Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática

Problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas envolvendo expoentes subcrítico e crítico

Fábio Rodrigues Pereira

Tese de Doutorado

Orientador: **Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo**

09 de agosto de 2005
Campinas - SP

Problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas envolvendo expoentes subcrítico e crítico

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Fábio Rodrigues Pereira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 09 de agosto de 2005.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr. **Djairo Guedes de Figueiredo**
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva IMECC - UNICAMP
Prof. Dr. Jean-Pierre Gossez UNIVERSITÉ LIBRE de BRUXELLES
Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento UFSCAR
Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho UFCG

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção de Título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

Pereira, Fábio Rodrigues
P414p Problemas do tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas envolvendo expoentes subcrítico e crítico /
Fábio Rodrigues Pereira – Campinas, [S.P.:s.n.], 2005.

Orientador: Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equaçẽs diferenciais parciais. 2. Equaçẽs diferenciais elípticas. 3. Dirichlet, Problemas de. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Ambrosetti-Prodi type problems for systems involving subcritical and critical exponents

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Partial differential equations. 2. Partial differential elliptic. 3. Dirichlet problem.

Área de concentração: Equaçẽs diferenciais parciais-Análise
Titulação: Doutor em matemática

Banca examinadora: 1. Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (UNICAMP)
2. Prof. Dr. Jean-Pierre Gossez (Université Libre de Bruxelles)
3. Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento (UFSCAR)
4. Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho (UFCG)
5. Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva (UNICAMP)

Data da defesa: 09/08/2005

Tese de Doutorado defendida em 09 de agosto de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof. (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

____

Prof. (a). Dr (a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

____

Prof. (a). Dr (a). JEAN-PIERRE GOSSEZ

____

Prof. (a). Dr (a). ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO

____

Prof. (a) Dr. (a) DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO

À minha esposa e aos meus pais

Agradecimentos

Ao professor Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (orientador) pelos encontros, os quais proporcionaram valiosas sugestões, e principalmente, pelo incentivo em todo o período que trabalhamos juntos.

Aos professores que compuseram minha banca, Francisco Odair Vieira de Paiva, Jean-Pierre Gossez, Arnaldo Simal do Nascimento e Daniel Cordeiro de Morais Filho.

À minha esposa Ana Lúcia, aos meus pais, irmãos, e amigos que me apoiaram.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de múltiplas soluções para o sistema não-homogêneo

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} u_+^p \\ v_+^q \end{pmatrix} + F & \text{in } \Omega \\ U = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $s_+ = max\{s, 0\}$ para $s \in I\!R$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R)$, $F = (t\phi_1 + f_1, r\phi_1 + g_1) \in (L^s(\Omega))^2$ com $s > N$ tal que $\int_\Omega f_1\phi_1 = \int_\Omega g_1\phi_1 = 0$ e $t, r \in I\!R$.

Interessando os expoentes p e q, nós consideramos três casos distintos, a saber,

(E_1) $1 < p, q < 2^* - 1$ (subcrítico),

(E_2) $p, q = 2^* - 1$ (crítico),

(E_3) $1 < p < q = 2^* - 1$ (misto).

Usando métodos variacionais, provamos a existência de pelo menos duas soluções. A primeira obtida explicitamente por um cálculo direto e a segunda via Teorema do Passo da Montanha se $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$ ou Teorema de Enlace se $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, onde μ_1, μ_2 são autovalores da matriz A. Nos casos crítico e misto os teoremas são usados sem a condição de Palais-Smale.

Finalmente, no Capítulo 5 nós provamos alguns resultados de não-existência para o sistema (1) no caso homogêneo, i.é., $F = 0$.

Abstract

In this work, we study the existence of multiple solutions for the nonhomogeneous system

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} u_+^p \\ v_+^q \end{pmatrix} + F & \text{in } \Omega \\ U = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

where $\Omega \subset I\!R^N$ is a bounded smooth domain, $s_+ = max\{s, 0\}$ for $s \in I\!R$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R)$, $F = (t\phi_1 + f_1, r\phi_1 + g_1) \in (L^s(\Omega))^2$ with $s > N$ such that $\int_\Omega f_1\phi_1 = \int_\Omega g_1\phi_1 = 0$ and $t, r \in I\!R$.

Concerning the exponents p and q, we consider three distinct cases, namely,

(E_1) $1 < p, q < 2^* - 1$ (subcritical),

(E_2) $p, q = 2^* - 1$ (critical),

(E_3) $1 < p < q = 2^* - 1$ (mixed).

Using variational methods, we prove the existence of at least two solutions. The first is obtained explicitly by a direct calculation and the second via Mountain Pass Theorem if $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$ or Linking Theorem if $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, where μ_1, μ_2 are eigenvalues of matrix A. In the cases critical and mixed the theorems are used without the assumption of Palais-Smale.

Finally, in Chapter 5 we prove some non-existence results for the system (2) in case homogeneous, i.e., $F = 0$.

Sumário

Introdução

Métodos Variacionais é uma das principais ferramentas utilizadas para atacar problemas na teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais não-lineares. A idéia central é a formulação de um problema variacional equivalente, em certo sentido, ao problema de uma equação diferencial. O problema variacional consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional I associado, tal que a equação diferencial de Euler-Lagrange seja o problema inicial proposto.

É interessante observar que o problema de minimização de funcionais é o objetivo central do Cálculo das Variações Clássico, e que em seu estudo, equações diferenciais aparecem de modo natural como condições suficientes para que a função que minimiza o funcional deve satisfazer. Assim, no Cálculo das Variações Clássico, a questão de minimização de um funcional é reduzida ao estudo de um problema na teoria das Equações Diferenciais.

O Método Direto do Cálculo das Variações surgiu em meados do século XIX, e consiste em estudar diretamente o funcional e procurar seu mínimo (ou um ponto crítico) sem fazer apelo à sua equação diferencial. Dentre os vários problemas estudados em equações diferenciais, em particular, existem os problemas do tipo Ambrosetti-Prodi que informalmente considera a seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + f(x) & em\ \Omega \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\Omega \in I\!R^N$ é um domínio limitado suave, e caracteriza-se por determinar funções f, de modo que a equação (3) tenha ou não solução. No caso de existir solução, uma pergunta natural é, qual o número mínimo ou exato de soluções?

O problema apareceu pela $1^{\underline{a}}$ vez em 1972 no trabalho "On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach spaces" de A. Ambrosetti e G. Prodi. Os autores consideraram $g : I\!R \to I\!R$ sendo uma função de classe C^2 tal que $g''(s) > 0,\ \forall\, s \in I\!R$ e $0 < \lim_{s\to-\infty} g'(s) < \lambda_1 < \lim_{s\to+\infty} g'(s) < \lambda_2$, onde λ_1 e λ_2 são, respectivamente o primeiro e o segundo autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Utilizando a teoria de pontos críticos e um teorema de inversão global de funções próprias, Ambrosetti e Prodi consideraram o operador $T(u) := \Delta u + g(u)$ como uma aplicação diferenciável entre espaços de Hölder $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ e $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$ e mostraram que os valores singulares da aplicação T (isto é, a imagem por T dos pontos u tais que a derivada de Frechet $T\,'(u)$ não é invertível) formam uma variedade fechada e conexa M em $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ que divide o espaço em dois conjuntos abertos O_0 e O_2 com as seguintes propriedades:
(i) Se $f \in O_0$, o problema (3) não tem solução.
(ii) Se $f \in M$, o problema (3) tem exatamente uma solução.
(iii) Se $f \in O_2$, o problema (3) tem exatamente duas soluções.

Posteriormente, M.S.Berger e E.Podolak [5] deram uma grande contribuição no estudo desses problemas, dando uma estrutura cartesiana para a variedade M em espaços de Hilbert. Eles decompuseram as funções $f \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ na forma $f = t\phi_1 + f_1$, onde ϕ_1 é uma autofunção (normalizada na norma L^2) associada ao autovalor λ_1 e $f_1 \in (span\,\{\phi_1\})^{\perp}$ (no sentido de L^2) e reescreveram o problema (3) na seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) + t\phi_1 + f_1(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Então, para cada f_1 com a propriedade acima, Berger e Podolak mostraram a existência de um número real $t = t(f_1)$ tal que:
$(i\,')$ Se $t > t(f_1)$, o problema (4) não tem solução (isto é, $f \in O_0$).
$(ii\,')$ Se $t = t(f_1)$, o problema (4) tem exatamente uma solução (isto é, $f \in M$).
$(iii\,')$ Se $t < t(f_1)$, o problema (4) tem exatamente duas soluções (isto é, $f \in O_2$).

Em 1975, J.Kazdan e F.W.Warner desconsideraram a condição de convexidade sobre a função g e trabalharam com a hipótese:

$$-\infty \leq \limsup_{s\to-\infty} \frac{g(x,s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{g(x,s)}{s} \leq +\infty,$$

e, usando os Métodos de Sub e Super-solução e Iteração Monotônica, encontraram uma função $t : (span\,\{\phi_1\})^{\perp} \to I\!R$ tal que:
$(i\,'')$ Se $t > t(f_1)$, o problema (4) não tem solução.
$(iii\,'')$ Se $t < t(f_1)$, o problema (4) tem pelo menos uma solução.

Aman, Hess e Dancer melhoraram o resultado de Kazdan e Warner encontrando pelo menos duas soluções para $t < t(f_1)$ e pelo menos uma para $t = t(f_1)$. A literatura sobre problemas do tipo Ambrosetti-Prodi é muito extensa, vários autores tiveram interesse em obter resultados em diferentes direções. Em 1986, B.Ruf e P.N.Srikanth

[28] trabalharam com o problema superlinear:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u_+^p + f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde $\Omega \in I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, e $1 < p < \infty$ se $N = 2$, $f \in L^2(\Omega)$ e $\lambda \in I\!R$ um parâmetro. Usando a decomposição $f = t\phi_1 + f_1$ com $\int_\Omega f_1\phi_1 = 0$ e a hipótese de que $\lambda > \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_j \ \forall\ j \in I\!N$, Ruf e Srikanth mostraram a existência de uma constante $T = T(f_1)$ tal que para $t > T$ o problema (5) possui pelo menos duas soluções.

De Figueiredo em [13] obteve um resultado similar para uma classe maior de não-linearidades. Trabalhando com a equação:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(x,u) + t\phi_1 + f_1(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

De Figueiredo exigiu hipóteses necessárias para obter a condição de Palais-Smale e que:

$$g \in C^1, \quad g'_s(x,s) \geq -\mu, \text{ onde } \ \mu < \lambda - \lambda_k.$$

Assim, aplicando o Teorema do Passo da Montanha Generalizado, mostrou a existência de um número $T > 0$ tal que, para $t \geq T$, o problema (6) tem pelo menos duas soluções.

Posteriormente, D.G. de Figueiredo e Y.Jianfu [17] trabalharam com a não-linearidade crítica ($p = 2^* - 1$) para o mesmo tipo de equação (5) acima, obtendo o seguinte resultado:

(i) Se $0 < \lambda < \lambda_1$ e $f_1 \in L^2$, então existe $T = T(f_1) < 0$ tal que se $t < T$, o problema (5) possui uma solução negativa u_t.

(ii) Se $\lambda > \lambda_1$ e $f_1 \in L^2$ é tal que $f_1 \in ker(-\Delta - \lambda)^\perp$ no caso em que λ é um autovalor, então existe $T = T(f_1) > 0$ tal que se $t > T$, o problema (5) possui uma solução negativa u_t.

Além disso, adicionando à qualquer uma das hipóteses acima as condições: a dimensão N é maior que 6 e λ não é autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, então o problema (5) possui uma segunda solução.

Em 1996, de Morais Filho [19] trabalhou com o sistema:

$$\begin{cases} -\Delta U = F(x,U) + T\phi_1 + F_1 & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

exigindo uma das seguintes hipóteses de crescimento sobre F :
(A) $|F(x,S)| \leq c\left(|s_1|^{\alpha} + |s_2|^{\beta} + 1\right)$; $1 \leq \alpha, \beta < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 \leq \alpha, \beta < \infty$ se $N = 2$, $\forall\, S = (s_1, s_2) \in I\!R^2$ e $x \in \Omega$, e existem números $\theta > 2$ e $r_0 > 0$ tais que:

$$0 < \theta H(x,\eta,\zeta) \leq f(x,\eta,\zeta)\eta + g(x,\eta,\zeta)\zeta, \quad \forall\ x \in \Omega, \ \ \eta, \zeta \geq 0$$

tais que $\eta^2 + \zeta^2 \geq r_0^2$, onde H satisfaz $\nabla H = F(x,U) = (f(x,u,v), g(x,u,v))$,
(A') $0 \leq F(x,S) \leq c\,(|s_1| + |s_2| + 1)\,, \forall\, S = (s_1, s_2) \in I\!R^2,\ x \in \Omega.$

Adicionando à uma das hipóteses acima as seguintes condições:
(B) Existe uma matriz cooperativa $A(x)$ tal que: $F(x,S) - F(x,T) \geq A(x)(S - T)$ para $S, T \in I\!R^2,\ S \geq T,\ x \in \Omega$,
(C) $F(x,S) \geq \underline{A}S - C$,
(D) $F(x,S) \geq \bar{A}S - C$,
onde $C = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} > 0$, e as matrizes $\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R)$ satisfazem:
(E) $\underline{b}, \underline{c} \geq 0$ ($\underline{A}$ é cooperativa),
(F) $(\underline{A}S, S) \leq \underline{\mu}\,|S|^2$, para algum $\underline{\mu} < \lambda_1$,
(G) $\bar{b}, \bar{c} \leq 0$,
(H) $(\bar{A}S, S) \geq \bar{\mu}\,|S|^2$, para algum $\bar{\mu} > \lambda_1$, $\ \forall\, S \in I\!R^2$,
de Morais Filho, usando teoremas variacionais abstratos encontrados em [16] e [18], mostrou a existência de uma curva Lipschtziana $\Gamma \subset I\!R^2$ dividindo o plano em dois domínios ilimitados e disjuntos E e N tais que:
(i) O sistema (7) possui pelo menos duas soluções se $T \in E$,
(ii) O sistema (7) não tem solução se $T \in N$.

Em nosso trabalho consideramos o sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + u_+^p + f & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = cu + dv + v_+^q + g & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

onde $\Omega \in I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $F = (f,g) \in (L^2(\Omega))^2$ é parametrizado da forma $f = t\phi_1 + f_1$ e $g = r\phi_1 + g_1$, com $f_1, g_1 \in L^2(\Omega)$ funções tais que: $\int_\Omega f_1\phi_1 = \int_\Omega g_1\phi_1 = 0$ e $(t,r) \in I\!R^2$.

Nos inspiramos principalmente nos resultados de B. Ruf e P.N. Srikanth, e D.G. de Figueiredo e Y. Jianfu, e aplicamos os Métodos Variacionais para encontrar múltiplas soluções para o sistema (8).

O capítulo 1 trata o sistema no caso subcrítico, isto é, $p, q < 2^* - 1$. Seguindo uma linha de procedimentos análoga a que foi usada por Ruf-Srikanth [28] e de Figueiredo [13], mostramos o seguinte resultado:

(I) Se $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc > 0$ e $(\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0\ \forall\ j = 2, ...,$ $b,\ c, \lambda_1 - a,\ \lambda_1 - d > 0$, então, para $F = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$ com $s > N$, existe $(\alpha_1, \alpha_2) < 0$ tal que se $(t, r) \leq (\alpha_1, \alpha_2)$, o sistema (8) possui uma solução negativa (u_{rt}, v_{rt}).

(II) Se $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc < 0$ e $(\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0\ \forall\ j = 2, ...,$ $b,\ c, \lambda_1 - a,\ \lambda_1 - d > 0$, para $F = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$ com $s > N$, a mesma conclusão acima é válida.

Suponha que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ seja uma matriz simétrica, isto é, $b = c$.

(i) Se adicionarmos à hipótese (I) a seguinte condição: $\mu_2 < \lambda_1$, onde μ_2 é o maior autovalor da matriz A, então o sistema (8) possui uma segunda solução.

(ii) Além disso, o mesmo resultado é ainda válido se adicionarmos à hipótese (II) a seguinte condição: $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$.

Observamos que as condições (I) (ou (II)) surgem naturalmente ao tentar obter a primeira solução de forma direta e que as hipóteses: $p, q < 2^* - 1$ e $\mu_2 < \lambda_1$ (ou $p, q < 2^* - 1$ e $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$) garantem que o funcional I satisfaz a condição (PS) em todos os níveis e a geometria do Passo da Montanha na sua forma simples (ou generalizada).

Considerando $b = c = 0,\ u = v,\ a = d,\ f = g$ e $p = q$ no sistema (8) sob as condições (ii) e (II), nós obtemos o problema no caso escalar trabalhado por Ruf e Srikanth, pois neste caso, $\lambda_k < a = \mu_2 < \lambda_{k+1}$.

É importante notar que o sistema (8) com as hipóteses (I) e (i) satisfeitas, pertence à classe dos problemas (7) trabalhado por de Morais Filho se e somente se $b = c = 0$. Assim, os dois resultados mencionados acima resolvem a equação escalar:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u_+^p + t\phi_1 + f_1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, e $1 < p < \infty$ se $N = 2$, $\int_\Omega f_1\phi_1 = 0$ e $\lambda < \lambda_1$, obtendo pelo menos duas soluções para $t \leq T < 0$. Por outro lado, o resultado de Morais Filho não contempla o caso $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$.

Nos capítulos 2 e 3 trabalhamos com o sistema (8) no caso crítico $(p, q = 2^* - 1)$, onde a hipótese (I) é também exigida no Capítulo 2 (respectivamente, (II) é satisfeita no Capítulo 3) e exigimos, devido às dificuldades da técnica usada, uma condição mais forte do que àquela descrita em (i) (respectivamente em (ii)). No Capítulo 2, supomos que $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$, onde μ_1 , μ_2 são, o menor e o maior autovalor da matriz simétrica A e $N > 6$, assim, o Teorema 2.1 garante a existência de pelo menos duas soluções para o sistema (8). No Capítulo 3, o mesmo resultado é garantido pelo Teorema 3.1 se $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$. Em ambos os casos, para mostrar a existência da segunda solução, recorremos à versões do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale obtendo compacidade abaixo do nível $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$, onde S é a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$. Assim, usando esse fato e uma caracterização para S, mostramos que a solução obtida como limite fraco de uma seqüência (PS) no nível minimax é não-trivial. Observe que se $b = c = 0,\ u = v,\ a = d,\ f = g$ e $p = q$ no sistema (8), nós obtemos o problema no caso escalar trabalhado por D.G. de Figueiredo e Y. Jianfu.

O capítulo 4 considera o sistema (8) com não linearidade mista, isto é, quando $p < 2^* - 1$ e $q = 2^* - 1$. Neste caso obtemos resultados análogos aos Teoremas 2.1 e 3.1 dos capítulos 2 e 3 respectivamente.

O capítulo 5 é destinado aos resultados de não existência. O Teorema 5.2 é uma conseqüência da *identidade de Pohozăev* adaptada para sistemas, mostramos que se $(f, g) = (0, 0),\ \mu_2 \leq 0,\ \ p, q \geq 2^* - 1$ e Ω é um domínio estrelado com respeito à $0 \in I\!\!R^N$, então o sistema (8) não possui solução não-trivial. Também, neste capítulo mostramos o Teorema 5.3, que garante a não existência de soluções positivas se $(f, g) = (0, 0),\ b \geq 0$ e $\mu_2 \geq \lambda_1$ (ou $b \leq 0$ e $\mu_1 \leq \lambda_1$). Finalmente, nos Apêndices são encontrados os principais resultados utilizados nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Sistema de Equações Elípticas com não Linearidade Subcrítica

O propósito deste capítulo é investigar a existência de múltiplas soluções para o sistema $-\Delta U = AU + [u_+^p \;\; v_+^q]^{\mathbf{T}} + F$ em Ω, onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $1 < p, q < \frac{N+2}{N-2}$ e $\mathbf{T}$ é a transposta da matriz. Nosso trabalho foi motivado pelo resultado de B. Ruf - P. N. Srikanth [28], que consideraram o problema $-\Delta u = \lambda u + u_+^p + f$, onde $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$, $1 < p < 2^* - 1$, e obtiveram pelo menos duas soluções para $t > T$ com $f = t\phi_1 + f_1$. Posteriormente, De Figueiredo [13] obteve um resultado similar para uma classe maior de não linearidades. Nosso objetivo é obter uma versão para sistemas do resultado de Ruf-Srikanth. Assim, sob a hipótese de simetria da matriz A, os Teoremas 1.1 e 1.2 a serem enunciados, garantem a existência de pelo menos duas soluções para o sistema. A primeira obtida diretamente e a segunda, dependendo da localização do maior autovalor de A em relação ao espectro do Laplaciano, ou seja, se μ_2 é o maior autovalor de A e $\mu_2 < \lambda_1$, usamos o Teorema do Passo da Montanha. No caso que $\lambda_k < b \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, onde b são os termos da diagonal secundária da matriz A, o problema satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha Generalizado de Rabinowitz.

Considere o sistema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + u_+^p + f & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = cu + dv + v_+^q + g & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $1 < p, q < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$, e $1 < p, q < \infty$ se $N = 2$, $\quad F = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$ para algum $s > N$.

Denotamos por u_+ a parte positiva de u, isto é: $u_+ = max\{u(x), 0\}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$ a seqüência de autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e ϕ_1 a autofunção (positiva e normalizada) associada ao primeiro autovalor λ_1.

Usaremos a notação $V = (w, z) > 0$ para dizer que cada coordenada do vetor V é positiva.

Considere a decomposição $f = t\phi_1 + f_1$ e $g = r\phi_1 + g_1$, onde $f_1, g_1 \in L^s(\Omega)$ com $s > N$ são funções fixas tais que $\int_\Omega f_1\phi_1 = \int_\Omega g_1\phi_1 = 0$ e $(t, r) \in I\!R^2$.

Matricialmente, o sistema (1.1) toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} u_+^p \\ v_+^q \end{pmatrix} + T\phi_1 + F_1 & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R)$, $T = (t, r)$, $F_1 = (f_1, g_1)$ e $U = (u, v)$.

Suporemos sempre que $b, c > 0$, isto implicará que a matriz A tem dois autovalores reais $\mu_1 \leq \mu_2$. Os principais resultados desse capítulo são divididos em duas partes: na primeira obtemos uma solução negativa de forma direta e na segunda parte usamos o Cálculo Variacional para encontrarmos uma outra solução não-nula. Os principais resultados deste capítulo serão enunciados a seguir:

Existência de solução via Teorema do Passo da Montanha

Como mencionamos anteriormente, os Teoremas minimax utilizados dependem da posição do maior autovalor da matriz simétrica A em relação ao espectro do Laplaciano. Sob a hipótese $\mu_2 < \lambda_1$ aplicamos o Teorema do Passo da Montanha para obter pelo menos duas soluções para o sistema (1.1), é o que diz o teorema abaixo:

TEOREMA 1.1. *((A)Existência de uma solução negativa)*

(I) Se $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc > 0$ *e* $(\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0$, $\forall\ j = 2, ...$, $b,\ c, \lambda_1 - a,\ \lambda_1 - d > 0$, *então, para* $F = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$ *para algum* $s > N$, *existe* $(\alpha_1, \alpha_2) < 0$ *tal que se* $(t, r) \leq (\alpha_1, \alpha_2)$, *o sistema (1.1) possui uma solução negativa* (u_{rt}, v_{rt}).

((B)Existência de uma segunda solução)

Suponhamos que A seja uma matriz simétrica (b=c).

(i) Se adicionarmos à hipótese (I) a seguinte condição: $\mu_2 < \lambda_1$, onde μ_2 é o maior autovalor da matriz A, então o sistema (1.1) possui uma segunda solução.

Existência de solução via Teorema do Passo da Montanha Generalizado

Observa-se que, com a hipótese $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$ nosso problema possui uma geometria distinta daquela descrita pelo Teorema 1.1, neste caso utilizamos o Teorema do Passo da Montanha Generalizado de Rabinowitz para provar o seguinte resultado:

TEOREMA 1.2. *((A)Existência de uma solução negativa)*

(II) Se $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc < 0$ e $(\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0$, $\forall\, j = 2, ...,$ $b,\ c, \lambda_1 - a,\ \lambda_1 - d > 0$, então, para $F = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$ com $s > N$, existe $(\beta_1, \beta_2) > 0$ tal que se $(t, r) \geq (\beta_1, \beta_2)$, o sistema (1.1) possui uma solução negativa (u_{rt}, v_{rt}).

((B)Existência de uma segunda solução)

Suponhamos que A seja uma matriz simétrica (b=c).

(ii) Se adicionarmos à hipótese (II) a seguinte condição: $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, então o sistema (1.1) possui uma segunda solução.

OBSERVAÇÃO 1 *: É importante observar que as hipóteses (I) e (ii) (ou (II) e (i)) não podem ser assumidas simultaneamente, para ver isso faça $a = d = 0$.*

OBSERVAÇÃO 2 *: A hipótese (I) (ou (II)) garante que os $\lambda_{j\,'s}$ não são autovalores da matriz A, ou seja,*

$$det(A - \lambda_j I) = (\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0 \ \ \forall\, j = 1, 2, ... \, . \quad (*)$$

Observe que se $b, c > 0$, a equação $(\mu - a)(\mu - d) - bc = 0$ terá duas raízes reais $\mu_1 < \mu_2$ (autovalores da matriz A), pois $\Delta = (a - d)^2 + 4bc > 0$.

(a) Se $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc > 0$ então $\lambda_1 < \mu_1$ ou $\lambda_1 > \mu_2$.

No caso que $0 < \lambda_1 < \mu_1$, a condição $(*)$ na hipótese (I) do Teorema 1.1 pode ser substituida por $\lambda_j \notin \{\mu_1, \mu_2\}$ $\forall\, j = 2, 3...$.

Se $\lambda_1 > \mu_2$, como $\lambda_j \geq \lambda_1$, $j = 2, 3...$ então $(\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc > 0$. Assim, a condição $(*)$ da hipótese (I) torna-se desnecessária, ou seja, é uma conseqüência da desigualdade $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc > 0$.

(b) Se $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc < 0$ *então* $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2$. *Assim, a condição* $(*)$ *na hipótese* (II) *do Teorema 1.2 pode ser reduzida a* $\lambda_j \neq \mu_2 \ \ \forall\ j = 2, 3...$.

Observação 3 *: O mínimo e o máximo da forma quadrática* $(AU, U)_{I\!R^N}$, $U \in I\!R^N$ *restrito à esfera unitária são* μ_1 *e* μ_2 *respectivamente, e temos que:*

$$\mu_1 |U|^2 \leq (AU, U)_{I\!R^2} \leq \mu_2 |U|^2 \ , \ U \in I\!R^2.$$

O Lema a seguir será útil na prova dos Teoremas 1.1 e 1.2.

Lema 1.3. *Sejam* $\Omega \subset I\!R^N$ *um domínio limitado suave,* $f, g \in L^2(\Omega)$ *e suponha que:*
$b,\ c, \lambda_1 - a,\ \lambda_1 - d > 0 \quad e \quad (\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0,\ \forall\ j = 1, 2, ...$.
Então o sistema linear:

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + f & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = cu + dv + g & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

possui uma única solução $(u_0, v_0) \in E := (H_0^1(\Omega))^2$.

