

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

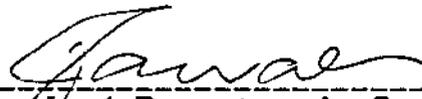
IMECC

PREDIÇÃO LINEAR NÃO-TENDENCIOSA ÓTIMA

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida por Cláudia Regina Oliveira de Paiva Lima e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 11 de dezembro de 1987.

Prof. Dr.



José Ferreira de Carvalho

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Estatística.

L628p

9072/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A G R A D E C I M E N T O S

Ao professor José Ferreira de Carvalho, pela idéia e orientação que dedicou em todos os momentos da elaboração desta tese.

Aos professores do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação-IMECC pela formação que me deram com todo carinho.

Aos funcionários do IMECC, notadamente a Iara Rehder pela colaboração em todos os momentos, a Marilda de Oliveira, pela ajuda na localização de artigos, assim como a normatização das referências bibliográficas e a Angles de Fátima Theodoro Espindola pelo carinho que sempre me tratou.

Aos professores da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, em especial a Sílvio José P. dos Santos e a Marcília Andrade Campos, que me estimularam a fazer o curso de mestrado.

Aos colegas de trabalho da Universidade Federal da Paraíba-UFPB, pelo apoio e credibilidade que depositaram em mim e no meu trabalho.

Aos amigos que me cativaram.

Ao apoio financeiro do CNPq e CAPES-PICD.

A B S T R A C T

This work has the purpose to give a review of the technics of prediction, from the insight of Linear Models.

The first part contains the prediction of the random vector parameters in random and mixed models, and the prediction of the vector of fixed model when only the values of the independent variables are known.

It is also presented the recursive estimation of the dynamic linear model, when the observation equation is a random or mixed model. The prediction of the dependent variable is obtained in a recursive way from this estimation. This result concludes the theoretical part of this work.

For purposes of illustration some of the technics mentioned above are applied in real data sets. Simulations are made in order to verify their performances.

S U M A R I O

Este trabalho tem por objetivo fazer uma revisão sobre as técnicas de predição, sob o ângulo de visão de modelos lineares.

Em uma primeira etapa, é mostrada a predição do vetor de parâmetros aleatórios nos modelos aleatório e misto, assim como, a predição do vetor das variáveis dependentes do modelo fixo, quando só são conhecidos os valores das variáveis independentes.

Aborda-se a estimação recursiva do modelo linear dinâmico, sendo a equação de observação um modelo aleatório ou misto. A partir desta estimação, obtém-se a predição da variável dependente de um modo recursivo, concluindo assim a parte teórica deste trabalho.

Para propósito de ilustração, algumas das técnicas citadas acima são aplicadas em dados reais. Também foram feitas simulações para verificar suas performances.

I N D I C E

0-Introdução.....	1
1-Modelos Lineares.....	3
1.1.Introdução.....	3
1.1.1.Modelos.....	3
1.1.2.Modelos Lineares.....	4
1.2.Classificação dos Modelos Lineares.....	5
1.2.1.Modelos Fixos.....	5
1.2.2.Modelos Aleatórios.....	5
1.2.3.Modelos Mistos.....	5
1.3.Estimativa dos Efeitos.....	6
1.3.1.Estimativa do Modelo Fixo.....	6
1.3.2.Predição do Modelo Misto.....	8
1.3.2.1.Predição de Máxima-Verossimilhança.....	10
1.3.2.2.Predição de Erro Médio Quadrático.....	12
1.3.2.3.Erro Médio Quadrático de Predição do Mode lo Misto.....	16
1.3.3.Predição do Modelo Aleatório.....	16
1.4.Referências Bibliográficas.....	17
2-Predição.....	18
2.1.Introdução.....	18
2.2.Estimação ótima.....	19
2.2.1.Estimação Heterogênea.....	19
2.2.2.Estimação Homogênea.....	20
2.2.3.Estimação Homogênea Não-tendenciosa.....	22
2.3.Predição Clássica.....	23
2.4.Predição ótima.....	26
2.4.1.Predição Heterogênea.....	26
2.4.2.Predição Homogênea.....	28
2.4.3.Predição Homogênea Não-tendenciosa.....	29
2.5.Ganho na Eficiência.....	30
2.6.Predição ótima Homogênea Não-tendenciosa do Modelo Misto.....	33
2.7.Kriging.....	36
2.8.Referências Bibliográficas.....	38
3-Filtro de Kalman.....	39
3.1.Introdução.....	39
3.2.Modelo Linear Dinâmico.....	39
3.3.Procedimento de Estimação Recursiva-O Filtro de Kalman.....	41
3.4.Predição.....	45

3.5.Referências Bibliográficas.....	46
4-Estimação Recursiva do Modelo Misto.....	47
4.1.Introdução.....	47
4.2.Limite dos estimadores do Modelo Aleatório.....	47
4.3.Modelo Misto Dinâmico.....	51
4.4.Estimação Recursiva para o Modelo Misto Dinâmico.....	52
4.5.Referências Bibliográficas.....	55
5-O BLUP e o Filtro de Kalman em Predições.....	56
5.1.Introdução	56
5.2.Representações de alguns modelos convencionais em Modelo Linear Dinâmico.....	56
5.2.1.Modelo Estável.....	57
5.2.2.Modelo de Crescimento Linear.....	57
5.2.3.Modelo de Crescimento Linear Sazonal.....	58
5.3.Simulações e Resultados.....	60
5.4.Aplicação.....	63
5.5.Tabelas e Gráficos.....	64
Apêndice.....	84

C A P I T U L O O

I N T R O D U Ç Ã O

Em muitos trabalhos, aplicados em diversas áreas, desejam-se fazer predições, sendo, às vezes, estas de vital importância para o desenvolvimento de alguma técnica, equipamento, etc. Mas, como predição é a estimação de uma variável aleatória não observável, pode-se facilmente cometer grandes erros, devendo então ser usada muito cautelosamente.

A predição linear não-tendenciosa ótima, é linear nas observações, com esperança matemática do preditor igual a esperança matemática da variável. E existe uma função quadrática da distância do parâmetro em relação ao estimador que tem um valor mínimo.

Em alguns casos, pode acontecer que os dados sejam obtidos sequencialmente e que a predição tenha que acompanhar as observações, ou seja, se dê de modo sequencial. Dispondo apenas da predição anterior e do ponto presentemente obtido, tem-se a necessidade de fazer-se uma predição recursiva.

Neste trabalho foi feita uma coletânea de algumas técnicas usadas no contexto acima citado, que pode vir a servir para estudos posteriores de nível mais profundo.

Este estudo é dividido de acordo com a classificação dos modelos. A classificação é baseada no vetor de parâmetros, ou seja, nos modelos fixos, aleatórios e mistos.

Inicialmente, tratou-se da predição do vetor de parâmetros dos modelos aleatórios e mistos.

No segundo capítulo, viu-se a predição do modelo fixo, que é requerida quando se tem novos valores para as variáveis independentes e se deseja obter o valor mais provável da variável dependente do modelo. Foi vista a predição clássica, que parte da estimação ótima do vetor de parâmetros, a predição ótima e a comparação entre as duas técnicas. Também foi verificado o comportamento da predição ótima no modelo misto. E a técnica do Kriging é apresentada na última seção.

O terceiro capítulo estuda o Filtro de Kalman, uma técnica de estimação recursiva baseada no modelo linear dinâmico, que é um modelo aleatório com a característica adicional de parâmetros dinâmicos. (variarem no tempo).

Conjugaram-se as idéias do Filtro de Kalman às do modelo misto, no capítulo quatro, colocando os efeitos fixos como efeitos aleatórios de variância e covariância tendendo ao infinito.

O quinto capítulo, mostra alguns modelos aleatórios específicos. Simulando dados com base nestes modelos, observou-se o comportamento da predição linear não tendenciosa ótima (Técnica não-recursiva) com o Filtro de Kalman (Procedimento Recursivo). Esta observação foi também feita em dados reais, que foram modelados de acordo com as suas características.

C A P I T U L O 1

M O D E L O S L I N E A R E S

Este capítulo tem como objetivo expor o que vem a ser modelos, modelos lineares, sua classificação de acordo com seus coeficientes, assim como suas estimativas.

1.1. Introdução.

Para desenvolver qualquer teoria em modelos lineares, é preciso saber o que significa modelos, e mais ainda, modelos lineares.

1.1.1. Modelos.

Um modelo consiste numa representação simplificada de um fenômeno ocorrido no mundo real.

Considere uma situação que tenha um conjunto de observações ou resultados experimentais, o qual é chamado de variável dependente y , e que pode ser escrito em função de outras variáveis x_1, x_2, \dots, x_p , as quais são chamadas de variáveis explicativas ou preditoras.

Podemos, então, escrever

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p; \epsilon) \quad (1.1.1)$$

onde ϵ representa uma possível multidão de fatores, incluindo os erros de medição, e portanto é chamado de erro ou ruído.

A função $f(\cdot)$ deve satisfazer aos seguintes requisitos:

- a. deve ser matematicamente tratável; isto é, deve ser tal que o problema de aproximação possa ser resolvido.
- b. deve adequar-se bem aos dados disponíveis.
- c. deve ser a mais simples possível dentre concorrentes de igual valor quanto ao ajuste aos dados.

1.1.2. Modelos Lineares.

Para que o modelo (1.1.1) seja matematicamente tratável; ou seja, cumpra o requisito (a.) começa-se por admitir que os modelos sejam lineares nos parâmetros, onde por parâmetro entende-se uma quantidade associada com a população que caracteriza o modelo e que o comportamento do erro seja aditivo; isto é :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p) + e \quad (1.1.2)$$

Modelos que têm estes requisitos serão chamados de modelos lineares.

Alguns exemplos de modelos lineares:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p + e$$

$$y = b_0 + b_1 \log x_1 + b_2x_2 + \dots + e$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p + e$$

Exemplos de funções não-lineares nos parâmetros:

$$y = b_0 b_1 x_1 + b_2 x_2 + e$$

$$y = b_0 + (\log b_1) x_1 + e$$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + (b_2)^2 x_2 + \dots + (b_p)^p x_p + e$$

Os modelos a serem considerados serão da forma:

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \dots + b_p x_{ip} + e_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

onde n é o número de observações realizadas.

Escrevendo em forma matricial:

$$Y = XB + E \quad (1.1.3)$$

onde:

$Y = (y_i)$: vetor ($n \times 1$) de variáveis dependentes, aleatório e observável.

$X = ((x_{ij}))$: matriz ($n \times p$) de variáveis explicativas, fixa e observável.

$B = (b_j)$: vetor ($p \times 1$) de parâmetros, não-observável.

$E = (e_i)$: vetor ($n \times 1$) dos erros, aleatório e não-observável.

1.2. Classificação dos Modelos Lineares.

De acordo com o vetor de parâmetros, os modelos podem ser classificados em:

- i. Modelos Fixos.
- ii. Modelos Aleatórios.
- iii. Modelos Mistos.

1.2.1. Modelos Fixos

Quando todas as variáveis explicativas são controladas pelo pesquisador; ou seja, o vetor de parâmetros correspondente a essas variáveis, não tem um comportamento estocástico, isto é, não segue uma distribuição de probabilidade, este é chamado de modelo de efeito fixo.

Pode-se, também, ver esta classificação através de uma conotação amostral. Coletando os dados sobre alguns níveis dos efeitos e se é desejado inferir apenas sobre estes níveis e nenhum outro, estes efeitos são ditos fixos e se todos os efeitos do modelo são fixos temos um modelo de efeito fixo.

1.2.2. Modelos Aleatórios

Tendo todos os parâmetros do modelo um comportamento estocástico; isto é, sendo variáveis aleatórias, o modelo será chamado modelo de efeito aleatório.

Na visão amostral, temos efeitos aleatórios quando os dados coletados são sobre alguns níveis amostrados dos efeitos e deseja-se inferir a população de níveis. Quando todos os efeitos do modelo são aleatórios, este modelo é chamado de modelo de efeito aleatório, ou simplesmente, modelo aleatório.

1.2.3. Modelos Mistos

Modelos onde alguns efeitos são fixos e outros aleatórios são chamados de modelos mistos.

Naturalmente, todos os modelos contêm um efeito fixo b_0 , que representa a média geral, e um termo aleatório, o erro. Mas, a descrição feita aqui é reservada para modelos cujos efeitos, a menos dos b_0 e e 's, são uma mistura de efeitos fixos e aleatórios.

1.3. Estimativa dos Efeitos.

De início, precisamos definir o critério de distância entre os dois vetores em estudo, o observado e o definido pelo modelo. A escolha da distância varia de acordo com a conveniência e os objetivos de quem estuda o problema.

A distância definida pela norma Euclidiana é a mais fácil de trabalhar, do ponto de vista matemático, e será a utilizada neste trabalho.

Define-se a aproximação de mínimos quadrados da seguinte maneira:

Seja o modelo

$$Y = XB + E \quad (1.1.3)$$

onde B é um vetor arbitrário sobre EP .

A aproximação de mínimos quadrados é dada por XB , onde B é um vetor qualquer, que satisfaz a seguinte condição:

$$\|Y - XB\| = \inf_{C \in EP} \|Y - XC\|$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma Euclidiana.

1.3.1. Estimativa do Modelo Fixo.

Tomemos o modelo

$$Y = XB + E \quad (1.1.3)$$

onde B é um vetor de parâmetros fixos, não-observável sobre EP .

Sendo $Q(t) = \|Y - Xt\|^2$ a função que desejamos minimizar.

Temos,

$$\begin{aligned} Q(t) &= \|Y - Xt\|^2 = \langle Y - Xt, Y - Xt \rangle \\ &= Y'Y - 2Y'Xt + t'X'Xt \end{aligned}$$

Derivando em relação ao vetor t :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -2X'Y + 2X'Xt$$

Igualando a zero,

$$X'Xt = X'Y \quad (1.3.1)$$

As equações (1.3.1) são chamadas "equações normais".

Como $Q(t) \geq 0$, para qualquer t , por ser soma de quadrados, e ser uma função contínua de t ; se as equações normais forem consistentes, ou seja, admitirem solução, $Q(t)$ admite mínimo que será dado por uma solução das equações normais.

Obs.: Um sistema, $Ax = b$, é consistente, se e somente se, para todo vetor a ,

$$a'A = 0 \implies a'b = 0$$

Proposição 1.3.1: As equações normais são consistentes, qualquer que seja Y .

Dem.: Seja $a \in EP$, tal que $a'X'X = 0$

$$\text{Então } a'X'Xa = 0 \implies a'X' = 0 \implies a'X'Y = 0 \quad \forall Y$$

Proposição 1.3.2: Se t é solução das equações normais, então a aproximação de mínimos quadrados, $y = Xt$, é única.

Dem.: Sejam t_1 e t_2 duas soluções das equações normais, logo

$$X'Xt_1 = X'Y = X'Xt_2 \implies X'X(t_1 - t_2) = 0 \implies$$

$$(t_1 - t_2)'X'X(t_1 - t_2) = 0 \implies X(t_1 - t_2) = 0 \implies$$

$$Xt_1 = Xt_2.$$

Proposição 1.3.3: A aproximação de mínimos quadrados obtida a partir da solução das equações normais é um mínimo global.

Dem.: Seja b uma solução das equações normais, e $y = Xt$ outra aproximação.

Escrevendo

$t = b + c$, onde c é um vetor qualquer, então

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q(b+c) = Y'Y - 2Y'X(b+c) + (b+c)'X'X(b+c) \\ &= Y'Y - 2Y'Xb - 2Y'Xc + b'X'Xb + 2b'X'Xc + c'X'Xc \\ &= Y'Y - 2Y'Xb + b'X'Xb - 2Y'Xc + 2b'X'Xc + c'X'Xc \\ &= Q(b) + c'X'Xc \geq Q(b) \end{aligned}$$

Logo, Xt é um mínimo se e só se $Xc = 0$.

Obs.: Acima usamos o fato de que $X'Xb = X'Y$

Nota Importante: Usamos neste trabalho a matriz X de posto completo, baseando-nos no fato de quando isto não é verdadeiro, podemos reparametrizar o modelo de tal forma que venha a ser.

Nota 01: Devemos chamar a atenção para o fato de que não foi imposta uma estrutura estocástica para o vetor de erros E , visto que este é apenas um vetor arbitrário sobre EP .

Definição: Variância da estimativa de b .

Seja b uma solução das equações normais:

$$b = (X'X)^{-1}X'Y$$

Se $E(E) = 0$ e $\text{Var}(E) = s^2I$, onde I é a matriz identidade,

$$\begin{aligned} \text{Var}(b) &= E(bb') = E((X'X)^{-1}X'YY'X(X'X)^{-1}) \\ &= s^2(X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Definição: Mínimos Quadrados Generalizados ou Ponderados.

Este método envolve a suposição que a $\text{var}(E) = V$ (simétrica, positiva definida), e com o objetivo de minimizar $(Y-XB)'V^{-1}(Y-XB)$ com respeito a B .

Consequentemente,

$$(X'V^{-1}X)B = X'V^{-1}Y \quad (1.3.3)$$

que são chamadas "Equações de Aitken" as quais gozam das mesmas propriedades que as equações normais, então

$$b = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y, \text{ e} \quad (1.3.4)$$

$$\text{Var}(b) = (X'V^{-1}X)^{-1} \quad (1.3.5)$$

1.3.2. Predição do Modelo Misto.

$$\text{Seja } Y = XB + ZU + E$$

onde:

Y: vetor (nx1) de observações.

XB: contribuição para Y dos efeitos fixos, sendo X uma matriz (n x p).

ZU: contribuição para Y dos efeitos aleatórios, sendo Z uma matriz (n x m).

E: vetor (nx1) dos erros.

$$\text{com } E(E) = E(U) = 0 \quad E(UU') = D$$

$$E(E E') = R$$

$$E(U E') = 0$$

sendo D e R conhecidas, simétricas e positivas definidas.

$$\begin{aligned} \text{Logo a } \text{Var}(Y) &= E[(Y - E(Y))(Y - E(Y))'] = \\ &= E[(XB + ZU + E - XB)(XB + ZU + E - XB)'] = \\ &= E[ZUU'Z' + EE'] = \\ &= ZDZ' + R = V \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Uma realização não-observável do vetor aleatório U está associada com a observação. Temos interesse em estimar o valor ocorrido de U.

Por contraste, em modelos de componentes de variância, estima-se, não o valor de U, mas sua variância.

O modelo de predição tem um contexto estocástico assumido, ao passo que o de componentes de variância está associado à amostragem.

Um processo para estimação dos efeitos aleatórios é totalmente Bayesiano e assume que há uma distribuição conjunta a priori para todos os elementos de B, de U, D e R. Depois calcula-se a distribuição a posteriori de todos os parâmetros B, U, D e R, e obtém-se a distribuição marginal de U, tomando a média desta última, como uma boa estimativa para U.

Como D e R são conhecidas, estes não precisam entrar na distribuição a priori, e como XB pode ser reparametrizado, torna-se difícil obter uma distribuição a priori para todos os parâmetros do modelo. Portanto, usaremos duas outras técnicas que veremos mais adiante.

Um fato interessante é que, o uso da palavra estimação referente a uma variável aleatória, está associada ao emprego de uma técnica Bayesiana, por exemplo, a média da distribuição a posteriori. Então a expressão "predição" refere-se à estimação dos elementos de U, no uso de uma outra técnica.

1.3.2.1. Predição de Máxima-Verossimilhança.

Suposição: $E \sim N(0, R)$ $U \sim N(0, D)$

Com base nesta suposição, a densidade conjunta de Y e U é dada por:

$$\begin{aligned} f(Y, U) &= g(Y/U)h(U) \\ &= C \exp\left(-\frac{1}{2}(Y-XB-ZU)'R^{-1}(Y-XB-ZU)\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(U'D^{-1}U)\right) \\ &= C \exp\left(-\frac{1}{2}(Y'R^{-1}Y - 2Y'R^{-1}XB - 2Y'R^{-1}ZU + B'X'R^{-1}XB + \right. \\ &\quad \left. + 2B'X'R^{-1}ZU + U'Z'R^{-1}ZU + U'D^{-1}U)\right) \end{aligned}$$

onde C é uma constante.

Chamando

$$Q = -\frac{1}{2}(Y'R^{-1}Y - 2Y'R^{-1}XB - 2Y'R^{-1}ZU + B'X'R^{-1}XB + \\ + 2B'X'R^{-1}ZU + U'Z'R^{-1}ZU + U'D^{-1}U)$$

Diferencia-se Q com respeito a B e a U :

$$\frac{dQ}{dB} = X'R^{-1}Y - X'R^{-1}XB - X'R^{-1}ZU$$

$$\frac{dQ}{dU} = Z'R^{-1}Y - Z'R^{-1}XB - Z'R^{-1}ZU - D^{-1}U$$

Igualando a zero, obtém-se

$$X'R^{-1}Y = X'R^{-1}XB + X'R^{-1}ZU \quad (a)$$

$$Z'R^{-1}(Y-XB) = (Z'R^{-1}Z + D^{-1})U \quad (b)$$

Diferenciando-se pela segunda vez,

$$\frac{d^2Q}{dB^2} = -X'R^{-1}X < 0$$

$$\frac{d^2Q}{dU^2} = -Z'R^{-1}Z - D^{-1} < 0$$

$$\frac{d^2Q}{dBdU} = -Z'R^{-1}X < 0$$

Como Q é uma função contínua em B e U , conclui-se que será obtido um ponto de máximo, na solução das equações (a) e (b).

$$\text{De (b) vem: } U = (Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(Y - XB) \quad (1.3.7)$$

Substituindo em (a),

$$\begin{aligned} X'R^{-1}Y &= X'R^{-1}XB + X'R^{-1}Z[(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(Y - XB)] \\ &= X'R^{-1}XB + X'R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}Y - \\ &\quad - X'R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}XB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X'[R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}]Y &= \\ &= X'[R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}]XB \end{aligned}$$

Chamando-se

$$W = R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1},$$

segue que

$$X'WY = X'WXB$$

Mas,

$$\begin{aligned} WV &= [R^{-1} - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}](Z'DZ + R) \\ &= R^{-1}ZDZ' + I - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}ZDZ' - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z' \\ &= R^{-1}ZDZ' + I - R^{-1}Z(Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}(Z'R^{-1}Z + D^{-1})DZ' \\ &= R^{-1}ZDZ' + I - R^{-1}ZDZ' \\ &= I \end{aligned}$$

ou seja, $W = V^{-1}$

Então, a equação acima pode ser escrita por

$$X'V^{-1}Y = X'V^{-1}XB \implies b = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y \quad (1.3.4)$$

que são as equações de Aitken, que nos dão as estimativas de mínimos quadrados generalizados para os efeitos fixos B .

Sendo a predição dos efeitos aleatórios obtida pela substituição deste resultado na equação (1.3.7), então

$$\begin{aligned} u &= (Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(Y - Xb) \\ &= (Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}VV^{-1}(Y - Xb) \\ &= (Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'R^{-1}(ZDZ' + R)V^{-1}(Y - Xb) \\ &= (Z'R^{-1}Z + D^{-1})^{-1}(Z'R^{-1}ZDZ' + Z')V^{-1}(Y - Xb) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (Z'R^{-1}Z+D^{-1})^{-1}(Z'R^{-1}Z+D^{-1})DZ'V^{-1}(Y-Xb) \\
&= DZ'V^{-1}(Y-Xb) \qquad (1.3.8)
\end{aligned}$$

Este preditor foi estabelecido por Henderson(1963,1973).

Do ponto de vista Bayesiano, este é o estimador de máxima-verossimilhança da média de U , condicionado a um conjunto de observações Y , como veremos agora.

$$\begin{aligned}
\text{Temos que a } Cov(U, Y') &= E(U, (Y-XB)') \\
&= E(U, (ZU+E)') \\
&= E(UU'Z'+UE') \\
&= DZ'
\end{aligned}$$

Sob a suposição de normalidade,

$$E(U/Y) = E(U) + Cov(U, Y')[Var(Y)]^{-1}[Y-E(Y)]$$

Então,

$$E(U/Y) = DZ'V^{-1}(Y-XB)$$

Substituindo B por b , que é o estimador de máxima-verossimilhança de B , obtém-se u . Daí ser chamado de estimador da média condicional de U dado Y .

Obs.: $Z'R^{-1}Z+D^{-1}$ é inversível.

Para qualquer vetor $x \neq 0$

$$x'(Z'R^{-1}Z+D^{-1})x > 0$$

1.3.2.2. Predição de Erro Médio Quadrático Mínimo.

Deseja-se um preditor dos elementos de U que seja linear nas observações e que seja independente de B , logo o problema é formulado da seguinte maneira:

Escolher vetores $a'_i (n \times 1)$, $i=1, 2, \dots, m$, tais que:

- $a'_i X = 0$ (isto é, $a'_i Y$ não contenha efeitos fixos; isto é, independente de B).
- $E(a'_i Y - d'_i U)^2$ seja mínima.

onde $d'_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$; isto é, 1 na i -ésima posição

E faz-se isto sucessivamente para $i=1,2,\dots,m$.

