Operadores Multilineares p – Fatoráveis

Aluno: B. Martín Cerna Maguiña

Orientador: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Operadores Multilineares p – Fatoráveis

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação/tese devidamente corrigida e defendida por Bibiano Martin Cerna Maguiña e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 18 de agosto de 2005

Prof. Dr.: Mário Carvalho de Matos
Orientador

Banca examinadora:
Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Raymundo Luis de Alencar (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço (USP/SP)
Prof. Dr. Daniel Marinho Pelegrino (UFCG/PB)

Dissertação/tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Cerna Maguiña, Bibiano Martin
C335 o Operadores multilineares p-fatoráveis / Bibiano Martin Cerna Maguiña – Campinas, [S.P. : s.n.], 2005.

Orientador: Mário Carvalho de Matos
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Operadores lineares. 2. Análise funcional. 3. Banach, Espaços de. 4. Fatoração de operadores. I. Matos, Mário Carvalho de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemáticas, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: p-Factorable operators multilinear

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Linear operators. 2. Functional analise. 3. Banach spaces.

4. Fatorization of operators.

Área de concentração: Análise Funcional

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Raymundo Luis de Alencar (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço (USP/SP)
Prof. Dr. Daniel Marinho Pelegrino (UFCG/PB)

Data da defesa: 18/08/2005

Tese de Doutorado defendida em 18 de agosto de 2005

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). MARIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). JORGE TÚLIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). RAYMUNDO LUIS DE ALENCAR

Prof (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

Prof (a). Dr (a). DANIEL MARINHO PELLEGRINO

Abstract

In this work, we give one generalization of the concept and the linear teoría of aplications p – fatoráveis for the multilinear case. We supply two definitions; based in definition 2.2 we arrive to get some results. Following the ideas of the Pietsch, and based in definition 3.9 it foresaw generalization of some definitions and theorems of the linear ideals for the multilinear case we try to prove the equivalence of the two definitions.

Resumo

Neste trabalho, damos uma generalização do conceito e da teoría das aplicações lineares p-fatoráveis para o caso multilinear.

Fornecemos duas definições; baseadas na definição 2.2 chegamos a obter alguns resultados. Seguindo a ideas do Pietsch, e baseada na definição 3.9 previa generalização de algumas definições e teoremas dos ideais lineares para o caso multilinear tentamos provar a equivalência das duas definições.

Agradecimentos

Á Deus por darme a força de não ter perdido as esperanzas de terminar este doutoramento.

Ao profesor Mário C. Matos, pela orientação sobre todos os aspectos deste trabalho, por sua paciência e vontade com que me orientou.

Aos profesores e funcionários do IMECC.

Aos meus colegas Miguel Yglesias, Merlyng Zavaleta e Alberto Santana pela ajuda oferecida para que este trabalho chegue a seu termino.

Á minha familia, pelo apoio em todos os momentos mais difícies.

Á Jey, pela paciência, carinho e alegría com que me brindou nestes anos.

Á CAPES pelo apoio financiero.

Sumário

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é a generalização do conceito e da teoria das aplicações lineares contínuas p–fatoráveis para o caso das aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach.

Nesse sentido temos uma generalização de tais aplicações, o qual gera o espaço das chamadas aplicações multilineares contínuas p–fatoráveis, $1 \leq p \leq \infty$, cuja notação é

$$\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, ..., X_n; Y).$$

No caso linear a definição de operador linear contínuo p–fatorável dada por [2] vide definição 1.3, trabalha a partir desta definição e demonstra que esta classe de operadores forma um ideal de operadores de Banach, e centraliza seu trabalho no caso que $p = 2$. Logo usando o criterio do Biadjunto (vide 6.8 de [2]) junto com a teoria dos ultrafiltros e dos ultraprodutos mostra que o ideal dos operadores lineares e contínuos p–fatoráveis é um ideal maximal.

A definição dada en [3] (vide definição 1.15) é através dos ideais de operadores lineares e contínuos (r, p, q)–nucleares, nesta definição já dita classe de operadores p–fatoráveis é um ideal maximal.

Através desta teoria dada em [3] se demonstra usando uma serie de resultados {(8.7.4), (8.8.4), (19.2.4), (19.3.4), (19.2.5), (19.3.5), (19.3.6) vide [3]} que as duas definições são equivalentes.

O presente trabalho foi fazer a mesma abordagem. No capítulo 1 introduzimos alguns resultados conhecidos que são importantes para o desenvolvimento dos capitulos que segue.

No capítulo 2 da teoria dada em [2] sobre operadores lineares e contínuos p–fatoráveis chegamos a generalizar alguns conceitos e teoremas.

No capítulo 3 baseado no artigo de Mario C. Matos, vide [5], obtivemos alguns resultados que são muito importantes para nossos propósitos. Além disso neste capítulo seguindo o esquema feito por Pietsch chegamos a generalizar alguns conceitos e teoremas.

Infelizmente não chegamos a demonstrar que a Definição 2.2 e Definição 3.9 são equivalentes, já que (3.1), (3.2) e (3.3) são conjecturas e que minhas pesquisas até o momento não conseguiran demonstrações completas de tais conjecturas, pretendo insistir no assunto e espero obter tais resultados no futuro.

Para finalizar, gostaríamos de ressaltar que as referencias básicas para este trabalho são Matos [5], Pietsch [3], Joe Diestel, Hans Jarchow, Andrew Tonge [2].

Lista de Notações

$\mathcal{L}(E,F)$	:	Conjunto das aplicações lineares e contínuas.
$\ell_p(E)$	:	Conjunto das sequências absolutamente p somáveis.
$\ell_p^w(E) = W_p(E)$	:	Conjunto das sequências fracamente p somáveis.
$B_{E^*} = B_{E'}$	:	Bola unitária no dual de E.
$W(B_{E'})$	:	Conjunto das medidas de probabilidades regulares sobre $B_{E'}$.
$\mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$	:	Conjunto das aplicações multilineares contínuas do produto cartesiano de $E_1,...,E_n$ em F.
$\mathcal{L}_{p-fat}(E_1,...,E_n;F)$	:	Conjunto das aplicações multilineares contínuas p–fatoráveis.
$\mathcal{L}$	:	Operadores arbitrarios contínuos entre espaços de Banach.
I_Ω	:	Função característica do conjunto Ω.
$P(B_{X_1^*} \times B_{X_2^*})$	:	Conjunto dos subconjuntos de $B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}$.
$\mathcal{L}_f(E_1,....,E_n;F)$	:	Conjunto das aplicações multilineares contínuas de tipo finito.
$\mathcal{L}_N^{(s;r_1,...,r_n)}(E_1,...,E_n;F)$	:	Conjunto das aplicações multilineares contínuas de tipo Nuclear $(s;r_1,...,r_n)$.
$\mathcal{L}_{ap}(E;F)$	:	Conjunto das aplicações lineares contínuas aproximáveis.
$\mathcal{N}_{(r,p,q)}(E,F)$	:	Conjunto das aplicações lineares contínuas (r,p,q)-nucleares.
(Ω,Σ,μ)	:	Espaço de medida.
$L_p(\mu) = L_p(\Omega,\mu)$	:	O espaço de Banach de todas as funções escalares μ–mesuráveis definidas sobre Ω tal que $\lvert f\rvert^p$ é μ–integrável, $1 \leq p \leq \infty$.
$L_\infty(\mu) = L_\infty(\Omega,\mu)$	:	O espaço de Banach de todas as funções limitadas μ–mesuráveis sobre Ω.
$\mathcal{N}_{(\infty,p,p')}(E;F)$	:	Conjunto das aplicações lineares contínuas p–compactas.
$\mathcal{N}_{(\infty,p,p')}(E,F)^{\max}$	:	Conjunto das aplicações lineares p–fatoráveis.
$\mathcal{F}(E,F)$	:	Conjunto das aplicações lineares de posto finito.
$\mathcal{N}_{(r,p;q_1,...,q_n)}(E_1,..,E_n;F)$	:	Conjunto de todas as aplicações multilineares contínuas $(r,p;q_1,...,q_n)$–nucleares.
$\Gamma_0 := \bigcap_{p>0} \ell_p(E)$		
$\mathcal{A},\mathcal{B}$	:	Ideais de operadores lineares ou multilineares
$\mathcal{A}(E,F)$	:	Ideais de operadores lineares fixado os espaços de Banach E,F.
$\mathcal{A}(E_1,...,E_n;F)$	:	Ideais de operadores multilineares fixado os espaços de Banach $E_1,...,E_n,F$.

Capítulo 1

Preliminares Gerais

1.1 Aplicações Lineares p – Fatoráveis

Teorema 1.1 (Desigualdade de Grothendieck:). *Existe uma constante universal K_G tal que, dado quaisquer espaço de Hilbert H, quaisquer $n \in \mathbb{N}$, quaisquer matriz escalar $(a_{ij})_{n\times n}$ e quaisquer vetores $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ em B_H, temos*

$$\left|\sum_{i,j} a_{i,j}(x_i|y_i)\right| \leq K_G \max\left\{\left|\sum_{i,j} a_{ij}s_j t_j\right| : |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1\right\}$$

Demonstração. Vide 1.14 de [2]. □

Definição 1.1. Seja $1 \leq p \leq 2$. Um espaço E tem tipo p se existe uma constante $\theta \geq 0$ tal que para quaisquer $x_1, ..., x_n$ de E, tivermos:

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)x_k\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leq \theta\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p\right)^{1/p}$$

Definição 1.2. Seja $1 \leq p \leq 2$. Um espaço E tem cotipo q, se existe $c \geq 0$ tal que para quaisquer que sejan $x_1, ..., x_n$ de E tivermos:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leq c\left(\int_0^1 \left\|\sum_{i=1}^n r_i(t)x_i\right\|^2 dt\right)^{1/2},$$

para o caso $p = \infty$, no lado esquerdo colocar $\max_{1\leq k\leq n} \|x_k\|$.

Observação 1.1. Nas definições (1.1) e (1.2) r_k são as funções de Rademacher o qual é definido por

$$r_k(t) = sign(sen2^k\pi t),$$

onde $t \in [0,1]$ e k é um número natural.
Para maior conhecimento vide [2].

Recordemos o conceito de operador linear p-fatorável. (Veja [2], página 154).

Definição 1.3. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Um operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ é chamado p-fatorável se existe um espaço de medida (Ω, Σ, u) e operadores:

$$a \in \mathcal{L}(L_p(u); Y^{**}), \quad b \in \mathcal{L}(X; L_p(u))$$

tal que $K_Y T = a \circ b$. Aqui K_Y indica o isomorfismo isométrico natural de Y em Y^{**}.
O conjunto de todos os operadores p-fatoráveis de X a Y será denotado por $\mathcal{L}_{p-fat}(X;Y)$, que é um espaço de Banach com a norma dada por:

$$\gamma_p(T) := \inf \|a\| \, \|b\|,$$

o ínfimo sendo tomado sobre todas as fatorações da forma acima indicada.

1.2 Ideais de Operadores Lineares sobre Espaços de Banach

Recordemos que $\mathcal{L}$ denota a classe de todos os operadores entre espaços de Banach.

Definição 1.4. Um ideal $\mathcal{A}$ de operadores lineares é uma subclasse de $\mathcal{L}$ tais que as componentes

$$\mathcal{A}(E,F) := \mathcal{A} \cap \mathcal{L}(E,F)$$

tem a seguintes propriedades:

(I_1) A aplicação identidade $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{A}$, donde $\mathbb{K}$ denota os espaços de Banach de dimensão um.

(I_2) Se $S_1, S_2 \in \mathcal{A}(E,F)$ então $S_1 + S_2 \in \mathcal{A}(E,F)$

(I_3) Se $T \in \mathcal{L}(E_0, E)$, $S \in \mathcal{A}(E,F)$ e $R \in \mathcal{L}(F, F_0)$, então $RST \in \mathcal{L}(E_0, F_0)$

Definição 1.5. Sejan $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ideais de operadores lineares. Um operador $S \in \mathcal{L}(E,F)$ pertence ao quociente esquerdo $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}$ se $YS \in \mathcal{B}(E, F_0)$ para todo $Y \in \mathcal{A}(F, F_0)$, donde F_0 é qualquer espaço de Banach. De manera analoga se define o quociente direito $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}$.

Observação 1.2. Os simbolos $\mathcal{A}^{-1}$ e $\mathcal{B}^{-1}$ não dan a entender nada.

Definição 1.6. Seja $\mathcal{A}$ um ideal de operadores lineares. Um operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ pertence ao envolucro maximal $\mathcal{A}^{\max}$ se $BSX \in \mathcal{A}(E_0, F_0)$ para todo $X \in \mathcal{L}_{ap}(E_0, E)$ e $B \in \mathcal{L}_{ap}(F, F_0)$. Em outros termos

$$\mathcal{A}^{\max} := \mathcal{L}_{ap}^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{L}_{ap}^{-1}$$

Teorema 1.2. *$\mathcal{A}^{\max}$ é um ideal de operadores lineares.*

Demonstração. E trivial. □

1.3 Ideais de Operadores Lineares Quasi–Normados

Definição 1.7. Seja $\mathcal{A}$ um ideal de operadores lineares. Uma aplicação

$$A : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

é chamado uma quasi–norma se:

(I) $A(I_{\mathbb{K}}) = 1$, donde $\mathbb{K}$ denota os espaços de Banach de dimensão um.

(II) Existe uma constante $k \geq 1$ tais que

$$A(S_1 + S_2) \leq k[A(S_1) + A(S_2)], \quad \forall\, S_1, S_2 \in \mathcal{A}(E, F)$$

(III) Se $T \in \mathcal{L}(E_0, E)$, $S \in \mathcal{A}(E, F)$ e $R \in \mathcal{L}(F, F_0)$, então

$$A(RST) \leq \|R\| A(S) \|T\|.$$

Um ideal de operadores lineares quasi-normado $[\mathcal{A}, A]$ é um ideal de operadores lineares com uma quasi-norma A tal que todos os espaços lineares $\mathcal{A}(E, F)$ topologicos de Hausdorff são completos.

Proposição 1.1. *Seja $[\mathcal{A}, A]$ um ideal de operadores lineraes quasi–normado. Então $\|S\| \leq A(S)$ para todo $S \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. Vide 6.1.4 de [3]. □

1.4 Ideais de Operadores Lineares p–Normados

Definição 1.8. Uma quasi–norma A sobre um ideal de operadores lineares $\mathcal{A}$ é dita uma p–norma $(0 \leq p < 1)$ se

$$A(S_1 + S_2)^p \leq A(S_1)^p + A(S_2)^p$$

para $S_1, S_2 \in \mathcal{A}(E, F)$. Se $p = 1$, então A é chamado uma norma.

Observação 1.3. *(i)* A constante $k := 2^{\frac{1}{p}-1}$ pode ser usado para satisfazer a condição (II).
(ii) qualquer p–norma A é contínua em sua própria topologia.

Teorema 1.3. *Seja $[\mathcal{A}, A]$ um ideal de operadores lineares quasi–normado. Então existe uma p–norma equivalente denotada por A_p.*

Demonstração. Vide 6.2.5 de [3]. □

Definição 1.9. Sejam $[\mathcal{A}, A]$ e $[\mathcal{B}, B]$ ideais de operadores lineares quasi–normados. Para qualquer operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ com $S \in \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}$ definimos

$$A^{-1} \circ B(S) := \sup\{B(Y(S)) : Y \in \mathcal{A}(F, F_0), A(Y) \leq 1\}$$

Aqui F_0 é qualquer espaço de Banach. Analogamente sobre o quociente direito $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}$ se define a expressão $A \circ B^{-1}(S)$.

Teorema 1.4. *$[\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}, A^{-1} \circ B]$ e $[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}, A \circ B^{-1}]$ são ideais de operadores lineares quasi–normados.*

Demonstração. Vide 7.2.2 de [3]. □

Definição 1.10. Seja $[\mathcal{A}, A]$ um ideal de operadores lineares quasi–normado. Então

$$[\mathcal{A}^{\max}, A^{\max}] := [\mathcal{L}_{ap}, \|\cdot\|]^{-1} \circ [\mathcal{A}, A] \circ [\mathcal{L}_{ap}, \|\cdot\|]^{-1}$$

é chamado o envolucro maximal de $[\mathcal{A}, A]$.

Teorema 1.5. *$[\mathcal{A}^{\max}, A^{\max}]$ é um ideal de operadores lineares quasi–normado.*

Demonstração. É uma consequência do Teorema 1.4. □

1.5 Operadores Lineares (r, p, q)-Nucleares

Recordemos o conceito de operador linear (r,p,q)-nuclear. (Veja [3], 18.1).

Definição 1.11. Sejam $0 < p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i \in E$, será dita absolutamente p somável se $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$. Neste caso notaremos $\|(x_i)\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p)^{1/p}$ e definiremos ainda

$$\ell_p(E) := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, x_i \in E; \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty\}.$$

É facil ver que $\ell_{p_1} \subset \ell_{p_2}$ e $\|\cdot\|_{p_2} \leq \|\cdot\|_{p_1}$ se $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$.
Para $p = \infty$ faremos

$$\ell_\infty(E) := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, x_i \in E; \sup \|x_i\| < \infty\}$$

e $\|x_i\|_\infty = \sup \|x_i\|$.

