UNICAMP

Bruno Tobias

Identidades Polinomiais Graduadas em Álgebras T-Primas

CAMPINAS
2013

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Bruno Tobias

Identidades Polinomiais Graduadas em Álgebras T-Primas

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Bruno Tobias, e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

Assinatura do Orientador

P Kochloukov

Campinas
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

	Tobias, Bruno, 1981-
T553i	Identidades polinomiais graduadas em álgebras T-primas / Bruno Tobias. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.
	Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
	Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Álgebra. 2. Polinômios. 3. PI-álgebras. I. Kochloukov, Plamen Emilov,1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Polynomial identities graded in algebras T-prime
Palavras-chave em inglês:
Algebra
Polynomials
PI-algebras
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Lucio Centrone
Eduardo Tengan
Data de defesa: 21-06-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 21 de junho de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

P Kochloukov

Prof.(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Lucio Centrone

Prof.(a). Dr(a). LUCIO CENTRONE

Eduardo Tengan.

Prof.(a). Dr(a). EDUARDO TENGAN

Aos meus pais José Francisco Tobias (in memoriam) e Maria Teresa Tobias.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente confiamos. E em seguida, acreditamos. Agora, agradecemos...

Agradeço portanto a Deus, por sua infinita bondade, conceder-me a vida e permitir esta realização.

Agradeço aos meus pais, pela educação, pelo caminho e sobretudo, pelo exemplo.

Agradeço a minha esposa, por caminhar na minha frente, me protegendo e mostrando o caminho correto.

Agradeço a todos meus familiares, pelo carinho, estima e por estarem sempre comigo.

Agradeço ao Departamento de Matemática da UFV, pela sólida formação.

Agradeço ao IMECC, professores e funcionários, pela competência, presteza e possibilitar ampliar sempre os conhecimentos.

Agradeço aos membros da banca pelas correções, sugestões e orientações.

Agradeço, em especial, ao meu orientador, Plamen Emilov Kochloukov pela competência nesta orientação, paciência e persistência.

Agradeço à Capes/CNPq pelo apoio financeiro.

Obrigado.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos um estudo sobre as identidades polinomiais graduadas sobre a álgebra matricial $M_2(K)$ com generalização para $M_n(K)$ onde K denota um corpo infinito de característica qualquer e as identidades polinomiais graduadas para as álgebras T-primas $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ sobre corpos de característica positiva diferente de 2.

Estudaremos uma generalização feita por Koshlukov e Azevedo do resultado obtido por Di Vincenzo que descreve as identidades graduadas da álgebra matricial $M_2(K)$. Koshlukov e Azevedo observaram que as identidades graduadas $y_1y_2 = y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 = z_3z_2z_1$ que Di Vincenzo provou que é uma base para álgebra $M_2(K)$ para K um corpo de característica zero também é uma base quando o corpo K é infinito de característica qualquer.

Estudaremos também as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas pelas álgebras T-primas $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ sobre corpos de característica positiva diferente de 2 que constituem uma outra generalização dada por Koshlukov e Azevedo dos resultados obtidos por Di Vincenzo quando este descreveu bases para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de várias álgebras importantes para corpos de característica zero.

ABSTRACT

In this works we present a study on the graded polynomial identities of the matrix algebra $M_2(K)$ with generalization to $M_n(K)$ where K denotes an infinite fields of any characteristic and polynomial identities graded algebras T-prime $M_{1,1}(E)$ and $E \otimes E$ over fields of positive characteristic different from 2.

Study a generalization made by Koshlukov Azevedo and the result obtained by Di Vincenzo describing the graded identities of the matrix algebra $M_2(K)$. Azevedo and Koshlukov noted that the graded identities $y_1y_2 = y_2y_1$ and $z_1z_2z_3 = z_3z_2z_1$ Di Vincenzo proved that it is a base for algebra $M_2(K)$ K to a fields characteristic is also a zero base when the fields K is infinite for any characteristic.

We also study the polynomial identities $\mathbb{Z}_2$-graded algebras satisfied by T-prime $M_{1,1}(E)$ and $E \otimes E$ over fields of positive characteristic different from 2 which constitute a further generalization given by Koshlukov Azevedo and the results obtained by Di Vincenzo when the identities described bases $\mathbb{Z}_2$-graded algebras important for various fields of characteristic zero.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A teoria de álgebras com identidades polinomiais, também conhecida como PI-álgebras é uma sub-área importante da teoria de anéis. O interesse pela PI-álgebra como uma área de pesquisa teve seu marco inicial com o artigo de Kaplansky [18] publicado em 1948, embora polinômios não comutativos que se anulam quando avaliados por elementos de uma álgebra possam ser encontrados nos trabalhos de Dehn [9], Wagner [33] e Hall [15], publicados em 1922, 1936 e 1943, respectivamente. Há de se citar ainda trabalhos de Sylvester, por volta de 1852.

O trabalho de Kaplansky trata da estrutura das PI-álgebras (mais especificamente das PI-álgebras primitivas), um dos principais eixos de estudo em PI-álgebras. Este eixo se desenvolveu sobretudo nos anos 60 e 70 com resultados sobre a estrutura das PI-álgebras os quais podem ser encontrados nos livros de Herstein [16], Jacobson [17], Procesi [24] e Rowen [28]. Kaplansky perguntou qual seria o menor grau de identidade polinomial satisfeita pela álgebra matricial de ordem n, sobre um corpo. A resposta a esta pergunta, veio de um novo e interessante eixo de estudo de PI-álgebras, buscando agora, uma descrição das identidades polinomiais satisfeitas por uma determinada álgebra. O célebre Teorema de Amitsur e Levitzki [1] em 1950, mostrou, utilizando métodos combinatórios, que o polinômio standard de grau $2n$ é a identidade de menor grau da álgebra das matrizes de ordem n com entradas em um corpo.

O teorema de Amitsur e Levitzki foi exaustivamente estudado e outras demonstrações foram dadas utilizando diversas técnicas. Em 1958, baseando-se em propriedades cohomológicas de álgebras de Lie e de resultados de Frobenius sobre representações do grupo simétrico e do grupo alternado, B. Kostant [22] deu uma nova demonstração deste teorema. Em 1963, utilizando agora teoria de grafos, foi a vez de R. Swan [30] propor outra demonstração. Com resultados da álgebra linear, Yu. Razmyslov [26] em 1974 também demonstrou o teorema de Amitsur e Levitzki. E finalmente, em 1976, utilizando propriedades básicas da álgebra de Grassmann e do traço matricial, S. Rosset [27] provou também este teorema em uma página.

Denotando por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades satisfeitas por uma dada álgebra A, cabe notar que $T(A)$ é um T-ideal e que, a fim de descrevermos todas as identidades polinomiais satisfeitas por A, é suficiente encontrarmos os geradores de $T(A)$ com um T-ideal. Assim, uma pergunta natural, conhecida em geral como o Problema de Specht, diz respeito à existência de um conjunto finito de geradores. Mais precisamente, em 1950, Specht conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, todo T-ideal próprio de $K\langle X\rangle$ é finitamente gerado como um T-ideal. Esta conjectura passou a ser uma das questões centrais da PI-teoria. Ela foi provada para casos particulares, no entanto, sua demonstração completa foi dada em 1987 por Kemer [19], cuja contribuição para a PI-teoria vai muito além da resolução do problema de Specht.

Para a resolução do Problema de Specht, Kemer em [19], desenvolveu a teoria estrutural de T-ideais, utilizando como uma das principais ferramentas as identidades graduadas. Este tipo de identidade é uma generalização das identidades ordinárias e tem uma estreita relação com elas. Via de regra essas são relativamente mais fáceis de estudar. Por outro lado, providenciam várias informações sobre as identidades ordinárias satisfeitas pela nossa álgebra. Devido à sua importância e aplicações na PI-teoria, após os estudos de Kemer, por volta de 1987, as identidades graduadas tornaram-se um objeto de estudo independente. A seguir alguns dos principais resultados relacionados a identidades polinomiais graduadas.

As bases para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(K)$ e $M_{1,1}(E)$ foram descritas por Di Vincenzo [10], em característica zero. Dentre seus resultados, obteve como corolário uma prova bastante elementar do conhecido fato de que as àlgebras $M_{1,1}(E)$ e $E\otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais para corpos de característica zero. Estes resultados foram generalizados por Koshlukov e Azevedo [21] para corpos infinitos de característica diferente de 2. (Aqui ressaltamos que o resultado sobre $M_2(K)$ em [21] é válido também sobre corpos de característica 2, desde que sejam infinitos.) Além disso, como consequência, foi obtida uma prova ainda mais elementar da PI-equivalência dos T-ideais de $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$.

As bases para as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas e $\mathbb{Z}_n$-graduadas das álgebras M_n foram descritas para n qualquer por Vasilovsky [31, 32], em característica zero, e generalizados para corpos infinitos por Azevedo [3, 2].

Di Vincenzo e Nardozza [11] desenvolveram um método para encontrar uma base das identidades $G \oplus \mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $A \otimes E$ a partir das identidades G-graduadas da álgebra A. Por meio de identidades graduadas, eles provaram que as álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais.

Neste trabalho estudamos as identidades graduadas em álgebras matriciais sobre corpos infinitos e as identidades(graduadas e ordinárias) satisfeitas pelas álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$.

A dissertação está estruturada em três capítulos, como segue:

No primeiro capítulo são apresentados os pré-requisitos para leitura dos capítulos seguintes. Definimos inicialmente álgebra, álgebra associativa livre, identidades polinomiais, T-ideais e Variedades, polinômios multilineares e multi-homogêneos. São oferecidos vários exemplos e todas as afirmações são demonstradas a fim de tornar o texto bastante claro. Ao final do capítulo são dadas as definições de álgebras graduadas e identidades graduadas, que são os principais conceitos desta dissertação.

No segundo capítulo descrevemos uma base das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(K)$. Na seção seguinte descrevemos as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$.

No último capítulo, estudamos as identidades (graduadas e ordinárias) satisfeitas pelas álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$. Através de um modelo genérico para essas álgebras, encontramos uma base para as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas por elas quando o corpo é infinito.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

Nesta seção enunciaremos as definições preliminares e alguns resultados básicos, muitos dos quais consagrados pelo constante uso. O nosso foco principal será apresentar as definições necessárias para o entendimento do conteúdo desta dissertação. Iniciaremos com uma discussão sobre álgebras, o nosso objeto de estudo. No decorrer da dissertação, K denotará um corpo, cuja característica será especificada na ocasião. A menos de menção em contrário, os espaços vetoriais, álgebras e produtos tensoriais serão definidos sobre o corpo K.

1.1 Álgebras

Definição 1.1.1. *Um espaço vetorial A sobre um corpo K é chamado uma* ***álgebra sobre*** *K(ou uma K-álgebra) se A é munido de uma operação binária, chamada multiplicação, que a dois elementos a e b em A associa um elemento ab em A, tal que para todo a, b em A e para todo α em K*

1. $(a+b)c = ac + bc$,

2. $a(b+c) = ab + ac$,

3. $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Definição 1.1.2. *Se A é uma álgebra e existe um elemento $1_A \in A$, tal que $1_A a = a 1_A = a$ para todo $a \in A$, então A é chamada* ***álgebra unitária****, ou* ***álgebra com unidade****, e 1_A (que vamos escrever 1 em vez de 1_A) é chamado elemento neutro da multiplicação ou simplesmente unidade de A.*

Definição 1.1.3. *Se A é uma álgebra tal que $a(bc) = (ab)c$ para todo a,b e c em A, então A é chamada* ***álgebra associativa****.*

Definição 1.1.4. *Se A é uma álgebra tal que $ab = ba$ para todo a,b em A, então A é chamada* ***álgebra comutativa****.*

Definição 1.1.5. *Se A é uma álgebra unitária tal que para todo elemento $a \in A$, $a \neq 0$, existe um elemento $a^{-1} \in A$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ onde 1 é a unidade de A, então A é chamada* ***álgebra com divisão*** *e a^{-1} é chamado inverso multiplicativo de a.*

Definição 1.1.6. *Diremos que A é uma* ***álgebra de Lie*** *se para todo a,b e c em A temos $aa = 0$(anticomutatividade) e $a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0$(identidade de Jacobi).*

Definição 1.1.7. *Diremos que A é uma* ***álgebra de Jordan*** *se para todo a,b em A temos $ab = ba$, $(a^2b)a = a^2(ba)$.*

Definição 1.1.8. *Um subespaço S de A é uma* ***subálgebra*** *se é fechado com respeito à multiplicação, isto é,*

$$s_1s_2 \in S \Rightarrow s_1s_2 \in S.$$

Definição 1.1.9. *Seja A uma álgebra. O conjunto*

$$Z = \{z \in A \mid za = az \text{ para todo } a \in A\}$$

é chamado ***centro de A****. Os elementos de Z são ditos centrais.*

Definição 1.1.10. *Uma álgebra associativa A é dita uma* ***nil álgebra*** *se para todo $a \in A$ existe um número n natural tal que $a^n = 0$. O menor natural com essa propriedade é chamado* ***índice de nilpotência de*** *a. Se existir um número fixo n tal que $a^n = 0$ para todo $a \in A$ então A é chamada uma* ***nil álgebra de índice limitado*** *n.*

Definição 1.1.11. *Uma álgebra associativa A é dita uma* ***álgebra nilpotente*** *se existe um número natural fixo n tal que o produto de quaisquer n elementos de A é zero. O menor número natural com essa propriedade é chamado* ***índice de nilpotência de*** *A.*

Definição 1.1.12. *Sejam A uma álgebra e I um subespaço de A. Se $ax \in I$ (respectivamente $xa \in I$) para todo $a \in A$ e para todo $x \in I$, dizemos que I é um* ***ideal*** *à esquerda (respectivamente, à direita) de A. Se I for ideal à esquerda e à direita de A, diremos que I é um* ***ideal bilateral*** *de A.*

Observamos que nas duas definições acima, as álgebras não contêm unidade.

Definição 1.1.13. *Sejam A uma álgebra e $I \neq 0$ um ideal à esquerda (à direita ou bilateral) de A. Se não existe nenhum ideal à esquerda (à direita ou bilateral) de A contido em I e que seja distinto de 0 e do próprio I então I é chamado um* ***ideal simples (ou minimal)*** *à esquerda (à direita ou bilateral) de A.*

De agora em diante, a menos menção em contrário, o termo álgebra deverá ser entendido como álgebra associativa unitária. Apresentamos abaixo alguns exemplos importantes de álgebras e subálgebras.

Exemplo 1.1.14. *O espaço vetorial $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em K, munido da multiplicação usual de matrizes, é uma álgebra associativa com unidade a qual é exatamente a matriz identidade I_n. Nesta álgebra é importante destacar as* ***matrizes elementares*** *E_{ij}, para $1 \leq i,j \leq n$, onde E_{ij} é a matriz cuja única entrada não nula é 1 na i-ésima linha e j-ésima coluna. É fácil ver que elas formam uma base para $M_n(K)$ e portanto a dimensão desta álgebra é n^2. Mais geralmente, se A é uma álgebra, consideremos o espaço vetorial $M_n(A)$ de todas as matrizes $n \times n$ com entradas em A. O produto em $M_n(A)$ é análogo ao produto em $M_n(K)$. Temos que $M_n(A)$, munido deste produto, é uma álgebra.*

Exemplo 1.1.15. *O subespaço $U_n(K)$ de $M_n(K)$ das matrizes triangulares superiores com a multiplicação "herdada" de $M_n(K)$, é uma álgebra associativa com unidade. Além disso o subespaço I de $U_n(K)$ que consiste das matrizes em que todos os elementos da diagonal são 0 é um ideal bilateral de $U_n(K)$(mas não de $M_n(K)$).*

Exemplo 1.1.16. *O subconjunto $sl_n(K)$ de $M_n(K)$, formado pelas matrizes com traço zero com a multiplicação $[r_1, r_2] = r_1r_2 - r_2r_1$, $r_1, r_2 \in sl_n(K)$, é uma álgebra de Lie, sobre K.*

Exemplo 1.1.17. *O anel $K[x]$ dos polinômios com uma indeterminada e com coeficientes em K, é uma álgebra sobre K, associativa, comutativa, com unidade $1 \in K[x]$.*

Exemplo 1.1.18. *O anel $K[x_1, \ldots, x_n]$ dos polinômios com n indeterminadas e com coeficientes em K, é também uma álgebra sobre K, associativa, comutativa, com unidade $1 \in K[x_1, \ldots, x_n]$.*

Exemplo 1.1.19. *O conjunto $End_K(V)$ dos operadores lineares de um espaço vetorial V, com $dimV > 1$, é uma álgebra sobre K, associativa, não comutativa, cuja unidade é o operador identidade de V.*

Exemplo 1.1.20. *A álgebra das matrizes simétricas $n \times n$ com o produto $a \cdot b := (ab+ba)/2$ é uma álgebra de Jordan. Aqui exigimos que a característica do corpo seja diferente de 2.*

Exemplo 1.1.21. *Seja $KG = \{\sum_{g\in G} \alpha_g g \mid \alpha_g \in K\}$ o espaço vetorial com base $\{g \mid g \in G\}$ onde G é um grupo (multiplicativo). A multiplicação em KG será dada por*

$$(\sum_{g\in G} \alpha_g g)(\sum_{h\in G} \beta_h h) = \sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h gh; \alpha_g, \beta_h \in K.$$

Aqui gh é o produto de g e h em G. KG é uma álgebra associativa com unidade sobre K que é chamada, ***álgebra de grupo****. A unidade da álgebra de grupo é o elemento $1e$, onde e denota a unidade do grupo G.*

Exemplo 1.1.22. *Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita, com base $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Definimos a* ***álgebra de Grassmann (ou exterior)*** *de V, denotada por $E(V)$(ou simplesmente E), como sendo a álgebra associativa com base, como espaço vetorial, consistindo* *dos produtos* $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} |\ i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\}$ *e satisfazendo as relações* $e_i^2 = 0$ *e* $e_ie_j = -e_je_i$ *para quaisquer* $i, j \in \mathbb{N}$. *Sejam* E_0 *e* E_1 *os subespaços vetoriais de* E *gerados pelos conjuntos* $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_m} |\ m \text{ par}\}$ *e* $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} |\ k \text{ ímpar}\}$, *respectivamente. É fácil ver que*

$$(e_{i_1}\dots e_{i_m})(e_{j_1}\dots e_{j_k}) = (-1)^{mk}(e_{j_1}\dots e_{j_k})(e_{i_1}\dots e_{i_m}),$$

para quaisquer $m, k \in \mathbb{N}$, *e assim podemos concluir que* $g_0x = xg_0$ *para quaisquer* $g_0 \in E_0$ *e* $x \in E$, *e* $g_1g_2 = -g_2g_1$ *para quaisquer* $g_1, g_2 \in E_1$. *Observamos que se a* $char K = 2$, *então* E *é uma álgebra comutativa e, se* $char K \neq 2$ *então* $Z(E) = E_0$.

