio de grau oito, portanto, podemos ter aqui, até oito raízes. O cálculo dessas raízes no caso geral vai ser numérico. Neste trabalho utilizamos o programa computacional livre Maxima tanto para as simplificação das expressões como para o cálculo numérico explícito dos exemplos. Notamos ainda que como estamos considerando os dois ramos da conchóide, se $Q_+(t_1) = \alpha(t_2) \Rightarrow Q_-(t_2) = \alpha(t_1)$, ou seja, se t_1 é solução da equação acima t_2 também o é. *Isto significa que mesmo tendo oito soluções para t_1 teremos no máximo quatro intersecções dos ramos da conchóide com a parábola.*

Exemplo 3.8: Como exemplo, tomemos a conchóide da parábola é $\alpha(t) = (t, t^2)$, o pólo $P = (3, 1)$ e $k = 2$, dada por

$$
Q(t) = \left(t \pm 2\frac{t-3}{\sqrt{(t-3)^2+(t^2-1)^2}}, t^2 \pm 2\frac{(t^2-1)}{\sqrt{(t-3)^2+(t^2-1)^2}} \right).
$$

O polinômio (3.18) toma a forma

$$
P(t_1,1,0,-2,1) = t^8 - 12t^7 + 37t^6 - 6t^5 + 41t^4 - 288t^3 + 235t^2 + 306t - 314, \tag{3.19}
$$

donde destacamos as raízes reais $t_1^{'} = 1$ e $t_1^{''} = -1$, mostradas na figura (Fig. 3.17) onde temos respectivamente, $Q_+(t_1^{'}) = \alpha(t_2^{'})$ e $Q_-(t_2^{''}) = \alpha(t_1^{''})$ uma intersecção do ramo positivo e do ramo negativo da conchóide, com a parábola original.

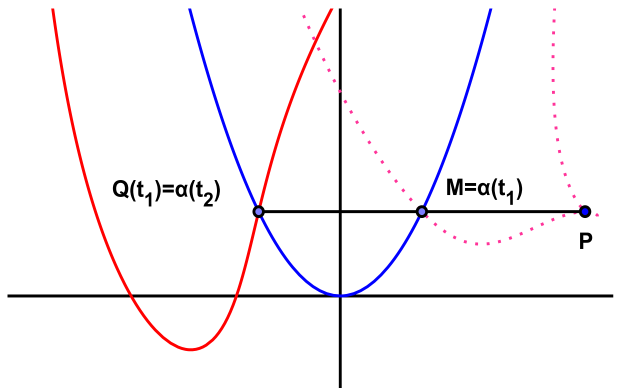


Figura 3.17: Intersecção do ramo positivo ($+k$) da conchóide com a parábola base.

Resumindo temos;

Sobre o número de intersecções dos ramos da conchóide com a parábola base, $\alpha(t) = \left(t, pt^2\right)$, cujos t_i para os quais elas ocorrem são dados pelo polinômio $P(t_1, p, a, b, k) = 0$, da equação (3.18), podemos afirmar:

Proposição 3.2: *A conchóide da parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$ com pólo em $P = (a, b)$ e fator k terá no máximo quatro pontos de intersecção com com a parábola geratriz.*

3.2.4 Auto-intersecções do ramo negativo da conchóide da parábola

Consideraremos uma auto-intersecção do ramo negativo da conchóide da parábola um ponto tal que $Q(t_1) = Q(t_2)$. Com um desenvolvimento análogo ao feito no caso da intersecção da conchóide com a parábola base chegamos a uma equação do oitavo grau, que detectará os pontos duplos ou múltiplos do ramo negativo da conchóide. Como analisaremos geometricamente na próxima seção, existirão casos onde este polinômio terá efetivamente oito raízes e novamente teremos aqui no máximo quatro pontos de auto-intersecção no ramo negativo da conchóide (precisamos no mínimo de duas soluções em t na equação para formarmos uma auto-intersecção no ramo negativo da conchóide.