Definição 1.12. Sejam $0 < p \leq \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $x_i \in E$, será dita fracamente p–somável se $(|\langle\varphi, x_i\rangle|)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p(E)$ para todo $\varphi \in E'$. Neste caso denotaremos

$$\omega_p(x_i) = \|(x_i)\|_{\omega,p} := \sup_{\varphi\in B_{E'}} \|(|\langle\varphi, x_i\rangle|)\|_p$$

cuja existência pode ser verificada através do Teorema do Gráfico Fechado ou princípio da limitação uniforme.
Definiremos ainda

$$\ell_p^\omega(E) = W_p(E) := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, x_i \in E \text{ e } (|\langle\varphi, x_i\rangle|)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p(E), \forall\varphi \in E'\}.$$

Tal como no caso anterior é simples verificar que $W_{p_1}(E) \subset W_{p_2}(E)$ e $\|\cdot\|_{\omega,p_2} \leq \|\cdot\|_{\omega,p_1}$ se $0 < p_1 \leq p_2 \leq \infty$.

Definição 1.13. Seja $0 < r \leq \infty$, $1 \leq p, q \leq \infty$ e $1+\frac{1}{r} \geq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Um operador $S \in \mathcal{L}(E; F)$ é chamado (r, p, q)-nuclear se:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_i \otimes y_i.$$

Com $(\sigma_i) \in \ell_r$, $(a_i) \in W_{q'}(E')$ e $(y_i) \in W_{p'}(F)$. No caso $r = \infty$, $(\sigma_i) \in c_0$.
Colocando

$$N_{(r,p,q)}(S) = \inf \ell_r(\sigma_i) W_{q'}(a_i) W_{p'}(y_i),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas representações descritas acima.

Observação 1.4. O espaço vetorial de todos os operadores (r,p,q)-nucleares de E em F é denotado por $\mathcal{N}_{(r,p,q)}(E; F)$. Vide [3] para o ideal linear $\mathcal{N}_{(r,p,q)}$ de operadores (r, p, q)-nucleares. Pietsch demonstra o seguinte teorema.

Teorema 1.6. *Seja* $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'}$. *Então* $[\mathcal{N}_{(r,p,q)}, N_{(r,p,q)}]$ *é un ideal de operadores s-normado.*

1.6 Aplicações Lineares p - Compactas

Recordemos a noção de operador linear p-compacto (Vide [3],18.3).

Definição 1.14. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Um operador $S \in \mathcal{L}(E, F)$ é chamado p-compacto se pertence ao ideal linear normado $[\mathcal{N}_{(\infty,p,p')}, N_{(\infty,p,p')}]$.

Vale o seguinte teorema. Vide [3].

Teorema 1.7. *Um operador* $S \in \mathcal{L}(E; F)$ *é p-compacto se e só se existe um diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "A"'] & & F \\ & \ell_p \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $A \in \mathcal{L}(E;\ell_p)$, $Y \in \mathcal{L}(\ell_p;F)$ são compactos. Neste caso $N_{(\infty,p,p')}(S) = \inf \|Y\|\|A\|$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações possíveis.

Definição 1.15. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Um operador $S \in \mathcal{L}(E,F)$ é chamado p–fatorável se pertence ao ideal linear normado

$$[\mathcal{L}_p, L_p] := [\mathcal{N}_{(\infty,p,p')}, N_{(\infty,p,p')}]^{\max}.$$

É muito importante perceber que as normas L_p e γ_p ainda não são iguais.

Teorema 1.8. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Um operador $S \in \mathcal{L}(E,F)$ é p–fatorável se e só se existe um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "K_F S"] \arrow[dr, "A"'] & & F^{**} \\ & L_p(\Omega,\mu) \arrow[ur, "Y"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $A \in \mathcal{L}(E, L_p(\Omega,\mu))$ e $Y \in \mathcal{L}(L_p(\Omega,\mu), F^{**})$. Aqui (Ω,μ) é um espaço de medida escolhido.
Neste caso

$$L_p(S) = \inf \|Y\|\|A\|$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações descritas acima.
É claro agora que as normas γ_p e L_p são iguais.

Demonstração. Vide 19.3.7 de [3]. $\square$

1.7 Aplicações Multilineares de Tipo Nuclear $(s; r_1, \ldots, r_n)$

Lembremos alguns resultados de Matos [5].

Sejam $s \in]0,\infty]$, $r_k \in [1,+\infty]$, $k = 1,\ldots,n$ tais que:

$$1 \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{r_1'} + \cdots + \frac{1}{r_n'}.$$

Definição 1.16. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é dita de tipo nuclear $(s;r_1,\ldots,r_n)$ se existem $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s (\in c_0 \quad se \quad s = +\infty)$, $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(F)$, e $(\varphi_{kj})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{r_k'}(E_k')$, $k = 1,\ldots,n$ tais que:

$$T(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_{1,j}(x_1)\cdots\varphi_{n,j}(x_n) y_j. \tag{1.1}$$

O espaço vetorial de tais aplicações é denotado por $\mathcal{L}_N^{(s;r_1,\ldots,r_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Tal espaço é um espaço vetorial topologico completo metrizável com a t_n-norma.

$$\|T\|_{N,(s;r_1,\ldots,r_n)} \equiv \inf \left\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_s \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \prod_{k=1}^{n} \left\|(\varphi_{k,j})_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,r_k'}.$$

O ínfimo é tomado sobre todas as possíveis representações de T descritas em (1.1) e $t_n \in]0,1]$ é dado por:

$$\frac{1}{t_n} = \frac{1}{s} + \frac{1}{r_1'} + \cdots + \frac{1}{r_n'}.$$

Se $r_1 = \cdots = r_n = r$, $(s;r_1,\ldots,r_n)$ será denotado por $(s;r)$. Se $t_n = 1$, s pode ser escrito em termos dos $r_k s$ e dizemos que T é de tipo nuclear $(r_1,...,r_n)$. Neste caso $(s;r_1,...,r_n)$ se escreve como $(r_1,...,r_n)$ (ou r, se $r_1 = \cdots = r_n = r$) nas notações no caso $r = 1$, omitimos a letra r.

Proposição 1.2. [5] *Se $T \in \mathcal{L}_N^{(s;r_1,\ldots,r_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$, A_k pertence a $\mathcal{L}(D_k;E_k)$, $k = 1,...,n$ e se $S \in \mathcal{L}(F;G)$ então*

$$S \circ T \circ (A_1,\ldots,A_n),$$

é do tipo nuclear $(s;r_1,\ldots,r_n)$ e

$$\|S \circ T \circ (A_1,\ldots,A_n)\|_{N,(s;r_1,\ldots,r_n)} \leq \|S\| \, \|T\|_{N,(s;r_1,\ldots,r_n)} \prod_{k=1}^{n} \|A_k\|.$$

Observação 1.5. Seja $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty}$ em ℓ_s para $s \in \langle 0,\infty\rangle$ e em c_0 para $s = +\infty$. Consideremos a aplicação "diagonal"

$$D_{(\sigma_j)_{j=1}^{\infty}} \in \mathcal{L}(\ell_{r_1'},...,\ell_{r_n'};\ell_1)$$

definida por

$$D_{(\sigma_j)_{j=1}^{\infty}}((\varepsilon_{1,j})_{j=1}^{\infty},....,(\varepsilon_{n,j})_{j=1}^{\infty}) = (\sigma_j \varepsilon_{1,j}...\varepsilon_{n,j})_{j=1}^{\infty}.$$

Notemos que esta aplicação pode ser representada por

$$D_{(\sigma_j)_{j=1}^{\infty}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(\pi_j \times \cdots \times \pi_j)e_j$$

onde $\pi_j((\varepsilon_{k,m})_{m=1}^{\infty}) = \varepsilon_{k,j}$, para $k = 1,...,n$ e $j \in \mathbb{N}$ e $e_j = (0,...,0,1,0,...)$ com 1 na j-ésima componente. Esta aplicação diagonal é muito útil na prova do seguinte teorema. Assim mesmo este operador diagonal será usado no capítulo 3.

Teorema 1.9. [5] *Para $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ as seguintes condições são equivalentes:*

(i) T é de tipo nuclear $(s; r_1, \dots, r_n)$.

(ii) Existem $A_k \in \mathcal{L}(E_k; \ell_{r'_k})$, $k = 1, ..., n$, $Y \in \mathcal{L}(\ell_1; F)$ e $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s(\in c_0$ se $s = +\infty)$ tais que $T = Y \circ D_{(\sigma_j)_{j=1}^{\infty}} \circ (A_1, \dots, A_k)$.

Neste caso:

$$\|T\|_{N,(s;r_1,\dots,r_n)} = \inf \|Y\| \prod_{k=1}^{n} \|A_k\| \left\|(\sigma_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_s ,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos as fatorações possíveis como as descritas en (1.1).

Teorema 1.10. [5] *Sejam $s, t \in (0, \infty]$, $r_k, p_k \in [1, +\infty]$ tais que $s \leq t$, $r_k \leq p_k$, $k = 1, \dots, n$.*

$$1 \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{r'_1} + \cdots + \frac{1}{r'_n}, \qquad 1 \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{p'_1} + \cdots + \frac{1}{p'_n}$$

e

$$\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_n} - \frac{1}{s} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} - \frac{1}{t}$$

Então: $\mathcal{L}_N^{(s;r_1,\dots,r_n)}(E_1, \dots, E_n; F) \subset \mathcal{L}_N^{(t;p_1,\dots,p_n)}(E_1, \dots, E_n; F)$, com

$$\|T\|_{N,(t;p_1,\dots,p_n)} \leq \|T\|_{N,(s;r_1,\dots,r_n)}$$

Para qualquer T de tipo nuclear $(s; r_1, \dots, r_n)$.

Corolário 1.1. [5]

1. *Se $r_k \leq p_k$, $k = 1, \dots, n$ qualquer T de tipo nuclear $(r_1, \dots, r_n)$ é nuclear de tipo $(p_1, \dots, p_n)$ e:*
$$\|T\|_{N,(p_1,\dots,p_n)} \leq \|T\|_{N,(r_1,\dots,r_n)} .$$

2. *Se $s \leq t$, qualquer T de tipo nuclear $(s; r_1, \dots, r_n)$ é de tipo nuclear $(t; r_1, \dots, r_n)$ e:*
$$\|T\|_{N,(t;r_1,\dots,r_n)} \leq \|T\|_{N,(s;r_1,\dots,r_n)} .$$

3. *Se $r_k \geq p_k$, $k = 1, \dots, n$. qualquer T de tipo nuclear $(s; r_1, \dots, r_n)$ é de tipo nuclear $(s; p_1, \dots, p_n)$ e:*
$$\|T\|_{s,(t;p_1,\dots,p_n)} \leq \|T\|_{N,(s;r_1,\dots,r_n)} .$$

Observação 1.6. **A)** Se φ_k está no dual topologico E'_k de E_k, $k = 1, ..., n$ e $b \in F$, denotaremos por $\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n b$ os elementos de $\mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$, definidos por $\varphi_1(x_1)...\varphi_n(x_n)b$ no ponto $(x_1, ..., x_n)$. Estas aplicações geram o subespaço vetorial das aplicações n–lineares de tipo finito $\mathcal{L}_f(E_1, ..., E_n; F)$.

B) Segue-se da definição que $\mathcal{L}_f(E_1,...,E_n;F)$ é denso em $\mathcal{L}_N^{(s;r_1,...,r_n)}(E_1,...,E_n;F)$. Desde que qualquer $T \in \mathcal{L}_f(E_1,...,E_n;F)$ tem uma representação finita da forma

$$T = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \varphi_{1,j} \times \cdots \times \varphi_{n,j} b_j \qquad (*)$$

com $\sigma_j \in \mathbb{K}$, $\varphi_{k,j} \in E_k'$, $k = 1,...,n$, $b_j \in F$, $j = 1,...,m$, é natural perguntar quando é possível ter

$$\|T\|_{N,(s;r_1,...,r_n)} = \|T\|_{N_f,(s;r_1,...,r_n)}$$

onde

$$\|T\|_{N_f,(s;r_1,...,r_n)} = \inf \|(\sigma_j)_{j=1}^m\| \prod_{k=1}^{n} \|(\varphi_{k,j})_{j=1}^m\|_{w,r_k'} \|(b_j)_{j=1}^m\|_\infty$$

com o ínfimo tomado para todas as representações de T como as descritas em (*).
É claro que sempre acontece

$$\|T\|_{N,(s;r_1,...,r_n)} \leq \|T\|_{N_f,(s;r_1,...,r_n)}$$

É natural perguntar em que casos temos a igualdade destas normas.

Teorema 1.11. [5] *Se $E_1,...,E_n$ são de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$, então*

$$\|T\|_{N,(s;r_1,...,r_n)} = \|T\|_{N_f,(s;r_1,...,r_n)}$$

Proposição 1.3. [5] *Se $T \in \mathcal{L}_N^{(s;r_1,...,r_n)}(E_1,...,E_n;F)$ e $S_k \in \mathcal{L}_f(D_k;E_k)$, $k = 1,...,n$, então*

$$\|T \circ (S_1,...,S_n)\|_{N_f,(s;r_1,...,r_n)} \leq \|T\|_{N,(s;r_1,...,r_n)} \prod_{k=1}^{n} \|S_k\|$$

Teorema 1.12. [5]*Se $E_1,...,E_n$ tem a propriedade de aproximação limitada então*

$$\|T\|_{N,(s;r_1,...,r_n)} = \|T\|_{N_f,(s;r_1,...,r_n)}$$

para qualquer $T \in \mathcal{L}_f(E_1,...,E_n;F)$.

Capítulo 2

Operadores Multilineares p – Fatoráveis

2.1 Ideais Multilineares

Definição 2.1. Um ideal de operadores multilineares $\mathcal{A}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores multilineares continuos entre espaços de Banach tal que para todos os espaços de Banach $X_1, \ldots, X_n$, e Y, suas componentes:

$$\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n; Y) := \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) \cap \mathcal{A}.$$

Satisfazen:

1. $\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ é um subespaço linear de $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ que contem os operadores multilineares de posto finito.

2. *A propriedade de Ideal*: Se $E_1, \ldots, E_n, Z$ são espaços de Banach e $\Phi \in \mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, $v \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $u \in \mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_n, X_1 \times \cdots \times X_n)$ com $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, X_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Então $v\Phi u \in \mathcal{A}(E_1, \ldots, E_n; Z)$.

Se além disso, existe uma função $A : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty[$ tal que:

1. $A|_{\mathcal{A}(X_1,\ldots,X_n;Y)}$ é uma quase norma para todos os espaços de Banach $X_1, \ldots X_n, Y$.

2. $A(I_{\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}}) = 1$, sendo:

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}} \ : \ & \mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \end{aligned}$$

3. Se $\Phi \in \mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n; Y), v \in \mathcal{L}(Y, Z), u \in \mathcal{L}(E_1\times\cdots\times E_n, X_1\times\cdots\times X_n)$ com $u = (u_1, ..., u_n)$, $u_i \in \mathcal{L}(E_i, X_i), i = 1, ..., n$ tem-se

$$A(v\Phi u) \leq \| v \| A(\Phi) \prod_{i=1}^{n} \| u_i \| .$$

Então $[\mathcal{A}, A]$ é um ideal de operadores multilineares quase normado. Se todas as componentes $\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ são completos em relação a A, então $[\mathcal{A}, A]$ é chamado ideal de operadores multilineares quasi Banach.
Se A é uma norma (respectivamente p-norma , $(p \in]0,1[)$ sobre cada componente $\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, então $[\mathcal{A}, A]$ é chamado ideal de operadores multilineares normados (respectivamente p-normado).
No caso que as componentes são completas, falamos de ideal de operadores multilineares de Banach e p-Banach.

Proposição 2.1. *As seguintes afirmações ocorrem para cada ideal de operadores multilineares quase normado* $[\mathcal{A}, A]$*:*

1. $\| \Phi \| \leq A(\Phi)$ *para todo* $\Phi \in \mathcal{A}$.
2. $A((x_1^* \times \cdots \times x_n^*)\underline{\otimes} y) = \|x_1^*\| \cdots \|x_n^*\|$ *para todo* $x_i^* \in X_i^*$, $i = 1, \ldots, n$ *e* $y \in Y$.

Demonstração.