Considerando E' *a álgebra com base* $\{e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k} |\ i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \geq 1\}$, *temos que* E' *não tem unidade e é chamada de* ***álgebra exterior sem unidade***.

Exemplo 1.1.23. *Seja* A *uma álgebra e* S *um subconjunto não vazio de* A. *Considere* B_S *o subespaço de* A *gerado pelo conjunto* $\{1, s_1s_2\dots s_k |\ k \in N, s_i \in S\}$. *Temos que* B_S *é fechado por multiplicação e* $1 \in B_S$. *Assim,* B_S *é uma subálgebra de* A, *chamada* ***subálgebra gerada por S***. *Além disso,* B_S *é a menor subálgebra de* A *que contém* S, *ou seja, toda subálgebra de* A *que contém* S *deve conter* B_S.

Definição 1.1.24 (Produto Tensorial de Espaços Vetoriais)**.** *Sejam* V *e* W *espaços vetoriais com bases* $\{v_i \mid i \in I\}$*e*$\{w_j \mid j \in J\}$ *respectivamente. O produto tensorial* $V \otimes W$ *de* V *e* W *é o espaço vetorial com base* $\{v_i \otimes w_j |\ i \in I, j \in J\}$, *onde vale*

$$(\sum_{i\in I}\alpha_iv_i) \otimes (\sum_{j\in J}\beta_jw_j) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\alpha_i\beta_j(v_i \otimes w_j),$$

onde os $\alpha_i, \beta_j \in K$ *são escalares e as somas* $\sum_{i\in I}\alpha_iv_i$ *e* $\sum_{j\in J}\beta_jw_j$ *são finitas.*

Queremos definir uma multiplicação em um espaço vetorial A, de modo a torná-lo uma álgebra. Para isto basta definir esta multiplicação entre os elementos de uma base de A e faremos isto com o auxílio da proposição a seguir.

Proposição 1.1.25. *Sejam* A *um espaço vetorial e* β *uma base de* A. *Então, dada uma função* $f : \beta \times \beta \longrightarrow A$, *existe uma única aplicação bilinear* $F : A \times A \longrightarrow A$ *estendendo* f, *ou seja,* $F|_\beta = f$.

Prova: Dado $a \in A$, a pode ser escrito na forma $a = \sum_{u\in\beta}\alpha_uu$, com o conjunto $\{u \in \beta \mid \alpha_u \neq 0\}$ finito. Sendo $a = \sum_{u\in\beta}\alpha_uu$, e $b = \sum_{v\in\beta}\lambda_vv$, com $\alpha_u, \lambda v \in K$, considere a aplicação $F : A \times A \longrightarrow A$ definida da seguinte forma:

$$F(a, b) = \sum_{u,v\in\beta}\alpha_u\lambda_vf(u, v).$$

Observe que F está bem definida, pois se $\sum_{v\in\beta}\gamma_v v = \sum_{v\in\beta}\gamma_v^{'} v$ com $\gamma_v, \gamma_v^{'} \in K$, então $\gamma_v = \gamma_v^{'}$ para todo $v \in \beta$. Tomando agora $\mu \in K$ e $a = \sum_{u\in\beta}\alpha_u u$, $a_1 = \sum_{u\in\beta}\alpha_u^{'} u$, $b = \sum_{v\in\beta}\lambda_v v$, elementos de A, temos $F(a+a_1,b) = F(\sum_{u\in\beta}(\alpha_u+\alpha_u^{'})u, \sum_{v\in\beta}\lambda_v v) = \sum_{u,v\in\beta}(\alpha_u+\alpha_u^{'})\lambda_v f(u,v) = \sum_{u,v\in\beta}\alpha_u\lambda_v f(u,v) + \sum_{u,v\in\beta}\alpha_u^{'}\lambda_v f(u,v) = F(a,b) + F(a_1,b)$ e $\mu F(a,b) = \sum_{u,v\in\beta}\mu\alpha_u\lambda_v f(u,v) = F(\sum_{v\in\beta}(\mu\alpha_u)u, \sum_{v\in\beta}\lambda_v v) = F(\mu a, b)$. Analogamente se mostra que $F(a, b_1+b_2) = F(a,b_1) + F(a,b_2)$ e $\mu F(a,b) = F(a,\mu b)$ para quaisquer $b_1, b_2 \in A$. Logo F é bilinear. Dados $u_1, v_1 \in \beta$, podemos escrever $u_1 = \sum_{u\in\beta}\lambda_u u$ e $v_1 = \sum_{v\in\beta}\gamma_v v$ com

$$\lambda_u = \begin{cases} 1, & \text{se } u = u_1 \\ 0, & \text{se } u \neq u_1 \end{cases}$$

e

$$\gamma_v = \begin{cases} 1, & \text{se } v = v_1 \\ 0, & \text{se } v \neq v_1. \end{cases}$$

Logo $F(u_1,v_1) = \sum_{u,v\in\beta}\lambda_u\gamma_v f(u,v) = \lambda_{u_1}\lambda_{v_1} f(u_1,v_1)$. Observe que F é única estendendo f. De fato, suponha $F^{'} : A \times A \longrightarrow A$ outra operação bilinear estendendo f, então $F^{'}(a,b) = \sum_{u,v\in\beta}\alpha_u\lambda_v F^{'}(u,v) = \sum_{u,v\in\beta}\alpha_u\lambda_v f(u,v) = F(a,b)$. Logo F é única, temos o resultado. ■

Sendo assim, na definição acima se os espaços vetoriais são álgebras para definir uma multiplicação que faz do produto tensorial uma álgebra basta definir uma multiplicação entre os elementos da base $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$.

Definição 1.1.26 (Produto Tensorial de Álgebras)**.** *Sejam V e W álgebras com bases, como espaços vetoriais, $\{v_i \mid i \in I\}$ e $\{w_j \mid j \in J\}$ respectivamente. Então $V \otimes W$ é uma álgebra com multiplicação dada por*

$$(v_{i_1} \otimes w_{j_1})(v_{i_2} \otimes w_{j_2}) = (v_{i_1}v_{i_2}) \otimes (w_{i_1}w_{i_2}),$$

$i_1, i_2 \in I$, $j_1, j_2 \in J$.

Exemplo 1.1.27. *Um exemplo importante de produto tensorial de álgebras, que será estudado no **Capítulo 3**,é a álgebra $E \otimes E$, onde E é a álgebra de Grassmann.*

Exemplo 1.1.28 (Álgebras de matrizes com entradas na álgebra de Grassmann.)**.** *O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ com entradas na álgebra de Grassmann E, munido com a multiplicação usual das matrizes é uma álgebra, que será denotada por $M_n(E)$. Para quaisquer*

$a, b \in \mathbb{N}$ com $a+b=n$, verifica-se através das regras de multiplicação de matrizes em bloco, que o conjunto $M_{a,b}(E)$ das matrizes da forma

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} E_0 & \dots & E_0 & E_1 & \dots & E_1 \\ \vdots & a\times a & \vdots & \vdots & a\times b & \vdots \\ E_0 & \dots & E_0 & E_1 & \dots & E_1 \\ \hline E_1 & \dots & E_1 & E_0 & \dots & E_0 \\ \vdots & b\times a & \vdots & \vdots & b\times b & \vdots \\ E_1 & \dots & E_1 & E_0 & \dots & E_0 \end{array}\right)$$

é uma subálgebra de $M_n(E)$.

Definição 1.1.29. *Uma transformação linear $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ entre as álgebras A_1 e A_2 é um **homomorfismo de álgebras** se*

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

*para todo $a, b \in A_1$ e, além disso, $\varphi(1) = 1$. De modo análogo às demais estruturas algébricas, dizemos que φ é um **monomorfismo** (ou mergulho) se φ é um homomorfismo injetivo. Dizemos que φ é um **epimorfismo** quando for um homomorfismo sobrejetivo. Dizemos que φ é um **endomorfismo** quando for um homomorfismo de A_1 para A_1. Dizemos que φ é um **isomorfismo** se φ for bijetivo e dizemos que φ é um **automorfismo** se φ é um endomorfismo bijetor.*

Denotamos por $EndA$ e $AutA$ os conjuntos dos endomorfismos e automorfismos, respectivamente, da álgebra A. Quando existe um isomorfismo $\psi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo. Definimos o **núcleo** de φ como sendo o conjunto $Ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ e a **imagem** de φ como sendo o conjunto $Im\varphi = \{\varphi a \mid a \in A\}$. Observe que $Ker\varphi$ é um ideal de A e que $Im\varphi$ é uma subálgebra de B.

Sendo A uma álgebra e I um ideal de A, considere o espaço vetorial quociente A/I. Para cada $a \in A$, considere o elemento $a+I = \{a+x \mid x \in I\}$ de A/I e defina em A/I as seguintes operações de soma e produto por escalar

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I \text{ e } \lambda(a+I) = \lambda a + I$$

para $a, b \in A$ e $\lambda \in K$. Defina também em A/I a multiplicação

$$(a+I)(b+I) = ab + I.$$

Este produto é bem definido, pois não depende da escolha dos representantes das classes laterais, e é bilinear. Assim, munido deste produto, A/I é uma álgebra, chamada de **álgebra quociente de A por I**. Nesta álgebra vamos denotar $a+I$ por $\overline{a}$.

Podemos agora enunciar um importante fato sobre estruturas algébricas, o Teorema do Homomorfismo.

Teorema 1.1.30 (Teorema do Homomorfismo)**.** *Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Então, temos que a aplicação*

$$\overline{\varphi} : \frac{A}{Ker\varphi} \longrightarrow Im\varphi$$

$$\overline{a} \longmapsto \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a)$$

é um isomorfismo entre as álgebras $\frac{A}{Ker\varphi}$ e $Im\varphi$, ou seja, $\frac{A}{Ker\varphi} \simeq Im\varphi$.

Prova: Primeiramente, note que $\overline{\varphi}$ é uma função bem definida. De fato, se a_1 e a_2 são elementos quaisquer de A, tais que $\overline{a_1} = \overline{a_2}$, então $(a_1 - a_2) \in Ker\varphi$. Logo, isto implica que $\varphi(a_1 - a_2) = 0$, mas como φ é um homomorfismo, então $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, ou seja, $\overline{\varphi}$ é uma função bem definida. Note que $Ker\overline{\varphi} = \{\overline{a} \in \frac{A}{Ker\varphi} |\ \varphi(a) = 0\} = \{\overline{a} \in \frac{A}{Ker\varphi} |\ a \in Ker\varphi\} = \{\overline{0}\}$, ou seja, a aplicação $\overline{\varphi}$ é injetora. Finalmente, observe que φ é sobrejetiva, pois se b é um elemento de $Im\varphi$, então existe um elemento $a_b \in A$, tal que $\varphi(a_b) = \overline{\varphi(\overline{a_b})} = b$. ∎

Segue abaixo importantes exemplos de homomorfismos.

Exemplo 1.1.31. *Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. A aplicação $\pi : A \longrightarrow A/I$, definida por $\pi(a) = \overline{a}$, é um homomorfismo de álgebras chamado de* ***projeção canônica****.*

Exemplo 1.1.32. *Seja A' uma álgebra sem unidade. Podemos mergulhar A' numa álgebra com unidade. De fato, considere $A = A' \bigoplus K$ como soma direta de espaços vetoriais. Definimos em A a seguinte multiplicação:*

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (\alpha b + \beta a + ab, \alpha\beta)$$

para todo $a, b \in A'; \alpha, \beta \in K$. Temos que $(0, 1)$ é uma unidade de A e a inclusão $A' \hookrightarrow A$ é um mergulho. Dizemos que A é obtida de A' por ***adjunção da unidade****.*

Exemplo 1.1.33. *Consideremos álgebra exterior E e a álgebra $E' \bigoplus K$, definida como no exemplo 1.1.32. A aplicação $\psi : E' \bigoplus K \longrightarrow E$, dada por $\psi(a, \lambda) = a + \lambda$, é um isomorfismo de álgebras e portanto $E' \bigoplus K \simeq E$.*

Exemplo 1.1.34. *Seja A é uma álgebra. Temos que $M_n(A) \simeq M_n(K) \bigotimes A$. Com efeito, considere a transformação liner $T : M_n(K) \bigotimes A \longrightarrow M_n(A)$ tal que $T(E_{ij} \otimes a) = E_{ij}(a)$, onde $E_{ij}(a)$ é a matriz de $M_n(A)$ que tem $a \in A$ na entrada ij e 0 nas demais. Notemos, inicialmente, que dado β uma base de A, o conjunto $\{E_{ij}(a) |\ 1 \leq i, j \leq n, a \in \beta\}$ é uma base de $M_n(A)$ como espaço vetorial. Tome a transformação linear*

$$S : M_n(A) \longrightarrow M_n(K) \bigotimes A$$

$$E_{ij}(a) \longmapsto S(E_{ij}(a)) = E_{ij} \otimes a.$$

Observe que $S(T(E_{ij} \otimes a)) = S(E_{ij}(a)) = E_{ij}a$ e $T(S(E_{ij}(a))) = T(E_{ij} \otimes a) = E_{ij}$. Sendo assim, $S = T^{-1}$ e portanto, T é bijetiva. Mostraremos que T é um homomorfismo de álgebras. Observe que

$$E_{ij}(a)E_{st}(b) = \begin{cases} 0, & j \neq s; \\ E_{it}(ab), & j = s. \end{cases}$$

Se $j \neq s$, temos $T((E_{ij} \otimes a)(E_{st} \otimes b)) = T(E_{ij}E_{st} \otimes ab) = T(0 \otimes ab) = 0 = E_{ij}(a)E_{st}(b) = T(E_{ij}(a))T(E_{st}(b))$. Se $j = s$ tem-se $T((E_{ij} \otimes a)(E_{st} \otimes b)) = T(E_{ij}E_{st} \otimes ab) = T(E_{it} \otimes ab) = E_{it}(ab) = E_{ij}(a)E_{st}(b) = T(E_{ij}(a))T(E_{st}(b))$, e portanto as álgebras $M_n(A)$ e $M_n(K) \bigotimes A$ são isomorfas. Em particular, $M_n(E) \simeq M_n(K) \bigotimes E$.

1.2 Álgebras livres e Identidades Polinomiais

Nesta seção introduzimos o conceitos de Álgebras Livres e Identidades Polinomiais e exibimos alguns exemplos de PI-álgebras. As definições dadas podem ser encontradas nos livros [13] e [4].