Demonstração. Considere o sistema modificado:

$$\begin{cases} -\Delta u - au - bv + \lambda_1 u + \alpha u = f & \text{em } \Omega \\ -\Delta v - cu - dv + \lambda_1 v + \alpha v = g & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $\alpha > 0$ é tal que $0 < \alpha - max\,\{b, c\}$.

Tome $\gamma > 0$ tal que $0 < \gamma \leq \alpha - max\,\{b, c\}$ e seja $E = (H_0^1(\Omega))^2$ com a norma $\|(u, v)\|_E^2 = \|(u, v)\|^2_{(H_0^1(\Omega))^2} = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ e denote $\|u\| := \|u\|_{H_0^1}$.

Defina $B : E \times E \longrightarrow I\!R$ por:

$$B((u, v), (\varphi, \psi)) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - a \int_\Omega u\varphi - b \int_\Omega v\varphi + \lambda_1 \int_\Omega u\varphi + \alpha \int_\Omega u\varphi +$$

$$+ \int_\Omega \nabla v \nabla \psi - c \int_\Omega u\psi - d \int_\Omega v\psi + \lambda_1 \int_\Omega v\psi + \alpha \int_\Omega v\psi.$$

(1) B é coerciva, pois:

$$B((u, v), (u, v)) =$$

$$= \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2 + (\lambda_1 - a) \int_\Omega u^2 + (\lambda_1 - d) \int_\Omega v^2 + \alpha \int_\Omega (u^2 + v^2) - (b + c) \int_\Omega vu \geq$$

$$\geq \|u\|^2 + \|v\|^2 + \alpha \int_\Omega (u^2+v^2) - \frac{(b+c)}{2}\int_\Omega (u^2+v^2) =$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + \frac{(\alpha-b)}{2}\int_\Omega (u^2+v^2) + \frac{(\alpha-c)}{2}\int_\Omega (u^2+v^2) \geq \|u\|^2 + \|v\|^2 = \|(u,v)\|_E^2 .$$

(2) B é contínua, de fato:

$$|B((u,v),(\varphi,\psi))| \leq$$

$$\leq \|u\|\,\|\varphi\| + \frac{|a|}{\lambda_1}\|u\|\,\|\varphi\| + \frac{b}{\lambda_1}\|v\|\,\|\varphi\| + \|u\|\,\|\varphi\| + \frac{\alpha}{\lambda_1}\|u\|\,\|\varphi\| +$$

$$+ \|v\|\,\|\psi\| + \frac{c}{\lambda_1}\|u\|\,\|\psi\| + \frac{|d|}{\lambda_1}\|v\|\,\|\psi\| + \|v\|\,\|\psi\| + \frac{\alpha}{\lambda_1}\|v\|\,\|\psi\| \leq$$

$$\leq K_1\|\varphi\|\,(\|u\|+\|v\|) + K_2\|\psi\|\,(\|u\|+\|v\|) \leq$$

$$\leq max\,\{K_1,K_2\}\,(\|u\|+\|v\|)(\|\varphi\|+\|\psi\|) \leq K\,\|(u,v)\|_E\,\|(\varphi,\psi)\|_E .$$

Assim, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe um único $(u,v) \in E := (H_0^1(\Omega))^2$ tal que:

$$B((u,v),(\varphi,\psi)) = \langle (f,g),(\varphi,\psi)\rangle_{L^2} = \int_\Omega f\varphi + \int_\Omega g\psi\ ,\ \forall\,(\varphi,\psi)\in E.$$

Isto é, existe um único $(u,v)\in E$ tal que:

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - a\int_\Omega u\varphi - b\int_\Omega v\varphi + \lambda_1\int_\Omega u\varphi + \alpha\int_\Omega u\varphi + \int_\Omega \nabla v\nabla\psi - c\int_\Omega u\psi - d\int_\Omega v\psi +$$

$$+\lambda_1\int_\Omega v\psi + \alpha\int_\Omega v\psi + \lambda_1\int_\Omega v\psi + \alpha\int_\Omega v\psi = \int_\Omega f\varphi + \int_\Omega g\psi\ ,\ \forall(\varphi,\psi)\in E. \tag{1.5}$$

Ou seja, por definição, existe uma única solução fraca (solução que satisfaz a equação (1.5)) para o sistema (1.4), logo, podemos definir o operador linear:
$T_\alpha : (L^2(\Omega))^2 \longrightarrow (H_0^1(\Omega))^2$ dado por:

$T_\alpha(f,g) = (u,v)$, onde (u,v) é solução de (1.4).

Observe que T_α é contínuo, pois:

$(u,v) = U = T_\alpha(F) = T_\alpha(f,g)$ satisfaz a equação (1.5), $\forall\,(\varphi,\psi)\in E$.

Em particular para $(\varphi,\psi) = (u,v)$, assim:

$$\|(u,v)\|_E^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 =$$

$$= \int_\Omega fu + \int_\Omega gv + (a-\lambda_1)\int_\Omega u^2 + (d-\lambda_1)\int_\Omega v^2 - \alpha\int_\Omega (u^2+v^2) + (b+c)\int_\Omega uv \leq$$

$$\leq \int_\Omega fu + \int_\Omega gv - \alpha\int_\Omega (u^2+v^2) + max\,\{b,c\}\int_\Omega (u^2+v^2) \leq$$

$$\leq \int_\Omega fu + \int_\Omega gv \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq$$

$$\leq C \|f\|_{L_2} \|u\| + C \|g\|_{L^2} \|v\| \leq C\sqrt{\|f\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L^2}^2} \cdot \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2} = C \|F\|_{(L^2)^2} \|(u,v)\|_E .$$

Assim, concluimos que: $\|T_\alpha(F)\|_E = \|(u,v)\|_E \leq C \|F\|_{(L^2)^2}$, e portanto a continuidade de T_α.

Agora, como $T_\alpha : (L^2(\Omega))^2 \longrightarrow (H_0^1(\Omega))^2 \hookrightarrow\hookrightarrow (L^2(\Omega))^2$, temos que a aplicação $T_\alpha : (L^2(\Omega))^2 \longrightarrow (L^2(\Omega))^2$ é linear e compacta.

Por outro lado, (u,v) é solução fraca de (1.3) se somente se (u,v) é solução de:

$$\begin{cases} -\Delta u - au - bv + \lambda_1 u + \alpha u = f + \lambda_1 u + \alpha u & \text{em } \Omega \\ -\Delta v - cu - dv + \lambda_1 v + \alpha v = g + \lambda_1 v + \alpha v & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.6}$$

Isto é, $(u,v) = T_\alpha\left((f,g) + \lambda_1(u,v) + \alpha(u,v)\right).$

Defina $(w,z) := (f,g) + \lambda_1(u,v) + \alpha(u,v)$, assim,

$$(w,z) - (\alpha + \lambda_1)(u,v) = (f,g).$$

Como $(u,v) = T_\alpha(w,z)$ temos:

$$(I - (\alpha + \lambda_1)T_\alpha)(w,z) = (f,g). \tag{1.7}$$

Pela Teoria dos Operadores Compactos,
$\frac{1}{\alpha+\lambda_1} \notin \sigma(T_\alpha) \Leftrightarrow$ a equação (1.7) tem solução única $(w,z) \Leftrightarrow$ O sistema (1.3) tem solução única.

Assim, basta observarmos que:

$$\frac{1}{\alpha + \lambda_1} \notin \sigma(T_\alpha) \Leftrightarrow (\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0,\ \forall\, j = 1, 2, \ldots .$$

De fato:

$\frac{1}{\alpha+\lambda_1} \notin \sigma(T_\alpha) \Leftrightarrow T_\alpha(u,v) = \frac{1}{\alpha+\lambda_1}(u,v)$ então $(u,v) = (0,0)$.

$\Leftrightarrow$ Se (u,v) satisfaz:

$\frac{1}{\alpha+\lambda_1}(-\Delta u - au - bv + \lambda_1 u + \alpha u) = u$ e $\frac{1}{\alpha+\lambda_1}(-\Delta u - cu - dv + \lambda_1 v + \alpha v) = v$, então, $(u,v) = (0,0)$.

$\Leftrightarrow$ Se (u,v) satisfaz: $-\Delta u = au + bv$ e $-\Delta u = cu + dv$, então, $(u,v) = (0,0)$.

$\Leftrightarrow (\lambda_j - a)(\lambda_j - d) - bc \neq 0,\ \forall\, j = 1, 2, ...,$ (ié, λ_j não é autovalor de A). Para a última equivalência veja o Lema A.1 do Apêndice A.

□

Existência de uma solução negativa

Demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2 - Parte *(A)*.

Observe que toda solução negativa de (1.1) satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + T\phi_1 + F_1 & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

Assim, basta acharmos uma solução negativa (u_{rt}, v_{rt}) de (1.8) que será uma solução negativa de (1.1).

Sabemos, pelo Lema 1.3, que a hipótese (I) (ou (II)) implica que o sistema linear:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + F_1 & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

tem solução única $(u_0, v_0) \in (H_0^1(\Omega))^2 = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + T\phi_1 & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Uma solução de (1.10) é do tipo $(w, z) = (\alpha, \beta)\phi_1$, onde:

$$\alpha = \frac{b}{\lambda_1 - a}\left(\frac{ct + r(\lambda_1 - a)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc}\right) + \frac{t}{\lambda_1 - a} \quad ,$$

$$\beta = \frac{ct + r(\lambda_1 - a)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc} \; .$$

Observe que a solução de (1.10) é única. De fato:
Suponha que (u, v) e $(\bar{u}, \bar{v})$ sejam soluções de (1.10), seja $W = (w_1, w_2) = (u - \bar{u}, v - \bar{v})$, assim, W satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta W = AW & \text{em } \Omega \\ W = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

Portanto, como as hipóteses (I) ou (II) (veja Lema A.1 do Apêndice A) garantem que $(0, 0)$ é a única solução de (1.11), temos que $u = \bar{u}, v = \bar{v}$.

Por outro lado, se o sistema (1.8) possuir uma solução (u_{rt}, v_{rt}) então a função $(w, z) = (u_{rt}, v_{rt}) - (u_0, v_0)$ será uma solução de (1.10), onde (u_0, v_0) é uma solução de (1.9).

Usando a unicidade da solução de (1.10) obtemos:

$$\left(\frac{b}{\lambda_1 - a}\left(\frac{ct + r(\lambda_1 - a)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc}\right) + \frac{t}{\lambda_1 - a}\right)\phi_1 = w = u_{rt} - u_0,$$

$$\left(\frac{ct + r(\lambda_1 - a)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc}\right)\phi_1 = z = v_{rt} - v_0.$$

Assim,

$$u_{rt} = \left(\frac{b}{\lambda_1 - a}\left(\frac{ct + r(\lambda_1 - a)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc}\right) + \frac{t}{\lambda_1 - a}\right)\phi_1 + u_0,$$

$$v_{rt} = \left(\frac{ct + r(\lambda_1 - a)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc}\right)\phi_1 + v_0.$$

Logo, se (I) ocorre, existe $(\alpha_1, \alpha_2) < 0$ tal que se $(t, r) \leq (\alpha_1, \alpha_2)$ então $(u_{rt}, v_{rt}) < 0$ e conseqüentemente $(u_{rt}, v_{rt}) = (w, z) + (u_0, v_0)$ é a solução procurada de (1.8).

Analogamente se (II) ocorre, para (t, r) suficientemente grande, existe $(\beta_1, \beta_2) > 0$ tal que se $(t, r) \geq (\beta_1, \beta_2)$ então $(u_{rt}, v_{rt}) < 0$ é a solução para o sistema (1.8).

$\square$

Observação 4 :

Se (I) ocorre, é fácil ver que $(u_{rt}, v_{rt}) < 0$ para $(t, r) \leq (\alpha_1, \alpha_2) < 0$.

Se (II) ocorre, também obtemos que $(u_{rt}, v_{rt}) < 0$ para $(t, r) > 0$ suficientemente grande, de fato:

Como $\lambda_1 - a > 0$ e $\lambda_1 - d > 0$ então $-(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) < 0$.

Assim, somando bc a ambos os lados da inequação e usando o fato que $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc < 0$ obtemos :

$$\frac{bc}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc} + 1 < 0\ .$$

Observando que:

$$\frac{b}{\lambda_1 - a}\left(\frac{ct + r(\lambda_1 - a)}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc}\right) + \frac{t}{\lambda_1 - a} =$$

$$= \left(\frac{bc}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc} + 1 \right) \frac{t}{\lambda_1 - a} + \frac{br}{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) - bc} \ ,$$

temos o resultado desejado.

Observação 5 : *Se exigimos que $f, g \in L^s(\Omega)$ com $s > N$ no Lema 1.3 a solução (u_0, v_0) estará em $(C^{1,\,\alpha}(\bar{\Omega}))^2$.*

Existência da segunda solução

Na prova dos Teoremas 1.1 e 1.2 ($parte(B)$) empregaremos Métodos Variacionais, daí a necessidade da hipótese de simetria para a matriz A. As ferramentas variacionais usadas nas provas são: O Teorema do Passo da Montanha (forma simples)[24] e o Teorema do Passo da Montanha Generalizado de P.H. Rabinowitz [27] (respectivamente). Como obsevamos anteriormente, as hipóteses: $\mu_2 < \lambda_1$ e $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$ garantirão as respectivas geometrias.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} (u + u_{rt})_+^p \\ (v + v_{rt})_+^q \end{pmatrix} & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

Se $(\bar{u}, \bar{v}) \neq (0, 0)$ satisfaz (1.12), então uma segunda solução de (1.1) é dada por: $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}) + (u_{rt}, v_{rt})$, assim, nosso objetivo agora será obtermos uma solução de (1.12).

Observação 6 : *Uma solução fraca para (1.12) é um vetor $U = (u, v) \in (H_0^1(\Omega))^2$ tal que:*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega \nabla v \nabla \xi dx =$$

$$a \int_\Omega u\varphi dx + b \int_\Omega v\varphi dx + b \int_\Omega u\xi dx + d \int_\Omega v\xi dx + \int_\Omega (u + u_{rt})_+^p \varphi dx + \int_\Omega (v + v_{rt})_+^q \xi dx,$$

$$\forall \ (\varphi, \xi) \in (H_0^1(\Omega))^2.$$

Seja $E := (H_0^1(\Omega))^2$ com a norma $\|(u, v)\|_E^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.

Considere o seguinte funcional $I : E \longrightarrow I\!R$ dado por:

$$I(U) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU, U)dx - \int_\Omega H(U)dx,$$

onde

$$H(U) = \frac{1}{p+1}(u + u_{rt})_+^{p+1} + \frac{1}{q+1}(v + v_{rt})_+^{q+1}\ .$$

Note que os pontos críticos de I são soluções fracas de (1.12), e que $U = 0$ é um ponto crítico de I com $I(0) = 0$. Mostraremos agora que, em ambos os casos ((i) ou (ii)), o funcional I possui outro ponto crítico.

Lema 1.4. *O funcional $I : E \longrightarrow I\!R$ definido acima satisfaz a condição de Palais-Smale (PS); ou seja, se $(U_n) \subset E$ é uma seqüência tal que $I(U_n)$ é limitada e $I'(U_n) \to 0$, então (U_n) possui uma subseqüência convergente.*

Demonstração. Seja $(U_n) \subset E$ tal que $|I(U_n)| < C$ e $I'(U_n) \to 0$ em $((H_0^1(\Omega))^2)'$.

Isto significa que:

$$|I(U_n)| = \left|\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU_n, U_n) - \int_\Omega H(U_n)\right| \le C. \tag{1.13}$$

e

$$|I'(U_n)\Psi| = \left|\int_\Omega \nabla U_n \nabla\Psi - \int_\Omega (AU_n, \Psi) - \int_\Omega \nabla H(U_n)\Psi\right| =$$

$$= \left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi + \int_\Omega \nabla v_n \nabla\varphi\xi - a\int_\Omega u_n\varphi - b\int_\Omega v_n\varphi - b\int_\Omega u_n\xi - d\int_\Omega v_n\xi - \right.$$

$$\left. - \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^p\varphi - \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^q\xi\right| \le \epsilon_n \left\|\Psi\right\|_E . \tag{1.14}$$

$\forall\ \Psi = (\varphi, \xi) \in E,\ \epsilon_n \to 0.$

Observe que:

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^p u_n = -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^p\left[(u_n + u_{rt}) - u_{rt}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p\left[(u_n+u_{rt})_+ - (u_n+u_{rt})_- - u_{rt}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} + \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_{rt}.$$

Analogamente,

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^q v_n = -\frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{q+1} + \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^q v_{rt}.$$

Conseqüentemente,

$$\frac{1}{2}I'(U_n)U_n = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \frac{a}{2}\int_\Omega u_n^2 - \frac{d}{2}\int_\Omega v_n^2 - b\int_\Omega u_n v_n -$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n - \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^q v_n =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \frac{a}{2}\int_\Omega u_n^2 - \frac{d}{2}\int_\Omega v_n^2 - b\int_\Omega u_n v_n -$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} + \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_{rt} - \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{q+1} + \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^q v_{rt}. \quad (1.15)$$

Portanto,

$$I(U_n) - \frac{1}{2}I'(U_n)U_n =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{q+1} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_{rt} - \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^q v_{rt}.$$

Como $|I(U_n)| < C$ e $I'(U_n) \to 0$, obtemos:

$$\left|I(U_n) - \frac{1}{2}I'(U_n)U_n\right| \le |I(U_n)| + \frac{1}{2}\|I'(U_n)\|\,\|U_n\|_E \le$$

$$\le C + \epsilon\,\|U_n\|_E \quad \forall\, n > N(\epsilon).$$

Por outro lado, como $p, q > 1$,

$$0 \le \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} + \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p(-u_{rt}).$$

$$0 \le \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{q+1} + \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^q(-v_{rt}).$$

Somando as expressões acima, concluimos que:

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{p+1} + \frac{1}{2} \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{p} (-u_{rt}) + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right) \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{q+1} + \frac{1}{2} \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{q} (-v_{rt}) \leq \\
& \leq C + \epsilon \left\| U_n \right\|_E . \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

Portanto $\|U_n\|_E \leq K \quad \forall\, n$.

Suponha o contrário, isto é: $\|U_n\|_E \to \infty$, quando $n \to \infty$.
Pela desigualdade (1.16),

$$\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{p+1} \leq k_1 C + C_\epsilon \left\| U_n \right\|_E ,$$

$$\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{q+1} \leq k_2 C + C_\epsilon \left\| U_n \right\|_E . \qquad (1.17)$$

Assim, usando (1.13) e escrevendo $V_n = \frac{U_n}{\|U_n\|_E}$ obtemos:

$$\frac{I(U_n)}{\|U_n\|_E^2} = \frac{1}{2} \ - \frac{1}{2} \int_\Omega (AV_n, V_n) - \frac{1}{\|U_n\|_E^2} \int_\Omega \frac{(u_n + u_{rt})_+^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{\|U_n\|_E^2} \int_\Omega \frac{(v_n + v_{rt})_+^{q+1}}{q+1}.$$

Usando os seguintes fatos: $V_n \rightharpoonup V$ em $(H_0^1)^2$ (pois $\|V_n\|_E = 1$), a limitação de $I(U_n)$, e observando que as estimativas (1.17) implicam que as duas últimas integrais do lado direito da equação acima tendem à zero quando $n \to \infty$, obtemos:

$$0 = \frac{1}{2} \ - \frac{1}{2} \int_\Omega (AV, V),$$

e conseqüentemente $V \neq 0$.

Por outro lado, usando novamente as estimativas (1.17) temos que:

$$\frac{1}{\|U_n\|_E^{1+\frac{1}{p}}} \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{p+1} \leq \frac{k_1\, C}{\|U_n\|_E^{1+\frac{1}{p}}} + \frac{C_\epsilon}{\|U_n\|_E^{\frac{1}{p}}} \longrightarrow 0.$$

Isto implica que: $\frac{1}{\|U_n\|_E} (u_n + u_{rt})_+^p \longrightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^{1+\frac{1}{p}}$.
Portanto,

$$\frac{1}{\|U_n\|_E} (u_n + u_{rt})_+^p \longrightarrow 0 \ \ em\ H^{-1}, pois,\ L^{1+\frac{1}{p}} \hookrightarrow H^{-1}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{\|U_n\|_E}(v_n + v_{rt})_+^q \longrightarrow 0 \;\; em \; H^{-1}. \tag{1.18}$$

Como

$$\langle I'(U_n), \Psi\rangle = \int_\Omega \nabla U_n \nabla \Psi - \int_\Omega (AU_n, \Psi) - \int_\Omega \nabla H(U_n)\Psi \to 0 \;,\; \forall \;\; \Psi \in (H_0^1)^2,$$

temos que,

$$-\Delta U_n - AU_n - \nabla H(U_n) \to 0 \;\; em \;\; (H^{-1})^2.$$

Dividindo a expressão acima por $\|U_n\|_E$ temos:

$$-\Delta V_n - \frac{\nabla H(U_n)}{\|U_n\|_E} - AV_n \to 0 \quad em \; (H^{-1})^2. \tag{1.19}$$

Como $V_n \rightharpoonup V$ em $(H_0^1)^2$ e

$$\frac{\nabla H(U_n)}{\|U_n\|_E} = \left(\frac{(u_n + u_{rt})_+^p}{\|U_n\|_E} \;,\; \frac{(v_n + v_{rt})_+^q}{\|U_n\|_E}\right) \to (0,0) \;\; em \; (H^{-1})^2,$$

por (1.19) temos que V satisfaz $-\Delta V = AV$ em Ω e $V = 0$ sobre $\partial\Omega$, assim $V \equiv 0$ (ver Lema A.1 do Apêndice A), que é uma contradição. Logo (U_n) é uma seqüência limitada em $E = (H_0^1)^2$.

$\square$

Finalmente estamos em condições de finalizar as provas dos Teoremas 1.1 e 1.2.

Demonstração do Teorema 1.1 - Parte *(B)*.

Basta mostrarmos que o funcional I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, isto é:

(1) Existem $\rho > 0$ e $r > 0$ tais que se $\|U\|_E = r$ então $I(U) \geq \rho$.

(2) Existe $U_0 = (u_0, v_0) \in E$ tal que $\|U_0\|_E > r$ e $I(U_0) \leq 0$.

De fato, usando as Desigualdades de Sobolev e o fato que $A(U,U) \leq \mu_2 |U|^2$, segue que:

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2 dx - \frac{\mu_2}{2}\int_\Omega |U|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u + u_{rt})_+^{p+1} dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega (v + v_{rt})_+^{q+1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2 dx - \frac{\mu_2}{2\lambda_1}\int_\Omega |\nabla U|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |v|^{q+1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)(\|u\|^2_{H^1_0}+\|v\|^2_{H^1_0}) - C(\|u\|^{p+1}_{H^1_0}+\|v\|^{q+1}_{H^1_0}).$$

Usando as hipóteses $\mu_2 < \lambda_1$ e $p, q > 1$, segue que $I(U) > 0$, para $(u,v) \in E$ tal que $\|(u,v)\|^2_E = \|u\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0} = \rho^2$ é suficientemente pequeno, e portanto (1) está provado.

Para a prova de (2), fixe $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, 0) \in E$ tal que $\int_\Omega (\widetilde{u}-1)^{p+1}_+ > 0$ e seja $s > 0$, assim:

$$I(s\widetilde{U}) = \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla \widetilde{U}|^2 dx - \int_\Omega (A\widetilde{U}, \widetilde{U})dx\right) - \frac{s^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\widetilde{u} + \frac{u_{rt}}{s}\right)^{p+1}_+ dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega (0+v_{rt})^{q+1}_+ dx.$$

Escolha $s_1 > 0$ tal que $\frac{u_{rt}(x)}{s_1} \geq -1$, isto pode ser feito pela continuidade (conseqüentemente, pela limitação inferior) da função u_{rt}.

Logo, para $s > s_1$,

$$\int_\Omega \left(\widetilde{u} + \frac{u_{rt}}{s}\right)^{p+1}_+ dx \geq \int_\Omega (\widetilde{u}-1)^{p+1}_+ dx.$$

Portanto, vemos que:

$$I(s\widetilde{U}) \leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla \widetilde{U}|^2 - \int_\Omega (A\widetilde{U}, \widetilde{U})\right) - \frac{s^{p+1}}{p+1}\int_\Omega (\widetilde{u}-1)^{p+1}_+ \longrightarrow -\infty$$

quando $s \to \infty$.

Assim, I possui um valor crítico $c_1 > 0$ e como $I(0) = 0$, a solução obtida pelo Passo da Montanha é não-nula.

Observe que a solução não pode ser negativa. Se $U = (u,v) < (0,0)$ é uma solução para o sistema (1.12), então $(u+u_{rt})_+ = 0 = (v+v_{rt})_+$, assim U satisfaz o problema: $-\Delta U = AU$ em Ω e $U = 0$ sobre $\partial\Omega$ que possui solução única $U \equiv 0$, o que é impossível.

$\square$

Demonstração do Teorema 1.2 - Parte *(B)*.

Seja $(H^1_0(\Omega))^2 = E = W \oplus X$, com $W := \langle (0,\phi_i), (\phi_i, 0)\rangle_{1\leq i \leq k}$ e $X := W^\perp$.

Nosso objetivo é verificar que o funcional I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha Generalizado (veja Apêndice A).

Verificação de (a). Seja $U = (u,v) \in X$, assim:

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{\mu_2}{2}\int_\Omega |U|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u+u_{rt})^{p+1}_+ dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega (v+v_{rt})^{q+1}_+ dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{\mu_2}{2\lambda_{k+1}}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |v|^{q+1}\,dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)(\|u\|^2_{H^1_0}+\|v\|^2_{H^1_0}) - C(\|u\|^{p+1}_{H^1_0}+\|v\|^{q+1}_{H^1_0}).$$

Lembrando que $\mu_2 < \lambda_{k+1}$ e $p, q > 1$, temos que $I(u,v) > 0$, para $(u,v) \in X$ tal que $\|(u,v)\|^2_E = \|u\|^2_{H^1_0} + \|v\|^2_{H^1_0} = \rho^2$ é suficientemente pequeno, e portanto (a) está provado.

Verificação de (b). Mostraremos que existem $R > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que:

$$I(z) \leq 0 \ \ \forall\, z \in \partial Q,$$

onde

$$Q := (\bar{B_R} \cap W) \oplus \{rv \ : 0 \leq r \leq R\},$$

$\bar{B_R}$ é a bola fechada em $(H^1_0(\Omega))^2$ centrada em $(0,0)$ e $v = (v_1, 0) \in X$ é escolhido de forma que v_1 é a função dada pelo Lema A.2 do Apêndice A com $\|v\|_E = \|v_1\|_{H^1_0} = \epsilon$.

Escreva $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, onde:
$\Gamma_1 = \bar{B_R} \cap W$,
$\Gamma_2 = \{z \in (H^1_0(\Omega))^2 \ / \ z = w + sv,\ com\ w \in W,\ \|w\|_E = R,\ 0 \leq s \leq R\}$,
$\Gamma_3 = \{z \in (H^1_0(\Omega))^2 \ / \ z = w + Rv,\ com\ w \in W,\ \|w\|_E \leq R\}$.
Assim, devemos mostrar que $I \leq 0$ em cada $\Gamma_i,\ i = 1,2,3$.

(1) Sobre Γ_1 temos:

$$I(w) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (Aw,w)dx \leq \frac{1}{2}(\lambda_k - \mu_1)\int_\Omega |w|^2\,dx \leq 0.$$

Observe que, na verdade mostramos mais, mostramos que $I(w) \leq 0$ em W.

