Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

por

Luciana Mafalda Elias de Assis

Mestrado Profissional em Matemática - Campinas - SP

Orientadora: Profa. Dra. Andréia Cristina Ribeiro

APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Luciana Mafalda Elias de Assis** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 29 de Agosto de 2008.

Andréia C. Ribeiro
Profa. Dra. Andréia Cristina Ribeiro
Orientadora

Banca Examinadora:
Profa. Dra. Andréia Cristina Ribeiro
Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos
Prof. Dr. Vilmar Trevisan

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **Mestre em Matemática.**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues CRB8a / 2116

Assis, Luciana Mafalda Elias de
As76a Aplicações do princípio da inclusão e exclusão / Luciana Mafalda Elias de Assis -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Andréia Cristina Ribeiro
Trabalho final (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise combinatória. 2. Permutações (Matemática). 3. Combinações (Matemática). I. Ribeiro, Andréia Cristina. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Applications of the inclusion and exclusion principle.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Combinatorial analysis. 2. Permutations. 3. Combinations.

Área de concentração: Análise Combinatória

Titulação: Mestre Profissional em Matemática

Banca examinadora:

Profa. Dra. Andréia Cristina Ribeiro (UFMS)
Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Vilmar Trevisan (UFRS)

Data da defesa: 29/08/2008

Programa de pós-graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de agosto de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Andréia C. Ribeiro

Prof. (a). Dr (a). ANDRÉIA CRISTINA RIBEIRO

Prof. (a). Dr (a). VILMAR TREVISAN

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ PLINIO DE OLIVEIRA SANTOS

Dedico esta dissertação ao meu amado Raul, por todo amor, apoio, compreensão e por toda colaboração, pois sem ele não teria conseguido. À minha mãe Mary Celis por tudo o que fez por mim. Aos meus irmãos e amigos que sempre estiveram presentes. O mundo não seria o mesmo sem essas pessoas!

“ Quem quer colher rosas deve suportar os espinhos. ”

Provérbio Chinês.

Agradecimentos

- Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:
- a Deus por tudo;
- ao meu querido marido e amigo Raul por toda paciência, dedicação e estímulo em seus conselhos e orientação;
- a Profª. Drª. Andréia Cristina Ribeiro, por toda orientação e amizade;
- aos professores da banca pelas valiosas sugestões;
- a minha família, pelo incentivo e segurança que me passaram durante todo esse período;
- aos amigos do curso pelo agradável convívio;
- ao amigo Robinson pela contribuição no LaTeX;
- a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

ASSIS, Luciana Mafalda Elias de. *Aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão*. Campinas - SP: Universidade Estadual de Campinas, 2008. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Neste trabalho são apresentados vários resultados importantes da Análise Combinatória com destaque para o Princípio da Inclusão e Exclusão. Relevantes aplicações deste princípio são abordadas.

Palavras-Chave: Análise Combinatória, Permutações, Combinações.

Abstract

ASSIS, Luciana Mafalda Elias de. *Aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão*. Campinas - SP: Universidade Estadual de Campinas, 2008. Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

In this work we present important results from enumerative combinatorics, with an emphasis on the Principle of Inclusion and Exclusion. Relevant applications of this principle are presented to illustrate its use.

Keywords: Combinatorics Analysis, Permutations, Combinations.

Sumário

Capítulo 1

Revisando Conceitos

1.1 Conjuntos

A Teoria dos Conjuntos foi criada por Georg Cantor $(1845 - 1918)$, sendo o conceito de conjunto um dos mais importantes da matemática contemporânea. Como dizia David Hilbert $(1862 - 1943)$: *"Do paraíso criado por Cantor ninguém nos tirará"*.

Um conjunto (ou coleção) é formado por objetos, chamado de elementos. Em geral, indicamos os conjuntos por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas do alfabeto e ainda a relação básica entre um elemento e um conjunto é a relação de pertinência. Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto U, diz-se que $x \in U$ (x pertence a U). Caso contrário, diz-se que $x \notin U$ (x não pertence a U).

Um conjunto U fica definido quando se dá uma regra que permita decidir se um objeto arbitrário x pertence ou não a U. Comumente, pode-se definir um conjunto de três maneiras, ou seja, descrever seus elementos por uma sentença, listar seus elementos entre chaves ou dar uma *"propriedade"* que identifique seus elementos.

Observe que o conjunto U é o conjunto de todos os objetos em estudo o qual denominaremos *Conjunto Universo* e o conjunto que não contém nenhum objeto é chamado de *Conjunto Vazio* e representado pelo símbolo $\emptyset$.

Os conjuntos podem ser *"finitos"* ou *"infinitos"*. Intuitivamente, um conjunto é finito se consiste de um número específico de elementos diferentes, isto é, se, ao contarmos os diferentes membros de um conjunto, o processo de contagem chega a um final. De outro modo, o conjunto é infinito. Uma definição formal será dada em 1.4. . E ainda, dizemos que dois conjuntos A e B são equivalentes se, e somente se, existe uma bijeção $F : A \to B$.

Exemplo 1.1.1 *Seja M o conjunto dos dias da semana. Vemos que M é finito.* ■

Exemplo 1.1.2 *Seja $N = \{2, 4, 6, 8, \cdots\}$. Observamos que N é infinito.* ■

Exemplo 1.1.3 *O conjunto $P = \{2, 4, 6, \cdots\}$ dos números pares, é equivalente ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, pois estabelecemos uma bijeção em $F : A \to B$ dada por $F(n) = \frac{n}{2}; n \in \mathbb{N}$.* ■

1.1.1 Subconjuntos

$i)$ Se A e B são conjuntos e todo elemento de A também é elemento de B, dizemos que A é um subconjunto de B ou uma parte de B e denotamos essa relação por $A \subset B$;

$ii)$ Quando $A \subset B$, diz-se também que A é parte de B, que A está incluso em B ou contido em B. A relação $A \subset B$ chama-se relação de inclusão;

$iii)$ Dois conjuntos A e B são iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$, neste caso escrevemos $A = B$;

$iv)$ A relação de inclusão $A \subset B$ é:

"reflexiva" : $A \subset A$, seja qual for o conjunto A;

"Anti-simétrica" : Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;

"Transitiva" : Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Certos conjuntos, por sua importância e pela frequência com que aparecem, são indicados por notações especiais, sendo que se destacam os conjuntos numéricos:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ - Conjunto do números naturais;

$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ - Conjunto dos números inteiros;

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ - Conjunto dos números racionais;

$\mathbb{R} =$ Conjunto dos números reais;

$\mathbb{C} = \{a + bi \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{R}\}$ - Conjunto dos números complexos.

1.1.2 Conjunto Vazio e Conjunto das Partes

Como já mencionamos, para lidar com a linguagem de conjuntos de uma maneira mais uniforme, aceita-se como a existência de um "conjunto sem elementos" denotado por $\emptyset$.

Exemplo 1.1.4 *Seja* $B = \{x \mid x^2 = 4 \text{ , } x \text{ é ímpar}\}$. *Desse modo* B *é um conjunto vazio.* ■

Exemplo 1.1.5 *Sejam* X *o conjunto dos quadrados e* Y *o conjunto dos retângulos. Todo quadrado é um retângulo, logo* $X \subset Y$. ■

Quando se escreve $X \subset Y$ não está excluída a possibilidade de vir a ser $X = Y$. No caso em que $X \subset Y$ e $X \neq Y$, diz-se que X é uma "parte própria" ou um subconjunto próprio de Y. Daí, afirmar $x \in X$ equivale a afirmar $\{x\} \subset X$.

Agora, para mostrarmos que um conjunto X não é subconjunto de um conjunto Y, deve-se obter um elemento de X que não pertença a Y. Assim, por exemplo, não se tem $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$, pois $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$. Logo, a partir daí, temos que o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto X, pois, caso contrário, existiria algum $x \in \emptyset$ tal que $x \notin X$. Como não existe $x \in \emptyset$, isto nos leva a concluir que $\emptyset \subset X$, seja qual for o conjunto X.

Agora, dado um conjunto X, indica-se por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos são todas as partes de X, ou seja, afirmar que $A \in \mathcal{P}(X)$ é o mesmo que dizer $A \subset X$.

$\mathcal{P}(X)$ é denominado o *Conjunto das partes de* X, onde $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$, ou seja, $\mathcal{P}(X)$ nunca é vazio.

Exemplo 1.1.6 *Seja* $X = \{1, 2, 3\}$. *Então,*

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

■

1.2 Operações com Conjuntos

1.2.1 Diagrama de Venn

Uma boa maneira de ilustrarmos operações entre conjuntos é através dos chamados Diagramas de Venn, cuja construção é bastante simples. Veja como fica a representação de $A \subset B$ na figura 1.1.

Exemplo 1.2.1 *Sejam* U *o conjunto universo (* U *é definido por uma região plana fechada contendo seus elementos. Esses elementos de* U *são definidos por pontos geométricos no plano).* A *e* B *são subconjuntos de* U *(*A *e* B *são definidos por subáreas).* ■

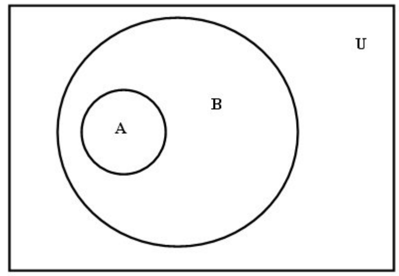


Figura 1.1: Diagrama de Venn para $A \subset B$.

1.2.2 União e Intersecção

A união de dois conjuntos A e B é definida como sendo o conjunto que inclui os elementos de U pertencentes a A ou B, e sua notação é dada por:

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Esta definição pode ser estendida para n conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$:

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \{x \in U \mid \exists \text{ k } \in \{1, 2, \cdots, n\}; x \in A_k\}$$

e mais geralmente para uma família de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$ definimos:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in U \mid \exists \text{ i } \in I \mid x \in A_i\}.$$

A intersecção de dois conjuntos A e B é definida como sendo o conjunto que inclui os elementos comuns dos dois conjuntos e é denotado por $A \cap B$ e sua notação é dada por:

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Estendendo esta definição para n conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$:

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \{x \in U \mid x \in A_k, \forall \text{ k } \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

e de um modo geral para uma família de conjuntos $\{A_i, i \in I\}$:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in U \mid x \in A_i, \forall \text{ i } \in I\}.$$

Exemplo 1.2.2 *O conjunto B de todas as retas que passam pela origem pode ser escrito como a união de uma família de conjuntos na forma: $A_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \lambda x\}$, ou seja, $B = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} A_\lambda$.* ■

Exemplo 1.2.3 *Seja $V = \{2, 4, 6, \cdots\}$, isto é, os múltiplos positivos de 2, e seja $W = \{3, 6, 9, \cdots\}$, isto é, os múltiplos positivos de 3. Assim, $V \cap W = \{6, 12, 18, \cdots\}$.* ■

1.2.3 Complemento e Diferença

O complementar de um conjunto A, em relação ao conjunto universo U, é definido como sendo o conjunto cujos elementos pertencem ao conjunto U, mas não pertencem ao conjunto A, sendo denotado por A' ou A^c. Em outras palavras: $A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$.

Já a diferença entre os conjuntos A e B, é o conjunto representado por $A - B$ formado por elementos de A que não pertencem a B, ou seja, $A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Observe que $A' = U - A$ e $A - B = A \cap B'$.

Exemplo 1.2.4 *Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e $\mathbb{Q}$ o cojunto dos números racionais. Assim, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, consiste nos números irracionais.* ■

Teorema 1.2.1 *Para quaisquer conjuntos A, B e C, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

a) Associatividade da união e intersecção:

i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

b) Distributividade da intersecção em relação à união e a distributividade da união em relação a intersecção:

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Comutatividade da união e da intersecção:

i) $A \cup B = B \cup A$;

ii) $A \cap B = B \cap A$.

d) O conjunto vazio $\emptyset$ *é o elemento neutro da união:*

i) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

e o conjunto universo U *é o elemento neutro da intersecção:*

ii) $A \cap U = U \cap A = A$.

e) O complementar associa a cada conjunto A*, o conjunto* A' *tal que:*

i) $A \cap A' = \emptyset$;

ii) $A \cup A' = U$.

f) i) $U' = \emptyset$;

ii) $\emptyset' = U$;

iii) $(A')' = A$.

g) i) $A \cup A = A$;

ii) $A \cup U = U$;

iii) $A \cap A = A$;

iv) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Teorema 1.2.2 *(Fórmulas de De Morgan) Sejam* A *e* B *subconjuntos do conjunto universo* U*. Então:*

i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$;

ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

As fórmulas de De Morgan podem ser estendidas para n subconjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ do conjunto universo U:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_n'$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n'$$

e para a família de subconjuntos $\{A_i, i \in I\}$ de U:

$$(\bigcup_{i \in I} A_i)' = \bigcap_{i \in I} A_i' \text{ e } (\bigcap_{i \in I} A_i)' = \bigcup_{i \in I} A_i'.$$

Agora que já conhecemos os conceitos de união e intersecção entre conjuntos, podemos definir conjuntos disjuntos. Dois conjuntos A e B são ditos disjuntos se eles não possuem elementos comuns, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$.