De início, a equação é

$$a'_i Y = a'_i X B + a'_i Z U + a'_i E$$

Só que $a'_i X = 0$, então

$$a'_i Y - d'_i U = (a'_i Z - d'_i) U + a'_i E$$

Elevando ao quadrado e tomando a esperança matemática com relação a U e a E , tem-se:

$$\begin{aligned} E(a'_i Y - d'_i U)^2 &= E[(a'_i Y - d'_i U)(a'_i Y - d'_i U)'] \\ &= E\{(a'_i Z - d'_i)U + a'_i E\}\{(a'_i Z - d'_i)U + a'_i E\}' \\ &= (a'_i Z - d'_i)D(a'_i Z - d'_i)' + a'_i R a_i \\ &= a'_i Z D Z' a_i - 2d'_i D Z' a_i + d'_i D d_i + a'_i R a_i \\ &= a'_i V a_i - 2d'_i D Z' a_i + d'_i D d_i \end{aligned}$$

O problema, então é

Minimizar $a' V a - 2c' a + D$ onde $c' = D Z'$

Sujeito a $X' a = 0$

Usando a técnica de Lagrange,

$$L = a' V a - 2c' a + D + 2l' (X' a)$$

$$\frac{dL}{da} = 2V a - 2c + 2X l = 0 \quad (a)$$

$$\frac{dL}{d2l'} = X' a = 0 \quad (b)$$

$$\text{De (a): } V a = c - X l$$

$$a = V^{-1}(c - X l) \quad (V \text{ é inversível})$$

$$\text{E de (b), } X' a = X' V^{-1} c - X' V^{-1} X l = 0$$

$$X' V^{-1} X l = X' V^{-1} c$$

Como esta equação tem a mesma estrutura que as equações de Aitken e, conseqüentemente das equações normais, pode-se dizer que ela é consistente e possui uma única solução para $X l$.

Proposição 1.3.4: A solução obtida fornece um mínimo global.

Dem.: Seja $b = V^{-1}(c - X1)$ onde $X'V^{-1}X1 = X'V^{-1}c$

Tome $a = b + \alpha$, mas $X'\alpha = 0$, pois $X'a = 0$ e $X'b = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Sendo, } a'Va - 2c'a + D &= (b + \alpha)'V(b + \alpha) - 2c'(b + \alpha) + D \\ &= b'Vb - 2c'b + 2\alpha'Vb - 2c'\alpha + \alpha'V\alpha + D \\ &= b'Vb - 2c'b + 2\alpha'(Vb - c) + \alpha'V\alpha + D \end{aligned}$$

E como $Vb - c = c - X1 - c = -X1$.

Então $2\alpha'(Vb - c) = -2\alpha'X1 = 0$, já que $X'\alpha = 0$.

Logo, $a'Va - 2c'a + D = b'Vb - 2c'b + D + \alpha'V\alpha$

E a só será mínimo se e somente se $\alpha'V\alpha = 0 \implies \alpha = 0$

Disto, é possível concluir que o melhor preditor linear de u_1 , é dado por $a'_1 Y$, onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= V^{-1}(c_1 - X1_1) \\ &= V^{-1}(ZDd'_1 - X1_1) \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{e } X'V^{-1}X1_1 &= X'V^{-1}c_1 \\ &= X'V^{-1}ZDd'_1 \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Logo, o melhor preditor linear de U , é:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix} Y = A'Y$$

$$\begin{aligned} \text{onde } A &= (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m) \\ &= V^{-1}(ZD - XL) \end{aligned}$$

$$\text{e } X'V^{-1}XL = X'V^{-1}ZD$$

$$\text{Então } L = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD$$

$$\text{e } A = V^{-1}(ZD - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD)$$

$$= V^{-1}(I - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1})ZD$$

Logo $u = A'Y$

$$= DZ'(I - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X')V^{-1}Y$$

$$= DZ'(V^{-1}Y - V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y)$$

$$= DZ'V^{-1}(Y - X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y)$$

$$= DZ'V^{-1}(Y - Xb) \quad (1.3.8)$$

Que é o preditor obtido por Henderson(1963,1973). E pode ser dito que este tem as seguintes propriedades:

- é linear nas observações.
- é não-tendencioso com respeito a parte fixa do modelo, ou, alternativamente, não depende da natureza de XB . ($E(U) = E(u) = 0$)
- é o melhor preditor do vetor U , na classe dos preditores que satisfazem (a.) e (b.).

Devido a este preditor satisfazer a estas propriedades, este é comumente conhecido como BLUP (Best Linear Unbiased Prediction) das variáveis aleatórias do modelo.

Nota 02:Gostaríamos de ressaltar que não foi feita nenhuma suposição sobre a distribuição normal neste desenvolvimento, e mais uma vez, apesar de estarmos estimando uma variável aleatória; ou seja, um argumento Bayesiano, não foi usado qualquer forma das distribuições a priori de XB ou U .

Teorema da inversa de matrizes: O seguinte teorema será útil.

$$(A+BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

onde A :matriz($p \times p$) de posto igual a p

B :matriz($p \times q$) de posto igual a q

C :matriz($q \times p$) de posto igual a q

Usando este teorema, pode-se escrever

$$V^{-1} = (R+ZDZ')^{-1}$$

$$= R^{-1} - R^{-1}Z(I+DZ'R^{-1}Z)^{-1}DZ'R^{-1}$$

$$= R^{-1} - R^{-1}Z(D^{-1}+Z'R^{-1}Z)^{-1}D^{-1}DZ'R^{-1}$$

$$= R^{-1} - R^{-1}Z(D^{-1}+Z'R^{-1}Z)^{-1}Z'R^{-1} = W$$

O valor de escrever esta inversa na forma de W, é que nesta é necessário inverter uma matriz (mxm) e a matriz R que normalmente é a identidade, ou no máximo uma matriz diagonal, em vez de inverter uma matriz de ordem igual ao número de observações (n). Normalmente nas aplicações, m é muito menor que n.

Nota 03: Henderson (1963) mostrou que o melhor preditor linear não-tendencioso para $K'B + M'U$ é $K'b + M'DZ'V^{-1}(Y - Xb)$, onde b é qualquer solução de (1.3.3).

1.3.2.3. Erro Médio Quadrático de predição do modelo misto.

$$\text{Definição: EMQP} = E \begin{bmatrix} |b-B| & |b-B|' \\ |u-U| & |u-U|' \end{bmatrix}$$

$$= E \begin{bmatrix} (b-B)(b-B)' & (b-B)(u-U)' \\ (u-U)(b-B)' & (u-U)(u-U)' \end{bmatrix}$$

$$\text{onde: } E[(b-B)(b-B)'] = \text{Var}(b) = (X'V^{-1}X)^{-1} \quad (1.3.5)$$

$$E[(b-B)(u-U)'] = E[b(u-U)']$$

$$= E[(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y(DZ'V^{-1}Y - DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y - U)']$$

$$= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}VV^{-1}ZD - (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}VV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD - (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD$$

$$= -(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD \quad (1.3.11)$$

$$E[(u-U)(b-B)'] = (E[(b-B)(u-U)'])'$$

$$E[(u-U)(u-U)'] = E[(DZ'V^{-1}Y - DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y - U)(DZ'V^{-1}Y - DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y - U)']$$

$$= DZ'V^{-1}VV^{-1}ZD - 2DZ'V^{-1}VV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD - 2DZ'V^{-1}ZD + DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}VV^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD + 2DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD + D$$

$$= D - DZ'V^{-1}ZD + DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD \quad (1.3.12)$$

1.3.3. Predição do Modelo Aleatório.

Seja o modelo $Y = ZU + E$

onde:

Y: vetor($n \times 1$) de observações.

ZU: contribuição para Y dos efeitos aleatórios, sendo Z uma matriz($n \times m$).

E: vetor($n \times 1$) de erros.

$$\text{com } E(E) = E(U) = 0 \quad E(UU') = D$$

$$E(E E') = R$$

$$E(U E') = 0$$

sendo D e R conhecidas, simétricas e positivas definidas.

Podemos observar que este modelo é uma particularidade do modelo misto, quando $XB = 0$; ou seja, não há contribuição de efeitos fixos.

Logo o preditor linear, não-tendencioso, ótimo, o BLUP, é dado pela substituição de $XB = 0$ no BLUP do modelo misto, fornecendo

$$u = DZ'V^{-1}y \quad (1.3.13)$$

$$V = ZDZ' + R$$

$$\text{com } EMQP(u) = D - DZ'V^{-1}ZD \quad (1.3.14)$$

1.4. Referências Bibliográficas

- [1] Searle, S.R. Linear Models. New York, Wiley, 1971.
- [2] Henderson, C.R. Best Linear Unbiased Estimation and Prediction under a Selection Model. Biometrics 31:423-447, 1975.
- [3] Kempthorne, O. Best Linear Prediction of Random Variables in a Mixed Model. Iowa State University, 1975. (Course Statistics-590B).
- [4] Carvalho, J.F. Modelos Lineares. IMECC/UNICAMP, 1976. (Notas de Aula).

C A P I T U L O 2

P R E D I Ç Ã O

Este capítulo apresenta um estudo de estimação ótima, predição clássica, predição ótima, assim como o ganho na eficiência desta última sobre a predição clássica, tomando o modelo fixo como objeto. Também será mostrado o preditor do efeito aleatório do modelo misto, pela técnica usada na predição ótima; além de uma pequena exposição sobre o "Kriging", que é uma técnica particular de predição.

2.1. Introdução

Seja $Y = XB + E$

onde:

Y: vetor (nx1) de observações.

XB: contribuição para Y dos efeitos fixos, sendo X uma matriz (nxp) de posto completo.

E: vetor (nx1) dos erros

com $E(E) = 0$ e $E(EE') = \sigma^2 W$

sendo W conhecida, simétrica, positiva definida.

Inicialmente, considere os estimadores de B lineares em Y; ou seja,

$$b = C'Y + D \quad (2.1.1)$$

Se $D = 0 \Rightarrow b$ é um "estimador linear homogêneo".

Se $D \neq 0 \Rightarrow b$ é um "estimador linear heterogêneo".

Como base de comparação, é usada a função de perda quadrática, definida por:

$$R(b) = E[(b-B)'A(b-B)] \quad (2.1.2)$$

onde \underline{A} é uma matriz positiva definida, selecionada de acordo com a importância relativa dos elementos de b.

Se $A = I$; $R(b)$ é a esperança matemática da distância Euclidiana entre o verdadeiro valor de B e a sua estimativa.

Definição: Um estimador b é chamado R -ótimo, se sua perda esperada for menor que a de qualquer outro estimador; ou seja,

$$\text{Se } R(b) \leq R(b')$$

onde b' é um outro estimador de B .

2.2. Estimação Ótima

2.2.1. Estimação Heterogênea

O erro de b é

$$\begin{aligned} b - B &= C'Y + D - B = C'(XB + E) + D - B = \\ &= (C'X - I)B + C'E + D \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Logo,

$$\begin{aligned} R(b) &= E\{[(C'X - I)B + C'E + D]'A[(C'X - I)B + C'E + D]\} \\ &= [(C'X - I)B + D]'A[(C'X - I)B + D] + E(E'CAC'E) \end{aligned}$$

mas,

$$E(E'CAC'E) = E(\text{tr}(E'CAC'E)) = \text{tr}(E(AC'EE'C)) = s^2 \text{tr}(AC'WC)$$

Note que $E'CAC'E$ é um escalar.

Então,

$$R(b) = [(C'X - I)B + D]'A[(C'X - I)B + D] + s^2 \text{tr}(AC'WC) \quad (2.2.2)$$

Como o último termo é livre de D , o valor ótimo de D é aquele que minimiza (igual a zero) o primeiro termo, logo

$$(C'X - I)B + D = 0 \implies D = -(C'X - I)B \quad (2.2.3)$$

onde C ainda deve ser estimado.

Voltando a (2.2.2), temos que

$$R(b) = s^2 \text{tr}(AC'WC)$$

Logo o c deve ser o valor de C que minimiza esta expressão, então

$$\frac{dR(b)}{dC} = 2WCA = 0 \implies c = 0$$

E de (2.2.3), $d = B$, e

$$b = C'Y + D \quad (c=0, d=B)$$

$$\implies b_1 = B \quad (2.2.4)$$

O que leva à conclusão óbvia de que não foi obtido nenhum estimador através desta técnica, já que por estimador entende-se qualquer função que depende só da amostra. Isto não acontecendo aqui, pois B é um vetor desconhecido, e como $b_1 = B$, então b_1 tem vício e risco zero.

2.2.2. Estimação Homogênea

Como o estimador homogêneo tem o valor de D igual a zero, o erro de b é igual a

$$b - B = (C'X - I)B + C'E \quad (2.2.5)$$

Substituindo $D = 0$ em (2.2.1).

E de (2.2.2), tem-se

$$\begin{aligned} R(b) &= [(C'X - I)B]'A[(C'X - I)B] + s^2 \text{tr}(AC'WC) \\ &= B'(X'C - I)A(C'X - I)B + s^2 \text{tr}(AC'WC) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Diferenciando $R(b)$ em relação a C ,

$$\frac{dR(b)}{dC'} = 2A[C'(XBB'X' + s^2W) - BB'X']$$

Igualando a zero, resulta

$$C'(XBB'X' + s^2W) = BB'X'$$

$$\implies c'2 = BB'X'(XBB'X' + s^2W)^{-1} = BB'X'P^{-1} \quad (2.2.7)$$

onde $P = XBB'X' + s^2W$

Que é o C ótimo, já que

$$\frac{d^2R(b)}{dC'^2} = 2A(XBB'X' + s^2W)$$

Que é um valor positivo, logo foi encontrado o ponto mínimo procurado, já que $R(b)$ é uma função contínua de b , consequentemente de C .

A expressão (2.2.7) pode ser simplificada, notando que

$$P^{-1} = (XBB'X' + s^2W)^{-1} = s^{-2}W^{-1} - \frac{s^{-4}W^{-1}XBB'X'W^{-1}}{1 + s^{-2}B'X'W^{-1}XB}$$

Que é obtida do teorema da inversa de matrizes citado no Capítulo 1.

Logo,

$$b_2 = c'Y = \frac{s^{-2}B'X'W^{-1}y}{1 + s^{-2}B'X'W^{-1}XB} B \quad (2.2.8)$$

sendo este o estimador R-ótimo homogêneo.

Pondo $s^2W = S$, (2.2.8) será escrito como

$$b_2 = \frac{B'X'S^{-1}y}{1 + B'X'S^{-1}XB} B \quad (2.2.9)$$

$$= B \begin{bmatrix} B' \\ \frac{1}{B'B} I + X'S^{-1}X \end{bmatrix}^{-1} B \begin{bmatrix} B'X'S^{-1}y \end{bmatrix}$$

colocando $V = \frac{1}{B'B} I + X'S^{-1}X$

$$b_2 = B(B'VB)^{-1}B'VB^+ \quad (2.2.10)$$

$$\text{onde } B^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{B'B} I + X'S^{-1}X \\ X'S^{-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

Esta forma de escrever dá uma interpretação intuitiva de b_2 como um estimador em dois estágios:

1º Estágio: Calcula-se B^+ , o qual é um estimador de "ridge regression" generalizado dado por Kennard e Hoerl.

2º Estágio: É calculado b_2 , que pode ser interpretado como um estimador de B^+ , onde B^+ está em função de B com variância V^{-1} .
(Se $Y = XB + E$, $E \sim N(0, V) \Rightarrow y = X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$)

Então b_2 , o estimador homogêneo R-ótimo, pode ser visto como uma combinação entre os procedimentos de "ridge regression" e os mínimos quadrados generalizados.

Partindo de (2.2.9),

$$E(b_2) = \frac{B'X'S^{-1}XB}{1+B'X'S^{-1}XB} \quad B = K \quad B = B \left[1 - \frac{1}{1+K} \right]$$

$$= B \left[1 - \frac{1}{1+B'X'S^{-1}XB} \right]$$

Então, em média b_2 subestima B .

Note também que $R(b_1) \leq R(b_2)$, pois $R(b_1) = 0$ e $R(b_2)$ não pode ser negativa. Esta desigualdade também pode ser vista do fato que b_2 é obtido pela otimização do conjunto de estimadores que é um subconjunto do conjunto que leva a b_1 .

(Est. Homogêneos \subset Est. Heterogêneos)

Apesar de toda esta análise, observa-se que b_2 também não é um estimador, pois depende do vetor desconhecido B .

Nota 01: Ridge Regression.

Hoerl e Kennard (1970) propuseram o estimador de "ridge", definido por:

$$b_k = (X'X + kI)^{-1}X'Y, \text{ onde } k \text{ é um escalar.}$$

Uma generalização deste estimador foi dada por Bibby (1972), que é:

$$b(K) = (X'X + K)^{-1}X'Y, \text{ sendo } K \text{ uma matriz.}$$

Usando esta técnica pode ser melhorado a estimativa do vetor de parâmetros, no sentido de diminuir o erro médio quadrático de mínimos quadrados simples para um k positivo, quando as variáveis explicativas do modelo estão correlacionadas.

2.2.3. Estimação Homogênea Não-tendenciosa.

Um estimador homogêneo é não-tendencioso se e somente se

$$E(b) = B$$

Como o estimador homogêneo é $b = C'Y$ e $E(b) = C'XB$.

$$\text{Então, } C'XB = B \implies (C'X - I) = 0$$

Substituindo em (2.2.6),

$$R(b) = \sigma^2 \text{tr}(AC'WC) \quad (2.2.11)$$

Adicionando a restrição imposta $C'X = 1$, o valor ótimo de C é a solução do problema

$$\min_C \text{tr}(AC'WC)$$

$$\text{sujeito a } C'X = 1$$

Usando a técnica de Lagrange, obtém-se

$$L = \text{tr}(AC'WC) - 2\lambda(C'X - 1)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = C'X - 1 = 0 \quad (a)$$

$$\frac{dL}{dC'} = 2AC'W - 2\lambda X' = 0 \quad (b)$$

$$\text{De (b), } AC'W = \lambda X'$$

$$C' = \lambda A^{-1}X'W^{-1}$$

$$\text{e de (a), } C'X = \lambda A^{-1}X'W^{-1}X = 1$$

$$1 = \lambda (X'W^{-1}X)^{-1}$$

Voltando a (b),

$$c' = \lambda A^{-1}A(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}$$

$$\Rightarrow c'_3 = (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}$$

Sendo o estimador de B ,

$$b_3 = c'_3 Y = (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y \quad (1.3.4)$$

Que é o estimador de mínimos quadrados generalizados de B .

Usando o fato que b_3 foi obtido pela adição de restrições sobre aquelas as quais obteve-se b_2 , conclui-se que

$$R(b_1) \leq R(b_2) \leq R(b_3)$$

(Est. Homogêneo não-tendencioso \subset Est. Homogêneo \subset Est. Heterogêneo)

2.3. Predição Clássica

Com o objetivo de frisar o que foi dito no Capítulo 1 sobre a diferença entre predição e estimação, podemos dizer que o aspecto importante de predição é a razão pela qual difere da estimação é que "pre-

dição refere-se à inferência de um evento aleatório, enquanto a estimação à de um parâmetro fixo".

Suponha, agora, que temos n observações geradas pelo modelo

$$Y = XB + E, \quad E(E) = 0$$

$$E(EE') = \sigma^2 W \quad (2.3.1)$$

sendo W conhecida, positiva definida, simétrica.

Suponha também que temos a matriz X_* , a qual consiste de observações adicionais do mesmo conjunto de variáveis explicativas, e queremos prever o vetor de variáveis dependentes Y_* , gerado por:

$$Y_* = X_*B + E_*, \quad E(E_*) = 0$$

$$E(E_*E_*') = \sigma^2 W_* \quad (2.3.2)$$

onde:

B é o mesmo vetor do modelo (2.3.1)

W_* conhecida, simétrica, positiva definida.

Uma outra suposição é: $E(EE_*') = \sigma^2 W_0$

onde W_0 é conhecida.

Obs.: A matriz W_0 não é necessariamente da mesma ordem que a W_* , usualmente esta última é muito menor.

O que desejamos é prever Y_* , e uma aproximação que parece óbvia é usarmos o estimador de mínimos quadrados ponderados de B , e daí o preditor clássico deve ser o estimador de mínimos quadrados da $E(Y_*)$; isto é,

$$p = \widehat{E(Y_*)} = X_*b = X_*(X'WX)^{-1}X'W^{-1}Y =$$

$$= X_*B + X_*(X'WX)^{-1}X'W^{-1}X'W^{-1}E$$

$$\text{e } E(p) = X_*B = E(Y_*)$$

$$\text{Logo, } E(p) - E(Y_*) = E(p - Y_*) = 0$$

Sendo assim, p é um estimador não-tendencioso para $E(Y_*)$.

Obs.: Devemos ressaltar que $E(p)$ não pode ser igual a Y_* , já que Y_* é uma variável aleatória.

A matriz de variância e covariância de p é definida por:

$$V(p) = E\{[p - E(p)][p - E(p)]'\}$$

$$\begin{aligned} p - E(p) &= X_*B + X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}E - X_*B \\ &= X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}E \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V(p) &= E(X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}EE'W^{-1}X(X'W^{-1}X)^{-1}X'_*) = \\ &= s^2X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'_* \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Quando $W = I$, $V(p) = s^2X_*(X'X)^{-1}X'_*$.

Sendo a variância do i -ésimo elemento de p , igual a

$$V(p_i) = s^2x'_{i*}(X'X)^{-1}x_{i*}$$

onde x_{i*} é a i -ésima linha de X_* .

Para saber-se o quão ruim está a predição é necessário saber o valor máximo desta variância; ou seja, resolver um problema de maximização de formas quadráticas, o qual é resolvido pelo quociente de Rayleigh, que nos diz:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{x'Ax}{x'x} = \sup_{\|y\|=1} y'Ay, \quad y = \frac{x}{\sqrt{x'x}} \quad \text{e } A \text{ é positiva definida.}$$

é dado pelo autovetor de A associado ao maior autovalor.

Utilizando este resultado ao problema em estudo, chega-se à conclusão que, dado o valor de x_{i*} , a variância do i -ésimo elemento de p será máxima quando esta for igual ao autovetor de $(X'X)^{-1}$ associado ao maior autovalor, e este, por sua vez, é igual ao autovetor de $(X'X)$ associado ao menor autovalor.

Resumindo, pode ser dito que a predição feita é pior, no sentido de ter uma grande variância, quando esta está na mesma direção dos elementos de X que tem variação mínima (autovalor pequeno).

Mas, a variância de p é uma medida do erro médio quadrático de p em relação a sua média X_*B , só que a medida mais utilizada para a adequabilidade de p é dada pela matriz do erro médio quadrático de predição (EMQP).

Definição: Erro Médio Quadrático de Predição (EMQP).

$$\begin{aligned} \text{EMQP} &= E([p - Y_*][p - Y_*]') \quad (2.3.4) \\ &= E([(p - E(Y_*)) - (Y_* - E(Y_*))][(p - E(Y_*)) - (Y_* - E(Y_*))]') \\ &= E([p - E(Y_*)][p - E(Y_*)]') + E([Y_* - X_*B][Y_* - X_*B]') - \\ &\quad - E([p - X_*B][Y_* - X_*B]') - E([Y_* - X_*B]'[p - X_*B]) = \\ &= V(p) + V(Y_*) - C - C' \end{aligned}$$

onde $C = E\{[p - X_*B][Y_* - X_*B]'\}$

Se E_* não está correlacionado com E , então C é uma matriz nula, já que

$$\begin{aligned} p - X_*B &= X_*B + X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}E - X_*B \\ &= X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \quad Y_* - X_*B &= X_*B + E_* - X_*B \\ &= E_* \end{aligned}$$

$$\text{Então, } C = E\{X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}EE'_*\} = 0$$

Logo, o EMQP = $V(p) + V(Y_*)$

2.4. Predição Ótima

Pode-se dizer que a aproximação clássica não está concernente com a predição de Y_* , e sim com a estimação do seu valor esperado, X_*B , consequentemente a não-tendenciosidade definida anteriormente não tem sentido.

Então, partindo deste princípio, será examinada a predição do próprio Y_* , olhando especialmente para a estrutura de correlação entre E e E_* , com o objetivo de melhorar o preditor clássico.

2.4.1. Predição Heterogênea

Considere um preditor heterogêneo linear, que tem a seguinte estrutura:

$$P = G'Y + F \quad (2.4.1)$$

E a função de risco quadrática

$$R(P) = E\{[P - Y_*]'A[P - Y_*]\} \quad (2.4.2)$$

onde A é uma matriz positiva definida e deve ser escolhida de tal forma que reflita circunstâncias particulares de cada problema.

Deseja-se encontrar P que tenha $R(P)$ mínima.

Como,

$$P - Y_* = G'Y + F - Y_*$$

$$\begin{aligned}
 &= G'XB + G'E + F - X_*B - E_* \\
 &= (G'X - X_*')B + F + (G'E - E_*)
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 R(P) &= R(G, F) = E\{[P - Y_*]'A[P - Y_*]\} \\
 &= E\{[(G'X - X_*')B + F + (G'E - E_*)]'A[(G'X - X_*')B + F + (G'E - E_*)]\} \\
 &= E\{[(G'X - X_*')B + F]'A[(G'X - X_*')B + F] + \\
 &\quad + 2E\{[(G'X - X_*')B + F]'A[(G'E - E_*)]\} + E\{[(G'E - E_*)]'A[(G'E - E_*)]\}\} \\
 &= \text{tr}A[(G'X - X_*')B + F][(G'X - X_*')B + F]' + \\
 &\quad + 2\text{tr}AE\{[(G'E - E_*)][(G'X - X_*')B + F]'\} + \text{tr}AE\{[(G'E - E_*)][(G'E - E_*)]'\}
 \end{aligned}$$

$$R(P) = \text{tr}A[(G'X - X_*')B + F][(G'X - X_*')B + F]' + s^2\text{tr}A(G'WG - 2G'W_0 + W_*) \quad (2.4.3)$$

Como só o primeiro termo envolve F, o valor ótimo de F é aquele que iguala a zero este termo, então

$$F = (X_* - G'X)B$$

Para achar o valor ótimo de G, deve ser diferenciado o último termo em relação a G, o que resulta em

$$\frac{dR(P)}{dG} = 2AG'W - 2AW'_0$$

$$\text{Igualando a zero, } G'W = W'_0$$

$$\Rightarrow G' = W'_0W^{-1} = g_1'$$

Então,

$$f = (X_* - W'_0W^{-1}X)B = f_1$$

Sendo o preditor heterogêneo R-ótimo de Y_* igual a

$$p_1 = W'_0W^{-1}Y + (X_* - W'_0W^{-1}X)B$$

$$p_1 = X_*B + W'_0W^{-1}(Y - XB) \quad (2.4.4)$$

$$\text{com } E(p_1) = X_*B$$

$$\text{e } E(p_1 - Y_*) = E(X_*B + W'_0W^{-1}(Y - XB) - X_*B - E_*) = 0$$

E isto significa que p_1 é um estimador não-tendencioso no sentido dado na seção anterior.