Já vimos que um nó ocorre no pólo sempre que $k > d$, porém:

i) Se o pólo estiver fora da concavidade da parábola todas as auto-intersecções ocorrerão sobre o pólo, sempre que $k > d$ e obviamente a distância do ponto $\alpha(t_i)$ até o pólo $P = (a, b)$ é igual a k, isto é, $d(\alpha(t_i), P) = k$, e disso sai novamente o polinômio (3.18). Veja as figuras: (Fig. 3.9(c)), (Fig. 3.10(c)), (Fig. 3.11(c)/(d)/(e)/(f)/(g)).

ii) Se o pólo estiver dentro da concavidade da parábola, teremos uma auto-intersecção sobre o pólo, sempre que $k > d$ e obviamente a distância do ponto $\alpha(t_i)$ até o pólo $P = (a, b)$ é igual a k no entanto, podemos ver nas figuras (Fig. 3.12(c)/(d)/(e)/(f)/(g)) e (Fig. 3.13(c)/(d)/(e)/(f)/(g)/(h)) que outra auto-intersecção pode ocorrer também em um ponto que não é o pólo.

Vamos avaliar a situação em que os pontos de auto-intersecção estão sobre o pólo, neste caso, estamos interessados nos pontos t_i tais que $d(\alpha(t_i), P) = k$, o que nos leva ao polinômio (3.13).

Exemplo 3.9: Em particular, o caso da figura (3.10(c)) onde temos a parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$, pólo $P = (2, -1)$, fora da concavidade da parábola e $k = 3 > d$, e temos portanto que a auto-intersecção do ramo negativo da conchóide ocorre sempre sobre o pólo.

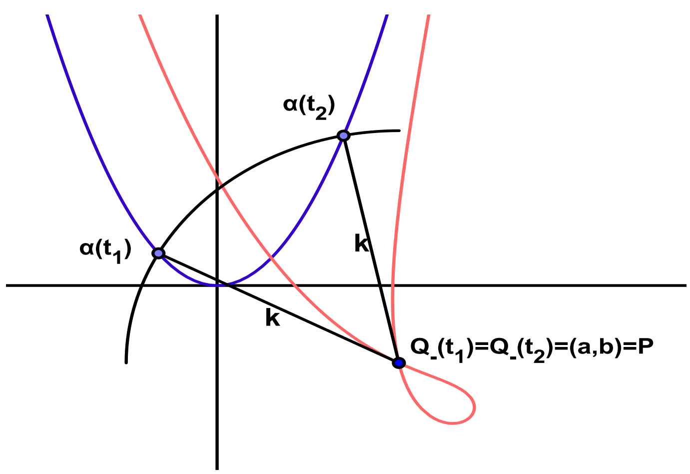


Figura 3.18: Pontos da parábola tais que $d(\alpha(t_1'), P) = k$ e auto-intersecção do ramo $-k$ da conchóide sobre o pólo $Q_{-k}(t_1') = Q_{-k}(t_1'') = (2, -1)$.

Sendo o ramo negativo da conchóide dado por

$$Q(t) = \left(t - 3\frac{(t-2)}{\sqrt{(t-2)^2 + (t^2+1)^2}}, t^2 - 3\frac{(t^2+1)}{\sqrt{(t-2)^2 + (t^2+1)^2}} \right),$$

a auto-interseção ocorre em $Q_{-k}(t_1) = Q_{-k}(t_2) = (2, -1)$.

Podemos usar novamente o polinômio (3.13), que no nosso exemplo resulta em

$$P(t_1, 1, 2, -1, 3) = t_1^4 + t_1^2 - 4t_1 - 4, \tag{3.20}$$

donde destacamos as raízes $t_1 \cong -0,65$ e $t_1 \cong 1,39$.

Já vimos que o polinômio (3.13) é um polinômio do quarto grau, obviamente, é possível então explorar outras possibilidades para a escolha do pólo e da constante, de modo a se conseguir um laço duplo no ramo negativo da conchóide da parábola.

Exemplo 3.10: Seja a parábola $\alpha(t) = (t, 8t^2)$, com pólo $P = (1,3)$, fora da concavidade da parábola e $k = 2 > d$.

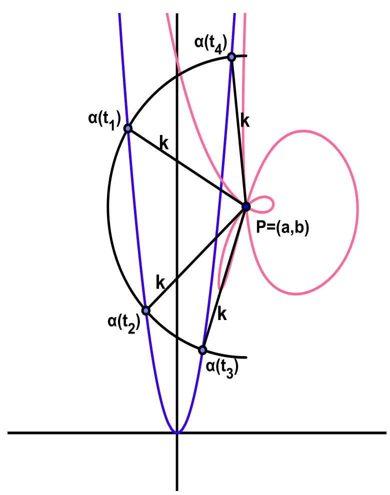


Figura 3.19: Pontos da parábola tais que $d(\alpha(t_1), P) = k$, e auto-intersecção múltipla do ramo $-k$ da conchóide sobre o pólo $Q_{-k}(t_1) = (1, 2)$.