De um modo geral, os conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são ditos disjuntos dois a dois ou mutuamente disjuntos, se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para quaisquer pares de subíndices $\{i, j\}$ com $i \neq j$ do conjunto de índices $\{1, 2, \cdots, n\}$. Em tal caso, a operação de união é designada por $+$ ou Σ ao invés de $\cup$.

Exemplo 1.2.5 *Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k;\ k \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos números pares e $I = \mathbb{N} - P$ o conjunto dos números ímpares. Então, $\mathbb{N} = P + I$.* ■

Exemplo 1.2.6 *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e, $A_i = \{i\}, i \in \mathbb{N}$. Então, $\mathbb{N} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$.* ■

1.3 Produto Cartesiano, Relações e Aplicações

1.3.1 Produto Cartesiano

O conceito de par ordenado e, de uma forma geral, o conceito de uma n-upla ordenada são necessários para a definição de um produto cartesiano de dois conjuntos, ou de uma forma geral, de n conjuntos.

De acordo com a definição de igualdade de conjuntos, o par (conjuntos com dois elementos) $\{a, b\}$ é igual ao par $\{b, a\}$. Todavia, existem casos em que a ordem dos elementos é importante. Por exemplo, em geometria analítica, o par de coordenadas (a, b) dos pontos de um plano, designa a abscissa e a ordenada desse ponto no plano, respectivamente.

A necessidade da distinção dos elementos do par, leva à introdução do conceito de par ordenado.

O par de elementos a e b (não necessariamente distintos) em que a é considerado o primeiro e b o segundo elemento é chamado um par ordenado e denotado por (a, b).

De acordo com a definição, dois pares (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

O conceito de uma n-upla ordenada $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ pode ser indutivamente definida a seguir. Para $n = 3$, uma tripla ordenada (a_1, a_2, a_3) é definida como $(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$, de forma que o primeiro elemento deste par ordenado é (a_1, a_2) e o segundo elemento é a_3.

De uma maneira geral, uma n-upla ordenada $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é definida como

$$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}), a_n)$$

onde o primeiro elemento deste par é $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$ e o segundo elemento é a_n.

Em vários casos, é conveniente adotar a terminologia vetorial onde o primeiro elemento a_1 é chamado 1^a coordenada, o segundo elemento a_2 é chamado 2^a coordenada, e assim sucessivamente.

Após a introdução do conceito de um par ordenado e de uma n-upla ordenada, o produto cartesiano pode ser definido como a seguir.

O Produto Cartesiano dos conjuntos A e B, denotado por $A \times B$, é definido como o conjunto dos pares ordenados onde a primeira coordenada é um elemento do conjunto A e a segunda coordenada é um elemento do conjunto B, isto é, $A \times B = \{(a, b) \mid \ a \ \in A \text{ e } b \in B\}$.

Essa definição pode ser estendida para n conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$, isto é,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

Em particular, se $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, o produto cartesiano é denotado por A^n. Se $A, B \subset \mathbb{R}$ o produto cartesiano $A \times B$ é representado geométricamente pelos pontos (a, b) do plano, com abscissa $x = a$ tomando valores do conjunto A (eixo-x) e ordenada $y = b$ tomando valores do conjunto B (eixo-y).

Geralmente, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é representado pelos pontos $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ do espaço n-dimensional com a k-ésima coordenada tomando valores do conjunto A_k (eixo-x_k), $k = 1, 2, \cdots, n$.

Exemplo 1.3.1 *Considere os conjuntos* $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4\}$ *e* $A_3 = \{7, 9\}$. *Todos os pares ordenados com a* 1^a *coordenada em* A_1 *e* 2^a *coordenada em* A_2 *são:* $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)$. *Logo,* $A_1 \times A_2 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Agora, determinaremos $A_1 \times A_2 \times A_3$. *Já calculamos* $A_1 \times A_2$ *então, todos os pares ordenados com* 1^a *coordenada em* $A_1 \times A_2$ *e* 2^a *coordenada em* A_3 *são:*

((1,3),7)=(1,3,7);

((1,3),9)=(1,3,9);

((1,4),7)=(1,4,7);

((1,4),9)=(1,4,9);

((2,3),7)=(2,3,7);

((2,3),9)=(2,3,9);

((2,4),7)=(2,4,7);

((2,4),9)=(2,4,9);

Logo,

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times A_3 &= (A_1 \times A_2) \times A_3 \\ &= \{(1,3,7),(1,3,9),(1,4,7),(1,4,9),(2,3,7),(2,3,9),(2,4,7),(2,4,9)\}. \end{aligned}$$

■

1.3.2 Relações

Uma relação binária de um conjunto A em um conjunto B é um subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$. O par ordenado (a, b) satisfaz a relação R se, e somente se, $(a, b) \in R$. Em geral, esta relação é denotada por aRb. Se $A = B$, então R é chamada de uma relação em A. Podemos citar como exemplos de relações a relação de igualdade e a relação de inclusão.

O conjunto formado por todas as relações de A em B é o conjunto das partes denotado por $\mathcal{P}(A \times B)$.

Um conjunto especial de relações é o que satisfaz certas propriedades, ou seja, uma relação binária R sobre um conjunto A é chamada:

a) *"reflexiva"* se, e somente se, para todo $a \in A$, aRa;

b) *"simétrica"* se, e somente se, aRb então bRa;

c) *"anti-simétrica"* se, e somente se, aRb e bRa então $a = b$;

d) *"transitiva"* se, e somente se, aRb e bRc então aRc.

Uma *relação de equivalência* é uma relação binária que satisfaz as propriedade reflexiva, simétrica e transitiva. Um exemplo de relação de equivalência é a relação de igualdade. Uma relação de ordem é uma relação binária que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Como exemplo, podemos citar a relação de inclusão $\subset$.

1.3.3 Aplicações

O subconjunto F de um produto cartesiano $A \times B$ é chamado uma aplicação do conjunto A no conjunto B se, e somente se, para todo $a \in A$ existe um único b tal que (a, b) pertence a F. Assim, se (a, b_1) pertence a F e (a, b_2) pertence a F, então $b_1 = b_2$.

Seja $(a, b) \in F$ um par ordenado. O elemento $b \in B$ é chamado imagem de a por F e, em geral, é denotado por $b = F(a)$. Consequentemente, uma aplicação F de um conjunto A em um conjunto B, associa a cada elemento $a \in A$ um único elemento $b \in B$.

Se, além disso, para todo elemento $b \in B$ existir ao menos um elemento $a \in A$, tal que $(a, b) \in F$, então F é chamada de aplicação sobrejetora.

Uma aplicação F de um conjunto A em um conjunto B é chamada de injetora se, e somente se, existir no máximo um elemento $a \in A$ tal que $(a, b) \in F$, para todo $b \in B$. Assim, se $(a_1, b) \in F$ e $(a_2, b) \in F$, então $a_1 = a_2$.

Finalmente, uma aplicação F é chamada bijetora se F é injetora e sobrejetora. A diagonal T_A do produto cartesiano $A^2 = A \times A$, isto é, $T_A = \{(a, b) \in A^2 | a = b\}$ é chamada aplicação identidade no conjunto A. Assim, T_A associa a cada elemento $a \in A$ o mesmo elemento, isto é, $T_A(a) = a$.

Se $F \subset A \times B$ é uma aplicação bijetora de um conjunto A em um conjunto B, então a inversa desta aplicação é denotada por $F^{-1} \subset B \times A$ e definida como: $(b, a) \in F^{-1}$ se, e somente se, $(a, b) \in F$, ou equivalentemente, $a = F^{-1}(b)$.

Considere agora o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ dos números naturais. Uma aplicação do conjunto $\mathbb{N}$ em um conjunto A é um conjunto na forma $F = \{(n, a_n) | n \in \mathbb{N}, a_n \in A\}$, que corresponde um elemento $a_n \in A$ para cada número natural $n \in \mathbb{N}$. Esse tipo de aplicação é, em particular, chamada de sequência de elementos de A. Essa sequência pode ser representada por $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. O elemento a_n é chamado n-ésimo termo da sequência.

1.4 Conjuntos Enumeráveis e não Enumeráveis

Dois conjuntos A e B são chamados equivalentes e denotados por $A \approx B$, se existir uma aplicação bijetora de A em B.

Exemplo 1.4.1 *O conjunto $A = \{2, 4, \cdots, 2n\}$ é equivalente ao conjunto $B = \{1, 2, \cdots, n\}$, pois a aplicação $f(a) = \dfrac{a}{2}, \forall\ a \in A$ é bijetora.* ■

De um modo geral, o conjunto $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ é equivalente ao conjunto $B = \{1, 2, \cdots, n\}$ com $f(a_k) = k$, $k = 1, 2, \cdots, n$, pois $f : A \to B$ é uma aplicação bijetora.

Definição 1.4.1 *Um conjunto A é dito finito com n elementos se, e somente se, ele é equivalente ao subconjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ dos números naturais. Um conjunto que não é finito é dito infinito.*

Exemplo 1.4.2 *O conjunto $\emptyset$ é considerado um conjunto finito com 0 (zero) elementos, por definição.* ■

Definição 1.4.2 *Um conjunto A diz-se "enumerável" quando é finito, ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.*

Definição 1.4.3 *Dado um conjunto A de modo que existe uma bijeção $F : \mathbb{N} \to A$ diz-se que A é "infinito enumerável" e, pondo-se $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \cdots, a_n = f(n), \cdots$, tem-se $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.*

Cada bijeção $f : \mathbb{N} \to A$ chama-se uma enumeração (dos elementos de A).

Teorema 1.4.1 *Todo conjunto infinito A contém um subconjunto infinito enumerável.*

O Teorema (1.4.1) nos diz que, um conjunto infinito enumerável pode ser considerado como o *"menor"* conjunto infinito, contido em um dado conjunto infinito.

Teorema 1.4.2 *Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração: Se A for finito é enumerável, e se A for infinito, definiremos indutivamente uma bijeção $f : \mathbb{N} \to A$.

Tomando $f(1)$ como sendo o menor elemento de A, vamos supor que $f(2), \cdots, f(n)$ é definido de modo que satisfaz:

(a) $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$;

(b) colocando $B_n = A - \{f(1), \cdots f(n)\}$, temos $f(n) < b$, $\forall\ b \in B_n$.

Observe que $B_n \neq \emptyset$ (pois A é infinito), daí definimos $f(n+1)$ como sendo o menor elemento de B_n.

Isto completa a definição de $f : \mathbb{N} \to A$ de modo a serem mantidas as condições (a) e (b) $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Segue-se de (a) que f é injetora e, por outro lado, (b) implica que f é sobrejetora, pois se existisse algum $b \in A - f(\mathbb{N})$, teríamos $b \in B_n$ $\forall$ n e portanto, $b > f(n)$, qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$. Então, o conjunto infinito $f(\mathbb{N})$ seria limitado, o que é absurdo. ■

Um conjunto que não é enumerável, é dito não-enumerável. Como exemplo de conjunto não-enumerável podemos citar o conjunto dos números reais, ou seja, o conjunto dos números reais tem cardinalidade diferente da do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Trabalharemos com os números do intervalo $(0, 1)$ que tem a mesma cardinalidade da reta toda.

Vamos adotar, para cada número, sua representação decimal infinita. então, suponha que fosse possível estabelecer uma correspondência biunívoca dos números do intervalo $(0, 1)$ com os números naturais. Isto equivale supor, que os números desse intervalo sejam os elementos de uma sequência $x_1, x_2, x_3, \ldots$ todos escritos em suas representações decimais, ou seja,

$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots$

$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots$

$x_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots$

$\ldots$

$x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots$

$\ldots$

onde os a_{ij} são algarismos de zero a 9.

Finalmente, o que nos levará a uma contradição, consiste em produzir um número do intervalo $(0, 1)$ que não esteja nessa lista.

Faremos isso, utilizando o *processo diagonal* de Cantor, que consiste na construção de um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa decimal, diferente de x_3 na terceira casa decimal, e assim por diante, de maneira que esse número não coincidirá com nenhum dos números da lista dada.

Para termos uma regra específica (esta regra não pode produzir um número que só contenha zeros a partir de uma certa casa decimal, pois tal número seria convertido noutro com algarismos 9 a partir dessa mesma casa, o qual poderia coincidir com algum número da lista). Seja $x = 0, a_1a_2a_3\cdots$ o número desejado, onde $a_i = 6$ se $a_{ii} = 5$ e $a_i = 5$ se $a_{ii} \neq 5$. Como esse número x não está na lista acima, chegamos a um absurdo, o que nos leva a concluir que o conjunto dos números reais é não enumerável.

1.5 Divisões e Partições de um Conjunto

Uma n-divisão de um conjunto W (ou a divisão de um conjunto W em n subconjuntos) é uma n-upla ordenada de conjuntos $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ que são subconjuntos de W dois a dois disjuntos e cuja união é W, isto é,

$$A_i \subset W \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, n;$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ com } i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = W$$

e neste caso utilizamos a notação: $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = W$.

Observe que em uma divisão de um conjunto, a inclusão de um ou mais conjuntos vazios não é excluida. Por exemplo, uma sequência ordenada (A_1, A_2, A_3, A_4) com $A_1 = \{w_1\}$, $A_2 = \{w_2, w_3, w_4\}$, $A_3 = \{w_5\}$ e $A_4 = \emptyset$ é uma divisão em quatro partes do conjunto $W = \{w_1, w_2, w_3,$
$w_4, w_5\}$.