Tendo risco igual a

$$R(p_1) = s^2\text{tr}A(g'_1Wg_1 - 2g'_1W_0 + W_*)$$

$$= s^2 \text{tr} A (W'_0 W^{-1} W W^{-1} W_0 - 2 W'_0 W^{-1} W_0 + W_X)$$

$$R(p_1) = s^2 \text{tr} A (W_X - W'_0 W^{-1} W_0) \quad (2.4.5)$$

Pode-se observar que o preditor p_1 , depende do vetor desconhecido B o que o torna impraticável. Contudo várias aproximações são propostas, como, por exemplo, estimar B pelo método de mínimos quadrados ponderados ou um outro procedimento de estimação que dê um estimador arbitrário b_0 .

Sendo assim,

$$p_1(b_0) = X_X b_0 + W'_0 W^{-1} (Y - X b_0)$$

E se $b_0 = b$ (estimador de mínimos quadrados ponderados), temos

$$p_1(b) = X_X b + W'_0 W^{-1} (Y - X b) \quad (2.4.6)$$

Esta equação pode ser interpretada como o preditor clássico ($p = X_X b$), ajustado por um termo dependente dos resíduos amostrais ($Y - X b$) e da covariância entre os erros dessas aproximações e os últimos erros ($s^2 W_0$), estimando assim os erros preditos (E_X).

Foi visto na literatura que o preditor obtido aqui é uma generalização do melhor preditor linear não-tendencioso (BLUP) desenvolvido por Goldberger (1962) quando este estava examinando um caso especial do problema, onde um único valor da variável dependente deveria ser predita, tendo ele partido da minimização do erro médio quadrático de predição sujeito à condição de não-tendenciosidade.

2.4.2. Predição Homogênea

Este é o caso quando consideramos $F = 0$.

A função de risco torna-se igual a

$$R(P) = R(G) = B'(G'X - X_X)' A (G'X - X_X) B + s^2 \text{tr} A (G'WG + W_X - 2G'W_0) \quad (2.4.7)$$

Que foi obtida pela substituição de $F = 0$ na equação (2.4.3).

Para a obtenção do valor ótimo de G , diferencia-se $R(G)$ e iguala-se a zero, dando

$$\frac{dR(G)}{dG'} = 2AG'XBB'X' - 2AX_XBB'X' + 2s^2AG'W - 2s^2AW'_0 = 0$$

$$G'(XBB'X' + s^2W) = X_XBB'X' + s^2W'_0$$

$$\Rightarrow g'_2 = (X_XBB'X' + s^2W'_0)(XBB'X' + s^2W)^{-1}$$

O que conduz ao preditor homogêneo R-ótimo, $p_2 = g'_2 Y$.

Mas este é um preditor impraticável, pois depende do vetor desconhecido B.

2.4.3. Predição Homogênea Não-tendenciosa.

Se ao preditor homogêneo $P = G'Y$ adicionar-se a condição de não-tendenciosidade

$$E[P - Y_*] = 0 = (G'X - X_*)B, \quad \forall B$$

têm-se um preditor homogêneo não-tendencioso.

Sendo a condição de não-tendenciosidade satisfeita se e somente se

$$G'X = X_*$$

E a função de risco será dada pela substituição desta condição na expressão (2.4.7); ou seja, na função de risco da predição homogênea, o que leva a

$$R(G) = s^2 \text{tr}A(G'WG + W_* - 2G'W_0) \quad (2.4.8)$$

Esta função é minimizada sujeito a condição $G'X = X_*$, quando é inserido um conjunto de multiplicadores de Lagrange, l , e considera-se o seguinte problema

$$\min_G (R(G) - 2l(G'X - X_*))$$

logo,

$$L = s^2 \text{tr}A(G'WG + W_* - 2G'W_0) - 2lG'X + 2lX_*$$

$$\frac{dL}{dG'} = 2s^2AG'W - 2s^2AW'_0 - 2lX' = 0$$

$$\frac{dL}{dl} = -2G'X + 2X_* = 0$$

levando a

$$AG'W = AW'_0 + s^{-2}lX' \quad (a)$$

$$X_* = G'X \quad (b)$$

De (a), obtém-se

$$G' = W'_0W^{-1} + s^{-2}A^{-1}lX'W^{-1}$$

Substituindo em (b)

$$X_{\star} = W'OW^{-1}X + s^{-2}A^{-1}IX'W^{-1}X$$

$$X_{\star} - W'OW^{-1}X = s^{-2}A^{-1}IX'W^{-1}X$$

$$I = s^2A(X_{\star} - W'OW^{-1}X)(X'W^{-1}X)^{-1}$$

Voltando ao resultado de (a),

$$G' = W'OW^{-1} + (X_{\star} - W'OW^{-1}X)(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}$$

$$\Rightarrow g'_3 = W'OW^{-1}(I - X(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}) + X_{\star}(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}$$

sendo,

$$p_3 = g'_3Y = X_{\star}(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y + W'OW^{-1}(I - X(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1})Y$$

$$p_3 = X_{\star}b + W'OW^{-1}(Y - Xb) \quad (2.4.6)$$

e b o estimador de mínimos quadrados ponderados.

A função de risco é:

$$R(p_3) = R(p_1) + s^2 \text{tr}A(X_{\star} - W'OW^{-1}X)(X'W^{-1}X)^{-1}(X_{\star} - W'OW^{-1}X)' \quad (2.4.9)$$

onde $R(p_1)$ é a expressão (2.4.5).

O erro médio quadrático de predição é:

$$EMQP(p_3) = E[(p_3 - Y_{\star})(p_3 - Y_{\star})']$$

$$p_3 - Y_{\star} = [X_{\star}(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1} + W'OW^{-1} - W'OW^{-1}X(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}]Y - Y_{\star}$$

$$EMQP(p_3) = X_{\star}(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}W_0 - 2X_{\star}(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}W_0 - W'OW^{-1}W_0 + W'OW^{-1}X(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}W_0 + W_{\star}$$

$$EMQP(p_3) = [X_{\star} - W'OW^{-1}X](X'W^{-1}X)^{-1}[X_{\star} - W'OW^{-1}X]' + W_{\star} - W'OW^{-1}W_0 \quad (2.4.10)$$

Nota 02: As funções de risco seguem a seguinte relação

$$R(p_1) \leq R(p_2) \leq R(p_3)$$

Pode-se explicar esta relação pelo fato que o preditor p_3 foi obtido adicionando-se a condição de não-tendenciosidade na classe dos preditores homogêneos p_2 , e estes por sua vez já são um caso particular dos preditores heterogêneos p_1 .

(Pred. Homogêneo não-tend. \subset Pred. Homogêneo \subset Pred. Heterogêneo)

2.5. Ganho na Eficiência

Os preditores clássicos ótimos são obtidos dos estimadores R-ótimo, logo

$$\underline{p}_1 = X_* b_1, \quad b_1 = B \quad (2.2.4)$$

$$\underline{p}_2 = X_* b_2 = X_* c'_2 Y, \quad c'_2 = BB'X'(XBB'X'+s^2W)^{-1} \quad (2.2.7)$$

$$\underline{p}_3 = X_* b_3 = X_* b, \quad b = (X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y \quad (2.2.12)$$

O ganho na eficiência é avaliado através da função de risco, portanto sentimos a necessidade de calcular a função de risco dos preditores clássicos ótimos, que é definida por:

$$R(\underline{p}) = E([\underline{p}-Y_*]'A[\underline{p}-Y_*])$$

sendo,

$$\underline{p}_1 - Y_* = X_* B - X_* B - E_* = E_*$$

$$\Rightarrow R(\underline{p}_1) = s^2 \text{tr}AW_* \quad (2.5.1)$$

$$\underline{p}_2 - Y_* = X_* c'_2 XB + X_* c'_2 E - X_* B - E_*$$

$$\Rightarrow R(\underline{p}_2) = \text{tr}A[X_*(c'_2 X - I)BB'(c'_2 X - I)'X'_*] + s^2 \text{tr}A[X_* c'_2 W c_2 X'_*] + s^2 \text{tr}AW_* - 2s^2 \text{tr}A[X_* c'_2 W_0]$$

$$R(\underline{p}_2) = R(\underline{p}_1) + \text{tr}A[X_* \text{vcio}(b_2)][X_* \text{vcio}(b_2)]' + \text{tr}A[X_* \text{var}(b_2)X'_*] - 2s^2 \text{tr}A[X_* c'_2 W_0] \quad (2.5.2)$$

$$\underline{p}_3 - Y_* = X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y - Y_*$$

$$\Rightarrow R(\underline{p}_3) = s^2 \text{tr}A[X_*(X'W^{-1}X)^{-1}X'_*] + s^2 \text{tr}AW_* - 2s^2 \text{tr}A[X_*(X'W^{-1}X)^{-1}W^{-1}W_0]$$

$$R(\underline{p}_3) = R(\underline{p}_1) + \text{tr}A[X_* \text{var}(b_3)X'_*] - 2s^2 \text{tr}A[X_*(X'W^{-1}X)^{-1}W^{-1}W_0] \quad (2.5.3)$$

Com o objetivo de fazermos uma comparação entre os preditores clássicos ótimos e os R-ótimo, montamos as seguintes tabelas.

Tabela 01: Preditores R-ótimo e Preditores Clássicos Ótimos

Preditores	R-ótimo	Clássicos Ótimos
Heterogêneos	$X_*B + W'_0W^{-1}(Y - XB)$	X_*B
Homogêneos	g'_2Y	$X_*c'_2Y$
Homo. Não-tend.	$X_*b + W'_0W^{-1}(Y - Xb)$	X_*b

$$\text{onde: } b = (X'_0W^{-1}X)^{-1}X'_0W^{-1}Y$$

$$c'_2 = BB'X'(XBB'X' + s^2W)^{-1}$$

$$g'_2 = (X_*BB'X' + s^2W'_0)(XBB'X' + s^2W)^{-1}$$

$$= X_*c'_2 + s^2W'_0(XBB'X' + s^2W)^{-1}$$

Tabela 02: Função de Risco dos Preditores R-ótimo e dos Preditores Clássicos Ótimos.

Preditores	R-ótimo	Clássicos Ótimos
Heterogêneos	$s^2\text{tr}A(W_* - W'_0W^{-1}W_0) = R(p_1)$	$s^2\text{tr}AW_* = R(\underline{p}_1)$
Homogêneos	$R(p_2)$	$R(\underline{p}_2)$
Homo. Não-tend.	$R(p_3)$	$R(\underline{p}_3)$

$$\text{onde: } R(p_2) = s^2\text{tr}A(g'_2Wg_2 - W_* - 2g'_2W_0) + \text{tr}A(g'_2X - X_*)BB'(g'_2X - X_*)'$$

$$R(\underline{p}_2) = R(\underline{p}_1) + \text{tr}AX_*\text{Var}(b_2)X'_* + \text{tr}A[X_*(\text{vício}(b_2))] [(\text{vício}(b_2)'X'_*) - 2s^2\text{tr}AX_*c'_2W_0]$$

$$R(p_3) = R(p_1) + s^2\text{tr}A(X_* - W'_0W^{-1}X)(X'_0W^{-1}X)^{-1}(X_* - W'_0W^{-1}X)'$$

$$R(\underline{p}_3) = R(\underline{p}_1) + \text{tr}AX_*\text{Var}(b_3)X'_* - 2s^2\text{tr}AX_*(X'_0W^{-1}X)^{-1}X'_0W^{-1}W_0$$

Agora, com a ajuda destas tabelas, pode-se fazer a seguinte análise:

- i. Quando $W_0 = 0$, os preditores R-ótimo são iguais aos preditores clássicos ótimos, e conseqüentemente suas funções riscos.
- ii. Quando $W_0 \neq 0$, foi investigada a eficiência ao usar-se as informações em W_0 .

a. Preditor Heterogêneo.

$$\begin{aligned} R(\tilde{p}_1) - R(p_1) &= s^2 \text{tr} A W' O W^{-1} W_0 \\ &= E(E' W^{-1} W_0 A W' O W^{-1} E) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(\tilde{p}_1) \geq R(p_1)$$

b. Preditor Homogêneo.

$$R(\tilde{p}_2) - R(p_2) = s^2 \text{tr} A W' O (s^{-2} X B B' X' + W)^{-1} W_0 \geq 0$$

$$\Rightarrow R(\tilde{p}_2) \geq R(p_2)$$

c. Preditor Homogêneo Não-tendencioso.

$$\begin{aligned} R(\tilde{p}_3) - R(p_3) &= s^2 \text{tr} A W' O W^{-1} W_0 - s^2 \text{tr} A W' O W^{-1} X (X' W^{-1} X)^{-1} X' W^{-1} W_0 \\ &= s^2 \text{tr} A W' O [W^{-1} - W^{-1} X (X' W^{-1} X)^{-1} X' W^{-1}] W_0 \\ &= E(\tilde{u}' \tilde{A} \tilde{u}) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(\tilde{p}_3) \geq R(p_3)$$

onde $\tilde{u}' = v' (N' - N' X (X' W^{-1} X)^{-1} X' W^{-1} W_0)$, $N N' = W^{-1}$

e v é uma variável aleatória com $E(v v') = s^2 I$.

Com estes resultados, pode-se concluir que os preditores R-ótimo, inclusive o BLUP que é o preditor R-ótimo homogêneo não-tendencioso, são melhores que os preditores clássicos ótimos, no sentido de terem as funções riscos menores; isto é, ganha-se eficiência quando é usado as informações contidas em W_0 , o que já era esperado.

2.6. Predição Ótima Homogênea Não-tendenciosa do Modelo Misto.

Aqui, foi procurada a predição dos efeitos aleatórios do modelo misto, através da minimização da função risco quadrática, dentro da classe de preditores homogêneos não-tendenciosos.

Do modelo misto

$$Y = X B + Z U + E, \quad E(E) = E(U) = 0$$

$$E(UU') = D$$

$$E(E'E') = R$$

$$E(UE') = 0$$

$$\text{Var}(Y) = V = ZDZ' + R$$

Pode-se escrever

$$U = -Z^{-1}XB + Z^{-1}Y - Z^{-1}E$$

$$U = -Z^{-1}XB + F$$

$$\text{sendo } F = Z^{-1}(Y-E), \quad E(F) = Z^{-1}XB$$

$$E(FF') = D$$

$$E(YF') = ZD$$

Considere o preditor homogêneo para U

$$u = C'Y$$

Para que este preditor satisfaça a condição de não-tendenciosidade é necessário que

$$E(u-U) = 0$$

$$= E(C'Y-U) = C'XB$$

$$\Rightarrow C'XB = 0, \quad \forall B \Rightarrow C'X = 0$$

A função de risco quadrática é dada por:

$$R(u) = E([u-U]'A[u-U])$$

$$= \text{tr}AE([u-U][u-U])$$

$$\text{onde } u-U = C'Y+Z^{-1}XB-F$$

Logo,

$$R(u) = \text{tr}AE([C'Y+Z^{-1}XB-F][C'Y+Z^{-1}XB-F]')$$

$$= \text{tr}A[C'VC+2C'XBB'X'(Z^{-1})'-2C'ZD-Z^{-1}XBB'X'(Z^{-1})'+D]$$

Para minimizar a função risco sujeita à condição $C'X = 0$, usa-se a técnica de Lagrange.

$$L = \text{tr}A[C'VC+2C'XBB'X'(Z^{-1})'-2C'ZD-Z^{-1}XBB'X'(Z^{-1})'+D]-21C'X$$

$$\frac{dL}{dC'} = 2AC'V + 2AZ^{-1}XBB'X' - 2ADZ' - 2IX' = 0 \quad (a)$$

$$\frac{dL}{d2l} = C'X = 0 \quad (b)$$

De (a),

$$AC'V = ADZ' + IX' - AZ^{-1}XBB'X'$$

$$C' = DZ'V^{-1} + A^{-1}IX'V^{-1} - Z^{-1}XBB'X'V^{-1}$$

Substituindo em (b),

$$C'X = DZ'V^{-1}X + A^{-1}IX'V^{-1}X - Z^{-1}XBB'X'V^{-1}X = 0$$

$$I = AZ^{-1}XBB' - ADZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}$$

Voltando ao resultado de (a),

$$C' = DZ'V^{-1} + Z^{-1}XBB'X'V^{-1} - DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1} - Z^{-1}XBB'X'V^{-1}$$

$$C' = DZ'V^{-1} - DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}$$

Então,

$$u = C'Y = DZ'V^{-1}Y - DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$$

$$u = DZ'V^{-1}(Y - Xb) \quad (1.3.8)$$

onde $b = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$

Este mesmo resultado pode ser obtido quando se observa a relação existente entre a predição do modelo fixo e o modelo misto, que é o que foi feito.

Por um lado tem-se o modelo (A):

$$Y = XB + E, \quad E(E) = 0$$

$$E(E E') = s^2 W = E(Y Y')$$

$$Y_x = X_x B + E_x, \quad E(E_x) = 0$$

$$E(E_x E_x') = s^2 W_x = E(Y_x Y_x')$$

$$E(E E_x') = s^2 W_0 = E(Y Y_x')$$

E o preditor de Y_x é $p = X_x b + W_0' W^{-1} (Y - Xb)$ ($b = (X' W^{-1} X)^{-1} X' W^{-1} Y$)

Por outro lado, tem-se o modelo (B):

$$Y = XB + ZU + E, \quad E(E) = E(U) = 0$$

$$\begin{aligned}
 E(EE') &= R \\
 E(UU') &= D \\
 E(UE') &= 0 \\
 E(Y Y') &= V = ZDZ' + R
 \end{aligned}$$

Deseja-se estimar U .

Tendo os dois modelos juntos, observam-se facilmente as seguintes relações.

<u>Modelo (A)</u>		<u>Modelo (B)</u>
$E(Y Y') = s^2 W$	\Leftrightarrow	$E(Y Y') = V$
$E(Y_* Y'_*) = s^2 W_*$	\Leftrightarrow	$E(U U') = D$
$E(Y Y'_*) = s^2 W_0$	\Leftrightarrow	$E(Y U') = ZD$
		$X_* = 0$

Logo, como o preditor do modelo (A) é

$$p = X_* b + W'_0 W^{-1} (Y - Xb)$$

o preditor do modelo (B) será

$$u = DZ' V^{-1} (Y - Xb) \quad (b = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y) \quad (1.3.8)$$

Assim como,

$$EMQP(p) = [X_* - W'_0 W^{-1} X] (X' W^{-1} X)^{-1} [X_* - W'_0 W^{-1} X]' + W_* - W'_0 W^{-1} W_0 \quad (2.4.10)$$

dando

$$EMQP(u) = [DZ' V^{-1} X] (X' V^{-1} X)^{-1} [DZ' V^{-1} X]' + D - DZ' V^{-1} ZD \quad (1.3.12)$$

2.7. Kriging

"Kriging" trata-se de uma técnica de predição, sendo esta técnica voltada para a predição de uma variável que é observada em diferentes pontos do plano, do espaço tridimensional, ou em geral, no R^n para qualquer n , conforme o espaço em que estejamos trabalhando; ou seja, o "Kriging" é um procedimento estatístico de predição usado em modelos envolvendo variáveis indexadas espacialmente.

Escrevendo o modelo,

$$z(x) = f'(x)B + e(x) \quad (2.7.1)$$

onde $z(x)$ é a variável observada no ponto x .

$f'(x)$ é o vetor das funções de x .

B é o vetor dos parâmetros, fixo.

$e(x)$ é a perturbação estocástica, no ponto x , de média zero.

Quando se dispõe de observações em N pontos, escreve-se o modelo na forma matricial

$$Z = FB + E \quad (2.7.2)$$

onde Z : vetor ($N \times 1$) de observações cuja i -ésima linha é $z(x_i)$.

F : matriz ($N \times p$) cuja i -ésima linha $f'(x_i)$.

E : vetor ($N \times 1$) de perturbação estocástica.

$K(x, y)$ é a função de covariância entre os valores de z em dois pontos x e y quaisquer, conhecida.

$k(x)$ é um vetor ($N \times 1$) cuja i -ésima coordenada é a covariância entre $z(x)$ e $z(x_i)$ ($K(x, x_i)$)

$m(x) = z(x) - e(x)$ é a média de z no ponto x .

Teorema 2.7.1: O preditor linear de variância mínima entre os não-ten-
denciosos, de $z(x)$, quando a média de z no ponto x é desconhecida, é

$$z_e(x) = f'(x)b + k'(x)K^{-1}(Z - Fb) \quad (2.7.3)$$

$$\text{com } \text{Var}(z_e(x)) = \text{Var}(z(x)) - k'(x)K^{-1}k(x) + [f'(x) - k'(x)K^{-1}F](F'K^{-1}F)^{-1} \times [f'(x) - k'(x)K^{-1}F]' \quad (2.7.4)$$

onde $b = (F'K^{-1}F)^{-1}F'K^{-1}Z$ (estimador de mínimos quadrados ponderados)

$$\text{com } \text{Var}(b) = (F'K^{-1}F)^{-1}$$

Dem.: Considere um preditor linear qualquer na forma $z_e(x) + AZ$

Substituindo Z por $FB + E$,

$$b = (F'K^{-1}F)^{-1}F'K^{-1}E + B$$

$$e \quad z_e(x) + AZ = f'(x)B + f'(x)(F'K^{-1}F)^{-1}F'K^{-1}E + k'(x)K^{-1}E - k'(x)K^{-1}F(F'K^{-1}F)^{-1}F'K^{-1}E + AE + AFB$$

Como $E(E) = 0$, este preditor é não-tendencioso se a última parcela é zero; ou seja, se $AF = 0$.

O Erro Médio Quadrático de Predição é:

$$EMQP = E\{[z_e(x) + AZ - z(x)][z_e(x) + AZ - z(x)]'\}$$

$$\text{Como } z_e(x) + AZ - z(x) = f'(x)(F'K^{-1}F)^{-1}F'K^{-1}E + k'(x)K^{-1}E - k'(x)K^{-1}F(F'K^{-1}F)^{-1}F'K^{-1}E + AE - e(x)$$

Então o,

$$EMQP = AKA' + \text{Var}(z(x)) - k'(x)K^{-1}k(x) + [f'(x) - k'(x)K^{-1}F](F'K^{-1}F)^{-1} \times [f'(x) - k'(x)K^{-1}F]'$$

com $\text{Var}(z(x)) = E\{[e(x)]^2\}$

Como K é uma matriz positiva semi-definida, então $AKA' \geq 0$, logo o EMQP é mínimo quando $A = 0$, caso em que o preditor é $z_e(x)$ e $EMQP = \text{Var}(z_e(x))$.

Observando a expressão (2.7.3), pode-se dizer que o preditor obtido é a soma da estimativa da média de $z(x)$ com uma ponderação das estimativas dos erros, ponderação esta dada pela covariância entre as observações nos pontos x e x_1 .

Voltando a expressão do BLUP do modelo fixo (2.4.6), $p = X_*b + W'_0W^{-1}x_*(y - Xb)$, observa-se que aqui seria obtido o mesmo resultado, se $X_* = f'(x)$, $W_0 = k(x)$ e $W = K$, só que este último preditor partiu de idéias e necessidades diferentes, pois onde tinha a covariância entre os erros das observações com os erros das observações adicionais, agora têm-se a covariância entre as observações com a observação no ponto em que deseja-se predizer, e onde tinha a covariância dos erros das observações, agora temos a covariância das observações nos diversos pontos x_i e x_j .

2.8. Referências Bibliográficas

- [1] Bibby, J. and Toutenburg, H. Prediction and Improved Estimation in Linear Models. New York, Wiley, 1977.
- [2] Goldenberg, A.S. Best Linear Unbiased Prediction in Generalized Linear Regression Model. Journal of the American Statistical Association 57:369-375, 1962.
- [3] Pereira, B.B. e Sant'Anna, A.P. Entendendo Krigagem. Rio de Janeiro, UFRJ, 1984. (Ata do 6º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística p.148-155).

C A P I T U L O 3

F I L T R O D E K A L M A N

Neste capítulo será visto o Filtro de Kalman como um problema de inferência Bayesiana, o modelo no qual esta técnica é aplicada e suas implicações para predição.

3.1. Introdução

O Filtro de Kalman é uma técnica de estimação recursiva para modelos aleatórios.

Frequentemente, os dados não são obtidos ao mesmo tempo, logo a estimativa dos parâmetros do modelo através da estimação de mínimos quadrados torna-se ineficiente, pois ou acumula-se os dados até o final do processo, ou faz-se a estimação a cada obtenção de novos dados, o que fornece uma grande quantidade de cálculos e necessidade de espaço para armazenamento.

O objetivo da estimação recursiva é evitar muitos cálculos e a necessidade de estocagem dos dados, pois nesta estimação, só tem necessidade de reter, dos cálculos anteriores, alguns itens essenciais para os cálculos futuros.

O desenvolvimento original do Filtro de Kalman foi motivado pela característica de atualização, partindo da teoria de mínimos quadrados. Aqui será mostrado um desenvolvimento Bayesiano que oferece o mesmo resultado, com a vantagem de estarmos fazendo uma inferência do parâmetro do modelo através de uma distribuição de probabilidade.