Definição 1.2.1. *Seja Υ uma classe de álgebras e $F \in \Upsilon$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra F é uma **álgebra livre na classe Υ, livremente gerada por** X, quando, para toda álgebra $R \in \Upsilon$, temos que toda aplicação $X \longrightarrow R$ pode ser estendida para um homomorfismo $F \longrightarrow R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada de **posto** de F.*

Vamos construir uma álgebra livre na classe formada por todas as álgebras associativas com unidade. Seja $X = \{x_i | \ \in N\}$ um conjunto de variáveis. Denote por $K\langle X\rangle$ a álgebra que é o K-espaço vetorial que tem como base o conjunto dos monômios $X^* = \{x_{i_1} \ldots x_{i_n} | \, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ e multiplicação definida por $(x_{i_1} \ldots x_{i_m})(x_{j_1} \ldots x_{j_n}) = x_{i_1} \ldots x_{i_m} x_{j_m} \ldots x_{j_n}$. Observe que o monômio formado por nenhuma variável, denotado por 1, é a identidade da álgebra $K\langle X\rangle$. Os elementos da álgebra $K\langle X\rangle$, chamados **polinômios**, desempenham nas álgebras um papel semelhante ao das combinações lineares nos espaços vetoriais. Por exemplo, se queremos gerar um espaço vetorial a partir de um subconjunto tomamos todas as combinações lineares de elementos desse subconjunto; de modo similar, se A é uma álgebra gerada pelo conjunto X então

$$A = \{f(g_1, \ldots, g_n) | \ f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle; g_1, \ldots, g_n \in X\}.$$

O próximo teorema mostra que $K\langle X\rangle$ é livre na classe formada por todas as álgebras associativas com unidade, livremente gerada por X.

Teorema 1.2.2. *Se A é uma álgebra e σ é uma aplicação de X em A, então σ estende-se unicamente a um homomorfismo $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ dado por*

$$\phi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)).$$

Prova: Primeiramente, estendemos σ à aplicação $\tau : X^* \longrightarrow A$ definindo $\tau(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \sigma(x_{i_1}) \ldots \sigma(x_{i_k})$. Agora estendemos τ ao homomorfismo de álgebras $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ definido por $\phi(\sum_{w \in X^*} \alpha_w w) = \phi(\sum_{w \in X^*} \alpha_w \tau(w))$. É fácil ver que o homomorfismo ϕ é dado por $\phi(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n))$. Se φ é um homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em A que estende σ, então

$$\varphi(f(x_1,\ldots,x_n)) = f(\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n)) = \phi(f(x_1,\ldots,x_n)).$$

Logo, σ estende-se unicamente a um homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em A. ∎

Segundo o próximo lema, podemos observar que o homomorfismo que estende a aplicação de um conjunto de geradores livres de uma álgebra livre para uma álgebra qualquer é único.

Lema 1.2.3. *Sejam Υ uma classe de álgebras, F uma álgebra livre de Υ com conjunto gerador livre X e A uma álgebra de Υ. Toda aplicação de X em A estende-se unicamente a um homomorfismo de F em A.*

Prova: Seja σ uma aplicação de X em A. Se ϕ é um homomorfismo de F em A que estende σ, então $\phi(f(g_1,\ldots,g_n)) = f(\sigma(g_1),\ldots,\sigma(g_n))$. Por outro lado, como

$$F = \{f(g_1,\ldots,g_n)|\ f(x_1,\ldots,x_n) \in K\langle X\rangle; g_1,\ldots,g_n \in X\},$$

existe um único homomorfismo de F em A que estende σ. ∎

Dizemos que dois conjuntos possuem a **mesma cardinalidade** se existe uma bijeção entre eles.

Teorema 1.2.4. *Duas álgebras livres de uma mesma classe com conjuntos de geradores livres de mesma cardinalidade são isomorfas.*

Prova: Sejam A_1 e A_2 duas álgebras livres de uma mesma classe com conjuntos geradores livres X_1 e X_2 respectivamente. Suponhamos que σ seja uma aplicação bijetora de X_1 em X_2. Logo, existe um homomorfismo ϕ_1 de A_1 em A_2 que estende σ. Além disso, existe também um homomorfismo ϕ_2 de A_2 em A_1 que estende σ^{-1}. Por outro lado, o homomorfismo $\phi_2\circ\phi_1$ estende a aplicação $\sigma^{-1}\circ\sigma$ que é uma identidade. Assim, $\phi_2\circ\phi_1$ é o homomorfismo identidade de A_1 em A_1. Da mesma maneira, vemos que $\phi_1\circ\phi_2$ é o homomorfismo identidade de A_2 em A_2. Logo, ϕ_1 e ϕ_2 são isomorfismos. ∎

Na álgebra $K\langle X\rangle$ temos as seguintes definições em relação a seus elementos:

Definição 1.2.5. *Sejam $m = \alpha x_{i_1}\ldots x_{i_n}$ um monômio e f um polinômio de $K\langle X\rangle$.*

1. *Se $x_j \in X$ então o **grau de** x_j em m, denotado por $\deg_{x_j} m$, é o número de ocorrências de x_j em m;*

2. *O **grau** de m, denotado por $\deg m$, é o número total n de variáveis presentes no monômio m(considerando inclusive as multiplicidades de cada variável);*

3. *O **grau** de f, denotado por $\deg f$, é o maior grau obtido entre seus monômios;*

4. *Se todos os monômios de f têm o mesmo grau em uma variável $x_j \in X$, dizemos que f é um **polinômio homogêneo** em x_j;*

5. *Se f é homogêneo em todas as suas variáveis então f é dito um* ***polinômio multi-homogêneo****. Neste caso, se $i_j = \deg_{x_j} f, j = 1, \dots, n$, então dizemos que f é um polinômio multi-homogêneo com multigrau $(i_1, \dots, i_n)$;*

6. *Se $f^{(i_1,\dots,i_n)}$ é a soma de todos os monômios em f com multigrau $(i_1, \dots, i_n)$ então é claro que f pode ser escrito de maneira única como*

$$f = \sum_{i_1,\dots,i_n \geq 0} f^{(i_1,\dots,i_n)} .$$

   Ainda, se um polinômio $f^{(i_1,\dots,i_n)}$ é não nulo então $f^{(i_1,\dots,i_n)}$ é denominado uma ***componente multi-homogênea*** *de f.*

7. *Se f é multi-homogêneo com multigrau $(1, \dots, 1)$ então f é dito um* ***polinômio multilinear****.*

Queremos agora definir nosso principal objeto de estudo que é PI-Álgebras. Antes disso, definiremos alguns polinômios que serão frequentes no decorrer da dissertação.

Definição 1.2.6. *O polinômio*

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

é chamado ***polinômio standard*** *de grau n. Aqui $sign(\sigma)$ é o sinal da permutação σ do grupo simétrico S_n.*

Definição 1.2.7. *O polinômio*

$$s_2(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é o polinômio standard para $n = 2$ e é chamado ***polinômio comutador****.*

Definição 1.2.8. *Dada uma matriz $A \in M_n(K)$, o polinômio $p(x) = \det(A - xI)$ é chamado* ***polinômio característico*** *de A.*

Observamos que se $A \in M_2(K)$ calcula-se facilmente que $p(x) = x^2 - tr(A)x + \det(A)$, onde $tr(A)$ é o traço da matriz A.

De agora em diante, $K\langle X \rangle$ denotará a álgebra associativa com unidade (não comutativa) dos polinômios a várias variáveis em um conjunto enumerável X com coeficientes em um corpo K.

Definição 1.2.9. *Seja A uma álgebra associativa sobre um corpo K e $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K\langle X \rangle$. Dizemos que f é uma* ***identidade polinomial*** *de A se*

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

para todo $a_1, a_2, \dots a_n \in A$.

Neste caso, diremos que f é uma identidade de A ou que A satisfaz f. Uma vez que o polinômio nulo é uma identidade para toda álgebra A, estabelecemos o seguinte:

Definição 1.2.10. *Se A satisfaz uma identidade polinomial não trivial então A é uma* ***PI-álgebra****.*

A seguir apresentamos exemplos de PI-álgebras e de identidades polinomiais satisfeitas por estas álgebras.

Exemplo 1.2.11. *Se A é uma álgebra associativa e comutativa, então A é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade $s_2 = [x_1, x_2] = 0$.Observamos que toda álgebra comutativa(não necessariamente associativa) satisfaz s_2.*

Exemplo 1.2.12. *Seja A uma álgebra nil de expoente limitado, ou seja, existe um inteiro $n \geq 1$, tal que $a^n = 0$ para todo $a \in A$. Então A é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade $f(x) = x^n$.*

Exemplo 1.2.13. *Toda álgebra associativa nilpotente de classe $n-1$ é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$.*

Exemplo 1.2.14. *Seja A uma álgebra nil, satisafzendo a identidade x^n. Se a característica do corpo-base é 0, ou ainda um número primo $p > n$, segue do conhecido teorema de Nagata, Higman, Dubnov e Ivanov, que A é nilpotente de índice m. O número m não é conhecido no caso geral, sabe-se que $n(n+1)/2 \leq m \leq n^2$.*

Exemplo 1.2.15. *Seja $U_n(K)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre K. Então U_n é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade $f(x_1, \ldots, x_{2n}) = [x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]$. Isto é facilmente visto, já que o comutador de duas matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular superior com diagonal principal nula. Além disso o conjunto das matrizes triangulares superiores com diagonal principal nula formam um ideal nilpotente I de $U_n(K)$ tal que $I^n = 0$.*

Observamos que nos dois exemplos anteriores as álgebras em consideração não têm unidade.

Exemplo 1.2.16. *Se $M_2(K)$ denota a álgebra das matrizes 2×2 sobre o corpo K, então $M_2(K)$ é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3] = (x_1x_2 - x_2x_1)^2x_3 - x_3(x_1x_2 - x_2x_1)^2$, conhecida como* ***identidade de Hall****. De fato, se $A \in M_2(K)$ então seu polinômio característico é $x^2 - tr(A)x + det(A)E$ onde E é a matriz identidade 2×2. Se $A = [B, C]$, para $B, C \in M_2(K)$, então $tr(A) = 0$, e portanto $A^2 + det(A)E = 0$, daí $A^2 = -det(A)E$. Assim, o quadrado de um comutador é uma matriz escalar, logo, comuta com todas matrizes e, portanto $[A^2, M] = 0$, para todo $M \in M_2(K)$.*

Exemplo 1.2.17. *Seja E a álgebra de Grassmann. A fim de mostrar que E é uma PI-álgebra, faremos uma construção de E diferente da dada no exemplo 1.1.22. Tomaremos um corpo K tal que $charK \neq 2$. Dado $K\langle X\rangle$ seja I um ideal de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto* *de polinômios* $\{x_ix_j + x_jx_i|\ i, j \geq 1\}$ *então* $E = \frac{K\langle X\rangle}{I}$*. Se escrevermos* $e_i = x_i + I$ *para* $i = 1, 2, \ldots$ *então* E *tem a seguinte apresentação:*

$$E = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_ie_j = -e_je_i, \textit{para todo } i, j \geq 1\rangle$$

Seja S_n *o grupo simétrico sobre* $\{1, 2, \ldots, n\}$*. Para* $1 \leq k < l \leq n$*,*

$$e_{i_1} \ldots e_{i_{k-1}} e_{i_k} e_{i_{k+1}} \ldots e_{i_{l-1}} e_{l_l} e_{l_{l+1}} \ldots e_{i_n} = -e_{i_1} \ldots e_{i_{k-1}} e_{i_l} e_{i_{k+1}} \ldots e_{i_{l-1}} e_{l_k} e_{l_{l+1}} \ldots e_{i_n}.$$

Portanto, se $\sigma \in S_n$*, obtemos*

$$e_{\sigma(i_1)} \ldots e_{\sigma(i_n)} = (sign\sigma) e_{i_1} \ldots e_{i_n}$$

onde $sign\sigma$ *é o sinal da permutação* σ*, ou seja,* $sign\sigma = +1$ *ou* $sign\sigma = -1$ *se* σ *é uma permutação par ou ímpar, respectivamente. É conveniente escrever* E *na forma* $E = E^{(0)} \bigoplus E^{(1)}$*, onde*

$$E^{(0)} = span_K\{e_{i_1} \ldots e_{i_{2k}} |\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k}, k \geq 0\};$$
$$E^{(1)} = span_K\{e_{i_1} \ldots e_{i_{2k+1}} |\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_{2k+1}, k \geq 0\}.$$

É fácil ver que $E^{(0)}E^{(0)} + E^{(1)}E^{(1)} \subseteq E^{(0)}$ *e* $E^{(0)}E^{(1)} + E^{(1)}E^{(0)} \subseteq E^{(1)}$*. Além disso,* $E^{(0)}$ *é o centro de* E*. Devido a observação acima notamos que* E *satisfaz a identidade* $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$*, já que* $[x_1, x_2] \in E^{(0)}$*.*

Exemplo 1.2.18. *Toda álgebra associativa* A *sobre um corpo* K*, de dimensão finita* n*, é uma PI-álgebra uma vez que satisfaz a identidade polinomial*

$$s_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} sign(\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n+1)}.$$

É fácil ver, da definição do polinômio standard que, como ele é multilinear e antissimétrico, ele se anula quando calculado sobre elementos linearmente dependentes. Particularmente, isso ocorre quando dois de seus argumentos são iguais. Assim, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *uma base de* A *e* $a_1, \ldots, a_{n+1}$ *elementos de* A*. Escrevendo cada* a_i *como combinação linear dos elementos* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *temos que* $s_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ *é uma combinação linear com coeficientes em* K *de elementos da forma* $s_{n+1}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+1}})$*. Sendo assim, algum* e_{i_k} *se repetirá, e* $s_{n+1}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+1}}) = 0$ *implicando que* $s_{n+1}(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0$*.*

1.3 T-ideais e Variedades de Álgebras

O conjunto de todas as identidades polinomiais de uma álgebra A tem uma estrutura algébrica bem definida, pois é um ideal. Isto nos leva a noção de T-ideais. Agora, as identidades polinomiais de uma álgebra A podem ser identidades polinomiais para outras álgebras. Assim, ao estudar um determinado conjunto de identidades polinomiais é mais apropriado considerarmos a classe de todas as álgebras satisfazendo todas estas identidades. Isto nos leva à noção de variedades de álgebras que juntamente com T-ideais definiremos nesta seção.

Definição 1.3.1. *Dizemos que um ideal I de $K\langle X\rangle$ é um **T-ideal** se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo $\varphi \in End\ K\langle X\rangle$, ou equivalentemente, se $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$ para quaisquer $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$.*

O conjunto $T(A) := \{f \in K\langle X\rangle |\ f$ é uma identidade de $A\}$ é um ideal de $K\langle X\rangle$ chamado **ideal das identidades**. Veremos pelo teorema abaixo que $T(A)$ é um T-ideal.

Teorema 1.3.2. *O ideal das identidades de uma álgebra é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Prova: Sejam A uma álgebra, $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ e φ um endomorfismo de $K\langle X\rangle$. Como $\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ e $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A, temos que $\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) \in T(A)$. Logo, $\varphi(T(A)) \subseteq T(A)$, sendo portanto, $T(A)$ um T-ideal. ■

Notamos que a recíproca deste teorema é verdadeira. De modo que, se I é um T-ideal de $K\langle X\rangle$ então existe uma álgebra B tal que $T(B) = I$.

Definição 1.3.3. *Seja $\{f_i(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle |\ i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra associativa livre $K\langle X\rangle$. A classe Υ das álgebras associativas satisfazendo as identidades $f_i = 0 \in I$ é chamada de **variedade de álgebras associativas determinada pelo sistema de identidades polinomiais** $\{f_i \in K\langle X\rangle |\ i \in I\}$. A variedade Λ é chamada **subvariedade** de Υ se $\Lambda \subset \Upsilon$. O conjunto $T(\Upsilon)$ de todas as identidades polinomiais satisfeitas por todas as álgebras da variedade Υ é chamado T**-ideal** de Υ. Dizemos que o T-ideal $T(\Upsilon)$ é **gerado, como T-ideal**, pelo conjunto $\{f_i |\ i \in I\}$ da variedade Υ se o menor ideal gerado por $\{f_i |\ i \in I\}$ coincide com $T(\Upsilon)$. Usamos a notação $T(\Upsilon) = \langle f_i |\ i \in I\rangle^T$ e dizemos que o conjunto $\{f_i |\ i \in I\}$ é uma **base** das identidades polinomiais para Υ se f_i não pertence ao ideal gerado por $\{f_j |\ j \in I, j \neq i\}$. Os elementos de $T(\Upsilon)$ são chamados **consequências** das identidades polinomiais da base.*

Observação 1.3.4. *Dois conjuntos de identidades $\{f_i |\ i \in I\}$ e $\{g_j |\ J \in j\}$ de $K\langle X\rangle$ são **equivalentes** quando eles definem a mesma variedade de álgebras associativas. Em outras palavras, $\{f_i |\ i \in I\}$ e $\{g_j |\ J \in j\}$ de $K\langle X\rangle$ são equivalentes quando eles geram o mesmo T-ideal em $K\langle X\rangle$. Ainda, duas PI-álgebras A e B são chamadas de **PI-equivalentes** se $T(A) = T(B)$ e denotamos por $A \sim B$.*

Na seção anterior, definimos álgebra livre. O teorema abaixo mostra que toda variedade possui uma álgebra livre.