Uma n-partição de um conjunto W (ou a partição de um conjunto W em n subconjuntos) é uma coleçao de n conjuntos $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ que são conjuntos dois a dois disjuntos e não vazios e cuja união é W, isto é,

$$A_i \subset W \text{ com } A_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ com } i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$$

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = W$$

1.6 Princípios Básicos de Contagem

1.6.1 Somatórios e Produtórios

Em matemática são comuns as definições por recorrência ou recursão. Estas definições, nada mais são do que definições por indução.

Vamos analisar para ambas operações as definições por recursão. Como a soma e o produto de dois números naturais estão bem definidas e, admitindo que também o estejam para $n-1 \geq 2$ números naturais quaisquer definindo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n \text{ e } a_1 a_2 \cdots a_n = (a_1 a_2 \cdots a_{n-1}) a_n,$$

passa a ter sentido falar em soma ou produto de $m \geq 2$ números naturais quaisquer.

Assim, faremos uso das notações:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

de forma que a notação $\sum_{i=1}^{n} a_i$ é o "somatório dos a_i, para i de 1 até n" e

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n,$$

cuja notação $\prod_{i=1}^{n} a_i$ é o "produtório dos a_i, para i de 1 até n".

1.6.2 Propriedades envolvendo Somatórios e Produtórios

Apresentaremos a seguir, algumas propriedades que envolvem a soma e o produto de números naturais.

s_1 : $\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) + a_n$;

s_2 : $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

s_3 : Para todo $k \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^{n} (k a_i) = k \sum_{i=1}^{n} a_i$;

s_4 : Se $a_i = a; i = 1, 2, \cdots, n$, então : $\sum_{i=1}^{n} a_i = n.a$;

s_5 : Somatórios duplos: Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{N}, (m \geq 1, n \geq 1)$. Então, $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right)$;

s_6 : Se $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 1)$ e $1 \leq r \leq n$, temos por definição $\sum_{i=r}^{n} a_i = a_r + a_{r+1} + \cdots + a_n$. Assim, para $n \geq 2$ e $1 \leq r \leq n$: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i$.

p_1 : $\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) a_n, (\forall\ n \geq 2)$;

p_2 : $\prod_{i=1}^{n}(a_i b_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$;

p_3 : Para todo $k \in \mathbb{N}$: $\prod_{i=1}^{n}(k a_i) = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$;

p_4 : Se $a_i = a; i = 1, 2, \cdots, n$, então : $\prod_{i=1}^{n} a_i = a^n$;

p_5 : Se $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}, (n \geq 1$ e $1 \leq r \leq n)$, temos por definição: $\prod_{i=r}^{n} a_i = a_r a_{r+1} \cdots a_n$. Assim, para $n \geq 2$ e $1 \leq r \leq n$ temos $\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right)\left(\prod_{i=r+1}^{n} a_i\right)$.

Com relação a troca de ordem nos somatórios duplos, observamos que deve-se ter atenção especial quando o intervalo de soma de uma variável depende da outra.

Por exemplo, $S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}$, podemos alterar a ordem da soma fazendo $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}$.

Exemplo 1.6.1 *Soma dos termos de uma progressão aritmética.*

O termo geral de uma progressão aritmética é dada por $a_j = a + jb$; $a, b \in \mathbb{R}$ e $j = 1, 2, \cdots, n$. A soma $S_n(a, b) = \sum_{j=1}^{n} a_j$ com $a_j = a + jb$, pode ser calculada da seguinte maneira:

Usando a transformação $i = n - j + 1$, com $j = n - i + 1$, o termo geral $a_j = a + jb, j = 1, 2 \cdots, n$, toma a forma $b_i = a_{n-i+1} = [a + (n + 1)b] - ib$, com $i = 1, 2, \cdots, n$.

Dessa forma, $S_n(a, b) = \sum_{i=1}^{n} b_i$, com $b_i = [a+(n+1)b-ib]$, $i = 1, 2, \cdots, n$ e $2S_n(a, b) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)$ desde que $a_j + b_j = 2a + (n + 1)b$, com $j = 1, 2, \cdots, n$. Logo, $2S_n(a, b) = n[2a + (n + 1)b]$ e $S_n(a, b) = \sum_{j=1}^{n}(a + jb) = \dfrac{n[2a + (n + 1)b]}{2}$.

Em particular, para $a = 0$ e $b = 1$, esta expressão reduz-se a $S_n = \sum_{j=1}^{n} j = \dfrac{n(n+1)}{2}$. ■

Exemplo 1.6.2 *Soma dos termos de uma progressão geométrica finita.*

O termo geral de uma progressão geométrica é dada por $a_j = a.b^{j-1}, j = 1, 2, \cdots, n$. A soma $G_n(a, b) = \sum_{j=1}^{n} a_j = a \sum_{j=1}^{n} b^{j-1}$, pode ser calculada multiplicando ambos os lados da igualdade por $(1 - b)$, ou seja, $(1 - b)G_n(a, b) = a(1 - b) \sum_{j=1}^{n} b^{j-1} = a \left(\sum_{j=1}^{n} b^{j-1} - \sum_{j=1}^{n} b^{j} \right)$.

Fazendo $i = j + 1$ na última equação da segunda soma, onde $j = i - 1$, obtemos:

$$(1 - b)G_n(a, b) = a(1 - b) \left(\sum_{j=1}^{n} b^{j-1} - \sum_{i=2}^{n+1} b^{i-1} \right) = a(1 - b^n)$$

.

Logo, $G_n(a, b) = \sum_{j=1}^{n} ab^{j-1} = \dfrac{a(1 - b^n)}{1 - b}$. ■

No caso em que temos infinitos termos na progressão geométrica, observamos que a soma $G(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} ab^{j-1}$ de uma progressão geométrica com $|b| < 1$, pode ser calculada usando o último resultado.

Realmente, $\sum_{j=1}^{\infty} ab^{j-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} ab^{j-1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1 - b^n)}{1 - b}$ e desde que $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ para $|b| < 1$, segue que $g(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} ab^{j-1} = \dfrac{a}{1 - b}$.

Capítulo 2

Princípios da Análise Combinatória

A Análise Combinatória é usada para simplificar a solução de muitos problemas. Abordaremos aqui os principais conceitos da Análise Combinatória, dentre eles, permutações, arranjos e combinações de objetos diferentes. Para esses conceitos serão dedudizadas fórmulas mediante o uso dos princípios aditivo e multiplicativo.

2.1 Os Princípios Aditivo e Multiplicativo

A maior parte do estudo de Análise Combinatória reduz-se a contar elementos de um conjunto finito.

O número de elementos de um conjunto finito A é denotado por $N(A)$ ou $|A|$ e é chamado de cardinalidade.

Antes de definirmos formalmente os princípios aditivo e multiplicativo, ilustraremos esses princípios com alguns exemplos possibilitando uma melhor compreensão desses conceitos.

Exemplo 2.1.1 *Suponha que tenham entrado em cartaz* 3 *filmes e* 2 *peças de teatro e que Júlia tenha dinheiro para assistir a apenas* 1 *evento. Quantos são os programas que Julia pode fazer?*

Se Júlia tem dinheiro para assistir apenas a 1 evento, então ou ela assiste ao Filme 1 ou ao Filme 2 ou ao Filme 3 ou à Peça 1 ou à Peça 2. Portanto, ao todo são 5 os programas diferentes que Júlia pode fazer. ■

Observe que no exemplo 2.1.1, podemos identificar os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é um filme $\} = \{F_1, F_2, F_3\}$, e

$B = \{y \mid y$ é uma peça de teatro $\} = \{P_1, P_2\}$,

de onde, $A \cup B = \{x \mid x$ é um filme ou uma peça de teatro $\}$.

Exemplo 2.1.2 *Num restaurante, há* 9 *pratos de comida italiana e* 4 *tipos de vinhos. Suponha que Natália só possa comer um prato de comida italiana ou tomar um tipo de vinho. Quantos são os possíveis pedidos que Natália poderá fazer?*

Ou Natália escolhe um prato de comida italiana dentre os 9 possíveis ou escolhe uma taça de vinho dentre os 4 possíveis.

Portanto, Natália pode fazer $9 + 4 = 13$ pedidos diferentes. ■

No exemplo 2.1.2, podemos identificar os conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é um prato de comida italiana $\} = \{P_1, P_2, P_3, \cdots, P_9\}$, e

$B = \{y \mid y$ é um tipo de vinho $\} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$,

de onde, $A \cup B = \{x \mid x$ é um prato de comida italiana ou um tipo de vinho$\}$.

Os exemplos 2.1.1 e 2.1.2 obedecem a um mesmo princípio básico que chamaremos de princípio aditivo. Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

Extensão do princípio aditivo: Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são conjuntos dois a dois disjuntos, e se A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

Proposição 2.1.1 *Se A e B são conjuntos finitos e equivalentes, então $N(A) = N(B)$.*

Vejamos agora, algumas propriedades sobre Cardinalidade:

a) Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então: $N(A + B) = N(A) + N(B)$;

b) Se A é um subconjunto do conjunto universo finito U e A' é o conjunto complementar de A, então: $N(A') = N(U) - N(A)$;

c) Se A e B são conjuntos finitos, então $N(A - B) = N(A) - N(A \cap B)$ e em particular para $B \subset A$, temos que $N(A - B) = N(A) - N(B)$.

Proposição 2.1.2 *Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são conjuntos finitos e disjuntos, então $N(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \cdots + N(A_n)$.*

Demonstração: Faremos esta demonstração usando indução sobre o número de conjuntos. Usando a propriedade (a) acima temos que, a relação $N(A_1+A_2) = N(A_1)+N(A_2)$, ou seja, o resultado vale para $n = 2$.

Suponha que o resultado vale para $n-1$, ou seja, $N(A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}) = N(A_1)+N(A_2)+\cdots+N(A_{n-1})$, e fazendo $A = A_1+\cdots A_{n-1}$ e $B = A_n$, temos $A\cap B = (A_1+A_2+\cdots+A_{n-1})\cap A_n = (A_1\cap A_n)+(A_2\cap A_n)+\cdots+(A_{n-1}\cap A_n) = \emptyset$. Logo, $A+B = (A_1+A_2+\cdots+A_{n-1})+A_n = A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}+A_n$.

Como os conjuntos A e B são finitos e disjuntos, e pela hipótese de indução, temos

$$N(A_1+A_2+\cdots+A_n) = N(A_1+A_2+\cdots+A_{n-1})+N(A_n) = N(A_1)+N(A_2)+\cdots+N(A_n).$$

Portanto, pelo princípio e indução finita, resulta que a sentença acima vale para todo $n \geq 2$.
■

Exemplo 2.1.3 *Se no exemplo* 2.1.1 *Júlia tiver dinheiro para assistir a um filme e uma peça de teatro, quantos são os programas que ela poderá fazer no sábado?*

Vejamos quais são os casos possíveis:

Filme 1 e Peça 1;

Filme 1 e Peça 2;

Filme 2 e Peça 1;

Filme 2 e Peça 2;

Filme 3 e Peça 1;

Filme 3 e Peça 2.

Portanto, Júlia poderá escolher 1 dentre 6 programas diferentes, se optar por assistir a um filme e a uma peça de teatro. ■

O exemplo 2.1.3 obedece a um outro princípio básico de contagem que chamamos de princípio multiplicativo.

Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se, para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é mn.

Assim, como o princípio aditivo, o princípio multiplicativo pode ser estendido para um número finito qualquer de conjuntos.

Extensão do princípio multiplicativo: Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2 \cdots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 m_2 \cdots m_n$ maneiras diferentes.

Em linguagem de conjuntos, se o conjunto A_i tem cardinalidade m_i, para $i = 1, 2, \cdots, n$, então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n\}$ tem cardinalidade $m_1 m_2 \cdots m_n$.

Teorema 2.1.1 *Se A e B são conjuntos finitos, então $N(A \times B) = N(A).N(B)$.*

Demonstração: Sejam $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ e $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_r\}$. Então o conjunto A pode ser escrito na forma $A = A_1 + A_2, \cdots + A_k$, $A_i = \{a_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, k$ e o produto cartesiano $A \times B$, pode ser da forma: $A \times B = (A_1 + A_2 + \cdots + A_k) \times B = (A_1 \times B) + (A_2 \times B) + \cdots + (A_k \times B)$, onde os conjuntos (produtos cartesianos) $A_1 \times B, A_2 \times B, \cdots, A_k \times B$ são dois a dois disjuntos. Assim, $N(A \times B) = N(A_1 \times B) + N(A_2 \times B) + \cdots + N(A_k \times B)$.