Os grandes e primeiros usuários desta técnica são os engenheiros, principalmente nas áreas em que são processados sinais, tais como, a rota de uma aeronave, sonar submarino, assim como o controle estatístico de qualidade. Atualmente, é que está começando a ser usada por outras áreas, como em monitorização de pacientes na medicina, em análises do tempo de vida do experimento dose-resposta, reatores nucleares e previsões a curto prazo.

3.2. Modelo Linear Dinâmico.

O modelo linear dinâmico é um sistema de equações especificando:

- a. Como as observações são estocasticamente dependentes dos parâmetros
- b. Como os parâmetros evoluem no tempo, tanto como consequência do dinamismo do próprio processo como de choques aleatórios.

O modelo é especificado em termos discreto, em intervalos de tempo igualmente espaçados, embora possa ser estendido para observações em intervalos desiguais, ou para modelos que tenham valores perdidos.

O modelo linear dinâmico é definido por:

$$\text{Equação de Observação : } Y_t = Z_t U_t + v_t, \quad v_t \sim N(0, V_t) \quad (3.2.1)$$

$$\text{Equação do Sistema : } U_t = G_t U_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, W_t) \quad (3.2.2)$$

onde:

t : índice do tempo ($t=1, 2, \dots$).

Y_t : vetor ($m \times 1$) das observações feitas no tempo t .

$Z_t U_t$: contribuição para Y_t dos efeitos aleatórios no tempo t , sendo Z_t uma matriz ($m \times n$) conhecida no tempo t e U_t vetor ($n \times 1$) dos parâmetros no tempo t , chamado de Vetor de Estado ou Estado da Natureza.

G_t : matriz ($n \times n$) do sistema, conhecida no tempo t , dita Matriz de Transição.

V_t, W_t : variâncias conhecidas no tempo t .

v_t e w_t independentes.

A equação de observação (3.2.1) especifica a dependência estocástica da variável de observação pelos parâmetros desconhecidos.

A equação do sistema (3.2.2) é um processo auto-regressivo de primeira ordem multivariado, onde a matriz de transição G_t mostra como o estado da natureza U_t muda com o tempo, a qual é dada por profissionais da área em que está sendo desenvolvido o trabalho, sendo esta uma grande atratividade do Filtro de Kalman, já que este permite incluir o conhecimento do comportamento do sistema no modelo estatístico, sendo também esta a diferença para modelos lineares, já que os coeficientes da regressão que correspondem aos estados da natureza não mudam com o tempo, o que seria equivalente ao sistema de equação redundante $U_t = U_{t-1} = \dots = U_0$.

Obs.: Note que as relações (3.2.1) e (3.2.2) especificadas por Z_t e G_t podem ou não mudar com o tempo, também isto sendo verdade para as variâncias V_t e W_t .

3.3. Procedimento da Estimação Recursiva - O Filtro de Kalman.

O problema de estimação de U_t pode ser visto como um problema de alisamento, filtração ou predição, de acordo com o que se deseje.

Querendo estimar o valor de U no tempo anterior ao tempo dos dados em mãos, tem-se um problema de alisamento; no mesmo tempo ao dos dados, tem-se uma filtração; e quando se deseja estimar o valor de U para um tempo futuro, tem-se o que é chamado de predição.

Sendo o "Filtro de Kalman" um procedimento recursivo para inferir sobre o estado da natureza U_t , quando se tem os dados até o tempo t .

Então, tendo os dados $\underline{Y}_t = (Y_t, \dots, Y_1)$ pode-se fazer a inferência sobre U_t , através do teorema de Bayes, já que está disponível uma informação adicional dada pela equação do sistema, e não se deve desprezá-la.

O teorema de Bayes é dado por:

$$P(U_t/\underline{Y}_t) \propto P(Y_t/U_t, \underline{Y}_{t-1}) * P(U_t/\underline{Y}_{t-1}) \quad (3.3.1)$$

onde:

$P(U_t/\underline{Y}_t)$ é a distribuição a posteriori de U no tempo t .

$P(Y_t/U_t, \underline{Y}_{t-1})$ é a função de verossimilhança das observações.

$P(U_t/\underline{Y}_{t-1})$ é a distribuição a priori de U no tempo t .

Começemos a pensar no procedimento recursivo como tendo os dados até o tempo $t-1$; ou seja, $\underline{Y}_{t-1} = (Y_{t-1}, \dots, Y_1)$.

$$\text{Suposição: } (U_{t-1}/\underline{Y}_{t-1}) \sim N(u_{t-1}, S_{t-1}) \quad (3.3.2)$$

Obs.: Esta suposição sobre a distribuição a posteriori de U no tempo $t-1$ será provada no desenvolvimento a seguir.

Olhemos, agora, para o tempo t em dois estágios.

1º Estágio: Antes de observar Y_t ,

2º Estágio: Depois de observar Y_t .

Estágio 1: Antes de observar Y_t , a melhor estimativa para U_t é guiada pela equação do sistema

$$U_t = G_t U_{t-1} + w_t \quad (3.2.2)$$

Como $(U_{t-1}/Y_{t-1}) \sim N(u_{t-1}, S_{t-1})$, a distribuição a priori de U no tempo t , é dada por:

$$(U_t/\underline{Y}_{t-1}) \sim N(G_t u_{t-1}; R_t = G_t S_{t-1} G_t' + W_t) \quad (3.3.3)$$

Estágio 2: Para calcular a distribuição a posteriori de U no tempo t , quando se observa Y_t , é necessário conhecermos a função de verossimilhança; ou seja, $P(Y_t/U_t, \underline{Y}_{t-1})$, que é determinada pelo seguinte argumento.

Se e_t é o erro de predição de Y_t partindo do tempo $t-1$, então

$$\begin{aligned} e_t &= Y_t - y_t = Y_t - Z_t u_t = Y_t - Z_t G_t u_{t-1} \\ &= Z_t U_t + v_t - Z_t G_t u_{t-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e_t = Z_t (U_t - G_t u_{t-1}) + v_t \quad (3.3.4)$$

Como Z_t , G_t e u_{t-1} são conhecidos, observar Y_t é equivalente a observar e_t , logo pode-se re-escrever o teorema de Bayes (3.3.1) como

$$P(U_t/Y_t, \underline{Y}_{t-1}) = P(U_t/e_t, \underline{Y}_{t-1}) \cdot P(e_t/U_t, \underline{Y}_{t-1}) * P(U_t/\underline{Y}_{t-1}) \quad (3.3.5)$$

sendo $P(e_t/U_t, \underline{Y}_{t-1})$ a função de verossimilhança.

Como $v_t \sim N(0, V_t)$,
de (3.3.4), tem-se

$$(e_t/U_t, \underline{Y}_{t-1}) \sim N(Z_t (U_t - G_t u_{t-1}); V_t) \quad (3.3.6)$$

Sendo a distribuição a posteriori dada por:

$$\begin{aligned} P(U_t/e_t, \underline{Y}_{t-1}) &= \frac{P(e_t/U_t, \underline{Y}_{t-1}) * P(U_t/\underline{Y}_{t-1})}{\int_{\forall U_t} P(e_t/U_t, \underline{Y}_{t-1}) * P(U_t/\underline{Y}_{t-1}) dU_t} \\ &= \frac{P(e_t/U_t, \underline{Y}_{t-1}) * P(U_t/\underline{Y}_{t-1})}{\int_{\forall U_t} P(e_t, U_t/\underline{Y}_{t-1}) dU_t} \end{aligned}$$

Mas, pode-se evitar o exaustivo desenvolvimento desta expressão, usando alguns resultados da distribuição normal multivariada, que são:

$$\text{Se } \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N \left[\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \right] \quad (3.3.7)$$

sendo $m_1 + S_{12}S_{22}^{-1}(x_2 - m_2)$ a função de regressão de X_1 dado x_2 .
 e $S_{12}S_{22}^{-1}$ o coeficiente de mínimos quadrados desta regressão.

Proposição 3.3.1: Sempre que (3.3.8) acontece e $X_2 \sim N(m_2, S_{22})$
 então (3.3.7) acontecerá.

Em nosso caso, suprimindo a condicionante \underline{Y}_{t-1} e pondo

$$X_1 \Leftrightarrow e_t$$

$$X_2 \Leftrightarrow U_t$$

$$\text{Como } (U_t / \underline{Y}_{t-1}) \sim N(G_t u_{t-1}; R_t) \quad (3.3.3)$$

$$\text{e } X_2 \sim N(m_2; S_{22})$$

$$\text{Tem-se que } m_2 \Leftrightarrow G_t u_{t-1}$$

$$S_{22} \Leftrightarrow R_t$$

Comparando (3.3.8)

$$(X_1 / X_2 = x_2) \sim N(m_1 + S_{12}S_{22}^{-1}(x_2 - m_2); S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})$$

com (3.3.6)

$$(e_t / U_t, \underline{Y}_{t-1}) \sim N(Z_t(U_t - G_t U_{t-1}); V_t)$$

vê-se que

$$m_1 \Leftrightarrow 0$$

$$S_{12}R_t^{-1} \Leftrightarrow Z_t$$

$$S_{11} - S_{12}R_t^{-1}S_{21} \Leftrightarrow V_t$$

$$\Rightarrow S_{12} \Leftrightarrow Z_t R_t$$

$$S_{11} \Leftrightarrow V_t + Z_t R_t Z_t'$$

A partir destes resultados, pode-se construir a distribuição conjunta de U_t e e_t , condicionada a \underline{Y}_{t-1} , baseando na "Proposição 3.3.1.", que é dada por:

$$\begin{bmatrix} U_t \\ e_t \end{bmatrix} / \underline{Y}_{t-1} \sim N \begin{bmatrix} G_t u_{t-1} \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} R_t & R_t Z_t' \\ Z_t R_t & V_t + Z_t R_t Z_t' \end{bmatrix}$$

Com a distribuição conjunta em mãos, a distribuição a posteriori de U_t é dada por (3.3.8); isto é,

$$(U_t/e_t, Y_{t-1}) \sim N(G_t u_{t-1} + R_t Z'_t (V_t + Z_t R_t Z'_t)^{-1} e_t; R_t - R_t Z'_t (V_t + Z_t R_t Z'_t)^{-1} Z_t R_t) \quad (3.3.9)$$

E isto comprova que a suposição inicial (3.3.2) é verdadeira com

$$u_t = G_t u_{t-1} + R_t Z'_t (V_t + Z_t R_t Z'_t)^{-1} e_t$$

$$S_t = R_t - R_t Z'_t (V_t + Z_t R_t Z'_t)^{-1} Z_t R_t$$

Reunindo todos estes resultados, obtem-se o algoritmo abaixo:

- a. Parte-se do tempo zero, escolhendo a melhor idéia sobre a média u_0 e a variância S_0 de U_0 .
- b. Depois do tempo $t-1$, têm-se a distribuição a posteriori para U_{t-1} , que é dada por:

$$(U_{t-1}/Y_{t-1}) \sim N(u_{t-1}, S_{t-1}) \quad (3.3.2)$$

- c. Partindo desta, obtem-se a distribuição a priori para U_t , que é:

$$(U_t/Y_{t-1}) \sim N(G_t u_{t-1}; R_t = G_t S_{t-1} G'_t + U_t) \quad (3.3.3)$$

- d. Estimando a função de verossimilhança para

$$e_t = Y_t - Z_t G_t u_{t-1} \quad (3.3.4)$$

- e. Chega-se a distribuição a posteriori para U_t , dada por:

$$(U_t/e_t, Y_{t-1}) \sim N(G_t u_{t-1} + R_t Z'_t (V_t + Z_t R_t Z'_t)^{-1} e_t; R_t - R_t Z'_t (V_t + Z_t R_t Z'_t)^{-1} Z_t R_t) \quad (3.3.9)$$

- f. Volta-se para c. para executar o próximo ciclo do procedimento recursivo.

Observando a expressão (3.3.9), vê-se que a média da distribuição a posteriori de U no tempo t , que é a função de regressão de U_t dado e_t , é dada pela soma da média da distribuição a priori de U no tempo t , com um múltiplo do erro de previsão a um passo à frente (e_t), sendo este múltiplo, $R_t Z'_t (V_t + Z_t R_t Z'_t)^{-1}$ o coeficiente de mínimos quadrados da regressão, conhecido como a matriz de ganho de Kalman.

Então, pode-se ver o filtro de Kalman como um procedimento de atualização que consiste em formar uma estimativa preliminar do estado da natureza U_t , e adicionar uma correção para esta estimativa, correção esta dada por quão bem feita foi a predição para a próxima observação.

Também pode-se ver o filtro de Kalman como a evolução de uma série de funções de regressão de U_t dado e_t , nos tempos $0, 1, 2, \dots, t$. Cada uma destas regressões tendo interceptos e coeficientes diferentes, já que foi usada a estimação Bayesiana Sequencial, em que uma nova função de regressão (distribuição a posteriori) é calculada à medida que é obtida uma nova observação. No tempo zero, a regressão de U_1 dado e_1 é totalmente baseada nas suposições a priori, quando se obtém a primeira observação, o valor de e_1 é projetado em u_1 através da função de regressão baseada em u_1, Z_1, G_1, V_1 e W_1 . Esta é então usada para projetar e_2 em u_2 e assim por diante, continuando o processo Bayesiano iterativo priori/posteriori.

Depois desta análise, conclui-se que este é um processo de aprendizado que envolve todos os dados, em que só é necessário o armazenamento de u_{t-1}, S_{t-1} e do próximo valor observado, poupando assim muitos cálculos e a necessidade de armazenamento.

3.4. Predição

Do Filtro de Kalman obtém-se a distribuição a posteriori do parâmetro U_t , para qualquer $t=1, 2, \dots$. Desta informação pode-se inferir sobre a distribuição de observações futuras Y_{t+k} ($k=1, 2, \dots$), mas lembrando que estar-se-á trabalhando com os erros observacionais (v_t) e dos parâmetros (w_t).

Das equações do modelo linear dinâmico (3.2.1) e (3.2.2) pode-se, no tempo t , escrever o valor da observação no tempo futuro como

$$Y_{t+k} = Z_{t+k}U_{t+k} + v_{t+k} \quad (3.4.1)$$

$$U_{t+k} = G_{t+k}U_{t+k-1} + w_{t+k} \quad (3.4.2)$$

onde $v_{t+k} \sim N(0, V_{t+k})$, V_{t+k} conhecida.

$w_{t+k} \sim N(0, W_{t+k})$, W_{t+k} conhecida.

G_{t+k} é a matriz do sistema no tempo $t+k$, conhecida.

A predição de valores futuros Y_{t+k} requer a inferência sobre o vetor parâmetros U_{t+k} e o conhecimento da matriz das variáveis explicativas Z_{t+k} .

De (3.4.2)

$$u_{t+k} = G_{t+k}u_{t+k-1} \quad (3.4.3)$$

$$S_{t+k} = G_{t+k}S_{t+k-1}G'_{t+k} + W_{t+k} \quad (3.4.4)$$

Que são a média e a matriz de variância e covariância do vetor de parâmetros futuros, que são calculados recursivamente para $k=1, 2, \dots$ usando os valores de partida, u_t e S_t , que foram obtidos do filtro de Kalman.

Para o cálculo da média e da variância do processo k passos a frente é necessário distinguirmos dois casos, que dependem do conhecimento ou não de Z_{t+k} no instante t .

Se Z_{t+k} é desconhecida, a equação (3.4.1) não é linear nas desconhecidas matrizes U_{t+k} e Z_{t+k} , enquanto que restringindo ao caso em que Z_{t+k} é conhecida para $k=1,2,\dots$, tem-se.

De (3.4.1)

$$y_{t+k} = Z_{t+k}u_{t+k} \quad (3.4.5)$$

$$e \text{ var}(y_{t+k}) = Z_{t+k}S_{t+k}Z'_{t+k} + V_{t+k} \quad (3.4.6)$$

onde u_{t+k} e S_{t+k} são obtidos recursivamente de (3.4.3) e (3.4.4).

3.5. Referências Bibliográficas.

- [1] Harrison, P.J. and Stevens, C.F. Bayesian Forecasting (with discussion). Journal of the Royal Statistical Society Serie B 38: 205-247, 1976.
- [2] Kalman, R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Journal of Basic Engineering 82:34-45, 1960.
- [3] Kalman, R.E. and Bucy, R.S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Journal of Basic Engineering 83:95-108, 1961.
- [4] Meinhold, R.J. and Singpurwalla, N.D. Understanding the Kalman Filter. The American Statistician 37(2):123-127, 1983.
- [5] Sallas, W.M. and Harville, D.A. Best Linear Recursive Estimation for Mixed Linear Models. Journal of the American Statistical Association 76(376):860-869, 1981.
- [6] Wegman, E.J. Kalman Filtering. In: Encyclopedia of Statistical Sciences, Vol. 4, p.342-345. New York, Wiley, 1983.

C A P I T U L O 4

E S T I M A Ç Ã O R E C U R S I V A D O M O D E L O M I S T O

Este capítulo enfocará a técnica do Filtro de Kalman aplicado no modelo misto dinâmico, usando para isto o limite dos estimadores do modelo aleatório.

4.1. Introdução.

As vezes, a equação de observação descrita no Capítulo 3, é um modelo misto em vez de um modelo aleatório, e o Filtro de Kalman não pode ser usado diretamente, mas este problema, pode ser contornado fazendo-se o seguinte.

Incluir os efeitos fixos junto aos efeitos aleatórios no vetor estado da natureza, tratando-os como aleatórios, tendo inicialmente média zero e matriz de variância e covariância grande, indicando uma pequena confiança na estimativa inicial; e na equação do sistema a matriz de transição G_t será identidade, para indicar que os efeitos fixos não mudam com o tempo, e a matriz de variância e covariância W_t igual a zero, finalmente tomar o limite destes estimadores obtidos a partir do modelo de efeito aleatório.

4.2. Limite dos Estimadores do Modelo Aleatório.

Seja o modelo misto

$$Y = XB + ZU + E$$

onde:

Y: vetor (nx1) das observações.

XB: contribuição para Y dos efeitos fixos, sendo X uma matriz (n x p).

ZU: contribuição para Y dos efeitos aleatórios, sendo Z uma matriz (n x m).

E: vetor (nx1) dos erros,

$$\begin{aligned} \text{com } E(E) = E(U) = 0 & & E(UU') = D \\ & & E(EE') = R \\ & & E(UE') = 0 \\ & & V = ZDZ' + R \end{aligned}$$

Os efeitos fixos serão tratados como aleatórios, dando assim, um modelo aleatório. Para distinguir estes dois modelos, mudaremos o vetor B para um vetor A, resultando assim o seguinte modelo

$$Y = XA + ZU + E \quad (4.2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{com } E(A) = 0 & & E(AA') = e^{-1}I & & (e > 0) \\ & & E(AU') = E(AE') = 0 \\ & & e \text{ Var}(Y) = e^{-1}XX' + V \end{aligned}$$

A expressão (1.3.13) ($u = DZ'V^{-1}Y$) oferece o BLUP para o modelo aleatório; usando-a obtem-se os BLUP's para este modelo, que são

$$a_e = e^{-1}X'(e^{-1}XX' + V)^{-1}Y$$

$$\Rightarrow a_e = X'(XX' + eV)^{-1}Y \quad (4.2.2)$$

$$e \ u_e = DZ'(e^{-1}XX' + V)^{-1}Y \quad (4.2.3)$$

E da expressão (1.3.14) ($EMQP(u) = D - DZ'V^{-1}ZD$) obtem-se a matriz de erro médio quadrático de predição de a_e e u_e , que é dada por:

$$EMQP = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{onde: } P_{11} = e^{-1}I - e^{-1}X'(e^{-1}XX' + V)^{-1}Xe^{-1}$$

$$\Rightarrow P_{11} = e^{-1}I - e^{-1}X'(XX' + eV)^{-1}X \quad (4.2.4)$$

$$P_{12} = -e^{-1}X'(e^{-1}XX' + V)^{-1}ZD$$

$$\Rightarrow P_{12} = -X'(XX' + eV)^{-1}ZD \quad (4.2.5)$$

$$P_{21} = P_{12}'$$

$$P_{22} = D - DZ'(e^{-1}XX' + V)^{-1}ZD \quad (4.2.6)$$

Para obter o limite quando $\epsilon \rightarrow 0^+$ das expressões acima, usa-se o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1.:

Seja X :matriz($N \times p$) de posto igual a p ,

V_0 :matriz($N \times N$) positiva definida,

V_ϵ :matriz($N \times N$) positiva definida, sendo todos os seus elementos uma função contínua de um escalar ϵ ($\epsilon \geq 0$).

Então,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} X'(XX' + \epsilon V_\epsilon)^{-1} = (X'V_0^{-1}X)^{-1}X'V_0^{-1} \quad (4.2.7)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\epsilon^{-1}XX' + V_\epsilon)^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1}X(X'V_0^{-1}X)^{-1}X'V_0^{-1} \quad (4.2.8)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\epsilon^{-1}I - \epsilon^{-1}X(XX' + \epsilon V_\epsilon)^{-1}X] = (X'V_0^{-1}X)^{-1} \quad (4.2.9)$$

Dem.: Seja $V_\epsilon^{-1} = T_\epsilon' T_\epsilon$, $\epsilon \geq 0$

$$Z_\epsilon = T_\epsilon X \Rightarrow X = T_\epsilon^{-1} Z_\epsilon, \quad \epsilon \geq 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} T_\epsilon = T_0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} Z_\epsilon = Z_0$$

Para $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} X'(XX' + \epsilon V_\epsilon)^{-1} &= Z_\epsilon'(T_\epsilon^{-1})'[T_\epsilon^{-1}Z_\epsilon Z_\epsilon'(T_\epsilon^{-1})' + \epsilon T_\epsilon^{-1}(T_\epsilon^{-1})']^{-1} \\ &= Z_\epsilon'[T_\epsilon^{-1}Z_\epsilon Z_\epsilon'(T_\epsilon^{-1})^{-1}T_\epsilon' + \epsilon T_\epsilon^{-1}(T_\epsilon^{-1})^{-1}T_\epsilon']^{-1} \\ &= Z_\epsilon'[Z_\epsilon Z_\epsilon' + \epsilon I]^{-1}T_\epsilon \\ &= Z_\epsilon'[(Z_\epsilon^{-1})^{-1}Z_\epsilon Z_\epsilon Z_\epsilon' + \epsilon(Z_\epsilon^{-1})^{-1}Z_\epsilon']^{-1}T_\epsilon \\ &= [(Z_\epsilon^{-1})^{-1}Z_\epsilon Z_\epsilon Z_\epsilon'(Z_\epsilon^{-1})^{-1} + \epsilon(Z_\epsilon^{-1})^{-1}Z_\epsilon'(Z_\epsilon^{-1})^{-1}]^{-1}T_\epsilon \\ X'(XX' + \epsilon V_\epsilon)^{-1} &= [Z_\epsilon'Z_\epsilon + \epsilon I]^{-1}Z_\epsilon'T_\epsilon \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

então,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} X'(XX' + \epsilon V_\epsilon)^{-1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [Z_\epsilon'Z_\epsilon + \epsilon I]^{-1}Z_\epsilon'T_\epsilon \\ &= (Z_0'Z_0)^{-1}Z_0'T_0 \\ &= (X'T_0'T_0X)^{-1}X'T_0'T_0 \end{aligned}$$

$$= (X'V_0^{-1}X)^{-1}X'V_0^{-1} \quad (4.2.7)$$

Usando o teorema da inversa de matrizes citado no Capítulo 1, tem-se

$$\begin{aligned} (V_e + e^{-1}XX')^{-1} &= V_e^{-1} - V_e^{-1}X(I + e^{-1}X'V_e^{-1}X)^{-1}e^{-1}X'V_e^{-1} \\ &= V_e^{-1} - V_e^{-1}X(eI + X'V_e^{-1}X)^{-1}X'V_e^{-1} \\ &= V_e^{-1} - V_e^{-1}X(eV_e(X')^{-1} + X)^{-1} \\ &= V_e^{-1} - V_e^{-1}X[eV_e(X')^{-1}X'(X')^{-1} + XX'(X')^{-1}]^{-1} \\ &= V_e^{-1} - V_e^{-1}XX'(eV_e + XX')^{-1} \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} (V_e + e^{-1}XX')^{-1} &= \lim_{e \rightarrow 0^+} [V_e^{-1} - V_e^{-1}XX'(eV_e + XX')^{-1}] \\ &= V_0^{-1} - V_0^{-1}X(X'V_0^{-1}X)^{-1}X'V_0^{-1} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Agora, usando este mesmo teorema de inversa de matrizes, vê-se que $[e^{-1}I - e^{-1}X'(XX' + eV_e)^{-1}X] = (eI + X'V_e^{-1}X)^{-1}$

sendo,

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} [e^{-1}I - e^{-1}X'(XX' + eV_e)^{-1}X] &= \lim_{e \rightarrow 0^+} (eI + X'V_e^{-1}X)^{-1} \\ &= (X'V_0^{-1}X)^{-1} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Aplicando este teorema com $V_e = V$, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} a_e &= \lim_{e \rightarrow 0^+} X'(XX' + eV)^{-1}Y \\ &= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y = b \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} u_e &= \lim_{e \rightarrow 0^+} DZ'(e^{-1}XX' + V)^{-1}Y \\ &= DZ'V^{-1}Y - DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y \\ &= DZ'V^{-1}(Y - Xb) \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} P_{11} &= \lim_{e \rightarrow 0^+} [e^{-1}I - e^{-1}X'(XX' + eV)^{-1}X] \\ &= (X'V^{-1}X)^{-1} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} P_{12} &= \lim_{e \rightarrow 0^+} -X'(XX'+eV)^{-1}ZD \\ &= -(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} P_{22} &= \lim_{e \rightarrow 0^+} [D-DZ'(e^{-1}XX'+V)^{-1}ZD] \\ &= D-DZ'[V^{-1}-V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}]ZD \\ &= D-DZ'V^{-1}ZD+DZ'V^{-1}X(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}ZD \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Estes são os preditores e a matriz de erro médio quadrático do modelo misto; então, tratando os efeitos fixos do modelo misto como aleatórios com variância infinita, obtêm-se os preditores do modelo misto e seus erros médios quadráticos.