1. Fixados $x_i \in X_i$, $i = 1, ..., n$ e $y^* \in Y^*$, temos $y^* \circ \Phi \circ (I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_1, ..., I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K})$ e

$$\begin{aligned} A(y^* \circ \Phi \circ (I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_1, ..., I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_n)) &\leq \|y^*\| A(\Phi) \|I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_1\| ... \|I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_n\| \\ &\leq \|y^*\| A(\Phi) \|x_1\| ... \|x_n\|. \end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned} y^* \circ \Phi \circ (I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_1, ..., I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_n)(\lambda_1, ..., \lambda_n) &= y^*(\Phi(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n)) \\ &= \langle y^*, \Phi(x_1, ..., x_n) \rangle \lambda_1 ... \lambda_n \\ &= \langle y^*, \Phi(x_1, ..., x_n) \rangle (I_{\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}})(\lambda_1, ..., \lambda_n) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |\langle y^*, \Phi(x_1, ..., x_n) \rangle| &= A(\langle y^*, \Phi(x_1, ..., x_n) \rangle (I_{\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}})) \\ &= A(y^* \circ \Phi \circ (I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_1, ..., I_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} x_n)) \\ &\leq \|y^*\| A(\Phi) \|x_1\| ... \|x_n\| \end{aligned}$$

Dai segue

$$\| \Phi \| \leq A(\Phi).$$

2.

$$\begin{aligned} \| x_1^* \| \cdots \| x_n^* \| \| y \| &= \| (x_1^* \times ... \times x_n^*) \underline{\otimes} y \| \\ &\leq A((x_1^* \times ... \times x_n^*) \underline{\otimes} y) \\ &= A((id_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} y) \circ I_{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}} \circ (x_1^*, \ldots, x_n^*)) \\ &\leq \| id_{\mathbb{K}} \underline{\otimes} y \| \, A(I_{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}) \, \| (x_1^*, \ldots, x_n^*) \| \\ &\leq \| y \| \| x_1^* \| \cdots \| x_n^* \| \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma subclasse de $\mathcal{L}$, a função $A : \mathcal{A} \longmapsto [0, \infty[$ e $0 < p \leq 1$. Então $(\mathcal{A}, A)$ é um ideal de operadores multilineares p - Banach se (e só se):*

1. *$I_{\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}} \in \mathcal{A}$ e $A(I_{\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}}) = 1$.*

2. *Se $v\Phi u$ está definido com $\Phi \in \mathcal{A}$, v linear contínuo, $u = (u_1, ..., u_n)$, u_i linear contínuo, então $v\Phi u \in \mathcal{A}$ e:*

$$A(v\Phi u) \leq \|v\| \, A(\Phi) \, \|u_1\| \cdots \|u_n\| \, .$$

3. *Se $\Phi_n \in \mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ tal que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A(\Phi_n)^p < \infty,$$

então:

$$\Phi := \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \in \mathcal{A} \qquad e \qquad A(\Phi)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} A(\Phi_n)^p.$$

Demonstração. É só perceber que (2) resumo a p - desigualdade triangular e a completitude. $\square$

2.2 Operadores Multilineares p-Fatoráveis

Definição 2.2. Seja $1 \leq p \leq \infty, \Phi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ é dito p-fatorável, se existem um espaço de medida (Ω, Σ, μ) e operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y^{**})$ e $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; L_p(\mu))$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & Y \arrow[r, "K_Y"] & Y^{**} \\
& L_p(\mu) \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

A coleção de todos os operadores multilineares p-fatoráveis de $X_1 \times \cdots \times X_n$ a Y será denotada por $\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Observação 2.1. $\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, ..., X_n; Y)$ é um espaço vetorial:

Para mostrar esta afirmação só precisamos o caso $n = 2$.
Dado $\Phi_k \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y)$, existem para $k = 1, 2$ espaços de medida $(\Omega_k, \Sigma_k, \mu_k)$, operadores $\Psi_k \in \mathcal{L}(X_1, X_2; L_p(\mu_k)), a_k \in \mathcal{L}(L_p(\mu_k); Y^{**})$ tais que $K_Y \circ \Phi_k = a_k \circ \Psi_k$.

Consideremos

$$\Omega_j' = \{(w, j); w \in \Omega_j\} \subset (\Omega_1 \cup \Omega_2) \times \{1, 2\}, \quad j = 1, 2.$$

Logo é claro que $\Omega_1' \cap \Omega_2' = \emptyset$.
Além disso a σ-álgebra sobre Ω_j', $j = 1, 2$ é:

$$\Sigma_j' = \{(A, j) : A \in \Sigma_j\} \; j = 1, 2,$$

e as medidas respectivas são:

$$\mu_j' : \Sigma_j' \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

definidas por $\mu_j'(A, j) = \mu_j(A)$, $A \in \Sigma_j$, $j = 1, 2$.
Sejam $\Omega = \Omega_1' \cup \Omega_2'$, $\Sigma = \{S \subset \Omega : S \cap \Omega_j' \in \Sigma_j', \; j = 1, 2\}$. Temos que Σ é uma σ-algebra de conjuntos, e seja:

$$\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

definida por

$$\mu(S) = \mu_1'(S \cap \Omega_1') + \mu_2'(S \cap \Omega_2').$$

Definamos

$$\Psi : X_1 \times X_2 \longrightarrow L_p(\mu)$$

por

$$\Psi(x_1, x_2) = \hat{\Psi}_1(x_1, x_2) I_{\Omega_1'} + \hat{\Psi}_2(x_1, x_2) I_{\Omega_2'}$$

sendo $\hat{\Psi}_j(x_1, x_2)(t_j, j) = \Psi_j(x_1, x_2)(t_j)$, $t_j \in \Omega_j$, $j = 1, 2$. Logo temos que Ψ é bilinear e bem definida pois

$$\begin{aligned}
\|\Psi(x_1, x_2)\|_{L_p(\mu)}^p &= \int_\Omega |\hat{\Psi}_1(x_1, x_2) I_{\Omega_1'} + \hat{\Psi}_2(x_1, x_2) I_{\Omega_2'}|^p d\mu \\
&= \int_{\Omega_1'} |\hat{\Psi}_1(x_1, x_2)(t_1, 1)|^p d\mu_1'(t_1, 1) + \int_{\Omega_2'} |\hat{\Psi}_2(x_1, x_2)(t_2, 2)|^p d\mu_2'(t_2, 2) \\
&= \int_{\Omega_1} |\Psi_1(x_1, x_2)(t_1)|^p d\mu_1(t_1) + \int_{\Omega_2} |\Psi_2(x_1, x_2)(t_2)|^p d\mu_2(t_2) \\
&= \|\Psi_1(x_1, x_2)\|_{L_p(\mu_1)}^p + \|\Psi_2(x_1, x_2)\|_{L_p(\mu_2)}^p < \infty.
\end{aligned}$$

Como Ψ_1 e Ψ_2 são contínuas, temos que Ψ é contínua.
De maneira semelhante definamos $a : L_p(\mu) \longrightarrow Y^{**}$ por $a(\hat{f}) = \tilde{a}_1(\hat{f}|_{\Omega_1'}) + \tilde{a}_2(\hat{f}|_{\Omega_2'})$,

donde $\tilde{a}_j(\hat{f}_j) = a_j(f_j)$ e $\hat{f}_j(t_j, j) = f_j(t_j)$, $t_j \in \Omega_j$, $j = 1, 2$, é claro que $\tilde{a}_j$ é linear e além disso é contínua pois:

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}_j(\hat{f}_j)\|_{Y^{**}} &= \|a_j(f_j)\|_{Y^{**}} \leq \|a_j\|\|f_j\|_{L_p(\mu_j)} \\ &= \|a_j\|\{\int_{\Omega'_j} |\hat{f}_j(t_j, j)|^p d\mu'_j(t_j, j)\}^{1/p} \\ &\leq \|a_j\|\|\hat{f}_j\|_{L_p(\mu'_j)}, \qquad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Portanto a verificação do que a é linear é imediata. Vejamos a continuidade de a:

$$\|a(\hat{f})\|_{Y^{**}} \leq \|\tilde{a}_1\|\|\hat{f}|_{\Omega'_1}\|_{L_p(\mu'_1)} + \|\tilde{a}_2\|\|\hat{f}|_{\Omega'_2}\|_{L_p(\mu'_2)}.$$

Além disso tem-se:

$$\|\hat{f}|_{\Omega'_j}\|_{L_p(\mu'_j)} = \|\hat{f}|_{\Omega'_j}\|_{L_p(\mu)}$$

e

$$\|\hat{f}|_{\Omega'_j}\|_{L_p(\mu)} \leq \|\hat{f}\|_{L_p(\mu)}, \qquad j = 1, 2.$$

Destas duas relações temos:

$$\|a(\hat{f})\|_{Y^{**}} \leq \|\tilde{a}_1\|\|\hat{f}\|_{L_p(\mu)} + \|\tilde{a}_2\|\|\hat{f}\|_{L_p(\mu)} \leq \|\hat{f}\|_{L_p(\mu)}(\|a_1\| + \|a_2\|).$$

Logo tem-se $a \circ \Psi = a_1 \circ \Psi_1 + a_2 \circ \Psi_2 = K_Y(\Phi_1 + \Phi_2)$.
Assim temos que está satisfeita a afirmação feita em (2.1). Tudo isto foi feito para $1 \leq p < \infty$. O caso $p = \infty$ se faz de modo semelhante. É trivial a verificação do que o produto de um escalar por um elemento de $\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y)$ pertence a esse espaço.

Observação 2.2. $\hat{\gamma}_p(\Phi) := \inf \|\Psi\|\|a\|$

onde o infimo é tomado sobre todas as fatorações possíveis de Φ, é uma norma sobre $\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Vejamos que $\hat{\gamma}_p$ assim definida é uma norma.

1. $\hat{\gamma}_p(\Phi) = 0$, implica $\inf \|a\|\|\Psi\| = 0$.
   Dado $\epsilon > 0$, existe un espaço de medida (Ω, Σ, μ) e operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y^{**})$, $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; L_p(\mu))$ tais que $\|a\|\|\Psi\| < \epsilon$ ou seja $\|a \circ \Psi\| \leq \|a\|\|\Psi\| < \epsilon$. Assim $\|\Phi\| < \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ o qual implica $\Phi = 0$.
   É claro que $\hat{\gamma}_p(0) = 0$.

2. Para mostrar a desigualdade triangular só precisamos o caso $n = 2$. Sejam $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y)$. Dado $\epsilon > 0$, existem espaços de medida $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i)$ e operadores $a_i \in \mathcal{L}(L_p(\mu_i), Y^{**})$, $\Psi_i \in \mathcal{L}(X_1, X_2; L_p(\mu_i))$ satisfazendo $K_Y \circ \Phi_i = a_i \circ \Psi_i$ tais que:

   $$\| a_i \| < \hat{\gamma}_p(\Phi_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$$

   e

   $$\| \Psi_i \| = 1, i = 1, 2$$

Da Observação 2.1 temos: $a \circ \Psi = K_Y \circ (\Phi_1 + \Phi_2)$ onde $a \circ \Psi = a_1 \circ \Psi_1 + a_2 \circ \Psi_2$ com $\| a \| \leq \| a_1 \| + \| a_2 \|$. Também escolhemos:

$$v = \frac{\mu}{(\| \Psi_1 \| + \| \Psi_2 \|)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\mu}{2^{1/p}}$$

Para obter $\| \Psi \| \leq 1$. Logo segue que:

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_p(\Phi_1 + \Phi_2) &\leq \| a \| \\
&< \hat{\gamma}_p(\Phi_1) + \frac{\epsilon}{2} + \hat{\gamma}_p(\Phi_2) + \frac{\epsilon}{4} \\
&< \hat{\gamma}_p(\Phi_1) + \hat{\gamma}_p(\Phi_2) + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.
\end{aligned}$$

Assim temos:

$$\hat{\gamma}_p(\Phi_1 + \Phi_2) \leq \hat{\gamma}_p(\Phi_1) + \hat{\gamma}_p(\Phi_2).$$

Portanto das Observações 2.1 e 2.2 temos que $\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ é um espaço normado.

Teorema 2.1. *Para $1 \leq p \leq \infty$, $[\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y), \hat{\gamma}_p]$ é um ideal de Banach.*

Demonstração. Para verificar as propriedades fornecidas na Definição 2.1 é suficiente fazer o caso $n = 2$. A demostração será feita em tres partes.

(i) Vejamos que $\Phi(x_1, x_2) = < y_1^*, x_1 >< y_2^*, x_2 > y \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y)$ para quaisquer $y_i^* \in X_i^*$ e $y \in Y$.
Demostração:
Tome $(\Omega, \Sigma, \mu) = (B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}, \Sigma, \delta_{(x_1^*, x_2^*)})$ onde Σ é a σ - algebra dos borelianos contido en $P(B_{X_1^*} \times B_{X_2^*})$ com $B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}$ w^*- compacto e $\delta_{(x_1^*, x_2^*)} \in C(B_{X_1^*} \times B_{X_2^*})^*$ definido abaixo é um funcional linear contínuo, com norma 1, e assim, define uma medida regular de probabilidade sobre a σ-álgebra dos borelianos de $B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}$.

$$\begin{aligned}
\delta_{(x_1^*, x_2^*)} : C(B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
f &\longmapsto f(x_1^*, x_2^*)
\end{aligned}$$

Para $1 \leq p < \infty$, definamos a da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
a : L_p(\mu) &\longrightarrow Y \\
f &\longmapsto \left(\int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} f d\delta_{(x_1^*, x_2^*)} \right) y.
\end{aligned}$$

É claro que a está bem definida pois $g = 1 \in L_q(\mu)$ para:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Da mesma maneira definamos Ψ como segue:

$$\begin{array}{rcl} \Psi : X_1 \times X_2 & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f_{(x_1,x_2)} \end{array}$$

Sendo:

$$\begin{array}{rcl} f_{(x_1,x_2)} : B_{X_1^*} \times B_{X_2^*} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (y_1^*, y_2^*) & \longmapsto & < y_1^*, x_1 >< y_2^*, x_2 > . \end{array}$$

Então Ψ é claramente bilinear, além disso esta bem definida pois:

$$\begin{aligned} (\int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} | f_{(x_1,x_2)}(y_1^*, y_2^*) |^p \, d\delta_{(x_1^*,x_2^*)}(y_1^*, y_2^*))^{\frac{1}{p}} &\leq \\ &\leq \| x_1 \| \| x_2 \| \, (\delta_{(x_1^*,x_2^*)}(B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \| x_1 \| \| x_2 \| < \infty. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} (a \circ \Psi)(x_1, x_2) &= a(\Psi(x_1, x_2)) \\ &= a(f_{(x_1,x_2)}) \\ &= (\int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} f_{(x_1,x_2)}(y_1^*, y_2^*) d\delta_{(x_1^*,x_2^*)}(y_1^*, y_2^*))y \\ &= y(\int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} < y_1^*, x_1 >< y_2^*, x_2 > d\delta_{(x_1^*,x_2^*)}(y_1^*, y_2^*)) \\ (a \circ \Psi)(x_1, x_2) &= \Phi(x_1, x_2), \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2. \end{aligned}$$

Logo $a \circ \Psi = \Phi$. Daí temos que $\Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y)$.

Além disso:

$$\begin{aligned} \| a \| &= \sup_{\|f\|_{L_p(\mu)} \leq 1} \| af \|_Y \\ &= \| y \| \sup_{\|f\|_{L_p(\mu)} \leq 1} | \int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} f d\delta_{(x_1^*,x_2^*)} | \\ &\leq \| y \| \sup_{\|f\|_{L_p(\mu)} \leq 1} \int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} | f | \, d\delta_{(x_1^*,x_2^*)} \\ &\leq \| y \| \sup_{\|f\|_{L_p(\mu)} \leq 1} (\int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} | f |^p \, d\delta_{(x_1^*,x_2^*)})^{\frac{1}{p}} \times ... \\ &\quad ... \times (\int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} | 1 |^q \, d\delta_{(x_1^*,x_2^*)})^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \| y \| . \end{aligned}$$

Logo

$$\| a \| \leq \| y \| .$$

Também temos

$$\begin{aligned} \| \Psi \| &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1, \\ i=1,2}} \| \Psi(x_1, x_2) \|_{L_p(\mu)} \\ &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1, \\ i=1,2}} \| f_{(x_1,x_2)} \|_{L_p(\mu)} . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Cálculo de:

$$\begin{aligned} \| f_{(x_1,x_2)} \|_{L_p(\mu)} &= \left(\int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} | f_{(x_1,x_2)}(y_1^*, y_2^*) |^p \, d\delta_{(x_1^*,x_2^*)}(y_1^*, y_2^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B_{X_1^*} \times B_{X_2^*}} |< y_1^*, x_1 >< y_2^*, x_2 >|^P \, d\delta_{(x_1^*,x_2^*)}(y_1^*, y_2^*) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |< y_1^*, x_1 >||< y_2^*, x_2 >| \end{aligned}$$

Logo em (2.1) temos

$$\begin{aligned} \| \Psi \| &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1, \\ i=1,2}} |< y_1^*, x_1 >||< y_2^*, x_2 >| \\ &= \| y_1^* \| \| y_2^* \| . \end{aligned}$$

Portanto da relação $\Phi = a \circ \Psi$ segue $\hat{\gamma}_P(\Phi) \leq \| a \| \| \Psi \|$ i.e:

$$\hat{\gamma}_p(\Phi) \leq \| y \| \| y_1^* \| \| y_2^* \| \tag{2.2}$$

Além disso, para qualquer fatoração de $\Phi = a \circ \Psi$, tem-se:

$$\| \Phi \| \leq \| a \| \| \Psi \| \quad \text{o qual implica} \quad \|\Phi\| \leq \hat{\gamma}_p(\Phi).$$

Temos

$$\begin{aligned} \| \Phi \| &= \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1,2}} \|< y_1^*, x_1 >< y_2^*, x_2 > y \|_Y \\ &= \| y \| \sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1,2}} |< y_1^*, x_1 >< y_2^*, x_2 >| \\ &= \| y \| \| y_1^* \| \| y_2^* \| . \end{aligned}$$

Portanto desta última relação e de (2.2) temos:

$$\hat{\gamma}_p(\Phi) = \| y \| \| y_1^* \| \| y_2^* \| .$$

(ii) A propriedade de Ideal: Se $v \in \mathcal{L}(E_0 \times F_0, E \times F)$ com $v = (v_1, v_2)$, sendo $v_1 \in \mathcal{L}(E_0, E), v_2 \in \mathcal{L}(F_0, F)$, $\Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(E, F; G)$, $u \in \mathcal{L}(G, G_0)$, então $u\Phi v \in \mathcal{L}_{p-fat}(E_0, F_0; G)$. Além disso:

$$\hat{\gamma}_p(u\Phi v) \leq \parallel u \parallel \hat{\gamma}_p(\Phi) \parallel v_1 \parallel \parallel v_2 \parallel .$$

Demostração: O diagrama seguinte é importante em nossa demonstração.

$$\begin{tikzcd}
E_0 \times F_0 \arrow[r, "v=(v_1,v_2)"] \arrow[dr, "\Psi_0"'] & E \times F \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Psi"'] & G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "K_G"] & G_0 \arrow[r, hook, "K_{G_0}"] & G_0^{**} \\
& L_p(\mu) \arrow[r, "a"'] & G^{**} \arrow[urr, "u^{**}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Pelo fato de $\Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(E, F; G)$, temos que existem um espaço de medida (Ω, Σ, μ) e operadores $\Psi \in \mathcal{L}(E, F; L_p(\mu))$, $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), G^{**})$ tais que:

$$K_G \circ \Phi = a \circ \Psi. \tag{2.3}$$

Seja $\Psi_0 = \Psi \circ v$. Claramente $\Psi_0 \in \mathcal{L}(E_0, F_0; L_p(\mu))$.
Como

$$u^{**} \circ K_G = K_{G_0} \circ u \tag{2.4}$$

então $u^{**} \circ K_G \circ \Phi = K_{G_0} \circ u \circ \Phi$. Disto e de (2.3) temos

$$u^{**} \circ a \circ \Psi = K_{G_0} \circ u \circ \Phi.$$

Logo temos

$$u^{**} \circ a \circ \Psi \circ v = K_{G_0} \circ u \circ \Phi \circ v. \tag{2.5}$$

Para $a_0 = u^{**} \circ a$, então (2.5) fica da seguinte maneira:

$$a_0 \circ \Psi_0 = K_{G_0} \circ u \circ \Phi \circ v.$$

Portanto $u \circ \Phi \circ v \in \mathcal{L}_{p-fat}(E_0, F_0; G_0)$.
Além disso

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_p(u \circ \Phi \circ v) &\leq \parallel a_0 \parallel \parallel \Psi_0 \parallel \\
&= \parallel u^{**} \circ a \parallel \parallel \Psi \circ v \parallel \\
&\leq \parallel u \parallel \parallel a \parallel \parallel \Psi \parallel \parallel v_1 \parallel \parallel v_2 \parallel .
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\hat{\gamma}_p(u \circ \Phi \circ v) \leq \parallel u \parallel \hat{\gamma}_p(\Phi) \parallel v_1 \parallel \parallel v_2 \parallel$$

(iii)[$\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y), \hat{\gamma}_p$] é um espaço de Banach.