Observe que, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ o produto cartesiano $A_i \times B$ é o conjunto dos pares ordenados (a_i, b_j) com primeiro elemento somente o elemento a_i do conjunto $A_i = \{a_i\}$ e segundo elemento algum dos elementos b_j, $j = 1, 2, \cdots, r$ do cojunto B, isto é, $N(A_i \times B) = N(B)$, $i = 1, 2, \cdots, k$. Dessa forma, $N(A \times B) = kN(B) = N(A).N(B)$ o que completa a demonstração. ■

Exemplo 2.1.4 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$ conjuntos finitos.*

Escrevendo o conjunto A na forma $A = A_1 + A_2 + A_3 = \{1\} + \{2\} + \{3\}$, obtemos:

$A \times B = (\{1\} + \{2\} + \{3\}) \times (\{a, b\})$

$A \times B = (\{1\} \times \{a, b\}) + (\{2\} \times \{a, b\}) + (\{3\} \times \{a, b\})$

$A \times B = \{(1, a), (1, b)\} + \{(2, a), (2, b)\} + \{(3, a), (3, b)\}$

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

logo, $N(A \times B) = 6$. E ainda, como A_1, A_2 e A_3 são conjuntos unitários, segue que $N(A_i \times B) = N(B) = 2$, $i = 1, 2, 3$. Dessa forma, $N(A \times B) = k.N(B) = 3.2 = N(A).N(B)$ ■

Proposição 2.1.3 *Se $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são conjuntos finitos, então $N(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = N(A_1).N(A_2) \cdots N(A_n)$.*

Demonstração: Faremos a prova usando o primeiro princípio de indução finita.

Seja $B = \{n \in \mathbb{N} \mid N(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = N(A_1).N(A_2) \cdots N(A_n)$; com $A_1, A_2, \cdots, A_n$ conjuntos finitos $\}$:

Pelo Teorema (2.1.1) temos que vale:

$i)$ $n = 2 \in B$, pois $N(A_1 \times A_2) = N(A_1).N(A_2)$;

Temos que mostrar:

$ii)$ $n \in B$ sempre que $n - 1 \in B$:

Tomando $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}$ e $C = A_n$, então $A \times C = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n)$. E como, $N(A \times C) = N(A).N(C)$ e pela hipótese de indução $N(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) = N(A_1).N(A_2) \cdots N(A_{n-1})$.

Segue que $N(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = N(A_1).N(A_2) \cdots N(A_{n-1}).N(A_n)$.

Portanto, de (i) e (ii), resulta que B contém os inteiros positivos n tal que $n \geq 2$. ■

Exemplo 2.1.5 *Um amigo mostrou-me* 5 *livros diferentes de literatura,* 7 *livros diferentes de gramática e* 10 *livros diferentes de latim e pediu-me para escolher* 2 *livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?*

Para a resolução deste problema, utilizaremos os princípios multiplicativo e aditivo respectivamente. Assim, posso fazer as seguintes escolhas:

$a)$ literatura e gramática: $5.7 = 35$ maneiras;

$b)$ literatura e latim: $5.10 = 50$ maneiras;

$c)$ gramática e latim: $7.10 = 70$ maneiras.

Como as minhas escolhas só podem ocorrer dentre uma das possibilidades $(a), (b)$ e (c), então $35 + 50 + 70 = 155$ é o número de maneiras de se fazer estas escolhas. ■

Exemplo 2.1.6 *Quantos números de* 3 *algarismos distintos podemos formar como os números* $3, 4$ *e* 5*?*

Representaremos por P_1 a posição das unidades, por P_2 a posição das dezenas e por P_3 a posição das centenas.

Obteremos tantos números de 3 algarismos quantas forem as maneiras de preenchermos as 3 posições.

Dessa forma, poderemos fazer 3 escolhas diferentes para P_1 (com 3 ou com 4 ou com o 5). Em seguida, para a posição P_2, teremos 2 escolhas diferentes que são com os dois algarismos

que sobraram e, finalmente para P_3, teremos apenas 1 escolha. Portanto, pelo princípio multiplicativo, teremos $3.2.1 = 6$ números de 3 algarismos formados com os dígitos $3, 4$ e 5.

■

Exemplo 2.1.7 *De quantas maneiras podemos dar* 3 *prêmios para um grupo formado por* 20 *pessoas, de modo que os três prêmios sejam dados a três pessoas distintas?*

O primeiro prêmio poderá ser dado a qualquer uma das 20 pessoas. Como os prêmios não podem ser dados a uma mesma pessoa, então o segundo prêmio poderá ser dado a qualquer uma das 19 pessoas restantes e, finalmente, pelo mesmo argumento, o terceiro prêmio poderá ser dado a qualquer uma das 18 pessoas que restaram.

Portanto, há $20.19.18 = 6840$ maneiras de, num grupo de 20 pessoas, distribuir três prêmios para três pessoas distintas. ■

2.2 Permutações

Para definirmos o conceito de permutação, utilizaremos o conceito de produto cartesiano.

Definição 2.2.1 *Seja $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ um conjunto finito com n elementos. Uma k-upla ordenada $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, com $a_i \in W_n$, $i = 1, 2, \cdots, k$ é chamada uma k-permutação do conjunto W_n, ou simplesmente, uma k-permutação de n.*

Observamos que na k-permutação, podemos ter $a_i = a_j$ para $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Intuitivamente, isso corresponde a permissão de repetições na n-upla.

Para diferenciar o caso em que há repetições e o caso em que não há,escreve-se *k-permutação de n* para casos sem repetição e *k-permutação de n com repetição* para os outros casos.

Exemplo 2.2.1 *Seja $W_2 = \{0, 1\}$, então o conjunto de todas as 2-permutações de W_2 é: $\{(0, 1), (1, 0)\}$, enquanto que o conjunto de todas as 2-permutações com repetição é: $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.* ■

Exemplo 2.2.2 *Seja $W_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, então vamos calcular o número de elementos no conjunto β das 2-permutações de W_n com repetição.*

Para tanto, utilizaremos o princípio multiplicativo. Um elemento de β é um par ordenado na forma: $(a, b); a, b \in W_n$, ou seja, $\beta = W_n \times W_n$. Pelo princípio multiplicativo, $N(\beta) = N(W_n \times W_n) = N(W_n).N(W_n) = n^2$.

Analogamente, mostra-se que o número de k-permutações de W_n com repetição é n^k. ■

Teorema 2.2.1 *O número de k-permutações de n, denotado por $P(n, k)$ ou (n_k) é dado por:*

$$P(n, k) := (n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Demonstração: Seja $\mathcal{P}_k(W_n)$ o conjunto das k-permutações do conjunto $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$. Em qualquer k-permutação $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ do conjunto W_n, o primeiro elemento a_1 pode ser selecionado do conjunto $A_1 = W_n$ de n maneiras (ou seja, a escolha do primeiro elemento corresponde à escolha de um número de 1 a n). O segundo elemento a_2 deve ser diferente de a_1, ou seja, $a_2 \in A_2 = A_1 - \{a_1\}$, onde A_2 possui $(n-1)$ elementos.

Assim, podemos pensar que a escolha de $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ corresponde escolher elementos em conjuntos que tem, respectivamente, $n, n-1, n-2, \cdots, n-k+1$ elementos. Pelo princípio multiplicativo, teremos:

$$P(n, k) = N(\mathcal{P}_k(W_n)) = N(A_1).N(A_2)\cdots N(A_k) = n.(n-1).(n-2)\cdots(n-k+1).$$

∎

Exemplo 2.2.3 *Uma família se reune para o Natal e possui* 7 *carros. Sabendo que a garagem tem vagas numeradas de* 1 *a* 4*, de quantas maneiras diferentes* 4 *carros podem ser guardados?*

Seja $W_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ o conjunto que representa os 7 carros distintos. Uma disposição de carros nas vagas, pode ser representada por uma 4-upla (a_1, a_2, a_3, a_4), com $a_i \in W_7, i = 1, 2, 3, 4$ e $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Pelo Teorema (2.2.1)

$$P(n, k) = P(7, 4) = 7.6.5.4 = 840.$$

Portanto, existem 840 possibilidades diferentes dos carros serem guardados. ∎

Exemplo 2.2.4 *Uma prova possui* 5 *questões e um professor tem* 10 *monitores. Sabendo que o professor alocará* 1 *monitor para a correção de cada questão, de quantas formas diferentes o professor pode selecionar os monitores para a correção de cada questão?*

Seja $M_{10} = \{1, 2, \cdots, 10\}$ o conjunto que representa os 10 monitores distintos. Uma escolha de monitores para a correção de cada questão pode ser representada por uma 5-upla

$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$, com $q_i \in M_{10}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ e $q_i \neq q_j$ para $i \neq j$. Assim, pelo Teorema (2.2.1) $P(10, 5) = 10.9.8.7.6 = 30240$. ■

Teorema 2.2.2 *O número $P(n, k)$ das k-permutações de n, satisfaz as seguintes relações de recorrência:*

$$P(n,k) = P(n-1,k) + k.P(n-1,k-1), k = 1, 2, \cdots, n \text{ e } n = 1, 2, \cdots$$

e

$$P(n,k) = n.P(n-1,k-1) = (n-k+1).P(n,k-1), k = 1, 2, \cdots, n \text{ e } n = 1, 2, \cdots$$

com condições iniciais: $P(n, 0) = 1, n = 0, 1, 2, \cdots$ e $P(n, k) = 0, k > n$.

Demonstração: Seja $\mathcal{P}_k(W_n)$ o conjunto das k-permutações do conjunto $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$. Se $\mathcal{Q}$ é o conjunto das k-permutações de W_n que não incluem o elemento w_n e $\mathcal{S}$ é o conjunto das k-permutações de W_n que incluem w_n, então $\mathcal{Q} \cap \mathcal{S} = \emptyset$ e $\mathcal{P}_k(W_n) = \mathcal{Q} + \mathcal{S}$. Logo, de acordo com o princípio aditivo $N(\mathcal{P}_k(W_n)) = N(\mathcal{Q}) + N(\mathcal{S})$. Mas, $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_k(W_{n-1})$ e $N(\mathcal{Q}) = N(\mathcal{P}_k(W_{n-1}))$, onde $W_{n-1} = \{w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}\}$, logo, $N(\mathcal{Q}) = P(n-1, k)$.

Para calcular $N(\mathcal{S})$, basta observar que w_n deve pertencer as k-permutações de $\mathcal{S}$. Assim, w_n tem que estar em uma das k posições de uma k-upla de $\mathcal{S}$, restando então, $(k-1)$ posições em aberto, a serem preenchidas por elementos de W_{n-1}.

Portanto, $N(\mathcal{S}) = k.N(\mathcal{P}_{k-1}(W_{n-1})) = k.P(n-1, k-1)$.

Finalmente, $P(n, k) = N(\mathcal{Q}) + N(\mathcal{S}) = P(n-1, k) + k.P(n-1, k-1)$.

Para mostrar a segunda relação, note que os primeiros r elementos $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$ de uma k-permutação $(a_1, a_2, \cdots, a_r, a_{r+1}, \cdots, a_k)$ de W_n podem ser escolhidos do conjunto $A_1 = W_n$ de $P(n, r)$ maneiras.

Depois de cada seleção, os últimos $(k-r)$ elementos $(a_{r+1}, \cdots, a_k)$ podem ser escolhidos no conjunto $A_2 = W_n - \{a_1, \cdots, a_r\}$ de $P(n-r, k-r)$ maneiras.

Pelo princípio multiplicativo, $P(n, k) = P(n, r).P(n-r, k-r), r = 1, 2, \cdots, k$ e $k = 1, 2, \cdots, n$. Tomando $r = 1$, obtemos:

$$P(n,k) = P(n,1).P(n-1,k-1) = n.P(n-1,k-1)$$

e tomando $r = (k-1)$, obtemos:

$$P(n,k) = P(n,k-1).P(n-k+1,1) = P(n,k-1).(n-k+1)$$

Portanto, $P(n,k) = n.P(n-1,k-1) = P(n,k-1).(n-k+1)$. ■

Exemplo 2.2.5 *Um time de futebol de salão possui 7 jogadores mais o Romário. De quantas formas diferentes podemos montar o time com o Romário, levando-se em conta que a ordem de escolha dos jogadores determina suas posições no campo?*

Para montarmos um time de futebol de salão são necessários 5 jogadores. Assim, seja $\mathcal{P}_5(W_8)$ o conjunto das 5-permutações do conjunto $W_8 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$.

Chamaremos de $\mathcal{Q}$ o conjunto das 5-permutações de W_8 que não incluem o Romário e $\mathcal{S}$ o conjunto das 5-permutações de W_8 que incluem o Romário. Pelo Teorema (2.2.2), $N(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}_5(W_{8-1}) = P(7,5) = 7.6.5.4.3 = 2520$.

Agora, para calcularmos $N(\mathcal{S})$ temos duas opções:

1^a) Calculando $N(\mathcal{P}_5(W_8)) = P(n,k) = P(8,5) = 8.7.6.5.4 = 6720$ e subtraindo $N(\mathcal{Q})$ obtemos $N(\mathcal{S})$:

$$N(\mathcal{P}_5(W_8)) - N(\mathcal{Q}) = N(\mathcal{S}) = 6720 - 2520 = 4200 = N(\mathcal{S}).$$

2^a) Pelo Teorema (2.2.2), $N(\mathcal{S}) = k.P(n-1,k-1)$. Então, $N(\mathcal{S}) = 5.P(7,4) = 5.(7.6.5.4) = 4200$. ■

Antes de demonstrarmos o próximo teorema vamos descrever, através de um exemplo, a idéia utilizada na demonstração.