Aqui, claramente se pode notar que existem quatro pontos de intersecção da parábola, $\alpha(t) = (t, 8t^2)$, com o círculo de centrado no pólo $P = (1,3)$ e raio igual à constante $k = 2$ (Fig.3.19). Neste caso, para ilustrar, o ramo negativo da conchóide é dado por

$$Q_{-k}(t) = \left(t - 2\frac{(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2 + (8t^2-3)^2}}, 8t^2 - 2\frac{(8t^2-3)}{\sqrt{(t-1)^2 + (8t^2-3)^2}} \right).$$

E assim, temos do polinômio (3.13)

$$P(t_1, 8, 1, 2, 2) = 64t_1^4 - 47t_1^2 - 2t_1 + 6 \tag{3.21}$$

donde tiramos as raízes $t_1 = -0,71$, $t_2 = -0,45$, $t_3 = 0,37$ e $t_4 = 0,79$, tais que $Q_{-k}(t_1) = Q_{-k}(t_2) = Q_{-k}(t_3) = Q_{-k}(t_4) = (1,2)$.

3.3 Curvas Paralelas à parábola, evoluta e a natureza da conchóide da parábola

Nesta seção vamos caracterizar a natureza geométrica da conchóide de uma parábola em função de curvas paralelas especiais e da evoluta da parábola. Partindo de uma parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$ e **fixado k queremos descrever as possíveis conchóides variando a posição do pólo**. Considere o plano dividido em sub regiões definidas a partir das duas paralelas a uma distância k da parábola. Como já vimos, em virtude de k ser menor, igual ou maior que o raio de curvatura mínimo da parábola, o plano é dividido em 2 ou 3 regiões (Fig. 3.20). A localização do pólo em uma destas regiões ou na fronteira destas determinará a natureza da conchóide associada, possibilitando também uma sistematização do desenvolvimento feito até aqui. No capítulo 1 definimos a função curvatura ($K(t)$), a evoluta ($E_f(t)$), e a curva paralela ($P_f(t)_\lambda$), iremos agora avaliar a relação destas com a conchóide cuja curva geratriz é uma parábola.

Sejam a parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$, temos a curvatura, a evoluta e a paralela dadas respectivamente por: $K(t) = \dfrac{2p}{\left(\sqrt{1+4p^2t^2}\right)^3}$, $E_\alpha(t) = \left(-4p^2t^3, \dfrac{(4p^2+2p)t^2-1}{2p}\right)$ e $P_\alpha(t)_\lambda = (t, pt^2) \pm \lambda \dfrac{(-2pt, 1)}{\sqrt{1+4p^2t^2}}$.

Fixada a parábola $\alpha(t) = (t, pt^2)$, sua curvatura máxima ocorre no vértice e o raio de curvatura mínimo é $\rho(t_0) = \dfrac{1}{K(t_0)}$ e sendo assim, o centro de curvatura neste ponto coincide com a singularidade da evoluta da parábola. Consideremos separadamente os valores para a constante k, tais que:

i) $k < \rho(t_0) = \dfrac{1}{K(t_0)}$

ii) $k = \rho(t_0) = \dfrac{1}{K(t_0)}$

iii) $k > \rho(t_0) = \dfrac{1}{K(t_0)}$

Adotamos o mesmo valor para k e λ e traçamos as paralelas à parábola, produzindo a figura (Fig. 3.20) onde, em cada caso, destacamos os pontos A, B e C, os trechos AB, BC e CA, as fronteiras F_I, F_{II} e as regiões I, II e III.

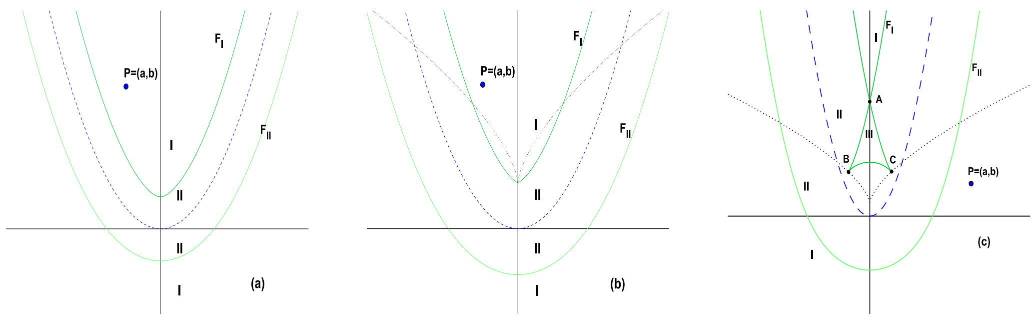


Figura 3.20: A parábola $\alpha(t)$, e as paralelas $P_\alpha(t)_{\pm k}$ definindo os pontos, os trechos, as fronteiras, e as regiões .