Demostração: Seja (Φ_n) uma seqüêencia em $\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y)$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\gamma}_p(\Phi_n) < \infty.$$

Logo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \Phi_n \| < \infty,$$

pois $\| \Phi_n \| \leq \hat{\gamma}_p(\Phi_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Sendo $\mathcal{L}(X_1, X_2; Y)$ um espaço de Banach, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \Phi, \quad \Phi \in \mathcal{L}(X_1, X_2; Y).$$

Dado $\epsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ achamos un espaço de medida $(\Omega_n, \Sigma_n, \mu_n)$ e operadores $a_n \in \mathcal{L}(L_p(\mu_n), Y^{**})$, $\Psi_n \in \mathcal{L}(X_1, X_2; L_p(\mu_n))$ tais que $K_Y \circ \Phi_n = a_n \circ \Psi_n$, $\| a_n \| \leq \hat{\gamma}_p(\Phi_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ e $\| \Psi_n \| = 1$.

Notemos que podemos considerar, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\Omega'_j = \{(w, j); w \in \Omega_j\} \subset \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \right] \times \mathbb{N}$$

e a σ-álgebra sobre Ω'_j dada por

$$\Sigma'_j = \{(A, j); A \in \Sigma_j\}$$

bem como a medida

$$\mu'_j \longmapsto \mathbb{R}^+$$

com $\mu'_j((A, j)) = \mu_j(A)$.
Assim, sem perda de generalidade podemos trabalhar com Ω_j, Σ_j e μ_j em lugar de Ω'_j, Σ'_j e μ'_j. Neste caso é claro que $\Omega'_j \cap \Omega'_n \neq \emptyset$ se $j \neq n$.
Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ se $m \neq n$.
Tomemos $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\Sigma = \{S \subset \Omega : S \cap \Omega_n \in \Sigma_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$, e

$$\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

definido por

$$\mu(S) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m(S \cap \Omega_m) \frac{\| a_m \|}{\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|}.$$

Se $S_j \in \Sigma_j$ com $j \in \mathbb{N}$; então

$$\mu(S_j) = \mu_j(S_j).\frac{\| a_j \|}{\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|}.$$

Definamos

$$a : L_p(\mu) \longrightarrow Y^{**},$$

por

$$a(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_{\Omega_n}),$$

e

$$\Psi : X_1 \times X_2 \longrightarrow L_p(\mu),$$

por

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x_1, x_2) I_{\Omega_n}.$$

Vejamos que a e Ψ estão bem definidos. Para $1 \leq p < \infty$ tem-se:

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x_1, x_2) I_{\Omega_n} \|_{L_p(\mu)} = & \quad (\int_{\Omega} | \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x_1, x_2) I_{\Omega_n} |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \\ = & \quad (\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} | \Psi_n(x_1, x_2) I_{\Omega_n} |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como:

$$\mu(S_j) \quad = \quad \mu_j(S_j) \frac{\| a_j \|}{\sum_{j=1}^{\infty} \| a_n \|} \quad S_j \in \Sigma_j,$$

(2.6) ficará:

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x_1, x_2) I_{\Omega_n} \|_{L_p(\mu)} &= \frac{1}{(\sum_{m=1}^{\infty} \| a_m \|)^{\frac{1}{p}}}.(\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \| \int_{\Omega_n} | \Psi_n(x_1, x_2) |^p \, d\mu_n)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{(\sum_{m=1}^{\infty} \| a_m \|)^{\frac{1}{p}}}(\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \| \| \Psi_n(x_1, x_2) \|_{L_p(\mu_n)}^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{\| x_1 \| \| x_2 \|}{(\sum_{m=1}^{\infty} \| a_m \|)^{\frac{1}{p}}}.(\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|)^{\frac{1}{p}} \\ &= \| x_1 \| \| x_2 \| . \end{aligned}$$

Assim

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x_1, x_2) I_{\Omega_n} \|_{L_p(\mu)} \leq \| x_1 \| \| x_2 \| .$$

Logo Ψ está bem definido e é claro que $\| \Psi \| \leq 1$.
Similarmente para a temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_{\Omega_n}) \|_{Y^{**}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \| \| f|_{\Omega_n} \|_{L_p(\mu_n)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \| (\int_{\Omega_n} | f|_{\Omega_n} |^p \, d\mu_n)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Da seguinte relação:

$$\begin{aligned} (\int_{\Omega} | f|_{\Omega_n} |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} &= \frac{\| a_n \|^{\frac{1}{p}}}{(\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|)^{\frac{1}{p}}} . (\int_{\Omega_n} | f|_{\Omega_n} |^P \, d\mu_n)^{\frac{1}{p}} \\ \| f|_{\Omega_n} \|_{L_p(\mu)} &= \frac{\| a_n \|^{\frac{1}{p}}}{(\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|)^{\frac{1}{p}}} . \| f|_{\Omega_n} \|_{L_p(\mu_n)} . \end{aligned} \tag{2.8}$$

De (2.7), (2.8) e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_{\Omega_n}) \|_{Y^{**}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \| [\| a_n \|^{\frac{-1}{p}} \| f|_{\Omega_n} \|_{L_p(\mu)}](\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|^{\frac{1}{p^*}} \| f|_{\Omega_n} \|_{L_p(\mu)}). \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder tem-se:

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_{\Omega_n}) \|_{Y^{**}} &\leq (\sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|)^{\frac{1}{p^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} \| f|_{\Omega_n} \|^p_{L_p(\mu_n)})^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \| \| f \|_{L_p(\mu)} . \end{aligned}$$

Logo a está bem definida e $\| a \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|$.
Para o caso $p = \infty$ temos o seguinte:
Para $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, como $\| \Psi_n \| = 1$, temos que $\| \Psi_n(x_1, x_2) \|_{L_\infty(\mu_n)} \leq 1$. Portanto existe $A_n \subset \Omega_n$ tal que $\mu_n(A_n) = 0$ e $| \Psi_n(x_1, x_2)(t) | \leq 1$, para todo $t \in \Omega_n \setminus A_n$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde $\mu_n(A_n) = 0, n \in \mathbb{N}$. Logo é claro que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ implica $\mu(A) = 0$. Tome $t \in \Omega \setminus A$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $t \in \Omega_{n_0} \setminus A_{n_0}$. Logo temos:

$$| \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x_1, x_2)(t) I_{\Omega_n}(t) | = | \Psi_{n_0}(x_1, x_2)(t) | \leq 1,$$

para todo $t \in \Omega \setminus A$. Portanto $\| \Psi(x_1, x_2) \|_{L_\infty(\mu)} \leq 1$ para todo $\| x_1 \| = \| x_2 \| = 1$, i.e $\| \Psi \| \leq 1$.

Também temos que $\| a(f) \|_{Y^{**}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \|$ para todo $f \in L_\infty(\mu)$ com $\| f \|_{L_\infty(\mu)} = 1$.
Em qualquer caso $\| a \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a_n \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\gamma}_P(\Phi_n) + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.
Assim $\| a \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\gamma}_P(\Phi_n)$.
É facil ver que $K_Y \circ \Phi = a \circ \Psi$ o qual implica que $\Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y)$.
Como $\hat{\gamma}_P(\Phi - \sum_{k\leq n} \Phi_k) = \hat{\gamma}_P(\sum_{k>n} \Phi_k) \leq \sum_{k>n} \hat{\gamma}_P(\Phi_k)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\gamma}_P(\Phi_n) < \infty$, por tanto $\lim_{n\to\infty} \hat{\gamma}_P(\Phi - \sum_{k\leq n} \Phi_k) = 0$. Logo Φ_n converge a Φ na norma $\hat{\gamma}_P$.
Assim $[\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, X_2; Y), \hat{\gamma}_P]$ é um espaço de Banach. □

Definição 2.3. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n, Y$ espaços de Banach. Para $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, $\Psi^* \in \mathcal{L}(Y^*, \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K}))$ será definido por:

$$\Psi^*(y^*)(x_1, \ldots, x_n) = (y^* \circ \Psi)(x_1, \ldots, x_n)$$

com $x_1 \in X_1$, ..., $x_n \in X_n$ e $y^* \in Y^*$.

Observação 2.3.

1. Ψ^* é um operador linear.

2. Para $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ e $a \in \mathcal{L}(Y, W)$ temos que $(a\circ\Psi)^* \in \mathcal{L}(W^*, \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K}))$ e $(a \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ a^*$, pois:

$$\begin{aligned} (a \circ \Psi)^*(w^*)(x_1, \ldots, x_n) &= (w^* \circ a \circ \Psi)(x_1, \ldots, x_n) \\ &= (w^* \circ a)(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= a^*(w^*)(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= (a^*(w^*) \circ \Psi)(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \Psi^*(a^*(w^*))(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

   $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$ e $\forall w^* \in W^*$.
   Logo: $(a \circ \Psi)^* = (\Psi^* \circ a^*)$.

3. $\| \Psi^* \| = \| \Psi \|$.
   Temos:

$$\| \Psi^* \| = \sup_{\| y^* \| = 1} \| \Psi^*(y^*) \|_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K})} \tag{2.9}$$

   e

$$\begin{aligned} \| \Psi^*(y^*) \|_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K})} &= \sup_{\substack{\|x_i\|=1,\\ i=1,\ldots,n}} \| \Psi^*(y^*))(x_1, \ldots, x_n) \| \\ &\leq \| y^* \| \| \Psi \| . \end{aligned} \tag{2.10}$$

   De (2.9) e (2.10) temos: $\| \Psi^* \| \leq \| \Psi \|$.
   É claro que $\| \Psi^* \| \geq \| \Psi^*(y^*) \|_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K})}$, $\forall y^* \in Y^*$ com $\| y^* \| = 1$.

Então $\| \Psi^* \| \geq \| \Psi^*(y^*)(x_1, \ldots, x_n) \|$, $\forall y^* \in Y^*$ com $\| y^* \| = 1$ e $\forall x_i \in X_i$ com $\| x_i \| = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Assim:

$$\begin{aligned} \| \Psi^* \| &\geq \| (y^* \circ \Psi)(x_1, \ldots, x_n) \| \\ &= \| y^*(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) \| . \end{aligned}$$

Para $\Psi(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ existe $y^* \in Y^*$ tal que $\| y^* \| = 1$ e:

$$y^*(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) = \| \Psi(x_1, \ldots, x_n) \| .$$

Portanto temos $\| \Psi^* \| \geq \| \Psi(x_1, \ldots, x_n) \|$, $\forall x_i \in X_i$ com $\| x_i \| = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Assim:

$$\begin{aligned} \| \Psi^* \| &\geq \sup_{\substack{\|x_i\|=1 \\ i=1,\ldots,n}} \| \Psi(x_1, \ldots, x_n) \| \\ &= \| \Psi \| . \end{aligned}$$

i.e:

$$\| \Psi^* \| \geq \| \Psi \| .$$

Proposição 2.2. *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Então para:*

$$\Phi : X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow Y,$$

as seguintes afirmações são equivalentes:

(*i*) $\Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$;

(*ii*) $\Phi^* \in \mathcal{L}_{p^*-fat}(Y^*, \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K}))$;

(*iii*) $\Phi^{**} \in \mathcal{L}_{p-fat}(\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K})^*, Y^{**})$;

(*iv*) $K_Y \Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y^{**})$.

Neste caso

$$\gamma_{p^*}(\Phi^*) = \hat{\gamma}_p(\Phi) = \gamma_p(\Phi^{**}) = \hat{\gamma}_p(K_Y \Phi).$$

Demonstração. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*): Seja $\Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, então existem um espaço de medida (Ω, Σ, μ), operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu); Y^{**})$ e $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; L_p(\mu))$ tais que $K_Y \circ \Phi = a \circ \Psi$. Desta relação e usando a parte (ii) da Observação 2.3 tem - se:

$$\Psi^* \circ a^* = \Phi^* \circ K_Y^*.$$

Temos ainda

$$K_Y^* \circ K_{Y^*} = id_{Y^*}.$$

Destas duas últimas relações temos:

$$\Phi^* = \Psi^* \circ a^* \circ K_{Y^*}$$

Assim

$$K_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})} \circ \Phi^* = K_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})} \circ \Psi^* \circ a^* \circ K_{Y^*}$$

Tomando $b = a^* \circ K_{Y^*} \in \mathcal{L}(Y^*; L_{p^*(\mu)})$ e $c = K_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})} \circ \Psi^* \in \mathcal{L}(L_{p^*}(\mu), \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})^{**})$, temos que $\Phi^* \in \mathcal{L}_{p^*-fat}(Y^*, \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K}))$. E além disso:

$$\begin{aligned} \gamma_{p^*}(\Phi^*) &\leq \| a^* \circ K_{Y^*} \| \| K_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})} \circ \Psi^* \| \\ &\leq \| a \| \| \Psi^* \| \\ &= \| a \| \| \Psi \| . \end{aligned}$$

Assim tem-se:

$$\gamma_{p^*}(\Phi^*) \leq \hat{\gamma}_p(\Phi). \tag{2.11}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Seja $\Phi^* \in \mathcal{L}_{p^*-fat}(Y^*, \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K}))$então existem um espaço de medida (Ω, Σ, μ), operadores $a \in \mathcal{L}(Y^*, L_{P^*}(\mu))$ e $b \in \mathcal{L}(L_{p^*}(\mu), \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})^{**})$ tais que:

$$K_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})} \circ \Phi^* = b \circ a. \tag{2.12}$$

Desta relação temos:

$$\Phi^{**} \circ K^*_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})} = a^* \circ b^*,$$

fazendo o mesmo que em (i)$\Rightarrow$(ii), temos que: $\Phi^{**} \in \mathcal{L}_{p-fat}(\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})^*, Y^{**})$, e além disso:

$$\gamma_p(\Phi^{**}) \leq \gamma_{p^*}(\Phi^*) \tag{2.13}$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Seja $\Phi^{**} \in \mathcal{L}_{p-fat}(\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})^*, Y^{**})$ então existem um espaço de medida (Ω, Σ, μ) e operadores $b \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})^*, L_P(\mu))$, $a \in \mathcal{L}(L_P(\mu); Y^{****})$ tais que

$$a \circ b = K_{Y^{**}} \circ \Phi^{**}. \tag{2.14}$$

Seja

$$\begin{aligned} K : X_1 \times \ldots \times X_n &\longrightarrow \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K})^*, \\ (x_1,\ldots,x_n) &\longmapsto K_{(x_1,\ldots,x_n)} \end{aligned}$$

com $K_{x_1,\ldots,x_n}$ dado por:

$$\begin{aligned} K_{(x_1,\ldots,x_n)} : \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \Psi &\longmapsto \Psi(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Claramente K está bem definido pois é multilinear, e separadamente contínuo, portanto contínuo. Além disso veremos adiante que $\| K \|= 1$.
Também temos

$$\begin{aligned} (K_Y \circ \Phi)(x_1,\ldots,x_n)(y^*) &= y^*(\Phi(x_1,\ldots,x_n)) \\ &= (y^* \circ \Phi)(x_1,\ldots,x_n) \\ &= \Phi^*(y^*)(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
(\Phi^{**} \circ K)(x_1, \ldots, x_n)(y^*) &= (K_{(x_1,\ldots,x_n)} \circ \Phi^*)(y^*) \\
&= K_{(x_1,\ldots,x_n)}(\Phi^*(y)) \\
&= \phi^*(y^*)(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