Teorema 1.3.5. *Sejam Υ uma variedade não trivial (variedade que contém pelos menos uma álgebra diferente da nula) de álgebras e $\pi : K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle/T(\Upsilon)$ a projeção canônica. Então,*

(i) *A restrição de π ao conjunto X é injetora;*

(ii) *A álgebra $K\langle X\rangle/T(\Upsilon)$ é livre na variedade Υ com conjunto gerador livre $\pi(X)$.*

Prova: Vejamos que a restrição de π em X é injetora. Sejam x_1 e x_2 dois elementos distintos de X tais que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$. Consideremos uma álgebra não nula A de Υ e um elemento não nulo a de A. Então existe um homomorfismo $\phi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$ tal que $\phi(x_1) = a$ e $\phi(x_2) = 0$. Como $T(\Upsilon)$ está contido no núcleo de ϕ, existe um homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle/T(\Upsilon) \longrightarrow A$ para o qual $\psi \circ \pi = \phi$. Mas,

$$a = \phi(x_1) = \psi \circ \pi(x_1) = \psi \circ \pi(x_2) = \phi(x_2) = 0,$$

o que é uma contradição.

A álgebra $K\langle X\rangle/T(\Upsilon)$ é gerada pelo conjunto $\pi(X)$ e pertence a Υ desde que satisfaz todas as identidades de $T(\Upsilon)$. Mostraremos que esta álgebra é livre em Υ, com conjunto de gerador livre $\pi(X)$. Sejam $A \in \Upsilon$ e σ uma aplicação de $\pi(X)$ em A. Como $K\langle X\rangle$ é uma álgebra livre com conjunto gerador X, a aplicação $\sigma \circ \pi : X \longrightarrow A$ estende-se a um homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$. Existe um único homomorfismo $\phi : K\langle X\rangle/T(\Upsilon) \longrightarrow A$ tal que $\phi \circ \pi = \psi$, pois $T(\Upsilon)$ está contido no núcleo de ψ. Se $x \in X$, então

$$\phi(\pi(x)) = \phi \circ \pi(x) = \psi(x) = \sigma \circ \pi(x) = \sigma(\pi(x));$$

ou seja, o homomorfismo ϕ estende a aplicação σ. Logo, ϕ é o homomorfismo procurado. Assim, $K\langle X\rangle/T(\Upsilon)$ é uma álgebra livre na variedade Υ e $\pi(X)$ é o seu conjunto gerador livre. ■

No próximo lema, são listados algumas propriedades básicas das variedades. Pelo fato da demonstração destas propriedades serem diretas, omitiremos. É importante frisar que estes resultados são válidos para um conjunto X infinito.

Lema 1.3.6. *Sejam Γ_1 e Γ_2 duas classes de álgebras e Υ uma variedade de álgebras. Então*

(i) $T(\Gamma_1) = \bigcap_{A\in\Gamma_1} T(A) = T(var\Gamma_1)$;

(ii) *se* $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ *então* $T(\Gamma_2) \subseteq T(\Gamma_1)$;

(iii) $\Gamma_1 \subseteq \Upsilon$ *se, e somente se,* $T(\Upsilon) \subseteq T(\Gamma_1)$;

(iv) *Se F é uma álgebra livre em Υ então $T(\Upsilon) = T(F)$.*

Corolário 1.3.7. *Se A é uma álgebra, então $T(varA) = T(A)$.*

A seguinte proposição caracteriza as álgebras relativamente livres em qualquer variedade.

Proposição 1.3.8. *Sejam Υ uma variedade definida por $\{f_i|\ i \in I\}$, Y um conjunto arbitrário e J um ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por*

$$\{f_i(g_1, \ldots, g_{n_i})|\ g_j \in K\langle Y\rangle, i \in I\}.$$

Então:

1. *A álgebra $F = K\langle X\rangle/J$ é uma álgebra relativamente livre na variedade Υ com conjunto de geradores livres $\overline{Y} = \{y + J|\ y \in Y\}$.*

2. *Duas álgebras relativamente livres de mesmo posto são isomorfas.*

Prova: 1. Inicialmente mostraremos que $F \in \Upsilon$. Seja $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ uma das identidades que determinam Υ e sejam $\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}$ elementos arbitrários de F. Logo $\overline{g_j} = g_j + J$ com $g_j \in K\langle X\rangle$. Então $f_i(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}) = 0$. Isto mostra que $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ é uma identidade polinomial de F. Assim, $F \in \Upsilon$.

Mostraremos agora que F é uma álgebra relativamente livre em Υ, livremente gerada por $\overline{Y}$. Seja A uma álgebra qualquer em Υ e seja $\phi : \overline{Y} \longrightarrow A$ uma aplicação arbitrária. Definimos uma função $\overline{\theta} : Y \longrightarrow A$ por $\overline{\theta}(y) = \phi(\overline{y})$ e estendamos $\overline{\theta}$ a um homomorfismo $\theta : K\langle X\rangle \longrightarrow A$. Isto é sempre possível pois $K\langle X\rangle$ é uma álgebra associativa livre. Para provarmos que ϕ pode ser estendida a um homomorfismo de F em A, basta mostrar que $J \subseteq Ker(\theta)$. Seja $f \in J$, isto é,

$$f = \sum_{i\in I} u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_j})v_i \text{ onde}, g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle X\rangle.$$

Para quaisquer $a_1, \ldots, a_{n_i} \in A$ o elemento $f_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ é igual a zero em A e isto implica que $\theta(f) = 0$, ou seja, $J \subseteq Ker(\theta)$. Concluímos que F é isomorfo a $F_{\overline{Y}}(\Upsilon)$ que é a álgebra relativamente livre em Υ, livremente gerada por $\overline{Y}$.
2. Sejam $Y = \{y_i|\ i \in I\}$ e $Z = \{z_i|\ i \in I\}$ e sejam $F_Y(\Upsilon)$ e $F_Z(\Upsilon)$ as álgebras relativamente livres correspondentes. Como ambas são relativamente livres, podemos definir homomorfismos

$$\phi : F_Y(\Upsilon) \longrightarrow F_Z(\Upsilon)\text{e } \psi : F_Z(\Upsilon) \longrightarrow F_Y(\Upsilon)$$

por $\phi(y_i) = z_i$ e $\psi(z_i) = y_i$. Visto que as composições $\psi \circ \phi$ e $\phi \circ \psi$ são as identidades em Y e Z respectivamente, obtemos que ϕ e ψ são isomorfismos. ■

Observação 1.3.9. *Segue-se da demonstração da proposição acima que o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por $\{f_i|\ i \in I\}$ consiste de todas as combinações lineares de*

$$u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_j})v_i \text{ onde}, g_{i_j}, u_i, v_i \in K\langle X\rangle.$$

O próximo resultado nos mostra como relacionar os T-ideais com suas respectivas variedades.

Teorema 1.3.10. *Existe uma correspondência biunívoca π entre os T-ideais de $K\langle X\rangle$ e as variedades de álgebras associativas. π é a correspondência de Galois, ou seja, para quaisquer dois T-ideais, T_1 e T_2, a inclusão $T_1 \subset T_2$ é equivalente a inclusão $\pi(T_1) \supset \pi(T_2)$.*

Prova: Para todo T-ideal T definiremos $\Upsilon = \pi(T)$ a variedade determinada pelas identidades polinomiais pertencentes a T. Esta correspondência é sobrejetiva pois para cada variedade temos um T-ideal. Sejam $T_1 \neq T_2$ para dois T-ideais e $\pi(T_i) = \Upsilon_i$, para

$i = 1, 2$. Então, existe um polinômio $f(x_1, \ldots, x_n)$ que está em $T_1 \backslash T_2$ (ou $T_2 \backslash T_1$). Note que, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ é uma identidade polinomial para Υ_1 e não é uma identidade polinomial para a álgebra relativamente livre $F(\Upsilon_2) = K\langle X\rangle/T_2 \in \Upsilon_2$. Logo $\Upsilon_1 \neq \Upsilon_2$ e π é injetiva. Notemos agora que $\Upsilon_1 \supset \Upsilon_2$ se, e somente se, todas as identidades polinomiais de Υ_1 são satisfeitas também por Υ_2, ou seja, $T(\Upsilon_1) \subset T(\Upsilon_2)$ e portanto π é uma correspondência de Galois. ■

Observação 1.3.11. *Se $\Upsilon_1 \subset \Upsilon_2$, então $T(\Upsilon_1) \supset T(\Upsilon_2)$ e podemos considerar as identidades polinomiais de Υ_1 módulo $T(\Upsilon_2)$. Então se conhecemos as identidades polinomiais de Υ_2 e queremos estudar as identidades polinomiais de Υ_1, podemos restringir nosso estudo na álgebra relativamente livre $F(\Upsilon_2)$.*

Corolário 1.3.12. *Se Υ é uma variedade de álgebras e $T(\Upsilon)$ é o T-ideal associado a Υ, então $K\langle X\rangle/T(\Upsilon)$ é geradora em Υ, ou seja, $\overline{K\langle X\rangle/T(\Upsilon)} = \Upsilon$.*

Prova: Naturalmente $\overline{K\langle X\rangle/T(\Upsilon)} = \Upsilon \subseteq \Upsilon$. Por outro lado, estas duas variedades determinam o mesmo T-ideal $T(\Upsilon)$ em Υ se $\overline{K\langle X\rangle/T(\Upsilon)} = \Upsilon$. ■

Dada uma classe de álgebras seria interessante saber quais propriedades esta classe deve satisfazer para ser uma variedade. E isto foi respondido pelo clássico teorema de Birkhoff.

Teorema 1.3.13. *Uma classe não vazia de álgebras Υ é uma variedade se, e somente se, Υ é fechada sob as operações de tomar subálgebras, imagens homomorfas e produtos cartesianos, isto é, $\mathcal{S}\Upsilon$, $\mathcal{Q}\Upsilon$,$\mathcal{C}\Upsilon \subseteq \Upsilon$.*

Prova: Seja Υ uma variedade e seja $R_j \in \Upsilon, j \in J$. O produto cartesiano $R = \sum_{j\in J} R_j$ consiste de todas as sequências $(r_j|\ j \in J)$, $r_j \in R_j$. Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade polinomial para Υ. Se $r^{(1)}, \ldots, r^{(n)} \in R$, $r^{(i)} = (r_j^{(i)}|\ j \in J)$, então $f(r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}) = (f(r_j^{(1)}, \ldots, r_j^{(n)})|\ j \in J)$. Claramente, todas as coordenadas de $f(r^{(1)}, \ldots, r^{(n)})$ são iguais a zero e $R \in \Upsilon$. Com isso, temos que Υ é fechada para tomada de produtos cartesianos. Agora, Υ é naturalmente fechada para subálgebras e imagens homomorfas.

Seja $\mathcal{S}\Upsilon$, $\mathcal{Q}\Upsilon$,$\mathcal{C}\Upsilon \subseteq \Upsilon$ e $T(\Upsilon) \subset K\langle X\rangle$ e seja $T(\Upsilon)$ um conjunto de identidades polinomiais satisfeitas pelas álgebras em Υ. Denotaremos por Υ_1 a variedade definida pelas identidades de $T(\Upsilon)$. A inclusão $\Upsilon \subseteq \Upsilon_1$ é trivial. Mostremos que $\Upsilon = \Upsilon_1$. Seja m um natural qualquer e seja $Y = \{y_i|\ i \in I\}$ um conjunto com m elementos. Seja N o conjunto de todos os elementos $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $K\langle X\rangle$ que não são identidades polinomiais para Υ. Apresentamos $K\langle Y\rangle$ como uma união disjunta de dois subconjuntos $T_m(\Upsilon)$ e N_m da seguinte maneira. Seja $f(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$ um elemento de $K\langle Y\rangle$, onde $y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}$ são n elementos diferentes de Y, com $n \leq m$. Se $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(\Upsilon)$, então assumiremos que $f(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in T_m(\Upsilon)$ e se $f(x_1, \ldots, x_n)$ não é uma identidade polinomial para Υ então $y_{i_1}, \ldots, y_{i_n} \in N_m$. Para cada $f(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in N_m$ existe uma álgebra $R_f \in \Upsilon$ e elementos $r_{i_1 f}, \ldots, r_{i_n f} \in R_f$, tal que $f(r_{i_1 f}, \ldots, r_{i_n f}) \neq 0$ em R_f. Para algum $i \in I$, $i \neq i_1, \ldots, i_n$, escolhemos elementos arbitrários $r_{if} \in R_f$ e definimos elementos

$$z_i := (r_{if}|\ i \in I) \in \sum_{f\in N_m} R_f.$$

Desde que $\mathcal{C}\Upsilon, \mathcal{S}\Upsilon \subseteq \Upsilon$, obtemos que a álgebra F gerada por z_i em $\sum_{f \in N_m} R_f$ pertencem a Υ. Por outro lado, se $g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) \in N_m$, então $g(z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}) \neq 0$, já que $g(r_{i_1 g}, \ldots, r_{i_n g}) \neq 0$ para qualquer $g \in N_m$. Por isso o núcleo do homomorfismo canônico $K\langle Y\rangle \longrightarrow F$, levando $y_i \to z_i, i \in I$, coincide com $T_m(\Upsilon)$ e F é isomórfica a $F_m(\Upsilon_1)$, a álgebra relativamente livre de posto m em Υ_1. Finalmente, desde que $\mathcal{Q}\Upsilon \subseteq \Upsilon$, e cada álgebra gerada por m elementos de Υ_1 é imagem homomorfa de $F_m(\Upsilon_1)$ que está em Υ, temos que $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon$, e portanto, $\Upsilon = \Upsilon_1$. ■

Os resultados e definições apresentados até agora nesta seção são válidos para uma classe qualquer de álgebras. No entanto, nosso interesse nesta dissertação é mais específico. Estamos interessados em lidar com a variedade das álgebras associativas satisfazendo identidades polinomiais.

Um dos problemas centrais da teoria de identidades polinomiais é encontrar uma base para as identidades polinomiais de uma álgebra. Nos exemplos abaixo são dadas algumas bases para importantes PI-Álgebras.

Exemplo 1.3.14. *Se A é uma álgebra comutativa com unidade e K é um corpo infinito, então $T(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle^T$. Em outras palavras, a classe das álgebras comutativas com unidade sobre um corpo infinito K é a variedade definida pelo conjunto $\langle [x_1, x_2]\rangle$.*

Exemplo 1.3.15. *Se K é um corpo infinito de característica diferente de 2, então o T-ideal das identidades da álgebra de Grassmann é gerado por $[x_1, x_2, x_3]$ o que pode ser visto em [23]. No caso de K ser finito Stojanova-Venkova em [29] descreveu as identidades da álgebra exterior não unitária e de dimensão finita. Siderov em [6] descreveu as identidades quando a dimensão é infinita.*

Exemplo 1.3.16. *Em 1973, Razmyslov em [25] provou que $T(M_2(K))$ é finitamente gerado para $charK = 0$, encontrando uma base com 9 identidades. Em 1981, Drensky em [12] provou que em $chark = 0$, $T(M_2(K)) = \langle St_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3]\rangle^T$. O resultado de Drensksy foi generalizado em 2001, por Koshlukov em [20], para K infinito e de característica diferente de 2 e 3. Quando $charK = 3$, é necessária uma terceira identidade para gerar o T-ideal o que pode ser visto em [7]. Para $charK = 2$, o problema da descrição de $T(M_2(K))$ ainda está em aberto.*

1.4 Identidades polinomiais homogêneas, multilineares e próprias

Na primeira seção deste capítulo introduzimos os conceitos de polinômios homogêneos e multilineares. Veremos agora que a utilização destes polinômios é uma excelente ferramenta de simplificação na busca de bases para as identidades polinomiais.