Já sabemos que ao se produzir uma conchóide a partir de uma parábola base, com pólo em $P = (a, b)$ e constante k, ela sempre estará localizada numa região entre as paralelas à parábola com $\lambda = \pm k$. Desse modo temos:

1) Se construirmos a conchóide da parábola com $k < \rho(t_0) = \dfrac{1}{K(t_0)}$ e localizarmos o pólo em qualquer ponto da região I, os seus dois ramos serão curvas regulares. Se o pólo for localizado sobre qualquer uma das paralelas, isto é, em qualquer ponto das fronteiras F_I ou F_{II}, ocorrerá uma cúspide sobre o pólo. Se o pólo for colocado em qualquer ponto da região II, teremos ambos os ramos como curvas regulares, e o ramo negativo apresentará um laço.

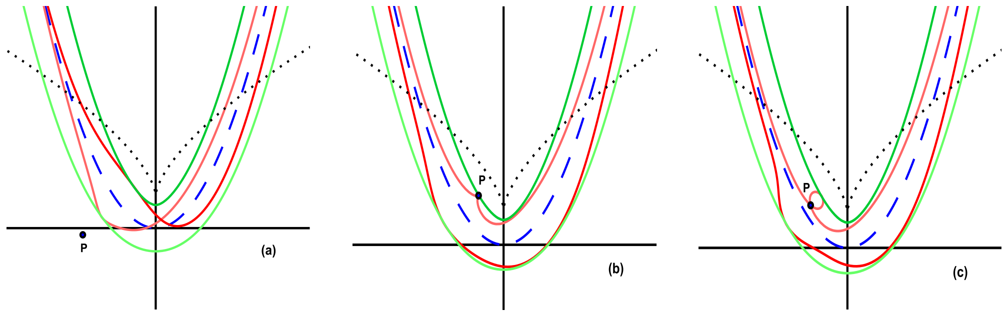


Figura 3.21: Conchóide da parábola $\alpha(t)$, com $k < \frac{1}{K(t_0)}$ entre as paralelas $P_\alpha(t)_{\pm\lambda}$, com $\lambda < k$.

2) Se construirmos a conchóide da parábola com $k = \rho(t_0) = \dfrac{1}{K(t_0)}$ e localizarmos o pólo em qualquer ponto da região I os seus dois ramos serão curvas regulares. Se o pólo estiver sobre qualquer ponto das fronteiras F_I ou F_{II} o ramo negativo da conchóide formará uma cúspide sobre o pólo. Se o pólo for colocado em qualquer ponto da região II, teremos ambos os ramos como curvas regulares, e o ramo negativo apresentará um laço.

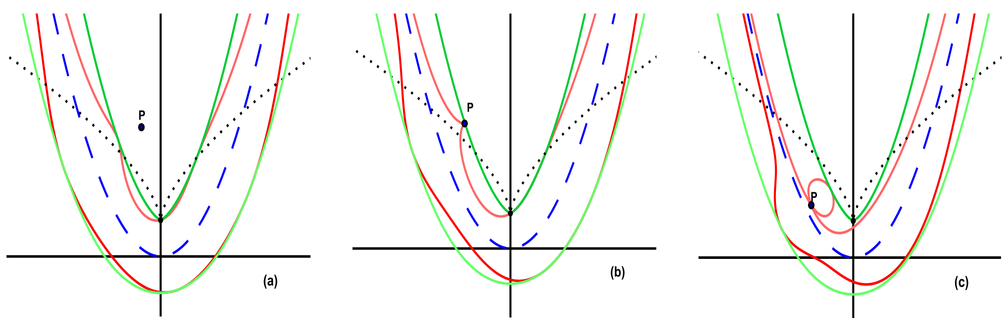


Figura 3.22: Conchóide da parábola $\alpha(t)$, com $k = \frac{1}{K(t_0)}$ entre as paralelas $P_\alpha(t)_{\pm\lambda}$, com $\lambda = \frac{1}{K(t_0)} = k$.