(2) Sobre Γ_2.
Nesta etapa faremos a escolha de $\epsilon > 0$.

$$I(w+sv) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w+sv)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (A(w+sv),(w+sv))dx \leq$$

Usando que $v = (v_1, v_2) = (v_1, 0)$ temos:

$$I(w+sv) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w|^2\,dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2\lambda_k}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)R^2 + \frac{R^2}{2}\epsilon^2 = \frac{R^2}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}+\epsilon^2\right).$$

Assim, escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}+\epsilon^2 \leq 0$, temos que $I(w+sv) \leq 0$ sobre Γ_2.

Para finalizar, escolheremos $R > 0$ na próxima etapa.

(2) Sobre Γ_3.

$$I(w+Rv) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w+Rv)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (A(w+Rv),(w+Rv))dx -$$

$$-\frac{1}{p+1}\int_\Omega (w_1+Rv_1+u_{rt})_+^{p+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega (w_2+Rv_2+v_{rt})_+^{q+1}dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w+Rv)|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w+Rv|^2\,dx -$$

$$-\frac{1}{p+1}\int_\Omega (w_1+Rv_1+u_{rt})_+^{p+1}dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega (w_2+Rv_2+v_{rt})_+^{q+1}dx.$$

Usando novamente que $v=(v_1,v_2)=(v_1,0)$ e o fato que $\lambda_k < \mu_1$, segue que:

$$I(w+Rv) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w|^2\,dx + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{R^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\frac{w_1}{R}+v_1+\frac{u_{rt}}{R}\right)_+^{p+1}dx$$

$$\leq \frac{1}{2}(\lambda_k-\mu_1)\int_\Omega |w|^2\,dx + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{R^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\frac{w_1}{R}+v_1+\frac{u_{rt}}{R}\right)_+^{p+1}dx \leq$$

$$\leq \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{R^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\frac{w_1}{R}+v_1+\frac{u_{rt}}{R}\right)_+^{p+1}dx.$$

Seja $z_1 = \frac{w_1}{R} \in A := span\{\phi_1,\phi_2,...,\phi_k\}$, e observe que:

$$\|z_1\|_{H_0^1} = \frac{1}{R}\|w_1\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{R}\|w\|_E \leq 1.$$

Agora, seja $R > R_1 > 0$ tal que $\frac{u_{rt}}{R_1} \geq -1$, isto pode ser feito pela continuidade de u_{rt}, assim, com as mesmas notações acima:

$$\int_\Omega \left(\frac{w_1}{R}+v_1+\frac{u_{rt}}{R}\right)_+^{p+1}dx = \int_\Omega \left(z_1+v_1+\frac{u_{rt}}{R}\right)_+^{p+1}dx \geq \int_\Omega (z_1+v_1-1)_+^{p+1}dx.$$

Como v_1 é tal que $\|v_1\|_{H_0^1} = \epsilon$ já escolhido, usando a desigualdade de Hölder e o Lema A.3 (Apêndice A), temos que existe $\eta > 0$ tal que:

$$\int_\Omega (z_1 + v_1 - 1)_+^{p+1} dx \geq C \left(\int_\Omega (z_1 + v_1 - 1)_+^2 dx \right)^{\frac{p+1}{2}} \geq C\eta^{\frac{p+1}{2}} := \eta_1 > 0.$$

Finalmente,

$$I(w + Rv) \leq \frac{R^2}{2} \|v\|_E^2 - \frac{R^{p+1}}{p+1} \int_\Omega \left(z_1 + v_1 + \frac{u_{rt}}{R} \right)_+^{p+1} dx \leq \frac{R^2}{2} \|v\|_E^2 - \frac{R^{p+1}}{p+1} \eta_1.$$

Como $p > 1$, existe $R_2 > R_1$ tal que se $R \geq R_2$ então $I(w + Rv) \leq 0$.

Portanto, todas as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha Generalizado estão satisfeitas, assim, obtemos um segundo valor crítico para o funcional I.

$\square$

Capítulo 2

Soluções para um Sistema envolvendo o expoente crítico de Sobolev via Passo da Montanha

Neste capítulo vamos investigar a existência de múltiplas soluções para o sistema $-\Delta U = AU + [u_+^p \;\; v_+^p]^{\mathbf{T}} + F$ em Ω, onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $1 < p = 2^* - 1$. Sob a hipótese de simetria da matriz A, o Teorema 2.1 garante a existência de pelo menos duas soluções para o sistema. A primeira solução é obtida diretamente tal como no Capítulo 1, observando que a técnica usada não depende da potência da não-linearidade. Sob a hipótese de localização dos autovalores μ_i da matriz A em relação ao espectro do Laplaciano dada por: $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$, a existência da segunda solução é garantida pelo Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale.

Considere o sistema crítico:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} u_+^p \\ v_+^p \end{pmatrix} + F & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $N \geq 3$ é um domínio limitado suave, $p = 2^* - 1$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R)$, $U = (u, v)$ e $F = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$ para algum $s > N$.

Uma segunda solução do sistema (2.1) é da forma $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}) + (u_{rt}, v_{rt})$, onde $(\bar{u}, \bar{v})$ é uma solução do sistema:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} (u+u_{rt})_+^p \\ (v+v_{rt})_+^p \end{pmatrix} & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Logo, uma segunda solução de (2.1) é obtida achando uma solução não nula $(\bar{u}, \bar{v})$ do sistema (2.2). Neste objetivo, recorremos ao Teorema do Passo da Montanha sem a condição (PS) para obter um ponto crítico do funcional dado por:

$$I(U) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU, U) dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*} dx,$$

definido em $E := (H_0^1(\Omega))^2$ com a norma $\|(u,v)\|_E^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.

Note que os pontos críticos de I são soluções fracas de (2.2) e que $U = 0$ é um ponto crítico de I com $I(0) = 0$. Apresentaremos o principal resultado deste capítulo na seguinte forma:

Teorema 2.1 . *(Existência de uma segunda solução)*

Suponhamos que A seja uma matriz simétrica (b=c).

Se adicionarmos à hipótese (I) do Teorema 1.1 as seguintes condições: A dimensão $N > 6$ e $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$, onde μ_1, μ_2 são respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz A, então o sistema (2.1) possui uma segunda solução.

Faremos a demonstração do Teorema 2.1 obedecendo uma seqüência de resultados: o Lema 2.2 garante que o funcional I associado ao sistema (2.2) satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, isto é, existem $\widehat{\rho}$, $\widehat{\alpha} > 0$ tais que:
(i) $I(U) \geq \widehat{\alpha} > 0$, $\forall\, U \in \partial B_{\widehat{\rho}}$,
(ii) Existe $U_0 \in E$ tal que $\|U_0\|_E > \widehat{\rho}$ e $I(U_0) \leq 0$.
Seja $(u_1, v_1) \in E$ tal que $I(u_1, v_1) < 0$, defina:

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) \;: \gamma(0) = 0,\; \gamma(1) = (u_1, v_1)\},$$

e

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)).$$

De (i) vemos que $c > 0$. Usando uma aplicação do Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 4.3 [24]), existe uma seqüência $(U_n) \subset E$ tal que: $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$ (*), onde c satisfaz (pelo Lema 2.3) $c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$ e S é a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$. Usando (*), o lema 2.4 garante que (U_n) é uma seqüência limitada em E.

Então pelo Teorema de imersão de Sobolev, existe uma seqüência também denotada por (U_n), tal que:

$U_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v) =: z$ em E, e $U_n \to z$ em $(L^q(\Omega))^2$, $\quad 2 \leq q < 2^*$.

O Lema 2.5 mostra que o limite fraco z da seqüência (U_n) é uma solução do sistema. Finalmente, usamos o fato que o nível minimax c é menor que $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ e uma caracterização da melhor constante de Sobolev S (Lema 2.6) para mostrar que a solução é não-nula.

Lema 2.2 . *Se $\mu_2 < \lambda_1$, então existe $\rho_0 > 0$ e uma função, $\alpha : [0, \rho_0] \to I\!R^+$ tal que:*

(i) $I(U) \geq \alpha(\rho)$, $\forall\, U \in \partial B_\rho$.

Explicitamente, temos que o valor máximo de $\alpha(\rho)$ é $\widehat{\alpha} = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{N}{2}}$ e este é assumido em $\widehat{\rho} = S^{\frac{N}{4}}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{N-2}{4}}$, onde S é a melhor constante de Sobolev definida por: $S = inf\left\{\|\nabla u\|^2_{L^2} \,/\, \|u\|^2_{L^{2^*}} : u \neq 0, u \in H^1(I\!R^N)\right\}$.

(ii) Existe $U_0 \in E$ tal que $\|U_0\|_E > \widehat{\rho}$ e $I(U_0) \leq 0$.

Demonstração.

Verificação de (i)

Como $A(U,U) \leq \mu_2 |U|^2$ e $(u_{rt}, v_{rt}) < (0,0)$ temos:

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\, dx - \frac{\mu_2}{2}\int_\Omega |U|^2\, dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*} dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1})\, \|(u,v)\|_E^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*} dx.$$

Usando que $\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{2^*} dx \leq \int_\Omega |u|^{2^*} dx \leq S^{\frac{-N}{N-2}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{2^*}{2}} = S^{\frac{-N}{N-2}}\, \|u\|_{H_0^1}^{2^*}$ e uma estimativa análoga para a integral de $(v+v_{rt})_+^{2^*}$, segue que:

$$I(U) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1})\, \|(u,v)\|_E^2 - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*}\left(\left(\|u\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{2^*}{2}} + \left(\|v\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{2^*}{2}}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1})\, \|(u,v)\|_E^2 - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*}\left(\|u\|^2_{H_0^1} + \|v\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{2^*}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1})\, \|(u,v)\|_E^2 - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*}\, \|(u,v)\|_E^{2^*}.$$

Assim, $\alpha(\rho) := \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1})\rho^2 - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*}\rho^{2^*}$ e $\rho = \|(u,v)\|_E$.

Maximizando a função $\alpha(\rho)$ definida acima, temos que para $\rho_0 = \widehat{\rho} = S^{\frac{N}{4}}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{N-2}{4}}$, a função $\alpha : [0, \rho_0] \to I\!R^+$ é tal que: $I(U) \geq \alpha(\rho) \quad \forall\, U \in \partial B_\rho$, e seu valor máximo é:

$\widehat{\alpha} = \alpha(\rho_0) = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{N}{2}}$.

Verificação de (ii)

Fixe $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, 0) \neq (0,0) \in E$ tal que $\int_\Omega (\widetilde{u} - 1)_+^{2^*} > 0$ e seja $s > 0$, assim:

$$I(s\widetilde{U}) = \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla \widetilde{U}|^2 dx - \int_\Omega (A\widetilde{U}, \widetilde{U}) dx\right) - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(\widetilde{u} + \frac{u_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (0 + v_{rt})_+^{2^*} dx.$$

Usando a continuidade (conseqüentemente, pela limitação inferior) da função u_{rt}, escolha $s \geq s_1$ tal que $\frac{u_{rt}(x)}{s_1} \geq -1$, e observe também que a última integral é igual a zero.

Logo, para $s > s_1$,

$$\int_\Omega \left(\widetilde{u} + \frac{u_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} dx \geq \int_\Omega (\widetilde{u} - 1)_+^{2^*} dx > 0.$$

Portanto, vemos que:

$$I(s\widetilde{U}) \leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla \widetilde{U}|^2 dx - \int_\Omega (A\widetilde{U}, \widetilde{U}) dx\right) - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega (\widetilde{u} - 1)_+^{2^*} dx \to -\infty$$

quando $s \to \infty$. $\square$

Pelo Lema 2.2 acima, usando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz sem a condição $(PS)_c$ (veja [24]), existe uma seqüência (U_n) satisfazendo a condição $(PS)_c$, isto é, $(U_n) \subset E$ tal que: $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$ quando $n \to \infty$, onde c é caracterizado por:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) \ : I(\gamma(0)) = 0, \ I(\gamma(1)) \leq 0\}.$$

Lema 2.3. *Suponha que a dimensão $N > 6$ e $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$.*

Então o nível c verifica a seguinte desigualdade:

$$0 < c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Para mostrar este resultado, é suficiente exibir $(u_0, v_0) \neq (0,0) \in E$ tal que:

$$\sup_{t \geq 0} I(t(u_0, v_0)) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{2.3}$$

De fato, suponha que (2.3) ocorra, assim, para (u_0, v_0) dado acima, existe $R > 0$ tal que: $\|R(u_0, v_0)\| > \widehat{\rho}$ e $I(R(u_0, v_0)) < 0$. Definindo $(u_1, v_1) := R(u_0, v_0)$ temos:

$$\sup_{t\geq 0} I(t(u_1, v_1)) = \sup_{t\geq 0} I(tR(u_0, v_0)) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Como

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

para $\gamma(t) = t(u_1, v_1)$ com $I(\gamma(0)) = 0$ e $I(\gamma(1)) = I(R(u_0, v_0)) < 0$, temos que:

$$0 < \widehat{\alpha} \leq c \leq \sup_{t\in[0,1]} I(t(u_1, v_1)) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Assim, nosso objetivo é mostrar que existe $(u_0, v_0) \neq (0, 0) \in E$ satisfazendo (2.3), com essa finalidade necessitamos lembrar de alguns resultados.

Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$, considere a função cut-off $\Psi \in C_c^\infty(I\!R^N)$ com suporte compacto em $B_{2R} \subset \Omega$ tal que: $\Psi \equiv 1$ sobre B_R e $0 \leq \Psi \leq 1$ sobre B_{2R}.

Dado $\epsilon > 0$, defina:

$$\Psi_\epsilon(x) := \Psi(x) U_\epsilon(x),$$

onde

$$U_\epsilon(x) := \frac{(\epsilon N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, x \in I\!R^N$$

satisfaz: $-\Delta U_\epsilon = U_\epsilon^{2^*-1}$ em $I\!R^N$ e $\|U_\epsilon\|^2_{H_0^1(I\!R^N)} = \|U_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(I\!R^N)} = S^{\frac{N}{2}}$.

Agora, defina a função vetorial dada por:

$$\vec{u}_\epsilon(x) := \Psi_\epsilon(x)\ (0, 1)\ .$$

Demonstração do Lema 2.3. Seja $(u_0, v_0) = \vec{u}_\epsilon = (0, \Psi_\epsilon) \in E$ (ver Lemas (B.2), (B.3) do Apêndice B).

Assim,

$$I(s\vec{u}_\epsilon) = \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{u}_\epsilon|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (A(s\vec{u}_\epsilon), (s\vec{u}_\epsilon))dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (s\ 0 + u_{rt})_+^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (s\Psi_\epsilon + v_{rt})_+^{2^*} dx \leq$$

$$\leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{u}_\epsilon|^2 dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |s\vec{u}_\epsilon|^2 dx \leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{u}_\epsilon|^2 dx,$$

onde, na última desigualdade foi usado a hipótese que $\mu_1 > 0$.

Defina

$$\delta^2 := \sup_{0<\epsilon\leq 1} \int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 dx.$$

(1º *caso*) Se $0 \leq s \leq s_0 := \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$.

$$I(s\vec{u}_\epsilon) \leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 dx \leq \frac{s^2}{2}\delta^2 \leq \widehat{\alpha} = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)^{\frac{N}{2}} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

(2º *caso*) Se $s \geq s_0 := \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$.

Seja $K := sup\left\{\left\|\frac{(u_{rt},v_{rt})}{s}\right\|_{(L^\infty)^2} \ : \ s \geq s_0\right\} > 0$ e defina o conjunto

$$\Omega_{\epsilon,k} := \{x\in\Omega \ : \ \Psi_\epsilon(x) > K\}.$$

Observe que $\Psi_\epsilon(0) = \Psi(0)U_\epsilon(0) = \left(\frac{N(N-2)}{\epsilon}\right)^{\frac{N-2}{4}} > K$ para ϵ suficientemente pequeno, assim, pela continuidade de Ψ_ϵ existe $R = R(\epsilon) > 0$ tal que $B_R(0) \subset \Omega_{\epsilon,k}$.

Portanto,

$$I(s\vec{u}_\epsilon) = \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (A(s\vec{u}_\epsilon),(s\vec{u}_\epsilon))dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (s\ 0 + u_{rt})_+^{2^*}dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (s\Psi_\epsilon + v_{rt})_+^{2^*}dx \leq$$

$$\leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 dx - \frac{\mu_1 s^2}{2}\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2 dx - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(\Psi_\epsilon + \frac{v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} dx.$$

Usando os Lemas B.2 e B.3 temos:

$I(s\vec{u}_\epsilon) \leq$

$$\frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 - \frac{\mu_1 s^2}{2}\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2 - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon} |\Psi_\epsilon|^{2^*} - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{v_{rt}}{s}\right|^{2^*} + \widetilde{c}\,\frac{s^{2^*}}{2^*}\left(\|\Psi_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1} + \|\Psi_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right)$$

$$\leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 - \mu_1\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2\right) - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon} |\Psi_\epsilon|^{2^*} + cs^{2^*}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} := \Phi_\epsilon(s).$$

Aplicando o Lema B.4 à função Φ_ϵ com

$$A = \int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 - \mu_1\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2,$$

$$B = \int_{\Omega_\epsilon} |\Psi_\epsilon|^{2^*} \quad e \quad \alpha = \frac{N-2}{2},$$

obtemos,

$$\Phi_\epsilon(s) \leq \Phi_\epsilon(s_\epsilon) = \frac{1}{N}\left(\frac{A^N}{B^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}} + O(\epsilon^\alpha) = \frac{1}{N}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 - \mu_1\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\Omega_\epsilon}|\Psi_\epsilon|^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{2}}} + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Usando os Lemas B.2 e B.3 segue que:

$$\Phi_\epsilon(s) \leq \frac{1}{N}\frac{\left(S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}) - \mu_1 d\epsilon^2 + O\left(\epsilon^{N-2}\right)\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N}) + O(\epsilon^{N-2})\right)^{\frac{N-2}{2}}} + \ O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - \mu_1 O\left(\epsilon^2\right) + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Assim,

$$I(s\vec{u}_\epsilon) \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - \mu_1 O\left(\epsilon^2\right) + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Como $N > 6$, (ou $\frac{N-2}{2} > 2$) temos que:

$$-\mu_1\ O\left(\epsilon^2\right) + O\left(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) < 0$$

para $0 < \epsilon < 1$ suficientemente pequeno.

Logo, $I(s\vec{u}_\epsilon) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} \quad \forall s \geq 0$, e conseqüentemente

$$\sup_{s\geq 0} I(s\vec{u}_\epsilon) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

□

LEMA 2.4. *Suponhamos $N > 6$, $\mu_2 < \lambda_1$ e que (U_n) seja uma seqüência $(PS)_c$, então (U_n) é limitada em $E = (H_0^1(\Omega))^2$.*

Demonstração. Sabemos que:

$$I(U_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n, U_n) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*} = c + o(1),$$

$$\langle I'(U_n), \Psi\rangle = \int_\Omega \nabla U_n \nabla\Psi - \int_\Omega (AU_n, \Psi) - \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1}\varphi - \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1}\xi = o(1)\left\|\Psi\right\|_E$$

$\forall\ \Psi = (\varphi, \xi) \in E = (H_0^1)^2$, e c é o nível minimax.

Agora,

$$I(U_n) - \frac{1}{2}\left\langle I'(U_n)U_n\right\rangle =$$

$$= -(\frac{1}{2} - \frac{1}{N})\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{N})\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1}u_n + \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1}v_n.$$

Observando que:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}u_n = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}\left[(u_n+u_{rt})-u_{rt}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}\left[(u_n+u_{rt})_+-(u_n+u_{rt})_- - u_{rt}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}u_{rt},$$

usando uma expressão análoga para $\frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n$, segue que:

$$I(U_n) - \frac{1}{2}\langle I'(U_n)U_n\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*} + \frac{1}{N}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}u_{rt} - \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_{rt} \leq$$

$$\leq c + o(1) + \epsilon_n \left\|U_n\right\|_E.$$

Assim,

$$\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*}\ ,\ \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} \leq c + o(1) + \epsilon_n \left\|U_n\right\|_E.$$

Isto implica que:

$$\left(\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*}\right)^{\frac{N+2}{N}}\ ,\ \left(\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*}\right)^{\frac{N+2}{N}} \leq K + \epsilon_n \left\|U_n\right\|_E^{\frac{N+2}{N}}. \tag{2.4}$$

Como $\langle I'(U_n),\Psi\rangle = \epsilon_n \left\|\Psi\right\|_E\ \forall\ \Psi=(\varphi,\xi)\in E=(H_0^1)^2$, tomando em particular $\Psi=(u_n,v_n)=U_n\in E$ temos:

$$\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \int_\Omega (AU_n,U_n) = \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}u_n + \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n + \epsilon_n \left\|U_n\right\|_E.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \int_\Omega (AU_n,U_n) \geq \int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \mu_2\int_\Omega |U_n|^2 \geq \left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\left\|U_n\right\|_E^2.$$

Portanto,

$$\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\left\|U_n\right\|_E^2 \leq \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}u_n + \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n + \epsilon_n \left\|U_n\right\|_E \leq$$

$$\leq \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}u_n + \epsilon_n \left\|u_n\right\|_{H_0^1} + \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n + \epsilon_n \left\|v_n\right\|_{H_0^1}. \tag{2.5}$$

Usando as desigualdades de Hölder, Young, (2.4) e a imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ em cada integral do lado direito da desigualdade acima, obtemos:

$$\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} u_n + \epsilon_n \|u_n\|_{H_0^1} \leq \|(u_n + u_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} \|u_n\|_{L^{2^*}} + \epsilon_n \|u_n\|_{H_0^1} \leq$$

$$\leq \epsilon \left(\int_\Omega |u_n|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} + C_\epsilon \left(\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*} \right)^{\frac{N+2}{N}} + \epsilon_n \|u_n\|_{H_0^1} \leq$$

$$\leq c\, \epsilon \|u_n\|_{H_0^1}^2 + C_\epsilon + \epsilon_n \left(\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \|u_n\|_{H_0^1} \right). \tag{2.6}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} v_n + \epsilon_n \|v_n\|_{H_0^1} \leq c\, \epsilon \|v_n\|_{H_0^1}^2 + C_\epsilon + \epsilon_n \left(\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \|v_n\|_{H_0^1} \right). \tag{2.7}$$

Usando as desigualdades (2.5), (2.6) e (2.7) temos:

$$\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right) \|U_n\|_E^2 \leq \epsilon\, c \|U_n\|_E^2 + 2C_\epsilon + \epsilon_n \left(2 \|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \|u_n\|_{H_0^1} + \|v_n\|_{H_0^1} \right).$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2c}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right) > 0$, segue que:

$$\|U_n\|_E^2 \leq C + C \left(\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \|U_n\|_E \right).$$

Como $N > 6 \Rightarrow \frac{N+2}{N} < 2$, segue que a seqüência (U_n) é limitada em $E = (H_0^1(\Omega))^2$.

$\square$

Portanto, podemos assumir que:
$U_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) =: z$ em E,
$U_n \to z$ em $(L^q(\Omega))^2$, $2 \leq q < 2^*$,
$U_n \to z$ qtp em Ω, quando $n \to \infty$.

Lema 2.5. *z=(u,v) é solução fraca do sistema (2.2).*

Demonstração. Sabemos que:

$$\left\|(u_n + u_{rt})_+^{2^*-1}\right\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}}^{\frac{2^*}{2^*-1}} = \|(u_n + u_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq C \|(u_n + u_{rt})_+\|_{H_0^1}^{2^*} \leq K,$$

$$(u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} \to (u + u_{rt})_+^{2^*-1} \; qtp \; em \; \Omega.$$

Passando à uma subseqüência, segue-se que $(u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} \rightharpoonup (u + u_{rt})_+^{2^*-1}$ em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$, isto é,

$$\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1}\varphi \to \int_\Omega (u + u_{rt})_+^{2^*-1}\varphi, \;\; \forall\, \varphi \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}.$$

Analogamente vale o mesmo resultado para $(v_n + v_{rt})_+^{2^*-1}$. Assim, observando que se $\varphi \in H_0^1$ então $\varphi \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$, passando ao limite em:

$\langle I'(U_n), (\varphi, \xi)\rangle =$

$$= \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi + \int_\Omega \nabla v_n \nabla \xi - \int_\Omega (A(u_n, v_n), (\varphi, \xi)) - \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1}\varphi - \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1}\xi,$$

obtemos:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega \nabla v \nabla \xi - \int_\Omega (A(u, v), (\varphi, \xi)) - \int_\Omega (u + u_{rt})_+^{2^*-1}\varphi - \int_\Omega (v + v_{rt})_+^{2^*-1}\xi = 0$$

$\forall\;(\varphi, \xi) \in E = (H_0^1)^2$, ou seja, $z = (u, v)$ é ponto crítico de I. Logo, $z = (u, v)$ é solução fraca do sistema (2.2).

$\square$

Agora mostraremos um Lema de caracterização da melhor constante de Sobolev S e este resultado será bastante útil neste e nos próximos capítulos.

Lema 2.6 .

(i) Existe $C > 0$ tal que:

$$\left(\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right)\right)^{\frac{1}{2^*}} \le C \left\|(u, v)\right\|_E .$$

(ii) Defina

$$\widetilde{S} := \inf_{(0,0)\neq(u,v)\in E} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2}{\left(\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right)\right)^{\frac{2}{2^*}}} \right\}.$$

Então $\widetilde{S} = S$, onde S é a melhor constante de Sobolev definida anteriormente.

Demonstração.

(i)

$$\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right) = \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*} + \|v\|_{L^{2^*}}^{2^*} \le \widetilde{C}\left(\|u\|_{H_0^1}^{2^*} + \|v\|_{H_0^1}^{2^*}\right) =$$

$$= \widetilde{C}\left(\|u\|_{H_0^1}^{2\frac{2^*}{2}} + \|v\|_{H_0^1}^{2\frac{2^*}{2}}\right) \le \widetilde{C}\left(\|u\|_{H_0^1}^{2} + \|v\|_{H_0^1}^{2}\right)^{\frac{2^*}{2}}.$$

(ii) Seja

$$X := \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2}{\left(\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right)\right)^{\frac{2}{2^*}}} \ : \ (u,v) \in E, \ (u,v) \neq (0,0) \right\}.$$

Tomando $(u,v) = (u,0) \in E$, temos que:

$$\widetilde{S} = infX \leq \frac{\|u\|^2_{H^1_0}}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}}, \ \ \forall\, u \in H^1_0.$$

Assim, $\widetilde{S}$ é cota inferior para:

$$Y := \left\{ \frac{\|u\|^2_{H^1_0}}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}}} \ : \ 0 \neq u \in H^1_0 \right\}.$$

Como $S = infY$, segue que $\widetilde{S} \leq S$.

Por outro lado, observe que: se $a \geq 0, \ 0 < p < 1$, para $t > 0$ temos que: $(a+t)^{p-1} \leq t^{p-1}$. Assim, integrando na variável t de 0 à $b \geq 0$, segue que $(a+b)^p \leq a^p + b^p$. Usaremos este resultado para mostrar que: $S \leq \widetilde{S}$, de fato:

$$\left(\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right)\right)^{\frac{2}{2^*}} = \left(\int_\Omega |u|^{2^*} + \int_\Omega |v|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} + \left(\int_\Omega |v|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq$$

$$\leq S^{-1}\int_\Omega |\nabla u|^2 + S^{-1}\int_\Omega |\nabla v|^2 = \frac{1}{S}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2\right).$$

Assim,

$$S \leq \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2}{\left(\int_\Omega \left(|u|^{2^*} + |v|^{2^*}\right)\right)^{\frac{2}{2^*}}} \ : \ \ (u,v) \neq (0,0) \right\},$$

e conseqüentemente $S \leq \widetilde{S}$.