Exemplo 2.2.6 *Seja $W_3 = \{1,2,3\}$, queremos determinar quantos números de 6 dígitos existem de tal maneira que o algarismo 1 apareça 3 vezes, o algarismo 2 apareça 2 vezes e o algarismo 3 apareça 1 vez.*

Tomando um número de 6 dígitos na forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, temos que 3 desses algarismos serão preenchidos com o número 1. Podemos então, criar o seguinte conjunto auxiliar: $\overline{W} = \{1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 3_1\}$.

O número de 6-permutações de $\overline{W}$ é obtido diretamente pela relação: $P(6,6) = 6!$. Os elementos $1_1, 1_2$ e 1_3, representam as diferentes escolhas de posição para o algarismo 1 do conjunto original dado. Assim, uma permutação do tipo $(1_1, 2_1, 2_2, 1_2, 3_1, 1_3)$ seria equivalente à permutação $(1_2, 2_1, 2_2, 1_3, 3_1, 1_1)$. Note que, existem 3! permutações equivalentes, mantendo-se os elementos $2_1, 2_2$ e 3_1 em suas posições já estabelecidas.

Dessa forma, para obter o número de permutações de $\overline{W}$ que leva em conta essas equivalências, fazemos: $M = \dfrac{6!}{3!.2!.1!}$. ■

Teorema 2.2.3 *Dado um conjunto* $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, *o número de permutações onde o elemento* w_i *aparece* k_i *vezes, com* $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$, *denotado por* $M(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, *é dado por:* $M(k_1, k_2, \cdots, k_n) = \dfrac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$.

Demonstração: Considere a permutação $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ dos n tipos de elementos de $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, onde k_i elementos são do tipo w_i, $i = 1, 2, \cdots, n$. Se os k_1 elementos do tipo w_1 são transformados em elementos distintos, denotando a cada um deles um 2^o índice de 1 até k_1, $w_{11}, w_{12}, w_{13}, \cdots, w_{1k_1}$ e permutados de todas as formas possíveis, preservando as posições que os elementos do tipo w_j, para $j \neq i$ ocupam nessa permutação, $k_1!$ permutações são construídas. Se procedermos analogamente para os outros tipos de elementos, poderemos construir $k_2!, k_3!, \cdots, k_n!$ variações do mesmo tipo.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos que a permutação $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ gera $k_1!k_2!, \cdots, k_n!$ permutações do conjunto

$$W(n, k) = \{w_{ij}, i = 1, 2, \cdots, n \text{ e } j = 1, 2, \cdots, k_i\},$$

$$W(n, k) = \{w_{11}, w_{12}, \cdots w_{1k_1}, w_{21}, w_{22}, \cdots, w_{2k_2}, \cdots, w_{n1}, w_{n2}, \cdots, w_{nk_n}\}.$$

Portanto, $k_1!k_2!\cdots k_n!M(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ é igual ao número total de k-permutações do conjunto $W(n, k)$. Como o número de permutações de $W(n, k)$ é $P(k, k) = k!$, temos

$$M(k_1, ..., k_n) = \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

■

Exemplo 2.2.7 *Quantos são os anagramas que podemos construir com a palavra MATEMÁTICA?*

Neste caso, dado o conjunto $W_6 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$, onde $w_1 = M$, $w_2 = A$, $w_3 = T$, $w_4 = E$, $w_5 = I$, $w_6 = C$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$, $k_5 = 1$ e $k_6 = 1$, resulta em $M(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = M(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \dfrac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200.$ ∎

2.2.1 Arranjos e Permutações Simples

Na seção anterior definimos o conceito de k-permutações de n. Esse conceito incorpora o conceito de permutação simples e é também conhecido como arranjo de n a k. As chamadas permutações simples, nada mais são que as n-permutações de n, ou seja,

$$P(n) = P(n, n) = n(n-1)\cdots(n-n+1) = n!$$

e

$$A_n^k = P(n, k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

sabemos que uma igualdade não se altera se a multiplicarmos e dividirmos por um mesmo fator, então:

$$A_n^k = P(n, k) = \frac{[n.(n-1)\cdots(n-(k-1))][(n-k).(n-(k+1))\cdots 2.1]}{(n-k).(n-(k+1))\cdots 2.1}$$

logo,

$$A_n^k = P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exemplo 2.2.8 *De quantos modos distintos* 5 *pessoas podem sentar-se em* 1 *banco de* 5 *lugares?*

Seja $W_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ uma representação no conjunto das 5 pessoas. Neste caso, teremos $k = 5$, ou seja, todas as pessoas deverão escolher 1 lugar, logo, $P(5, 5) = P(5) = 5! = 120$. ∎

Exemplo 2.2.9 *Quantos números distintos menores do que* 10000 *podemos formar com algarismos diferentes da coleção* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*?*

Neste caso, teremos números com 4 algarismos, 3 algarismos, 2 algarismos e 1 algarismo. Então, para os números com:

a) 4 algarismos: $P(n, k) = A_n^k = A_9^4 = 9.8.7.6 = 3024$;

b) 3 algarismos: $P(n,k) = A_n^k = A_9^3 = 9.8.7 = 504$;

c) 2 algarismos: $P(n,k) = A_n^n = A_9^2 = 9.8 = 72$;

d) 1 algarismo: $P(n,k) = A_n^k = A_9^1 = 9$.

Pelo princípio aditivo, podemos formar $A_9^4 + A_9^3 + A_9^2 + A_9^1 = 3024 + 504 + 72 + 9 = 3609$ números distintos. ■

2.3 Combinações

O conceito de combinação está relacionado com a escolha de k elementos entre n possíveis, tal que $k \leq n$, conforme definição a seguir.

Definição 2.3.1 *Seja $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ um conjunto finito. Uma coleção (não ordenada) de k elementos $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, com $a_i \in W_n$, $i = 1, 2, \cdots, k$ é chamada de k-combinação do conjunto W_n, ou simplesmente k-combinação de n.*

Assim como no caso das permutações, escrevemos *k-combinação de n* para os casos em que não há repetição de elementos e *k-combinação de n com repetição* no caso em que existem elementos repetidos.

Exemplo 2.3.1 *Os subconjuntos $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$ e $\{3,4\}$ são todas as 2-combinações do conjunto $W_4 = \{1,2,3,4\}$.* ■

Exemplo 2.3.2 *Os subconjuntos $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,3\}$, $\{3,4\}$ e $\{4,4\}$ são todas as 2-combinações com repetição do conjunto $W_4 = \{1,2,3,4\}$.* ■

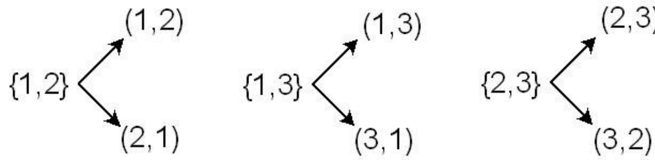
Antes do próximo teorema, descreveremos através de um exemplo, a idéia utilizada em sua demonstração para uma melhor compreensão.

Exemplo 2.3.3 *Seja $W_3 = \{1,2,3\}$. Mostre que $P(n,k) = k!C(n,k)$, com $k = 2$ e $n = 3$.*

Sejam $\mathcal{C}_2(W_3)$ o conjunto de todas as 2-combinações de W_3 e $\mathcal{P}_2(W_3)$ o conjunto de todas as 2-permutações de W_3. Observe que para cada 2-combinações $\{a_1, a_2\}$ de W_3, correspondem 2! 2-permutações (a_{i_1}, a_{i_2}) de W_3 que são formadas permutando $\{a_1, a_2\}$ de W_3.

Assim, temos que todas as 2-combinações de 3 são dadas por $\{1,2\}$, $\{1,3\}$,$\{2,3\}$.

Para cada um desses conjuntos fizemos corresponder 2-permutações dada por 2!, conforme a figura a seguir, de maneira que podemos observar que o número total de 2-permutações de 3 é dado por: $P(3,2) = 6 = 2!C(3,2)$. ■



Teorema 2.3.1 *O número de k-combinações de n denotado por $C(n,k)$ ou $\binom{n}{k}$ é dada por:*

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.1}$$

Demonstração: Sejam $\mathcal{C}_k(W_n)$ o conjunto de todas k-combinações de $W_n = \{w_1, \cdots, w_n\}$ e $\mathcal{P}_k(W_n)$ o conjunto de todas k-permutações de W_n. Observe que para cada k-combinação $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ de W_n, correspondem a $k!$ k-permutações $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k})$ de W_n que são formadas permutando os elementos $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ de W_n.

Além disso, para cada k-permutação $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ de W_n corresponde somente uma k-combinação $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ de W_n.

Portanto, $P(n,k) = N(\mathcal{P}_k(W_n)) = k!N(\mathcal{C}_k(W_n)) = k!C(n,k)$. ■

Observamos que fazer uma k-combinação de n equivale a escolher k-objetos do conjunto $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$, não importando a ordem de escolha.

Dessa forma, para cada k-combinação $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ de W_n, existe um único conjunto "complementar" $B_{n-k} = W_n - \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, ou seja, escolher k-objetos equivale a escolher os $(n-k)$-objetos deixados de fora. Esse raciocínio nos leva à igualdade $C(n,k) = C(n, n-k)$.

Essa relação é facilmente obtida através da relação 2.1 para $C(n,k)$. Assim, tomando

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

resulta que

$$C(n,n-k) = \binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(n-k)+1)}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemplo 2.3.4 *Para montar um time de basquete necessitamos de* 5 *pessoas, então de quantas formas diferentes podemos montar um time de basquete (não importando a posição em que jogam) em um grupo de* 10 *pessoas?*

Seja $W_{10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, onde $k = 5$. Então, temos

$$C(10, 5) = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$$

maneiras de se montar um time de basquete. ■

Exemplo 2.3.5 *João vai participar de um curso de verão em Álgebra Linear e decidiu que levará 3 livros para estudo consigo. Consultando seu acervo de livros, ele percebeu que poderá escolher os livros de 20 formas diferentes. Quantos livros de Álgebra Linear João tem em seu acervo?*

Sabemos que $C(n, 3) = 20 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$. Assim, $20.3! = \dfrac{n!}{(n-3)!} \Rightarrow 120 = n(n-1)(n-2)$. Daí, tomando $n = 6$, concluímos que João tem 6 livros de Álgebra Linear. ■

Exemplo 2.3.6 *Quantas retas podem ser traçadas num plano utilizando-se n pontos, onde três pontos quaisquer são não colineares?*

Como todos os pontos tomados 3 a 3 são não colineares, temos a garantia que cada par de pontos $\{p, q\}$ define uma única reta no plano. Dessa forma, o número total de retas será o número de pares distintos de pontos que pudermos criar, *independentemente da ordem*.

Logo, para determinar o número de retas possíveis, calculamos o número de 2-combinações de n, ou seja:

$$C(n, k) = C(n, 2) = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

■

Exemplo 2.3.7 *Em uma escola, deseja-se constituir comissões de* 6 *pessoas tendo como candidatos* 5 *pais de alunos e* 7 *professores. Quantas comissões diferentes pode-se constituir contendo apenas* 2 *pais de alunos?*

Escolher uma comissão formada por 2 pais de alunos e 4 professores equivale a escolher um par $A = \{p_1, p_2\}$ representando o conjunto de pais e um conjunto com 4 professores $B = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$.

Pelo Teorema (2.3.1), o conjunto A pode ser selecionado de $C(5,2)$ maneiras distintas e o conjunto B de $C(7,4)$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, temos que o número total de comissões contendo somente 2 pais de alunos é dado por:

$$N = C(5,2).C(7,4) = \frac{5!}{2!3!}.\frac{7!}{4!3!} = 350.$$

$\blacksquare$

Uma forma simples de introduzirmos algumas relações de recorrência relativas às combinações é utilizando o *Triângulo de Pascal* apresentado na figura 2.1.

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n														
0		1												
1		1	1											
2		1	2	1										
3		1	3	3	1									
4		1	4	6	4	1								
5		1	5	10	10	5	1							
6		1	6	15	20	15	6	1						
7		1	7	21	35	35	21	7	1					
8		1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10		1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11		1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12		1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Figura 2.1: Triângulo de Pascal.

Primeiramente, observamos que o elemento T_{nk} (n representando o índice da linha e k o índice da coluna, tal que $k \leq n$) é exatamente $C(n,k)$. Através da inspeção da figura 2.1 podemos extrair a seguinte relação de recorrência:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k); k = 1,2,\cdots,n \text{ e } n = 1,2,3,\cdots$$

Teorema 2.3.2 *O número $C(n,k)$ de k-combinações de n satisfaz a seguinte relação de recorrência,*

$$C(n,k) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1); k = 1,2,\cdots,n \; e \; n = 1,2,\cdots$$

com condições iniciais

$$C(n,0) = 1,\ \forall\ n \text{ e } \binom{n}{k} = 0, k > n.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{C}_k(W_n)$ o conjunto de todas k-combinações de $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$. Se $\mathcal{A}$ é o conjunto das k-combinações de W_n que não incluem o elemento w_n e $\mathcal{B}$ o conjunto das k-combinações que incluem o elemento w_n, então $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ e $\mathcal{C}_k(W_n) = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Portanto, de acordo com o princípio aditivo, $N(\mathcal{C}_k(W_n)) = N(\mathcal{A}) + N(\mathcal{B})$.