4.3. Modelo Misto Dinâmico

Este modelo permite a inclusão dos efeitos fixos a cada período de tempo. Tomando-os como aleatórios de variância infinita, pode-se obter as estimativas recursivas, correspondentes às do Filtro de Kalman, através do limite.

Define-se a equação de observação como

$$Y_t = X_t B_t + Z_t U_t + v_t, \quad v_t \sim N(0, V_t) \quad (4.3.1)$$

onde:

Y_t : vetor ($n \times 1$) de observações no tempo t .

$B_t = (B_{t1}', B_{t2}')'$, sendo B_{t1} os efeitos fixos incluídos no tempo t ; isto é, que não estão presentes no tempo $t-1$, logo B_{11} são os efeitos fixos iniciais.

$X_t = (X_{t1}, X_{t2})$

$Z_t U_t$: contribuição para Y_t dos efeitos aleatórios adicionados no tempo t .

v_t : vetor ($n \times 1$) dos erros no tempo t , com matriz de variância e covariância V_t conhecida.

Se nenhum efeito fixo é adicionado no tempo t , veja X_{t1} e B_{t1} , assim como X_{12} e B_{12} , como degenerado; ou seja, sem elementos.

Partindo dessas definições, a equação de observação pode ser reescrita como:

$$Y_t = X_{t1} B_{t1} + X_{t2} B_{t2} + Z_t U_t + v_t, \quad v_t \sim N(0, V_t) \quad (4.3.2)$$

E a equação do sistema por:

$$\begin{bmatrix} B_{t1} \\ B_{t2} \\ U_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & G_t \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B_{t-1} \\ U_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_t \\ 0 \\ w_t \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

d_t e w_t são vetores aleatórios, com $E(d_t) = E(w_t) = 0$

$$e \text{ var} \begin{bmatrix} d_t \\ w_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1} I & 0 \\ 0 & W_t \end{bmatrix}$$

4.4. Estimação Recursiva para o Modelo Misto Dinâmico.

Fazendo uma associação com os resultados obtidos no Capítulo 3, obtem-se as fórmulas da estimação recursiva para B_t^e e U_t^e .

Seja $D_t = (X_{t2}, Z_t)$

De (3.3.9)

$$\begin{bmatrix} b_t^e \\ u_t^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & G_t \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{t-1}^e \\ u_{t-1}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-1} X'_{t1} \\ R_t^e D'_{t1} \end{bmatrix} (J_t^e)^{-1} e_t^e \quad (4.4.1)$$

$$\text{onde } e_t^e = Y_t - X_{t2} b_{t-1}^e - Z_t G_t u_{t-1}^e \quad (4.4.2)$$

$$J_t^e = (V_t + e^{-1} X_{t1} X'_{t1} + D_t R_t^e D'_{t1}) \quad (4.4.3)$$

$$R_t^e = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_t \end{bmatrix} * S_{t-1}^e * \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G'_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_t \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

Com matriz de erro médio quadrático associada a b_t^e e u_t^e dada por:

$$S_t^e = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } N_{11} = e^{-1}I - e^{-2}X'_{t1}(J_t^e)^{-1}X_{t1} \quad (4.4.5)$$

$$N_{12} = -e^{-1}X'_{t1}(J_t^e)^{-1}D_tR_t^e \quad (4.4.6)$$

$$N_{21} = N_{12}'$$

$$N_{22} = R_t^e - R_t^e D_t' (J_t^e)^{-1} D_t R_t^e \quad (4.4.7)$$

Expressões que podem ser obtidas das equações (4.2.4), (4.2.5) e (4.2.6).

Agora, tomando o limite obtém-se as fórmulas para o cálculo recursivo dos estimadores do modelo misto, que correspondem ao Filtro de Kalman usado no modelo aleatório.

Usando o teorema 4.2.1 com $V_e = V_t + D_t R_t^e D_t'$ tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} e^{-1}X'_{t1}(J_t^e)^{-1} &= \lim_{e \rightarrow 0^+} e^{-1}X'_{t1}(e^{-1}X_{t1}X'_{t1} + V_e)^{-1} = & (\text{De 4.2.7}) \\ &= (X'_{t1}H_t^{-1}X_{t1})^{-1}X'_{t1}H_t^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} J_t^e &= \lim_{e \rightarrow 0^+} (e^{-1}X_{t1}X'_{t1} + V_e)^{-1} = & (\text{De 4.2.8}) \\ &= H_t^{-1} - H_t^{-1}X_{t1}(X'_{t1}H_t^{-1}X_{t1})^{-1}X'_{t1}H_t^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0^+} [e^{-1}I - e^{-2}X'_{t1}(J_t^e)^{-1}X_{t1}] &= \lim_{e \rightarrow 0^+} [e^{-1}I - e^{-2}X'_{t1} \times \\ & \quad (e^{-1}X_{t1}X'_{t1} + V_e)^{-1}X_{t1}] & (\text{De 4.2.9}) \\ &= (X'_{t1}H_t^{-1}X_{t1})^{-1} \end{aligned}$$

com $H_t = V_t + D_t R_t D_t'$

os quais permitem o cálculo de $b_t = \lim_{e \rightarrow 0^+} b_t^e$

$$\text{e } u_t = \lim_{e \rightarrow 0^+} u_t^e$$

que são

$$b_{t1} = (X'_{t1}H_t^{-1}X_{t1})^{-1}X'_{t1}H_t^{-1}(Y_t - X_{t2}b_{t2-1} - Z_t G_t u_{t-1}) \quad (4.4.8)$$

$$e \begin{bmatrix} b_{t2} \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{t-1} \\ G_t u_{t-1} \end{bmatrix} + R_t D'_t H_t^{-1} [I - X_{t1} (X'_{t1} H_t^{-1} X_{t1})^{-1} X'_{t1} H_t^{-1}] * \\ * (Y_t - X_{t2} b_{t2-1} - Z_t G_t u_{t-1})$$

$$= \begin{bmatrix} b_{t2-1} \\ G_t u_{t-1} \end{bmatrix} + R_t D'_t H_t^{-1} (Y_t - X_{t1} b_{t1} - X_{t2} b_{t2-1} - Z_t G_t u_{t-1}) \quad (4.4.9)$$

com

$$S_t = \lim_{e \rightarrow 0^+} S_t^e = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = (X'_{t1} H_t^{-1} X_{t1})^{-1} \quad (4.4.10)$$

$$P_{12} = -(X'_{t1} H_t^{-1} X_{t1})^{-1} X'_{t1} H_t^{-1} D_t R_t \quad (4.4.11)$$

$$P_{21} = P'_{12}$$

$$P_{22} = R_t - R_t D'_t H_t^{-1} D_t R_t + R_t D'_t H_t^{-1} X_{t1} (X'_{t1} H_t^{-1} X_{t1})^{-1} X'_{t1} H_t^{-1} D_t R_t \quad (4.4.12)$$

$$e \quad R_t = \lim_{e \rightarrow 0^+} R_t^e = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_t \end{bmatrix} * S_{t-1} * \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G'_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_t \end{bmatrix} \quad (4.4.13)$$

Analisando os estimadores obtidos, vemos que estes têm a mesma estrutura dos estimadores do Filtro de Kalman aplicado ao modelo aleatório, já que estes são a soma da média da distribuição a priori com um múltiplo de previsão a um passo à frente, tendo este múltiplo, ou seja, a matriz do ganho de Kalman, a mesma forma.

Devemos salientar que como o vetor de efeitos fixos incluídos no tempo t , B_{t1} não tem uma distribuição a priori deste parâmetro condicionado a Y_{t-1} , a média da distribuição a posteriori é composta apenas do múltiplo do erro de previsão a um passo à frente.

Observamos também que a matriz de variância e covariância tem a mesma estrutura que a matriz do erro médio quadrático de predição dos BLUP's do modelo misto, assim como a matriz de variância e covariância do Filtro de Kalman tem a mesma forma que o erro médio quadrático de predição do BLUP do modelo aleatório.

Quando, no modelo misto dinâmico, não tivermos a contribuição dos efeitos fixos recairemos no modelo linear dinâmico. Este por sua vez, tendo a matriz de transição igual a identidade e com os parâmetros independentes do tempo, teremos o modelo aleatório que é um caso particular do modelo misto, quando este último tem a contribuição dos efeitos fixos nulos.

No Capítulo 2, foi mostrado qual a relação entre a predição do efeito aleatório do modelo misto com a predição do modelo fixo, e este com o Kriging. Com isto conseguimos relacionar todos os modelos propostos para a predição enfocados neste trabalho.

4.5. Referências Bibliográficas

- [1] Harville, D.A. Extension of the Gauss-Markov Theorem to Include the Estimation of Random Effects. Annals of Statistics 4:384-395, 1976.
- [2] Sallas, W.M. and Harville, D.A. Best Linear Recursive Estimation for Mixed Linear Models. Journal of the American Statistical Association 76(376):860-869, 1981.
- [3] Zyskind, G. e Martin, F.B. On Best Linear Estimation and a General Gauss-Markov Theorem in Linear Models with Arbitrary Nonnegative Covariance Structure. SIAM J. Appl. Math 17(06):1190-1202, 1969.

C A P Í T U L O 5

O B L U P E

O F I L T R O D E K A L M A N

E M P R E D I Ç Õ E S

Neste capítulo será visto representações de alguns modelos, simulações destes para vermos o comportamento do BLUP e do Filtro de Kalman, além de uma aplicação em dados reais.

5.1. Introdução

Até o momento, trabalhamos a teoria do BLUP e do Filtro de Kalman de uma forma genérica, ou seja, para qualquer que fosse o modelo. Agora, iremos explicitar alguns modelos, os quais fizemos simulações baseadas nestes.

Simulamos os dados através de três modelos lineares dinâmicos específicos, e utilizando estes dados estimamos os parâmetros destes três modelos através do BLUP e do Filtro de Kalman, para predizer a próxima observação, assim como a variância desta. Calculamos a soma de quadrados dos resíduos destas predições em relação ao valor simulado, e então comparamos o comportamento destas duas técnicas.

Além disto, obtivemos os dados da incidência de sarampo, mês a mês, a nível hospitalar do município de Campinas, desde janeiro de 1979 a março de 1987. Utilizamos um dos modelos estudados, devido a sua adequabilidade, e mais uma vez, estimamos os parâmetros através do BLUP e do Filtro de Kalman. Então, fizemos predições para o próximo mês, como se o próximo dado ainda não tivesse sido obtido. Analisamos as técnicas utilizadas através da soma de quadrados dos resíduos da predição em relação ao valor observado.

5.2. Representações de alguns modelos convencionais em modelo linear dinâmico

Será descrito, agora, alguns modelos clássicos de séries temporais na representação do modelo linear dinâmico.

5.2.1. Modelo Estável

Este modelo é apropriado para situações onde a característica mais importante é o nível do processo, não sendo importante o seu crescimento ou o declínio.

Tal processo pode ser descrito por:

$$y_t = M_t + e_t$$

$$M_t = M_{t-1} + dM_t$$

onde:

M_t é o verdadeiro (desconhecido) nível do processo no tempo t .

dM_t é o distúrbio aleatório do processo no tempo t .

Este processo é o modelo linear dinâmico mais simples. Sua equivalência é dada por:

$$m = n = 1, \quad U_t = M_t, \quad Z_t = G_t = 1, \quad v_t = e_t, \quad V_t = \text{Var}(e_t)$$

$$w_t = dM_t, \quad W_t = \text{Var}(dM_t)$$

5.2.2. Modelo de Crescimento Linear

Este modelo é altamente importante em aplicações. Ele estende o modelo estável através da adição de um termo de inclinação λ_t . As equações são:

$$y_t = M_t + e_t$$

$$M_t = M_{t-1} + \lambda_t + dM_t$$

$$\lambda_t = \lambda_{t-1} + d\lambda_t$$

onde:

M_t é o nível do processo no tempo t .

λ_t é o acréscimo do valor da série no tempo t .

A representação como um modelo linear dinâmico é:

$$y_t = (1 \ 0) \begin{bmatrix} M_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} + e_t$$

$$\begin{bmatrix} M_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} M_{t-1} \\ \varepsilon_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dM_t + d\varepsilon_t \\ d\varepsilon_t \end{bmatrix}$$

isto é,

$$m = 1, n = 2, U_t = \begin{bmatrix} M_t \\ \varepsilon_t \end{bmatrix}, Z_t = (1 \ 0), G_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v_t = e_t, V_t = \text{Var}(e_t), w_t = \begin{bmatrix} dM_t + d\varepsilon_t \\ d\varepsilon_t \end{bmatrix}$$

$$W_t = \begin{bmatrix} dM_t^2 + d\varepsilon_t^2 & d\varepsilon_t^2 \\ d\varepsilon_t^2 & d\varepsilon_t^2 \end{bmatrix}$$

Se $dM_t \sim N(0, V_M)$ e $d\varepsilon_t \sim N(0, V_\varepsilon)$, então

$$W_t = \begin{bmatrix} V_M + V_\varepsilon & V_\varepsilon \\ V_\varepsilon & V_\varepsilon \end{bmatrix}$$

5.2.3. Modelo de Crescimento Linear Sazonal

é uma generalização do modelo anterior; onde é adicionado um vetor desconhecido do efeito sazonal aditivo, um para cada período do ciclo "anual", s .

O modelo é:

$$y_t = M_t + r_m(t), t + e_t$$

$$M_t = M_{t-1} + \varepsilon_t + dM_t$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + d\varepsilon_t$$

Com a estimativa dos parâmetros, calculamos a predição para a próxima observação e sua variância. Quando simulamos esta "próxima" observação, obtemos o erro da predição feita. Fazendo a soma de quadrados desses erros, tivemos um parâmetro de comparação entre as duas técnicas utilizadas, podendo assim compará-las.

Para o modelo estável, demos o valor inicial para o parâmetro simulado igual a dois e variância igual a um, enquanto que o valor inicial para a estimativa igual a um com variância de uma unidade. A variância do erro observacional é igual a dois, ou seja, constante para todo o momento. Com isto obtemos, os cem valores simulados da variável observacional e as predições através do Filtro de Kalman e do BLUP, que estão apresentados graficamente na figura 5.3.1 e na tabela 5.3.1.

Através do Filtro de Kalman a variância da observação predita manteve-se constante desde o primeiro cálculo igual a quatro, enquanto na predição do BLUP variou de 2.67 a 2.02. (Ver tabela 5.3.1).

No modelo de Crescimento Linear, inicializamos o vetor de parâmetros simulado dando um vetor de dimensão dois, com estes dois valores igual a 2, e matriz de variância e covariância dada por

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

O valor inicial dos parâmetros para a estimação recursiva foi um vetor de uns com a matriz de variância e covariância igual a

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Esta é a mesma matriz de variância e covariância dos parâmetros utilizada para a predição através do BLUP. Também foi estipulado a variância do erro observacional igual a dois.

Partindo destes valores foi obtido os valores simulados da observação e seus valores preditos pelas duas técnicas utilizadas, os quais estão na figura 5.3.2 e na tabela 5.3.2.

A variância da predição através do Filtro de Kalman atingiu uma constante na décima quarta predição igual a 6.17934, enquanto que através do BLUP, esta variou de 2.67 a 2.02 do início ao fim da simulação, que pode ser vista na tabela 5.3.2.

A simulação do modelo de Crescimento Linear Sazonal, iniciou-se com o vetor de parâmetros de dimensão 14, tendo os dois primeiros elementos iguais a zero, para que não houvesse influência nem da média,

nem da inclinação, havendo assim influência apenas da sazonalidade. Os valores correspondentes as variáveis responsáveis pela sazonalidade oscilaram entre -1 e 1. E a matriz de variância e covariância sendo obtida pela multiplicação de um vetor de valores iguais a 0.5 pelo seu correspondente vetor transposto.

O valor de partida para o vetor de parâmetros foi um vetor de uns, com a matriz de variância e covariância de dimensão 14 x 14, especificada no programa (Ver Apêndice-Programa 4-Matriz W), também esta sendo utilizada para a predição através do BLUP. A variância do erro observacional foi fixada em 1.323.

Com estes valores estabelecidos, obteve-se os valores da variável observacional simulada e suas predições através das duas técnicas estudadas, que podem ser vistas na figura 5.3.3 e na tabela 5.3.3.

Graficamente, a sazonalidade não sendo facilmente percebida, pois os últimos valores foram muito grandes, fazendo com que os pontos que estavam próximos, mas oscilantes não fossem percebidos.

A variância da predição através do Filtro de Kalman atingiu uma constante na 33ª predição igual a 8.99495, enquanto que através do BLUP variou de 2.38 a 1.34. (Ver tabela 5.3.3).

Como foi dito, fizemos a soma de quadrados dos erros de predição a um passo a frente, até a centésima observação simulada, sendo este mais um parâmetro de comparação entre as duas técnicas. Construímos uma tabela para sumarizar as somas de quadrados para os três modelos.

Tabela 5.3.4: Soma de quadrados do erro de predição a um passo a frente pelo Filtro de Kalman (FK) e pelo BLUP para o modelo Estável, de Crescimento Linear e de Crescimento Linear Sazonal para cem observações simuladas.

modelo \ técnica	FK	BLUP
Estável	335.242	465.789
Cresc. Linear	607.980	311713.000
Cresc. Linear Sazonal	324.566	577355.000

Com esta tabela, podemos construir uma outra tabela que nos dê em média, o erro de cada previsão nos três modelos.

Tabela 5.3.5: Erro de previsão em média, para cada observação, usando o Filtro de Kalman (FK) e o BLUP no modelo Estável, de Crescimento Linear, e de Crescimento Linear Sazonal.

modelo \ técnica	FK	BLUP
Estável	1.84	2.17
Cresc. Linear	2.48	56.11
Cresc. Linear Sazonal	1.81	76.37

Com esta pequena análise, podemos chegar a conclusão que o Filtro de Kalman acompanha a série simulada muito melhor do que o BLUP. Primeiro, pelo erro de previsão ser bem menor, depois pela variância do Filtro de Kalman tender a estabilizar-se sendo bem maior que o BLUP, pois a predição através do BLUP tende a manter-se na média da série, ou seja, suas predições estão sempre próximas, enquanto que o Filtro de Kalman acompanha a série de uma forma constante. Mais ainda esta é uma técnica de previsão a longo prazo, enquanto que o Filtro de Kalman é para um prazo curto, como foi o nosso caso.

5.4. Aplicação

O Departamento Regional de Saúde Campinas forneceu para este estudo dados da incidência de sarampo a nível hospitalar no município de Campinas, que envolve os Centros de Saúde de Barão Geraldo, Cambuí, Sta. Odília, Jd. Aurélia e Campinas.

Estes dados foram coletados, mês a mês, partindo de janeiro de 1979 e obtivemos estes até março de 1987, os quais são mostrados na tabela 5.4.1.

Com estes dados fizemos um gráfico da incidência de sarampo contra o tempo, que está na figura 5.4.1.

Através deste observamos que nos meses frios há um maior número de casos, enquanto nos meses quentes estes números diminuem, o que é perfeitamente explicável, pois no frio há uma maior facilidade das pessoas contraírem doenças transmissíveis pelo ar, já que os ambientes ficam um maior tempo fechados. Outro fato observado é que os casos de sarampo vem diminuindo com o passar dos anos, pois tem aumentado as campanhas de vacinações contra o sarampo. Portanto, resolvemos ajustar um modelo de Crescimento Linear de Sazonal com um ciclo de doze meses.

Fizemos uma análise para verificar se os dados cumpriam a condição exigida pelo modelo de terem uma distribuição normal e foi verificado que esta condição não era cumprida. Resolvemos fazer uma transformação nestes dados. A transformação escolhida foi a raiz quadrada, pois foi com esta que obtivemos uma distribuição normal, e trabalhamos com estes dados transformados.

Para darmos os parâmetros iniciais da técnica do Filtro de Kalman, usamos os três primeiros anos para obter a variância inicial da equação de observação, e a matriz de variância e covariância inicial da equação do sistema, sendo parte desta matriz a covariância da incidência de sarampo relativo aos respectivos meses.

Com isto obtemos os valores dos parâmetros do modelo através do Filtro de Kalman e do BLUP, e fizemos uma predição a um passo a frente como pode ser visto na figura 5.4.2. e na tabela 5.4.2.

A variância da observação predita através do Filtro de Kalman oscilou bastante, enquanto que através do BLUP esta começou uma estabilização em torno de sete unidades. Por outro lado, a soma de quadrados do erros de predição a uma passo a frente através do Filtro de Kalman atingiu um total de 473.94, dando-nos um erro médio por predição igual a 4.8036, e através do BLUP atingiu uma soma total de 662.563, ou seja, o erro médio por predição é igual a 6.7608.

Logo, podemos dizer que mesmo quando o BLUP tem uma boa performance o Filtro de Kalman o supera.

5.5. Tabelas e Gráficos

abela 5.3.1: Série simulada segundo um modelo Estável, sua predição através do Filtro de Kalman e do BLUP, suas respectivas variâncias e a soma de quadrados dos erros de predição.

Obs.	I	Filtro de Kalman				BLUP		
		Y_t	y_t	Var	s^2 dos erros	y_t	Var	s^2 dos erros
1	1	0.0000	.	.	0.000	.	.	0.000
2	2	2.1731	0.5000	4	2.799	0.00000	2.66667	4.722
3	3	3.8083	1.3365	4	8.909	0.54327	2.50000	15.383
4	4	1.8839	2.5724	4	9.383	1.19629	2.40000	15.856
5	5	0.5578	2.2282	4	12.173	1.31088	2.33333	16.423
6	6	4.2370	1.3930	4	20.262	1.20330	2.28571	25.626
7	7	3.1637	2.8150	4	20.383	1.58252	2.25000	28.127
8	8	4.3323	2.9894	4	22.187	1.75820	2.22222	34.753
9	9	1.7107	3.6608	4	25.990	2.01562	2.20000	34.846
10	10	3.2825	2.6858	4	26.346	1.98790	2.18182	36.522
11	11	-0.2284	2.9841	4	36.666	2.09578	2.16667	41.923
12	12	3.1064	1.3779	4	39.654	1.91700	2.15385	43.338
13	13	5.7948	2.2421	4	52.275	2.00195	2.14286	57.723
14	14	1.4745	4.0185	4	58.747	2.25481	2.13333	58.332
15	15	3.0286	2.7465	4	58.826	2.20604	2.12500	59.009
16	16	4.1304	2.8875	4	60.371	2.25443	2.11765	62.528
17	17	1.0246	3.5089	4	66.543	2.35865	2.11111	64.308
18	18	0.0186	2.2668	4	71.597	2.28843	2.10526	69.460
19	19	-0.1607	1.1427	4	73.296	2.17494	2.10000	74.915
20	20	3.8979	0.4910	4	84.902	2.06372	2.09524	78.279
21	21	3.4016	2.1944	4	86.360	2.14709	2.09091	79.853
22	22	5.3720	2.7980	4	92.985	2.20164	2.08696	89.904
23	23	4.4694	4.0850	4	93.133	2.33374	2.08333	94.465
24	24	1.5547	4.2772	4	100.545	2.41917	2.08000	95.212
25	25	3.7242	2.9160	4	101.198	2.38592	2.07692	97.003
26	26	3.1965	3.3201	4	101.213	2.43548	2.07407	97.582
27	27	2.2132	3.2583	4	102.306	2.46266	2.07143	97.645
28	28	-1.4650	2.7357	4	119.952	2.45406	2.06897	113.004
29	29	-3.2810	0.6354	4	135.290	2.32343	2.06667	144.413
30	30	0.2677	-1.3228	4	137.820	2.14264	2.06452	147.929
31	31	0.5963	-0.5275	4	139.083	2.08405	2.06250	150.142
32	32	0.4702	0.0344	4	139.273	2.03896	2.06061	152.603
33	33	2.1538	0.2523	4	142.889	1.99282	2.05882	152.629
34	34	1.2932	1.2031	4	142.897	1.99743	2.05714	153.125
35	35	-1.9261	1.2482	4	152.973	1.97786	2.05556	168.366
36	36	0.1522	-0.3390	4	153.214	1.87235	2.05405	171.325
37	37	1.3204	-0.0934	4	155.213	1.82708	2.05263	171.582
38	38	0.9508	0.6135	4	155.327	1.81409	2.05128	172.327
39	39	2.7138	0.7822	4	159.058	1.79251	2.05000	173.176
40	40	4.6701	1.7480	4	167.597	1.81498	2.04878	181.327
41	41	5.0639	3.2090	4	171.037	1.88296	2.04762	191.446
42	42	7.3519	4.1365	4	181.377	1.95694	2.04651	220.552
43	43	0.4837	5.7442	4	209.049	2.07955	2.04545	223.099

continuação da tabela 5.3.1.