□

Demonstração do Teorema 2.1

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo a valer o Lema 2.3. Pelo Lema 2.2 existe uma seqüência $(U_n) \subset E$ tal que $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$. Portanto, o Lema 2.4 garante que (U_n) é limitada em E. Logo, como observamos anteriormente, podemos assumir que:

$U_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v) =: z$ em E.

Para finalizar a prova do Teorema 2.1 basta mostrarmos que a solução $z = (u,v)$ obtida (veja Lema 2.5) como limite fraco de uma seqüência (PS) é não-nula. Este resultado é o que diz o seguinte Lema:

LEMA 2.7 . *A solução $z = (u,v)$ obtida como limite fraco de uma seqüência (PS) no nível minimax c é não-nula.*

Demonstração. De fato, pelo Lema de Brézis-Lieb [6], temos que:

$$\|(u_n + u_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \|(u_n - u)_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} = \|(u + u_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1),$$
$$\|(v_n + v_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \|(v_n - v)_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} = \|(v + v_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1), \tag{2.8}$$

onde $o(1) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Usando as expressões (2.8), segue que:

$$I(U_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*} =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n - u)_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u + u_{rt})_+^{2^*} -$$
$$- \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v + v_{rt})_+^{2^*} + o(1).$$

Como $I(z) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (Az,z) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*}$, usando a equação acima temos:

$$I(U_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n - u)_+^{2^*} -$$
$$- \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} + I(z) - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (Az,z) + o(1) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla U_n|^2 - |\nabla z|^2\right) + I(z) - \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^2 - u^2) - \frac{d}{2}\int_\Omega (v_n^2 - v^2) -$$
$$- b\int_\Omega (u_n v_n - uv) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n - u)_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} + o(1).$$

Usando os fatos: $u_n \to u$, $v_n \to v$ em $L^2(\Omega)$ na última igualdade obtemos:

$$I(U_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla U_n|^2 - |\nabla z|^2\right) + I(z) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n - u)_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} + o(1). \tag{2.9}$$

Por outro lado:

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 - 2\int_\Omega \nabla u_n \nabla u + \int_\Omega |\nabla u|^2 .$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ segue que:

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2 - \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \to -\int_\Omega |\nabla u|^2 .$$

Assim,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2 - |\nabla u|^2) = \int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2 + o(1).$$

Analogamente,

$$\int_\Omega (|\nabla v_n|^2 - |\nabla v|^2) = \int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2 + o(1). \tag{2.10}$$

Pelas equações (2.9) e (2.10) obtemos:

$$I(U_n) = I(z)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n-u)_+^{2^*}-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*}+o(1). \tag{2.11}$$

Similarmente, temos que:

$$\langle I'(U_n), U_n\rangle = \int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2 + \int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2 - \int_\Omega (u_n-u)_+^{2^*} -$$

$$- \int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*} + \int_\Omega (u_n-u)_+^{2^*-1}u_{rt} + \int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*-1}v_{rt} + o(1). \tag{2.12}$$

Afirmamos que: $\int_\Omega (u_n-u)_+^{2^*-1}u_{rt}$, $\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*-1}v_{rt} \to 0$, quando $n\to\infty$.

De fato, $\left|\int_\Omega (u_n-u)_+^{2^*-1}u_{rt}\right| \le \left\|(u_n-u)_+^{2^*-1}\right\|_{L^q} \|u_{rt}\|_{L^p} = \|(u_n-u)\|_{L^{q(2^*-1)}}^{2^*-1} \|u_{rt}\|_{L^p}$.
Como $u_n - u \in L^r$, $\forall\, 2 \le r < 2^*$, escolha $r = q(2^*-1)$ tal que $1/q + 1/p = 1$ com $p, q > 1$, assim, como $u_n \to u$ em L^r, temos que:

$$\int_\Omega (u_n-u)_+^{2^*-1}u_{rt} \to 0.$$

Analogamente,

$$\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*-1}v_{rt} \to 0 \tag{2.13}$$

quando $n \to \infty$.

Usando (2.13) e o fato que $I'(U_n) \to 0$, pela equação (2.12) obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2 + \int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2 = \int_\Omega (u_n-u)_+^{2^*} + \int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*} + o(1). \tag{2.14}$$

Observe que $\int_\Omega (u_n-u)_+^{2^*}$, $\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*}$ são limitadas, pois, $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ e $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ em H_0^1.

Sejam, $p_n := u_n - u$ e $w_n := v_n - v$.

Passando o limite na equação (2.14),

$$lim \int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2 + lim \int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2 = lim \int_\Omega |\nabla p_n|^2 + lim \int_\Omega |\nabla w_n|^2 := K \geq 0.$$

($1^{\underline{o}}$ *caso*) Se $K=0$, segue que $\|u_n-u\|_{H_0^1}^2 + \|v_n-v\|_{H_0^1}^2 \to 0$, assim, $U_n \to z$ forte em $E=(H_0^1)^2$.

Logo, usando as equações (2.11), (2.14) e $K=0$ temos que $I(U_n) \to I(z)$. Por outro lado, $I(U_n) \to c$, assim, $I(z) = c \geq \widehat{\alpha} > 0$, e conseqüentemente, $z \neq 0$.

($2^{\underline{o}}$ *caso*) Se $K>0$. Usando a notação $p_n := u_n - u$ e $w_n := v_n - v$ na equação (2.14), vemos que:

$$\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 = \int_\Omega (p_n)_+^{2^*} + \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} + o(1).$$

Pelo Lema 2.6, obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \geq S\left(\int_\Omega \left(|p_n|^{2^*} + |w_n|^{2^*}\right)\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Assim, unindo as duas últimas expressões, temos que:

$$\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \geq S\left(\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 - o(1)\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Portanto, passando o limite quando $n \to \infty$ segue que $K \geq SK^{\frac{N-2}{N}}$, ou seja:

$$K \geq S^{\frac{N}{2}}. \tag{2.15}$$

Suponha por contradição que $z=(u,v)=(0,0)$. Usando a notação acima e as equações (2.11) e (2.14), temos que:

$$c+o(1) = I(U_n) = I(z) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (p_n)_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (w_n)_+^{2^*} + o(1) =$$

$$= I(z) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\left[\int_\Omega (p_n)_+^{2^*} + \int_\Omega (w_n)_+^{2^*}\right] + o(1) = I(z) + \frac{1}{N}\left(\int_\Omega (p_n)_+^{2^*} + \int_\Omega (w_n)_+^{2^*}\right) + o(1).$$

Passando o limite quando $n \to \infty$ e observando que se $z=(u,v)=(0,0)$ então $I(z)=0$, vemos por (2.14) e (2.15) que:

$$c = \frac{1}{N}K \geq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}},$$

o que é uma contradição, pois, o Lema 2.3 garante que $c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

Com esse argumento finalizamos a prova do lema e como conseqüência a prova do Teorema 2.1.

$\square$

Observação 7 : *Na prova do Teorema 2.1 destacamos o Lema 2.7 que será usado no próximo capítulo.*

Observação 8 : *É importante lembrar que a solução $z = (u, v)$ obtida via Teorema do Passo da Montanha não pode ser negativa. De fato, sabemos que $z = (u, v) \neq (0, 0)$ é solução do sistema:*

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} (u + u_{rt})_+^p \\ (v + v_{rt})_+^p \end{pmatrix} & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora, se $z = (u, v) < (0, 0)$, então z satisfaz o sistema linear:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

o que é impossível, pois $(0, 0)$ é a única solução do sistema acima (veja Apêndice A).

Observação 9 : *Observe que a condição $(PS)_c$ é satisfeita pelo funcional I para todo $c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$. De fato, pelas equações (2.11) e (2.14) temos que:*

$$I(U_n) = I(z) + \frac{1}{N}\|U_n - z\|_E^2 + o(1).$$

Assim,

$$\frac{1}{N}\|U_n - z\|_E^2 = I(U_n) - I(z) + o(1) \leq I(U_n) + o(1) \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

Portanto $\|U_n - z\|_E^2 \leq Nc < S^{\frac{N}{2}}$, e isto implica que $S^{\frac{-N}{N-2}}\|U_n - z\|_E^{2^*-2} < 1$.

Por outro lado, usando o Lema 2.6, a estimativa acima e a equação (2.14), segue que:

$$\|U_n - z\|_E^2\left(1 - S^{\frac{-N}{N-2}}\|U_n - z\|_E^{2^*-2}\right) \leq \|U_n - z\|_E^2 - \int_\Omega \left(|u_n - u|^{2^*} + |v_n - v|^{2^*}\right) \leq$$

$$\leq \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 + \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 - \int_\Omega (u_n - u)_+^{2^*} - \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} = o(1),$$

logo $U_n \to z$ *em* E.

Capítulo 3

Soluções para um Sistema envolvendo o expoente crítico de Sobolev via Teorema de Enlace

Neste capítulo consideramos o sistema crítico:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} u_+^p \\ v_+^p \end{pmatrix} + F & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $N \geq 3$ é um domínio limitado suave, $p = 2^* - 1$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R)$, $U = (u, v)$ e $F = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$ para algum $s > N$.

Nosso objetivo é investigar a existência de múltiplas soluções para o sistema (3.1) no caso em que $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, onde μ_1, μ_2 são respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz A.

Novamente, a primeira solução $(u_{rt}, v_{rt}) < (0, 0)$ é obtida de forma direta observando que uma solução negativa satisfaz o sistema linear não-homogêneo $-\Delta U = AU + F$ (veja Capítulo 1). Lembramos que se $(\bar{u}, \bar{v}) \neq (0, 0)$ é uma solução de:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} (u + u_{rt})_+^p \\ (v + v_{rt})_+^p \end{pmatrix} & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $p = 2^* - 1$, então uma segunda solução do sistema (3.1) é dada por:
$(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}) + (u_{rt}, v_{rt})$, assim, basta obtermos uma solução de (3.2).

Neste objetivo, usamos um Teorema de Enlace (”Linking”) sem a condição de Palais-Smale para obter um ponto crítico do funcional transladado I centrado em (u_{rt}, v_{rt}), associado ao sistema (3.2). Para isso, mostramos que o funcional I satisfaz a geometria requerida pelo Teorema Linking de Rabinowitz [26].

O principal resultado do Capítulo 3 é o seguinte teorema:

TEOREMA 3.1 .*(Existência de uma segunda solução)*

Suponhamos que A seja uma matriz simétrica (b=c).

Se adicionarmos à hipótese (II) *do Teorema 1.2 as seguintes condições: A dimensão* $N > 6$ *e* $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, *onde* μ_1, μ_2 *são respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz A, então o sistema (3.1) possui uma segunda solução.*

Seja $E := (H_0^1(\Omega))^2$ com a norma $\|(u,v)\|_E^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.

Considere o funcional $I : E \longrightarrow I\!R$ dado por:

$$I(U) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU,U)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{2^*}dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*}dx.$$

Note que os pontos críticos de I são soluções fracas de (2.2), e que $U = 0$ é um ponto crítico de I com $I(0) = 0$.

Faremos a demonstração do Teorema 3.1 como fizemos no Capítulo 2, obedecendo uma seqüência de resultados: os Lemas 3.2 e 3.3 garantem que o funcional I associado ao sistema (3.2) satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha Generalizado de Rabinowitz [26], assim, usando uma aplicação do Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 4.3 [24] ou Teorema 5.1 [15]), existe uma seqüência $(U_n) \subset E$ tal que: $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$ (*), onde c satisfaz (pelo Lema 3.4)

$$0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$$

e S é a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$. Usando (*), o Lema 3.5 garante que (U_n) é uma seqüência limitada em E. Então pelo Teorema de Imersão de Sobolev, existe uma seqüência também denotada por (U_n), tal que: $U_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v) =: z$ em E, e $U_n \to z$ em $(L^q(\Omega))^2, \quad 2 \leq q < 2^*$. O Lema 3.6 mostra que o limite fraco z da seqüência (U_n) é uma solução do sistema. Finalmente, usamos o fato que o nível mini-max c é menor que $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ e uma caracterização da constante de Sobolev S (Lema 2.6 do capítulo 2) para mostrar que a solução é não-nula.

Assim, sejam $E^- := \langle (0,\phi_i), (\phi_i, 0)\rangle_{1 \leq i \leq k}$ e $E^+ := (E^-)^\perp$.

LEMA 3.2. *Se $\mu_2 < \lambda_{k+1}$, então existe $\rho_0 > 0$ e uma função $\alpha : [0, \rho_0] \to I\!R^+$ tal que:*

$$I(U) \geq \alpha(\rho) \quad \forall\, U \in \partial B_\rho \cap E^+.$$

Explicitamente, temos que o valor máximo de $\alpha(\rho)$ é $\widehat{\alpha} = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{N}{2}}$ e este é assumido em $\widehat{\rho} = S^{\frac{N}{4}} \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{N-2}{4}}$, onde S é a melhor constante de Sobolev definida por: $S = inf\left\{ \|\nabla u\|_{L^2}^2 \,/\, \|u\|_{L^{2^*}}^2 : u \neq 0, u \in H^1(I\!R^N) \right\}$.

Demonstração. Como $A(U,U) \leq \mu_2 \left|U\right|^2$ temos que:

$$I(U) \geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla U|^2\, dx - \frac{\mu_2}{2} \int_\Omega |U|^2\, dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (u + u_{rt})_+^{2^*} dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (v + v_{rt})_+^{2^*} dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla U|^2\, dx - \frac{\mu_2}{2\lambda_{k+1}} \int_\Omega |\nabla U|^2\, dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (u + u_{rt})_+^{2^*} dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega (v + v_{rt})_+^{2^*} dx.$$

Usando o fato que $(u_{rt}, v_{rt}) < (0,0)$ obtemos:

$$\int_\Omega (u + u_{rt})_+^{2^*} dx \leq \int_\Omega |u|^{2^*} dx \leq S^{\frac{-N}{N-2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right)^{\frac{2^*}{2}} = S^{\frac{-N}{N-2}} \|u\|_{H_0^1}^{2^*}$$

e uma estimativa análoga para a integral de $(v + v_{rt})_+^{2^*}$.

Assim:

$$I(U) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}) \|(u,v)\|_E^2 - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*} \left(\left(\|u\|_{H_0^1}^2 \right)^{\frac{2^*}{2}} + \left(\|v\|_{H_0^1}^2 \right)^{\frac{2^*}{2}} \right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}) \|(u,v)\|_E^2 - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*} \|(u,v)\|_E^{2^*} = \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}})\rho^2 - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*} \rho^{2^*} := \alpha(\rho),$$

onde $\rho = \|(u,v)\|_E$.

Maximizando $\alpha(\rho)$, temos que para $\rho_0 = \widehat{\rho} = S^{\frac{N}{4}} \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{N-2}{4}}$, a função $\alpha : [0, \rho_0] \to I\!R^+$ é tal que: $I(U) \geq \alpha(\rho) \quad \forall\, U \in \partial B_\rho \cap E^+$ e seu valor máximo é: $\widehat{\alpha} = \alpha(\rho_0) = \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{N}{2}}$. □

Sejam $R, r > 0$, nosso objetivo é escolher $Q = [0, Re] \oplus (\bar{B}_r \cap E^-)$ e $\rho > 0$ tais que:

(A) $\qquad I\big|_{\partial S_\rho} \geq \alpha > 0, \;\; \rho < R$, onde $S_\rho = \partial B_\rho \cap E^+$,

(B) $\quad I\,|_{\,\partial Q} < \alpha,$

(C) $\quad \max_{\bar{Q}} I < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$

A condição (C) é usada para provar que a solução obtida como limite fraco de uma seqüência (PS) no nível minimax é não trivial.

Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$, considere a função cut-off $\Psi \in C_c^{\infty}(I\!R^N)$ com suporte compacto em $B_{2R} \subset \Omega$ tal que: $\Psi \equiv 1$ sobre B_R e $0 \leq \Psi \leq 1$ sobre B_{2R}.

Dado $\epsilon > 0$, defina:

$$\Psi_\epsilon(x) := \Psi(x) U_\epsilon(x),$$

onde

$$U_\epsilon(x) := \frac{(\epsilon N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\ , x\ \in I\!R^N,$$

satisfaz: $-\Delta U_\epsilon = {U_\epsilon}^{2^*-1}$ em $I\!R^N$ e $\|U_\epsilon\|^2_{H_0^1(I\!R^N)} = \|U_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(I\!R^N)} = S^{\frac{N}{2}}$.

Agora, defina a função vetorial dada por:

$$\vec{u}_\epsilon(x) := \Psi_\epsilon(x)\ (0,1)\ .$$

Denote por P_- a projeçâo ortogonal de H_0^1 em $B := span\,\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\}$ e P_+ a projeçâo ortogonal de H_0^1 em $A := B^\perp$.

Assim, escolha e dependendo de ϵ a função vetorial da forma:

$$e = \vec{e_\epsilon} = (0, P_+\Psi_\epsilon) \in E^+.$$

Neste capítulo usaremos a notação e_ϵ para denotar a segunda coordenada do vetor $\vec{e_\epsilon}$, ou seja, $e_\epsilon := P_+\Psi_\epsilon$.

Observação 10 *:*
$P_+\Psi_\epsilon \in A$ *e* $\langle (0, P_+\Psi_\epsilon), (0, \phi_j) \rangle_{(L^2)^2} = \int_\Omega P_+\Psi_\epsilon . \phi_j\, dx = 0,\ j = 1, ..., k,$ *logo* $\quad e \in E^+$.

Lema 3.3*. Se* $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$*, então existem* $r_0, R_0 > 0$ *e* $\epsilon_0 > 0$ *tais que para* $r \geq r_0, R \geq R_0$ *e* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ *nós temos:*

$$I\,|_{\,\partial Q} < \alpha,$$

onde $\alpha > 0$ *é determinado no Lema 3.2.*

Demonstração. Seja $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, onde:
$\Gamma_1 = \bar{B_R} \cap E^-$,
$\Gamma_2 = \{v \in (H_0^1(\Omega))^2 \ / \ v = w + s\vec{e_\epsilon}, \ com \ w \in E^-, \ \|w\|_E = r, \ 0 \leq s \leq R\}$,
$\Gamma_3 = \{v \in (H_0^1(\Omega))^2 \ / \ v = w + R\vec{e_\epsilon}, \ com \ w \in E^- \cap B_r(0)\}$.
Mostraremos que sobre cada Γ_i, temos: $I \mid_{\Gamma_i} < \alpha, \ i = 1, 2, 3.$

(i) Para $v \in \Gamma_1$ ($\subset E^-$).

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (Av, v)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_1 + u_{rt})_+^{2^*} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_2 + v_{rt})_+^{2^*} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (Av, v)dx \leq \frac{\lambda_k}{2}\int_\Omega |v|^2 \, dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |v|^2 \, dx = \frac{1}{2}(\lambda_k - \mu_1)\int_\Omega |v|^2 \, dx \leq 0.$$

(ii) Para $v \in \Gamma_2$, nós distingüimos dois casos:
Defina

$$\delta^2 := \sup_{0<\epsilon\leq 1}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2 dx.$$

(1º *caso*) Se $0 \leq s \leq s_0 := \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$, onde $\widehat{\alpha}$ é dado no Lema 3.2.

$$\begin{aligned} I(v) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w + s\vec{e_\epsilon})|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (A(w + s\vec{e_\epsilon}), (w + s\vec{e_\epsilon}))dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w + s\vec{e_\epsilon})|^2 \, dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w + s\vec{e_\epsilon}|^2 \, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2 \, dx - \frac{\mu_1}{2\lambda_k}\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Conseqüentemente

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k}\right) r^2 + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2 \, dx \leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2 \, dx \leq \frac{s^2}{2}\delta^2 \leq \widehat{\alpha}.$$

(2º *caso*) Se $s \geq s_0 := \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$, denote:

$$K := sup\left\{ \left\| \frac{w + (u_{rt}, v_{rt})}{s} \right\|_{(L^\infty)^2} \ : \ s_0 \leq s \leq R, \ \|w\|_E = r, \ w \in E^- \right\}.$$

$K > 0$ independe de R. Como $P_+\Psi_\epsilon(0) \to \infty$, quando $\epsilon \to 0$, existe $\epsilon_0' > 0$ tal que $\forall \ \epsilon, \ 0 < \epsilon < \epsilon_0'$ e $s \geq s_0$ temos:

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \ / \ e_\epsilon(x) := P_+\Psi_\epsilon(x) > K\} \neq \phi.$$

Analogamente como fizemos no 1º *caso* temos:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (Av,v)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_2+v_{rt})_+^{2^*}dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*}dx.$$

Assim, pelos Lemas C.4, C.2 e C.1 (veja Apêndice C) segue que:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{s^2}{2}S^{\frac{N}{2}} + \frac{s^2}{2}O(\epsilon^{N-2}) + \frac{s^2}{2}c\,\epsilon^{N-2} -$$

$$-\frac{s^{2^*}}{2^*}\left(\int_{\Omega_\epsilon}|e_\epsilon|^{2^*} + \int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{w_2+v_{rt}}{s}\right|^{2^*} - c\left(\|e_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1} + \|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right)\right).$$

Usando o Lema C.3 e novamente o Lema C.1 obtemos:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{s^2}{2}S^{\frac{N}{2}} - \frac{s^{2^*}}{2^*}S^{\frac{N}{2}} + c\,s^{2^*}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} := \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2 + \Phi_\epsilon(s).$$

Aplicando o Lema B.4 (do Apêndice B) à $\Phi_\epsilon(s)$ obtemos:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\left(S^{\frac{N}{2}}\right)^N}{\left(S^{\frac{N}{2}}\right)^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}} + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{1}{2}S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Como $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2 \to -\infty$ quando $r \to \infty$, podemos escolher $r > 0$ tal que $I(v) < 0$, isto determina $r = r_0$.

(iii) Para $v \in \Gamma_3$, temos que $v = w + R\vec{e_\epsilon}$ com $w \in E^- \cap B_r(0)$ e

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w+R\vec{e_\epsilon})|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w+R\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_2+v_{rt})_+^{2^*}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w|^2\,dx - \frac{\mu_1 R^2}{2}\int_\Omega |\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_2+v_{rt})_+^{2^*}dx.$$

Como $v_2 = w_2 + Re_\epsilon$ e $w \in E^-$ temos que:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2\lambda_k}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \frac{R^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{R}\right)_+^{2^*}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)\|w\|_E^2 + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{R^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{R}\right)_+^{2^*} dx.$$

Pelas limitações de $w \in E^- \cap B_r(0)$ (conseqüentemente de w_2) e v_{rt}, existe $k > 0$ tal que $\|w_2 + v_{rt}\|_{L^\infty} \leq k$. Novamente, como $P_+\Psi_\epsilon(0) \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ (tomando $\epsilon_0 < \epsilon_0'$) tal que $\forall\ 0 < \epsilon < \epsilon_0$ temos que: $e_\epsilon(0) := P_+\Psi_\epsilon(0) > 2k$. Então para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, usando a continuidade de $P_+\Psi_\epsilon$, nós podemos achar $R_1 = R_1(\epsilon), \eta = \eta(\epsilon)$ tais que:

$$\left|\left\{x \in \Omega \ / \ e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{R} > 1\right\}\right| \geq \eta > 0,\ \forall\ R > R_1.$$

Portanto, achamos $\epsilon_0, R_0 > 0$ tais que para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ acima e $R > R_0$ temos:

$$I(v) \leq 0 \ \ \forall v \in \Gamma_3.$$

De fato, seja $R_0 = max\left\{R_1, R_2\right\}$, onde $R_2 > 0$ é tal que $\alpha R_2^2 - {R_2}^{2^*} < 0$, com $\alpha = \frac{N}{N-2}\left(\eta^{-1}\int_\Omega |\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\right)$.

Logo, para $\epsilon > 0$ acima e $R > R_0$ segue que:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)\|w\|_E^2 + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{R^{2^*}}{2^*}\int_C \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{R}\right)_+^{2^*} dx,$$

onde $C = \left\{x \in \Omega \ / \ e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{R} > 1\right\}$ é tal que $|C| \geq \eta > 0$.

Portanto,

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)\|w\|_E^2 + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{R^{2^*}}{2^*}\int_C 1^{2^*} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)\|w\|_E^2 + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{R^{2^*}}{2^*}\eta \leq 0.$$

$\square$

LEMA 3.4. *Suponha que a dimensão* $N > 6$ *e* $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$. *Então:*

$$\max_{\bar{Q}} I < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Demonstração. Seja $\epsilon < \epsilon_0$ de modo que a geometria do Teorema de Enlace ocorra.

($1^{\underline{o}}$ *caso*) Se $0 \leq s \leq s_0 := \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$.

Para $w + s\vec{e_\epsilon} \in Q$, fazendo os mesmos cálculos da demonstração do lema anterior (1º caso), temos:

$$I(v) \leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\,dx \leq \frac{s^2}{2}\delta^2 \leq \widehat{\alpha} = \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{N}{2}} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

(2º *caso*) Se $s \geq s_0 := \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$, segue que:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w + s\vec{e_\epsilon})|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w + s\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (w_2 + se_\epsilon + v_{rt})_+^{2^*}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w|^2\,dx - \frac{\mu_1 s^2}{2}\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w_2 + v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*}dx.$$

Agora, observe que:
$\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |w|^2\,dx \leq 0$ e $\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx \geq 0$.

De fato, $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$ e $w \in E^- = \langle (0,\phi_i), (\phi_i, 0)\rangle_{1\leq\, i \leq\, k}$, assim, $\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \leq \lambda_k\int_\Omega |w|^2\,dx \leq \mu_1\int_\Omega |w|^2\,dx$.

Também,

$e_\epsilon = P_+\Psi_\epsilon \in \overline{span}\,\{\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, ...\}$, assim $\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx \geq \lambda_{k+1}\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx \geq \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx$.

Usando os Lemas C.2 e C.4 do Apêndice C, a observação acima e a última estimativa para $I(v)$, temos:

$$I(v) \leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx\right) -$$

$$-\frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*}\,dx - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{w_2 + v_{rt}}{s}\right|^{2^*}dx + c\,\frac{s^{2^*}}{2^*}\left(\|e_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1} + \|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx\right) - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*} + c\,s^{2^*}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} := \Phi_\epsilon(s).$$

Aplicando o Lema B.4 (Apêndice B) à $\Phi_\epsilon(s)$ com

$$A = \int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx,$$

$$B = \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*}\,dx \;\; e \;\; \alpha = \frac{N-2}{2},$$

obtemos:

$$\Phi_\epsilon(s) \le \Phi_\epsilon(s_\epsilon) = \frac{1}{N}\left(\frac{A^N}{B^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}} + O(\epsilon^\alpha) = \frac{1}{N}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2 - \mu_1 \int_\Omega |e_\epsilon|^2\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{2}}} + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Usando as estimativas dos Lemas C.1 e C.2 sobre e_ϵ (veja Apêndice C) segue que:

$$\begin{aligned}
&I(w+s\vec{e_\epsilon}) \le \Phi_\epsilon(s) \le \\
&\le \tfrac{1}{N}\left(S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}) - \mu_1 d\epsilon^2 + O\left(\epsilon^{N-2}\right)\right)^{\frac{N}{2}}\left(S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N) + O(\epsilon^{N-2})\right)^{\frac{-N+2}{2}} +\ O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) \le \\
&\le \tfrac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - \mu_1 O\left(\epsilon^2\right) + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$I(w+s\vec{e_\epsilon}) \le \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - \mu_1 O\left(\epsilon^2\right) + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Como $N > 6$, (ou $\frac{N-2}{2} > 2$) temos que:

$$-\mu_1\, O\left(\epsilon^2\right) + O\left(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\right) < 0$$

para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ suficientemente pequeno.