3) Se construirmos a conchóide da parábola com $k > \rho(t_0) = \dfrac{1}{K(t_0)}$ e localizarmos o pólo em qualquer ponto da região I os seus dois ramos serão curvas regulares. Se o pólo estiver sobre qualquer ponto das fronteiras F_I ou F_{II} o ramo negativo da conchóide formará uma cúspide sobre o pólo. Se o pólo for colocado em qualquer ponto da região II, teremos ambos os ramos como curvas regulares, e o ramo negativo apresentará um laço.

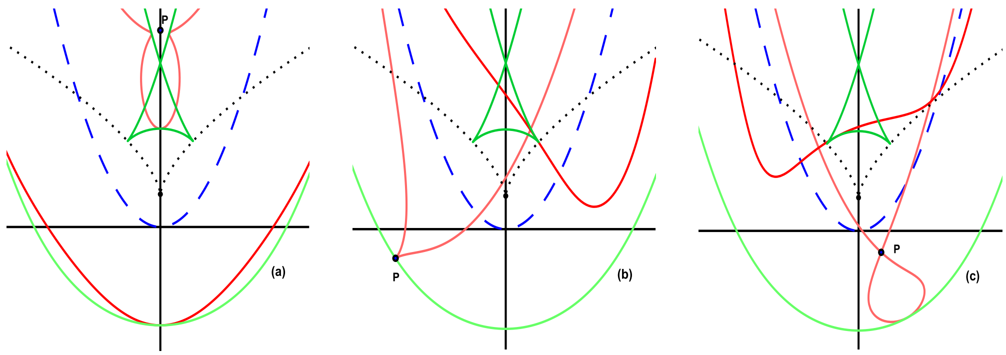


Figura 3.23: Conchóide da parábola $\alpha(t)$, com $k > \frac{1}{K(t_0)}$ entre as paralelas $P_\alpha(t)_{\pm\lambda}$, com $\lambda = k$.

OBS: Para $k > \rho(t_0) = \dfrac{1}{K(t_0)}$ surgem aqui os pontos A (auto-intersecção da paralela $(+\lambda)$), B e C (singularidades da paralela $(+\lambda)$), localizadas sobre a evoluta e que correspondem a pontos onde o raio de curvatura da parábola é exatamente igual a λ) e os trechos AB, BC e CB sobre a fronteira F_I.

3.1) Se o pólo estiver sobre o ponto A que é um ponto que está localizado a uma distância k de dois pontos da parábola $\alpha(t)$, isto é, temos um círculo de raio $r = k$ centrado em A e que tangencia a parábola em dois pontos distintos, e assim o ramo negativo da conchóide apresenta duas cúspides sobre o pólo que coincide com o ponto A.

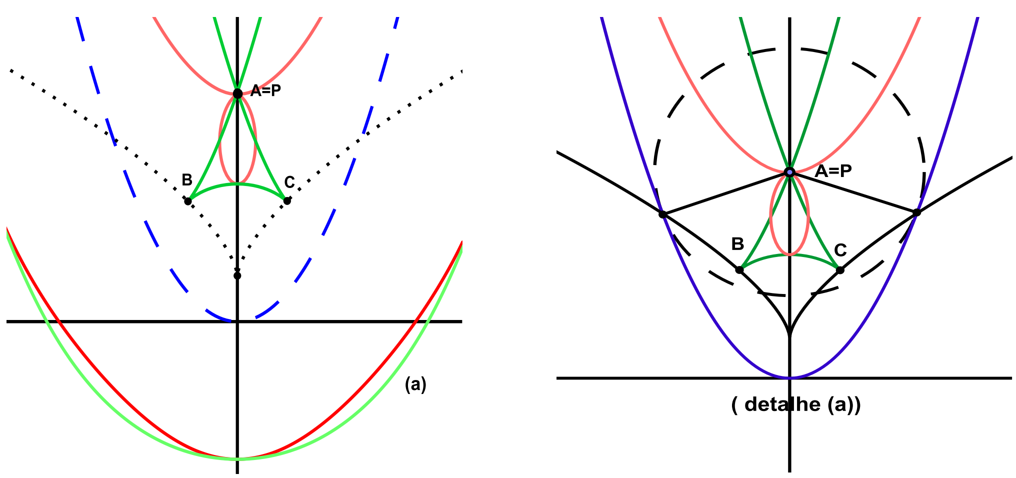


Figura 3.24: Conchóide da parábola $\alpha(t)$, com $k > \frac{1}{K(t_0)}$entre as paralelas $P_\alpha(t)_{\pm\lambda}$, com $\lambda = k$ e pólo sobre no ponto A.