Definição 1.4.1. *Sejam $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um polinômio em $K\langle X\rangle$ e $y_1, \ldots, y_k$ em $X - \{x_1, \ldots, x_n\}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ definiremos fL_i^k por*

$$\begin{aligned} & fL_i^k(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + \cdots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ - & \sum_{q=1}^{k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + \cdots + \widehat{y_q} + \cdots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ + & \sum_{q_1<q_2} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1 + \cdots + \widehat{y_{q_1}} + \cdots + \widehat{y_{q_2}} + \cdots + y_k, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \cdots \\ + & (-1)^{k-1}\sum_{q=1}^{k} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_q, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

*onde $\widehat{y_q}$ indica que retiraremos essa parcela da soma e assim, no último somatório, um y_{q_j} será a parcela que vai restar após cada escolha dos $y_{q_1}, \ldots, y_{q_{k-1}}$. Chamaremos L_i^k de **operador de linearização**.*

Proposição 1.4.2. *Seja P um semigrupo e Q um subgrupo do grupo aditivo da K-álgebra A. Se para todo polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ e quaisquer elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in P$ temos que $f(a_1, \ldots, a_n) \in Q$, então para quaisquer $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_k, a_{i+1}, \ldots, a_n \in P$ teremos $fL_i^k(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_k, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in Q$. Particularmente, se $f \in T(A)$, então $fL_i^k \in T(A)$.*

Prova: Sejam $a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_k, a_{i+1}, \ldots, a_n \in P$, então temos que $\sum b_j \in P$ sempre. Por hipótese, $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum b_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in Q$ para qualquer $\sum b_j$. Como, pela definição 1.4.1,

$$fL_i^k(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum b_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

é uma soma com parcelas da forma $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum b_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in Q$ temos que

$$fL_i^k(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum b_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in P.$$

Particularmente, se f é uma identidade polinomial de A, então

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum b_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in Q = \{0\}$$

para todo $\sum b_j$. Logo $fL_i^k(a_1, \ldots, a_{i-1}, \sum b_j, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in Q = \{0\}$ para todo $\sum b_j$, ou seja, fL_i^k é uma identidade polinomial. ■

Lema 1.4.3. *Seja $g : A^n \longrightarrow A$ uma função em n variáveis que está definida para a K-álgebra A e é linear em cada variável. Então para quaisquer $a_1, \ldots, a_k \in A$ onde $k \geq n$,*

$$g(a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - \sum_{q=1}^{k} g(a_1 + a_2 + \cdots + \widehat{a}_q + \cdots + a_k, \ldots, a_1 + a_2 +$$

$$\cdots + \widehat{a_q} + \cdots + a_k) + \sum_{1\leq q_1\leq q_2\leq k} g(a_1 + \cdots + \widehat{a_{q_1}} + \cdots + \widehat{a_{q_2}} + \cdots + a_k, a_1 + \cdots + \widehat{a_{q_1}} + \cdots +$$

$$\widehat{a_{q_2}} + \cdots + a_k) + \cdots + (-1)^{k-1}\sum_{q=1}^{k} g(a_q, \ldots, q_q) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(i_1\ldots i_n)\in S_n} g(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}), & se\ \ k = n \\ 0, & se\ \ k > n. \end{cases}$$

Prova: Seja $k \geq n$. Pela linearidade da função g, podemos remover todas as somas das variáveis desta função. Então o lado esquerdo da igualdade a ser demonstrada fica representado como uma combinação linear de elementos da forma $g(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ com coeficientes inteiros. Agora, se existirem s diferentes índices entre os j_i, com $s < k$ então a soma dos coeficientes para cada $g(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ onde isso ocorre é igual a soma alternada $1 - \binom{k-s}{1} + \binom{k-s}{2} - \cdots + (-1)^{k-s}\binom{k-s}{k-s} = (1-1)^{k-s} = 0$. Devemos notar que s não excede n. Além disso k, por hipótese, não é menor do que n, ou seja, $s \leq n \leq k$. Assim, $s \geq k$ só ocorrerá quando $s = n = k$. Neste caso, os coeficientes dos $g(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ são iguais a 1 e a soma destes é $\displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} g(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$. ■

Proposição 1.4.4. *Para quaisquer $f, f' \in K\langle X\rangle$ em que o operador L_i^k está definido, $(f + f')L_i^k = fL_i^k + f'L_i^k$. Se $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é um monômio de grau n em x_i e $g = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_1, \ldots, y_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ é um monômio linear em $y_1, \ldots, y_n \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ tal que $f(x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$, então a linearização $fL_i^k(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_1, \ldots, z_k, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ é igual a*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} g(x_1, \ldots, x_{i-1}, z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}, x_{i+1}, \ldots, x_m), & se\ k = n \\ 0, & se\ k > n. \end{cases}$$

Prova: A linearidade do operador L_i^k segue diretamente da definição 1.4.1 e isto demonstra o primeiro resultado. Fixando então $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ podemos considerar o monômio g como uma função das n variáveis $y_1, \ldots, y_n$. Aplicando o lema 1.4.3 obtemos o resultado desejado. ■

Observação 1.4.5. *Pela proposição 1.4.4 podemos mostrar que se o grau de x_i em f for $k_i, i = 1, 2, \ldots, n$ então $fL_1^{k_1}L_2^{k_2}\cdots L_n^{k_n}$ é multilinear.*

Definição 1.4.6. *Dado $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multi-homogêneo de multigrau $(k_1, \ldots, k_n)$, o polinômio multilinear $fL_1^{k_1}L_2^{k_2}\cdots L_n^{k_n}$ é chamado **linearização completa** de f.*

Teorema 1.4.7. *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio não nulo que se anula pela substituição de quaisquer elementos de um subgrupo P do grupo aditivo da álgebra A. Então a linearização completa de qualquer uma das componentes homogêneas de f com grau maximal também se anulam em P.*

Prova: Seja $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_s$ a decomposição de f em uma soma de componentes homogêneas. Suponhamos que o grau de f_1 seja maximal. Observe que as componentes homogêneas são formadas por monômios que possuem as mesmas variáveis, logo, devem se anular em P. Em particular, a componente maximal também se anula em P. Renumerando as variáveis, se necessário, assumimos que a componente homogênea f_1 do polinômio f tem o tipo $(k_1, \ldots, k_n)$ onde $k_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. As demais componentes homogêneas têm tipo $(m_1, \ldots, m_n)$, onde a desigualdade estrita $m_j < k_j$ vale para algum j. Desta maneira, $m_j < k_j$, pelo proposição anterior(referência) temos que $f_2 L_2^{k_1} L_2^{k_2} \cdots L_n^{k_n} = 0$. Consequentemente,

$$f_1 L_1^{k_1} L_2^{k_2} \cdots L_n^{k_n} = f L_1^{k_1} L_2^{k_2} \cdots L_n^{k_n}.$$

Pela proposição 1.4.2 concluímos que a linearização completa $f_1 L_1^{k_1} L_2^{k_2} \cdots L_n^{k_n}$ da componente f_1 se anula em P. ■

Como consequência direta deste teorema temos a seguinte proposição:

Proposição 1.4.8. *Se uma álgebra associativa A satisfaz uma identidade polinomial de grau n, então ela também satisfaz alguma identidade multilinear de grau n.*

Denotaremos por P o conjunto de todos os polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$ e por P_n o espaço vetorial dos polinômios multilineares de grau n. Claramente a dimensão de P_n é $n!$ e P_n tem por base o conjunto $\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}\}$.

Veremos agora, pela próxima proposição, a importância do estudo dos polinômios multilineares e multi-homogêneos na determinação de bases para as identidades polinomiais.

Proposição 1.4.9. *Seja $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X\rangle$, onde f_i são as componentes homogêneas de f com grau i em x_i.*

(i) *Se o corpo K tem mais que n elementos, então as identidades polinomiais $f_i = 0, i = 0, 1, \ldots, n$, seguem de $f = 0$.*

(ii) *Se $\operatorname{char} K = 0$ ou $\operatorname{char} K > \deg f$, então $f = 0$ é equivalente a um sistema de identidades polinomiais multilineares.*

Prova: (i) Seja $I = \langle f\rangle^T$ o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por f. Escolhemos $n+1$ elementos distintos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ de K. Como I é um T-ideal, temos:

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Consideremos estas equações como um sistema linear com incógnita f_i para $i = 0, 1, \ldots, n$. Sendo o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

o determinante de Vandermonde que é diferente de zero, resolvemos o sistema pela regra de Crammer. A solução é obtida através de operações elementares. Assim como I é um ideal temos que cada $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in I$, ou seja, as identidades polinomiais f_i são consequências de $f = 0$.

(ii) Usaremos o processo de linearização dado anteriormente. Pela parte (i), podemos assumir que $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é homogêneo em cada uma de suas variáveis, isto é, f é multi-homogêneo. Seja $k = \deg_{x_1} f$. Escrevemos $f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) \in I$ sob a forma:

$$f_i(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{k} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_m)$$

onde f_i é a componente homogênea de grau i em y_1. Consequentemente $f_i \in I, i = 0, 1, \ldots, k$. Desde que $\deg_{y_j} f_i < k, i = 1, 2, \ldots, k-1; j = 1, 2$, podemos aplicar indução para cada f_i e obtemos um conjunto de consequências multilineares de $f = 0$. Para ver que estas identidades multilineares são equivalentes a $f = 0$, é suficiente observamos que:

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_m) = \binom{k}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_m)$$

e o coeficiente binomial é diferente de zero, pois assumimos que $charK = 0$ ou $charK > \deg f$. ■

Corolário 1.4.10. *Seja A uma álgebra.*

(i) Se o corpo K é infinito, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multi-homogêneas, ou seja, $T(A)$ é gerado por seus polinômios multi-homogêneos.

(ii) Se o corpo K tem característica zero, então todas as identidades polinomiais de A seguem de suas identidades multilineares, ou seja, $T(A)$ é gerado por seus polinômios multilineares.

Tradicionalmente, muitos do resultados de PI-álgebras são também apresentados na linguagem de identidades multilineares.

Observamos acima, que as identidades multilineares e homogêneas constituem uma excelente ferramenta na busca de base para as identidades polinomiais. Veremos agora, que dada uma álgebra unitária, a busca de identidades polinomiais para esta álgebra pode se restringir ao estudo de polinômios próprios, que definimos a seguir.

Definição 1.4.11. *O **comutador de comprimento** n é definido indutivamente a partir de $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ tomando $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ para $n \geq 3$. Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é chamado **polinômio próprio**(ou comutador) se é combinação linear de produtos de comutadores, isto é,*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_{(i,\ldots,j)}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}] \cdots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}]; \alpha_{(i,\ldots,j)} \in K.$$

Assumiremos que 1 é um produto de um conjunto vazio de comutadores e denotaremos por $B(X)$ o conjunto de todos os polinômios próprios em $K\langle X\rangle$.

Antes de explicitar a importância dos polinômios próprios, ora definidos, necessitamos de dois teoremas clássicos. O Teorema de Witt e o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Portanto, vamos a algumas definições.

Definição 1.4.12. *Seja A uma álgebra associativa, então A é uma álgebra de Lie com a multiplicação dada pelo comutador, isto é, $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. Esta álgebra, assim definida, será denotada por $A^{(-)}$.*

Definição 1.4.13. *Se A é uma álgebra associativa e L uma álgebra de Lie que é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que A é uma **álgebra envolvente** de L. A álgebra associativa $U = U(L)$ é a **álgebra envolvente universal da álgebra de Lie** L, se L é uma subálgebra de $U^{(-)}$ e U tem a seguinte propriedade universal: Para toda álgebra associativa A e todo homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L \longrightarrow A^{(-)}$ existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : U \longrightarrow A$ que estende ϕ, isto é, $\psi|_L = \phi$.*

Teorema 1.4.14. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismo) envolvente universal $U(L)$. Se L tem base $\{e_i |\ i \in I\}$, onde o conjunto de índices I é ordenado, então $U(L)$ tem base*

$$\{e_{i_1} \cdots e_{i_q} |\ q = 0, 1, \ldots\}.$$

Para demonstração, veja, por exemplo, o livro [13] , teorema 1.3.2 página 11.

Teorema 1.4.15. *(Witt) A subálgebra de Lie $L(X)$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X é livre na classe das álgebras de Lie, além disso $U(L(X)) = K\langle X\rangle$.*

Prova: Seja A uma álgebra associativa e seja $\phi : L(X) \longrightarrow A^{(-)}$ um homomorfismo. A aplicação $\phi_0 : X \longrightarrow A$ definida por $\phi_0(x) = \phi(x), x \in X$, induz um único homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$. Desde que $\phi(x) = \psi(x)$, obtemos que a restrição de ψ em $L(X)$ é igual a ϕ. Então $U(L(X)) = K\langle X\rangle$. Se G é uma álgebra de Lie e A é sua álgebra envolvente, então para qualquer aplicação $X \longrightarrow G \subset A$ induz um homomorfismo $K\langle X\rangle \longrightarrow A$. A restrição deste homomorfismo em $L(X)$ é um homomorfismo de $L(X)$ em $A^{(-)}$ o qual envia geradores de $L(X)$ para G. Desta forma a imagem de $L(X)$ está em G, o que implica que $L(X)$ é a álgebra de Lie livre com conjunto de geradores livres X, ou seja, $U(L(X)) = K\langle X\rangle$. ■

De posse destes resultados, apresentaremos agora uma base para álgebra livre $K\langle X\rangle$.

Proposição 1.4.16. *Suponhamos que os elementos*

$$x_1, x_2, \ldots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \ldots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \ldots,$$

formam uma base ordenada de $L(X)$ onde os elementos $x_1, x_2, \ldots$ precedem os comutadores. Então

(i) O espaço vetorial $K\langle X\rangle$ tem base formada pelos elementos

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^b \cdots [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]^c,$$

onde $a_1, \ldots, a_m, b, \ldots, c \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] < \ldots < [x_{l_1}, \ldots, x_{l_p}]$, na ordenação da base de $L(X)$.

(ii) Os elementos desta base tais $a_1 = \ldots = a_m = 0$ formam uma base do espaço vetorial $B(X)$ de polinômios próprios.

Prova: O item (i) segue do Teorema de Witt que garante que $U(L(X)) = K\langle X\rangle$, e do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, que nos diz como encontrar uma base para $U(L(X))$ a partir de uma base ordenada de $L(X)$. O item (ii) segue diretamente do item (i) e da definição de $B(X)$. ∎

Com tudo isso, provaremos que se A é uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito, então todas as identidades polinomiais ordinárias de A seguem das identidades próprias.

Lema 1.4.17. *Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo infinito então todas as identidades polinomiais de A seguem das identidades próprias (isto é, daquelas em $T(A) \cap B(X)$). Se A é uma álgebra unitária sobre um corpo de característica 0 então todas as identidades polinomiais de A seguem das suas identidades próprias multilineares.*

Prova: Seja $f(x_1, \ldots, x_m)$ uma identidade polinomial de A. Como K é infinito, podemos assumir que f é multi-homogêneo. Sendo assim, podemos escrever f como

$$f = \sum \alpha_a x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m), \alpha_a \in K$$

onde $\omega_a(x_1, \ldots, x_m) \in B(X)$ e a soma é feita sobre todas as m-uplas $a = (a_1, \ldots, a_m)$ tais que $a_i \leq \deg_{x_i} f$, $1 \leq i \leq m$. Definamos então o conjunto

$$M(f) = \{M_1, \ldots, M_l\} = \{a_1 |\ a = (a_1, \ldots, a_m) \,\mathrm{e}\, \alpha_a \neq 0\}$$

onde $M_1 > \ldots > M_l > 0$. A demonstração do lema segue da seguinte afirmação: Se $f \in T(A)$ e f é multi-homogêneo, então

$$g_j = \sum_{a_1 = M_j} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(A)$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$.

Demonstraremos esta afirmação. É fácil ver que $\omega_a(x_1 + 1, \ldots, x_m) = \omega_a(x_1, \ldots, x_m)$. Como $f(x_1 + 1, \ldots, x_m)$ também é identidade polinomial de A, concluímos que

$$f(x_1 + 1, \ldots, x_m) = \sum \alpha_a \sum_{i=0}^{a_1} \binom{a_1}{i} x_1^i x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) \in T(A).$$

Como f é multi-homogêneo, $a_1 + \deg_{x_1} \omega_a(x_1, \ldots, x_m) = \deg_{x_1} f$ e assim a componente homogênea de $f(x_1 + 1, \ldots, x_m)$ com menor grau possível em relação a x_1 se obtém quando $a_1 = M_1$ e é dada por

$$\sum_{a_1 = M_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m} \omega_a(x_1, \ldots, x_m)$$

onde o subíndice do somatório indica que a soma é feita sobre todos os $a = (a_1, \ldots, a_m)$ onde $a_1 = M_1$. Como o corpo é infinito, do corolário 1.4.10, segue que o polinômio

$\sum_{a_1=M_1} x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}\omega_a(x_1,\ldots,x_m)$ pertence a $T(A)$. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $j=1,2,\ldots,k$, onde k é um número natural menor que n. Multiplicando $g_1+g_2+\cdots+g_k$ à esquerda por $x_1^{a_1}$ e subtraindo o produto de $f(x_1,\ldots,x_m)$ obtemos

$$h(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{a_1>M_k}\alpha_a x_1^{a_1}\cdots x_m^{a_m}\omega_a(x_1,\ldots,x_m),\in T(A).$$

É claro que $M(h)=\{M_{k+1},\ldots,M_l\}$ e aplicando os mesmos argumentos anteriores a este polinômio concluímos que

$$f=\sum_{a_1=M_{k+1}} x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}\omega_a(x_1,\ldots,x_m)\in T(A)$$

o que prova a afirmação. ■

1.5 Graduações de Álgebras e Identidades Graduadas

Para o estudo de identidades polinomiais às vezes é interessante considerar outras versões de identidades polinomiais, como por exemplo, as identidades polinomiais fracas, as identidades com involução, identidades com traço, polinômios centrais, identidades com graduação entre outros. Nesta seção dedicamos nosso estudo às identidades graduadas, identidades estas que fornecem informações importantes sobre as identidades ordinárias.