Logo, $I(w+s\vec{e_\epsilon}) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} \quad \forall\, w+s\vec{e_\epsilon} \in Q$, e conseqüentemente,

$$\max_{\bar{Q}} I < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

□

Lema 3.5. *Suponhamos $N > 6$, $\mu_2 < \lambda_{k+1}$ e que (U_n) seja uma seqüência $(PS)_c$, então (U_n) é limitada em $E = (H_0^1(\Omega))^2$.*

Demonstração. Sabemos que:

$$I(U_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n) - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} = c + o(1), \tag{3.3}$$

$$\langle I'(U_n),\Psi\rangle = \int_\Omega \nabla U_n \nabla\Psi - \int_\Omega (AU_n,\Psi) - \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{2^*-1}\varphi - \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}\xi = o(1)\,\|\Psi\|_E$$

$\forall\ \Psi = (\varphi,\xi) \in E = (H_0^1)^2$, e c é o nível minimax.

Agora,

$$I(U_n) - \frac{1}{2}\langle I'(U_n)U_n\rangle =$$

$$= -(\frac{1}{2} - \frac{1}{N})\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{N})\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} u_n + \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} v_n.$$

Observando que:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} u_n = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1}\left[(u_n + u_{rt}) - u_{rt}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1}\left[(u_n + u_{rt})_+ - (u_n + u_{rt})_- - u_{rt}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} u_{rt},$$

usando uma expressão análoga para $\frac{1}{2}\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} v_n$, segue que:

$$I(U_n) - \frac{1}{2}\langle I'(U_n)U_n\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*} + \frac{1}{N}\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} u_{rt} - \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} v_{rt} \leq$$

$$\leq c + o(1) + \epsilon_n \|U_n\|_E.$$

Assim,

$$\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*},\ \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*} \leq c + o(1) + \epsilon_n \|U_n\|_E.$$

Isto implica que:

$$\left(\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*}\right)^{\frac{N+2}{N}},\ \left(\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*}\right)^{\frac{N+2}{N}} \leq K + \epsilon_n \|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}. \tag{3.4}$$

Pela equação (3.3), com $(\varphi, \xi) = (u_n^+, v_n^+) \in E^+$ temos:

$$\epsilon_n \left\|(u_n^+, v_n^+)\right\|_E + \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} u_n^+ + \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} v_n^+ =$$

$$= \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^+ + \int_\Omega \nabla v_n \nabla v_n^+ - \int_\Omega (A(u_n, v_n), (u_n^+, v_n^+)).$$

Como $(u_n, v_n) = (u_n^+ + u_n^-, v_n^+ + v_n^-) = (u_n^+, v_n^+) + (u_n^-, v_n^-) \in E^+ \oplus E^- = E$, observando que $\int_\Omega A((u_n, v_n), (u_n^+, v_n^+)) = \int_\Omega (au_n u_n^+ + bu_n v_n^+ + bv_n u_n^+ + dv_n v_n^+)$ temos que a expressão anterior é igual a:

$$\int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^2 + \int_\Omega \left|\nabla v_n^+\right|^2 - \int_\Omega (A(u_n^+, v_n^+), (u_n^+, v_n^+)).$$

Assim, usando que $(AU, U) \leq \mu_2 \left|U\right|^2$ e o fato:

$$\left\|w_n^+\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \left\|w_n^+\right\|_{H_0^1}^2 \;\; \forall\, w \in \overline{span}\left\{\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, ...\right\},$$

obtemos:

$$\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right) \leq \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} u_n^+ + \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} v_n^+ + \epsilon_n \left\|(u_n^+, v_n^+)\right\|_E \leq$$

$$\leq \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} |u_n^+| + \epsilon_n \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} |v_n^+| + \epsilon_n \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}. \tag{3.5}$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Hölder, Young, (3.4) e a imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$, temos:

$$\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*-1} |u_n^+| + \epsilon_n \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} \leq \|(u_n + u_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} \left\|u_n^+\right\|_{L^{2^*}} + \epsilon_n \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} \leq$$

$$\leq \epsilon \left(\int_\Omega \left|u_n^+\right|^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} + C_\epsilon \left(\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^{2^*}\right)^{\frac{N+2}{N}} + \epsilon_n \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} \leq$$

$$\leq \epsilon\, C \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2 + C_\epsilon + \epsilon_n \left(\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}\right). \tag{3.6}$$

De forma análoga,

$$\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} |v_n^+| + \epsilon_n \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1} \leq \epsilon\, C \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2 + C_\epsilon + \epsilon_n \left(\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right). \tag{3.7}$$

Logo, por (3.5), (3.6) e (3.7),

$$\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right) \leq$$

$$\leq \epsilon\, C \left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right) + 2C_\epsilon + \epsilon_n \left(2\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right).$$

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2\,C}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right) > 0$ segue a seguinte desigualdade:

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right) \leq C + \epsilon_n \left(2\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right). \tag{3.8}$$

Analogamente, usando o mesmo argumento para $(u_n^-, v_n^-) \in E^-$ obtemos:

$$\left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}^2\right) \leq C + \epsilon_n \left(2\left\|U_n\right\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right). \tag{3.9}$$

Usando as desigualdades (3.8) e (3.9) temos:

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq 2\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right) \leq C_1 + C_2\left(\left\|U_n\right\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right),$$

$$\left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq 2\left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}^2 + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}^2\right) \leq C_1 + C_2\left(\left\|U_n\right\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right).$$

Somando as expressões acima, segue que:

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right)^2 + \left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq$$

$$\leq K_1 + K_2\left\|U_n\right\|_E^{\frac{N+2}{N}} + K_3\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right) \leq$$

$$\leq K_1 + K_2\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^{\frac{N+2}{N}} +$$

$$+K_3\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right).$$

Por outro lado,

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq 2\left[\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right)^2 + \left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2\right].$$

Assim, pelas duas últimas desigualdades temos:

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq$$

$$\leq C + C\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^{\frac{N+2}{N}} +$$

$$+C\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^+\right\|_{H_0^1} + \left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right).$$

Como $N > 6 \Rightarrow \frac{N+2}{N} < 2$, temos que a seqüência $(\alpha_n) = \left(\|u_n^+\|_{H_0^1} + \|u_n^-\|_{H_0^1} + \|v_n^+\|_{H_0^1} + \|v_n^-\|_{H_0^1}\right)$ é limitada.

Logo, $\|U_n\|_E \leq \|u_n\|_{H_0^1} + \|v_n\|_{H_0^1} \leq \|u_n^+\|_{H_0^1} + \|u_n^-\|_{H_0^1} + \|v_n^+\|_{H_0^1} + \|v_n^-\|_{H_0^1}$ é limitada.

$\square$

Portanto, podemos assumir que:

$U_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) =: z$ em E,

$U_n \to z$ em $(L^q(\Omega))^2$, $\;2 \leq q < 2^*$,

$U_n \to z$ qtp em Ω, quando $n \to \infty$.

Lema 3.6 . *z=(u,v) é solução fraca do sistema (3.2).*

Demonstração. Veja Lema 2.5 do Capítulo 2.

$\square$

Demonstração do Teorema 3.1

Usando o Teorema de Enlace (com $e = \vec{e_\epsilon} = (0, P_+\Psi_\epsilon) \in E^+$ e $\epsilon < \epsilon_0$ suficientemente pequeno de modo a valer o Lema 3.4) e os Lemas 3.2 e 3.3, existe uma seqüência $(U_n) \subset E$ tal que $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$. Assim, o Lema 3.5 garante que (U_n) é limitada. Para finalizar o Teorema, basta mostrarmos que a solução $z = (u, v)$ (Lema 3.6) obtida como limite fraco da seqüência (PS) no nível minimax c é não nula. Este fato decorre do Lema 2.7 do capítulo 2.

$\square$

Observação: Lembre-se que a solução $z = (u, v)$ não pode ser negativa (veja observação do capítulo 2).

Capítulo 4

Sistema de Equações Elípticas com não-linearidade mista

Neste capítulo vamos investigar a existência de múltiplas soluções para o sistema $-\Delta U = AU + [u_+^p \;\; v_+^q]^{\mathbf{T}} + F$ em Ω, onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado suave, $1 < p < 2^* - 1$ e $q = 2^* - 1$. Sob a hipótese de simetria da matriz A, mostramos a existência de pelo menos duas soluções para o sistema. A primeira solução é obtida diretamente tal como no capítulo 1. A segunda, dependendo da localização dos autovalores da matriz A em relação ao espectro do Laplaciano, ou seja, se $\mu_i,\ i = 1, 2$ são autovalores de A e $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$, o teorema 4.1 utiliza o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. No caso que $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, o Teorema do Passo da Montanha Generalizado de Rabinowitz (sem PS) garante a existência da segunda solução (teorema 4.2).

Considere o sistema:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} u_+^p \\ v_+^q \end{pmatrix} + F & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N,\ N \geq 3$ é um domínio limitado suave, $p = 2^* - 1,\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R),\ U = (u, v)$ e $F = (f, g) \in (L^s(\Omega))^2$ para algum $s > N$.

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes Teoremas:

Teorema 4.1. *(Existência de uma segunda solução)*

Suponhamos que A seja uma matriz simétrica (b=c).

Se adicionarmos à hipótese (I) do Teorema 1.1 as seguintes condições: A dimensão $N > 6$ e $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_1$, onde μ_1, μ_2 são respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz A, então o sistema (4.1) possui uma segunda solução.

Teorema 4.2. *(Existência de uma segunda solução)*

Suponhamos que A seja uma matriz simétrica (b=c).

Se adicionarmos à hipótese (II) do Teorema 1.2 as seguintes condições: A dimensão $N > 6$ e $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, onde μ_1, μ_2 são respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz A, então o sistema (4.1) possui uma segunda solução.

Observação. A observação 13 no fim deste capítulo, nos mostra algumas dificuldades que contornamos em relação aos problemas críticos dos capítulos 2 e 3.

Observe que se $(\bar{u}, \bar{v}) \neq (0,0)$ é uma solução de:

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} (u+u_{rt})_+^p \\ (v+v_{rt})_+^q \end{pmatrix} & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $p < 2^* - 1, q = 2^* - 1$, então uma segunda solução do sistema (4.1) é dada por: $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v}) + (u_{rt}, v_{rt})$, assim, basta obtermos uma solução de (4.2). Novamente vamos recorrer à versões do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale para obter um ponto crítico do funcional transladado centrado em (u_{rt}, v_{rt}) dado por:

$$I(U) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (AU, U) dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{p+1} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*} dx,$$

definido em $E := (H_0^1(\Omega))^2$ com a norma $\|(u,v)\|_E^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.
Para isso, mostramos que o funcional I satisfaz a geometria do Passo da Montanha no caso do Teorema 4.1 e a geometria requerida pelo Teorema Enlace de Rabinowitz no caso do Teorema 4.2.

Note que os pontos críticos de I são soluções fracas de (4.2), e que $U = 0$ é um ponto crítico de I com $I(0) = 0$.

Faremos as demonstrações dos Teoremas 4.1 e 4.2 como fizemos nos capítulos 2 e 3, obedecendo uma seqüência de resultados: No caso do Teorema 4.1, o Lema 4.3 garante que o funcional I associado ao sistema (4.2) satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, enquanto que no Teorema 4.2 o funcional satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha Generalizado de Rabinowitz [26] (Lemas 4.8 e 4.9). Assim, usando uma aplicação do Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 4.3 [24] ou Teorema 5.1 [15]), existe uma seqüência $(U_n) \subset E$ tal que: $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$, onde c caracterizado por:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

satisfaz (veja Lemas 4.4 e 4.10)

$$0 < c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}\,, \quad (*)$$

onde S é a melhor constante de Sobolev definida por:

$$S = inf\left\{ \|\nabla u\|_{L^2}^2 \,/\, \|u\|_{L^{2^*}}^2 : u \neq 0, u \in H^1(I\!R^N) \right\}.$$

Os lemas 4.5 e 4.6 mostram que (U_n) é uma seqüência limitada em E e seu limite fraco é uma solução do sistema. Finalmente, usamos $(*)$ e uma caracterização da melhor constante de Sobolev S (Lema 2.6 do capítulo 2) para mostrar que a solução é não-nula.

Prova do Teorema 4.1

Lema 4.3. *Se $\mu_2 < \lambda_1$, então I satisfaz a geometria do Teorema do Passo da Montanha, isto é:*

(i) Existem $\widehat{\alpha}$, $\rho > 0$ tais que: $I(U) \geq \widehat{\alpha}$, $\forall\, U \in \partial B_\rho$.

(ii) Existe $U_0 \in E$ tal que $\|U_0\|_E > \rho$ e $I(U_0) \leq 0$.

Demonstração.

Verificação de (i)

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{\mu_2}{2}\int_\Omega |U|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{p+1}dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*}dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{\mu_2}{2\lambda_1}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*}\,dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\|U\|_E^2 - C_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{p+1}{2}} - C_2\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{2^*}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\|U\|_E^2 - C\,\|U\|_E^{p+1} - C\,\|U\|_E^{2^*}.$$

Sabendo que $p+1$, $2^* > 2$, para $\|U\|_E = \rho$ suficientemente pequeno temos que $I(U) \geq \widehat{\alpha} > 0$.

Verificação de (ii)

Fixe $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, 0) \neq (0,0) \in E$ tal que $\int_\Omega (\widetilde{u}-1)_+^{p+1} > 0$ e seja $s > 0$, assim:

$$I(s\widetilde{U}) = \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla \widetilde{U}|^2 dx - \int_\Omega (A\widetilde{U}, \widetilde{U}) dx\right) - \frac{s^{p+1}}{p+1}\int_\Omega \left(\widetilde{u} + \frac{u_{rt}}{s}\right)_+^{p+1} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (0+v_{rt})_+^{2^*} dx.$$

Usando a continuidade (conseqüentemente, pela limitação inferior) da função u_{rt}, escolha $s_1 > 0$ tal que $\frac{u_{rt}(x)}{s_1} \geq -1$, e observe também que a última integral é igual a zero.

Logo, para $s \geq s_1$,

$$\int_\Omega \left(\widetilde{u} + \frac{u_{rt}}{s}\right)_+^{p+1} dx \geq \int_\Omega (\widetilde{u}-1)_+^{p+1} dx > 0.$$

Portanto, vemos que:

$$I(s\widetilde{U}) \leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla \widetilde{U}|^2 dx - \int_\Omega (A\widetilde{U}, \widetilde{U}) dx\right) - \frac{s^{p+1}}{p+1}\int_\Omega (\widetilde{u}-1)_+^{p+1} dx \longrightarrow -\infty$$

quando $s \to \infty$. $\square$

Pelo Lema 4.3 acima, usando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz sem a condição $(PS)_c$ (veja [24]), existe uma seqüência (U_n) satisfazendo a condição $(PS)_c$, isto é, $(U_n) \subset E$ tal que: $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$, quando $n \to \infty$, onde c é caracterizado por:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) \ : I(\gamma(0)) = 0, \ I(\gamma(1)) \leq 0\}.$$

Lema 4.4. *Suponha que a dimensão $N > 6$ e $\mu_1 > 0$.*

Então o nível c (dado pelo TPM) verifica a seguinte desigualdade:

$$0 < c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Para mostrar este resultado é suficiente exibir $(u_0, v_0) \neq (0,0) \in E$ tal que:

$$\sup_{t \geq 0} I(t(u_0, v_0)) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \tag{4.3}$$

Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$, considere a função cut-off $\Psi \in C_c^\infty(I\!R^N)$ com suporte compacto em $B_{2R} \subset \Omega$ tal que: $\Psi \equiv 1$ sobre B_R e $0 \leq \Psi \leq 1$ sobre B_{2R}.

Dado $\epsilon > 0$, defina:

$$\Psi_\epsilon(x) := \Psi(x)U_\epsilon(x),$$

onde

$$U_\epsilon(x) := \frac{(\epsilon N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\ , x\ \in I\!R^N$$

satisfaz: $-\Delta U_\epsilon = {U_\epsilon}^{2^*-1}$ em $I\!R^N$ e $\|U_\epsilon\|^2_{H_0^1(I\!R^N)} = \|U_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(I\!R^N)} = S^{\frac{N}{2}}$.

Agora, defina a função vetorial dada por:

$$\vec{u}_\epsilon(x) := \Psi_\epsilon(x)\ (0,1)\ .$$

Seja $K > 0$ fixo, defina o conjunto:

$$\Omega_{\epsilon,K} := \{x \in \Omega\ /\ \Psi_\epsilon(x) > K\}\,.$$

Como $\Psi_\epsilon(0) = \left(\frac{N(N-2)}{\epsilon}\right)^{\frac{N-2}{4}} \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$, pela continuidade de Ψ_ϵ, existe $R = R(\epsilon) > 0$ tal que $B_R(0) \subset \Omega_{\epsilon,K}$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Também usaremos o Lema: (B.2)-(H.Brézis-L.Nirenberg [7]) e os Lemas (B.3), (B.4) e (B.5)-(D.G. De Figueiredo-Y.Jianfu [17]) do Apêndice B.

Demonstração do Lema 4.4. Seja $(u_0, v_0) = \vec{u}_\epsilon = (0, \Psi_\epsilon) \in E$ (ver Lemas (B.2), (B.3) do Apêndice B).

Defina

$$\delta^2 := \sup_{0<\epsilon\leq 1} \int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 dx.$$

(1º *caso*) Se $0 \leq s \leq s_0 := \sqrt{2\beta}/\delta$, onde $0 < \beta < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

$$I(s\vec{u}_\epsilon) \leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 dx \leq \frac{s^2}{2}\delta^2 \leq \beta < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

(2º *caso*) Se $s \geq s_0 := \sqrt{2\beta}/\delta$.

Seja $K := sup\left\{\left\|\frac{(u_{rt}, v_{rt})}{s}\right\|_{(L^\infty)^2}\ :\ s \geq s_0\right\} > 0$ e considere o conjunto $\Omega_{\epsilon,k}$ definido acima.

$$I(s\vec{u}_\epsilon) = \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (A(s\vec{u}_\epsilon), (s\vec{u}_\epsilon))dx -$$

$$-\frac{1}{p+1}\int_\Omega (s\ 0+u_{rt})_+^{p+1}dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (s\Psi_\epsilon+v_{rt})_+^{2^*}dx \leq$$

$$\leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{u}_\epsilon|^2dx-\frac{\mu_1 s^2}{2}\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2dx-\frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(\Psi_\epsilon+\frac{v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*}dx.$$

Usando os Lemas B.2 e B.3 do Apêndice B, temos:

$I(s\vec{u}_\epsilon) \leq$

$$\frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla\vec{u}_\epsilon|^2-\frac{\mu_1 s^2}{2}\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2-\frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon}|\Psi_\epsilon|^{2^*}-\frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{v_{rt}}{s}\right|^{2^*}+\widetilde{c}\,\frac{s^{2^*}}{2^*}\left(\|\Psi_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1}+\|\Psi_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right)$$

$$\leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla\vec{u}_\epsilon|^2-\mu_1\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2\right)-\frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon}|\Psi_\epsilon|^{2^*}+cs^{2^*}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} := \Phi_\epsilon(s).$$

Aplicando o Lema B.4 à função Φ_ϵ com

$$A=\int_\Omega |\nabla\vec{u}_\epsilon|^2-\mu_1\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2,$$

$$B=\int_{\Omega_\epsilon}|\Psi_\epsilon|^{2^*} \quad e \quad \alpha=\frac{N-2}{2},$$

obtemos,

$$\Phi_\epsilon(s)\leq\Phi_\epsilon(s_\epsilon)=\frac{1}{N}\left(\frac{A^N}{B^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}}+O(\epsilon^\alpha)=\frac{1}{N}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2-\mu_1\int_\Omega |u_\epsilon|^2\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\Omega_\epsilon}|\Psi_\epsilon|^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{2}}}+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Usando os Lemas B.2 e B.3 segue que:

$\Phi_\epsilon(s) \leq$

$$\leq \tfrac{1}{N}\left(S^{\frac{N}{2}}+O(\epsilon^{N-2})-\mu_1 d\epsilon^2+O\left(\epsilon^{N-2}\right)\right)^{\frac{N}{2}}\left(S^{\frac{N}{2}}+O(\epsilon^N)+O(\epsilon^{N-2})\right)^{\frac{-N+2}{2}}+\ O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})\leq$$

$$\leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}-\mu_1 O\left(\epsilon^2\right)+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Assim,

$$I(s\vec{u}_\epsilon)\leq\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}-\mu_1 O\left(\epsilon^2\right)+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Como $N>6$, (ou $\frac{N-2}{2}>2$) temos que:

$$-\mu_1\ O\left(\epsilon^2\right)+O\left(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\right)<0$$

para $0<\epsilon<1$ suficientemente pequeno.

Logo, $I(s\vec{u}_\epsilon)<\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}},\ \ \forall s\geq 0$, e conseqüentemente

$$\sup_{s\geq 0} I(s\vec{u}_\epsilon)<\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

□

Lema 4.5. *Suponhamos que $N > 6$, $\mu_2 < \lambda_1$ e que (U_n) seja uma seqüência $(PS)_c$, então (U_n) é limitada em $E = (H_0^1(\Omega))^2$.*

Demonstração. Sabemos que:

$$I(U_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} = c + o(1),$$

$$\langle I'(U_n),\Psi\rangle = \int_\Omega \nabla U_n \nabla\Psi - \int_\Omega (AU_n,\Psi) - \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p\varphi - \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}\xi = o(1)\,\|\Psi\|_E$$

$\forall\ \Psi = (\varphi,\xi) \in E = (H_0^1)^2$, e c é o nível minimax.

Agora,

$$I(U_n) - \frac{1}{2}\langle I'(U_n)U_n\rangle =$$

$$-\frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} + \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N}\right)\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} + \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} v_n \leq$$

$$\leq c + o(1) + \epsilon_n \|U_n\|_E. \tag{4.4}$$

Observe que:

$$\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n = \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} - \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_{rt},$$

$$\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} v_n = \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} - \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} v_{rt}.$$

Assim, usando as expressões acima e a desigualdade (4.4) obtemos:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_{rt} + \frac{1}{N}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} v_{rt} \leq$$

$$\leq c + o(1) + \epsilon_n \|U_n\|_E.$$

Como $-\frac{1}{2}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_{rt} \geq 0$ e $-\frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} v_{rt} \geq 0$, segue que:

$$\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1}\ ,\ \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} \leq c + o(1) + \epsilon_n \|U_n\|_E.$$

Isto implica que:

$$\left(\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1}\right)^{\frac{2p}{p+1}} \leq K + \epsilon_n \|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}\ ,$$

$$\left(\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*}\right)^{\frac{N+2}{N}} \leq K+\epsilon_n \|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}. \tag{4.5}$$

Como $\langle I'(U_n),\Psi\rangle = \epsilon_n \|\Psi\|_E, \ \forall\ \Psi=(\varphi,\xi)\in E=(H_0^1)^2$, tomando em particular $\Psi=(u_n,v_n)=U_n\in E$ temos:

$$\int_\Omega |\nabla U_n|^2-\int_\Omega (AU_n,U_n)=\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n+\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n+\epsilon_n\|U_n\|_E.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega |\nabla U_n|^2-\int_\Omega (AU_n,U_n)\geq \int_\Omega |\nabla U_n|^2-\mu_2\int_\Omega |U_n|^2\geq \left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\|U_n\|_E^2.$$

Portanto,

$$\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\|U_n\|_E^2\leq \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n+\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n+\epsilon_n\|U_n\|_E\leq$$

$$\leq \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n+\epsilon_n\|u_n\|_{H_0^1}+\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n+\epsilon_n\|v_n\|_{H_0^1}. \tag{4.6}$$

Usando as desigualdades de Hölder, Young e (4.5) e a imersões $H_0^1\hookrightarrow L^{p+1}$, $H_0^1\hookrightarrow L^{2^*}$ em cada integral do lado direito da desigualdade acima, obtemos:

$$\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n+\epsilon_n\|u_n\|_{H_0^1}\leq \left(\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1}\right)^{\frac{p}{p+1}}\left(\int_\Omega |u_n|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}}+\epsilon_n\|u_n\|_{H_0^1}\leq$$

$$\leq \epsilon\left(\int_\Omega |u_n|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}+C_\epsilon\left(\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1}\right)^{2\left(\frac{p}{p+1}\right)}+\epsilon_n\|u_n\|_{H_0^1}\leq$$

$$\leq \epsilon\, C\|u_n\|_{H_0^1}^2+C_\epsilon+\epsilon_n\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}+\|u_n\|_{H_0^1}\right). \tag{4.7}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n+\epsilon_n\|v_n\|_{H_0^1}\leq \epsilon\, C\|v_n\|_{H_0^1}^2+C_\epsilon+\epsilon_n\left(\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}+\|v_n\|_{H_0^1}\right). \tag{4.8}$$

Usando as desigualdades (4.6), (4.7) e (4.8) temos: $\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)\|U_n\|_E^2\leq$

$$\leq \epsilon\, C\|U_n\|_E^2+2C_\epsilon+\epsilon_n\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}+\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}+\|u_n\|_{H_0^1}+\|v_n\|_{H_0^1}\right).$$

Tomando $\epsilon=\frac{1}{2\,C}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_1}\right)>0$, segue que:

$$\|U_n\|_E^2\leq C+C\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}+\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}+\|u_n\|_{H_0^1}+\|v_n\|_{H_0^1}\right)\leq$$

$$\leq C + C\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}} + \|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + 2\,\|U_n\|_E\right).$$

Como $N > 6 \Rightarrow \frac{N+2}{N} < 2$ e como $\frac{2p}{p+1} < 2$, temos que a seqüência (U_n) é limitada em $E = (H_0^1(\Omega))^2$.

□

Portanto, podemos assumir que:
$U_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) =: z$ em E,
$U_n \to z$ em $(L^q(\Omega))^2$, $2 \leq q < 2^*$,
$U_n \to z$ qtp em Ω, quando $n \to \infty$.