Mas, $N(\mathcal{A}) = C(n-1,k)$, pois devemos escolher k-elementos dentre $(n-1)$ opções possíveis (w_n não pode ser escolhido) e $N(\mathcal{B}) = C(n-1,k-1)$, pois devemos escolher $(k-1)$-elementos dentre $(n-1)$ opções possíveis (w_n deve ser escolhido). Logo,

$$C(n,k) = N(\mathcal{C}_k(W_n)) = C(n-1,k) + C(n-1,k-1).$$

■

Esse resultado também pode ser obtido como segue:

$$\begin{aligned}
C(n-1,k) + C(n-1,k-1) &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k(n-k)(k-1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k(n-k)(k-1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= C(n,k)
\end{aligned}$$

Também através de inspeção no Triângulo de Pascal, podemos observar que se somarmos os elementos de uma coluna k até a linha n, obtemos o elemento da linha $(n+1)$ na coluna $(k+1)$. Assim, valem os seguintes corolários:

Corolário 2.3.1 *O número $C(n,k) = \binom{n}{k}$ das k-combinações de n, satisfaz a seguinte relação de recorrência:*

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1}; k = 1, 2, \cdots, n \text{ e } n = 1, 2, \cdots$$

Demonstração: Pelo Teorema (2.3.2),

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}$$

de onde,

$$\binom{r-1}{k-1} = \binom{r}{k} - \binom{r-1}{k}$$

calculando o somatório para $r = k, k+1, \cdots, n$, temos:

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1} = \sum_{r=k}^{n} \left\{ \binom{r}{k} - \binom{r-1}{k} \right\}$$

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1} = \sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} - \sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k}.$$

Como $k-1 < k$, $\binom{k-1}{k} = 0$, logo efetuando a mudança de variável $s = r-1$ no segundo somatório temos:

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r-1}{k-1} = \sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} - \sum_{s=k}^{n-1} \binom{s}{k} = \binom{n}{k}.$$

■

Corolário 2.3.2 *O número* $C(n,k) = \binom{n}{k}$ *das* k*-combinações de* n*, satisfaz a relação de recorrência:*

$$\binom{n}{k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{n+1}{r}; k = 1, 2, \cdots, n \text{ e } n = 1, 2, \cdots.$$

Demonstração: Multiplicando a relação de recorrência

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

por $(-1)^{k-r}$ e somando ambos os termos para $r = 1, 2, \cdots, k$ obtemos:

$$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \binom{n+1}{r} = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \binom{n}{r} + \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \binom{n}{r-1}$$

e como
$$\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0} = 1$$
segue que, fazendo a mudança de variável $s = r - 1$, ficamos com,

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{n+1}{r} = \sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{n}{r} + (-1)\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^{k-s}\binom{n}{s} = \binom{n}{k}$$

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{n+1}{r} = \sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{n}{r} - \sum_{s=0}^{k-1}(-1)^{k-s}\binom{n}{s} = \binom{n}{k}.$$

■

Uma outra forma de deduzirmos a relação de recorrência vertical no corolário (2.3.1) é através da seguinte argumentação combinatória:

Sejam $\mathcal{C}_k(W_n)$ o conjunto das k-combinações de $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ e $\mathcal{A}_r$ o subconjunto de $\mathcal{C}_k(W_n)$ que contém as combinações que incluem w_r como elemento de maior subíndice, $r = k, k+1, \cdots, n$. Definindo $\mathcal{A}_r$ dessa forma, temos que $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$, $i, j = k, k+1, \cdots, n$, com $i \neq j$, pois supondo que $c = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$, $j > i$, como $c \in \mathcal{A}_j$, $w_j = a_t$ para algum $t \in \{1, 2, \cdots, k\}$, mas $c \in \mathcal{A}_i$ o que implicaria que c contém um elemento w_j com índice maior que w_i, o que é uma contradição pela própria definição de $\mathcal{A}_i$.

Temos também que $\mathcal{C}_k(W_n) = \mathcal{A}_k + \mathcal{A}_{k+1} + \cdots + \mathcal{A}_n$ e, pelo princípio aditivo, $N(\mathcal{C}_k(W_n)) = N(\mathcal{A}_k) + N(\mathcal{A}_{k+1}) + \cdots + N(\mathcal{A}_n)$.

Analisemos agora o número de elementos de $\mathcal{A}_r$.

Cada k-combinação $\{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, w_r\}$ corresponde a uma única $(k-1)$-combinação $\{a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}\}$ que pertence a $\mathcal{C}_{k-1}(W_{r-1})$ para $r = k, k+1, \cdots, n$.

Assim, $N(\mathcal{A}_r) = N(\mathcal{C}_{k-1}(W_{r-1}))$, $r = k, k+1, \cdots, n$. Logo,

$$N(\mathcal{C}_k(W_n)) = N(\mathcal{C}_{k-1}(W_{k-1})) + N(\mathcal{C}_{k-1}(W_k)) + \cdots + N(\mathcal{C}_{k-1}(W_{n-1}))$$

então,
$$\binom{n}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n}{k} = \sum_{r=k}^{n}\binom{r-1}{k-1};\ k = 1, 2, \cdots, n \text{ e } n = 1, 2, \cdots .$$

■

Teorema 2.3.3 *(Teorema Binomial) Sejam a e b números reais e n um inteiro positivo. Então* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Demonstração: A demonstração será feita pelo 1^o princípio de indução sobre n. Como hipótese de indução temos que: $(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k}$. É imediato que vale para $n = 1$, restando mostrar que $(a+b)^{n-1}.(a+b) = (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Da hipótese de indução temos que:

$$(a+b)^{n-1}.(a+b) = a.\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} + b.\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k}$$

$$(a+b)^{n-1}.(a+b) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k}$$

separando o último termo do primeiro somatório e o primeiro termo do segundo somatório, ficamos com:

$$(a+b)^n = \binom{n-1}{n-1} a^n b^0 + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-(k+1)} + \binom{n-1}{0} a^0 b^{n-0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-(k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} + b^n$$

fazendo a mudança de variável $k \to k+1$ no segundo somatório, temos

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k+1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} + b^n$$

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=0}^{n-2} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} \right] a^{k+1} b^{n-(k+1)} + b^n.$$

Utilizando o Teorema (2.3.2), ficamos com:

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} + b^n$$

finalmente, fazendo a mudança de variável $k+1 \to k$ obtemos:

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

■

Agora, através de um exemplo, introduziremos as combinações com repetição.

Exemplo 2.3.8 *Joana deve escolher a cor de uma blusa, uma calça e um sapato que irá comprar. Sabendo que as cores disponíveis são branco, preto e azul, de quantas maneiras Joana poderá escolher as cores das três peças de modo que pelo menos duas peças sejam brancas?*

Seja $W_3 = \{p, b, a\}$, onde $p =$preto, $b =$branco e $a =$azul. Uma escolha de cores para blusa, calça e sapato corresponde à um terna ordenada (a_1, a_2, a_3).

Dessa forma, as seguintes escolhas, possuem pelo menos duas peças brancas: (b, b, p), (b, b, a), (b, b, b), (b, p, b), (b, a, b),(p, b, b), (a, b, b), ou seja, existem 7 maneiras para se escolher uma calça, uma blusa e um sapato de modo que pelo menos duas dessas peças sejam brancas. ■

Teorema 2.3.4 *O número de k-combinações de n com repetição, denotado por $E(n,k)$ é dado por: $E(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{E}_k(W_n)$ o conjunto das k-combinações de n elementos com repetição de $W_n = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ e $\mathcal{C}_k(W_{n+k-1})$ o conjunto das k-combinações de $(n+k-n)$ elementos sem repetição do conjunto

$$W_{n+k-1} = \{w_1, w_2, \cdots, w_{n+k-1}\}$$

Considere uma k-combinação $\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_k}\}$ que pertença a $\mathcal{E}_k(W_n)$ e suponha que os k-subíndices, $i_1, i_2, \cdots, i_k$ são numerados em ordem crescente.

Denotando $j_r = i_r + (r-1)$, para $r = 1, 2, \cdots, k$, temos que $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n+k-1$ e a correspondente k-combinação $\{w_{j_1}, w_{j_2}, \cdots, w_{j_k}\} \in \mathcal{C}_k(W_{n+k-1})$.

Além disso, a relação $j_r = i_r + (r-1)$, $r = 1, 2, \cdots, k$ relaciona a cada k-combinação de $\mathcal{E}_k(W_n)$ uma, e somente uma, k-combinação de $\mathcal{C}_k(W_{n+k-1})$ e vice-versa. Assim, $N(\mathcal{E}_k(W_n)) = N(\mathcal{C}_k(W_{n+k-1}))$, de onde $E(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Para observar que a função $F : \mathcal{E}_k(W_n) \to \mathcal{C}_k(W_{n+k-1})$ dada por $\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_k}\} \longmapsto F(\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_k}\}) = \{w_{i_1}, w_{i_2+1}, \cdots, w_{i_k+(k-1)}\}$ é uma bijeção, basta observar que dado $\{w_{j_1}, w_{j_2}, \cdots, w_{j_k}\} \in \mathcal{C}_k(W_{n+k-1})$, definimos $i_r = j_r + (1-r)$, onde $r = 1, 2, \cdots, k$ e teremos $\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_k}\} \in \mathcal{E}_k(W_n)$ e $F(\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_k}\}) = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \cdots, w_{j_k}\}$.

Analogamente, verifica-se que se $\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_k}\} \neq \{w_{m_1}, w_{m_2}, \cdots, w_{m_k}\}$, ambos em $\mathcal{E}_k(W_n)$, então $F(\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_k}\}) \neq F(\{w_{m_1}, w_{m_2}, \cdots, w_{m_k}\})$. ■

Exemplo 2.3.9 *Uma sorveteria oferece* 7 *sabores diferentes de sorvetes. Lucas deve pedir um banana split que possui* 5 *sabores à sua escolha. Sabendo-se que Lucas pode repetir os sabores nestas* 5 *escolhas, qual é o número de maneiras distintas que Lucas pode fazer seu pedido?*

Seja $W_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ o conjunto que representa as diferentes escolhas de sabores.

Pelo Teorema (2.3.4) uma escolha com repetição nesse conjunto equivale a uma escolha sem repetição no cojunto $W_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ pela bijeção estabelecida no teorema.

A seguir apresentamos algumas associações relacionadas a essa bijeção.

$$\{1, 1, 2, 2, 5\} \longmapsto \{1, 2, 4, 5, 9\}$$

$$\{1, 2, 2, 3, 7\} \longmapsto \{1, 3, 4, 6, 11\}.$$

Dessa forma, o número total de combinações com repetição é dado por:

$$E(n,k) = C(n+k-1, k)$$

$$E(7,5) = C(7+5-1, 5) = C(11, 5) = \frac{11!}{5!(11-5)!} = 462.$$

■

Capítulo 3

O Princípio da Inclusão e Exclusão

Os princípios básicos de contagem dos elementos da união de n conjuntos finitos e disjuntos dois a dois (princípio aditivo) e de um subconjunto do produto cartesiano de n conjuntos finitos (princípio multiplicativo) foram apresentados no capítulo 2.

O princípio da Inclusão e Exclusão, é também uma poderosa ferramenta de contagem e fornece uma fórmula exata para a obtenção do número de elementos da união de n conjuntos finitos.

3.1 Número de elementos na união de conjuntos

O teorema a seguir fornece o número de elementos na união de dois conjuntos.

Teorema 3.1.1 *Sejam A e B conjuntos finitos, então $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.*

Demonstração: Para calcularmos o número de elementos do conjunto $A \cup B$, devemos contar todos os elementos que pertencem a A ou que pertencem a B, porém, os elementos que pertencem a $A \cap B$, devem ser contados apenas uma vez.

Assim, quando calculamos $N(A) + N(B)$, os elementos que estão em A e em B são contados duas vezes. Dessa forma, para obter $N(A \cup B)$ devemos subtrair $N(A \cap B)$. ■

Note que, no caso em que A e B são disjuntos temos:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(\emptyset) = N(A) + N(B)$$

que é exatamente o princípio aditivo.

Corolário 3.1.1 *Dados $A, B \subset U$, com $N(U) = n$ então, $N(A' \cap B') = n - N(A) - N(B) + N(A \cap B)$.*

Demonstração: Lembrando que, $(A \cup B)' = B' \cap A'$, e que $(A \cup B) + (A' \cap B') = U$, temos que $N(A' \cap B') = n - N(A \cup B)$.

Pelo Teorema (3.1.1) $N(A' \cap B') = n - (N(A) + N(B) - N(A \cap B)) = n - N(A) - N(B) + N(A \cap B)$. ■

Exemplo 3.1.1 *Sabe-se que dentre 50 alunos, 23 faziam Cálculo I e 42 Física I. Sabendo que cada aluno estava matriculado em pelo menos um curso, quantos alunos estavam matriculados nos dois cursos?*

Sejam A o conjunto dos alunos matriculados em Cáculo I e B o conjunto dos alunos matriculados em Física I. Assim, $N(A) = 23$ e $N(B) = 42$. Sabemos também, que o total de alunos é 50, ou seja, $N(A \cup B) = 50$.