Definição 1.5.1. *Seja G um grupo. Uma álgebra A é dita ser G-**graduada**, se $A=\bigoplus_{g\in G}A_g$ onde A_g é subespaço de A para todo $g\in G$ e $A_gA_h\subseteq A_{gh}$ para todos $g,h\in G$. Um elemento $a\in\bigcup_{g\in G}A_g$ é chamado **homogêneo**. Se $a\in A_g$ dizemos que a é **homogêneo de grau** g e denotamos por $w_G(a)=g$. Se $a\in A$ então $a=\sum_{g\in G}a_g$, onde $a_g\in A_g$ são determinados unicamente por a. Chamamos a_g de **componente homogênea de grau** g **em** a e dizemos que $\sum_{g\in G}a_g$ é a **decomposição de** a **como soma de elemento homogêneos**. Dizemos que uma subálgebra B de A é **homogênea** na G-graduação de A, se*

$$B=\sum_{g\in G}B_g \text{ onde } B_g=B\cap A_g,$$

*neste caso os subespaços $B\cap A_g$ serão denominados de **subespaços homogêneos**. Se um ideal I de A é uma subálgebra G-graduada dizemos que I é um **ideal homogêneo** de A.*

Exemplo 1.5.2. *Sejam G um grupo abeliano e A uma álgebra qualquer. A álgebra A possui uma G-graduação trivial dada por $A=\bigoplus_{g\in G}A_g$, onde $A_0=A$ e $A_g=\{0\}$, para todo $g\neq 0$.*

Exemplo 1.5.3. *A álgebra de Grassmann E é $\mathbb{Z}_2$-graduada. De fato, seja E_0 o subespaço de E gerado por $\{1, e_{i_1} \dots e_{i_k} | \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k; k = 2, 4, \dots\}$ e seja E_1 o subespaço de E gerado por $\{e_{i_1} \dots e_{i_k} | \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k; k = 1, 3, \dots\}$. Assim, $E = E_0 \oplus E_1$ e claramente, $E_i E_j \subseteq E_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}_2$.*

Exemplo 1.5.4. *Seja $E \otimes E$ o produto tensorial de E por E. Introduziremos uma estrutura de álgebra em $E \otimes E$, o quadrado tensorial da álgebra de Grassmann, tomando $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$, onde $a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \in E \otimes E$. Em $E \otimes E$, definimos a $\mathbb{Z}_2$-graduação $E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1$, dada por*

$$(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0 \oplus E_1 \otimes E_1)$$

e

$$(E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1 \oplus E_1 \otimes E_0).$$

Exemplo 1.5.5. *A álgebra $M_{1,1}(E)$ é a subálgebra de $M_2(E)$, vista no exemplo 1.1.28, que consiste das matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onde $a, d \in E_0$ e $b, c \in E_1$. Definamos em $M_{1,1}(E)$ a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação: $M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1$ onde*

$$(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} | \ a, d \in E_0 \right\}, \qquad (M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} | \ b, c \in E_1 \right\}.$$

Verificamos diretamente que $(M_{1,1}(E))_i (M_{1,1}(E))_j \subseteq (M_{1,1}(E))_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Logo a álgebra $M_{1,1}(E)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Exemplo 1.5.6. *Seja $M_n(K)$ a álgebra das matrizes de ordem n sobre um corpo K. Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_n$, tomemos o subespaço $M_\gamma = \langle E_{ij} | \overline{j-1} = \gamma \rangle$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, consideremos*

$$M_k = \begin{cases} \{0\}, & se \ |k| \geq n \\ \langle E_{ij} | \ j - i = k \rangle, & se \ |k| < n. \end{cases}$$

É fácil ver que $M_{\overline{0}} = M_0$ é exatamente o conjunto das matrizes diagonais. Pelo fato do conjunto $\{E_{ij} | \ 1 \leq i, j \leq n\}$ ser uma base de $M_n(K)$ segue que

$$M_n(K) = \oplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_n} M_\gamma e M_n(K) = \oplus_{k \in \mathbb{Z}_n} M_k.$$

Para ver que estas decomposições definem uma $\mathbb{Z}_n$-graduação e uma $\mathbb{Z}$-graduação, respectivamente, em $M_n(K)$, basta notar que

$$E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} 0, & se \ j \neq k \\ E_{il}, & se \ j = k \end{cases}$$

donde segue que $M_{\gamma_1} M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1 + \gamma_2}$ para $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_n$ e $M_{k_1} M_{k_2} \subseteq M_{k_1 + k_2}$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.5.7. *A G-graduação $R = M_n(K) = \oplus_{g\in G} R_g$ na álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo K é dita* ***elementar*** *se existe uma n-upla $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ tal que $E_{ij} \in R_{g_i^{-1} g_j}$.*

Exemplo 1.5.8. *A $\mathbb{Z}_n$-graduação e a $\mathbb{Z}$-graduação definidas no exemplo 1.5.6 são elementares.*

O próximo lema é uma caracterização das subálgebras G-graduadas de uma álgebra G-graduada.

Lema 1.5.9. *Sejam A uma álgebra G-graduada e B uma subálgebra de A. As afirmações a seguir são equivalentes:*
(1) B é subálgebra G-graduada de A;
(2)B é álgebra G-graduada tal que $B_g \subseteq A_g$ para todo $g \in G$;
(3) As componentes homogêneas de cada elemento de B pertencem a B;
(4) B é gerada por elementos homogêneos.

Prova: Se (1) é verdadeira, então a decomposição $B = \oplus_{g\in G} B_g$, onde $B_g = A_g \cap B$, é uma G-graduação em B tal que $B_g \subseteq A_g$ e assim segue (2). Suponhamos (2) verdadeira. Seja $b \in B_g$ e $b = \sum\limits_{g\in G} b_g$, onde $b_g \in B_g$, a decomposição de b como soma de elementos homogêneos, em relação a G-graduação de B. Como $B_g \subset A_g$ cada b_g também é homogêneo em relação à G-graduação de A e assim, segue (3). Da afirmação (3) temos que o conjunto $B \cap (\cup_{g\in G} A_g)$ gera B. Daí segue (4). De fato, seja $b \in B$ e $b = \sum\limits_{g\in G} b_g$, onde $b_g \in A_g$, a decomposição de b como soma de elementos homogêneos, em relação a G-graduação de A. De (3) temos que $b_g \in B$, ou seja, $b_g \in B \cap (\cup_{g\in G} A_g)$. Por fim, supondo (4) verdadeira, temos que dado C uma base de B, $C \subset (\cup_{g\in G} A_g)$ composta de elementos homogêneos. Seja $B_g = B \cap A_g$. O elemento $b = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$, onde $c_i \in C$, é homogêneo de grau g se, e somente se, $w_G(c_i) = g, 1 \le i \le n$. Assim $C_g = C \cap A_g$ é uma base para B_g e como $C = \cup_{g\in G} C_g$ segue que $B = \oplus_{g\in G} B_g$. ■

Exemplo 1.5.10. *Se considerarmos $M_n(K)$ com qualquer uma das graduações definidas no exemplo 1.5.6 é fácil ver que a álgebra $U_n(K)$ das matrizes triangulares superiores é subálgebra homogênea de $M_n(K)$, uma vez que é gerada pelos elementos homogêneos $\{E_{ij} | \, i \le j\}$.*

Definição 1.5.11. *Uma aplicação $\phi : A \longrightarrow B$ entre álgebras G-graduadas é um* ***homomorfismo G-graduado*** *se $\phi(A_g) \subseteq B_g$ para todo $g \in G$. Do mesmo modo, são definidos* ***isomorfismo***, ***endomorfismo*** *e* ***automorfismo G-graduado***.

Proposição 1.5.12. *Se I é um ideal G-graduado de uma álgebra G-graduada A então A/I é uma álgebra G-graduada considerando $(A/I)_g = \{a + I | \, a \in A_g\}$*

Prova: Uma vez que, naturalmente $A/I = \sum_{g\in G}(A/I)_g$ e $(A/I)_g(A/I)_h \subseteq (A/I)_{g+h}$ devemos mostrar que a soma dada é direta. Para isso, suponhamos que $(\sum_{g\in G}(a_g + I)) = 0$. Observe que $\sum_{g\in G}(a_g + I) \in I$ e pelo fato de I ser G-graduado segue do lema 1.5.9 que $a_g \in I$, logo, $(a_g + I) = 0$, com isso $A/I = \oplus_{g\in G}(A/I)_g$. ■

É fácil ver que se $\phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo G-graduado então $Ker\phi$ é um ideal G-graduado de A e $\phi(A)$ é uma subálgebra G-graduada de B tal que $\phi(A)_g = \phi(A_g)$ para todo $g \in G$. Além disso, o Teorema do Isomorfismo é válido para álgebra graduadas, ou seja, a álgebra quociente $A/Ker\phi$ é isomorfa à imagem $\phi(A)$.

Seguindo, como no caso das identidades ordinárias, definiremos agora, identidades G-graduadas. Para isso, obteremos uma graduação para $K\langle X\rangle$.

Seja $\{X_g |\ g \in G\}$ uma família de subconjuntos disjuntos e enumeráveis de X tais que $X = \cup_{g\in G}X_g$. O conjunto dos monômios

$$\{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} |\ x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in X, k \in \mathbb{N}\}$$

é uma base da álgebra livre $K\langle X\rangle$ como espaço vetorial. Definimos

$$w_G(1) = 0 \text{ e } w_G(x_1x_2\ldots x_m) = w(x_1) + w(x_2) + \cdots + w(x_m)$$

onde $w(x_i) = g$ se $x_i \in X_g$. Sendo então m um monômio de $K\langle X\rangle$, dizemos que $w_G(m)$ é o G-grau de m. Tomando para cada $g \in G$, $K\langle X\rangle_g = \langle m |\ m$ é monômio de $K\langle X\rangle$ e $w_G(m) = g\rangle$ temos

$$K\langle X\rangle = \oplus_{g\in G}K\langle X\rangle_g \text{ e } K\langle X\rangle_g K\langle X\rangle_h \subseteq K\langle X\rangle_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$, assim $K\langle X\rangle$ é chamada **álgebra associativa livre G-graduada**. Se $f \in K\langle X\rangle_g$, dizemos que f é homogêneo de G-grau g e usamos a notação $w_G(f) = g$.

Definição 1.5.13. *Seja $A = \oplus_{g\in G}A_g$ uma álgebra G-graduada. Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é uma **identidade polinomial G-graduada** da álgebra G-graduada A, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todo $a_i \in A_{g_i}$, onde $g_i = w_G(x_i)$ com $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Definição 1.5.14. *Um ideal I numa álgebra G-graduada A é chamado de **T_G-ideal** se I é invariante sob todos os endomorfismos G-graduados de A, ou seja, $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de A.Dado um subconjunto S qualquer de $K\langle X\rangle$, definimos o **T_G-ideal gerado por** S, que é denotado por $\langle S\rangle^{T_G}$, como sendo a intersecção de todos os T_G-ideais de $K\langle X\rangle$ que contêm S.*

O T_G-ideal gerado por S, como definido anteriormente, coincide com o subespaço vetorial de $K\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto

$$\{h_1f(g_1, \ldots, g_n)h_2 |\ f(x_1, \ldots, x_n) \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle\},$$

onde $w_G(g_1) = w_G(x_1), \ldots, w_G(g_n) = w_G(x_n)$.

A maneira na qual relacionaremos as identidades polinomiais graduadas com as identidades polinomiais ordinárias é segundo a proposição a seguir.

Proposição 1.5.15. *Se A e B são duas álgebras graduadas tais que $T_G(A) \subseteq T_G(B)$, então $T(A) \subseteq T(B)$.*

Prova: Sejam $f(x_1, \ldots, x_m)$ uma identidade qualquer de A e $b_1 = \sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, b_m = \sum_{g\in G} b_{m_g}$ elementos de B. Como $f \in T(A)$, temos que $f(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{m_g}) \in T_G(A) \subseteq T_G(B)$. Logo $f(b_1, \ldots, b_m) = f(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \ldots, \sum_{g\in G} b_{m_g}) = 0$. Assim $T(A) \subseteq T(B)$. ■

Corolário 1.5.16. *Se duas álgebras têm as mesmas identidades graduadas então elas têm as mesmas identidades ordinárias.*

Observação 1.5.17. *A recíproca deste corolário não é verdadeira. Considere na álgebra de Grassmann E a $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica $E = E_0 \oplus E_1$ e a $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial $E = E \oplus \{0\}$. Temos que $y_1y_2 = y_2y_1$, com $\deg_{\mathbb{Z}_2}(y_1) = \deg_{\mathbb{Z}_2}(y_2) = 0$, é identidade para E com a graduação canônica mas não é identidade graduada para E com a graduação trivial. Logo, uma mesma álgebra pode ter identidades graduadas diferentes em relação a graduações diferentes.*

Os demais conceitos, de base de identidades graduadas, propriedades da base finita, identidades graduadas multilineares, homogêneas e próprias e outros, são definidos de forma análoga ao caso das identidades polinomiais ordinárias. Tais definições podem ser encontradas, por exemplo, em [14].

A seguir, daremos alguns exemplos de álgebras e suas identidades graduadas.

Exemplo 1.5.18. *Seja $M_2(K)$ a álgebra das matrizes de ordem 2 sobre K, a álgebra $M_2(K)$ satisfaz as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas*

$$y_1y_2 - y_2y_1$$

e

$$z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1.$$

Exemplo 1.5.19. *Seja E a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo K. Temos que $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ satisfazem as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas*

$$y_1y_2 - y_2y_1$$

e

$$z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1.$$

CAPÍTULO 2

IDENTIDADES GRADUADAS PARA ÁLGEBRAS DE MATRIZES SOBRE CORPOS INFINITOS

Neste capítulo estudaremos uma generalização feita por Koshlukov e Azevedo em [21] do resultado obtido por Di Vincenzo em [10] que descreve as identidades graduadas da álgebra matricial $M_2(K)$ onde K é um corpo de característica zero. Koshlukov e Azevedo observaram que as identidades graduadas $y_1y_2 = y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 = z_3z_2z_1$ que Di Vincenzo provou que é uma base para álgebra $M_2(K)$ para K um corpo de característica zero também é uma base quando o corpo K é infinito de qualquer característica.

Os estudos aqui feitos podem ser encontrados em [21].

2.1 Identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(K)$

Iniciaremos com um resultado simples da álgebra linear que será necessário para demonstração do teorema principal desta seção.

Lema 2.1.1. *Sejam U_1 e U_2 dois subespaços de um espaço vetorial V tais que $U_1 \subseteq U_2$. Se $v_1, \ldots, v_n$ são elementos de V tais que o conjunto $\{v_1 + U_1, \ldots, v_n + U_1\}$ gera V/U_1 e o conjunto $\{v_1 + U_2, \ldots, v_n + U_2\}$ é linearmente independente em V/U_2 então $U_1 = U_2$.*

Prova: Seja u um elemento de U_2. Por hipótese, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $u + U_1 = \alpha_1(v_1 + U_1) + \cdots + \alpha_n(v_n + U_1)$; logo, $u - (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \in U_1 \subseteq U_2$. Assim, $0 + U_2 = u + U_2 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + U_2 = \alpha_1(v_1 + U_2) + \cdots + \alpha_n(v_n + U_2)$. Portanto, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ e $u \in U_1$. ■

Em todo este capítulo assumiremos K como um corpo infinito.

A álgebra $M_2(K)$, como visto no exemplo 1.5.6, possui a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial $M_2(K)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in K \right\}$ e $M_2(K)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in K \right\}$.

Nesta e nas próximas seções utilizaremos a seguinte estratégia. Um resultado clássico da teoria de anéis diz que a álgebra das matrizes genéricas de ordem n é isomorfa à álgebra relativamente livre $K\langle X\rangle/T(M_n(K))$ da variedade das matrizes $n \times n$. Este teorema que pode ser visto em [13], na seção 7.2. Com isso, considerando uma álgebra G-graduada A, inicialmente construímos uma álgebra graduada livre F que é isomorfa à álgebra $K\langle X\rangle/T_G(A)$. Assim, trabalhamos na álgebra graduada F ao invés da álgebra $K\langle X\rangle/T_G(A)$.