3.2) Se o pólo for colocado sobre o ponto B ou C, teremos neste ponto uma cúspide e um laço no ramo negativo da conchóide. Isto decorre do fato de que um círculo de raio $r = k$ centrado num desses pontos é o círculo osculador, e portanto,um círculo secante que intersecta transversalmente a parábola $\alpha(t)$ em um ponto e a *"oscula"* (por "três pontos consecutivos") em outro.

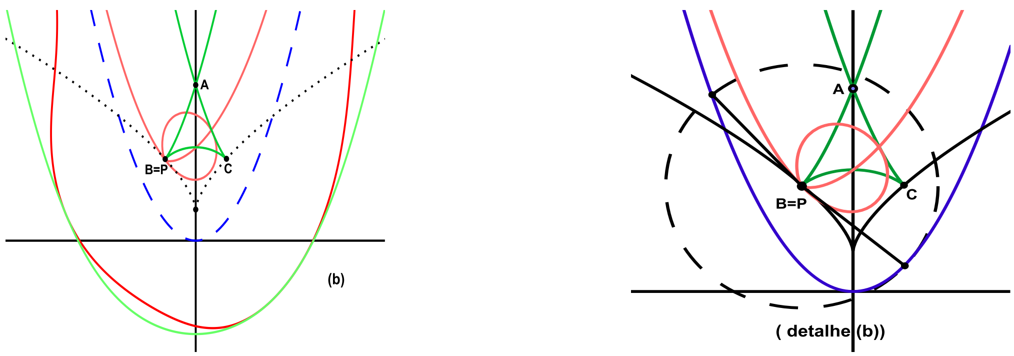


Figura 3.25: Conchóide da parábola $\alpha(t)$, com $k > \frac{1}{K(t_0)}$entre as paralelas $P_\alpha(t)_{\pm\lambda}$, com $\lambda = k$ e pólo sobre no ponto B.

3.3) Se o pólo for colocado sobre qualquer ponto dos trechos AB, BC ou CA, teremos neste ponto uma cúspide e um laço no ramo negativo da conchóide, e neste caso, a *"laçada"* localiza-se integralmente no interior da região III, tangenciando os outros dois trechos. Aqui, temos também um círculo da raio $r = k$ centrado no pólo e que intersecta transversalmente a parábola em dois pontos, formando o laço e a tangencia em um terceiro ponto formando a cúspide.

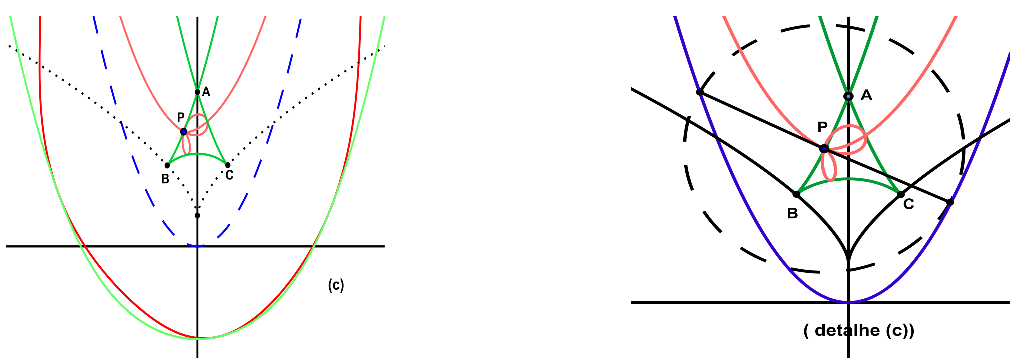


Figura 3.26: Conchóide da parábola $\alpha(t)$, com $k > \frac{1}{K(t_0)}$ entre as paralelas $P_\alpha(t)_{\pm\lambda}$, com $\lambda = k$ e pólo sobre o trecho AB.

3.4) Se o pólo for colocado em qualquer ponto da região III, teremos no ramo negativo da conchóide uma *"auto-intersecção múltipla"* sobre o pólo, isto é, qualquer ponto nessa região possui um circulo de raio $r = k$ que intersecta transversalmente a parábola $\alpha(t)$ em quatro pontos distintos, e além disso, todos os pontos da *"laçada"* localizam-se integralmente no interior da região, tangenciando cada um dos trechos AB, BC e CA.