De (2.15) e (2.16) tem-se

$$K_Y \circ \Phi = \Phi^{**} \circ K \tag{2.17}$$

Assim, de (2.14) e (2.17), temos:

$$K_{Y^{**}} \circ K_Y \circ \Phi = K_{Y^{**}} \circ \Phi^{**} \circ K = a \circ b \circ K$$

Desta última relação é claro que $K_Y \circ \Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, , X_n; Y^{**})$. Para completar a prova vejamos ainda que $\| K \| = 1$.

$$
\begin{aligned}
\| K \| &= \sup_{\substack{\|x_i\|=1;\\ i=1,\ldots,n}} \| K(x_1, \ldots, x_n) \| \\
&= \sup_{\substack{\|x_i\|=1;\\ i=1,\ldots,n}} \| K_{(x_1,\ldots,x_n)} \| \\
&= \sup_{\substack{\|x_i\|=1;\\ i=1,\ldots,n}} \{ \sup_{\|\Phi\|=1} | \Phi(x_1, \ldots, x_n) | \}.
\end{aligned}
$$

Potanto $\| K \| \leq 1$.
Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\| K \| &\geq \| K(x_1, \ldots, x_n) \| \\
&= \| K_{(x_1,\ldots,x_n)} \| \\
&\geq | \Phi(x_1, \ldots, x_n) |,
\end{aligned}
$$

para todo $x_i \in X_i$ com $\| x_i \| = 1$, $i = 1, \ldots, n$ e $\| \Phi \| = 1$.
$\Phi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K})$, como Φ é sobrejetora temos: $\| K \| \geq 1$.
Logo:

$$\hat{\gamma}_p(K_Y \Phi) \leq \| a \| \| b \| \| K \| .$$

Daí segue-se que:

$$\hat{\gamma}_p(K_Y \Phi) \leq \gamma_p(\Phi^{**}) \tag{2.18}$$

$(iv) \Rightarrow (i)$: Seja $K_Y \circ \Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y^{**})$, então existem um espaço de medida (Ω, Σ, μ) e operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y^{****})$, $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; L_p(\mu))$, tais que:

$$a \circ \Psi = K_{Y^{**}} \circ K_Y \circ \Phi. \tag{2.19}$$

Como:

$$K^*_{Y^*} \circ K_{Y^{**}} = id_{Y^{**}} \tag{2.20}$$

Das relaçoes (2.19) e (2.20) temos

$$K^*_{Y^*} \circ a \circ \Psi = K_Y \circ \Phi.$$

Assim temos o seguinte:

$$\hat{\gamma}_p(\Phi) \leq \| K^*_{Y^*}a \| \| \Psi \| \leq \| a \| \| \Psi \|,$$

e portanto:

$$\hat{\gamma}_p(\Phi) \leq \hat{\gamma}_p(K_Y \circ \Phi). \tag{2.21}$$

Logo, das relações (2.11), (2.13), (2.18) e (2.21) temos:

$$\hat{\gamma}_p(\Phi) \leq \hat{\gamma}_p(K_Y \circ \Phi) \leq \gamma_p(\Phi^{**}) \leq \gamma_{p^*}(\Phi^*) \leq \hat{\gamma}_p(\Phi),$$

se $1 < p < \infty$.
Para $p = 1$, ou $p = \infty$ é usar o fato que $L_1^{**}(\mu)$ é isometricamente isomorfo a $L_1(v)$ para alguma medida apropriada, para isto vide (10.6) de [7]. □

A proposição 2.3 é relevante, pois assim como no caso linear, mostra que para $p = 2$ o bidual não é necessaário na fatoração.

Proposição 2.3. *Qualquer operador multilinear $\Phi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ pertence a $\mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ se e só se tem uma fatoração:*

$$\Phi : X_1 \times \cdots \times X_n \xrightarrow{\ \Psi\ } H \xrightarrow{\ b\ } Y,$$

onde H é um espaço de Hilbert. Neste caso:

$$\hat{\gamma}_2(\Phi) = \inf \| \Psi \| \| b \|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatoraçoes possíveis.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Logo temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] \arrow[drr, "\Psi_0"] & & Y \arrow[r, hook, "K_Y"] & Y^{**} \\
& L_2(\mu) \arrow[r, "P"'] \arrow[urr, "a"] & H_0 \arrow[u, "a_0"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $H_0 = \{\ker a\}^{\perp} \cap \{h \in L_2(\mu) : ah \in K_Y(Y)\}$.
Do diagrama da acima temos:

(i) H_0 é um subespaço fechado de $L_2(\mu)$.

(ii) Existe uma projeção ortogonal $P : L_2(\mu) \longrightarrow H_0$ contínua com $\| P \|= 1$.

(iv) Seja $a_0 : H_0 \longrightarrow Y$ tal que:

$$K_Y \circ a_0 = a|_{H_0}$$

i.e:

$$(K_Y \circ a_0)(h_0) = a(h_0),$$

$\forall h_0 \in H_0$.

Só precisamos verificar que a_0 esta bem definida.
Para $h_0 \neq 0, h_0 \in H_0$ temos $(K_Y \circ a_0)(h_0) = a(h_0)$, pela definição de H_0 e $h_0 \in H_0$ tem - se que existe $y \in Y$ tal que $a(h_0) = K_Y(y)$ dai temos:
$K_Y(a_0(h_0)) = K_Y(y)$, sendo K_Y injetor temos $a_0(h_0) = y$. Logo a imagem de a_0 está contida en Y.
Tambem a_0 é linear pois para $h_1, h_2 \in H_0$ temos:

$$\begin{aligned} K_Y \circ a_0(h_1 + h_2) &= a(h_1 + h_2) \\ &= a(h_1) + a(h_2) \\ &= K_Y(a_0(h_1)) + K_Y(a_0(h_2)) \qquad i.e \\ K_Y(a_0(h_1 + h_2)) &= K_Y(a_0(h_1) + a_0(h_2)) \end{aligned}$$

Novamente pela injetividade de K_Y temos: $a_0(h_1 + h_2) = a_0(h_1) + a_0(h_2)$, também para qualquer $k \in \mathbb{K}$ e $h_0 \in H_0$, $a_0(kh_0) = ka_0(h_0)$.
Vejamos a continuidade de a_0.
De $K_Y \circ a_0 = a|_{H_0}$ temos

$$\begin{aligned} \| K_Y \circ a_0 \| &= \| a|_{H_0} \| \\ &\leq \| a \| \qquad i.e \\ \| a_0 \| &\leq \| a \| . \end{aligned}$$

Sabemos que

$$(K_Y \circ \Phi)(x_1, \ldots, x_n) = (a \circ \Psi)(x_1, \ldots, x_n) \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n.$$

Se $\Psi(x_1, \ldots, x_n) \in H_0$ temos

$$K_Y(\Phi(x_1, \ldots, x_n)) = a(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) = K_Y(y) \text{ para algum } \; y \in Y,$$

e daí temos

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = y.$$

Também da relação $K_Y \circ a_0 = a|_{H_0}$ temos o seguinte, como $\Psi(x_1, \ldots, x_n) \in H_0$ tem-se:

$$\begin{aligned}(K_Y \circ a_0)(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) &= a(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= K_Y(y) \\ &= K_Y(\Phi(x_1, \ldots, x_n))\end{aligned}$$

Daí segue:

$$a_0(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) = \Phi(x_1, \ldots, x_n), \ \forall\ \Psi(x_1, \ldots, x_n) \in H_0. \tag{2.22}$$

Logo, em particular, para $(P \circ \Psi)(x_1, \ldots, x_n) \in H_0$ e $\forall x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto em (2.22) tem-se $a_0 \circ P \circ \Psi = \Phi$ i.e $a_0 \circ \Psi_0 = \Phi$.
($\Leftarrow$) E só notar que $H = \ell_2^I$, donde I é um conjunto apropriado. Da (i) e (ii) implicação não e dificil mostrar que:

$$\hat{\gamma}_2(\Phi) = \inf \| \Psi \| \| b \|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações possíveis de Φ. $\square$

Proposição 2.4. *Sejam E_i, X_i, Y, Y_0, $i = 1, \ldots, n$, espaços de Banach, seja $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{L}(E_1 \times \ldots \times E_n, X_1 \times \ldots \times X_n)$ onde $q_i, i = 1, \ldots, n$ são aplicaçoes quocientes com $q_i \in \mathcal{L}(E_i, X_i)$ e seja $j \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$ um mergulho isometrico. Um operador $\Phi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$é 2 - fatoravel se e só se $j \circ \Phi \circ q : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow Y_0$ é, neste caso $\hat{\gamma}_2(\Phi) = \hat{\gamma}_2(j \circ \Phi \circ q)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ então pela propriedade de ideal temos $j \circ \Phi \circ q \in \mathcal{L}_{2-fat}(E_1, \ldots, E_n; Y_0)$ e:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_2(j \circ \Phi \circ q) &\leq \| j \| \hat{\gamma}_2(\Phi) \| q_1 \| \ldots \| q_n \| \\ &= \hat{\gamma}_2(\Phi).\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Se $j \circ \Phi \circ q$ é 2-fatorável, então

$$j \circ \Phi \circ q : E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow Y_0$$

fatora-se através de um espaço de Hilbert, i.e:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\Psi"'] \arrow[drrr, "\Psi_1"] & & X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi_0"] & Y \arrow[r, hook, "j"] & Y_0 \\
& H \arrow[rr, "P"'] \arrow[urrr, "a"] & & H_0 \arrow[u, "a_0"] &
\end{tikzcd}$$

Com H_0, a_0, Ψ_0, Ψ_1 definidos adiante.

(i) $H_0 = \{\ker a\}^{\perp} \cap \{h \in H : ah \in j(Y)\}$ é um subespaço fechado de H.

(*ii*) $ja_0 = a|_{H_0}$ implica que $\| a_0 \| \leq \| a \|$. Já se mostrou na Proposição 2.3 que a_0 está bem definido.

(*iii*) P é projeção ortogonal com $\| P \| \leq 1$.

(*iv*) a_0 é injetor.
Sejam $h_1, h_2 \in H_0$ tal que $a_0(h_1) = a_0(h_2)$. Daí $j(a_0(h_1)) = j(a_0(h_2))$ i.e $a(h_1) = a(h_2) \Rightarrow a(h_1 - h_2) = 0$.

Portanto $h_1 - h_2 \in \ker a$ e $h_1 - h_2 \in \{\ker a\}^{\perp}$. Daí segue que $h_1 = h_2$ pois: $\ker\ a \cap \{\ker\ a\}^{\perp} = 0$.
Seja $\Psi_1 = P \circ \Psi$. Daí:

$$\begin{aligned} \| \Psi_1 \| &= \| P \circ \Psi \| \\ &\leq \| P \| \| \Psi \| \\ &= \| \Psi \| . \end{aligned}$$

Logo $\Phi \circ q$ fatora-se através de um espaço de Hilbert i.e:

$$\Phi \circ q : E_1 \times \ldots \times E_n \xrightarrow{\Psi_1} H_0 \xrightarrow{a_0} Y. \tag{2.23}$$

Para justificar (2.23) usamos o mesmo argumento já feito i.é:
Se $\Psi(x_1, \ldots, x_n) \in H_0$ temos:

$$\begin{aligned} (j \circ \Phi \circ q)(x_1, \ldots, x_n) &= a(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= j(y), \quad \text{para algum} \quad y \in Y. \end{aligned}$$

Daí $(\Phi \circ q)(x_1, \ldots, x_n) = y$.
Além disso:

$$\begin{aligned} a(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) &= (j \circ a_0)(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= j(a_0(\Psi(x_1, \ldots, x_n))) \\ &= j(y). \end{aligned}$$

Então tem-se:

$$a_0(\Psi(x_1, \ldots, x_n)) = (\Phi \circ q)(x_1, \ldots, x_n),$$

$\forall\, \Psi(x_1, \ldots, x_n) \in H_0$.
Em particular para $(P \circ \Psi)(x_1, \ldots, x_n) \in H_0$, $\forall x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Portanto temos:

$$(a_0 \circ P \circ \Psi)(x_1, \ldots, x_n) = (\Phi \circ q)(x_1, \ldots, x_n),$$

$\forall x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Assim temos:

$$a_0 \circ P \circ \Psi = \Phi \circ q,$$

i.e:

$$a_0 \circ \Psi_1 = \Phi \circ q.$$

A injetividade de a_0 implica a existência de $\Psi_0 \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; H_0)$ tal que:

$$\Psi_0 \circ q = \Psi_1 \tag{2.24}$$

$$H_0 \xrightarrow{a_0} Imag(a_0) \xrightarrow{b} H_0.$$

Definamos $b(x) = h$, $x = a_0(h)$, $h \in H_0$ é claro que b está bem definido e é linear, além disso:

$$b \circ a_0 = id_{H_0}. \tag{2.25}$$

Também

$$Imag(a_0) \xrightarrow{b} H_0 \xrightarrow{a_0} Imag(a_0)$$

da

$$a_0 \circ b = id_{Imag(a_0)}. \tag{2.26}$$

(2.25) e (2.26) foi possível pelo fato de ser a_0 injetor.
Sabemos que: $a_0 \circ \Psi_1 = \Phi \circ q$. Tome $\Psi_0 = b \circ \Phi : X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow H_0$.
Logo $b \circ a_0 \circ \Psi_1 = b \circ \Phi \circ q$. Daí tem-se $\Psi_1 = \Psi_0 \circ q$, por tanto (2.24) está justificado. De $\Psi_0 = b \circ \Phi$ temos:

$$a_0 \circ \Psi_0 = a_0 \circ b \circ \Phi = \Phi$$

Vejamos agora que Ψ_0 é continuo.

$$\Phi : X_1 \times \ldots \times X_n \xrightarrow{\Psi_0} H_0 \xrightarrow{a_0} Y.$$

Sendo Φ e a_0 contínuas e pelo Teorema do Gráfico Fechado temos que Ψ_0 é separadamente contínuo. Portanto Ψ_0 é contínuo. Daí $\Psi_0 \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; H_0)$.
Assim $\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.
Se colocamos normas em $E_1 \times \ldots \times E_n$ e em $X_1 \times \ldots \times X_n$ tais que: $\| q \| \leq 1$ tem-se:

(i_1) $\| \Psi_1 \| = \| P \circ \Psi \| \leq \| \Psi \|$ pois $\| P \| = 1$.

(i_2) $\| \Psi_1 \| = \| \Psi_0 \circ q \| \leq \| \Psi_0 \|$.

(i_3) $\| \Psi_1 \| = \| \Psi_0 \circ q \| \geq \| (\Psi_0 \circ q)(x_1, \ldots, x_n) \|$, $\forall \| x_i \|_{E_i} \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Como $\| q_i(x_i) \|_{X_i} \leq \| x_i \|_{E_i} \leq 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$ tem-se:

$$\| \Psi_1 \| \geq \| \Psi_0(q_1(x_1), \ldots, q_n(x_n)) \|,$$

e sendo q_i, $i = 1, \ldots, n$ sobrejetores, temos:

$$\begin{aligned} \|\Psi_1\| &\geq \sup_{\substack{\|q_i(x_i)\|_{X_i} \leq 1, \\ i=1,\ldots,n}} \|\Psi_0(q_1(x_1), \ldots, q_n(x_n))\| \\ &= \|\Psi_0\|. \end{aligned}$$

(i_4) Daí temos $\| \Psi_1 \| \geq \| \Psi_0 \|$.

Portanto de (i_4) e (i_2) temos $\| \Psi_1 \| = \| \Psi_0 \|$.
Assim $\hat{\gamma}_2(\Phi) \leq \| \Psi_0 \| \| a_0 \| = \| \Psi_1 \| \| a_0 \| \leq \| \Psi \| \| a \|$.
Como iniciamos com uma fatoração arbitrária de $j \circ \Phi \circ q$ temos o seguinte:

$$\hat{\gamma}_2(\Phi) \leq \hat{\gamma}_2(j \circ \Phi \circ q)$$

□

Teorema 2.2. *Seja $m \in \mathbb{N}$. As afirmações para um operador*

$$\Phi : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow Y,$$

são equivalentes:

(i) $\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_m; Y)$.

(ii) Existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} < \Psi_i^*, y_j^* \circ \Phi > \right| \leq c \sup\{\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\},$$

para qualquer escolha de $n \in \mathbb{N}$, qualquer matriz escalar $(a_{ij})_{n \times n}$ e quaisquer vetores $\Psi_1^*, \ldots, \Psi_n^* \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})^*}$ e $y_i^* \in B_{Y^*}$, $i = 1, \ldots, n$. No caso de ter (i) e (ii) podemos tomar $c = K_G \hat{\gamma}_2(\Phi)$, onde K_G é a constante de Grothendieck.

Demonstração. Usamos a Proposição 2.2 i.e $\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ se e so se $\Phi^* \in \mathcal{L}_{2-fat}(Y^*, \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}))$.
$(i) \Rightarrow (ii)$ como $\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ temos que Φ^* é 2-fatoravel.
Sendo Φ^* linear, pelo Teorema 7.5 de [2] , temos que: existe uma constante $c = K_G \gamma_2(\Phi^*) \geq 0$ tal que:

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} < \Psi_i^*, \Phi^*(y_j^*) > \right| \leq K_G \gamma_2(\Phi^*) \sup\{\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\},$$

para quaisquer $y_1^*, \ldots, y_n^* \in B_{Y^*}$ e $\Psi_1^*, \ldots, \Psi_n^* \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m;\mathbb{K})^*}$.