Lema 4.6. *z=(u,v) é solução fraca do sistema (4.2).*

Demonstração. Sabemos que:

$$\left\|(v_n + v_{rt})_+^{2^*-1}\right\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}}^{\frac{2^*}{2^*-1}} = \|(v_n + v_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} \leq C\,\|(v_n + v_{rt})_+\|_{H_0^1}^{2^*} \leq K,$$

e

$$(v_n + v_{rt})_+^{2^*-1} \to (v + v_{rt})_+^{2^*-1} \text{ } qtp \text{ } em \text{ } \Omega.$$

Analogamente,

$$\|(u_n + u_{rt})_+^p\|_{L^{\frac{p+1}{p}}}^{\frac{p+1}{p}} \leq C\,\|(u_n + u_{rt})_+\|_{H_0^1}^{p+1} \leq K,$$

$$(u_n + u_{rt})_+^p \to (u + u_{rt})_+^p \text{ } qtp \text{ } em \text{ } \Omega.$$

Assim, passando à uma subseqüência, segue que: $(v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} \rightharpoonup (v+v_{rt})_+^{2^*-1}$ em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$, e $(u_n + u_{rt})_+^p \rightharpoonup (u + u_{rt})_+^p$ em $L^{\frac{p+1}{p}}$, isto é,

$$\int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1}\xi \to \int_\Omega (v + v_{rt})_+^{2^*-1}\xi, \ \ \forall\, \xi \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}},$$

$$\int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^p\varphi \to \int_\Omega (u + u_{rt})_+^p\varphi, \ \ \forall\, \varphi \in L^{\frac{p+1}{p}}.$$

Observando que se $\varphi \in H_0^1$ então $\varphi \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$ e $\varphi \in L^{\frac{p+1}{p}}$, passando o limite em:
$\langle I'(U_n), (\varphi, \xi)\rangle =$

$$= \int_\Omega \nabla u_n \nabla\varphi + \int_\Omega \nabla v_n \nabla\xi - \int_\Omega (A(u_n, v_n), (\varphi, \xi)) - \int_\Omega (u_n + u_{rt})_+^p\varphi - \int_\Omega (v_n + v_{rt})_+^{2^*-1}\xi,$$

obtemos:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega \nabla v \nabla \xi - \int_\Omega (A(u,v),(\varphi,\xi)) - \int_\Omega (u+u_{rt})_+^p \varphi - \int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*-1}\xi = 0$$

$\forall\ (\varphi,\xi) \in E = (H_0^1)^2$, ou seja, $z=(u,v)$ é ponto crítico de I. Logo, $z=(u,v)$ é solução fraca do sistema (4.2).

□

Demonstração do Teorema 4.1

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo a valer o Lema 4.4. Pelo Lema 4.3 existe uma seqüência $(U_n) \subset E$ tal que $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$. O Lema 4.5 garante que (U_n) é limitada em E. Logo, podemos assumir que: $U_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v) =: z$ em E.

Para finalizar a prova do Teorema 4.1 basta mostrarmos que a solução $z = (u,v)$ obtida (veja Lema 4.6) como limite fraco de uma seqüência (PS) é não-nula. Este resultado é o que diz o seguinte Lema:

Lema 4.7 . *A solução $z=(u,v)$ obtida como limite fraco de uma seqüência (PS) no nível minimax c é não-nula.*

Demonstração. De fato, pelo Lema de Brézis-Lieb [6], temos que:

$$\begin{aligned} \|(u_n+u_{rt})_+\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \|(u_n-u)_+\|_{L^{p+1}}^{p+1} &= \|(u+u_{rt})_+\|_{L^{p+1}}^{p+1} + o(1), \\ \|(v_n+v_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} - \|(v_n-v)_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} &= \|(v+v_{rt})_+\|_{L^{2^*}}^{2^*} + o(1), \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde $o(1) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Usando as expressões (4.9), segue que:

$$\begin{aligned} I(U_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} = \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n-u)_+^{p+1} - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{p+1} - \\ &\quad - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*} + o(1). \end{aligned}$$

Como $I(z) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (Az,z) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u+u_{rt})_+^{p+1} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v+v_{rt})_+^{2^*}$, usando a equação acima temos:

$$I(U_n) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U_n|^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n-u)_+^{p+1} -$$

$$-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*}+I(z)-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega (Az,z)+o(1)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla U_n|^2-|\nabla z|^2\right)+I(z)-\frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^2-u^2)-\frac{d}{2}\int_\Omega (v_n^2-v^2)-$$

$$-b\int_\Omega (u_nv_n-uv)-\frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n-u)_+^{p+1}-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*}+o(1).$$

Usando que $u_n\to u$, $v_n\to v$ em $L^2(\Omega)$ obtemos:

$$I(U_n)=\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla U_n|^2-|\nabla z|^2\right)+I(z)-\frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n-u)_+^{p+1}-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*}+o(1). \quad (4.10)$$

Por outro lado:

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2=\int_\Omega |\nabla u_n|^2-2\int_\Omega \nabla u_n\nabla u+\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Assim, como $u_n\rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ segue que:

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2-\int_\Omega |\nabla u_n|^2\to -\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Logo,

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2-|\nabla u|^2)=\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2+o(1).$$

Analogamente,

$$\int_\Omega (|\nabla v_n|^2-|\nabla v|^2)=\int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2+o(1). \quad (4.11)$$

Pelas equações (4.10) e (4.11) obtemos:

$$I(U_n)=I(z)+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2-\frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n-u)_+^{p+1}-\frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*}+o(1). \quad (4.12)$$

Similarmente, temos que:

$$\langle I'(U_n),U_n\rangle=\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2+\int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2-\int_\Omega (u_n-u)_+^{p+1}-$$

$$-\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*}+\int_\Omega (u_n-u)_+^{p}u_{rt}+\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*-1}v_{rt}+o(1). \quad (4.13)$$

Afirmamos que: $\int_\Omega (u_n-u)_+^p u_{rt}$, $\int_\Omega (v_n-v)_+^{2^*-1}v_{rt}\to 0$ quando $n\to\infty$.

De fato, $\left|\int_\Omega (u_n-u)_+^p u_{rt}\right|\leq \|(u_n-u)_+^p\|_{L^q}\|u_{rt}\|_{L^s}\leq \|u_n-u\|_{L^{qp}}^p\|u_{rt}\|_{L^s}$.

Como $u_n - u \in L^r$, $\forall\, 2 \leq r < 2^*$, escolha $r = qp = p+1$ tal que $1/q + 1/s = 1$ com $q, s > 1$, assim, $q = \frac{p+1}{p}$ e $s = p+1$. Assim, usando que $u_n \to u$ em L^{p+1} segue que:

$$\int_\Omega (u_n - u)_+^p u_{rt} \to 0.$$

Analogamente (veja capítulo 2),

$$\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*-1} v_{rt} \to 0 \tag{4.14}$$

quando $n \to \infty$.

Usando (4.14) e o fato que $I'(U_n) \to 0$, pela equação (4.13) obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 + \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 = \int_\Omega (u_n - u)_+^{p+1} + \int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*} + o(1). \tag{4.15}$$

Observe que $\int_\Omega (u_n - u)_+^{p+1}$, $\int_\Omega (v_n - v)_+^{2^*}$ são limitadas, pois, $H_0^1 \hookrightarrow L^{p+1},\ L^{2^*}$ e $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ em H_0^1.

Sejam, $p_n := u_n - u$ e $w_n := v_n - v$.

Passando o limite na equação (4.15),

$$lim \int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 + lim \int_\Omega |\nabla(v_n - v)|^2 = lim \int_\Omega |\nabla p_n|^2 + lim \int_\Omega |\nabla w_n|^2 := K \geq 0.$$

($1^{\underline{o}}$ *caso*) Se $K = 0$, segue que $\|u_n - u\|_{H_0^1}^2 + \|v_n - v\|_{H_0^1}^2 \to 0$, assim, $U_n \to z$ forte em $E = (H_0^1)^2$.

Logo, usando as equações (4.12), (4.15) e $K = 0$ temos que $I(U_n) \to I(z)$. Por outro lado $I(U_n) \to c$, assim, $I(z) = c \geq \widehat{\alpha} > 0$, e conseqüentemente $z \neq 0$.

($2^{\underline{o}}$ *caso*) Se $K > 0$. Suponha que $z = (u, v) = (0, 0)$. Usando a notação $p_n := u_n - u$ e $w_n := v_n - v$ na equação (4.15), vemos que:

$$\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 = \int_\Omega (p_n)_+^{p+1} + \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} + o(1). \tag{4.16}$$

Agora, como $u_n \to u$ em $L^q(\Omega)$, $\forall\, 2 \leq q < 2^*$, temos que $u_n \to u$ em $L^{p+1}(\Omega)$. Usando que $u_n \to u$ qtp em Ω e $u_n \rightharpoonup u$ em H_0^1, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que $\int_\Omega u_n^{p+1} \to \int_\Omega u^{p+1} = 0$.

Assim,

$$\int_\Omega (p_n)_+^{p+1} = \int_\Omega (u_n)_+^{p+1} \to 0,$$

e a equação (4.16) se reescreve:

$$\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 = \int_\Omega (w_n)_+^{2^*} + o(1). \tag{4.17}$$

Pelo Lema 2.6 do Capítulo 2, obtemos:

$$\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \geq S\left(\int_\Omega \left(|p_n|^{2^*} + |w_n|^{2^*}\right)\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Assim, unindo as duas últimas expressões, temos:

$$\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \geq S\left(\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \int_\Omega |\nabla w_n|^2 - o(1)\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Portanto, passando o limite quando $n \to \infty$, segue que $K \geq SK^{\frac{N-2}{N}}$, ou seja:

$$K \geq S^{\frac{N}{2}}. \tag{4.18}$$

Como $z = (u, v) = (0, 0)$, usando a notação acima e as equações (4.12) e (4.17) temos:

$$c + o(1) = I(U_n) =$$

$$= I(z) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla p_n|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w_n|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (p_n)_+^{p+1} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (w_n)_+^{2^*} + o(1) =$$

$$= I(z) - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (p_n)_+^{p+1} + \frac{1}{N}\int_\Omega (w_n)_+^{2^*} + o(1).$$

Passando o limite quando $n \to \infty$, lembrando que, se $z = (u, v) = (0, 0)$ então $I(z) = 0$ e $\int_\Omega (p_n)_+^{p+1} \to 0$, vemos por (4.15) e (4.18) que:

$$c = \frac{1}{N}K \geq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}},$$

o que é uma contradição, pois, o Lema 4.4 garante que $c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$. Com esse argumento finalizamos a prova do lema e como conseqüência a prova do Teorema 4.1.

$\square$

Prova do Teorema 4.2

Assim, sejam $E^- := \langle (0, \phi_i), (\phi_i, 0)\rangle_{1\leq\, i\leq\, k}$ e $E^+ := (E^-)^\perp$.

LEMA 4.8. *Se $\mu_2 < \lambda_{k+1}$, então existe $\rho_0 > 0$ e uma função $\alpha : [0, \rho_0] \to I\!R^+$ tal que:*

$$I(U) \geq \alpha(\rho)\ ,\ \forall\, U \in \partial B_\rho \cap E^+.$$

Demonstração. Como $A(U,U) \leq \mu_2 |U|^2$ e $(u_{rt}, v_{rt}) < (0,0)$ temos:

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{\mu_2}{2\lambda_{k+1}}\int_\Omega |\nabla U|^2\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*}\,dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\|U\|_E^2 - \frac{|\,\Omega|}{p+1}\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx\right)^{\frac{p+1}{2^*}} - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{2^*}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\|U\|_E^2 - \frac{|\,\Omega|}{p+1}\left(S^{\frac{-N}{N-2}}\right)^{\frac{p+1}{2^*}}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{p+1}{2}} - \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{2^*}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\|U\|_E^2 - C\,\|U\|_E^{p+1} - C\,\|U\|_E^{2^*},$$

onde $C = max\left\{\frac{|\,\Omega|}{p+1}\left(S^{\frac{-N}{N-2}}\right)^{\frac{p+1}{2^*}}, \frac{S^{\frac{-N}{N-2}}}{2^*}\right\}$.

Tomando $\|U\|_E = \rho$, obtemos a seguinte estimativa:

$$I(U) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\rho^2 - C\rho^{p+1} - C\rho^{2^*} := \alpha(\rho).$$

Para completar a prova, seja $\widehat{\rho} = \rho_0 > 0$ tal que:

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\rho_0^2 - C\rho_0^{p+1} - C\rho_0^{2^*} > 0.$$

$\square$

Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$, considere a função cut-off $\Psi \in C_c^\infty(I\!R^N)$ com suporte compacto em $B_{2R} \subset \Omega$ tal que: $\Psi \equiv 1$ sobre B_R e $0 \leq \Psi \leq 1$ sobre B_{2R}.

Dado $\epsilon > 0$, defina:

$$\Psi_\epsilon(x) := \Psi(x)U_\epsilon(x),$$

onde

$$U_\epsilon(x) := \frac{(\epsilon N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2))^{\frac{N-2}{2}}}\ , x\ \in I\!R^N$$

satisfaz: $-\Delta U_\epsilon = {U_\epsilon}^{2^*-1}$ em $I\!R^N$ e $\|U_\epsilon\|^2_{H_0^1(I\!R^N)} = \|U_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(I\!R^N)} = S^{\frac{N}{2}}$.

Agora, defina a função vetorial dada por:

$$\vec{u}_\epsilon(x) := \Psi_\epsilon(x)\ (0,1)\ .$$

Sejam $R, r > 0$, nosso objetivo é escolher $Q = [0, Re] \oplus (\bar{B}_r \cap E^-)$ e $\rho > 0$ tais que:

(A) $\quad I\big|_{\partial S_\rho} \geq \alpha > 0, \quad \rho < R$, onde $S_\rho = \partial B_\rho \cap E^+$,

(B) $\quad I\,|_{\partial Q} < \alpha$,

(C) $\quad \max_{\bar{Q}} I < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$.

A condição (C) é usada para provar que a solução obtida como limite fraco de uma seqüência (PS) no nível minimax é não trivial.

Assim, escolha e dependendo de ϵ da forma:

$$e = \vec{e_\epsilon} = (0, P_+\Psi_\epsilon) \in E^+.$$

Observação 11 *:*
$P_+\Psi_\epsilon \in A := (span\,\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\})^\perp$ *e* $\langle (0, P_+\Psi_\epsilon), (0, \phi_j)\rangle_{(L^2)^2} = \int_\Omega P_+\Psi_\epsilon \,.\, \phi_j \, dx = 0$, $j = 1, ..., k$, *logo* $e \in E^+$.

Lema 4.9. *Se* $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, *então existem* $r_0, R_0 > 0$ *e* $\epsilon_0 > 0$ *tais que para* $r \geq r_0, R \geq R_0$ *e* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ *nós temos:*

$$I\,|_{\partial Q} < \alpha,$$

onde $\alpha > 0$ *é determinado no Lema 4.8.*

Demonstração. Seja $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, onde:

$\Gamma_1 = \bar{B_R} \cap E^-$,
$\Gamma_2 = \{v \in (H_0^1(\Omega))^2 \;/\; v = w + s\vec{e_\epsilon},\ com\ w \in E^-,\ \|w\|_E = r,\ 0 \leq s \leq R\}$,
$\Gamma_3 = \{v \in (H_0^1(\Omega))^2 \;/\; v = w + R\vec{e_\epsilon},\ com\ w \in E^- \cap B_r(0)\}$.

Mostraremos que sobre cada Γ_i, temos: $I\,|_{\Gamma_i} < \alpha,\ i = 1, 2, 3$.

(i) Para $v \in \Gamma_1$ $(\subset E^-)$.

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (Av, v) dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v_1 + u_{rt})_+^{p+1} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_2 + v_{rt})_+^{2^*} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (Av, v) dx \leq \frac{1}{2}(\lambda_k - \mu_1)\int_\Omega |v|^2 \, dx \leq 0.$$

(ii) Para $v \in \Gamma_2$, nós distingüimos dois casos:
Defina
$$\delta^2 := \sup_{0<\epsilon\leq 1} \int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2 dx.$$
(1º *caso*) Se $0 \leq s \leq s_0 := \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$, onde $\widehat{\alpha}$ é dado no Lema 4.8.

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w+s\vec{e_\epsilon})|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (A(w+s\vec{e_\epsilon}),(w+s\vec{e_\epsilon}))dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w+s\vec{e_\epsilon})|^2\, dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w+s\vec{e_\epsilon}|^2\, dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx - \frac{\mu_1}{2\lambda_k}\int_\Omega |\nabla w|^2\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right) r^2 + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx \leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx \leq \frac{s^2}{2}\delta^2 \leq \widehat{\alpha}.$$

(2º *caso*) Se $s \geq s_0 := \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$, denote:

$$K := sup\left\{ \left\| \frac{w+(u_{rt},v_{rt})}{s} \right\|_{(L^\infty)^2} \; : \; s_0 \leq s \leq R,\ \|w\|_E = r,\ w\in E^- \right\}.$$

$K > 0$ independe de R. Como $P_+\Psi_\epsilon(0) \to \infty$, quando $\epsilon \to 0$, existe $\epsilon_0' > 0$ tal que $\forall\, \epsilon,\ 0<\epsilon<\epsilon_0'$ e $s \geq s_0$ temos:

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \;/\; e_\epsilon(x) := P_+\Psi_\epsilon(x) > K\} \neq \phi.$$

Analogamente ao (1º *caso*) temos que,

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (Av,v)dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_2+v_{rt})_+^{2^*}\, dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right) r^2 + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\, dx - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} dx.$$
Assim, pelos Lemas C.4, C.2 e C.1 (veja Apêndice C) segue que:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right) r^2 + \frac{s^2}{2}S^{\frac{N}{2}} + \frac{s^2}{2}O(\epsilon^{N-2}) + \frac{s^2}{2}c\,\epsilon^{N-2} -$$

$$-\frac{s^{2^*}}{2^*}\left(\int_{\Omega_\epsilon}|e_\epsilon|^{2^*}+\int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{w_2+v_{rt}}{s}\right|^{2^*}-c\left(\|e_\epsilon\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}+\|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right)\right).$$

Usando o Lema C.3 e novamente o Lema C.1 obtemos:

$$I(v)\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2+\frac{s^2}{2}S^{\frac{N}{2}}-\frac{s^{2^*}}{2^*}S^{\frac{N}{2}}+c\,s^{2^*}\epsilon^{\frac{N-2}{2}}:=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2+\Phi_\epsilon(s).$$

Aplicando o Lema B.4 (do Apêndice B) à $\Phi_\epsilon(s)$ obtemos:

$$I(v)\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\left(S^{\frac{N}{2}}\right)^N}{\left(S^{\frac{N}{2}}\right)^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}}+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2+\frac{1}{2}S^{\frac{N}{2}}+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Como $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2\to-\infty$ quando $r\to\infty$, podemos escolher $r>0$ tal que $I(v)<0$, (isto determina $r=r_0$).

(iii) Para $v\in\Gamma_3$, temos que $v=w+R\vec{e_\epsilon}$ com $w\in E^-\cap B_r(0)$ e

$$I(v)\leq\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla(w+R\vec{e_\epsilon})|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_\Omega(A(w+R\vec{e_\epsilon}),(w+R\vec{e_\epsilon}))dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega(v_2+v_{rt})_+^{2^*}dx\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla(w+R\vec{e_\epsilon})|^2\,dx-\frac{\mu_1}{2}\int_\Omega|w+R\vec{e_\epsilon}|^2\,dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega(v_2+v_{rt})_+^{2^*}dx.$$

Como $v_2=w_2+Re_\epsilon$ e $w\in E^-$ segue que:

$$I(v)\leq\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla w|^2\,dx+\frac{R^2}{2}\int_\Omega|\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx-\frac{\mu_1}{2}\int_\Omega|w|^2\,dx-\frac{\mu_1R^2}{2}\int_\Omega|\vec{e_\epsilon}|^2\,dx-\frac{1}{2^*}\int_\Omega(v_2+v_{rt})_+^{2^*}dx\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)\|w\|_E^2+\frac{R^2}{2}\int_\Omega|\nabla\vec{e_\epsilon}|^2\,dx-\frac{R^{2^*}}{2^*}\int_\Omega\left(e_\epsilon+\frac{w_2+v_{rt}}{R}\right)_+^{2^*}dx.$$

Pelas limitações de $w\in E^-\cap B_r(0)$ (conseqüentemente de w_2) e v_{rt}, existe $k>0$ tal que $\|w_2+v_{rt}\|_{L^\infty}\leq k$. Novamente, como $P_+\Psi_\epsilon(0)\to\infty$, quando $\epsilon\to0$, existe $\epsilon_0>0$ (tomando $\epsilon_0<\epsilon_0'$) tal que $\forall\,0<\epsilon<\epsilon_0$ temos que: $e_\epsilon(0):=P_+\Psi_\epsilon(0)>2k$. Então para cada $0<\epsilon<\epsilon_0$, usando a continuidade de $P_+\Psi_\epsilon$, existem $R_1=R_1(\epsilon),\eta=\eta(\epsilon)$ tais que:

$$\left|\left\{x\in\Omega\;/\;e_\epsilon+\frac{w_2+v_{rt}}{R}>1\right\}\right|\geq\eta>0,\;\forall\,R>R_1.$$

Portanto, achamos $\epsilon_0, R_0 > 0$ tais que para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e $R > R_0$ temos que: $I(v) \leq 0 \quad \forall v \in \Gamma_3$. De fato, seja $R_0 = max\{R_1, R_2\}$, onde R_2 é tal que $\alpha R_2^2 - {R_2}^{2^*} < 0$, com $\alpha = \frac{N}{N-2}\left(\eta^{-1}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\right)$.

Logo, para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e $R > R_0$ temos:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)\|w\|_E^2 + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx - \frac{R^{2^*}}{2^*}\int_C \left(e_\epsilon + \frac{w_2 + v_{rt}}{R}\right)_+^{2^*} dx,$$

onde $C = \left\{x \in \Omega \ / \ e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{R} > 1\right\}$ é tal que $|C| \geq \eta > 0$.

Portanto,

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)\|w\|_E^2 + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx - \frac{R^{2^*}}{2^*}\int_C 1^{2^*} dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)\|w\|_E^2 + \frac{R^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx - \frac{R^{2^*}}{2^*}\eta \leq 0.$$

□

Lema 4.10. *Suponha que a dimensão $N > 6$ e $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$, então:*

$$\max_{\bar{Q}} I < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Demonstração. Seja $\epsilon < \epsilon_0$ fixo, de modo que a geometria do Teorema de Enlace ocorra.

(1º *caso*) Se $0 \leq s \leq s_0$, com s_0 suficientemente pequeno ($s_0 = \sqrt{2\beta}/\delta$, onde $0 < \beta < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$).

Para $v = w + s\vec{e_\epsilon} \in Q$, temos:

$$I(v) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w + s\vec{e_\epsilon})|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (A(w + s\vec{e_\epsilon}), (w + s\vec{e_\epsilon}))dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w + s\vec{e_\epsilon})|^2\, dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w + s\vec{e_\epsilon}|^2\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\, dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx - \frac{\mu_1}{2\lambda_k}\int_\Omega |\nabla w|^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu_1}{\lambda_k}\right)r^2 + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx \leq \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla \vec{e_\epsilon}|^2\, dx \leq \frac{s^2}{2}\delta^2 \leq \beta < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

(2º *caso*) Se $s \geq s_0 := \sqrt{2\beta}/\delta$, segue que:

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (Av, v)dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (v_1 + u_{rt})_+^{p+1}dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (v_2 + v_{rt})_+^{2^*}dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w+s\vec{e_\epsilon})|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w+s\vec{e_\epsilon}|^2\,dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega (w_2+se_\epsilon+v_{rt})_+^{2^*}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx + \frac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \frac{\mu_1}{2}\int_\Omega |w|^2\,dx - \frac{\mu_1 s^2}{2}\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} dx.$$

Agora, observe que:

$\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx - \mu_1 \int_\Omega |w|^2\,dx \leq 0$ e $\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx \geq 0.$

De fato, $\lambda_k < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1}$ e $w \in E^- := \langle (0,\phi_i),(\phi_i,0)\rangle_{1\leq i \leq k}$, assim $\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \leq \lambda_k \int_\Omega |w|^2\,dx \leq \mu_1\int_\Omega |w|^2\,dx.$

Também,

$e_\epsilon = P_+\Psi_\epsilon \in \overline{span}\{\phi_{k+1},\phi_{k+2},...\}$, assim $\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx \geq \lambda_{k+1}\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx \geq \mu_1 \int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx.$

Usando os Lemas C.4 e C.2 do Apêndice C, a observação acima e a última desigualdade, temos:

$$I(v) \leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx\right) -$$

$$-\frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*}\,dx - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{w_2+v_{rt}}{s}\right|^{2^*} dx + c\,\frac{s^{2^*}}{2^*}\left(\|e_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1} + \|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{s^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx\right) - \frac{s^{2^*}}{2^*}\int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*} + c\,s^{2^*}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} := \Phi_\epsilon(s).$$

Aplicando o Lema B.4 (veja Apêndice B) à $\Phi_\epsilon(s)$ com

$$A = \int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2\,dx - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\,dx,$$

$$B = \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*}\,dx \;\; e \;\; \alpha = \frac{N-2}{2},$$

obtemos:

$$\Phi_\epsilon(s) \leq \Phi_\epsilon(s_\epsilon) = \frac{1}{N}\left(\frac{A^N}{B^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}} + O(\epsilon^\alpha) = \frac{1}{N}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla e_\epsilon|^2 - \mu_1\int_\Omega |e_\epsilon|^2\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_{\Omega_\epsilon}|e_\epsilon|^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{2}}} + O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Usando as estimativas dos Lemas C.1 e C.2 sobre e_ϵ (veja Apêndice C), segue que:

$$I(w+s\vec{e_\epsilon}) \leq \Phi_\epsilon(s) \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\left(S^{\frac{N}{2}}+O(\epsilon^{N-2})-\mu_1 d\epsilon^2+O\left(\epsilon^{N-2}\right)\right)^{\frac{N}{2}}\left(S^{\frac{N}{2}}+O(\epsilon^{N})+O(\epsilon^{N-2})\right)^{\frac{-N+2}{2}}+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})\leq$$

$$\leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}-\mu_1 O\left(\epsilon^2\right)+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Assim,

$$I(w+s\vec{e_\epsilon})\leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}-\mu_1 O\left(\epsilon^2\right)+O(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).$$

Como $N>6$, (ou $\frac{N-2}{2}>2$) temos:

$$-\mu_1\, O\left(\epsilon^2\right)+O\left(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\right)<0$$

para $0<\epsilon<1$ suficientemente pequeno.

Logo, $I(w+s\vec{e_\epsilon})<\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}\;\;\forall\;\; w+s\vec{e_\epsilon}\in Q$, e conseqüentemente $\max_{\bar{Q}} I<\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

□

Lema 4.11 . *Suponhamos $N>6$, $\mu_2<\lambda_{k+1}$ e que (U_n) seja uma seqüência $(PS)_c$, então (U_n) é limitada em $E=(H_0^1(\Omega))^2$.*

Demonstração. Sabemos que:

$$I(U_n)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla U_n|^2-\frac{1}{2}\int_\Omega A(U_n,U_n)-\frac{1}{p+1}\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^{p+1}-\frac{1}{2^*}\int_\Omega(v_n+v_{rt})_+^{2^*}=c+o(1), \tag{4.19}$$

$$\langle I'(U_n),\Psi\rangle=\int_\Omega\nabla U_n\nabla\Psi-\int_\Omega(AU_n,\Psi)-\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^p\varphi-\int_\Omega(v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}\xi=o(1)\left\|\Psi\right\|_E$$

$\forall\;\;\Psi=(\varphi,\xi)\in E=(H_0^1)^2$, e c é o nível minimax.