Seja $\Omega = K[t_i, u_i, v_i, w_i | i \in \mathbb{N}]$ a álgebra dos polinômios comutativos gerada pelas variáveis t_i, u_i, v_i e w_i. A álgebra $M_2(\Omega)$ possui uma graduação semelhante à de $M_2(K)$, a saber, $M_2(\Omega)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_4 \end{pmatrix} \mid f_1, f_4 \in \Omega \right\}$ e $M_2(\Omega)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ f_3 & 0 \end{pmatrix} \mid f_2, f_3 \in \Omega \right\}$.

Denote por $F(M_2(\Omega))$, ou simplesmente F, a subálgebra de $M_2(\Omega)$ gerada pelas matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} t_i & 0 \\ 0 & w_i \end{pmatrix} \text{ e } B_i = \begin{pmatrix} 0 & u_i \\ v_i & 0 \end{pmatrix}$$

para $i \in \mathbb{N}$. A álgebra $F(M_2(\Omega))$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural herdada da anterior, onde as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ formam a parte par, enquanto as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$ formam a parte ímpar.

Denotaremos por $T_2(M_2) = T_2(M_2(K))$ o ideal das identidades graduadas de $M_2(K)$.

Lema 2.1.2. *A álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada relativamente livre $K\langle X\rangle/T_2(M_2)$ é isomorfa à álgebra $F(M_2(\Omega))$.*

Prova: A aplicação $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow F$ dada por $\varphi(f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)) = f(A_1, \ldots, A_k)$ é um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado sobrejetor, uma vez que F é gerada por $A_1, \ldots, A_k$. Vamos mostrar que $Ker\varphi \supset T_2(M_2(K))$ já que a inclusão contrária segue facilmente.

Suponha $f \in T_2(M_2(K))$. Temos que $f(M_1, \ldots, M_k) = 0$ para quaisquer matrizes $M_1, \ldots, M_k$ tais que $w_{\mathbb{Z}_2}(M_1) = w_{\mathbb{Z}_2}(A_1), \ldots, w_{\mathbb{Z}_2}(M_k) = w_{\mathbb{Z}_2}(A_k)$. Assim a entrada (i, j) da matriz $f(A_1, \ldots, A_k)$ é um polinômio nas variáveis t_i, u_i, v_i, w_i, $1 \leq i \leq k$ que se anula para qualquer substituição das variáveis t_i, u_i, v_i, w_i por elementos do corpo K. Como o corpo K é infinito esse polinômio deve ser necessariamente o polinômio nulo. Portanto, $f(A_1, \ldots, A_k) = 0$, assim $f \in Ker\varphi$. ■

Agora, seja I o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $K\langle X\rangle$ gerado pelas identidades graduadas $y_1y_2 = y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 = z_3z_2z_1$. Observando que estas identidades pertencem ao T_2-ideal $T_2(M_2(K))$ temos o seguinte lema.

Lema 2.1.3. *A álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de $M_2(K)$ satisfaz todas as identidades graduadas do T_2-ideal I.*

Definição 2.1.4. *Uma **sequência básica** $s = (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q, c_1, \ldots, c_r, d_1, \ldots, d_s)$ é uma sequência de números naturais tais que*

(i) *$p \geq 0$, $q \geq 0$, $r \geq 0$, $s \geq 0$;*

(ii) *$a_1 \leq \cdots \leq a_p$,$b_1 \leq \cdots \leq b_q$, $c_1 \leq \cdots \leq c_r$,$d_1 \leq \cdots \leq d_s$;*

(iii) *$s \leq r \leq s+1$;*

(iv) *se $r = 0$ então $q = 0$.*

A cada sequência básica s associamos o monômio

$$m_s = \begin{cases} y_{a_1} \dots y_{a_p} z_{c_1} y_{b_1} \dots y_{b_q} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \dots z_{c_s} z_{d_s} & \text{se } r = s \\ y_{a_1} \dots y_{a_p} z_{c_1} y_{b_1} \dots y_{b_q} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \dots z_{c_s} z_{d_s} z_{d_{s+1}} & \text{se } r = s+1. \end{cases}$$

Tomando C o conjunto de todos os monômios associados a sequências básicas, temos que o monômio 1 pertence a C já que está associado à sequência vazia.

Lema 2.1.5. *O conjunto $\{m + T_2(M_2(K)) |\, m \in C\}$ é linearmente independente no espaço vetorial $K\langle X\rangle/T_2(M_2(K))$.*

Prova: Sejam $m_1, \dots, m_n$ elementos de C e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elementos do corpo K tais que $\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n \in T_2(M_2(K))$. Como o corpo K é infinito, podemos supor por 1.4.10 que os monômios $m_1, \dots, m_n$ são multi-homogêneos. Denote por $\overline{m}$ o elemento de $M_2(\Omega)$ obtido pelas substituições $y_i \to A_i$ e $z_i \to B_i$ no monômio $m \in C$. Se

$$s = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q, c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s)$$

é uma sequência básica então

$$\overline{m}_s = \begin{cases} w_1 e_{11} + w_2 e_{22} \,\text{se}\, r = s \\ w_1 e_{12} + w_2 e_{21} \,\text{se}\, r = s+1, \end{cases}$$

onde

$$w_1 = t_{a_1} \dots t_{a_p} u_{b_1} \dots u_{b_q} v_{c_1} \dots v_{c_s} w_{d_1} \dots w_{d_s}$$
$$w_2 = t_{b_1} \dots t_{b_q} u_{a_1} \dots u_{a_p} v_{d_1} \dots v_{d_s} w_{c_1} \dots w_{c_s}.$$

Sendo assim, é fácil ver que existe uma bijeção entre C e o subconjunto $\{\overline{m} |\, m \in C\}$ de F. Assim, se $\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n \in T_2(F)$ então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, pois as matrizes $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n$ são linearmente independentes em F. Pelo lema 2.1.2, sabemos que $\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n \in T_2(F)$ e portanto, segue o resultado. ■

Teorema 2.1.6. *Todas as identidades polinomiais graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $M_2(K)$ seguem das identidades $y_1 y_2 = y_2 y_1$ e $z_1 z_2 z_3 = z_3 z_2 z_1$.*

Prova: Se $f \in K\langle X\rangle_0$ então $y_i f - f y_i$ pertence a I. Assim todo elemento de $K\langle X\rangle/I$ é uma combinação linear de elementos da forma $m_1 z_{e_1} m_2 z_{e_2} z_{e_3} \dots z_{e_k} + I$ onde m_1 e m_2 são monômios que na sua constituição possuem apenas $y_i's$. Pela identidade $y_1 y_2 = y_2 y_1$, podemos supor que os índices das variáveis em m_1 e m_2 crescem. Pela identidade $z_1 z_2 z_3 = z_3 z_2 z_1$, assumimos que $e_1 \leq e_3 \leq e_5 \leq \cdots$ e $e_2 \leq e_4 \leq e_6 \leq \cdots$. Observe que se $e_1 > e_3$ num monômio, então usamos o fato de que $z_{e_1}(m_2 z_{e_2}) z_{e_3} - z_{e_3}(m_2 z_{e_2}) z_{e_1}$ pertence a I. Concluímos, portanto, que o conjunto $\{m + I |\, m \in C\}$ gera o espaço vetorial $K\langle X\rangle/I$. Pelo lema 2.1.3 sabemos que $I \subseteq T_2(M_2(K))$. Agora, aplicando os lemas 2.1.5 e 2.1.1 concluímos a prova. ■

2.2 Identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$

O resultado da seção anterior pode ser estendido para a álgebra $M_n(K)$.

Em [31], Vasilovsky mostrou que quando característica do corpo K é igual a zero, todas as identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $M_n(K)$ seguem das identidades:

(i) $x_1x_2 = x_2x_1, w_G(x_1) = w_G(x_2) = 0;$

(ii) $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1, w_G(x_1) = -w_G(x_2) = w_G(x_3).$

Em [3] Azevedo, utilizando matrizes genéricas, mostrou que tais resultados são válidos para corpos infinitos. E, baseados então em [3], faremos nesta seção, este estudo.

Com base na notação já estabelecida no capítulo 1, podemos definir uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para $M_n(K)$. Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_n$, seja $M_n(K)_\alpha$ o subespaço de $M_n(K)$ gerado por todas as matrizes unidade e_{ij} tais que $\overline{j-i} = \alpha$. Assim, $M_n(K)_0$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n.n} \end{pmatrix}, a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} \in K,$$

e para $0 < t \leq n-1, M_n(K)_{\bar{t}}$ consiste das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,t+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-t,n} \\ a_{n-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $a_{1,t+1}, a_{2,t+2}, \ldots, a_{n-t,n}, a_{n-t+1,1}, \ldots, a_{n,t} \in K$. Como já visto em 1.5.6, a decomposição acima define uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para a álgebra $M_n(K)$.

Sejam $Y = \{y_i^{(k)} | 1 \leq k \leq n, i \geq 1\}$ e $\Omega = K[Y] = K\langle Y\rangle/J$, onde $J = \langle y_1y_2 - y_2y_1\rangle$, a álgebra dos polinômios em variáveis comutativas gerada pelas variáveis $y_i^{(k)}$. Decompomos a álgebra $M_n(\Omega)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em Ω como soma direta dos subespaços

$M_n(\Omega)_{\bar{i}}$ formados por matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-i} \\ f_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $f_1, \ldots, f_n \in \Omega$ e $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Esta decomposição é uma $\mathbb{Z}_n$-graduação para álgebra $M_n(\Omega)$, o que pode ser visto com o auxílio do próximo lema.

Lema 2.2.1. *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-i} \\ a_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-j} \\ b_{n-j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

matrizes de $M_n(\Omega)$, onde $0 \leq i, j \leq n-1$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 b_{i_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2 b_{i_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_x b_{i_x} \\ a_{x+1} b_{i_{x+1}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n b_{i_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

onde $i_k = (i + k - 1)(mod\ n+1)$ e $x = n - (i+j)(mod\ n)$.

Prova: As matrizes A e B podem ser escritas na forma $A = \sum_{k=1}^{n} a_k e_{k,i_k}$, $B = \sum_{l=1}^{n} b_k e_{l,m_l}$. Assim $AB = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{i_k} e_{k,m_{i_k}}$. A posição do elemento b_k é (k, i_k) com $i_k = i + k$ se $i + k \leq n$ e $i_k = i + k - n$ se $i + k > n$. Ou seja, $i_k = (i + k - 1)(\text{mod } n + 1)$. O elemento $a_x b_{i_x}$ está na última coluna da matriz AB. Assim, como b_{n-j} está na última coluna da matriz B, temos que $n - j = i_x$. Logo, $n - j = (i + x - 1)(\text{mod}\, n + 1)$ e portanto $x \equiv -(i + j)(\text{mod}\, n)$. Como $n - (i + j)(\text{mod}\, n)$ é o único elemento de $1, \ldots, n$ tal que $n - (i + j) \equiv -(i + j)(\text{mod}\, n)$ segue que $x = n - (i + j)(\text{mod}\, n)$. ■

Denote por F a subálgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada de $M_n(\Omega)$ gerada pelas matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_i^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & y_i^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_i^{(n-a(x_i))} \\ y_i^{(n-a(x_i)+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & y_i^{(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

para $i \geq 1$. Este será um modelo genérico $\mathbb{Z}_n$-graduado da álgebra $M_n(K)$.

Lema 2.2.2. *A álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada relativamente livre $K\langle X\rangle/T_n(M_n(K))$ é isomorfa à álgebra F.*

Prova: A aplicação $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow F$ dada por $\varphi(f(x_1, \ldots, x_k)) = f(A_1, \ldots, A_k)$ é um homomorfismo $\mathbb{Z}_n$-graduado sobrejetor, uma vez que F é gerada por $A_1, \ldots, A_k$. Vamos mostrar que $Ker\varphi \supset T_n(M_n(K))$ já que a inclusão contrária segue facilmente.

Suponha $f \in T_n(M_n(K))$. Temos que $f(M_1, \ldots, M_k) = 0$ para quaisquer matrizes $M_1, \ldots, M_k$ tais que $w_{\mathbb{Z}_n}(M_1) = w_{\mathbb{Z}_n}(A_1), \ldots, w_{\mathbb{Z}_n}(M_k) = w_{\mathbb{Z}_n}(A_k)$. Assim a entrada (i, j) da matriz $f(A_1, \ldots, A_k)$ é um polinômio nas variáveis $y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq k$ que se anula para qualquer substituição $y_i^{(l)} \to r_{i,l}$, onde $r_{i,l} \in K, 1 \leq i \leq k, 1 \leq l \leq n$. Já que o corpo K é infinito, esse polinômio deve ser o polinômio nulo. Portanto, $f(A_1, \ldots, A_k) = 0$, assim $f \in Ker\varphi$ e pelo Teorema do Isomorfismo, segue o resultado. ■

Seja I o ideal das identidades $\mathbb{Z}_n$-graduadas de $K\langle X\rangle$ gerado pelas identidades graduadas $x_1x_2 = x_2x_1, w_G(x_1) = w_G(x_2) = 0$ e $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1, w_G(x_1) = -w_G(x_2) = w_G(x_3)$.

O principal resultado desta seção é mostrar que todas as identidades polinomiais graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada $M_n(K)$ seguem das identidades acima.

Para um corpo K de característica zero, Vasilovsky, em [31], utilizou fortemente esta propriedade do corpo, trabalhando assim com a multilinearidade. Para corpos de característica positiva, que é nosso objeto de estudo, trabalharemos com os modelos genéricos de graduação matricial já dados.

Lema 2.2.3. *A álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada de $M_n(K)$ satisfaz as identidades graduadas do T_n-ideal I.*

Prova: Dadas duas matrizes $M, N \in M_n(K)_{(0)}$, M e N são matrizes diagonais e logo comutam, portanto a identidade graduada $x_1x_2 = x_2x_1$ com $w_G(x_1) = w_G(x_2) = 0$ é válida em $M_n(K)$. Sendo multilineares as identidades $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1, w_G(x_1) = -w_G(x_2) = w_G(x_3)$ basta mostrar que elas valem para $x_1 = e_{i_1,j_1}, x_2 = e_{r,s}, x_3 = e_{i_2,j_2}$, onde $x_1 = e_{i_1,j_1}, x_3 = e_{i_2,j_2} \in M_n(K)_{(\bar{t})}$ e $e_{r,s} \in M_n(K)_{(\overline{n-t})}$, onde $0 < t \leq n-1$. Temos assim que

$$j_1 = \begin{cases} i_1 + t, & \text{se } i_1 + t \leq n, \\ i_1 + t - n, & \text{se } i_1 + t > n; \end{cases}$$

$$i_2 = \begin{cases} j_2 - t, & \text{se } j_2 - t \geq 1, \\ j_2 - t + n, & \text{se } j_2 - t < 1; \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} s + t, & \text{se } s + t \leq n, \\ s + t - n, & \text{se } s + t > n. \end{cases}$$

Se $e_{i_1,j_1}e_{r,s}e_{i_2,j_2} \neq 0$, então $j_1 = r$ e $s = i_2$. Neste caso, $i_1 = s = i_2$ e $j_1 = r = j_2$. Observe que se $j_1 = i_1 + t$ e $r = s + t - n$, então como $j_1 = r$ segue que $n = s - i_1$, o que é impossível. Assim as igualdades $j_1 = i_1 + t$ e $r = s + t - n$ não podem valer simultaneamente. O mesmo acontece para as igualdades $r = s + t$ e $i_2 = j_2 - t + n$. Portanto se $j_1 = i_1 + t$, então $r = s + t$ e $i_2 = j_2 - t$, logo $i_2 = s = r - t = j_1 - t = i_1$ e $r = j_1 = i_1 + t = i_2 + t = j_2$. De maneira análoga, provamos que se $j_1 = i_1 + t - n$ então $r = s + t - n$ e $i_2 = j_2 - t + n$. Portanto $i_2 = s = r - t + n = j_1 - t + n = i_1$ e $r = j_1 = i_1 + t - n = i_2 + t - n = j_2$, e a afirmação esta provada. Similarmente $e_{i_1,j_1}e_{r,s}e_{i_2,j_2} \neq 0$ se, e somente se $i_1 = s = i_2$ e $j_1 = r = j_2$ e isto ocorre se, e somente se, $e_{i_1,j_1}e_{r,s}e_{i_2,j_2} \neq 0$. Logo $e_{i_1,j_1}e_{r,s}e_{i_2,j_2} = e_{i_2,j_2} = e_{i_2 j_1} = e_{i_2,j_2}e_{r,s}e_{i_1,j_1}$. ■

Lema 2.2.4. *Para todo monômio $0 \neq m(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X\rangle$ de comprimento q, existem inteiros $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_q \leq k$ e $\{k_1 \ldots, k_q, x\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tais que*

$$m(A_1, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & y_{i_1}^{(k_1)} \cdots y_{i_q}^{(k_q)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_x \\ w_{x+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $w_i = y_{i_1}^{((k_1+i-2)\, mod\, n+1)} \cdots y_{i_q}^{((k_q+i-2)\, mod\, n+1)}, i = 2, \ldots, n.$

Prova: Usaremos indução sobre q. Se $q = 1$, o resultado segue claramente. Suponha agora que $q > 1$. Então existe um monômio $0 \neq n(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle X\rangle$ tal que $m(x_1, \ldots, x_k) = n(x_1, \ldots, x_k)x_i$, onde $1 \leq i \leq k$. Pela hipótese de indução e pelo Lema 2.2.1 concluímos a prova. ■

Lema 2.2.5. *Sejam $m(x_1, \ldots, x_k)$ e $n(x_1, \ldots, x_k)$ dois monômios de $K\langle X\rangle$. Se as matrizes $m(A_1, \ldots, A_k)$ e $n(A_1, \ldots, A_k)$ têm a mesma entrada não nula na primeira linha então $m(x_1, \ldots, x_m) \equiv n(x_1, \ldots, x_m)(mod\ I)$.*

Prova: Se $m(A_1, \ldots, A_k)$ e $n(A_1, \ldots, A_k)$ têm na primeira linha a mesma entrada não nula segue diretamente do Lema 2.2.4 que $m(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k)$. Seja q o comprimento de m. Usaremos indução sobre q. Se $q = 1$, o resultado segue obviamente. Suponhamos agora $q > 1$.