Como $\Phi^*(y_i^*) = y_i^* \circ \Phi$ e $\hat{\gamma}_2(\Phi) = \gamma_2(\Phi^*)$ temos

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} < \Psi_i^*, y_j^* \circ \Phi > \right| \leq K_G \hat{\gamma}_2(\Phi) \sup\{\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| : (s_i), (t_j) \in B_{\ell_\infty^n}\}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Usando a relação $\Phi^*(y_i^*) = y_i^* \circ \Phi$ e sendo Φ^* um operador linear, temos que Φ^* é 2-fatorável. Pela Proposição 2.2 temos que $\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_m; Y)$.

□

Portanto a extensão do Teorema 7.8 de [2] é imediato i.e:

Teorema 2.3. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_m$, Y espaços de Banach. O operador $\Phi : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ pertence a $\mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ com $\hat{\gamma}_2(\Phi) \leq c$, se e só se, para qualquer inteiro n, e qualquer matriz escalar $a = (a_{ij})_{n \times n}$ e quaisquer vetores $\Psi_1^*, \ldots, \Psi_n^* \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K})^*$, $y_1^*, \ldots, y_n^* \in Y^*$ temos*

$$|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} < \Psi_i^*, y_j^* \circ \Phi >| \leq c|||a|||(\sum_{j=1}^{n} \| \Psi_j^* \|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{i=1}^{n} \| y_i^* \|^2)^{\frac{1}{2}}$$

sendo $|||a||| = \sup|\sum_{i,j} a_{ij}(x_i \mid y_j)|$ com o supremo tomado sobre todos os espaços de Hilbert e $\|x_i\|_H = \|y_i\|_H = 1$, $i = 1, \cdots, n$

Demonstração. Segue do Teorema 2.2, do Teorema 7.8 de [2] e da relação:
$\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_m; Y)$ se e só se $\Phi^* \in \mathcal{L}_{2-fat}(Y^*, \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathbb{K}))$, com $\Phi^*(y_i^*) = y_i^* \circ \Phi$, $\hat{\gamma}_2(\Phi) = \gamma_2(\Phi^*)$. □

Corolário 2.1. *Seja $1 < p < \infty$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $X_1, \ldots, X_n, Y$ são espaços de Banach então $\mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ está contido em $\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.*

Demonstração. É só usar o fato que se $1 < p < \infty$, então $\mathcal{L}_{2-fat}(X, Y) \subset \mathcal{L}_{p-fat}(X, Y)$ para todos os espaços de Banach(ver capitulo 9, Corolário 9.2 de [2]). □

Proposição 2.5. *Seja $2 < p < \infty$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $X_1, \ldots, X_n, Y$ são espaços de Banach com Y tendo cotipo 2, então:*

$$\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y) = \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$$

Demonstração. Como Y tem cotipo 2, então Y^{**} tem cotipo 2(ver Corolário 11.9 de [2]). Do Corolário 2.1 temos:

$$\mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y) \subset \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y). \tag{2.27}$$

Tome $\Phi \in \mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Logo existem um espaço de medida (Ω, Σ, μ) e operadores $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; L_p\mu)$, $A \in \mathcal{L}(L_p(\mu), Y^{**})$ tais que $K_Y \circ \Phi = A \circ \Psi$. Como $p \in]2, \infty[$ temos que $L_p(\mu)$ tem tipo 2. Assim pelo Teorema 12.19 de [2], temos que A é 2-fatorável. Portanto $\Phi \in \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Desta ultima relação e de (2.27) temos o resultado. □

Corolário 2.2. *Seja $1 < p < \infty$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $X_1, \ldots, X_n$ são espaços de Banach e H é um espaço de Hilbert então:*

$$\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, \ldots, X_n; H) = \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, \ldots, X_n; H).$$

Além disso:

$$\hat{\gamma}_2(\Phi) \leq \hat{\gamma}_p(\Phi)$$

Demonstração. É imediato. $\square$

Exemplo 2.1. *Sejam $E_1, \dots, E_n, F$ espaços de Banach, e seja*

$$A : E_1 \to F,$$

um operador linear contínuo. Sejam $\varphi_i \in \mathcal{L}(E_i, \mathbb{K}) = E_i^*$ operadores lineares contínuos, $i = 2, ..., n$. Definamos $\Psi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ como segue: $\Psi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=2}^{n} \varphi_i(x_i) A x_1$. É claro que Ψ é multilinear e além disso $\| \Psi \| \leq \| A \| \| \varphi_2 \| \cdots \| \varphi_n \|$.
Para $S \in \mathcal{L}(F, G)$ com $S = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_i \otimes y_i$ tais que $(\sigma_i)_{i=1}^{\infty} \in \Gamma_0$, $\| a_i \| \leq 1$ e $\| y_i \| \leq 1$, então S é estritamente nuclear (ver 18.7.4 e 18.7.5 de [3]), o qual implica que existem operadores lineares e contínuos $\hat{A} \in \mathcal{L}(F; \ell_2)$ e $B \in \mathcal{L}(\ell_2; G)$ tal que $B \circ \hat{A} = S$, assim $\hat{A} \circ \Psi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \ell_2)$. Portanto $S \circ \Psi$ fatora-se através de um espaço do Hilbert, logo pelo Corolario 2.1
$S \circ \Psi \in \mathcal{L}_{p-fat}(E_1, ..., E_n; G)$, com $1 < p < \infty$, i.é:

$$\begin{aligned}(S \circ \Psi)(x_1, ..., x_2) &= S(\Psi(x_1, ..., x_2)) = S(\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) A x_1) \\ &= \prod_{i=2}^{n} \varphi_i(x_i) \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j a_j (A x_1) y_j.\end{aligned}$$

Exemplo 2.2. *(A) No caso linear não é muito difícil mostrar que o seguinte diagrama não é comutativo para $2 < p < \infty$, com H sendo um espaço de Hilbert.*

$$\begin{tikzcd} \ell_p \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "A"'] & & \ell_p \\ & H \arrow[ur, dashed, "B"'] & \end{tikzcd} \tag{2.28}$$

onde $A \in \mathcal{L}(\ell_p, H)$, $B \in \mathcal{L}(H, \ell_p)$, $id \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_p)$.
Para demostrar a afirmação feita acima, vamos supor que dito diagrama é comutativo i.e: $id = B \circ A$.
Se $x \in \ker A$, então $Ax = 0$, o qual implica $BAx = B(0)$. Assim $id(x) = 0$, portanto $x = 0$. Logo A é injetor. De maneira semelhante temos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} \ell_q \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "B^*"'] & & \ell_q \\ & H \arrow[ur, dashed, "A^*"'] & \end{tikzcd} \tag{2.29}$$

onde $1 < q < 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Dos gráficos temos:

$$A^* \circ A : \ell_p \xrightarrow{A} H \xrightarrow{A^*} \ell_q,$$

tome $x \in \ker(A^* \circ A)$, *então* $(A^* \circ A)(x) = 0$. *Seja* $Ax = \varphi \in H^* = H$ *então* $A^*(\varphi) = 0$ *o qual implica* $(\varphi \circ A)(y) = 0$ *para todo* $y \in \ell_p$, *em particular para* $y = x$, *i.é:*

$$< \varphi, Ax >=< Ax, Ax >= \|Ax\|^2 = 0 = \|Ax\|.$$

Como A *é injetor temos que* $x = 0$. *Logo* $\ker(A^* \circ A) = \{0\}$, *o qual implica que para* $2 < p < \infty$, $1 < q < 2$, ℓ_p *esta mergulhado em* ℓ_q *isto é um absurdo.*

(B) *Se em (A) tomamos* $1 < p < 2$, *também para istos valores o diagrama (2.28) não é comutativo. Se ele fosse comutativo teríamos que o diagrama (2.29) é comutativo com* $2 < q < \infty$, *o qual é falso por (A).*

Isto quer dizer de (A) e (B) que $\mathcal{L}_{p-fat}(\ell_p; \ell_p) \supsetneqq \mathcal{L}_{2-fat}(\ell_p; \ell_p)$ *com* $p \in]1, \infty[-\{2\}$.
Sabemos do caso linear que $\mathcal{L}_{p-fat}(X, Y) \supset \mathcal{L}_{2-fat}(X, Y)$, *com* $p \in]1, \infty[$, *aqui* X, Y *são espaços de Banach. No caso que* $Y = H$ *seja um espaço de Hilbert temos:*

$$\mathcal{L}_{p-fat}(X, H) = \mathcal{L}_{2-fat}(X, H), \qquad p \in < 1, \infty > .$$

No caso multilinear tal igualdade ainda é verdadeira i.e:

$$\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, ..., X_n; H) = \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, ..., X_n; H), \qquad p \in < 1, \infty >$$

e $X_1, ..., X_n$ *são espaços de Banach.*
(C) *Fornecemos um exemplo no qual*

$$\mathcal{L}_{p-fat}(X_1, ..., X_n; Y) \supsetneqq \mathcal{L}_{2-fat}(X_1, ..., X_n; Y)$$

Seja $X_1 = ... = X_{n-1} = \mathbb{K}$, $X_n = \ell_p$, *com* $p \in]1, \infty[-\{2\}$.
Tome $\Psi : \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} \times \ell_p \longrightarrow \ell_p$ *definido por* $\Psi(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, x) = \lambda_1 ... \lambda_{n-1} x$ *claramente* Ψ *é multilinear e contínuo e trivialmente é p-fatorável.*
Vamos supor que Ψ *é 2-fatorável, logo existem operadores* $A \in \mathcal{L}(H, \ell_p)$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, ..., \mathbb{K}, \ell_p; H)$ *tal que* $\Psi = A \circ \Phi$.
Então:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, x) &= (A \circ \Psi)(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, x) \\ \lambda_1 ... \lambda_{n-1} x &= A(\Psi(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}, x)) \\ x &= A(\Phi(1, ..., 1, x)). \end{aligned}$$

logo:

$$id(x) = (A \circ B)(x), \qquad (2.30)$$

onde $B(x) = \Phi(1, ..., 1, x)$, *ou seja* $B \in \mathcal{L}(\ell_p, H)$, $id \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_p)$. *Portanto (2.30) é um absurdo, isto pela parte (A) e (B). Logo (C) fica justificado.*

Capítulo 3

Aplicações Multilineares $(r, p; q_1, ..., q_n)$-Nucleares

A seguinte definição e os resultados que obtivemos são ligeiramente diferentes ao dado em [5] e elas são inspirados no artigo de Matos.

Definição 3.1. Para $r \in]0, +\infty]$, $p, q_j \in [1, +\infty]$, $k = 1, \ldots, n$ tais que:

$$n + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} \Leftrightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q_1'} + \cdots + \frac{1}{q_n'} \geq 1,$$

e $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ diz-se que T é $(r, p; q_1, \ldots, q_n)$-nuclear se:

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k < x_1, x_{k,1}' > \cdots < x_n, x_{k,n}' > y_k. \tag{3.1}$$

Para quaisquer $x_j \in E_j$, com $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r$, $(y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(F)$ e $(x_{k,j}')_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q_j'}^w(E_j')$, $j = 1, \ldots, n$. No caso $r = +\infty$, a condição para $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ é estar em c_0.
A notação para T é:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k x_{k,1}' \times \cdots \times x_{k,n}' \otimes y_k. \tag{3.2}$$

Observação 3.1. Para $r < +\infty$, $p, q_j > 1$, $j = 1, \ldots, n$ podemos escrever:

$$\| T(x_1, \ldots, x_n) \| = \sup_{y' \in B_{F'}} | \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k < x_1, x_{k,1}' > \cdots < x_n, x_{kn}' >< y_k, y' >|$$

$$\leq (\sum_{k=1}^{\infty} | \sigma_k |^r)^{\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{\infty} |< x_j, x_{k,j}' >|^{q_j'})^{\frac{1}{q_j'}} \sup_{y' \in B_{F'}} (\sum_{k=1}^{\infty} |< y_k, y' >|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq \| (\sigma_k)_{k=1}^{\infty} \|_r \prod_{j=1}^{n} \| x_j \| \| (x'_{k,j})_{k=1}^{\infty} \|_{w,q'_j} \| (y_k)_{k=1}^{\infty} \|_{w,p'} .$$

Portanto

$$\| T(x_1, \ldots, x_n) \| \leq (\| (\sigma_k)_{k=1}^{\infty} \|_r \prod_{j=1}^{n} \| (x'_{k,j})_{k=1}^{\infty} \|_{w,q'_j} \| (y_k)_{k=1}^{\infty} \|_{w,p'}) \| x_1 \| \cdots \| x_n \|,$$

para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, n$.
Tal desigualdade ainda vale no caso em que $r = +\infty$ ou $p = 1$ ou $q_j = 1$ algum $j = 1, \ldots, n$.

Teorema 3.1. *O conjunto $\mathcal{N}_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ de todas as aplicações n-lineares $(r, p; q_1, \ldots, q_n)$ - nucleares é um espaço vetorial. Considerando:*

$$N_(r, p; q_1, \ldots, q_n)(T) \equiv \inf \| (\sigma_k)_{k=1}^{\infty} \|_r \prod_{j=1}^{n} \| (x'_{k,j})_{k=1}^{\infty} \|_{w;q'_j} \| (y_k)_{k=1}^{\infty} \|_{w,p'},$$

onde tal infimo é tomado para todas as representaçoẽs possíveis de T na forma (3.1) obtemos uma $s-$ norma, com:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'_1} + \cdots + \frac{1}{q'_n}.$$

Além disso tal espaço s-normado é um ideal de operadores multilineares.

Demonstração. Usamos o lema 2.1. Seja $S_k \in \mathcal{N}_{(r,p,q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$, com $k \in \mathbb{N}$, tais que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s < \infty.$$

Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $(r, p; q_1, \ldots, q_n)$ - representações nucleares:

$$S_k = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ki} a_{ki}^1 \times \cdots \times a_{ki}^n \otimes y_{ki},$$

onde $(\sigma_{ki})_{i=1}^{\infty} \in \ell_r, \forall k$, $(a_{ki}^j)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{q'_j}^w(E'_j), \forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall j = 1, \ldots, n$ e $(y_{ki})_{i=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^w(F)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, tais que para qualquer k fixo:

$$\ell_r(\sigma_{ki}) w_{q'_1}(a_{ki}^1) \cdots w_{q'_n}(a_{ki}^n) w_{p'}(y_{ki}) \leq (1 + \epsilon) N_{(r,p,q_1,\ldots,q_n)}(S_k).$$

Claramente podemos supor que:

$$\ell_r(\sigma_{ki}) \leq ((1 + \epsilon) N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k))^{\frac{s}{r}}$$

$$w_{q_j'}(a_{ki}^j) \leq ((1+\epsilon)N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k))^{\frac{s}{q_j'}} \quad ,j=1,\ldots,n$$

$$w_{p'}(y_{ki}) \leq ((1+\epsilon)N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k))^{\frac{s}{p'}}.$$

Considerando (σ_{ki}), (a_{ki}^j) e (y_{ki}) como sequências duplas temos:

$$\ell_r(\sigma_{ki}) \leq ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{r}}$$

$$w_{q_j'}(a_{ki}^j) \leq \left[(1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s\right]^{\frac{1}{q_j'}} \quad ,j=1,\ldots,n$$

$$w_{p'}(y_{ki}) \leq \left[(1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s\right]^{\frac{1}{p'}}.$$

Consequentemente:

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ki} a_{ki}^1 \times \cdots \times a_{ki}^n \otimes y_{ki}.$$

É um $(r,p;q_1,\ldots,q_n)$ - operador nuclear com:

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S) \leq \ell_r(\sigma_{ki}) w_{q_1'}(a_{ki}^1) \cdots w_{q_j'}(a_{ki}^j) w_{p'}(y_{ki}).$$

Assim temos:

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S) \leq ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{r}} \prod_{j=1}^{n} ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{q_j'}} \times$$

$$\times ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{p'}}$$

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S) \leq ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{r}+\frac{1}{q_1'}+\cdots+\frac{1}{q_r'}+\frac{1}{p'}}$$

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S)^s \leq (1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s.$$

O caso $r=\infty$. De acordo com o lema (8.6.4) vide [3]. Escolhemos uma sequencia $(\rho_k) \in c_0$, com $0 < \rho_k \leq 1$, e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-s} N_{(\infty,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s \leq (1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} N_{(\infty,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_k)^s$$

Então existem $(\infty, p; q_1, \dots, q_n)$ representaçoẽs nucleares de

$$S_k = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ki} a_{ki}^1 \times \cdots \times a_{ki}^n \otimes y_{ki},$$

tais que para qualquer k fixo:

$$\ell_\infty(\sigma_{ki}) \leq \rho_k$$

$$w_{q_j'}(a_{ki}^j) \leq (\rho_k^{-1}(1+\epsilon) N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S_k))^{\frac{s}{q_j}}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$w_{p'}(y_{ki}) \leq (\rho_k^{-1}(1+\epsilon) N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S_k))^{\frac{1}{p'}}.$$

Para as sequências duplas temos:

$$\ell_\infty(\sigma_{ki}) \leq 1$$

$$w_{q_j'}(a_{ki}^j) \leq ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-s} N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{q_j}}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$w_{p'}(y_{ki}) \leq ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-s} N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{p'}}.$$