Agora,

$$I(U_n)-\frac{1}{2}\left\langle I'(U_n)U_n\right\rangle=$$

$$=-\frac{1}{p+1}\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^{p+1}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{N})\int_\Omega(v_n+v_{rt})_+^{2^*}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^p u_n+\frac{1}{2}\int_\Omega(v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n.$$

Observando que:

$$\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^p u_n=\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^{p+1}-\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^p u_{rt},$$

usando uma expressão análoga para $\frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} v_n$, segue que:

$$I(U_n) - \frac{1}{2}\langle I'(U_n)U_n\rangle = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n +$$

$$+\frac{1}{N}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} - \frac{1}{p+1}\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_{rt} - \frac{1}{2}\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} v_{rt} \leq$$

$$\leq c + o(1) + \epsilon_n \|U_n\|_E .$$

Assim,

$$\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1} \ , \ \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*} \leq c + o(1) + \epsilon_n \|U_n\|_E .$$

Isto implica que:

$$\left(\int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^{p+1}\right)^{\frac{2p}{p+1}} \leq K + \epsilon_n \|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}} ,$$

$$\left(\int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*}\right)^{\frac{N+2}{N}} \leq K + \epsilon_n \|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} . \tag{4.20}$$

Pela equação (4.19), com $(\varphi,\xi) = (u_n^+, v_n^+) \in E^+$ temos:

$$\epsilon_n \left\|(u_n^+, v_n^+)\right\|_E + \int_\Omega (u_n+u_{rt})_+^p u_n^+ + \int_\Omega (v_n+v_{rt})_+^{2^*-1} v_n^+ =$$

$$= \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^+ + \int_\Omega \nabla v_n \nabla v_n^+ - \int_\Omega (A(u_n,v_n),(u_n^+,v_n^+)).$$

Como $(u_n,v_n) = (u_n^+ + u_n^-, v_n^+ + v_n^-) = (u_n^+,v_n^+) + (u_n^-,v_n^-) \in E^+ \oplus E^- = E$, a expressão anterior é igual a:

$$\int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^2 + \int_\Omega \left|\nabla v_n^+\right|^2 - \int_\Omega (a u_n u_n^+ + b u_n v_n^+ + b v_n u_n^+ + d v_n v_n^+) =$$

$$= \int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^2 + \int_\Omega \left|\nabla v_n^+\right|^2 - a\int_\Omega \left|u_n^+\right|^2 - d\int_\Omega \left|v_n^+\right|^2 - 2b\int_\Omega u_n^+ v_n^+ =$$

$$= \int_\Omega \left|\nabla u_n^+\right|^2 + \int_\Omega \left|\nabla v_n^+\right|^2 - \int_\Omega (A(u_n^+,v_n^+),(u_n^+,v_n^+)).$$

Assim, usando que $(AU,U) \leq \mu_2 |U|^2$ e o fato:

$$\left\|w_n^+\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \left\|w_n^+\right\|_{H_0^1}^2 \ \forall\, w \in \overline{span}\{\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, ...\} ,$$

obtemos:

$$\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right)\leq\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^p u_n^+ +\int_\Omega(v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}v_n^+ +\epsilon_n\left\|(u_n^+,v_n^+)\right\|_E\leq$$

$$\leq\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^p|u_n^+|+\epsilon_n\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\int_\Omega(v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}|v_n^+|+\epsilon_n\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}. \qquad (4.21)$$

Por outro lado, pelas desigualdades de Hölder, Young, (4.20) e as imersões $H_0^1\hookrightarrow L^{p+1}$, $H_0^1\hookrightarrow L^{2^*}$ temos:

$$\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^p|u_n^+|+\epsilon_n\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}\leq\|(u_n+u_{rt})_+\|_{L^{p+1}}^p\left\|u_n^+\right\|_{L^{p+1}}+\epsilon_n\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}\leq$$

$$\leq\epsilon\left(\int_\Omega\left|u_n^+\right|^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}+C_\epsilon\left(\int_\Omega(u_n+u_{rt})_+^{p+1}\right)^{\frac{2p}{p+1}}+\epsilon_n\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}\leq$$

$$\leq\epsilon\, C\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2+C_\epsilon+\epsilon_n\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}+\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}\right). \qquad (4.22)$$

De forma análoga,

$$\int_\Omega(v_n+v_{rt})_+^{2^*-1}|v_n^+|+\epsilon_n\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\leq\epsilon\, C\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2+C_\epsilon+\epsilon_n\left(\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right). \quad (4.23)$$

Logo, por (4.21), (4.22) e (4.23),

$$\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right)\leq$$

$$\leq\epsilon\, C\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right)+2C_\epsilon+\epsilon_n\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}+\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}+\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right).$$

Tomando $\epsilon=\frac{1}{2\,C}\left(1-\frac{\mu_2}{\lambda_{k+1}}\right)>0$ segue a seguinte desigualdade:

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}^2+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}^2\right)\leq C+\epsilon_n\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}+\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}+\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right). \qquad (4.24)$$

Analogamente, usando o mesmo argumento para $(u_n^-,v_n^-)\in E^-$ obtemos:

$$\left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}^2+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}^2\right)\leq C+\epsilon_n\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}+\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right). \qquad (4.25)$$

Usando as desigualdades (4.24) e (4.25) temos:

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right)^2\leq C_1+C_2\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}}+\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}}+\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right),$$

$$\left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq C_1 + C_2\left(\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}} + \|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + \left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right).$$

Somando as expressões acima, segue que:

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right)^2 + \left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq$$

$$\leq K_1 + K_2\,\|U_n\|_E^{\frac{2p}{p+1}} + K_3\,\|U_n\|_E^{\frac{N+2}{N}} + K_4\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right) \leq$$

$$\leq K_1 + K_2\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^{\frac{2p}{p+1}} +$$

$$+K_3\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^{\frac{N+2}{N}} +$$

$$+K_4\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right).$$

Por outro lado,

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq 2\left[\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}\right)^2 + \left(\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2\right].$$

Assim, pelas duas últimas desigualdades temos:

$$\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^2 \leq$$

$$\leq C + C\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^{\frac{2p}{p+1}} +$$

$$+C\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right)^{\frac{N+2}{N}} +$$

$$+C\left(\left\|u_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|u_n^-\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^+\right\|_{H_0^1}+\left\|v_n^-\right\|_{H_0^1}\right).$$

Como $N > 6 \Rightarrow \frac{N+2}{N} < 2$ e como $\frac{2p}{p+1} < 2$, temos que a seqüência $(\alpha_n) = \left(\|u_n^+\|_{H_0^1} + \|u_n^-\|_{H_0^1} + \|v_n^+\|_{H_0^1} + \|v_n^-\|_{H_0^1}\right)$ é limitada.

Logo, $\|U_n\|_E \leq \|u_n\|_{H_0^1} + \|v_n\|_{H_0^1} \leq \|u_n^+\|_{H_0^1} + \|u_n^-\|_{H_0^1} + \|v_n^+\|_{H_0^1} + \|v_n^-\|_{H_0^1}$ é limitada.

□

Demonstração do Teorema 4.2

Usando o Teorema de Enlace (com $e = \vec{e_\epsilon} = (0, P_+\Psi_\epsilon) \in E^+$ e $\epsilon < \epsilon_0$ suficientemente pequeno de modo a valer o Lema 4.10) e os Lemas 4.8 e 4.9, existe uma seqüência $(U_n) \subset E$ tal que $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$. Assim, o Lema 4.11 garante que (U_n) é limitada. Portanto, podemos assumir que: $U_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup (u,v) =: z$ em E.

Para finalizar o Teorema, basta mostrarmos que a solução $z = (u,v)$ (veja Lema 4.6) obtida como limite fraco da seqüência (PS) no nível minimax c é não nula. Mas este fato é conseqüência do Lema 4.7.

$\square$

OBSERVAÇÃO 12 *: Embora os Lemas deste capítulo são resultados análogos aos Lemas dos capítulos 2 e 3, o caso misto apresenta algumas dificuldades técnicas em relação ao caso crítico. Primeiramente no Lema 4.8, nós não obtemos o valor máximo $\widehat{\alpha}$ para a função $\alpha(\rho)$ como obtemos no caso crítico (Lema 3.2). Esse fato não nos causou grandes problemas para chegarmos ao nosso objetivo que é mostrar o Teorema 4.2, pois, nas provas dos Lemas 4.9 e 4.10 contornamos esse obstáculo observando que a arbitrariedade do valor $s_0 > 0$ (Lema C.4 do Apêndice C) fez com que possamos escolhê-lo de duas formas distintas e sem a necessidade da dependência do máximo $\widehat{\alpha}$. Lembre-se que no caso crítico (Lemas 3.3 e 3.4) escolhemos $s_0 = \sqrt{2\widehat{\alpha}}/\delta$. Além disso, é importante observar que na demonstração do Lema 4.7, necessitamos do uso do Teorema da Convergência Dominada para mostrarmos que $\int_\Omega u_n^{p+1} \to 0$. Este fato permitiu aplicarmos o Lema 2.6 do capítulo 2 para concluir que a solução obtida como limite fraco de uma seqüência (PS) é não-nula.*

Capítulo 5

Resultados de não-existência

Uma importante ferramenta para mostrar a não existência de soluções para equações elípticas é a *identidade de Pohozăev*. Iremos enunciar uma versão adaptada para sistemas que pode ser encontrada em [30].

Teorema 5.1 . *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que $F(s,z) = 0$ se $s = z = 0$, e suponha que $(u,v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})\right)^2$ seja solução do sistema:*

$$\begin{cases} -\Delta u = F_s(u,v) & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = F_z(u,v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então a identidade ocorre:

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx - 2^* \int_\Omega F(u,v)dx + \frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2\right)(x,\nu)_{\mathbb{R}^N} d\sigma = 0, \tag{5.1}$$

onde $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ é a derivada normal exterior à $\partial\Omega$ no ponto $x \in \partial\Omega$.

Dizemos que Ω é um domínio estrelado com respeito à um ponto $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ se $(x - x_0)\ .\ \nu(x) > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, onde $\nu = \nu(x)$ é a normal unitária e exterior à $\partial\Omega$.

Usaremos o Teorema 5.1 para mostrar o seguinte resultado:

TEOREMA 5.2. *Suponha que Ω é um domínio estrelado com respeito à $0 \in I\!R^N$ com $N \geq 3$, $\mu_2 \leq 0$ e $p, q \geq 2^* - 1$. Então o sistema:*

$$\begin{cases} -\Delta u = au + bv + u_+^p & \text{em } \Omega \\ -\Delta v = bu + dv + v_+^q & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

não tem solução não-trivial.

Demonstração. Multiplicando a primeira equação por u, a segunda por v, integrando por partes e somando as equações resultantes obtemos:

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) dx = \int_\Omega (AU, U)dx + \int_\Omega (u_+)^p u dx + \int_\Omega (v_+)^q v dx. \tag{5.3}$$

Por outro lado, aplicando o Teorema 5.1 segue que:

$$\int_\Omega (AU,U)dx + \int_\Omega (u_+)^p u dx + \int_\Omega (v_+)^q v dx -$$

$$-2^* \int_\Omega \left(\frac{a}{2}u^2 + buv + \frac{(u_+)^{p+1}}{p+1} + \frac{d}{2}v^2 + \frac{(v_+)^{q+1}}{q+1}\right) dx + \frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2\right)(x,\nu)_{I\!R^N} d\sigma = 0.$$

Reescrevendo a equação acima temos:

$$\int_\Omega (AU,U)dx + \int_\Omega (u_+)^{p+1} dx + \int_\Omega (v_+)^{q+1} dx -$$

$$-\frac{2^*}{2}\int_\Omega (AU,U)dx - 2^* \int_\Omega \left(\frac{(u_+)^{p+1}}{p+1} + \frac{(v_+)^{q+1}}{q+1}\right) dx + \frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2\right)(x,\nu)_{I\!R^N} d\sigma = 0.$$

Assim,

$$\left(1 - \frac{2^*}{2}\right)\int_\Omega (AU,U)dx + \left(1 - \frac{2^*}{p+1}\right)\int_\Omega (u_+)^{p+1} dx + \left(1 - \frac{2^*}{q+1}\right)\int_\Omega (v_+)^{q+1} dx +$$

$$+\frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2\right)(x,\nu)_{I\!R^N} d\sigma = 0. \tag{5.4}$$

($1^{\underline{o}}$ *caso*) $p = q = 2^* - 1$.

Pela equação (5.4) temos:

$$-\left(1 - \frac{2^*}{2}\right)\int_\Omega (AU,U)dx = \frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2\right)(x,\nu)_{I\!R^N} d\sigma \geq 0.$$

Assim, $\int_\Omega (AU, U)dx \geq 0$.

(i) Se $\mu_2 < 0$,

$$0 \leq \int_\Omega (AU, U)dx \leq \mu_2 \int_\Omega |U|\, dx \leq 0,$$

assim $U = 0$.

(ii) Se $\mu_2 = 0$,

$$\mu_2 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - b^2)}}{2} = 0$$

implica que

$$a, d \leq 0 \;\; e \;\; b^2 = ad. \tag{5.5}$$

O caso que requer mais cuidado é quando $a, d < 0$.

Sabemos que:

$$\int_\Omega (AU, U)dx = a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2b(u, v)_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2 = 0. \tag{5.6}$$

Assim,

$$0 = a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2b(u, v)_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2 \leq a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2|b|\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2 \tag{5.7}$$

Se $U = (u, v) = (0, 0)$ a prova está terminada. Então, suponha sem perda de generalidade que $v \neq 0$. Substituindo (5.5) em (5.7) temos:

$$0 \leq a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2\sqrt{ad}\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2$$

com $a, d < 0$.

Isto implica que a desigualdade estrita em (5.7) não pode ocorrer, pois se:

$$0 < a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2\sqrt{ad}\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2 = a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2\sqrt{-a}\,\|u\|_{L^2}\,\sqrt{-d}\,\|v\|_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2,$$

como $2\sqrt{-a}\,\|u\|_{L^2}\,\sqrt{-d}\,\|v\|_{L^2} \leq -a\,\|u\|_{L^2}^2 - d\,\|v\|_{L^2}^2$, obtemos uma contradição com a desigualdade anterior.

Logo,

$$a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2|b|\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2 = 0 \tag{5.8}$$

Usando as equações (5.6) e (5.8),

$$a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2b(u, v)_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2 = 0 = a\,\|u\|_{L^2}^2 + 2|b|\,\|u\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} + d\,\|v\|_{L^2}^2.$$

Portanto,

$$(u,v)_{L^2} = \pm \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

Assim,

$$cos\theta = \frac{(u,v)_{L^2}}{\|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}} = \pm 1,$$

onde θ é o ângulo entre u e v.

Conseqüentemente, existe $\delta \in I\!R$ tal que:

$$u = \delta v. \tag{5.9}$$

Agora, por (5.6) e (5.9) temos que:

$$0 = a\|u\|_{L^2}^2 + 2b(u,v)_{L^2} + d\|v\|_{L^2}^2 = a\delta^2\|v\|_{L^2}^2 + 2b\delta\|v\|_{L^2}^2 + d\|v\|_{L^2}^2.$$

Assim, como $v \neq 0$ e $b^2 = ad$, segue que: $a\delta^2 + 2b\delta + d = 0 \quad$ e

$$\delta = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4ad}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Usando a relação $u = \delta v$ na segunda equação do sistema (5.2) e lembrando que $b^2 = ad$, obtemos:

$$\begin{cases} -\Delta v = b\left(\frac{-b}{a}\right)v + dv + v_+^q = v_+^q & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando a identidade de *Pohozăev* no caso escalar, temos que v deve satisfazer:

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} v_\nu^2(x,\nu) = N\int_\Omega \frac{1}{q+1}(v_+)^{q+1} + \frac{2-N}{2}\int_\Omega v(v_+)^q = \left(\frac{N}{q+1} + \frac{2-N}{2}\right)\int_\Omega (v_+)^{q+1}.$$

Como $q+1 = 2^* \Rightarrow \frac{N}{q+1} = \frac{N-2}{2}$, segue que:

$$\int_{\partial\Omega} v_\nu^2(x,\nu)d\sigma = 0.$$

Usando o fato que Ω é um domínio estrelado (i.é: $x\ .\ \nu > 0$ sobre $\partial\Omega$), temos que $v_\nu = 0$ em $\partial\Omega$.

Por outro lado, pelo Princípio de Máximo, se $v \neq 0$ então $v > 0$ em Ω, mas isto contradiz o seguinte Teorema:

Considere a equação:

$$\begin{cases} -\Delta v = f(x) & \text{em } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.10}$$

$(Gilbarg - Trudinger[23])$ Se $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega),\ f\ \geq 0$ em Ω limitado suave.
(a) Então para toda solução fraca v de (5.10) temos $v \geq 0$.
(b) Se $f \in L^p(\Omega),\ p > N$ e $f > 0$ sobre um conjunto de medida positiva em Ω, então $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}),\ v_\nu < 0$ sobre $\partial\Omega$ e $v > 0$ em Ω, onde $v_\nu = \nabla v.\nu$ é a derivada direcional de $u : \Omega \rightarrow I\!R$ no sentido do vetor unitário ν apontando para fora da $\partial\Omega$.

($2^{\underline{o}}$ *caso*) $p, q > 2^* - 1$.

Lembramos que a equação (5.4) nos diz que:

$$\left(1 - \frac{2^*}{2}\right)\int_\Omega (AU, U)dx + \left(1 - \frac{2^*}{p+1}\right)\int_\Omega (u_+)^{p+1}dx + \left(1 - \frac{2^*}{q+1}\right)\int_\Omega (v_+)^{q+1}dx +$$

$$+\frac{1}{N-2}\int_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(x, \nu)_{I\!R^N}d\sigma = 0.$$

Como $(AU, U) \leq \mu_2 \left|U\right|^2 \leq 0$ segue que:

$$\left(1 - \frac{2^*}{p+1}\right)\int_\Omega (u_+)^{p+1}dx + \left(1 - \frac{2^*}{q+1}\right)\int_\Omega (v_+)^{q+1}dx \leq 0,$$

assim:

$$\int_\Omega (u_+)^{p+1}dx = 0 = \int_\Omega (v_+)^{q+1}dx. \tag{5.11}$$

Usando as equações (5.3), (5.11) e a hipótese $\mu_2 \leq 0$ temos que:

$$\|(u, v)\|_E^2 = \int_\Omega (AU, U)dx \leq 0 \Rightarrow U = 0.$$

□

O Teorema acima nos diz que no caso particular dos problemas dos capítulos 2 e 3 em que $f, g = 0$, se p, q são potências críticas (ou supercríticas) e a matriz simétrica A é definida negativa, o sistema (5.2) não possui solução não-nula.

É importante lembrar que o sistema (5.2) não possui solução negativa se $det(A - \lambda_j I) \neq 0,\ \forall j = 1, 2, ...$ (veja Apêndice A). O próximo resultado nos mostra que, sob as condições: $b \geq 0$ e $\mu_2 \geq \lambda_1$, o mesmo problema não possui solução positiva. Observe que o Teorema do capítulo 3 satisfaz as duas condições descritas acima, logo no caso particular em que $f, g = 0$, esse resultado além de garantir a não-existência de solução negativa, também garantirá a não-existência de solução positiva. Portanto, a não-homogeneidade desempenha um papel fundamental para a existência de soluções.

Teorema 5.3. *Seja $\Omega \in I\!R^N$ um domínio limitado suave.*
Suponha $b \geq 0$ e $\mu_2 \geq \lambda_1$ (ou $b \leq 0$ e $\mu_1 \leq \lambda_1$). Então o sistema (5.2) não possui solução positiva.

Demonstração. Suponha $U = (u, v)$ seja uma solução positiva de (5.2). Seja $X = (x, y)$ autovetor associado ao maior autovalor μ_2 da matriz A. Podemos sempre assumir que o autovetor X é não negativo com $x > 0$ ou $y > 0$.

De fato, $\mu_2 = \frac{a+d}{2} + \frac{\sqrt{(a-d)^2+4b^2}}{2}$ e $X = (x, y)$ devem satisfazer o seguinte sistema:

$$\begin{cases} (a-\mu_2)x + by = 0 \\ bx + (d-\mu_2)y = 0. \end{cases}$$

Observe que $\mu_2 \geq \frac{a+d}{2}$. Sem perda de generalidade, suponha que $d \geq a$, assim, $\mu_2 \geq a$. Logo,
(i) Se $b = 0$ então $(a-\mu_2)x = 0$ e $\mu_2 = d$, logo, basta tomar $X = (0, y)$ com $y > 0$.
(ii) Se $b > 0$ então $\frac{a-\mu_2}{b} \leq 0$. Como μ_2 é autovalor de A, segue que μ_2 satisfaz a equação $(a-\mu_2)(d-\mu_2) - b^2 = 0$, ou seja, o determinante da matriz: $M = \begin{pmatrix} (a-\mu_2) & b \\ b & (d-\mu_2) \end{pmatrix}$ é igual a zero. Logo, uma solução para o sistema acima é $X = \left(x, -\left(\frac{a-\mu_2}{b}\right)x\right)$, com $x > 0$.

Portanto, o autovetor $X = (x, y)$ é não negativo com $x > 0$ ou $y > 0$, como afirmamos anteriormente.

Agora, multiplicando a primeira equação do sistema (5.2) por $x\phi_1$, a segunda por $y\phi_1$ e somando as equações resultantes, obtemos:

$$\left(-\vec{\Delta}U, \phi_1 X\right)_{I\!R^2} = (AU, \phi_1 X)_{I\!R^2} + u_+^p x\phi_1 + v_+^q y\phi_1. \tag{5.12}$$

Assim, integrando por partes a equação (5.12), usando a simetria da matriz A e observando que se $U = (u, v) > 0$ então $\int_\Omega (u_+^p x\phi_1 + v_+^q y\phi_1) > 0$.

Logo:

$$\int_\Omega \left(-\vec{\Delta}U, \phi_1 X\right)_{I\!R^2} - \int_\Omega (AU, \phi_1 X)_{I\!R^2} = (\lambda_1 - \mu_2)\int_\Omega (u\phi_1 x + v\phi_1 y) > 0.$$

Como $\int_\Omega (u\phi_1 x + v\phi_1 y) > 0$ temos que $\lambda_1 > \mu_2$, o que é uma contradição.

O caso $b \leq 0$ e $\mu_1 \leq \lambda_1$ é análogo.

$\square$

Observamos também que o caso escalar ($u = v,\ b = 0 = c,\ a = d,\ f = g$ e $p = q$) do sistema

$$\begin{cases} -\Delta U = AU + \begin{pmatrix} u_+^p \\ v_+^q \end{pmatrix} + F & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $p, q > 1$, trabalhado por De Figueiredo-Jianfu [17] no caso crítico, e também no caso subcrítico trabalhado por B. Ruf - P. N. Srikanth [28], é possível obter um resultado de não-existência. Neste caso, o sistema toma a forma

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + u_+^p + f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.13}$$

Considere a parametrização da equação dada por: $f = t\phi_1 + f_1$, onde $t \in I\!R,\ f_1 \in L^2(\Omega)$ é uma função fixa tal que $\int_\Omega f_1\phi_1 = 0$.

Se $0 < \lambda < \lambda_1$ temos que existe t_0 tal que o problema (5.13) não tem solução para $t > t_0$. De fato, defina $g(s) := \lambda s + s_+^p$. Assim,

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda < \lambda_1 < +\infty = \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s}.$$

Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que:

(i) $g(s) \geq \lambda s - C,\ \forall\, s \in I\!R,\ \forall\, x \in \Omega,$

(ii) $g(s) \geq As - C$ com $A > \lambda_1,\ \forall\, s \in I\!R,\ \forall\, x \in \Omega.$

Suponha que u seja uma solução fraca de (5.13). Multiplicando a equação por ϕ_1, integrando por partes e usando a perpendicularidade entre f_1 e ϕ_1 em $L^2(\Omega)$, segue que:

$$\lambda_1 \int_\Omega u\phi_1 = \int_\Omega g(u)\phi_1 + t.$$

Por (i) e (ii) obtemos:

$$\lambda_1 \int_\Omega u\phi_1 \geq \int_\Omega (\lambda u - C)\phi_1 + t = \lambda \int_\Omega u\phi_1 - C\int_\Omega \phi_1 + t,$$

$$\lambda_1 \int_\Omega u\phi_1 \geq \int_\Omega (Au - C)\phi_1 + t = A \int_\Omega u\phi_1 - C\int_\Omega \phi_1 + t.$$

Assim, como $\lambda < \lambda_1 < A$ temos que:

$$t \leq (\lambda_1 - \lambda)\int_\Omega u\phi_1 + C\int_\Omega \phi_1 \leq C\int_\Omega \phi_1,\ \ se\ \ \int_\Omega u\phi_1 \leq 0,$$

$$t \leq (\lambda_1 - A)\int_\Omega u\phi_1 + C\int_\Omega \phi_1 \leq C\int_\Omega \phi_1,\ \ se\ \ \int_\Omega u\phi_1 \geq 0.$$

Então, em qualquer caso $\left(\int_\Omega u\phi_1 \leq 0 \;\; ou \;\; \int_\Omega u\phi_1 \geq 0\right)$, a existência da solução u implica necessariamente que $t \leq t_0 := C\int_\Omega \phi_1$ (t_0 não depende de f_1). Portanto, se $t > t_0$ o problema (5.13) não tem solução.

Apêndice A

Resultados utilizados no Capítulo 1

Definição. Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, I\!R)$ e $c \in I\!R$. O funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ se toda seqüência (u_n) tal que:

$$I(u_n) \to c \;\; e \;\; I'(u_n) \to 0$$

possui uma subseqüência convergente.

É claro que a condição (PS) definida no capítulo 1, implica na condição $(PS)_c$.

TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA (Ambrosetti-Rabinowitz, 1973)

Seja X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, I\!R)$ um funcional satisfazendo a condição $(PS)_c$. Além disso, suponha que existe $e \in X$ com $0 < r < \|e\|$ tal que:

$$max\,\{I(0), I(e)\} < \inf_{\|u\|=r} I(u).$$

Então

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

é um valor crítico de I. Onde a família Γ

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \;: \gamma(0) = 0, \; \gamma(1) = e\}$$

é o conjunto de todos os caminhos que ligam os pontos 0 e e em X.

TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA GENERALIZADO (Rabinowitz, 1982)

Seja $E = W \oplus X$, onde W é um subespaço de dimensão finita, e seja $I \in C^1(E, I\!R)$ satisfazendo a condição (PS). Denote $B_\rho := \{x \in E \;: \|x\| < \rho\}$. Suponha que

I satisfaz:
(a) Existem constantes $\rho, \beta > 0$ tais que $I\Big|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \beta$.
(b) Existem $v \in \partial B_1 \cap X$ e $R > \rho$ tais que se:

$$Q := (\bar{B_R} \cap W) \oplus \{sv \ : 0 \leq s \leq R\} \Rightarrow I\,|_{\partial Q} \leq 0.$$

Então I possui um valor crítico $c \geq \beta$ que pode ser caracterizado como:

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} I(\gamma(u)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C(Q, E) \ : \gamma(u) = u \ \ se \ \ u \in \partial Q\}.$$

Lema A.1. *Considere o sistema linear:*

$$\begin{cases} -\Delta U = AU & \text{em } \Omega \\ U = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.1}$$

O problema (A.1) tem uma solução não nula $\Longleftrightarrow$ $det(A - \lambda_j I) = 0$ *para algum* $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$.

Demonstração. Seja $U = (u, v) \in E := (H_0^1(\Omega))^2$, onde $u = \sum u_j \phi_j$, $v = \sum v_j \phi_j$, assim, podemos escrever $U = (\sum u_j \phi_j \ , \ \sum v_j \phi_j)$.

Denotando por $z_j := (u_j, v_j)$, assim, $U = \sum z_j \phi_j$.

Mostraremos que U é uma solução de (A.1) $\Longleftrightarrow$ $\lambda_j z_j = A z_j$, para algum $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$.