Como queremos obter o número de alunos matriculados em Cálculo I e Física I simultâneamente, faremos o uso do Teorema (3.1.1), ou seja,

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

$$50 = 23 + 42 - N(A \cap B)$$

$$N(A \cap B) = 15$$

que é o número procurado. ■

Exemplo 3.1.2 *Em um zoológico moram 23 animais. Sabendo que 13 animais comem frutas e 8 animais comem frutas e legumes, quantos animais comem somente legumes?*

Neste caso, sejam

$A =$ conjunto dos animais que comem somente frutas;

$B =$ conjunto dos animais que comem somente legumes;

$A \cap B =$ conjunto dos animais que comem frutas e legumes;

$A \cup B =$ conjunto de todos os animais que moram no zoológico.

Assim, pelo Teorema (3.1.1) resulta

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

$$23 = 13 + N(B) - 8$$

$$N(B) = 23 + 8 - 13 = 18.$$

Portanto, 18 animais comem somente legumes. ■

Demonstraremos a seguir o caso geral do Princípio da Inclusão e Exclusão.

Teorema 3.1.2 *(Princípio da Inclusão e Exlcusão) Dados n conjuntos finitos $A_1, A_2, \cdots$ $\cdots, A_n \subset U$, o número de elementos na união deles, denotado por $N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ é dado por:*

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{1 \leq i<j} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i<j<k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\ \sum_{1 \leq i<j<k<p} N(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p) + \cdots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Demonstração: Seja $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Devemos mostrar que um elemento x que pertença a S é contado apenas uma vez na equação (3.1).

Se x pertence a p dos conjuntos $A_i's$, x será contado p vezes no termo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} N(A_i)$.

No termo $\displaystyle\sum_{1 \leq i<j} N(A_i \cap A_j)$ ele será contado $C(p, 2)$ vezes, pois existem $\displaystyle\binom{p}{2}$ formas de escolher dois conjuntos distintos entre $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_p}$, tal que, $x \in (A_{i_k} \cap A_{i_j})$.

Analogamente, no termo $\displaystyle\sum_{1 \leq i<j<k} N(A_i \cap A_j \cap A_k)$, x será contado $C(p, 3)$ vezes.

Aplicamos o mesmo raciocínio até o termo $N(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p)$, no qual teremos apenas uma contribuição. Para intersecções com mais do que p conjuntos, não haverá nenhuma contribuição, pois x pertence a exatamente p dos conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

Somando todas essas contribuições, teremos:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \binom{p}{i}$$

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i}(-1)^{-1}\binom{p}{i}$$

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} = -\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i}$$

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} + \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i} = 0$$

Mas, $0 = ((1) + (-1))^p$. Logo, pelo Teorema Binomial (2.3.3), $\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i} = 0$, pois

$$0 = ((1)+(-1))^p = \binom{p}{0}1^p(-1)^0 + \binom{p}{1}1^{p-1}(-1)^1 + \cdots + \binom{p}{p-1}1^1(-1)^{p-1} + \binom{p}{p}1^0(-1)^p$$

$$0 = \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i}.$$

Então,

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} + \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i} = 0$$

resulta em,

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} + \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i} = \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i}$$

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} + \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i} = \binom{p}{0} + \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i}\binom{p}{i}$$

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \cdots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} = \binom{p}{0}$$

Como, $\binom{p}{0} = 1$, provamos que x será contado apenas uma vez na equação (3.1). ∎

A demonstração do Teorema (3.1.2) também pode ser feita por indução sobre n. Primeiramente, observamos que o teorema vale para $n = 2$ pois já foi demonstrado que $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

Supondo que o teorema vale para $(n-1)$, devemos mostrar que ele permanece válido para n.

Fazendo $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}$ e $B = A_n$, temos que:

$$\begin{gathered} N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) + N(A_n) - \\ N((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Mas, $N((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n) = N(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n-1})$, onde $B_1 = (A_1 \cap A_n)$, $B_2 = (A_2 \cap A_n)$, ..., $B_{n-1} = (A_{n-1} \cap A_n)$ (para deduzir esta relação, basta aplicar a propriedade: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$).

Por hipótese de indução, temos que:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} S_{n-1,r}$$

onde $S_{n-1,r} = \sum N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r})$ de forma que o índice do somatório percorre todas as r-combinações de $(n-1)$.

Vale também

$$N(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n-1}) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} Q_{n-1,r}$$

onde $Q_{n-1,r} = \sum N(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_r}) = \sum N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_n} \cap A_n)$ e o somatório ocorre sobre todas as r-combinações de $(n-1)$. Voltando à equação 3.2 temos:

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} S_{n-1,r} + N(A_n) - \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} Q_{n-1,r}. \tag{3.3}$$

Observamos que, $S_{n-1,1} + N(A_n) = \sum_{i=1}^{n-1} N(A_i) + N(A_n) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) = S_{n,1}$.

Além disso, para $r = 2, 3, \cdots, n-1$,

$$S_{n-1,r} + Q_{n-1,r-1} = \sum N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}) + \sum N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{r-1}} \cap A_n)$$

é simplesmente a soma dos termos $N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r})$ com índices que contém r elementos mas que não contém n, com os termos $N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{r-1}} \cap A_n)$ que são as combinações de r elementos que contém n.

Dessa forma, $S_{n-1,r} + Q_{n-1,r-1} = \sum N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = S_{n,r}$, onde $r = 2, 3, \cdots, n-1$ e a soma é feita sobre todas as r-combinações de n elementos.

Finalmente,

$$Q_{n-1,r-1} = N(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1}) = N(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = S_{n,n}.$$

Voltando na equação (3.3)

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = S_{n-1,1} + N(A_n) + \sum_{r=2}^{n-1} (-1)^{r-1} [S_{n-1,r} + Q_{n-1,r-1}] + Q_{n-1,n-1}$$

e utilizando os resultados estabelecidos anteriormente,

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = S_{n,1} + \sum_{r=2}^{n-1} (-1)^{r-1} S_{n,r} + S_{n,n} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_{n,r}$$

que é exatamente o princípio da inclusão e exclusão.

3.2 Aplicações

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão em problemas clássicos.

Iniciaremos com a função ϕ de Euler, que encontra diversas aplicações na área de criptografia e teoria dos números.

3.2.1 A função ϕ de Euler

Definição 3.2.1 *Definimos como função ϕ de Euler a função $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa a cada natural n o número de naturais relativamente primos com n e menores do que ou iguais a n.*

Naturalmente, a função ϕ está bem definida e pode-se notar facilmente as seguintes propriedades:

1. $\phi(n) \geq 1$, pois $\text{mdc}(n, 1) = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
2. $\phi(n) \leq n - 1$, pois $\text{mdc}(n, n) = n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$;
3. $\phi(p) = p - 1$ se p é primo, pois $\text{mdc}(p, n) = 1$, $\forall\ n < p$.

Utilizaremos o Princípio da Inclusão e Exclusão para obter uma fórmula para o cálculo de $\phi(n)$.

A idéia é obter o número de elementos no conjunto $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ que são relativamente primos com n.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, temos que n pode ser decomposto de maneira única como produto de potências de primos: $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}\cdots p_r^{\alpha_r}$, onde p_i, $i = 1, 2, \cdots, r$ são os fatores primos de n.

Para que um número $k < n$ seja relativamente primo com n, k não pode ser múltiplo de nenhum dos fatores primos de n, pois caso contrário, se p_i é fator de k e n, então $\text{mdc}(k, n) \geq p_i$.

Dessa forma, definimos: $A_i = \{x \in A;\ x$ é múltiplo de $p_i,\ i = 1, 2, \cdots, r\}$.

Para obter o número de elementos de A que são relativamente primos com n, devemos calcular $N(A) - N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r)$, pois devemos excluir todos os elementos que são múltiplos dos fatores primos de n.

Utilizaremos o Princípio da Inclusão e Exclusão para calcular $N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r)$.

Para facilitar a notação, denotaremos por $\mathcal{I}_{k,r}$, o conjunto de todas as k-combinações dos índices $\{1, 2, \cdots, r\}$. Dessa forma, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão,

$\phi(n) = N(A) - N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r)$

$\phi(n) = N(A) - \sum_{i=1}^{r} N(A_i) + \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{2,r}} N(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^k \sum_{(i_1,i_2,,\cdots,i_k)\in\mathcal{I}_{k,r}} N(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^r N(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r)$.

Devemos portanto, determinar o número de elementos de conjuntos na forma A_i, $(A_i \cap A_j)$, $(A_i \cap A_j \cap A_k)$, $\cdots$, $(A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_r)$.

Temos que, $N(A_i) = \dfrac{n}{p_i}$, pois para contar o número de múltiplos de um primo no conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$ basta dividir o comprimento do intervalo $[0, n]$, (que é múltiplo de p_i) pelo número primo e teremos quantos números múltiplos de p_i cabem nesse intervalo.

Analogamente, para determinarmos $N(A_i \cap A_j)$, temos que contar os múltiplos de $p_i p_j$ contidos no intervalo $[0, n]$, ou seja, $N(A_i \cap A_j) = \dfrac{n}{p_i p_j}$. Estendendo esse resultado para os outros conjuntos temos:

$N(A) = n$;
$N(A_i) = \dfrac{n}{p_i}$;
$N(A_i \cap A_j) = \dfrac{n}{p_i p_j}$;
$N(A_i \cap A_j \cap A_k) = \dfrac{n}{p_i p_j p_k}$;
. . .
$N(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_r) = \dfrac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}$;
Voltando ao cálculo de $\phi(n)$, ficamos com:

$$\phi(n) = n - \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} + \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{2,r}} \frac{n}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^k \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in\mathcal{I}_{k,r}} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} + \cdots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}$$

$$\phi(n) = n(1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i} + \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{2,r}} \frac{1}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^k \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in\mathcal{I}_{k,r}} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}} + \cdots + (-1)^r \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_r})$$

e portanto,

$$\phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

Esta última igualdade pode ser compreendida melhor se analisando o produto

$$(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

Cada termo gerado por esse produto, corresponde a uma sequência de escolhas entre as parcelas 1 e $\dfrac{1}{p_i}$ de cada fator.

Por exemplo, o número 1 que é o primeiro termo do somatório é gerado quando escolhemos dentro de cada fator a parcela 1. Os termos do somatório $-\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i}$ são obtidos quando efetuamos uma escolha de termos $\dfrac{1}{p_i}$ dentre os fatores $(1 - \dfrac{1}{p_i})$.

Os termos do somatório $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{2,r}} \frac{1}{p_i p_j}$ são obtidos quando fazemos duas escolhas de parcelas $\frac{1}{p_i}, \frac{1}{p_j}$ e assim sucessivamente, obtendo todos os somatórios da equação:

$$\phi(n) = n(1-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}+\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_{2,r}}\frac{1}{p_i p_j}+\cdots+(-1)^k\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in\mathcal{I}_{k,r}}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}+\cdots+(-1)^r\frac{1}{p_1 p_2\cdots p_r}).$$

3.2.2 Contando o número de funções

Utilizaremos aqui o Princípio da Inclusão e Exclusão para obter o número de funções sobrejetoras entre dois conjuntos. Assim, consideremos os conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_k\}$.

Inicialmente, vamos identificar alguns teoremas relativos ao número total de funções injetoras e funções bijetoras.

Teorema 3.2.1 *O número total de funções $F : A \to B$ é dado por k^n.*

Demonstração: Esse fato decorre diretamente do princípio multiplicativo, pois devemos designar valores para $F(a_1), F(a_2), \cdots, F(a_n)$ todos contidos no conjunto B. Assim, temos k-opções para cada imagem $F(a_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

Aplicando o princípio multiplicativo ficamos com k^n diferentes funções. ■

Teorema 3.2.2 *Se $n = k$, então o número de funções bijetoras $F : A \to B$ é $n!$.*

Demonstração: Naturalmente $n = k$ é uma condição necessária para a existência de funções bijetoras entre A e B.

Novamente, aplicando o princípio multiplicativo teremos n-opções para $F(a_1)$. Entretanto, como F deve ser injetora, não podemos escolher para $F(a_2)$ o mesmo valor de $F(a_1)$ e assim, teremos $(n-1)$-opções para o valor de $F(a_2)$.

Aplicando sucessivamente esse raciocínio e utilizando o princípio multiplicativo, teremos que o número de funções diferentes que podemos criar é dado por: $n.(n-1).(n-2)\cdots 2.1 = n!$. ■

O seguinte teorema é relacionado ao caso das funções injetoras ($n \leq k$).

Teorema 3.2.3 *Se $n \leq k$, então o número de funções injetoras $F : A \to B$ é*

$$k.(k-1).(k-2)\cdots(k-n+1) = A_k^n = P(k,n).$$

Demonstração: Aplica-se a mesma idéia da demonstração anterior, observando-se que, desta vez $n \leq k$.