Consequentemente:

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{ki} a_{ki}^1 \times \cdots \times a_{ki}^n \otimes y_{ki}.$$

É um $(\infty, p; q_1, \dots, q_n)$ - operador nuclear com:

$$N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S) \leq \prod_{j=1}^{n} ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-s} N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{q_j}} \times$$

$$\times ((1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-s} N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S_k)^s)^{\frac{1}{p'}}$$

$$N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S)^s \leq (1+\epsilon)^s \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{-s} N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S_k)^s.$$

Assim:

$$N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S)^s \leq (1+\epsilon)^{2s} \sum_{k=1}^{\infty} N_{(\infty,p;q_1,\dots,q_n)}(S_k)^s.$$

(2) Sejam $S \in \mathcal{N}_{(r,p;q_1,\dots,q_n)}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\epsilon > 0$.
Considere uma $(r, p; q_1, \dots, q_n)$ - representação nuclear de

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i a_i^1 \times \cdots \times a_i^n \otimes y_i,$$

tal que

$$\ell_r(\sigma_i)w_{q_1'}(a_i^1)\cdots w_{q_n'}(a_i^n)w_{p'}(y_i)\leq(1+\epsilon)N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S).$$

Se $A_k\in\mathcal{L}(D_k,E_k)$, $k=1,\ldots,n$ e $T\in\mathcal{L}(F,G)$. Então para $B=(A_1,\ldots,A_n)$ e $A_k'\in\mathcal{L}(E_k',D_k')$ temos

$$T\circ S\circ B=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_iA_1'(a_i^1)\times\cdots\times A_n'(a_i^n)\otimes Ty_i$$

e

$$\begin{aligned}N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T\circ S\circ B)&\leq\ell_r(\sigma_i)\prod_{j=1}^{n}w_{q_j'}(A_j'(a_i^j))w_{p'}(Ty_i)\\&\leq\ell_r(\sigma_i)w_{q_1'}(a_i^1)\parallel A_1\parallel\cdots w_{q_n'}(a_i^n)\parallel A_n\parallel\parallel T\parallel w_{p'}(y_i).\end{aligned}$$

Assim:

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T\circ S\circ B)\leq(1+\epsilon)\prod_{i=1}^{n}\parallel A_i\parallel N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S)\parallel T\parallel.$$

Logo $T\circ S\circ B\in N_{(r,p,q_1,\ldots,q_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$, e:

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T\circ S\circ B)\leq\prod_{i=1}^{n}\parallel A_i\parallel N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S)\parallel T\parallel.$$

(3) É claro que os operadores multilineares da forma:

$$S(x_1,\ldots,x_n)=\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)z,$$

são $(r,p;q_1,\ldots,q_n)$-nucleares pelo fato de:

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i\varphi_{1i}\times\cdots\times\varphi_{ni}\otimes z_i,$$

com $z_i=z$ para $i=1$ e $z_i=0$, $\forall i\geq 2$, onde $\sigma_i=1$ para $i=1$ e $\sigma_i=0$, $\forall i\geq 2$.
$\varphi_{ji}=\varphi_j$ para $i=1$ e $\varphi_{ji}=0$, $\forall i\geq 2$ e $\forall j=1,\ldots,n$.
É claro que $(\sigma_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_r$, $(\varphi_{ji})_{i=1}^{\infty}\in\ell_{q_j'}^{w}(E_j')\forall j=1,\ldots,n$ e $(z_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell_{p'}^{w}(F)$.
Portanto, temos

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S)\leq\parallel\varphi_1\parallel\cdots\parallel\varphi_n\parallel\parallel z\parallel.\tag{3.3}$$

Também é claro que $\parallel S\parallel=\parallel\varphi_1\parallel\cdots\parallel\varphi_n\parallel\parallel z\parallel$. Temos a relação:

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S)\geq\parallel S\parallel.\tag{3.4}$$

isto segue da Observação 3.1 e da definição de $N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S)$.
É claro que de (3.3) e (3.4) obtemos:

$$N_{(r,p,q_1,\ldots,q_n)}(S)=\parallel\varphi_1\parallel\parallel\varphi_2\parallel\cdots\parallel\varphi_n\parallel\parallel z\parallel.$$

□

Teorema 3.2. *Um operador $S \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é $(r,p;q_1,\ldots,q_n)$-nuclear se e só se existe um diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "S"] \arrow[d, "A=(A_1,\ldots,A_n)"'] & F \\ \ell_{q_1'} \times \cdots \times \ell_{q_n'} \arrow[r, "S_0"] & \ell_p \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

Com $A_k \in \mathcal{L}(E_k;\ell_{q_k'})$, $Y \in \mathcal{L}(\ell_p,F)$, $S_0 \in \mathcal{L}(\ell_{q_1'},\ldots,\ell_{q_n'};\ell_p)$, S_0 definido da seguinte maneira:

$$\ell_{q_1'} \times \ell_{q_2'} \times \cdots \times \ell_{q_n'} \xrightarrow{S_0} \ell_p \quad ,$$

$$S_0((\varepsilon_{1,j})_{j=1}^{\infty},\ldots,(\varepsilon_{n,j})_{j=1}^{\infty}) = (\sigma_j\varepsilon_{1,j}\cdots\varepsilon_{n,j})_{j=1}^{\infty},$$

onde $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r$ se $0<r<\infty$ e $(\sigma_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0$ se $r=\infty$.
Neste caso: $N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S) = inf \parallel Y \parallel \ell_r(\sigma_i)\prod_{j=1}^{n} \parallel A_j \parallel$, com o ínfimo tomado para todas as possíveis fatorações acima deseritas.

Demonstração. S_0 está bem definido pois é multilinear e contínuo i.é:

$$\parallel S_0((\varepsilon_{1,j})_{j=1}^{\infty},\ldots,(\varepsilon_{n,j})_{j=1}^{\infty}) \parallel_{\ell_p} \leq \ell_r(\sigma_j)\prod_{k=1}^{n} \parallel (\varepsilon_{k,j})_{j=1}^{\infty} \parallel_{\ell_{q_k'}} .$$

Onde $\frac{1}{q_n'}+\cdots+\frac{1}{q_1'}+\frac{1}{r}+\frac{1}{p'} \geq 1$.
Seja S un operador $(r,p;q_1,\ldots,q_n)$ nuclear, então

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k a_{1k} \times \cdots \times a_{nk} \otimes y_k. \tag{3.5}$$

Com $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_r$, $(a_{jk})_{k=1}^{\infty} \in \ell_{q_j'}^{w}(E_j')$, $\forall j=1,\ldots,n$ e $(y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^{w}(F)$.
Definamos:

$$\begin{aligned} A_j : E_j &\longrightarrow \ell_{q_j'} \\ x_j &\longmapsto (a_{jk}(x_j))_{k=1}^{\infty} \end{aligned}$$

É claro que A_j é linear e contínuo pois

$$\parallel A_j \parallel \leq w_{q_j'}(a_{jk}) \qquad \forall j=1,\ldots,n.$$

Agora definamos $Y \in \mathcal{L}(\ell_p; F)$ da seguinte maneira:

$$Y((\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j y_j.$$

Para $(\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, e para $\varphi \in F'$ temos

$$< \varphi, Y((\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}) >= \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varphi, y_j > .$$

Daí é claro que

$$|< \varphi, Y((\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}) >| \leq \sum_{j=1}^{\infty} | \varepsilon_j || < \varphi, y_j >|$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos:

$$|< \varphi, Y((\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}) >| \leq (\sum_{j=1}^{\infty} | \varepsilon_j |^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{j=1}^{\infty} |< \varphi_i, y_j >|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

e desta relação é claro que

$$\sup_{\|\varphi\| \leq 1} |< \varphi, Y((\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}) >| \leq \| (\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} \|_{\ell_p} \sup_{\|\varphi\| \leq 1} (\sum_{j=1}^{\infty} |< \varphi, y_j >|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

e

$$\| Y((\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty}) \| \leq \| (\varepsilon_j)_{j=1}^{\infty} \|_{\ell_p} w_{p'}(y_j).$$

Portanto Y esta bem definido e $\| Y \| \leq w_{p'}(y_j)$.
Além disso é claro que:

$$Y \circ S_0 \circ A = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k a_{1k} \times \cdots \times a_{nk} \otimes y_k = S$$

Em (3.5) podemos escolher uma representação de S tal que para $\epsilon > 0$ aconteça o seguinte:

$$\ell_r(\sigma_k) w_{p'}(y_k) \prod_{j=1}^{n} w_{q'_j}(a_{jk}) < (1+\epsilon) N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S)$$

Portanto:

$$\| Y \| \prod_{k=1}^{n} \| A_k \| \ell_r(\sigma_k) \leq \ell_r(\sigma_k) w_{p'}(y_k) \prod_{j=1}^{n} w_{q'_j}(a_{jk}) < (1+\epsilon) N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S)$$

Como isto é valido para todo $\epsilon > 0$, temos que

$$\| Y \| \prod_{j=1}^{n} \| A_j \| \ell_r(\sigma_k) \leq N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S).$$

Desta relação temos:

$$\inf \| Y \| \prod_{j=1}^{n} \| A_j \| \ell_r(\sigma_k) \leq N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S). \tag{3.6}$$

Para mostrar a recíproca, basta mostrar que S_0 é um operador $(r, p, q_1, \ldots, q_n)$ nuclear. Para isto basta notar que:

$$S_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \Pi_{1j} \times \cdots \times \Pi_{nj} \otimes e_j$$

onde $\Pi_{kj}((\varepsilon_{k,m})_{m=1}^{\infty}) = \varepsilon_{k,j}$, $\forall k = 1, \ldots, n$ e $j \in \mathbb{N}$ e $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ com 1 na j-ésima componente e mostrar que:

(i) $(\sigma_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r$

(ii) $(\Pi_{kj})_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q'_k}^{w}(\ell_{q_k})$ $\quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$

(iii) $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p'}^{w}(\ell_p)$.

(i) e (iii) são evidentes. Vejamos a parte (ii):

$$\begin{aligned} w_{q'_k}(\Pi_{kj}) &= \sup_{\substack{\|a_k\| \leq 1, \\ a_k \in \ell_{q'_k}}} (\sum_{j=1}^{\infty} |< a_k, \Pi_{kj} >|^{q'_k})^{\frac{1}{q'_k}} \\ &= \sup_{\substack{\|a_k\| \leq 1, \\ a_k \in \ell_{q'_k}}} (\sum_{j=1}^{\infty} \| a_{k,j} \|^{q'_k})^{\frac{1}{q'_k}} = 1, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

De (3.7) temos $w_{q'_k}(\Pi_{kj}) = 1$, $\forall k = 1, \ldots, n$.
Portanto:

$$\begin{aligned} N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_0) &\leq \ell_r(\sigma_j) \prod_{j=1}^{n} w_{q'_j}(\Pi_{kj}) w_{p'}(e_j) \\ N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_0) &\leq \ell_r(\sigma_j), \end{aligned} \tag{3.8}$$

pois $w_{q'_k}(\Pi_{kj}) = 1$, $w_{p'}(e_j) \leq 1$, $\forall k = 1, \ldots, n$.
Logo $Y \circ S_0 \circ A$ é $(r, p; q_1, \ldots, q_n)$ nuclear isto é pela propriedade de ideal. Além disso temos

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(Y \circ S_0 \circ A) \leq \| Y \| \prod_{i=1}^{n} \| A_i \| N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S_0) \tag{3.9}$$

De (3.8) e (3.9) temos:

$$N_{r,p,q_1,\ldots,q_n}(S) \leq \| Y \| \prod_{i=1}^{n} \| A_i \| \ell_r(\sigma_j)$$

Assim:

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S) \leq \inf \| Y \| \prod_{i=1}^{n} \| A_i \| \ell_r(\sigma_j) \tag{3.10}$$

Portanto de (3.10) e (3.6) temos

$$N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(S) = \inf \| Y \| \prod_{i=1}^{n} \| A_i \| \ell_r(\sigma_j).$$

□

Proposição 3.1. *Para r, $\tilde{r} \in (0, \infty]$, p, ,$\tilde{p}$, q_i, $\tilde{q}_i \in [1, \infty]$ tais que $r \leq \tilde{r}$, $p \leq \tilde{p}$ e $q_i \leq \tilde{q}_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, com*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'_1} + \cdots + \frac{1}{q'_n} \geq 1,$$

$$\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{p}'} + \frac{1}{\tilde{q}'_1} + \cdots + \frac{1}{\tilde{q}'_n} \geq 1$$

e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}_1} + \cdots + \frac{1}{\tilde{q}_n} - \frac{1}{\tilde{r}}$$

Então temos

$$\mathcal{N}_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F) \subset \mathcal{N}_{(\tilde{r},\tilde{p};\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)}(E_1, \ldots, E_n; F),$$

com

$$N_{(\tilde{r},\tilde{p};\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)}(T) \leq N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T),$$

para qualquer T de tipo $(r, p; q_1, \ldots, q_n)$ nuclear.

Demonstração. Considere

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \cdots + \frac{1}{\beta_n}\right)$$

com

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}}, \quad \frac{1}{\beta_k} = \frac{1}{q_k} - \frac{1}{\tilde{q}_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Logo

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - (\frac{1}{p} - \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_n} - \frac{1}{\tilde{q}_1} - \cdots - \frac{1}{\tilde{q}_n}).$$

Portanto $s \leq \tilde{r}$. Para T de tipo $(r, p; q_1, \ldots, q_n)$ nuclear e $\epsilon > 0$ escolhemos uma representação de T na forma:

$$T = \sum \sigma_j a_{1,j} \times \cdots \times a_{n,j} \otimes y_j,$$

tais que $\sigma_j \geq 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e

$$\ell_r(\sigma_j) \prod_{k=1}^{n} w_{q'_k}(a_{k,j}) w_{p'}(y_j) \leq (1+\epsilon) N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T).$$

Também T pode ter representação na forma:

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{(\frac{r}{s})} (\sigma_j^{\frac{r}{\beta_1}} a_{1,j}) \times \cdots \times (\sigma_j^{\frac{r}{\beta_n}} a_{n,j}) \otimes (\sigma_i^{\frac{r}{\lambda}} y_i),$$

temos então:

$$\begin{aligned}
\ell_{\tilde{r}}(\sigma_i^{\frac{r}{s}}) &= (\sum_{i=1}^{\infty} \mid \sigma_i \mid^{\frac{r}{s}.\tilde{r}})^{\frac{1}{\tilde{r}}} \\
&\leq (\sum_{i=1}^{\infty} \mid \sigma_i \mid^{\frac{r}{s}.s})^{\frac{1}{s}} \\
&= \ell_r(\sigma_i)^{\frac{r}{s}}
\end{aligned}$$

$$w_{\tilde{q}'_j}(\sigma_i^{\frac{r}{\beta_j}} a_{j,i}) \leq w_{q'_j}(a_{j,i}) [\sum_{i=1}^{\infty} \mid \sigma_i \mid^{\frac{r}{\beta_j}.\tilde{q}'_j.(\frac{q'_j}{\tilde{q}'_j})'}]^{\frac{1}{\tilde{q}'_j.(\frac{q'_j}{\tilde{q}'_j})'}}$$

Como $r \leq \frac{r}{\beta_j}.\tilde{q'}_j.(\frac{q'_j}{\tilde{q'}_j})'$, temos para todo $j = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}
w_{\tilde{q'}_j}(\sigma_i^{\frac{r}{\beta_j}} a_{j,i}) &\leq w_{q'_j}(a_{j,i}) (\sum_{i=1}^{\infty} \mid \sigma_i \mid^r)^{\frac{1}{\beta_j}} \\
&= w_{q'_j}(a_{j,i}) \ell_r(\sigma_i)^{\frac{r}{\beta_j}}
\end{aligned}$$

i.é:

$$w_{\tilde{q'}_j}(\sigma_i^{\frac{r}{\beta_j}} a_{j,i}) \leq w_{q'_j}(a_{j,i}) \ell_r(\sigma_i)^{\frac{r}{\beta_j}} \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Finalmente temos

$$w_{\tilde{p'}}(\sigma_i^{\frac{r}{\lambda}} y_i) \leq w_{p'}(y_i)[\sum_{i=1}^{\infty} \mid \sigma_i \mid^{\frac{r}{\lambda}.\tilde{p'}.(\frac{\tilde{p'}}{p'})'}]^{\frac{1}{(\frac{\tilde{p'}}{p'})'.\tilde{p'}}}.$$

Como $r \leq \frac{r}{\lambda}.\tilde{p'}.(\frac{\tilde{p'}}{p'})'$, temos:

$$w_{\tilde{p'}}(\sigma_i^{\frac{r}{\lambda}} y_i) \leq w_{p'}(y_i)\ell_r(\sigma_i)^{\frac{r}{\lambda}}$$

Portanto temos

$$N_{(\tilde{r},\tilde{p},\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)}(T) \leq \ell_r(\sigma_i)^{\frac{r}{s}} \prod_{j=1}^{n} w_{q'_j}(a_{j,i})\ell_r(\sigma_i)^{\frac{r}{\beta_j}}.w_{p'}(y_i)\ell_r(\sigma_i)^{\frac{r}{\lambda}}$$

Assim:

$$\begin{aligned} N_{(\tilde{r};\tilde{p},\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)}(T) &\leq \ell_r(\sigma_i) \prod_{j=1}^{n} w_{q'_j}(a_{j,i}) w_{p'}(y_i) \\ &\leq (1+\epsilon) N_{(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(T) \end{aligned}$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrario,

$$N_{(\tilde{r};\tilde{p},\tilde{q}_1,\ldots,\tilde{q}_n)}(T) \leq N_{(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(T).$$

□

Observação 3.2. Segue-se da definição que $\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ é denso en: $\mathcal{N}_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$, uma vez que todo $T \in \mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ tem uma representação da forma:

$$T = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \varphi_{1,j} \times \cdots \times \varphi_{n,j} \otimes b_j \tag{3.11}$$

com $\sigma_j \in \mathbb{K}, \varphi_{k,j} \in E'_k, k = 1,\ldots,n,\ b_j \in \mathbf{F}, j = 1,\ldots,m$. É natural perguntar quando é possível ter:

$$N_{(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(T) = N_{f,(r,p;q_1,q_n)}(T).$$

Onde

$$N_{f,(r,p;q_1,\ldots,q_n)} = \inf \| (\sigma_j)_{j=1}^m \|_r \prod_{k=1}^{n} \| (\varphi_{k,j})_{j=1}^m \|_{w,q'_j} \| (b_j)_{j=1}^m \|_{w,p'},$$

com o ínfimo tomado para todas as representações possíveis de T como em (3.12).
É claro que:

$$N_{(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(T) \leq N_{f,(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(T)$$

pois $\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_n;F) \subset \mathcal{N}_{(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(E_1,,\ldots,E_n;F)$.