De fato,

$\sum z_j \lambda_j \phi_j = \sum z_j(-\Delta \phi_j) = -\Delta U = AU = A \sum z_j \phi_j \Longleftrightarrow \lambda_j z_j = A z_j$, para algum $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$.

($\Longleftrightarrow$ λ_j é autovalor de A $\Longleftrightarrow$ $det(A - \lambda_j I) = 0$, para algum $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$.

Para maiores detalhes, veja [10] (ou [11]). $\square$

Lema A.2. *Sejam* $A := span\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\}$ *e* $B := A^\perp$.

Dado $\epsilon > 0$, *existe* $v_1 \in B = A^\perp$ *com* $\|v_1\|_{H_0^1} = \epsilon$ *tal que:*

O conjunto $\{x \in \Omega \ / \ v_1(x) + w(x) > 1\}$ *tem medida positiva para cada* $w \in A$ *com* $\|w\|_{H_0^1} \leq 1$.

Demonstração. Suponha por contradição que para cada $v \in B$ com $\|v\|_{H_0^1} = \epsilon$, existe um $w_v \in A$ com $\|w_v\|_{H_0^1} \leq 1$ e tal que:

$$v(x) + w_v(x) - 1 \leq 0 \;\; qtp \;\; em \;\; \Omega.$$

Assim,

$v(x) \leq 1 - w_v(x) \leq k$ qtp em Ω, pois, a função w_v é contínua.

Analogamente $-v(x) \leq const$ qtp em Ω.

Logo, $v \in L^\infty(\Omega) \;\; \forall \, v \, \in B = A^\perp$.

Por outro lado, se $v \in A$, temos também que $v \in L^\infty(\Omega)$.

Portanto, como $H_0^1(\Omega) = A \oplus B$ temos que:

$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, que é falso para $N \geq 2$.

Para maiores detalhes, veja [13].

$\square$

LEMA A.3. *Seja v_1 obtido no Lema A.2, então existe uma constante $\eta = \eta(v_1) > 0$ tal que:*

$$\inf_{w \in A \, , \, \|w\|_{H_0^1} = 1} \left\{ \int_\Omega [(w + v_1 - 1)_+]^2 \right\} \geq \eta > 0.$$

Demonstração. Suponha o contrário, isto é, o ínfimo seja igual a zero. Então existe uma seqüência $w_n \in A = \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle$ com

$\|w_n\|_{H_0^1} = 1$ tal que $(w_n + v_1 - 1)_+ \to 0$ em $L^2(\Omega)$.

De fato,

Dado $\epsilon_n > 0$, pela definição de ínfimo, existe $w_n \in A$ com $\|w_n\|_{H_0^1} = 1$ tal que:

$$\inf_{w \in A \, , \, \|w\|_{H_0^1} = 1} \left\{ \int_\Omega [(w + v_1 - 1)_+]^2 \right\} \leq \inf_{w_n \in A \, , \, \|w_n\|_{H_0^1} = 1} \left\{ \int_\Omega [(w_n + v_1 - 1)_+]^2 \right\} \leq$$

$$\leq \inf_{w \in A \, , \, \|w\|_{H_0^1} = 1} \left\{ \int_\Omega [(w + v_1 - 1)_+]^2 \right\} + \epsilon_n.$$

Assim,

$$0 \leq \inf_{w_n \in A \, , \, \|w_n\|_{H_0^1} = 1} \left\{ \int_\Omega [(w_n + v_1 - 1)_+]^2 \right\} \leq \epsilon_n,$$

e como $\epsilon_n \to 0$, temos o resultado.

Da mesma forma prova-se que $(w_n + v_1 - 1)_- \to 0$ em $L^2(\Omega)$.

Como $w_n \in A = \langle \phi_1, ..., \phi_k \rangle$ (espaço de dimensão finita) e as normas de $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ restrito ao subespaço A são equivalentes, temos:

$$0 \leq \|(w_n + v_1 - 1)_+\|_{H_0^1} \leq C \|(w_n + v_1 - 1)_+\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Portanto, $(w_n + v_1 - 1)_+ \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, e também de forma análoga $(w_n + v_1 - 1)_- \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$.

Usando a desigualdade triangular, obtemos que $w_n + v_1 - 1 \rightarrow 0$ em $H_0^1(\Omega)$, assim, $w_n \rightarrow 1 - v_1 := w_1$ em $H_0^1(\Omega)$ (conseqüentemente em $L^2(\Omega)$).

Lembrando que $\|w_n\|_{H_0^1} = 1$ e observando que:

$$0 \leq \left| \|w_1\|_{H_0^1} - \|w_n\|_{H_0^1} \right| \leq \|w_n - w_1\|_{H_0^1} \rightarrow 0,$$

temos que $\|w_1\|_{H_0^1} = 1$.
Mas, como $(w_1 + v_1 - 1)_+ = (w_1 - (1 - v_1))_+ = (w_1 - w_1)_+ = 0$ e analogamente o mesmo vale para a parte negativa, obtemos uma contradição com o Lema A.2. Para maiores detalhes veja [13].

□

Apêndice B

Resultados utilizados no Capítulo 2

Lema B.1 . *Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$ com $2 \leq p \leq 2^*$. Se $\Sigma \subset \Omega$ e $u+v>0$ sobre Σ, então:*

$$\left| \int_\Sigma (u+v)^p - \int_\Sigma |u|^p - \int_\Sigma |v|^p \right| \leq C \int_\Sigma \left(|u|^{p-1} |v| + |u| |v|^{p-1} \right),$$

onde C depende somente de p.

Demonstração. Defina

$$h(\tau) := \int_\Sigma \left(|v+\tau u|^p - |\tau u|^p \right) dx.$$

Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo: $|h(1)-h(0)| = \left| \int_0^1 h'(\tau) d\tau \right|$, e como $u+v>0$ em Σ, temos:

$$\left| \int_\Sigma \left((v+u)^p - |u|^p \right) dx - \int_\Sigma |v|^p \, dx \right| = \left| p \int_0^1 \int_\Sigma \left(|v+\tau u|^{p-2} (v+\tau u) - |\tau u|^{p-2} (\tau u) \right) u dx d\tau \right|. \tag{B.1}$$

Seja $f(x) := |x|^{p-2} x$, assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta = \theta(x) \in (0,1)$ tal que:

$$f(\tau u + v) - f(\tau u) = \frac{\partial f}{\partial v}(\tau u + \theta v).$$

Assim,

$$|\tau u + v|^{p-2} (\tau u + v) - |\tau u|^{p-2} (\tau u) = (p-1) |\tau u + \theta v|^{p-2} v. \tag{B.2}$$

Usando as equações (B.1) e (B.2) obtemos que:

$$\left|\int_{\Sigma}(v+u)^p - \int_{\Sigma}|u|^p\,dx - \int_{\Sigma}|v|^p\,dx\right| = p\,(p-1)\left|\int_0^1\int_{\Sigma}|\tau u+\theta v|^{p-2}\,uv\,dxd\tau\right|. \quad \text{(B.3)}$$

Por outro lado,

$$\left|\int_{\Sigma}|\tau u+\theta v|^{p-2}\,uv\,dx\right| \le \int_{\Sigma}(\tau|u|+\theta|v|)^{p-2}|u||v|\,dx \le$$

$$\le \int_{\Sigma} C\left(\tau^{p-2}|u|^{p-2}+\theta^{p-2}|v|^{p-2}\right)|u||v|\,dx \le$$

$$\le C\int_{\Sigma}\left(\tau^{p-2}|u|^{p-1}|v|+|u||v|^{p-1}\right)\,dx.$$

Usando a expressão (B.3) temos:

$$\left|\int_{\Sigma}(v+u)^p - \int_{\Sigma}|u|^p\,dx - \int_{\Sigma}|v|^p\,dx\right| \le$$

$$\le C\int_0^1\int_{\Sigma}\left(\tau^{p-2}|u|^{p-1}|v|+|u||v|^{p-1}\right)\,dxd\tau \le C\int_{\Sigma}\left(|u|^{p-1}|v|+|u||v|^{p-1}\right)\,dx.$$

(Para maiores detalhes, veja D.G. De Figueiredo-Y.Jianfu [17].)

□

Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$, considere a função cut-off $\Psi \in C_c^{\infty}(I\!R^N)$ com suporte compacto em $B_{2R} \subset \Omega$ tal que: $\Psi \equiv 1$ sobre B_R e $0 \le \Psi \le 1$ sobre B_{2R}.

Dado $\epsilon > 0$, defina:

$$\Psi_\epsilon(x) := \Psi(x)U_\epsilon(x),$$

onde

$$U_\epsilon(x) := \frac{(\epsilon N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\ ,x\ \in I\!R^N,$$

satisfaz: $-\Delta U_\epsilon = {U_\epsilon}^{2^*-1}$ em $I\!R^N$ e $\|U_\epsilon\|^2_{H_0^1(I\!R^N)} = \|U_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(I\!R^N)} = S^{\frac{N}{2}}$.

Agora, defina a função vetorial dada por:

$$\vec{u}_\epsilon(x) := \Psi_\epsilon(x)\ (0,1)\ .$$

Lema B.2 .*(H.Brézis-L.Nirenberg [7]) Como* $\epsilon \to 0^+$*, temos que:*

$$\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 = \int_\Omega |\nabla \Psi_\epsilon|^2 = \int_{I\!R^N} |\nabla U_\epsilon|^2 + O\left(\epsilon^{N-2}\right) = S^{\frac{N}{2}} + O\left(\epsilon^{N-2}\right), \qquad \text{(B.4)}$$

$$\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^{2^*} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^{2^*} = \int_{I\!R^N} |U_\epsilon|^{2^*} + O\left(\epsilon^{N}\right) = S^{\frac{N}{2}} + O\left(\epsilon^{N}\right), \qquad \text{(B.5)}$$

$$\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2 = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^2 = \int_{B(0,R)} |U_\epsilon|^2 + O\left(\epsilon^{N-2}\right) =$$

$$= \begin{cases} d\epsilon^2 + O\left(\epsilon^{N-2}\right) & seN \geq 5, \\ d\epsilon^2 |ln\epsilon| + O\left(\epsilon^{N}\right) & seN = 4, \end{cases} \qquad \text{(B.6)}$$

$$\|\vec{u}_\epsilon\|_{(L^1)^2} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon| \leq c\,\epsilon^{\frac{N-2}{2}}, \qquad \text{(B.7)}$$

$$\|\vec{u}_\epsilon\|^{2^*-1}_{(L^{2^*-1})^2} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^{2^*-1} \leq c\,\epsilon^{\frac{N-2}{2}}. \qquad \text{(B.8)}$$

Seja $K > 0$ fixo, defina o conjunto:

$$\Omega_{\epsilon,K} := \{x \in \Omega \;/\; \Psi_\epsilon(x) > K\},$$

assim, $\Psi_\epsilon(0) = \left(\frac{N(N-2)}{\epsilon}\right)^{\frac{N-2}{4}} \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$. Pela continuidade de Ψ_ϵ, existe $R > 0$ tal que $B_R(0) \subset \Omega_{\epsilon,K}$.

Lema B.3 .

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |\vec{u}_\epsilon|^{2^*} = \int_{\Omega_{\epsilon,K}} |\Psi_\epsilon|^{2^*} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^{2^*} + O\left(\epsilon^{N-2}\right) = \int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^{2^*} + O\left(\epsilon^{N-2}\right), \qquad \text{(B.9)}$$

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |\vec{u}_\epsilon|^{2^*-1} = \int_{\Omega_{\epsilon,K}} |\Psi_\epsilon|^{2^*-1} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^{2^*-1} + O\left(\epsilon^{\frac{N+2}{2}}\right) = \int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^{2^*-1} + O\left(\epsilon^{\frac{N+2}{2}}\right), \qquad \text{(B.10)}$$

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |\vec{u}_\epsilon| = \int_{\Omega_{\epsilon,K}} |\Psi_\epsilon| = \int_\Omega |\Psi_\epsilon| + O\left(\epsilon^{N}\right) = \int_\Omega |\vec{u}_\epsilon| + O\left(\epsilon^{N}\right). \qquad \text{(B.11)}$$

Lema B.4 *.(D.G. De Figueiredo-Y.Jianfu [17]) Sejam A, B, C e α números positivos. Considere a função:*

$$\Phi_\epsilon(s) = \frac{1}{2}s^2 A - \frac{1}{2^*}s^{2^*}B + s^{2^*}\epsilon^\alpha C\ ,\ s > 0.$$

Então

$$s_\epsilon = \left(\frac{A}{B - 2^*\epsilon^\alpha C}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$$

é um ponto onde Φ_ϵ atinge seu máximo.

Escrevendo $s_\epsilon = (1+t_\epsilon)\tilde{s}$, onde $\tilde{s} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é o ponto em que Φ_0 atinge seu máximo, então: $t_\epsilon = O(\epsilon^\alpha)$ e

$$\Phi_\epsilon(s) \le \Phi_\epsilon(s_\epsilon) = \frac{1}{N}\left(\frac{A^N}{B^{N-2}}\right)^{\frac{1}{2}} + O(\epsilon^\alpha).$$

Lema B.5 *. Sejam $K := sup\left\{\left\|\frac{(u_{rt}, v_{rt})}{s}\right\|_{(L^\infty)^2}\ :\ s \ge s_0 > 0\right\}$. Defina o conjunto*

$$\Omega_{\epsilon,k} := \{x \in \Omega\ :\ \Psi_\epsilon(x) > K\}.$$

Então, para $s \ge s_0$,

$$\int_\Omega \left(\Psi_\epsilon + \frac{v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} \ge \int_{\Omega_\epsilon} |\Psi_\epsilon|^{2^*} + \int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{v_{rt}}{s}\right|^{2^*} - c\left(\|\Psi_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1} + \|\Psi_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right).$$

Demonstração.

$$\int_\Omega \left(\Psi_\epsilon + \frac{v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} \ge \int_{\Omega_\epsilon} \left(\Psi_\epsilon + \frac{v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} \ge \int_{\Omega_\epsilon} \left(\Psi_\epsilon + \frac{v_{rt}}{s}\right)^{2^*}.$$

Assim, aplicando o Lema B.1 à última integral, segue que:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left(\Psi_\epsilon + \frac{v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} \ge \int_{\Omega_\epsilon} |\Psi_\epsilon|^{2^*} + \int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{v_{rt}}{s}\right|^{2^*} - C\int_{\Omega_\epsilon}\left(|\Psi_\epsilon|^{2^*-1}\left|\frac{v_{rt}}{s}\right| + |\Psi_\epsilon|\left|\frac{v_{rt}}{s}\right|^{2^*-1}\right) \ge$$

$$\ge \int_{\Omega_\epsilon} |\Psi_\epsilon|^{2^*} + \int_{\Omega_\epsilon}\left|\frac{v_{rt}}{s}\right|^{2^*} - c\left(\|\Psi_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1} + \|\Psi_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right).$$

(Para maiores detalhes veja D.G. De Figueiredo-Y.Jianfu [17], pg.68.)

$\square$

Apêndice C

Resultados utilizados no Capítulo 3

Sem perda de generalidade, suponha $0 \in \Omega$, considere a função cut-off $\Psi \in C_c^\infty(I\!R^N)$ com suporte compacto em $B_{2R} \subset \Omega$ tal que: $\Psi \equiv 1$ sobre B_R e $0 \leq \Psi \leq 1$ sobre B_{2R}.

Dado $\epsilon > 0$, defina:

$$\Psi_\epsilon(x) := \Psi(x) U_\epsilon(x),$$

onde

$$U_\epsilon(x) := \frac{(\epsilon N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, x \in I\!R^N,$$

satisfaz: $-\Delta U_\epsilon = U_\epsilon^{2^*-1}$ em $I\!R^N$ e $\|U_\epsilon\|^2_{H_0^1(I\!R^N)} = \|U_\epsilon\|^{2^*}_{L^{2^*}(I\!R^N)} = S^{\frac{N}{2}}$.

Agora, defina a função vetorial dada por:

$$\vec{u}_\epsilon(x) := \Psi_\epsilon(x)\,(0,1)\,.$$

Lema C.1 *.(H.Brézis-L.Nirenberg [7]) Como $\epsilon \to 0^+$, temos que:*

$$\int_\Omega |\nabla \vec{u}_\epsilon|^2 = \int_\Omega |\nabla \Psi_\epsilon|^2 = \int_{I\!R^N} |\nabla U_\epsilon|^2 + O\left(\epsilon^{N-2}\right) = S^{\frac{N}{2}} + O\left(\epsilon^{N-2}\right), \tag{C.1}$$

$$\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^{2^*} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^{2^*} = \int_{I\!R^N} |U_\epsilon|^{2^*} + O\left(\epsilon^N\right) = S^{\frac{N}{2}} + O\left(\epsilon^N\right), \tag{C.2}$$

$$\int_\Omega |\vec{u}_\epsilon|^2 = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^2 = \int_{B(0,R)} |U_\epsilon|^2 + O\left(\epsilon^{N-2}\right) =$$

$$= \begin{cases} d\epsilon^2 + O\left(\epsilon^{N-2}\right) & seN \geq 5, \\ d\epsilon^2 |ln\epsilon| + O\left(\epsilon^{N}\right) & seN = 4, \end{cases} \tag{C.3}$$

$$\|\vec{u}_\epsilon\|_{(L^1)^2} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon| \leq c\, \epsilon^{\frac{N-2}{2}}, \tag{C.4}$$

$$\|\vec{u}_\epsilon\|^{2^*-1}_{(L^{2^*-1})^2} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^{2^*-1} \leq c\, \epsilon^{\frac{N-2}{2}}. \tag{C.5}$$

Denote por $P_\pm$ as projeções ortogonais de H_0^1 em $A := span\left\{\phi_{k+1}, \phi_{k+2}, ...\right\}$ e $B := A^\perp$ respectivamente. Usando argumentos como em [8], vale o seguinte Lema:

Lema C.2 .

$$\left| \int_\Omega \left((P_+\Psi_\epsilon)^{2^*} - \Psi_\epsilon^{2^*} \right) \right| \leq c\, \epsilon^{N-2}, \tag{C.6}$$

$$\left| \int_\Omega \left(|\nabla \Psi_\epsilon|^2 - |\nabla (P_+\Psi_\epsilon)|^2 \right) \right| \leq c\, \epsilon^{N-2}, \tag{C.7}$$

$$\|P_+\Psi_\epsilon\|^{2^*-1}_{L^{2^*-1}} \leq c\, \epsilon^{\frac{N-2}{2}}, \tag{C.8}$$

$$\|P_+\Psi_\epsilon\|_{L^1} \leq c\, \epsilon^{\frac{N-2}{2}}, \tag{C.9}$$

$$\|P_-\Psi_\epsilon\|_{L^\infty} \leq c\, \epsilon^{\frac{N-2}{2}}. \tag{C.10}$$

Seja $K > 0$ fixo, defina o conjunto:

$$\Omega_{\epsilon,K} := \left\{ x \in \Omega \;/\; P_+\Psi_\epsilon(x) > K \right\},$$

assim, pelo Lema C.2, $P_+\Psi_\epsilon(0) = \Psi_\epsilon(0) - P_-\Psi_\epsilon(0) \geq c\, \epsilon^{-\left(\frac{N-2}{2}\right)} - \|P_-\Psi_\epsilon\|_{L^\infty} \geq c\, \epsilon^{-\left(\frac{N-2}{2}\right)}$, que implica que $P_+\Psi_\epsilon(0) \to \infty$ quando $\epsilon \to 0$. Pela continuidade de $P_+\Psi_\epsilon$, existe $R > 0$ tal que $B_R(0) \subset \Omega_{\epsilon,K}$. Logo temos o seguinte Lema:

Lema C.3 .

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |P_+\Psi_\epsilon|^{2^*} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^{2^*} + O\left(\epsilon^{N-2}\right), \tag{C.11}$$

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |P_+\Psi_\epsilon|^{2^*-1} = \int_\Omega |\Psi_\epsilon|^{2^*-1} + O\left(\epsilon^{\frac{N+2}{2}}\right), \tag{C.12}$$

$$\int_{\Omega_{\epsilon,K}} |P_+\Psi_\epsilon| = \int_\Omega |\Psi_\epsilon| + O\left(\epsilon^N\right). \tag{C.13}$$

Lema C.4 *.(D.G. De Figueiredo-Y.Jianfu [17]) Sejam*

$$E^- := \langle (0,\phi_i),(\phi_i,0)\rangle_{1\leq\, i\leq\, k}$$

$$K := sup\left\{ \left\| \frac{w+(u_{rt},v_{rt})}{s} \right\|_{(L^\infty)^2} \ :\ s_0 \leq s \leq R,\ \|w\|_E = r,\ w \in E^- \right\}$$

e $s_0 > 0$ *e defina:*

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \ / \ e_\epsilon(x) := P_+\Psi_\epsilon(x) > K\}.$$

Então, para $s \geq s_0 > 0$*:*

$$\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} \geq \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*} + \int_{\Omega_\epsilon} \left|\frac{w_2+v_{rt}}{s}\right|^{2^*} - c\left(\|e_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1} + \|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right).$$

Demonstração.

$$\int_\Omega \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} \geq \int_{\Omega_\epsilon} \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{s}\right)_+^{2^*} \geq \int_{\Omega_\epsilon} \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{s}\right)^{2^*}.$$

Assim, aplicando o Lema B.1 (Apêndice B) à última integral, segue que:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left(e_\epsilon + \frac{w_2+v_{rt}}{s}\right)^{2^*} \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*} + \int_{\Omega_\epsilon} \left|\frac{w_2+v_{rt}}{s}\right|^{2^*} - C\int_{\Omega_\epsilon}\left(|e_\epsilon|^{2^*-1}\left|\frac{w_2+v_{rt}}{s}\right| + |e_\epsilon|\left|\frac{w_2+v_{rt}}{s}\right|^{2^*-1}\right) \geq$$

$$\geq \int_{\Omega_\epsilon} |e_\epsilon|^{2^*} + \int_{\Omega_\epsilon} \left|\frac{w_2+v_{rt}}{s}\right|^{2^*} - c\left(\|e_\epsilon\|_{L^{2^*-1}(\Omega_\epsilon)}^{2^*-1} + \|e_\epsilon\|_{L^1(\Omega_\epsilon)}\right).$$

(Para maiores detalhes veja D.G. De Figueiredo-Y.Jianfu [17], pg.68.)

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] C. O. ALVES, P. C. CARRIÃO and O. H. MIYAGAKI, *Nonlinear Perturbations of a Periodic Elliptic Problem with Critical Growth*, J. Math. Anal. App., 260, (2001), 133-146.

[2] C. O. ALVES, D. C. DE MORAIS FILHO and M. A. SOUTO, *On Systems of Equations Involving Subcritical or Critical Sobolev Exponents*, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and App., vol. 42, (2000), 771-787.

[3] C. O. ALVES, J. V. GONÇALVES and O. H. MIYAGAKI, *On Elliptic Equations in* $I\!R^N$ *with Critical Exponents*, Electron. J. of Diff. Equations, $n^{\underline{o}}$ 9, (1996), 1-11.

[4] A. AMBROSETTI, G.PRODI, *On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. Mat. Pura. Appl., 93, (1972), 231-246.

[5] M. S. BERGER and E. PODOLAK, *On the Solutions of Nonlinear Dirichlet Problem*, Indiana Univ. Math. J., 24, (1975), 837-846.

[6] H. BREZIS and E. LIEB, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of integrals*, Proc. Amer. Math. Soc., 88, (1983), 486-490.

[7] H. BREZIS and L. NIRENBERG, *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, Comm. Pure App. Math., vol. XXXVI, (1983), 437-477.

[8] J. CHABROWSKI and Y. JIANFU, *Existence theorems for the Schrödinger equation involving a critical Sobolev exponent*, Z. Angev. Math. Phys., 48, (1998), 276-293.

[9] K. C. CHANG, *Ambrosetti-Prodi type results in Elliptic Systems*, Nonlinear Analysis, 51, (2002), 553-566.

[10] D. G. COSTA and C. A. MAGALHÃES, *A Variational Approach to Subquadratic Pertubations of Elliptic Systems*, J. Diff. Equations, 111, (1994), 103-122.

[11] D. G. COSTA and C. A. MAGALHÃES, *A Variational to noncooperative Elliptic Systems*, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and App., vol.25, *nº* 7,(1995), 699-715.

[12] D. G. de FIGUEIREDO, *Lectures on boundary value problems of the Ambrosetti-Prodi type*, 12º Seminário Brasileiro de Análise, (October 1980), 232-292.

[13] D. G. de FIGUEIREDO, *On Superlinear Elliptic Problems with Nonlinearities interacting only with higher eigenvalues*, Rocky Mountain J. Math. 18., *nº* 2, (1988), 287-303.

[14] D. G. de FIGUEIREDO, *On the Superlinear Ambrosetti-Prodi Problems*, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and App., vol.8, *nº* 6, (1984), 655-665.

[15] D. G. de FIGUEIREDO, *The Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math. and Phys., 81, (1989).

[16] D. G. de FIGUEIREDO, *On the Superlinear Ambrosetti-Prodi Problem*, MRC Tech. Rep 2522, May, (1983).

[17] D. G. de FIGUEIREDO and Y. JIANFU, *Critical Superlinear Ambrosetti-Prodi Problems*, Top. Methods in Nonlinear Analysis, vol.14, *nº* 1, (1999), 59-80.

[18] D. G. de FIGUEIREDO and S. SOLIMINI, *A variational approach to superlinear elliptic problems*, Comm. Partial Diff. Eqns., 9, (1984), 699-717.

[19] D. C. de MORAIS FILHO, *A Variational Approach to an Ambrosetti-Prodi type Problem for a System of Elliptic Equations*, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and App., vol.26, *nº* 10, (1996), 1655-1668.

[20] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, University of California, Berkeley - AMS, (1998).

[21] J. FLECKINGER, J. HERNÁNDEZ and F. DE THÉLIN, *On Maximum Principles and Existence of Positive Solutions for some Cooperative Elliptic Systems*, Diff. Int. Eq., vol.8, *nº* 1,(1995), 69-85.

[22] G. B. FOLLAND, *Lectures on Partial Differential Equations*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay - Springer-Verlag, (1983).

[23] D. GUILBARG and N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren 224, Springer, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, (1983).

[24] J. MAWHIN and M. WILLEM, *Critical Point theory and Hamiltonian Systems*, Appl. Math. Sci. 74, Springer, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo, (1989).

[25] *D.MITROVIĆ* and *D.ŽUBRINIĆ*, *Fundamentals of Applied Functional Analysis*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 91, Addison Wesley Longman,(1998).

[26] P. H. RABINOWITZ, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math. *nº* 65, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.,(1986).

[27] P. H. RABINOWITZ, *Some Aspects of Critical Point Theory*, MRC Tech. Rep. *nº* 2465, November (1982).

[28] B. RUF and P. N. SIRIKANTH, *Multiplicity Results for Superlinear Elliptic Problems with Partial Interference with the Spectrum*, J. Math. Anal. App., 118, (1986), 15-23.

[29] M. STRUWE, *Variational Methods*, Springer, Berlin, (1990).

[30] R. C. A. M. VAN DER VORST, *Variational Identities and Applications to Differential Systems*, Arch. Rational Mech. Anal., 116, (1991), 375-398.

[31] M. WILLEM, *Minimax Theorems*, Prog. in Nonlinear Diff. Eq. and their Applications, Birkhäuser, (1996).