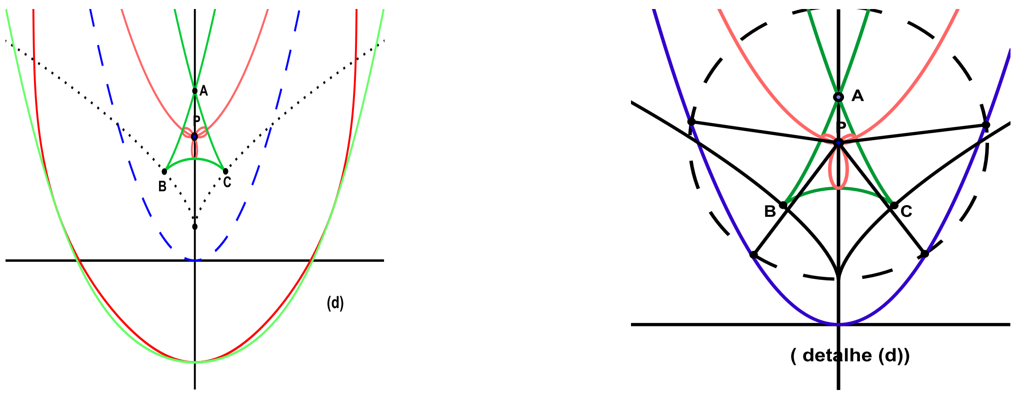


Figura 3.27: Conchóide da parábola $\alpha(t)$,com $k > \frac{1}{K(t_0)}$ entre as paralelas $P_\alpha(t)_{\pm\lambda}$, com $\lambda > \frac{1}{K(t_0)}$ e pólo na região III.

Resumindo o exposto até aqui sobre a natureza e localização da conchóide da parábola, $\alpha(t) = \left(t, pt^2\right)$, de acordo com a localização do pólo em relação às paralelas à parábola com λ em função do raio de curvatura mínimo, $\frac{1}{K(t_0)}$, de $\alpha(t)$ temos que fixado o pólo $P = (a, b)$ da conchóide da parábola com $k = \lambda$ nos pontos A, B e C, nos trechos AB, BC e CA, nas fronteiras FI e FII e nas regiões I, II e III temos:

Proposição 3.3: *Ambos os ramos da conchóide da parábola, com $k = \lambda$ estarão integralmente localizados na região entre as duas paralelas.*

Proposição 3.4: ***Para $k(t_0)$, curvatura da parábola em seu vértice, o comportamento e a localização dos ramos da conchóide da parábola, com $k = \lambda \leq \frac{1}{K(t_0)}$, em função da localização do pólo são descritos por***:

1) *O pólo localizado em qualquer ponto das sub-regiões I produzirá os dois ramos da conchoide como curvas C^∞ regulares simples.*

2) *O pólo localizado em qualquer ponto das sub-regiões II produzirá os dois ramos da conchoide como curvas C^∞ regulares, ocorrendo uma única auto-intersecção no ramo negativo.*

3) *O pólo localizado em qualquer ponto das fronteiras FI ou FII produzirá, no ramo negativo, uma singularidade do tipo cúspide sobre o pólo.*

Proposição 3.5: ***O comportamento e a localização dos ramos da conchóide da parábola, com $k = \lambda > \frac{1}{K(t_0)}$, em função da localização do pólo são***:

1) O pólo localizado em qualquer ponto das sub-regiões I produzirá os dois ramos da conchoide como curvas C^∞ regulares simples.

2) O pólo localizado em qualquer ponto das sub-regiões II produzirá os dois ramos da conchoide como curvas C^∞ regulares ocorrendo, no ramo negativo, uma única auto-intersecção simples sobre o pólo e eventualmente outras auto-intersecções fora dele.

3) O pólo localizado em qualquer ponto das fronteiras FI ou FII produzirá, no ramo negativo, uma singularidade do tipo cúspide sobre o pólo.

4) O pólo localizado no ponto A produzirá, no ramo negativo, duas cúspides sobre o pólo.

5) O pólo localizado nos pontos B ou C produzirá, no ramo negativo, uma auto-intersecção com um ponto cuspidal sobre o pólo.