Proposição 3.2. *Se $E_1, \ldots, E_n$ têm dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ então:*

$$N_{(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(T) = N_{f,(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(T)$$

Demonstração. Como $dim E_i < \infty$, para $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) = \mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F),$$

e este espaço é completo para as normas, $N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}$ e $N_{f,(r;p,q_1,\ldots,q_n)}$. Além disso é um F - espaço.
Logo pelo teorema da aplicação aberta, estas normas são equivalentes vide [8]. Logo existe $c \geq 0$ tal que

$$N_{f,(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T) \leq cN_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T),$$

para qualquer T de tipo finito. Para $\epsilon > 0$ escolhemos uma representação $T = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \varphi_{1,j} \times \cdots \times \varphi_{n,j} \otimes y_j$ tal que:

$$\ell_r(\sigma_i) w_{p'}(y_i) \prod_{j=1}^{n} w_{q'_j}(\varphi_{j,i}) \leq (1+\epsilon) N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T)$$

como existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$cN_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}\Big(\sum_{j>m} \sigma_j \varphi_{1,j} \times \cdots \times \varphi_{n,j} \otimes y_j\Big) \leq \epsilon N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T)$$

Portanto temos

$$\begin{aligned}
(N_{f,(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T))^s &\leq N_{f,(r,p;q_1,\ldots,q_n)}\Big(\sum_{j=1}^{m} \sigma_j \varphi_{1,j} \times \cdots \times \varphi_{n,j} \otimes y_j\Big)^s \\
&+ N_{f,(r,p;q_1,\ldots,q_n)}\Big(\sum_{j>m} \sigma_j \varphi_{1,j} \times \cdots \times \varphi_{n,j} \otimes y_j\Big)^s \\
&\leq (1+\epsilon)^s N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T)^s + \epsilon^s N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T)^s.
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ o teorema segue. □

Os proximos resultados são adaptações da proposição 2.9 e teorema 2.10 de Mário C. Matos, vide [5], e suas demostrações podem ser facilmente adaptadas desses resultados.

Proposição 3.3. *Se $T \in \mathcal{N}_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $S_k \in \mathcal{F}(D_k, E_k)$, $k = 1, \ldots, n$, então:*

$$N_{f,(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T \circ (S_1, \ldots, S_n)) \leq N_{(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T) \prod_{k=1}^{n} \| S_k \|$$

Teorema 3.3. *Si $E_1, \ldots, E_n$ tem a propriedade de aproximação limitada, então:*

$$N_{f,(r,p;q_1,\ldots,q_n)}(T) = N_{(r;p,q_1,\ldots,q_n)}(T),$$

para qualquer $T \in \mathcal{L}_f(E_1, \ldots, E_n; F)$.

3.1 Ideais Multilineares Maximais

Definição 3.2. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ideais de operadores linear y multilinear respectivamente. Um operador multilinear $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ pertence a $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}$ se $T\Phi \in \mathcal{B}(E_1, ..., E_n; F_0)$ para todo $T \in \mathcal{A}(F, F_0)$, onde F_0 é um espaço arbitrário de Banach.

Teorema 3.4. *$\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}$ é um ideal de operadores multilineares.*

Demonstração. É imediato. □

Definição 3.3. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_i$, ideais de operadores multilinear y linear respectivamente. Um operador $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ pertence a $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}$ se $\Phi \circ T \in \mathcal{A}(X_1, ..., X_n; F)$ para todo $T := (T_1, ..., T_n)$, onde $T_i \in \mathcal{B}_i(X_i, E_i)$, $i = 1, ..., n$, e $\mathcal{B}^{-1} := (\mathcal{B}_1^{-1}, ..., \mathcal{B}_n^{-1})$.

Teorema 3.5. *$\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{A} \circ (\mathcal{B}_1^{-1}, ..., \mathcal{B}_n^{-1})$ é um ideal de operadores multilineares.*

Demonstração. É imediato. □

Definição 3.4. Sejam $[\mathcal{A}, A]$ e $[\mathcal{B}, B]$ ideais de operadores linear e multilinear quasi–normados respectivamente. Para qualquer $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ com $\Phi \in \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}$ definimos:

$$A^{-1} \circ B(\Phi) := \sup\{B(T\Phi) : T \in \mathcal{A}(F, F_0), A(T) \leq 1\}.$$

Aqui F_0 é qualquer espaço de Banach.

Observação 3.3. $[\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}, A^{-1} \circ B]$ será escrito como $[\mathcal{A}, A]^{-1} \circ [\mathcal{B}, B]$.

Teorema 3.6. *$[\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{B}, A^{-1} \circ B]$ é um ideal de operadores multilineares quasi-normado.*

Demonstração. É de modo semelhante a 7.2.2 do livro Operators Ideals de Albrecht Pietsch. □

Definição 3.5. Sejam $[\mathcal{A}, A]$ e $[\mathcal{B}_i, B_i]$ ideais de operadores multilineares e linear quasi–normados respectivamente. Para qualquer $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ com $\Phi \in \mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}$ onde $\mathcal{B}^{-1} := (\mathcal{B}_1^{-1}, ..., \mathcal{B}_n^{-1})$, definimos:

$$\begin{aligned} A \circ B^{-1}(\Phi) := \sup \; & \{A(\Phi \circ T) = A(\Phi \circ (T_1, ..., T_n)) : T_i \in \mathcal{B}_i(X_i, E_i), \\ & B_i(T_i) \leq 1, i = 1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Aqui X_i é qualquer espaço de Banach, $i = 1, ..., n$.

Observação 3.4. $[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}, A \circ B^{-1}]$ frequentemente será escrito como:

$$[\mathcal{A}, A] \circ ([\mathcal{B}_1, B_1]^{-1}, ..., [\mathcal{B}_n, B_n]^{-1}).$$

Teorema 3.7. *$[\mathcal{A} \circ \mathcal{B}^{-1}, A \circ B^{-1}]$ é um ideal de operadores multilineares quasi-normado.*

Demonstração. É uma adaptação de 7.2.2 do livro Operators Ideals de Albretch Pietsch, a nosso caso. □

Definição 3.6. Seja $\mathcal{A}$ um ideal de operadores multilineares. Um operador $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ pertence a $\mathcal{A}^{\max} := \mathcal{L}_{ap}^{-1} \circ \mathcal{A} \circ (\mathcal{L}_{ap}^{-1}, ..., \mathcal{L}_{ap}^{-1})$ se $V\Phi T \in \mathcal{A}(X_1, ..., X_n; F_0)$ para todo $T = (T_1, ..., T_n)$ donde $T_i \in \mathcal{L}_{ap}(X_i, E_i)$, $i = 1, ..., n$ e $V \in \mathcal{L}_{ap}(F, F_0)$.

Teorema 3.8. *$\mathcal{A}^{\max}$ é um ideal de operadores multilineares.*

Demonstração. É imediato. □

Definição 3.7. Um ideal de operadores multilineares $\mathcal{A}$ é maximal se $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\max}$.

Definição 3.8. Seja $[\mathcal{A}, A]$ um ideal de operadores multilinear es quasi-normado. Então:

$$[\mathcal{A}^{\max}, A^{\max}] := [\mathcal{L}_{ap}, \|\cdot\|]^{-1} \circ [\mathcal{A}, A] \circ ([\mathcal{L}_{ap}, \|\cdot\|]^{-1}, ..., [\mathcal{L}_{ap}, \|\cdot\|]^{-1})$$

é chamado o *envolucro maximal* de $[\mathcal{A}, A]$.

Teorema 3.9. *$[\mathcal{A}^{\max}, A^{\max}]$ é um ideal de operadores multilineares quasi-normado.*

Demonstração. É consequência dos teoremas 3.6 e 3.7. □

Definição 3.9. Um ideal de operadores multilineares é chamado maximal se $[\mathcal{A}, A] = [\mathcal{A}, A]^{\max}$

Teorema 3.10. *Seja $[\mathcal{A}, A]$ um ideal $s-normado$. Então $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ pertence a $\mathcal{A}^{\max}$ se e só se existe uma constante $\sigma \geq 0$ tal que:*

$$A(B\Phi T) \leq \sigma \|B\| \prod_{i=1}^{n} \|T_i\|,$$

para todo $T = (T_1, ..., T_n)$ donde $T_i \in \mathcal{F}(X_i, E_i)$ e $B \in \mathcal{F}(F, F_0)$. Aqui X_i, F_0 são espaços arbitrarios de Banach.
Neste caso:

$$A^{\max}(\Phi) := \inf \sigma.$$

Demonstração. Se $\Phi \in \mathcal{A}^{max}(E_1, ...E_n; F)$, então $\mathcal{A}^{max}(\Phi) = \sup A(B\Phi T)$, onde o supremo é tomado sobre todos os $T = (T_1, ...T_n)$ com $T_i \in \mathcal{L}_{ap}(X_i, E_i)$ e $B \in \mathcal{L}_{ap}(F, F_0)$ tal que $\|T_i\| \leq 1$, $i = 1, 2, ..., n$ e $\|B\| \leq 1$.
$A(B\Phi T) \leq \mathcal{A}^{max}(\Phi) \prod_{i=1}^{n} \|T_i\| \|B\|$, para todo $T_i \in \mathcal{F}(X_i, E_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ e $B \in \mathcal{F}(F, F_0)$.
Reciprocamente, seja $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ satisfazendo a condição de acima. Se $T = (T_1, ..., T_n)$ com $T_i \in \mathcal{L}_{ap}(X_i, E_i)$ $i = 1, ..., n$ e $B \in \mathcal{L}_{ap}(F, F_0)$, então existem $T_i^k \in \mathcal{F}(X_i, E_i)$ e $B_k \in \mathcal{F}(F, F_0)$ tal que $T_i = \lim_{k\to\infty} T_i^k$, $T = \lim_{k\to\infty}(T_1^k, ..., T_n^k) = (T_1, ..., T_n)$

e $B = \lim_{k \to \infty} B_k$.
Segue-se de:

$$\begin{aligned}
A(B_k\Phi(T_1^k,...,T_n^k) - B_m\Phi(T_1^m,...,T_n^m))^s &= A((B_k - B_m)\Phi(T_1^k,...,T_n^k) + \\
&\quad + B_m\Phi(T_1^k - T_1^m,...,T_n^k - T_n^m))^s \\
&\leq A((B_k - B_m)\Phi(T_1^k,...,T_n^k))^s + \\
&\quad + A(B_m\Phi(T_1^k - T_1^m,...,T_n^k - T_n^m))^s \\
&\leq \sigma^s\|B_k - B_m\|^s \prod_{i=1}^{n} \|T_i^k\|^s + \\
&\quad + \sigma^s\|B_m\|^s \prod_{i=1}^{n} \|T_i^k - T_i^m\|^s
\end{aligned}$$

que $B_k\Phi(T_1^k,...,T_n^k)$ é uma A-sequencia de Cauchy.
Como $B\Phi T = \lim B_k\Phi(T_1^k,...,T_n^k)$ é o unico possivel limite, temos que $B\Phi T \in \mathcal{A}(X_1,...,X_n;F_0)$. Além disso

$$A(B\Phi T) \leq \sigma\|B\| \prod_{i=1}^{n} \|T_i\|.$$

Portanto $\Phi \in \mathcal{A}^{max}(E_1,...,E_n;F)$ e $A^{max}(\Phi) \leq \sigma$. $\square$

3.2 Aplicações Multilineares p-Compactas

Definição 3.10. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Um operador $\Phi \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ é chamado p-compacto relativo a $(q_1,...,q_n)$ se pertence ao ideal normado:

$$[\mathcal{N}_{(\infty,p;q_1,...,q_n)}(E_1,...,E_n;F), N_{(\infty,p;q_1,...,q_n)}],$$

onde:

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q_1'} + ... + \frac{1}{q_n'} = 1$$

Conjetura 3.1. *Um operador $\Phi \in \mathcal{L}(E_1,...,E_n;F)$ é p-compacto relativo a $(q_1,...,q_n)$ se e só se existe un diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & & F \\
& \ell_p \arrow[ur, dashed, "A"'] &
\end{tikzcd}$$

tal que $\Psi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; \ell_p)$ *e* $A \in \mathcal{L}(\ell_p; F)$ *são compactos.*
Neste caso:

$$N_{(\infty, p; q_1, \ldots, q_n)}(\Phi) := \inf \|A\| \|\Psi\|.$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações possíveis.

Definição 3.11. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Um operador $\Phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n, F)$ é chamado p-fatorável relativo a $(q_1, ..., q_n)$ se pertenece ao ideal normado:

$$[\mathcal{L}_{p-fat}, \tilde{\gamma}_p] := [\mathcal{L}_{ap}, \|\cdot\|]^{-1} \circ [\mathcal{N}_{(\infty, p; q_1, \ldots, q_n)}(E_1, ..., E_n; F), N_{(\infty, p; q_1, \ldots, q_n)}] \circ ([\mathcal{L}_{ap}, \|\cdot\|]^{-1}, ..., [\mathcal{L}_{ap}, \|\cdot\|]^{-1})$$

tal que:

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'_1} + ... + \frac{1}{q'_n} = 1$$

Conjetura 3.2. *Seja* $1 \leq p < \infty$. $\Phi \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ *é p–fatorável se e só se existe um diagrama comutativo tal que* $K_Y \circ \Phi = A \circ \Psi$, *i.e.*

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & Y \arrow[r, hook, "K_Y"] & Y^{**} \\ & L_p(\mu) \arrow[ur, "A"'] & \end{tikzcd}$$

Além disso $\tilde{\gamma}_p(\Phi) = \inf \|A\| \|\Psi\|$, *onde o ínfino é tomado sobre todas as fatorações possíveis.*

No caso $p = \infty$ temos o seguinte

Conjetura 3.3. *Um operador* $\Phi \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ *é* ∞*–fatorável se e só se uma das seguintes afirmações é verdadeira.*

(1) Existe um espaço K *de Hausdorff compacto e operadores* $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; C(K))$ *e* $A \in \mathcal{L}(C(K), Y^{**})$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\Psi"'] & Y \arrow[r, hook, "K_Y"] & Y^{**} \\ & C(K) \arrow[ur, "A"'] & \end{tikzcd}$$

Nesto caso

$$\tilde{\gamma}_\infty(\Phi) = \inf \|A\| \|\Psi\|$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações possíveis.

(2) Existe um espaço de medida (Ω, μ), operadores $\Psi \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; L_\infty(\Omega, \mu))$ e $A \in \mathcal{L}(L_\infty(\Omega, \mu), Y^{**})$ tal que

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[drr, "\Psi"'] & & Y \arrow[rr, hook, "K_Y"] & & Y^{**} \\
& & L_\infty(\Omega, \mu) \arrow[urr, "A"'] & &
\end{tikzcd}$$

Neste caso

$$\tilde{\gamma}_\infty(\Phi) = \inf \|A\| \|\Psi\|$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações possíveis.

Se provamos as conjeturas (3.1), (3.2) e (3.3) teríamos que $\tilde{\gamma}_p$ definido em (3.11) seria igual al $\hat{\gamma}_p$ definido en (2.2).

Bibliografia

[1] Andreas Defant, Klaus Floret. *Tensor Norms and Oprator Ideals.* North-Holland, 1993.

[2] Joe Diestel, Hans Jarchow, Andrew Tonge. *Absolutely Summing Operators.* Departament of Mathematics and Computer Science Kent State University, 1994.

[3] Albrecht Pietsch. *Operator Ideals.* North-Holland, 1980.

[4] H. L. Royden. *Real Analysis*, Second Editon, The MacMillan Company, 1968.

[5] Mario C. Matos. *On Multilinear Mappings of Nuclear Type.* Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, Volumen 6, Numero 1, 1993.

[6] Alencar R., M. C. Matos. *Some Class of multilinears Mappings between Banach Spaces.* Publ. Dpto. Analisis Mat., Univ. Complutense de Madrid, 12(1989).

[7] S. Banach. *Theory of Linear Operations*, North Holland 1987.

[8] Ruding, W. *Real and Complex Analysis* 2da, ed. Mc Graw-Hill Book Company, New york, 1963.