Dessa forma, para $F(a_1)$ temos k-opções, para $F(a_2)$ temos $(k-1)$-opções (a função é injetora) e assim sucessivamente , de maneira que teremos $(k-n+1)$-opções para $F(a_n)$.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos que o número total de funções injetoras é dado por:

$$k.(k-1).(k-2)\cdots(k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!} = A_k^n = P(k,n).$$

■

Finalmente, o teorema a seguir aborda o caso das funções sobrejetoras e utiliza o Princípio da Inclusão e Exclusão.

Teorema 3.2.4 *Para $n \geq k$ o número de funções sobrejetoras $F : A \to B$, $T(n,k)$ é dado por:*

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Demonstração: Para determinar o número total de funções sobrejetoras vamos subtrair do total de funções $F : A \to B$ aquelas que não são sobrejetoras.

Uma função $F : A \to B$ é não-sobrejetora se existir $b \in B$ tal que para todo $a \in A$, $F(a) \neq b$ ou, escrevendo de outra forma, a imagem inversa de b é $F^{-1}(\{b\}) = \emptyset$.

Seja agora, o conjunto C_i definido por:

$$C_i = \{F \subset A \times B;\ F \text{ é função de } A \text{ em } B \text{ e } F^{-1}(\{b_i\}) = \emptyset\}, i = 1, 2, \cdots, k$$

então, temos que o conjunto de todas as funções não-sobrejetoras é dado por:

$$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k.$$

Para contar o número de elementos em C utilizamos o Princípio da Inclusão e Exclusão.

Assim,

$$N(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k) = \sum_{i=1}^{k} N(C_i) - \sum_{1 \leq i < j} N(C_i \cap C_j) + \sum_{1 \leq i < j < k} N(C_i \cap C_j \cap C_k) - \cdots$$

Entretanto, $N(C_i) = (k-1)^n$, pois podemos escolher qualquer imagem para $F(a_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, com excessão de b_i. Assim, o primeiro somatório resulta em $k.(k-1)^n$, pois temos k conjuntos C_i e cada um possui $(k-1)^n$ funções.

Analogamente, temos que $N(C_i \cap C_j) = (k-2)^n$, pois podemos escolher qualquer imagem para $F(a_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, com excessão de b_i e b_j.

Portanto, o segundo somatório resulta em $\binom{k}{2}(k-2)^n$.

Aplicando o mesmo raciocínio para os outros somatórios, ficamos com:

$$N(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k) = \binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}(k-k)^n.$$

$$N(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n$$

Subtraindo este número do total k^n, obtemos:

$$\begin{aligned}
T(n,k) &= k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n \\
T(n,k) &= k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i}(-1)^{-1}\binom{k}{i}(k-i)^n \\
T(n,k) &= k^n + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i}\binom{k}{i}(k-i)^n
\end{aligned}$$

Observe que k^n pode ser escrito como $k^n = (-1)^0\binom{k}{0}(k-0)^n$. Portanto,

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

$\blacksquare$

Exemplo 3.2.1 *Em uma festa junina, existe um grupo de* 20 *pessoas que queremos distribuir em* 5 *barracas de modo que cada barraca tenha pelo menos* 1 *pessoa. De quantas maneiras diferentes podemos fazer essa distribuição?*

Neste caso, temos que calcular o número de funções sobrejetoras de um conjunto de 20 elementos num conjunto de 5 elementos. Pelo teorema 3.2.4 resulta:

$$T(20,5) = \sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^{20} = \binom{5}{0}(5-0)^{20} - \binom{5}{1}(5-1)^{20} + \cdots$$

$$+\binom{5}{4}(5-4)^{20} - \binom{5}{5}(5-5)^{20}$$

$$T(20,5) = \sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^{20} = 5^{20} - 5.4^{20} + 10.3^{20} - 10.2^{20} + 5$$

■

3.2.3 Contando o número de permutações caóticas

Como uma última aplicação do Princípio da Inclusão e Exclusão apresentamos o conceito de permutação caótica.

Definição 3.2.2 *Uma permutação de* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *é chamada de caótica quando nenhum dos* $a_i's$, $i = 1, 2, \cdots, n$ *se encontrar na posição original, isto é, na i-ésima posição.*

Por exemplo, $(a_2, a_1, a_4, a_5, a_3)$ e $(a_5, a_4, a_2, a_3, a_1)$ são permutações caóticas de $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

Para utilizar o Princípio da Inclusão e Exclusão, introduziremos as seguintes notações:

A_i =conjunto das permutações de $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ onde a_i está na i-ésima posição;

D_n=conjunto das permutações caóticas de $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Dessa forma, fica claro que:

$N(D_n)$=número total de permutações de $(a_1, a_2, \cdots, a_n) - N(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$.

O número total de permutações de $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é simplesmente $P(n,n) = n!$. Aplicando o Princípio da Inclusão e Exclusão, ficamos com:

$$\begin{aligned} N(D_n) = n! - \sum_{i=1}^{n} N(A_i) + \sum_{1\leq i<j} N(A_i \cap A_j) - \sum_{1\leq i<j<k} N(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\ \cdots + (-1)^n N(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entretanto, podemos calcular o número de elementos dos conjuntos A_i, $(A_i \cap A_j)$, $(A_i \cap A_j \cap A_k)$, $\cdots$

$N(A_i)$ é simplesmente $(n-1)!$, pois um elemento está fixo e os outros podem ser permutados livremente.

Analogamente, $N(A_i \cap A_j) = (n-2)!$ pois a_i e a_j já estão fixos. Levando-se em conta que o k-ésimo somatório da equação 3.4 possui C_n^k termos, obtemos:

$$N(D_n) = n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!$$

$$N(D_n) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n = n!(1 - \frac{1!}{1!} + \frac{1!}{2!} - \frac{1!}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

$$N(D_n) = n!(\frac{1!}{2!} - \frac{1!}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

Exemplo 3.2.2 *Em uma escola de pintura existem* 8 *alunos. Cada aluno possui um armário para guardar seu material de pintura. De quantas maneiras podemos permutar o material desses alunos nos armários de modo que os materiais não fiquem em seu armário original?*

Pelo resultado anterior, basta calcularmos o número de permutações caóticas $N(D_8)$, ou seja, $N(D_8) = 8!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}) = 8!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}) = 14833.$
■

Exemplo 3.2.3 *Em um time de volei* (6 *jogadores), de quantas formas podemos modificar a formação de maneira que exatamente* 2 *jogadores permaneçam em suas posições originais?*

Neste caso, podemos escolher 2 jogadores de um total de 6 jogadores de C_6^2 formas distintas.

Uma vez escolhidos esses 2 jogadores, devemos permutar caóticamente os outros 4. Assim, utilizando o princípio multiplicativo, temos que o total de formação onde 2 jogadores permanecem fixos em suas posições é dado por: $C_6^2.D_4 = \frac{6!}{(6-2)!2!}.4!(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}) = 135.$ ■

Considerações Finais

Neste trabalho vimos como fundamentar de maneira rigorosa os princípios básicos da Análise Combinatória, através de uma liguagem de teoria elementar dos conjuntos. Esse estudo nos permitiu aprofundar nosso conhecimento de Análise Combinatória, bem como aperfeiçoar nosso tratamento formal da Matemática.

O Princípio da Inclusão e Exclusão foi estudado e trabalhado com aplicações podendo ser encontrados em [6] e [2]. Uma possível continuação desse estudo apontaria para as Funções Geradoras.

Apesar de diversas correntes de Educação Matemática se mostrarem contrárias ao rigor e ao tratamento formal da matemática, acreditamos que o mesmo desempenha um papel fundamental na formação da estrutura lógica de raciocínio.

O leitor interessado poderá requisitar um arquivo em PDF da apresentação dessa dissertação de forma didática, enviando um e-mail para: luciana.eliasdeassis@gmail.com .

Apêndice A

Uma generalização do Princípio da Inclusão e Exclusão

O Princípio da Inclusão e Exclusão pode ser visto como pertencendo a uma classe mais geral de métodos que chamaremos de Métodos de Crivo.

Métodos de Crivo são métodos utilizados para determinar a cardinalidade de um conjunto S que inicia com um conjunto maior e através de alguma técnica subtraem ou cancelam os elementos não desejados. Esses métodos possuem basicamente duas abordagens distintas:

(a) Inicialmente, aproximaremos nossa resposta por uma superestimativa. Então, subtraímos uma nova superestimativa de nosso erro original, continuando dessa forma, até que após um número finito de passos cheguemos a resposta correta. Essa é a essência combinatória do Princípio da Inclusão e Exclusão.

(b) Os elementos do conjunto maior podem ser ponderados de tal maneira, que os elementos não desejados se cancelem, deixando apenas o conjunto original S.

Teorema A.0.5 *Seja S um conjunto com n elementos, $P(S)$ o conjunto das partes de S e V o espaço vetorial 2^n dimensional (sobre um certo corpo K) de todas as funções $f : P(S) \to K$. Definindo uma transformação linear $\phi : V \to V$ como:*

$$\phi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} f(Y), \qquad \text{para todo } T \subset S \tag{A.1}$$

Então ϕ^{-1} existe e é dada por:

$$\phi^{-1}f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f(Y), \qquad \textit{para todo } T \subset S \tag{A.2}$$

Demonstração: Definimos $\psi : V \to V$ com $\psi f(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f(Y)$. Então (colocando as funções da esquerda para direita)

$$\begin{aligned} \phi\psi f(T) &= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \phi f(Y) \\ &= \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \sum_{Z \supseteq Y} f(Z) \\ &= \sum_{Z \supseteq T} \left(\sum_{Z \supseteq Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} \right) f(Z) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Fazendo $m = |Z - T|$, teremos:

$$\sum_{\substack{Z \supseteq Y \supseteq T \\ (Z,T, \text{ fixos })}} (-1)^{|Y-T|} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} = \delta_{0m}$$

então $\phi\psi f(T) = f(T)$. Logo $\phi\psi f = f$, so $\psi = \phi^{-1}$. ■

Apresentaremos a forma típica de realizar uma aplicação em combinatória utilizando esse teorema. Pensamos em S como um conjunto de propriedades que os elementos de um outro conjunto A podem ou não satisfazer. Para qualquer subconjunto T de S, seja $f_=(T)$ o número de elementos de A que possuem *exatamente* as propriedades em T (ou seja, eles falham em ter as propriedades do conjunto $\bar{T} = S - T$). Seja $f_\geq(T)$, o número de objetos em A que tem pelo menos as propriedades em T. Dessa forma:

$$f_\geq(T) = \sum_{Y \supseteq T} f_=(Y) \tag{A.4}$$

Portanto, pelo Teorema $A.0.5$

$$f_=(T) = \sum_{Y \supseteq T} (-1)^{|Y-T|} f_\geq(Y) \tag{A.5}$$

em particular, o número de objetos que não tem nenhuma das propriedades em S é dado por:

$$f_{=}(\emptyset) = \sum_{Y} (-1)^{|Y|} f_{\geq}(Y) \tag{A.6}$$

onde $Y \in P(S)$. Em aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão é comum que seja fácil determinar $f(Y)$ para $Y \subseteq S$, de tal forma que a equação A.5 fornece uma fórmula para $f(T)$. Na equação A.5 podemos pensar em $f(T)$ (o termo $Y = T$) como sendo a primeira aproximação para $f(T)$. Então subtraímos

$$\sum_{\substack{Y \supseteq T \\ |Y-T|=1}} f_{\geq}(Y)$$

para obter uma aproximação melhor e adicionamos:

$$\sum_{\substack{Y \supseteq T \\ |Y-T|=2}} f_{\geq}(Y)$$

e assim sucessivamente, até obtermos a fórmula explícita A.5. Isso explica a terminologia "Inclusão e Exclusão".

Talvez a formulação padrão do Princípio da Inclusão e Exclusão dispense a definição do conjunto S e leve em conta apenas os subconjuntos de A. Dessa forma, sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ subconjuntos de um conjunto finito A. Para cada subconjunto T de $\{1, 2, ..., n\}$ seja

$$A_T = \cap_{i \in T} A_i$$

(com $A_\emptyset = A$) e para $0 \leq k \leq n$ definimos:

$$S_k = \sum_{[T]=k} |A_T| \tag{A.7}$$

que é a soma das cardinalidades de todas intersecções de k-uplas de A_i's. Neste contexto, pensamos nos subconjuntos A_i com uma forma de definir uma propriedade P_i pela condição $x \in A_i$. Então A_T é o conjunto dos elementos de A que satisfazem pelo menos as propriedades de T, assim, por A.6 o número $\#(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n)$ de elementos de A que não pertencem a nenhum dos A_i's é dado por:

$$\#(\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n \tag{A.8}$$

onde $S_0 = |A_\emptyset| = |A|$.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. *Análise Matemática*. 4. ed., São Paulo: Edgard Blucher, 2001.

[2] CHARALAMBIDES, C. A. *Enumerative Combinatorics*. 1. ed., ACPR Press, 2002.

[3] DOMINGUES, H. H., IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 4. ed., São Paulo: Atual, 2003.

[4] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 5. ed., Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2004.

[5] LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos Conjuntos*. 4. ed., São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972.

[6] SANTOS, J. P. O., MELLO, M. P., MURARI, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*.4.ed., Campinas: Ciência Moderna, 2008.

[7] STANLEY, R. P. *Enumerative Combinatorics, vol. 1*. 1. ed., Wadsworth & Brooks, 1986.