6) O pólo localizado em qualquer ponto dos trechos AB, BC ou CA produzirá, no ramo negativo, uma auto-intersecção simples e um laço cuspidal sobre o pólo, ambos integralmente restritos a região III e tangentes aos outros dois trechos.

7) O pólo localizado em qualquer ponto da região III produzirá, no ramo negativo, uma auto-intersecção dupla sobre o pólo formando três laços, integralmente restritos a essa região e tangentes aos trechos AB, BC e CA.

Conclusões

Este é o resultado de uma investigação onde utilizamos o computador como laboratório experimental para construir gráficos, fazer animações e cálculos com o objetivo de visualisar os conceitos envolvidos, levantar questões e estabelecer conjecturas a serem posteriormente provadas. A conveniência de se trabalhar com a família da conchóide, que são curvas geradas mecanicamente, possibilitou o estudo de aspectos históricos, a idealização de dispositivos (mecanismos / aparatos) mecânicos para o traçado das curvas, a simulação computacional e a análise das propriedades geométricas das mesmas.

Outro aspecto relevante deste trabalho, embora não explícito, foi a própria incorporação da metodologia de pesquisa usando programas computacionais livres para gráficos e cálculos simbólicos e numéricos (Winplot, GeoGebra e Maxima). Fica clara a perspectiva de transferência destes procedimentos para a situação em sala de aula na universidade ao tratar de temas muito diversos.

Tendo em vista os recentes resultados da aplicação da conchóide de base circular (limaçons) na construção de rotores e carcaças de compressores, é interessante um estudo similar a este sobre as conchóides de círculos e é possível que pela facilidade construtiva das conchóides elas já venham sendo empregadas em outros tipos de máquinas e equipamentos.

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, H. e Santos, W., *Geometria das Curvas Planas* , Editora da UFG, Goiânia, (2002).

[2] Apostol, T. M., *Cálculo com Funções de uma variável, com uma introdução à Algebra Linear*, Vol I e II, Editora Reverte LTDA, Barcelona, (1994).

[3] Bruce, J. W. e Giblin, P. J., *Curves and Singularities: a geometrical intruduction to singularity theory*, Cambridge University Press, NY, (1992).

[4] Carmo, M. P. e Cavalcante, L. A., *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Editora SBM, Rio de Janeiro, (2005).

[5] Costa, S. I. R., Grou, M. A. and Figueiredo, V., , *"Mechanical Curves - a Kinematic Greek look through the computer*, Int. J. Math. Educ. Sci. Tech., 30, 459-468 (1999).

[6] Edwards Jr., C. H. e Penney, D. E. , *Cálculo com Geometria Analítica, V II* / Trad. Alfredo Alves de Farias, Editora Printice - Hall do Brasil Campus, Rio de Janeiro, (1997).

[7] Eves, H., *Introdução à história da matemática* / Trad. Hygino H. Domingues –2 ed. - Campinas, SP: Ed.da UNICAMP, (1997).

[8] Heirer, E., *Analisys by Its History / Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in matthematics* – Ed. Springer-Verlang New York, Inc., New York, (1996).

[9] http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

[10] http://Mathworld. Wolfram.com/Conchoid of Nicomedes.html.

[11] http://maxima.sourceforge.net/

[12] http://xahlee.org/SpecialPlaneCurve

[13] http://www.geogebra.org/cms/

[14] Knorr, W. R., *The Anciant Tradition of Geometric Problems* – Dover Publications, Inc., New York, (1993).

[15] Lawrence, J. D., *A Catalog of Special Plane Curves* - Dover Publications, Inc. - New York., (1972).

[16] Pansonato, C. C. , *Propriedades globais de curvas no espaço* - Dissertação de Mestrado, Editora da UNICAMP, IMECC, Campinas, (1995).

[17] Shenk, Al, *Cálculo com Geometria Analítica, V II* / Trad. Anna Amália Feijó Barroso, Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro, (1993).

[18] Smith, D. E., *History of Mathematics*, Vol I e II / General Survey of History of Elementary Mathematics.

[19] Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Editora Dover Publications, Inc, Toronto, (1988).

[20] Sultan, I. A., *A surrogate model for interference prevention in the limaçon-to-limaçon machines*, Engineerig Computations: Int. J. Computer-Aided Engeneering and softwere, Vol. 24 N. 5, pp 437-449 (2007).

[21] Sultan, I. A., *Profiling rotors for limaçon-to-limaçon compression-expansion machines*, ASME Transcrition. J. Mechanical Design, Vol. 128 N. 4, pp 787-793 (2006).