Obs.	I	Filtro de Kalman				BLUP		
		Y_t	y_t	Var	S^2 dos erros	y_t	Var	S^2 dos erros
44	44	-0.7297	3.1140	4	223.823	2.04409	2.04444	230.793
45	45	0.2524	1.1921	4	224.706	1.98379	2.04348	233.790
46	46	1.6414	0.7222	4	225.551	1.94695	2.04255	233.884
47	47	1.7522	1.1818	4	225.877	1.94058	2.04167	233.919
48	48	-0.0053	1.4670	4	228.044	1.93674	2.04082	237.691
49	49	0.2175	0.7309	4	228.308	1.89790	2.04000	240.514
50	50	1.5952	0.4742	4	229.564	1.86495	2.03922	240.587
51	51	-2.0672	1.0347	4	239.186	1.85976	2.03846	256.008
52	52	3.1641	-0.5162	4	252.731	1.78567	2.03774	257.908
53	53	2.5979	1.3239	4	254.354	1.81120	2.03704	258.527
54	54	1.9808	1.9609	4	254.354	1.82550	2.03636	258.551
55	55	-0.7260	1.9709	4	261.627	1.82827	2.03571	265.075
56	56	0.4796	0.6224	4	261.648	1.78346	2.03509	266.775
57	57	2.6101	0.5510	4	265.887	1.76098	2.03448	267.496
58	58	-0.4280	1.5806	4	269.922	1.77537	2.03390	272.351
59	59	0.4261	0.5763	4	269.944	1.73865	2.03333	274.074
60	60	-2.0568	0.5012	4	276.487	1.71713	2.03279	288.316
61	61	2.3844	-0.7778	4	286.487	1.65626	2.03226	288.847
62	62	0.7334	0.8033	4	286.492	1.66782	2.03175	289.720
63	63	-1.9394	0.7684	4	293.824	1.65322	2.03125	302.627
64	64	-1.8187	-0.5855	4	295.345	1.59795	2.03077	314.300
65	65	-0.1075	-1.2021	4	296.543	1.54618	2.03030	317.035
66	66	1.4301	-0.6548	4	300.890	1.52150	2.02985	317.043
67	67	1.3697	0.3877	4	301.854	1.52016	2.02941	317.066
68	68	5.0103	0.8787	4	318.924	1.51798	2.02899	329.262
69	69	2.5455	2.9445	4	319.084	1.56787	2.02857	330.218
70	70	2.4669	2.7450	4	319.161	1.58164	2.02817	331.002
71	71	5.8171	2.6059	4	329.473	1.59393	2.02778	348.837
72	72	4.9735	4.2115	4	330.053	1.65178	2.02740	359.871
73	73	7.8896	4.5925	4	340.924	1.69667	2.02703	398.223
74	74	5.4430	6.2411	4	341.561	1.77924	2.02667	411.647
75	75	5.6229	5.8421	4	341.609	1.82745	2.02632	426.052
76	76	6.8965	5.7325	4	342.964	1.87674	2.02597	451.249
77	77	6.8514	6.3145	4	343.252	1.94110	2.02564	475.360
78	78	5.8237	6.5829	4	343.829	2.00325	2.02532	489.956
79	79	9.6032	6.2033	4	355.388	2.05101	2.02500	546.991
80	80	7.2050	7.9032	4	355.875	2.14425	2.02469	572.602
81	81	8.1248	7.5541	4	356.201	2.20596	2.02439	607.635
82	82	5.4920	7.8395	4	361.711	2.27727	2.02410	617.969
83	83	6.6591	6.6657	4	361.712	2.31554	2.02381	636.836
84	84	5.5596	6.6624	4	362.928	2.36664	2.02353	647.031
85	85	2.6998	6.1110	4	374.564	2.40377	2.02326	647.118
86	86	2.0965	4.4054	4	379.895	2.40717	2.02299	647.215
87	87	6.2239	3.2509	4	388.734	2.40364	2.02273	661.810
88	88	0.6883	4.7374	4	405.130	2.44657	2.02247	664.901

continuação da tabela 5.3.1.

Obs.	I	Y_t	Filtro de Kalman			BLUP		
			y_t	Var	S^2 dos erros	y_t	Var	S^2 dos erros
89	89	5.7371	2.7129	4	414.276	2.42703	2.02222	675.858
90	90	4.8358	4.2250	4	414.649	2.46341	2.02198	681.486
91	91	6.0622	4.5304	4	416.995	2.48919	2.02174	694.252
92	92	3.9107	5.2963	4	418.915	2.52761	2.02151	696.165
93	93	5.9565	4.6035	4	420.746	2.54233	2.02128	707.822
94	94	7.0999	5.2800	4	424.058	2.57827	2.02105	728.268
95	95	2.8392	6.1900	4	435.285	2.62537	2.02083	728.314
96	96	-0.6477	4.5146	4	461.934	2.62757	2.02062	739.041
97	97	3.9236	1.9334	4	465.895	2.59415	2.02041	740.808
98	98	5.7870	2.9285	4	474.066	2.60758	2.02020	750.917

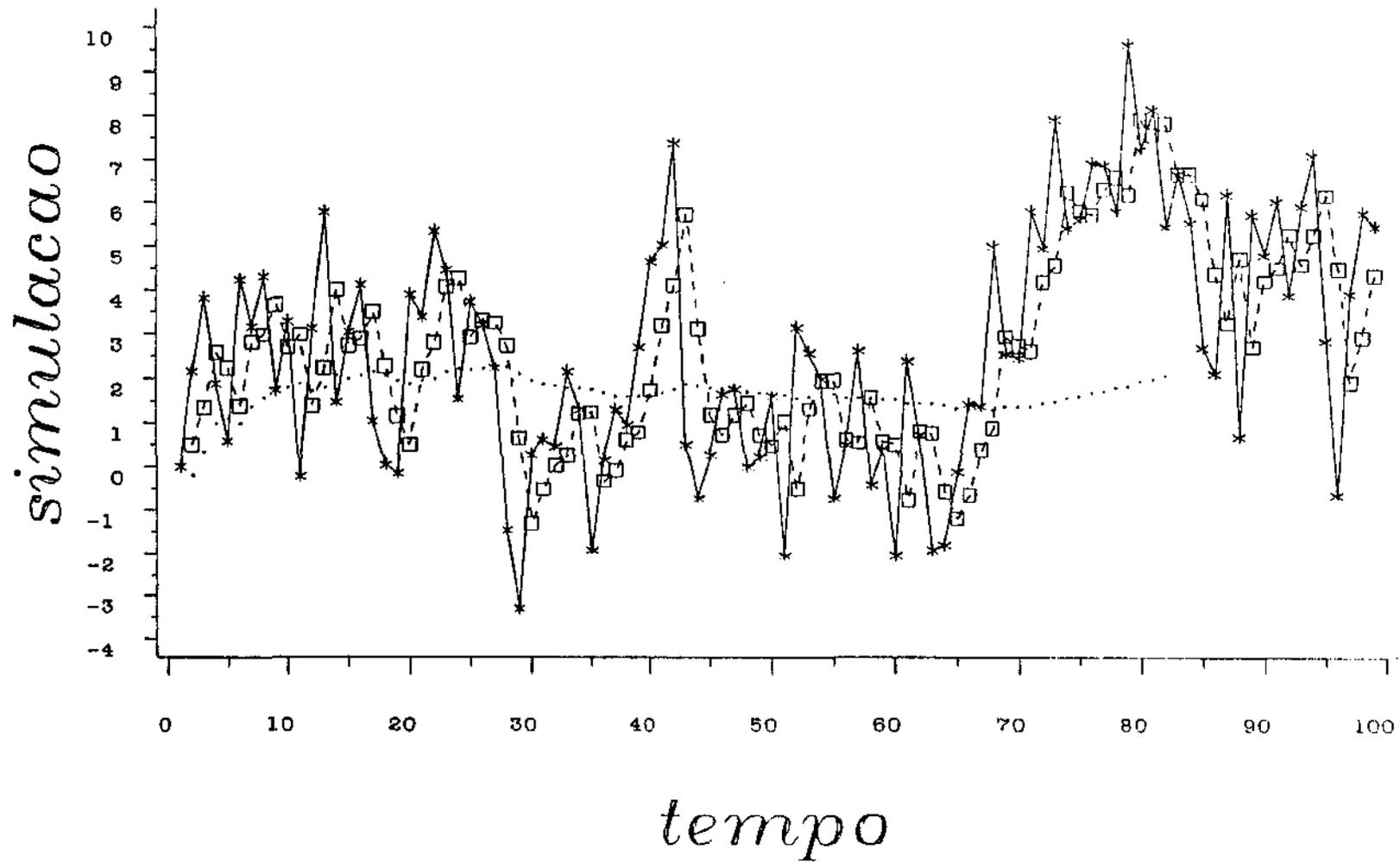


Figura 5.3.1.: Serie simulada segundo o modelo estavel.
 Predicao da FK(---) e do BLUP(...).

abela 5.3.2.: Série simulada segundo o Modelo de Crescimento Linear, sua predição através do Filtro de Kalman e do BLUP, suas respectivas variâncias e a soma de quadrados dos erros de predição

Obs.	t	Y _t	Filtro de Kalman			BLUP		
			y _t	Var	S ² dos erros	y _t	Var	S ² dos erros
1	1	0.000	.	.	0.000	.	.	0
2	2	5.636	1.182	5.95455	19.838	0.000	2.66667	32
3	3	9.267	5.818	6.06870	31.728	1.409	2.50000	94
4	4	13.342	10.769	6.12547	38.348	2.980	2.40000	201
5	5	17.975	15.867	6.15799	42.791	4.707	2.33333	377
6	6	21.344	21.253	6.17262	42.799	6.603	2.28571	594
7	7	24.346	25.303	6.17765	43.716	8.445	2.25000	847
8	8	33.864	28.372	6.17898	73.873	10.212	2.22222	1406
9	9	38.715	37.365	6.17925	75.696	12.577	2.20000	2090
10	10	46.123	43.940	6.17930	80.458	14.954	2.18182	3061
11	11	46.669	51.700	6.17932	105.764	17.551	2.16667	3909
12	12	54.945	53.150	6.17933	108.989	19.791	2.15385	5145
13	13	59.376	59.727	6.17933	109.113	22.302	2.14286	6519
14	14	67.096	64.753	6.17934	114.604	24.773	2.13333	8311
15	15	74.048	72.268	6.17934	117.773	27.419	2.12500	10485
16	16	83.299	79.908	6.17934	129.273	30.162	2.11765	13308
17	17	89.814	89.602	6.17934	129.318	33.114	2.11111	16523
18	18	95.428	97.207	6.17934	132.480	36.098	2.10526	20043
19	19	104.942	102.959	6.17934	136.412	39.064	2.10000	24383
20	20	115.132	111.820	6.17934	147.380	42.201	2.09524	29702
21	21	125.591	122.521	6.17934	156.802	45.516	2.09091	36114
22	22	132.898	133.932	6.17934	157.871	48.998	2.08696	43153
23	23	145.502	142.273	6.17934	168.299	52.494	2.08333	51804
24	24	154.089	154.416	6.17934	168.405	56.214	2.08000	61383
25	25	166.864	164.061	6.17934	176.263	59.978	2.07692	72808
26	26	180.093	176.620	6.17934	188.324	63.937	2.07407	86300
27	27	190.386	190.621	6.17934	188.379	68.086	2.07143	101257
28	28	200.847	202.046	6.17934	189.818	72.303	2.06897	117781
29	29	214.058	212.478	6.17934	192.313	76.588	2.06667	136679
30	30	224.473	225.239	6.17934	192.900	81.022	2.06452	157257
31	31	235.494	236.195	6.17934	193.392	85.505	2.06250	179754
32	32	254.967	246.996	6.17934	256.928	90.050	2.06061	206951
33	33	260.397	265.929	6.17934	287.531	94.901	2.05882	234340
34	34	279.778	274.156	6.17934	319.135	99.629	2.05714	266794
35	35	291.321	291.527	6.17934	319.178	104.633	2.05556	301646
36	36	305.281	304.897	6.17934	319.325	109.679	2.05405	339907
37	37	319.815	318.776	6.17934	320.406	114.826	2.05263	381927
38	38	331.957	333.393	6.17934	322.469	120.082	2.05128	426818
39	39	348.430	345.927	6.17934	328.730	125.379	2.05000	476569
40	40	361.242	361.838	6.17934	329.085	130.820	2.04878	529664
41	41	376.968	375.483	6.17934	331.290	136.306	2.04762	587582
42	42	389.359	390.957	6.17934	333.846	141.903	2.04651	648816
43	43	402.738	403.892	6.17934	335.177	147.527	2.04545	713949

continuação da tabela 5.3.2.

Obs.	I	Filtro de Kalman				BLUP			
		Y_t	y_t	Var	S^2 dos erros	y_t	Var	S^2 dos erros	
44	44	415.951	416.799	6.17934	335.896	153.198	2.04444	782989	
45	45	432.421	429.672	6.17934	343.450	158.910	2.04348	857797	
46	46	445.490	445.759	6.17934	343.523	164.729	2.04255	936623	
47	47	460.785	459.728	6.17934	344.639	170.579	2.04167	1020843	
48	48	471.034	474.895	6.17934	359.549	176.501	2.04082	1107592	
49	49	489.628	485.637	6.17934	375.472	182.392	2.04000	1201986	
50	50	500.880	502.825	6.17934	379.254	188.416	2.03922	1299620	
51	51	513.056	515.445	6.17934	384.964	194.425	2.03846	1401146	
52	52	531.719	527.085	6.17934	406.440	200.437	2.03774	1510893	
53	53	545.220	544.793	6.17934	406.622	206.572	2.03704	1625576	
54	54	559.747	559.778	6.17934	406.623	212.729	2.03636	1745998	
55	55	572.998	574.444	6.17934	408.712	218.926	2.03571	1871365	
56	56	589.47	587.74	6.17934	411.706	225.137	2.03509	2004105	
57	57	601.67	603.68	6.17934	415.731	231.419	2.03448	2141194	
58	58	617.23	616.52	6.17934	416.232	237.695	2.03390	2285239	
59	59	634.73	631.40	6.17934	427.328	244.020	2.03333	2437892	
60	60	647.21	649.00	6.17934	430.521	250.425	2.03279	2595330	
61	61	661.34	662.63	6.17934	432.160	256.825	2.03226	2758966	
62	62	680.15	676.23	6.17934	447.474	263.246	2.03175	2932772	
63	63	695.31	694.47	6.17934	448.178	269.760	2.03125	3113860	
64	64	709.69	710.86	6.17934	449.552	276.307	2.03077	3301679	
65	65	727.23	725.56	6.17934	452.348	282.873	2.03030	3499132	
66	66	740.80	742.66	6.17934	455.796	289.505	2.02985	3702799	
67	67	758.97	756.84	6.17934	460.342	296.142	2.02941	3917010	
68	68	773.26	774.33	6.17934	461.487	302.850	2.02899	4138294	
69	69	789.70	789.35	6.17934	461.614	309.570	2.02857	4368822	
70	70	801.29	805.43	6.17934	478.778	316.332	2.02817	4604003	
71	71	817.07	817.29	6.17934	478.828	323.068	2.02778	4848040	
72	72	833.26	831.74	6.17934	481.140	329.835	2.02740	5101480	
73	73	846.85	847.80	6.17934	482.054	336.638	2.02703	5361794	
74	74	856.94	861.92	6.17934	506.837	343.441	2.02667	5625475	
75	75	874.67	871.90	6.17934	514.525	350.197	2.02632	5900546	
76	76	883.29	887.91	6.17934	535.824	357.009	2.02597	6177519	
77	77	897.28	897.61	6.17934	535.932	363.756	2.02564	6462165	
78	78	915.37	910.11	6.17934	563.548	370.509	2.02532	6759034	
79	79	930.39	927.89	6.17934	569.801	377.320	2.02500	7064919	
80	80	945.30	944.51	6.17934	570.414	384.148	2.02469	7379806	
81	81	952.56	960.20	6.17934	628.731	390.991	2.02439	7695168	
82	82	970.04	968.02	6.17934	632.814	397.757	2.02410	8022675	
83	83	986.42	982.94	6.17934	644.872	404.570	2.02381	8361220	
84	84	996.13	999.84	6.17934	658.616	411.415	2.02353	8703114	
85	85	1010.07	1010.82	6.17934	659.193	418.214	2.02326	9053401	
86	86	1025.43	1023.59	6.17934	662.588	425.017	2.02299	9413896	
87	87	1042.12	1038.63	6.17934	674.734	431.840	2.02273	9786336	
88	88	1051.50	1055.78	6.17934	693.067	438.697	2.02247	10161865	

continuação da tabela 5.3.2.

Obs.	I	Filtro de Kalman				BLUP			
		Y_t	y_t	Var	S ² dos erros	y_t	Var	S ² dos erros	
89	89	1066.11	1066.46	6.17934	693.188	445.506	2.02222	10547017	
90	90	1078.17	1079.70	6.17934	695.534	452.326	2.02198	10938696	
91	91	1096.35	1091.70	6.17934	717.139	459.129	2.02174	11344750	
92	92	1104.91	1109.21	6.17934	735.630	465.981	2.02151	11752979	
93	93	1123.14	1119.44	6.17934	749.301	472.778	2.02128	12175945	
94	94	1131.84	1136.13	6.17934	767.729	479.623	2.02105	12601327	
95	95	1145.55	1146.19	6.17934	768.150	486.417	2.02083	13035777	
96	96	1158.63	1158.54	6.17934	768.159	493.213	2.02062	13478562	
97	97	1173.02	1171.41	6.17934	770.738	500.003	2.02041	13931515	
98	98	1186.94	1185.77	6.17934	772.115	506.801	2.02020	14394107	

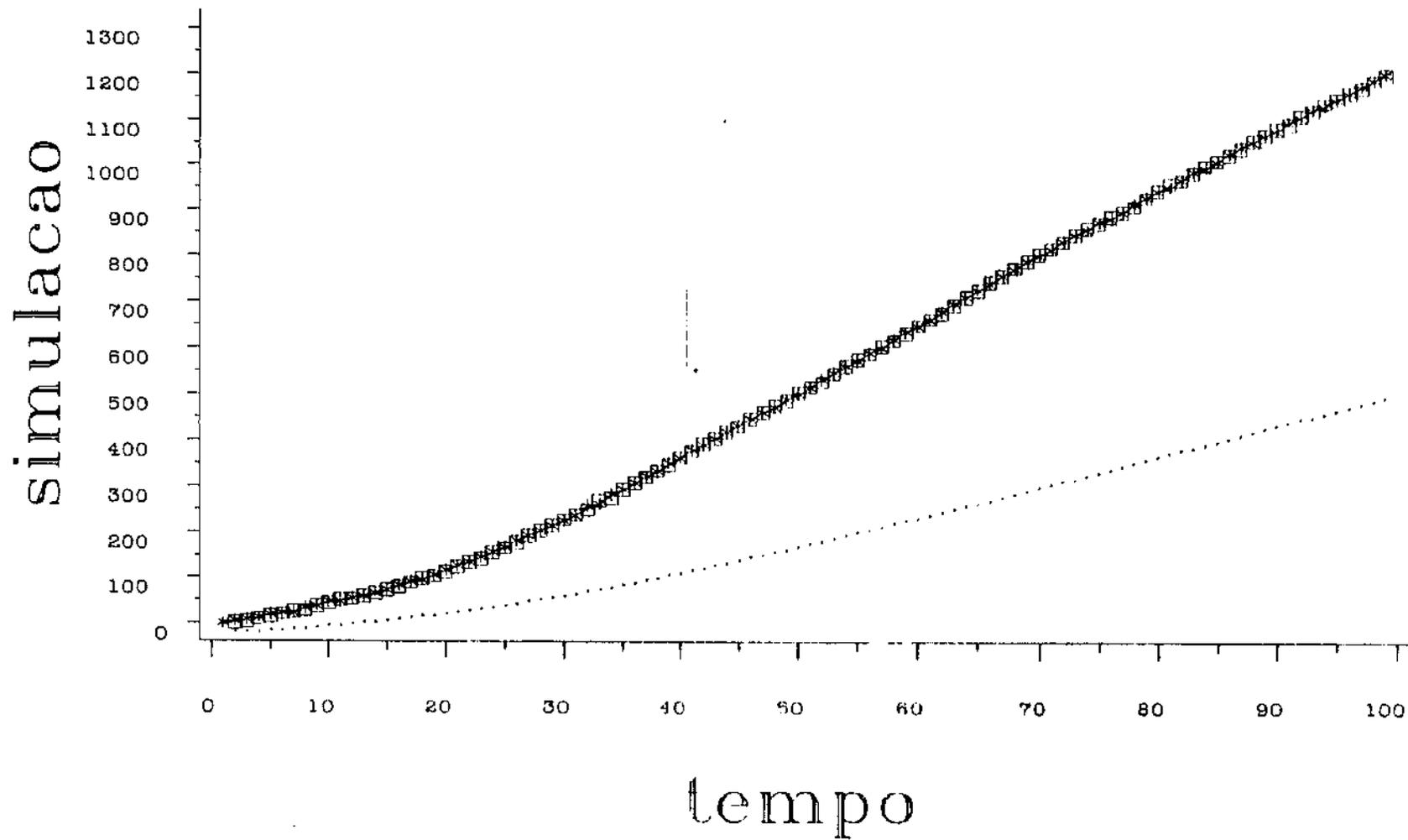


Figura 5.3.2.: Serie simulada segundo o modelo de Crescimento Linear.
Predicao da FK(---) e do BLUP(...).

Tabela 5.3.3.: Série simulada segundo o modelo de Crescimento Linear Sazonal, sua predição através do Filtro de Kalman e do BLUP, suas respectivas variâncias e a soma de quadrados dos erros de predição.

Obs.	I	Y_t	Filtro de Kalman				BLUP		
			y_t	Var	s^2 dos erros	y_t	Var	s^2 dos erros	
1	1	0.000	.	.	0.000	.	.	0.00	
2	2	1.746	1.176	8.20862	0.326	0.0000	2.37787	3.05	
3	3	0.740	2.553	8.36417	3.613	0.7748	1.90991	3.05	
4	4	4.011	1.746	8.54289	8.742	0.7640	1.72955	13.59	
5	5	1.953	4.637	8.67696	15.946	1.5272	1.63399	13.77	
6	6	2.363	3.005	8.77438	16.359	1.6082	1.57480	14.34	
7	7	-0.486	3.017	8.84359	28.634	1.7288	1.53454	19.25	
8	8	-0.600	0.114	8.89189	29.143	1.4235	1.50538	23.35	
9	9	-3.840	-0.519	8.92515	40.171	1.1783	1.48328	48.53	
10	10	-6.613	-3.851	8.94786	47.803	0.6361	1.46596	101.08	
11	11	-5.050	-7.110	8.96326	52.048	-0.0709	1.45202	125.87	
12	12	-6.909	-5.957	8.97366	52.956	-0.5133	1.44056	166.78	
13	13	-8.854	-7.512	8.98066	54.756	-1.0353	1.43096	227.92	
14	14	-8.065	-9.599	8.98537	57.110	-1.6252	1.42282	269.39	
15	15	-7.923	-9.005	8.98853	58.280	-2.0770	1.41581	303.57	
16	16	-7.702	-8.636	8.99065	59.152	-2.4602	1.40973	331.04	
17	17	-8.910	-8.254	8.99207	59.583	-2.7827	1.40439	368.59	
18	18	-9.392	-9.326	8.99302	59.587	-3.1379	1.39968	407.71	
19	19	-8.718	-9.905	8.99366	60.995	-3.4805	1.39548	435.14	
20	20	-10.897	-9.238	8.99409	63.746	-3.7525	1.39171	486.18	
21	21	-11.731	-11.245	8.99437	63.981	-4.1052	1.38832	544.33	
22	22	-11.847	-12.325	8.99456	64.210	-4.4640	1.38525	598.84	
23	23	-13.047	-12.511	8.99469	64.497	-4.7958	1.38245	666.92	
24	24	-12.417	-13.642	8.99478	65.997	-5.1506	1.37989	719.72	
25	25	-13.158	-13.088	8.99483	66.002	-5.4502	1.37755	779.13	
26	26	-14.607	-13.649	8.99487	66.919	-5.7554	1.37539	857.47	
27	27	-11.350	-15.110	8.99490	81.059	-6.0925	1.37339	885.11	
28	28	-14.300	-11.986	8.99492	86.411	-6.2854	1.37154	949.34	
29	29	-15.994	-14.388	8.99493	88.991	-6.5691	1.36982	1038.17	
30	30	-13.021	-16.426	8.99494	100.583	-6.8913	1.36822	1075.75	
31	31	-15.041	-13.682	8.99494	102.429	-7.0939	1.36673	1138.90	
32	32	-13.527	-15.204	8.99494	105.239	-7.3481	1.36533	1177.08	
33	33	-10.646	-13.887	8.99495	115.741	-7.5397	1.36402	1186.73	
34	34	-13.110	-10.752	8.99495	121.298	-7.6331	1.36278	1216.72	
35	35	-9.518	-12.744	8.99495	131.706	-7.7930	1.36162	1219.70	
36	36	-7.182	-9.493	8.99495	137.047	-7.8419	1.36053	1220.14	
37	37	-5.794	-6.677	8.99495	137.827	-7.8237	1.35949	1224.26	
38	38	-3.611	-4.948	8.99495	139.614	-7.7692	1.35851	1241.55	
39	39	-4.768	-2.632	8.99495	144.176	-7.6605	1.35758	1249.91	
40	40	-1.241	-3.597	8.99495	149.724	-7.5869	1.35670	1290.18	
41	41	-1.486	-0.380	8.99495	150.948	-7.4292	1.35587	1325.50	
42	42	2.753	-0.280	8.99495	160.146	-7.2852	1.35507	1426.26	
43	43	2.274	3.802	8.99495	162.481	-7.0476	1.35431	1513.15	

tinuação da tabela 5.3.3.

		Filtro de Kalman				BLUP		
s.	I	Y_t	y_t	Var	s^2 dos erros	y_t	Var	s^2 dos erros
4	44	3.359	3.767	8.99495	162.647	-6.8321	1.35359	1617.01
5	45	0.903	4.626	8.99495	176.507	-6.6018	1.35290	1673.33
6	46	2.418	2.102	8.99495	176.607	-6.4360	1.35223	1751.72
7	47	3.340	3.070	8.99495	176.679	-6.2446	1.35160	1843.59
8	48	-0.835	4.039	8.99495	200.439	-6.0417	1.35100	1870.70
9	49	1.484	-0.106	8.99495	202.967	-5.9338	1.35042	1925.72
0	50	1.557	1.500	8.99495	202.971	-5.7832	1.34986	1979.60
1	51	-0.595	1.807	8.99495	208.738	-5.6372	1.34933	2005.03
2	52	-0.102	-0.342	8.99495	208.796	-5.5388	1.34881	2034.59
3	53	-1.533	-0.201	8.99495	210.569	-5.4347	1.34832	2049.82
4	54	0.195	-1.600	8.99495	213.790	-5.3615	1.34784	2080.69
5	55	-0.318	-0.064	8.99495	213.855	-5.2590	1.34739	2105.11
6	56	-5.365	-0.313	8.99495	239.378	-5.170	1.34694	2105.1
7	57	-3.079	-5.409	8.99495	244.808	-5.173	1.34652	2109.5
8	58	-3.621	-3.860	8.99495	244.865	-5.137	1.34611	2111.8
9	59	-1.520	-4.060	8.99495	251.314	-5.110	1.34571	2124.7
0	60	-5.075	-1.919	8.99495	261.274	-5.050	1.34533	2124.7
1	61	-2.129	-5.106	8.99495	270.134	-5.050	1.34496	2133.3
2	62	-4.857	-2.618	8.99495	275.144	-5.003	1.34460	2133.3
3	63	-1.547	-4.912	8.99495	286.468	-5.000	1.34425	2145.2
4	64	-4.729	-1.926	8.99495	294.325	-4.946	1.34392	2145.2
5	65	-5.837	-4.618	8.99495	295.811	-4.942	1.34359	2146.0
6	66	-5.750	-6.141	8.99495	295.964	-4.956	1.34327	2146.7
7	67	-9.097	-6.232	8.99495	304.169	-4.968	1.34297	2163.7
8	68	-9.382	-9.527	8.99495	304.190	-5.029	1.34267	2182.7
9	69	-11.495	-10.234	8.99495	305.780	-5.093	1.34238	2223.6
0	70	-11.543	-12.328	8.99495	306.396	-5.186	1.34210	2264.1
1	71	-13.156	-12.559	8.99495	306.752	-5.276	1.34183	2326.1
2	72	-17.556	-14.058	8.99495	318.988	-5.387	1.34157	2474.2
3	73	-12.218	-18.554	8.99495	359.123	-5.555	1.34131	2518.6
4	74	-12.789	-13.717	8.99495	359.986	-5.646	1.34106	2569.7
5	75	-14.675	-13.354	8.99495	361.732	-5.742	1.34082	2649.5
6	76	-13.500	-15.107	8.99495	364.313	-5.861	1.34058	2707.8
7	77	-16.934	-14.123	8.99495	372.220	-5.961	1.34035	2828.2
8	78	-16.320	-17.326	8.99495	373.233	-6.103	1.34013	2932.6
9	79	-21.579	-17.123	8.99495	393.087	-6.234	1.33991	3168.1
0	80	-24.643	-22.243	8.99495	398.845	-6.427	1.33969	3499.9
1	81	-29.471	-25.968	8.99495	411.117	-6.654	1.33949	4020.5
2	82	-29.382	-31.156	8.99495	414.262	-6.935	1.33928	4524.4
3	83	-31.868	-31.579	8.99495	414.346	-7.208	1.33908	5132.5
4	84	-32.984	-33.804	8.99495	415.017	-7.504	1.33889	5781.7
5	85	-38.873	-34.961	8.99495	430.318	-7.807	1.33870	6746.8
6	86	-40.060	-40.737	8.99495	430.777	-8.171	1.33852	7763.7
7	87	-45.294	-42.498	8.99495	438.594	-8.541	1.33834	9114.5
8	88	-43.912	-47.638	8.99495	452.479	-8.962	1.33816	10336.0

tinuação da tabela 5.3.3.

		Filtro de Kalman				BLUP		
a.	I	Y_t	y_t	Var	s^2 dos erros	y_t	Var	s^2 dos erros
9	89	-50.355	-46.660	8.99495	466.130	-9.358	1.33799	12016.8
0	90	-55.736	-52.562	8.99495	476.201	-9.817	1.33782	14125.3
1	91	-57.435	-58.493	8.99495	477.320	-10.326	1.33766	16344.6
2	92	-61.765	-60.657	8.99495	478.547	-10.842	1.33750	18937.7
3	93	-64.605	-64.834	8.99495	478.599	-11.394	1.33734	21769.1
4	94	-67.137	-67.837	8.99495	479.089	-11.965	1.33719	24813.1
5	95	-70.610	-70.333	8.99495	479.165	-12.550	1.33704	28184.0
6	96	-73.316	-73.704	8.99495	479.315	-13.160	1.33689	31802.8
7	97	-79.117	-76.450	8.99495	486.432	-13.785	1.33674	36071.2
8	98	-79.509	-82.200	8.99495	493.672	-14.457	1.33660	40303.0

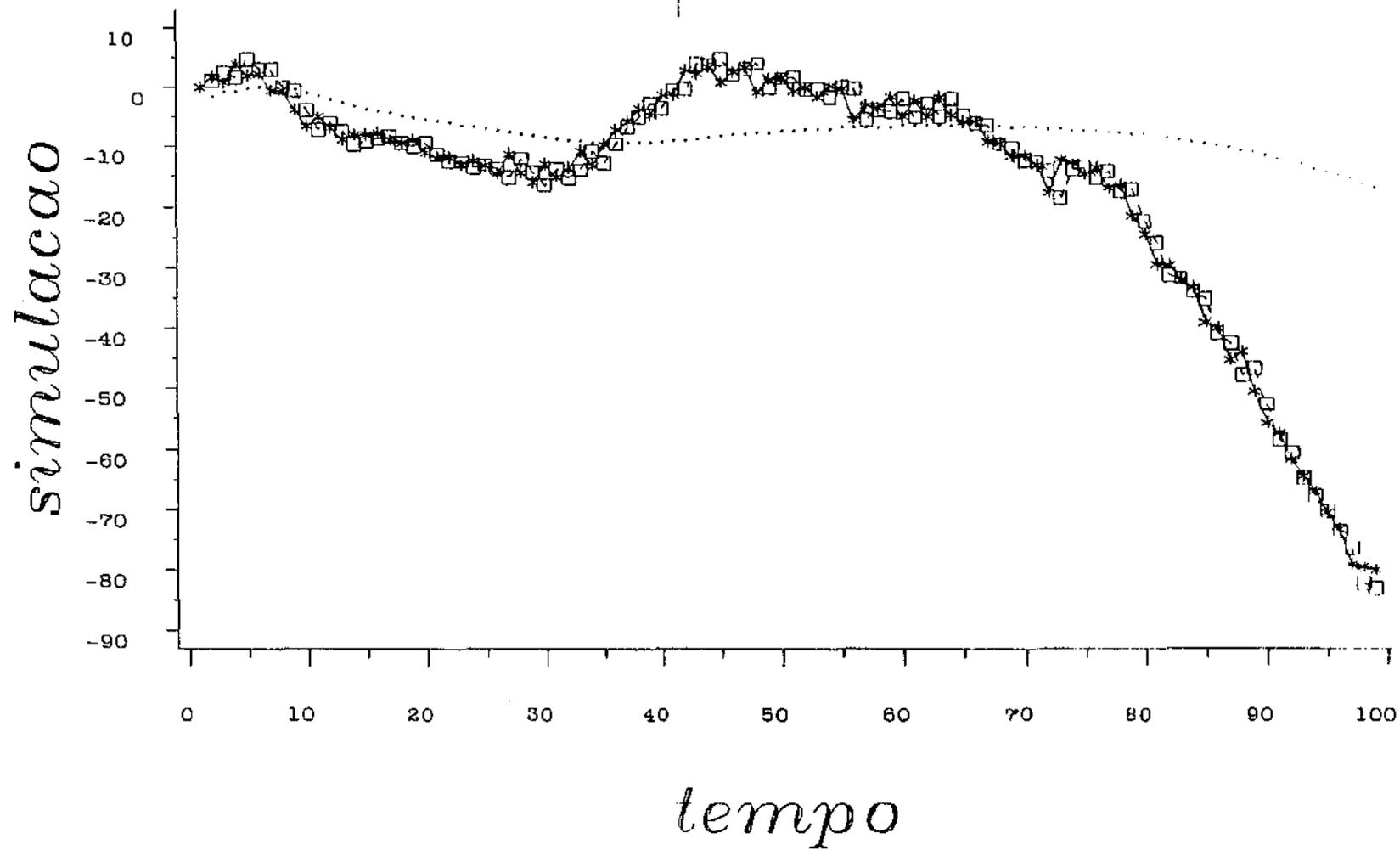


Figura 5.3.3.: Serie simulada segundo o modelo de Crescimento Linear Sazonal.
Predicao da FK(---) e do BLUP(...).

Tabela 5.4.1.: Incidência de sarampo a nível hospitalar do município de Campinas de janeiro de 1979 a março de 1987, mês a mês.

Obs.:	I :	Ano	Mês	Sarampo
1	1	1979	1	49
2	2	1979	2	31
3	3	1979	3	23
4	4	1979	4	14
5	5	1979	5	30
6	6	1979	6	60
7	7	1979	7	73
8	8	1979	8	140
9	9	1979	9	115
10	10	1979	10	125
11	11	1979	11	61
12	12	1979	12	52
13	13	1980	1	57
14	14	1980	2	57
15	15	1980	3	38
16	16	1980	4	48
17	17	1980	5	45
18	18	1980	6	64
19	19	1980	7	107
20	20	1980	8	105
21	21	1980	9	71
22	22	1980	10	45
23	23	1980	11	22
24	24	1980	12	10
25	25	1981	1	6
26	26	1981	2	2
27	27	1981	3	7
28	28	1981	4	6
29	29	1981	5	8
30	30	1981	6	24
31	31	1981	7	20
32	32	1981	8	26
33	33	1981	9	12
34	34	1981	10	25
35	35	1981	11	15
36	36	1981	12	11
37	37	1982	1	2
38	38	1982	2	17
39	39	1982	3	41
40	40	1982	4	50
41	41	1982	5	25
42	42	1982	6	35
43	43	1982	7	25
44	44	1982	8	29
45	45	1982	9	36
46	46	1982	10	19
47	47	1982	11	21

continuação da tabela 5.4.1.

Obs.:	I :	Ano	Mês	Sarampo
48	48	1982	12	9
49	49	1983	1	7
50	50	1983	2	5
51	51	1983	3	2
52	52	1983	4	0
53	53	1983	5	3
54	54	1983	6	6
55	55	1983	7	3
56	56	1983	8	3
57	57	1983	9	7
58	58	1983	10	11
59	59	1983	11	23
60	60	1983	12	12
61	61	1984	1	7
62	62	1984	2	2
63	63	1984	3	0
64	64	1984	4	4
65	65	1984	5	1
66	66	1984	6	2
67	67	1984	7	42
68	68	1984	8	66
69	69	1984	9	84
70	70	1984	10	88
71	71	1984	11	57
72	72	1984	12	42
73	73	1985	1	32
74	74	1985	2	8
75	75	1985	3	17
76	76	1985	4	16
77	77	1985	5	23
78	78	1985	6	15
79	79	1985	7	13
80	80	1985	8	10
81	81	1985	9	21
82	82	1985	10	17
83	83	1985	11	20
84	84	1985	12	9
85	85	1986	1	8
86	86	1986	2	4
87	87	1986	3	2
88	88	1986	4	1
89	89	1986	5	1
90	90	1986	6	0
91	91	1986	7	3
92	92	1986	8	11
93	93	1986	9	31
94	94	1986	10	45
95	95	1986	11	20

continuação da tabela 5.4.1.

Obs.:	I :	Ano	Mês	Sarampo
96	96	1986	12	10
97	97	1987	1	9
98	98	1987	2	12

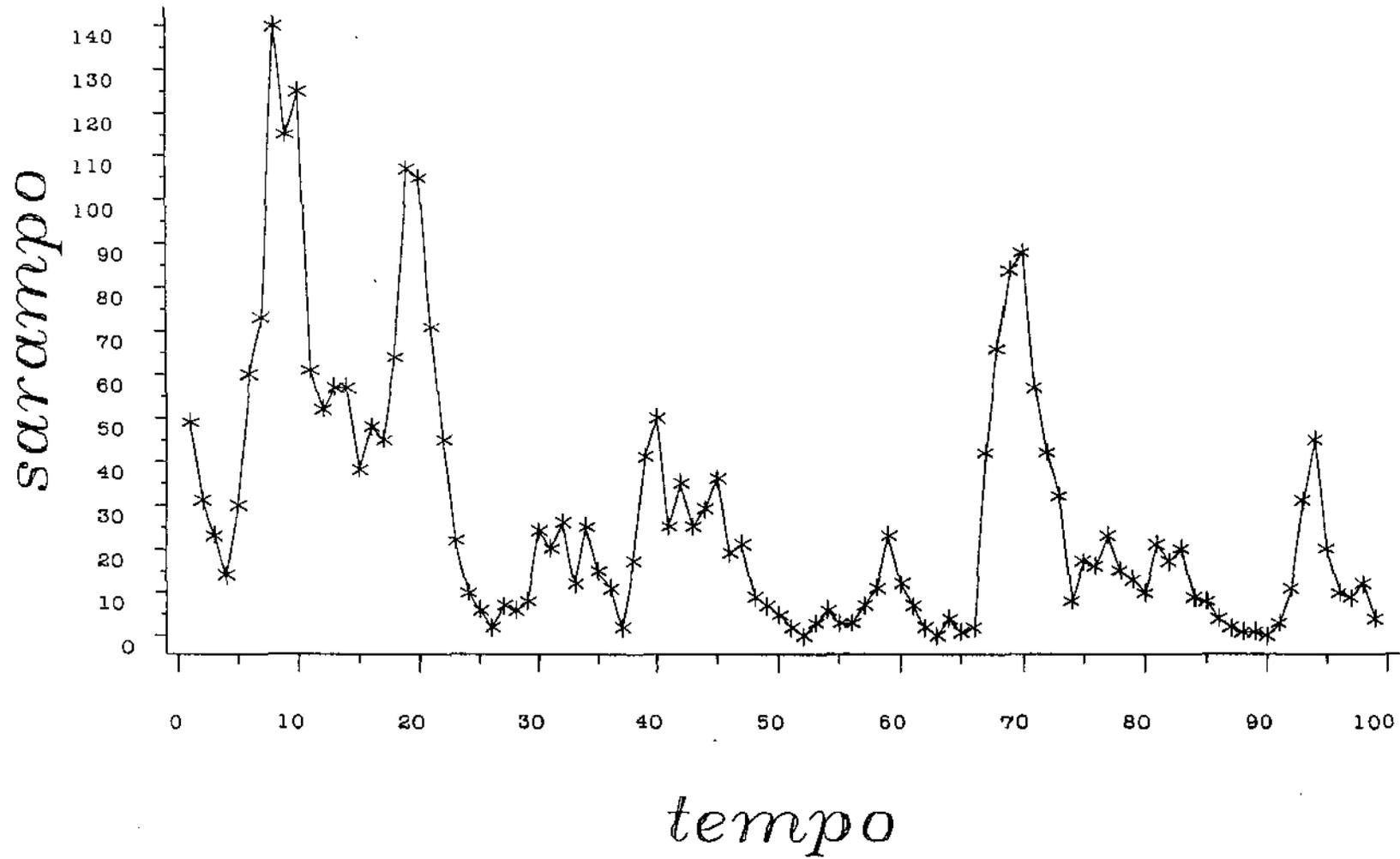


Figura 5.4.1.: Incidência de Sarampo no Município de Campinas.

Tabela 5.4.2.: Incidência de Sarampo, sua predição através do Filtro de Kalman e do BLUP, suas respectivas variâncias e a soma de quadrados dos erros de predição.

Obs.	t	Filtro de Kalman				BLUP		
		Y_t	y_t	Var	S ² dos erros	y_t	Var	S ² dos erros
1	1	7.0000	.	.	0.000	.	.	0.000
2	2	5.5677	11.3377	26.9400	33.292	4.1141	12.5961	2.113
3	3	4.7958	12.6221	19.1869	94.543	2.8418	8.7212	5.931
4	4	3.7417	9.0794	24.9829	123.034	3.4513	9.8791	6.016
5	5	5.4772	8.5969	23.2238	132.767	3.5110	8.4566	9.882
6	6	7.7460	8.8871	22.6507	134.069	3.3312	8.3399	29.372
7	7	8.5440	5.3378	30.8679	144.348	5.9101	9.1403	36.309
8	8	11.8322	10.1258	46.1033	147.260	7.0594	11.5430	59.088
9	9	10.7238	13.2482	33.2577	153.632	9.0839	10.8948	61.778
10	10	11.1803	15.5767	48.8146	172.961	7.2077	11.1943	77.559
11	11	7.8102	12.8966	34.3338	198.831	5.7672	8.8315	81.733
12	12	7.2111	8.8232	24.6682	201.430	5.8971	9.2016	83.460
13	13	7.5498	5.9695	73.0752	203.927	7.5153	8.2197	83.461
14	14	7.5498	6.8050	31.9863	204.482	7.1290	8.5413	83.638
15	15	6.1644	6.5313	30.9362	204.617	4.3632	7.9002	86.883
16	16	6.9282	5.6388	27.0903	206.279	3.5527	8.4415	98.277
17	17	6.7082	6.2179	25.1282	206.520	5.3883	7.8219	100.019
18	18	8.0000	6.2143	23.6296	209.708	5.4928	7.7130	106.305
19	19	10.3441	7.9010	34.8241	215.677	7.6724	8.1495	113.443
20	20	10.2470	10.7675	50.1985	215.948	10.7081	8.4840	113.656
21	21	8.4261	10.5401	34.2295	220.417	11.1755	8.6069	121.215
22	22	6.7082	7.3597	50.7970	220.841	8.6474	8.8446	124.975
23	23	4.6904	6.0431	35.2066	222.671	5.7926	8.1324	126.190
24	24	3.1623	4.0650	24.5600	223.486	5.2781	8.4167	130.667
25	25	2.4495	6.4286	74.1432	239.320	7.9675	7.8407	161.116
26	26	1.4142	1.9446	31.8919	239.601	7.7054	8.0548	200.694
27	27	2.6458	-0.1825	30.9812	247.600	4.5407	7.7325	204.285
28	28	2.4495	1.5282	26.9078	248.449	3.8641	8.0828	206.287
29	29	2.8284	1.7170	25.3001	249.684	4.9689	7.6842	210.868
30	30	4.8990	2.2869	23.7275	256.507	4.9154	7.6128	210.869
31	31	4.4721	4.5322	34.9716	256.511	6.7906	7.8918	216.244
32	32	5.0990	5.6202	50.2913	256.782	9.2482	8.0656	233.460
33	33	3.4641	5.5200	34.9477	261.009	9.3813	8.1754	268.473
34	34	5.0000	4.0536	51.1350	261.905	7.2605	8.2980	273.582
35	35	3.8730	4.9884	35.2859	263.149	4.9814	7.9063	274.811
36	36	3.3166	4.2038	24.3976	263.936	4.6314	8.1275	276.539
37	37	1.4142	3.5205	74.5062	268.372	6.5210	7.7045	302.619
38	38	4.1231	0.9464	31.7837	278.464	6.2826	7.8612	307.282
39	39	6.4031	3.2528	30.9277	288.388	3.9890	7.6557	313.110
40	40	7.0711	6.4253	26.6605	288.805	3.6253	7.9159	324.983
41	41	5.0000	6.9293	25.2435	292.528	4.6707	7.6190	325.092
42	42	5.9161	5.5360	23.7406	292.672	4.6036	7.5671	326.814
43	43	5.0000	5.6594	34.9760	293.107	6.2790	7.7683	328.450

continuação da tabela 5.4.2.

Obs.	I	Filtro de Kalman				BLUP		
		Y_t	y_t	Var	S ² dos erros	y_t	Var	S ² dos erros
44	44	5.3852	3.5290	50.1416	296.552	7.9610	7.8928	335.085
45	45	6.0000	5.1914	35.5590	297.206	8.1077	7.9865	339.527
46	46	4.3589	6.9416	51.4290	303.876	6.4224	8.0542	343.785
47	47	4.5826	5.5563	35.3499	304.824	4.5856	7.7923	343.785
48	48	3.0000	4.5779	24.1644	307.314	4.2975	7.9739	345.469
49	49	2.6458	5.0048	74.8215	312.879	6.1907	7.6342	358.036
50	50	2.2361	2.6068	31.6659	313.016	6.1481	7.7568	373.339
51	51	1.4142	2.2241	30.8595	313.672	4.0576	7.6103	380.327
52	52	0.0000	0.9185	26.3302	314.516	3.6435	7.8181	393.602
53	53	1.7321	-0.2635	25.1618	318.498	4.2731	7.5802	400.058
54	54	2.4495	0.8546	23.7447	321.042	4.1979	7.5398	403.115
55	55	1.7321	1.7008	34.9429	321.043	5.5773	7.6956	417.901
56	56	1.73205	2.66504	49.9213	321.913	7.22710	7.79669	448.097
57	57	2.64575	1.89818	36.0640	322.472	7.27404	7.87844	469.518
58	58	3.31662	2.72815	51.6758	322.818	5.87320	7.91612	476.054
59	59	4.79583	2.71877	35.3973	327.133	4.25190	7.72266	476.350
60	60	3.46410	5.08052	23.8181	329.745	4.09522	7.87734	476.748
61	61	2.64575	3.08311	75.0871	329.937	5.36549	7.59118	484.145
62	62	1.41421	2.55240	31.5342	331.232	5.25990	7.69143	498.935
63	63	0.00000	2.27239	30.7722	336.396	3.58072	7.57992	511.756
64	64	2.00000	-0.99865	25.8642	345.388	3.08682	7.75320	512.937
65	65	1.00000	1.53080	25.0507	345.670	3.80939	7.55415	520.830
66	66	1.41421	0.95878	23.7354	345.877	3.78829	7.52127	526.466
67	67	6.48074	1.17211	34.8566	374.059	4.84528	7.64758	529.141
68	68	8.12404	5.65597	49.5892	380.150	6.48836	7.73477	531.816
69	69	9.16515	8.35446	36.4641	380.807	6.84994	7.80757	537.177
70	70	9.38083	7.00537	51.8756	386.450	5.85521	7.82724	549.607
71	71	7.54983	7.46483	35.4234	386.457	4.38629	7.67534	559.615
72	72	6.48074	8.52219	23.2799	390.625	4.42451	7.81049	563.843
73	73	5.65685	8.95538	75.3033	401.505	5.20351	7.56215	564.048
74	74	2.82843	5.63625	31.3824	409.389	4.99273	7.64656	568.732
75	75	4.12311	2.16533	30.6587	413.222	3.37307	7.55787	569.295
76	76	4.00000	1.88152	25.1555	417.710	2.78819	7.70672	570.763
77	77	4.79583	5.34844	24.9000	418.015	3.78689	7.53536	571.781
78	78	3.87298	5.32785	23.7007	420.132	3.90378	7.50768	571.782
79	79	3.60555	4.75267	34.6843	421.448	4.90504	7.61351	573.471
80	80	3.16228	4.48526	49.0549	423.198	6.73995	7.69125	586.271
81	81	4.58258	3.48091	36.7690	424.411	6.96061	7.75710	591.926
82	82	4.12311	4.63515	52.0304	424.674	6.06565	7.76524	595.699
83	83	4.47214	3.66218	35.4202	425.330	4.48596	7.64090	595.700
84	84	3.00000	5.38856	22.3704	431.035	4.44226	7.76117	597.780
85	85	2.82843	2.74889	5.4705	431.041	5.05158	7.54121	602.722
86	86	2.00000	2.92728	31.1980	431.901	4.82839	7.61384	610.722
87	87	1.41421	1.92034	30.5063	432.157	3.36569	7.54102	614.530
88	88	1.00000	-0.35740	23.9352	434.000	2.77680	7.67165	617.687

continuação da tabela 5.4.2.

Obs.	I	Y_t	Filtro de Kalman				BLUP		
			y_t	Var	S^2 dos erros	y_t	Var	S^2 dos erros	
89	89	1.00000	1.24285	24.6926	434.059	3.62225	7.52107	624.563	
90	90	0.00000	0.41762	23.6083	434.233	3.70105	7.49720	638.261	
91	91	1.73205	0.40736	34.3388	435.988	4.54938	7.58805	646.198	
92	92	3.31662	0.15165	48.0681	446.005	6.31942	7.65881	655.215	
93	93	5.56776	3.09603	36.9898	452.115	6.57645	7.71913	656.233	
94	94	6.70820	3.73470	52.1399	460.956	5.85861	7.71952	656.954	
95	95	4.47214	4.63925	35.3659	460.984	4.40133	7.61461	656.959	
96	96	3.16228	6.73938	20.5483	473.780	4.41701	7.72312	658.534	
97	97	3.00000	3.17647	75.5790	473.811	4.74139	7.52539	661.566	

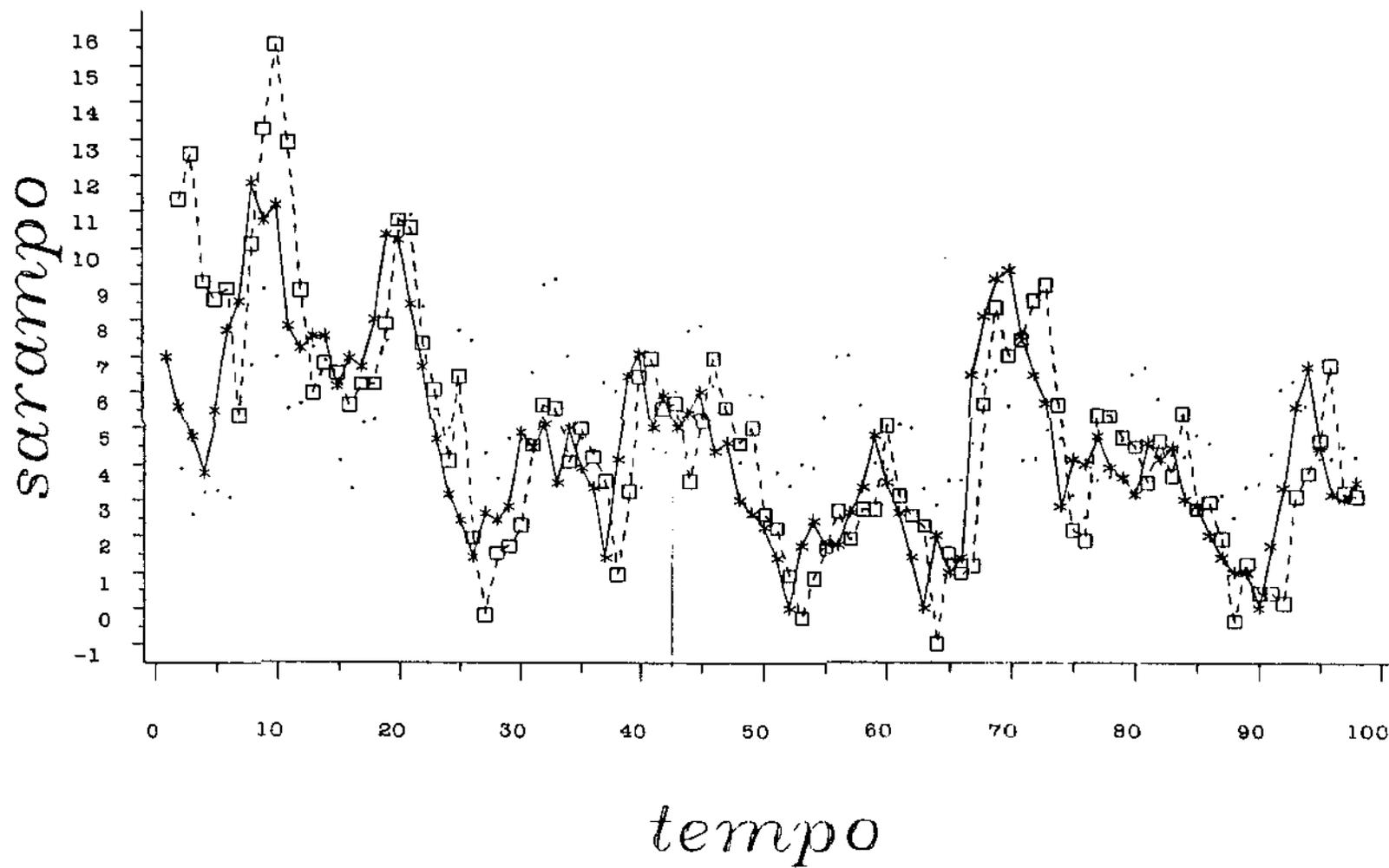


Figura 5.4.2.: Incidência de Sarampo no Município de Campinas.
 Predicao do FK(---) e do BLUP(...).

A P P E N D I C E

Programa 1: Programa para simular uma série segundo um modelo Estável, fazer a predição através do Filtro de Kalman e do BLUP, as variâncias e as somas de quadrados dos erros de predição para cada técnica.

```

PROC IML;

START KALMAN;
  R = G*SIGMA*G` + W;
  E = Y - F*G*TETA;
  VI = INV(V + F*R*F`);
  SIGMA = R - R*F`*VI*F*R;
  DIAGONAL=VECDIAG(SIGMA);
  TETA = G*TETA + R*F`*VI*E;
FINISH;

START QUADRADO;
  VIQ = INV(FQ*W*FQ` + V*I(1));
  SIGMAQ = W - W*FQ`*VIQ*FQ*W;
  DIAGQ = VECDIAG(SIGMAQ);
  TETAQ = W*FQ`*VIQ*YQ;
FINISH;

START INIC;
  Y = 0;
  YQ = 0;
  TETASM = 2;
  TETA = 1;
  SEED1 = 0.1;
  SEED2 = 0.4;
  G = 1;
  F = 1;
  FQ = 1;
  W = 1;
  SIGMA = 1;
  V = 2;
  S1 = 1;
  S12 = SQRT(2);
  NY = 100;
  S2 = 0;
  S2Q = 0;
  ERRO = 0;
  ERROQ = 0;
FINISH;

START SIMUL;
  TETASM = G*TETASM + NORMAL(SEED1)*S1;
  YSM = F * TETASM + NORMAL(SEED2)*S12;
FINISH;

START PREDKALMAN;
  YP = F*G*TETA;
  VAR = F*G*SIGMA*G`*F` + F*W*F` + V;

```

```

FINISH;

START PREDQUAD;
  YPQ = FQ*TETAQ;
  VARQ = FQ*SIGMAQ*FQ` + V*1(J);
  YPQ1 = YPQ(1J,1);
  DIVARQ = VECDIAG(VARQ);
  DIVARQ1 = DIVARQ(1J,1);
FINISH;

START EXEC;
  RUN INIC;
  DO I=1 TO NY-1;
    RUN KALMAN;
    RUN QUADRADO;
    J=I+1;
    RUN PREDKALMAN;
    IF I=1 THEN OUT1=1::YP::Y::VAR::TETA::TETASM::DIAGONAL::ERRO::S2;
      ELSE OUT1=OUT1/(1::YP::Y::VAR::TETA::TETASM::DIAGONAL::ERRO::S2);
    FQ = FQ/F;
    RUN PREDQUAD;
    IF I=1 THEN OUT2=1::TETAQ::TETASM::DIAGQ::YPQ1::Y::DIVARQ1::ERROQ::S2Q;
      ELSE OUT2=OUT2/(1::TETAQ::TETASM::DIAGQ::YPQ1::Y::DIVARQ1::ERROQ::S2Q);
    RUN SIMUL;
    Y = YSM; YQ = YQ//Y;
    ERRO = Y-YP;
    S2 = S2+ERRO*ERRO;
    ERROQ = Y-YPQ1;
    S2Q = S2Q+ERROQ*ERROQ;
  END;
FINISH;

RUN EXEC;

VARNAMES = {1 YP Y VAR TETA TETASM SIGMA ERRO S2};
CREATE GRAFICO1 FROM OUT1 (!COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT1;
CLOSE OUT1;

VARNAMES = {1 TETAQ TETASM SIGMAQ YPQ1 Y DIVARQ1 ERROQ S2Q};
CREATE GRAFICO2 FROM OUT2 (!COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT2;
CLOSE OUT2;

QUIT;

DATA RESULT1;
  SET GRAFICO1; BY 1;
  YPT = LAG(YP);
  VART = LAG(VAR);

PROC PRINT;

```

```
VAR I TETA TETASM SIGMA Y YPT VART ERRO S2;

DATA RESULT2;
  SET GRAFICO2; BY 1;
  YPQT=LAG(YPQ1);
  DIVARQT=LAG(DIVARQ1);

PROC PRINT;
  VAR I TETAQ TETASM SIGMAQ Y YPQT DIVARQT ERROQ S2Q;

LIBNAME IN 'CLAUDIA';
DATA IN.ESTAVEL;
  SET RESULT1;
  SET RESULT2;

PROC PLOT;
  PLOT YPT*1='*' Y*1='+' YPQT*1='&' /OVERLAY;
  TITLE 'DADOS SIMULADOS-MODELO ESTAVEL';
```

Programa 2: Programa para simular uma série segundo um modelo de Crescimento Linear, fazer a predição através do Filtro de Kalman e do BLUP, as variâncias e as somas de quadrados dos erros de predição para cada técnica.

```
PROC IML;
```

```
START KALMAN;
```

```
  R = G*SIGMA*G` + W;
  E = Y - F*G*TETA;
  VI = INV(V + F*R*F`);
  SIGMA = R - R*F`*VI*F*R;
  DIAGONAL=VECDIAG(SIGMA);
  TETA = G*TETA + R*F`*VI*E;
FINISH;
```

```
START QUADRADO;
```

```
  VIQ = INV(FQ*W*FQ` + V*I(1));
  SIGMAQ = W - W*FQ`*VIQ*FQ*W;
  DIAGQ = VECDIAG(SIGMAQ);
  TETAQ = W*FQ`*VIQ*YQ;
```

```
FINISH;
```

```
START INIC;
```

```
  Y = 0;
  YQ = 0;
  TETASM = (2,
            2);
  TETA = (1,
          1);
  SEED1 = 0.1;
  SEED2 = 0.4;
  G = (1 1,
       0 1);
  F = (1 0);
  FQ = F;
  W = (1.0 0.5,
       0.5 0.5);
  SIGMA = W;
  V = 2;
  S1 = (1.0,
        0.5);
  S12 = SQRT(2);
  NY = 100;
  S2 = 0;
  S2Q = 0;
  ERRO = 0;
  ERROQ = 0;
  C = (1,
       1);
```

```
FINISH;
```

```

START SIMUL;
  TETASM = G*TETASM + NORMAL(SEED1)*S1;
  YSM = F * TETASM + NORMAL(SEED2)*S12;
FINISH;

START PREDKALMAN;
  YP = F*G*TETA;
  VAR = F*G*SIGMA*G`*F` + F*W*F` + V;
FINISH;

START PREDQUAD;
  YPQ = FQ*TETAQ;
  VARQ = FQ*SIGMAQ*FQ` + V*I(J);
  YPQ1 = YPQ(!J, !);
  DIVARQ = VECDIAG(VARQ);
  DIVARQ1 = DIVARQ(!J, !);
FINISH;

START EXEC;
  RUN INIC;
  DO I=1 TO NY-1;
    RUN KALMAN;
    RUN QUADRADO;
    J=I+1; Z=I*C;
    RUN PREDKALMAN;
    IF I=1 THEN OUT1=I::YP::Y::VAR::ERRO::S2;
      ELSE OUT1=OUT1//(I::YP::Y::VAR::ERRO::S2);
    IF I=1 THEN OUT2=Z::TETA::TETASM::DIAGONAL;
      ELSE OUT2=OUT2//(Z::TETA::TETASM::DIAGONAL);
    FQ = FQ//F;
    RUN PREDQUAD;
    IF I=1 THEN OUT3=I::YPQ1::Y::DIVARQ1::ERROQ::S2Q;
      ELSE OUT3=OUT3//(I::YPQ1::Y::DIVARQ1::ERROQ::S2Q);
    IF I=1 THEN OUT4=Z::TETAQ::TETASM::DIAGQ;
      ELSE OUT4=OUT4//(Z::TETAQ::TETASM::DIAGQ);
    RUN SIMUL;
    Y = YSM;
    YQ = YQ//Y;
    ERRO = Y-YP;
    S2 = S2+ERRO*ERRO;
    ERROQ = Y-YPQ1;
    S2Q = S2Q+ERROQ*ERROQ;
  END;
FINISH;

RUN EXEC;

VARNAMES = (I YP Y VAR ERRO S2);
CREATE GRAFICO1 FROM OUT1 (:COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT1;
CLOSE OUT1;

VARNAMES = (Z TETA TETASM DIAGONAL);
CREATE GRAFICO2 FROM OUT2 (:COLNAME=VARNAMES!);

```

```
APPEND FROM OUT2;
CLOSE OUT2;

VARNAMES = (I YPQ1 Y DIVARQ1 ERROQ S2Q);
CREATE GRAFICO3 FROM OUT3 (:COLNAME=VARNAMES:);
APPEND FROM OUT3;
CLOSE OUT3;

VARNAMES = (Z TETAQ TETASM DIAGQ);
CREATE GRAFICO4 FROM OUT4 (:COLNAME=VARNAMES:);
APPEND FROM OUT4;
CLOSE OUT4;

QUIT;

DATA RESULT1;
  SET GRAFICO1;BY 1;
  YPT = LAG(YP);
  VART= LAG(VAR);

PROC PRINT;
  VAR I Y YPT VART ERRO S2;

DATA RESULT2;
  SET GRAFICO2;

PROC PRINT;
  VAR Z TETA DIAGONAL;

DATA RESULT3;
  SET GRAFICO3;BY 1;
  YPQT=LAG(YPQ1);
  DIVARQT=LAG(DIVARQ1);

PROC PRINT;
  VAR I Y YPQT DIVARQT ERROQ S2Q;

DATA RESULT4;
  SET GRAFICO4;

PROC PRINT;
  VAR Z TETAQ TETASM DIAGQ;

LIBNAME IN '(CLAUDIA)';
DATA IN.LINEARSG;
  SET RESULT1;
  SET RESULT3;

PROC PLOT;
  PLOT YPT*I='*' Y*I='+' YPQT*I='&' /OVERLAY;
  TITLE 'DADOS SIMULADOS-MODELO CRESC. LINEAR ';
```

Programa 3: Programa para simular uma série segundo um modelo de Crescimento Linear Sazonal, fazer a predição através do Filtro de Kalman e do BLUP, as variâncias e as somas de quadrados dos erros de predição para cada técnica.

```
LIBNAME IN 'ICLAUDIA';
PROC IML;

START KALMAN;
  R = G*SIGMA*G` + W;
  E = Y - F*G*TETA;
  VI = INV(V + F*R*F`);
  SIGMA = R - R*F`*VI*F*R;
  DIAGONAL=VECDIAG(SIGMA);
  TETA = G*TETA + R*F`*VI*E;
FINISH;

START QUADRADO;
  VIQ = INV(FQ*W*FQ` + V*I(1));
  SIGMAQ = W - W*FQ`*VIQ*FQ*W;
  DIAGQ = VECDIAG(SIGMAQ);
  TETAQ = W*FQ`*VIQ*YQ;
FINISH;

START INIC;
  Y = 0;
  YQ = 0;
  TETA = J(14,1,1);
  TETASM = (0,0,0,0.5,0.9,1.0,0.9,0.5,0,-0.5,-0.9,-1,-0.9,-0.5);
  SEED1 = 0;
  SEED2 = 0;
  KK = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
        1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
        1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
        1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
        1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
        1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
        1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
        1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
        1,2,3,4};
  K = KK(:,1);
  F1 = J(12,1,1);
  F2 = J(12,1,0);
  F3 = F1||F2;
  F4 = I(12);
  FF = F3||F4;
  F = FF(:,K);
  FQ = F;
  G1 = {1 1,
        0 1};
  G2 = J(2,12,0);
  G3 = G2`;
  G4 = I(12);
```

```

G5 = G1!!G2;
G6 = G3!!G4;
G = G5//G6;
W1 = (5.2 0.2,
      0.2 0.2);
W2= W1!!G2;
W3 = J(12,12,0.005);
W4= G3!!W3;
W= W2//W4;
V = (1.323);
SIGMA = W;
NY = 100;
S1 = J(14,1,0.5);
S12 = 1;
S2 = 0;
S2Q = 0;
ERRO = 0;
ERROQ = 0;
C=J(14,1,1);
FINISH;

START SIMUL;
TETASH = G*TETASM + NORMAL(SEED1)*S1;
YSM = F*TETASH + NORMAL(SEED2)*S12;
FINISH;

START PREDKALMAN;
YP = F*G*TETA;
VAR = F*G*SIGMA*G`*F` + F*W*F` + V;
FINISH;

START PREDQUAD;
YPQ = FQ*TETAQ;
VARQ = FQ*SIGMAQ*FQ` + V*I(J);
YPQ1 = YPQ(!J,!);
DIVARQ = VECDIAG(VARQ);
DIVARQ1 = DIVARQ(!J,!);
FINISH;

START EXEC;
RUN INIC;
DO I=1 TO NY-1;
  RUN KALMAN;
  RUN QUADRADO;
  J=I+1;K = KK(!J,!);F= FF(!K,!);Z=I*C;
  RUN PREDKALMAN;
  IF I=1 THEN OUT1=I!!YP!!Y!!VAR!!ERRO!!S2;
  ELSE OUT1=OUT1//(I!!YP!!Y!!VAR!!ERRO!!S2);
  IF I=1 THEN OUT2=Z!!TETA!!DIAGONAL;
  ELSE OUT2=OUT2//(Z!!TETA!!DIAGONAL);
  FQ = FQ//F;
  RUN PREDQUAD;
  IF I=1 THEN OUT3=Z!!TETAQ!!DIAGQ;
  ELSE OUT3=OUT3//(Z!!TETAQ!!DIAGQ);
  IF I=1 THEN OUT4=I!!YPQ1!!Y!!DIVARQ1!!ERROQ!!S2Q;

```

```

ELSE OUT4=OUT4/(1+YPQ1+Y+DIVARQ1+ERROQ+S2Q);
RUN SIMUL;
Y = YSM;
YQ = YQ/Y;
ERRO = Y-YP;
S2 = S2+ERRO*ERRO;
ERROQ = Y-YPQ1;
S2Q = S2Q+ERROQ*ERROQ;
END;
FINISH;

RUN EXEC;

VARNAMES = {1 YP Y VAR ERRO S2};
CREATE GRAFICO FROM OUT1 (:COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT1;
CLOSE OUT1;

VARNAMES = {Z TETA DIAGONAL};
CREATE GRAFICO1 FROM OUT2 (:COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT2;
CLOSE OUT2;

VARNAMES = {Z TETAQ DIAGQ};
CREATE GRAFICO2 FROM OUT3 (:COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT3;
CLOSE OUT3;

VARNAMES = {1 YPQ1 Y DIVARQ1 ERROQ S2Q};
CREATE GRAFICO3 FROM OUT4 (:COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT4;
CLOSE OUT4;
QUIT;

DATA RESULT1;
SET GRAFICO1;

PROC PRINT;
VAR Z TETA DIAGONAL;

DATA RESULT;
SET GRAFICO; BY 1;
YPT = LAG(YP);
VARYPT=LAG(VAR);

PROC PRINT;
VAR 1 YPT Y VARYPT ERRO S2;

DATA RESULT2;
SET GRAFICO2;

PROC PRINT;
VAR Z TETAQ DIAGQ;

DATA RESULT3;

```

```
SET GRAFICO3;  
YPQT = LAG(YPQ1);  
VARQT = LAG(DIVARQ1);  
  
PROC PRINT;  
VAR I YPQT Y VARQT ERROQ S2Q;  
  
LIBNAME IN 'ICLAUDIA';  
DATA IN.SAZON;  
SET GRAFICO;  
SET GRAFICO3;  
YPT =LAG(YP);  
YPQT = LAG(YPQ1);  
  
PROC PLOT;  
PLOT YPT*I='*' Y*I='+' YPQT*I='&'/OVERLAY;  
TITLE 'DADOS SIMULADOS-MODELO SAZONAL';
```

Programa 4: Programa para calcular a predição da incidência de sarampo através do Filtro de Kalman e do BLUP, suas variâncias e as somas de quadrados dos erros de predição.

```
LIBNAME IN '[CLAUDIA]';
PROC IML;
```

```
START KALMAN;
  R = G*SIGMA*G` + W;
  E = Y - F*G*TETA;
  VI = INV(V + F*R*F`);
  SIGMA = R - R*F`*VI*F*R;
  DIAGONAL=VECDIAG(SIGMA);
  TETA = G*TETA + R*F`*VI*E;
FINISH;
```

```
START QUADRADO;
  VIQ = INV(FQ*W*FQ` + V*I(1));
  SIGMAQ = W - W*FQ`*VIQ*FQ*W;
  DIAGQ = VECDIAG(SIGMAQ);
  TETAQ = W*FQ`*VIQ*YQ;
FINISH;
```

```
START INIC;
  USE IN.ANAL;
  READ ALL VAR(RSARA) INTO YY;
  READ ALL VAR(MES) INTO KK;
  K = KK(:,1);
  F1 = J(12,1,1);
  F2 = J(12,1,0);
  F3 = F1||F2;
  F4 = I(12);
  FF = F3||F4;
  G1 = (1 1,
        0 1);
  G2 = J(2,12,0);
  G3 = G2`;
  G4 = I(12);
  G5 = G1||G2;
  G6 = G3||G4;
  G = G5//G6;
  W1 = (1 0.5,
        0.5 0.5);
  W2= W1||G2;
  W3=(7.84 8.55 4.75 5.08 5.42 4.82 8.24 9.34 9.51 5.73 3.39 2.45,
      8.55 9.80 5.54 6.53 6.21 5.23 9.42 9.40 9.34 4.55 2.53 1.20,
      4.75 5.54 3.14 3.82 3.51 2.90 5.31 5.07 4.99 2.20 1.18 0.38,
      5.08 6.53 3.82 5.31 4.12 3.06 6.22 4.45 4.05 0.23 -0.20 -1.4,
      5.42 6.21 3.51 4.12 3.93 3.31 5.96 5.98 5.94 2.92 1.63 0.79,
      4.82 5.23 2.90 3.06 3.31 2.96 5.04 5.79 5.91 3.63 2.16 1.60,
      8.24 9.42 5.31 6.22 5.96 5.04 9.05 9.13 9.09 4.52 2.54 1.28,
      9.34 9.40 5.07 4.45 5.98 5.79 9.13 12.4 13.0 9.58 5.94 5.31,
      9.51 9.34 4.99 4.05 5.94 5.91 9.09 13.0 13.8 10.6 6.63 6.13,
```

```

5.73 4.55 2.20 0.23 2.92 3.63 4.52 9.58 10.6 10.2 6.61 6.98,
3.39 2.53 1.18 -.20 1.63 2.16 2.54 5.94 6.63 6.61 4.31 4.64,
2.45 1.20 0.38 -1.4 0.79 1.60 1.28 5.31 6.13 6.98 4.64 5.26);
W4= G3;W3;
W= W2//W4;
V = (7.40893);
TETA2 = J(12,1,1);
TETA1 = (4,
         4);
TETA = TETA1//TETA2;
SIGMA = W;
SIGMAQ = W;
Y = YY(:,1);
NY = 99;
S2 = 0;
S2Q = 0;
ERRO = 0;
ERROQ = 0;
YQ = Y;
F = FF(:,1);
FQ = F;
C=J(14,1,1);
FINISH;

START VDEP;
Y = YY(:,J);
YQ = YQ//Y;
FINISH;

START PREDKALMAN;
F = FF(:,1);
YP = F*G*TETA;
VAR = F*G*SIGMA*G`*F` + F*W*F` + V;
FINISH;

START PREDQUAD;
YPQ = FQ*TETAQ;
VARQ = FQ*SIGMAQ*FQ` + V*I(J);
YPQ1 = YPQ(:,1);
DIVARQ = VECDIAG(VARQ);
DIVARQ1 = DIVARQ(:,1);
FINISH;

START EXEC;
RUN INIC;
DO I=1 TO NY-1;
  RUN KALMAN;
  RUN QUADRADO;
  J=I+1;K = KK(:,J);Z=I*C;
  RUN PREDKALMAN;
  IF I=1 THEN OUT1=I||YP||Y||VAR||ERRO||S2;
  ELSE OUT1=OUT1//(I||YP||Y||VAR||ERRO||S2);
  IF I=1 THEN OUT2=Z||TETA||DIAGONAL;
  ELSE OUT2=OUT2//(Z||TETA||DIAGONAL);
  FQ = FQ//F;

```

```

RUN PREDQUAD;
IF I=1 THEN OUT3=Z::TETAQ::DIAGQ;
      ELSE OUT3=OUT3//(Z::TETAQ::DIAGQ);
IF I=1 THEN OUT4=I::YPQ1::Y::DIVARQ1::ERROQ::S2Q;
      ELSE OUT4=OUT4//(I::YPQ1::Y::DIVARQ1::ERROQ::S2Q);
RUN VDEP;
ERRO = Y-YP;
S2 = S2+ERRO*ERRO;
ERROQ = Y-YPQ1;
S2Q = S2Q+ERROQ*ERROQ;
END;
FINISH;

RUN EXEC;

VARNAMES = (I YP Y VAR ERRO S2);
CREATE GRAFICO FROM OUT1 (!COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT1;
CLOSE OUT1;

VARNAMES = (Z TETA DIAGONAL);
CREATE GRAFICO1 FROM OUT2 (!COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT2;
CLOSE OUT2;

VARNAMES = (Z TETAQ DIAGQ);
CREATE GRAFICO2 FROM OUT3 (!COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT3;
CLOSE OUT3;

VARNAMES = (I YPQ1 Y DIVARQ1 ERROQ S2Q);
CREATE GRAFICO3 FROM OUT4 (!COLNAME=VARNAMES!);
APPEND FROM OUT4;
CLOSE OUT4;
QUIT;

DATA RESULT1;
  SET GRAFICO1;

PROC PRINT;
  VAR Z TETA DIAGONAL;

DATA RESULT;
  SET GRAFICO; BY I;
  YPT = LAG(YP);
  VARYPT=LAG(VAR);

PROC PRINT;
  VAR I YPT Y VARYPT ERRO S2;

DATA RESULT2;
  SET GRAFICO2;

PROC PRINT;
  VAR Z TETAQ DIAGQ;

```

```
DATA RESULT3;  
  SET GRAFICO3;  
  YPQT = LAG(YPQ1);  
  VARQT = LAG(DIVARQ1);  
  
PROC PRINT;  
  VAR 1 YPQT Y VARQT ERROQ S2Q;  
  
DATA IN.FKBLUPSG;  
  SET GRAFICO;  
  SET GRAFICO3;  
  YPT =LAG(YP);  
  YPQT = LAG(YPQ1);  
  
PROC PLOT;  
  PLOT YPT*I='*' Y*I='+' YPQT*I='&'/OVERLAY;  
  TITLE 'CASOS DE SARAMPO';
```