Suponhamos que x_p é uma variável de $m(x_1, \ldots, x_k)$ e m_1 e m_2 são dois monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_1 x_p m_2$. Pelo Lema 2.2.4, existem monômios $w_1, \ldots, w_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ de Ω e inteiros $0 \leq i, j \leq n-1$ tais que

$$m_1(A_1, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{n-i} \\ w_{n-i+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$m_2(A_1, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \eta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \eta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_{n-j} \\ \eta_{n-j+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \eta_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Note que os graus homogêneos de $m_1(A_1, \ldots, A_k)$ e $m_2(A_1, \ldots, A_k)$ em F são respectivamente $\overline{i}$ e $\overline{j}$. Pelo Lema 2.2.1, temos que $m_1(A_1, \ldots, A_k)A_p$ é igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & w_1 y_p^{(\alpha_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_x y_p^{(\alpha_x)} \\ w_{x+1} y_p^{(\alpha_{x+1})} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n y_p^{(\alpha_n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\alpha_r = \overline{(i+r-1)}$ e $x = n - (i + a_p)(\mathrm{mod}\, n)$, sendo $\alpha(x_p) = \overline{a_p}$. Logo a matriz

$m(A_1,\ldots,A_k) = m_1(A_1,\ldots,A_k)A_p m_2(A_1,\ldots,A_k)$ é igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & w_1 y_p^{(i_1)}\eta_{j_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & w_y y_p^{(i_y)}\eta_{j_y} \\ w_{y+1} y_p^{(i_{y+1})}\eta_{j_{y+1}} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n y_p^{(i_n)}\eta_{j_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $j_s = (n-x+s-1)(\operatorname{mod} n+1)$ e $y = n-(n-x+j)(\operatorname{mod} n)$. Assim a variável $y_p^{(\alpha_1)}$ deve aparecer pelo menos uma vez na primeira linha de $n(A_1,\ldots,A_k)$. Com raciocínio análogo a n, existem dois monômios n_1 e n_2 em $K\langle X\rangle$ tais que $n = n_1 x_p n_2$ e $n_1(A_1,\ldots,A_k)$ tem grau $\bar{i}$ em F, senão a variável $y_p^{(\alpha_1)}$ não apareceria na primeira linha de $n(A_1,\ldots,A_k)$. Como $m_1(A_1,\ldots,A_k)$ e $n_1(A_1,\ldots,A_k)$ têm o mesmo grau em F, $w_G(m_1) = w_G(n_1)$. Portanto podemos concluir que se x_p é uma variável de $m(A_1,\ldots,A_k)$ e $m_1,\ldots,m_l$ são monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_1x_pm_2x_pm_3x_p\ldots m_{l-1}x_pm_l$, então existem monômios $n_1,\ldots,n_l$ em $K\langle X\rangle$ e uma bijeção $\varphi : \{1,\ldots,l\} \to \{1,\ldots,l\}$ tais que $n = n_1x_pn_2x_pn_3x_p\ldots n_{l-1}x_pn_l$ e $w_G(m_1x_pm_2\ldots m_t) = w_G(n_1x_pn_2\ldots n_{\varphi(t)})$.

Seja x_i a primeira variável de m. Logo existem dois monômios n_1 e n_2 de $K\langle X\rangle$ tais que $n = n_1x_in_2$ e $w_G(n_1) = 0$. Para demonstrar esta afirmação consideremos três casos possíveis:

Caso 1. Existem monômios m_1 e m_2 em $K\langle X\rangle$ tais que $m = x_im_1x_im_2$ e $w_G(x_im_1) = 0$. Então existem três monômios n_3, n_4 e n_5 em $K\langle X\rangle$ tais que $n = n_3x_in_4x_in_5$ e $w_G(n_3) = 0$ e $w_G(n_3x_in_4) = 0$.

Caso 2. Existem duas variáveis x_a e x_b e seis monômios m_1, m_2, n_3, n_4, n_5 e n_6 em $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_1x_ax_bm_2$, $n = n_3x_an_4x_in_5x_bn_6$, $n_1 = n_3x_an_4$, $w_G(m_1) = w_G(n_3)$ e $w_G(m_1x_a) = w_G(n_3x_an_4x_in_5)$. Então $w_G(n_4x_in_r) = 0$ e como $w_G(n_3x_an_4) = w_G(n_1) = 0$ a afirmação está provada.

Caso 3. Não ocorre nenhum dos casos anteriores. Considere $m = x_{i_1}\ldots x_{i_q}$. Escolhemos $r \in \{1,\ldots,q\}$ o menor inteiro tal que x_{i_r} é uma variável de n_1. Existem monômios n_3, n_4, n_5 e n_6 de $K\langle X\rangle$ tais que $n_1 = n_3x_{i_r}n_4$, $w_G(n_3) = w_G(x_{i_1}\ldots x_{i_{r-1}})$, $n = n_5x_{i_{r+1}}n_6$, $w_G(n_5) = w_G(x_{i_1}\ldots x_{i_r})$. Mostraremos que o comprimento de $n_5x_{i_{r+1}}$ não é maior que o comprimento de n_1. De fato, se o comprimento de $n_5x_{i_{r+1}}$ é igual ao comprimento de n_1 então, como $n_5x_{i_{r+1}}n_6 = n = n_1x_in_2$ segue que $n_1x_i = n_5x_{i_{r+1}}$ e daí $x_i = x_{i_{r+1}}$ e $w_G(n_5) = w_G(n_1) = 0$. No entanto, $w_G(n_5) = w_G(x_{i_1}\ldots x_{i_r})$ e portanto estamos no caso 1, o que é uma contradição. Se o comprimento de $n_5x_{i_{r+1}}$ é maior que o comprimento de n_1 então estamos no caso 2 o que novamente nos dá uma contradição. Assim, o comprimento de $n_5x_{i_{r+1}}$ não é maior que o comprimento de n_1. Observemos que mesmo que $i_r = i_{r+1}$ podemos tomar $n_3 \neq n_5$, de modo que x_{i_r} e $x_{i_{r+1}}$ também aparecem em posições distintas em n_1. Aplicando o mesmo raciocínio para $r+1, r+2, \ldots, q$ concluímos que se x é uma variável de $x_{i_r}x_{i_{r+1}}\ldots x_q$ então x é variável de n_1 e $a(x) \leq b(x)$, onde $a(x)$ denota a multiplicidade de x em $x_{i_r}x_{i_{r+1}}\ldots x_q$ e $b(x)$ denota a multiplicidade de x em n_1. Como r é o menor inteiro pertencente a $\{1, \ldots, q\}$ tal que x_r é variável de n_1, vale a igualdade $a(x) = b(x)$. Portanto n_1 e $x_{i_r}x_{i_{r+1}}\ldots x_q$ e $b(x)$ possuem o mesmo multigrau, em particular, $w_G(x_{i_r}x_{i_{r+1}}\ldots x_q) = w_G(n_1) = 0$. Logo existem monômios m_3, m_4, m_5 de $K\langle X\rangle$ tais que $m = m_3m_4x_jm_r$, onde x_j é a primeira variável de n, $w_G(m_3m_4) = 0$ e $m_4x_jm_5 = x_{i_{r_0}}x_{i_{r+1}}\ldots x_{i_q}$, logo $w_G(m_4x_jm_5) = w_G(x_{i_{r_0}}x_{i_{r+1}}\ldots x_{i_q}) = 0$. Agora, trocando as letras m e n a afirmação está provada.

Definimos

$$w(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} x_in_9n_7n_8n_{10}, & \text{se } w_G(n_8) = 0 \\ x_in_9n_7n_8n_{10}, & \text{se } w_G(n_8) \neq 0 \end{cases}$$

Se $w_G(n_8) = 0$ então $w_G(x_in_9) = 0$ e pela identidade $x_1x_2 = x_2x_1$ com $w_G(x_1) = w_G(x_2) = 0$, temos que $w(x_1, \ldots, x_k) \equiv n(x_1, \ldots, x_k)(\text{mod } I)$. Se $w_G(n_8) \neq 0$ então $w_G(n_7) = w_G(x_in_9) = -w_G(n_8)$ e, pela identidade $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1$ com $w_G(x_1) = -w_G(x_2) = w_G(x_3)$, segue que $w(x_1, \ldots, x_k) \equiv n(x_1, \ldots, x_k)(\text{mod } I)$.

Como $w(x_1, \ldots, x_k) - n(x_1, \ldots, x_k) \in I \subseteq T_n(M_n(K)) = T_n(R)$, temos que $w(A_1, \ldots, A_k) = n(A_1, \ldots, A_k) = m(A_1, \ldots, A_k)$. Se w_0 e m_0 são monômios de $K\langle X\rangle$ tais que $w = x_iw_0$ e $m = x_im_0$ então pelo Lema 2.2.1 notamos que $w_0(A_1, \ldots, A_k) = m_0(A_1, \ldots, A_k)$. Segue da hipótese de indução que $w_0(x_1, \ldots, x_k) \equiv m_0(x_1, \ldots, x_k)(\text{mod } I)$ e assim, $w(x_1, \ldots, x_k) \equiv m(x_1, \ldots, x_k)(\text{mod } I)$. ■

Já temos condições de provar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2.6. *Todas as identidades polinomiais graduadas da álgebra $\mathbb{Z}_n$-graduada de $M_n(K)$ seguem das identidades:*

(i) $x_1x_2 = x_2x_1, w_G(x_1) = w_G(x_2) = 0$

(ii) $x_1x_2x_3 = x_3x_2x_1, w_G(x_1) = -w_G(x_2) = w_G(x_3)$.

Prova: Já sabemos, pelo Lema 2.2.3 que $I \subseteq T_n(M_n(K))$. Mostraremos a inclusão oposta. Pelo corpo K ser infinito o ideal $\mathbb{Z}_n$-graduado é gerado pelos seus elementos multi-homogêneos, portanto, para mostrar que $T_n(M_n) \subset I$ basta mostrar que qualquer identidade polinomial graduada multi-homogênea $f(x_1, \ldots, x_m)$ de $M_n(K)$ pertence a I.

Seja r o menor inteiro não-negativo tal que f pode ser escrito módulo I como combinação linear de r monômios multi-homogêneos:

$$f \equiv \sum_{q=1}^{r} a_qm_q(\text{mod } I)$$

onde $0 \neq a_q \in K$, $m_1, \ldots, m_r \in K\langle X\rangle$. Temos que mostrar que $r = 0$. Suponhamos que $r > 0$. Pelo Lema 2.2.2, sabemos que $f \in T_n(F)$. Como $a_1m_1(A_1, \ldots, A_m) =$

$-\sum_{q=2}^{r} a_q m_q(A_1, \ldots, A_m)$ temos que existe um $p \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tal que $m_1(A_1, \ldots, A_m)$ e $m_p(A_1, \ldots, A_m)$ têm a mesma entrada não nula na primeira linha. Logo, pelo Lema 2.2.5, $m_1 \equiv m_p(\text{mod } I)$ e $f \equiv (a_1 + a_p)m_1 + \sum_{q=2}^{p-1} a_q m_q + \sum_{q=p+1}^{r} a_q m_q(\text{mod } I)$. Assim sendo, f pode ser escrito módulo I como uma combinação linear de no máximo $r-1$ monômios multi-homogêneos, o que contradiz a minimalidade de r. Portanto, $f \equiv 0(\text{mod } I)$. ■

CAPÍTULO 3

IDENTIDADES $\mathbb{Z}_2$-GRADUADAS PARA ÁLGEBRAS T-PRIMAS SOBRE CORPOS INFINITOS

Neste capítulo estudaremos as identidades polinomiais $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas pelas álgebras T-primas $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ sobre corpos de característica positiva diferente de 2. Os resultados aqui expostos constituem uma generalização dos resultados obtidos por Di Vincenzo em [10] quando na ocasião este descreveu bases para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de várias álgebras importantes para corpos de característica zero. Aqui, baseados nos resultados de Koshlukov e Azevedo em [21], veremos tais resultados para corpos infinitos de característica positiva.

3.1 Identidades graduadas de $M_{1,1}(E)$

A menos de menção contrária, K denotará um corpo infinito de característica diferente de 2.

Definição 3.1.1. *Dada uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_0 \oplus A_1$, o subespaço A_0 é chamado **subespaço par** e seus elementos são os **elementos pares**, enquanto o subespaço A_1 é chamado **subespaço ímpar** e seus elementos são os **elementos ímpares**.*

Sejam $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ dois subconjuntos disjuntos de variáveis tais que $X = Y \cup Z$. Assumindo que as variáveis do conjunto Y são pares e as variáveis do conjunto Z são ímpares, estabelecemos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação para $K\langle X \rangle$ entre os monômios pares e os monômios ímpares. De outro modo, definindo a função $w = w_{\mathbb{Z}_2} : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ onde

$$w_{\mathbb{Z}_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in Y \\ 1, & \text{se } x \in Z \end{cases}$$

Estendendo esta função de modo que $w_{\mathbb{Z}_2}(1) = 0$ e $w_{\mathbb{Z}_2}(x_1x_2\dots x_n) = w_{\mathbb{Z}_2}(x_1) + w_{\mathbb{Z}_2}(x_2) + \dots + w(x_n)$, dado um monômio $f = x_1x_2\dots x_n \in K\langle X\rangle$, poderemos classificá-lo como par se $w_{\mathbb{Z}_2}(f) = 0$ ou ímpar se $w_{\mathbb{Z}_2}(f) = 1$. Com isso a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada pode ser apresentada como:

$$K\langle X\rangle = K\langle X\rangle_0 \oplus K\langle X\rangle_1$$

onde $K\langle X\rangle_0$ é o subespaço gerado pelos monômios pares e $K\langle X\rangle_1$ é o subespaço gerado pelos monômios ímpares.

Definição 3.1.2. *Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada. Os elementos de $A_0 \cup A_1$ são denominados de* ***homogêneos****. Além disso, cada elemento homogêneo a possui um grau $w_{\mathbb{Z}_2}$ em $\mathbb{Z}_2$, isto é, $w_{\mathbb{Z}_2}(a) = 0$ ou $w_{\mathbb{Z}_2}(a) = 1$. A álgebra A é chamada* ***supercomutativa*** *se $ab = (-1)^{w_{\mathbb{Z}_2}(a)w_{\mathbb{Z}_2}(b)}$ para quaisquer $a, b \in A_0 \cup A_1$.*

Exemplo 3.1.3. *A álgebra de Grassmann, com sua $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica é uma álgebra supercomutativa. A álgebra exterior E_n de dimensão 2^n, com $\mathbb{Z}_2$-graduação $E_n = (E_n)_0 \oplus (E_n)_1$ é também um exemplo de álgebra supercomutativa.*

Definição 3.1.4. *Seja $K\langle X\rangle$ a álgebra livre $\mathbb{Z}_2$-graduada. Para os monômios $f, g \in K\langle X\rangle$, considere as relações da forma $fg = (-1)^{w_{\mathbb{Z}_2}(f)w_{\mathbb{Z}_2}(g)}gf$ seja I o ideal gerado por estas relações. A álgebra $K\langle Y; Z\rangle = K\langle X\rangle/I$ é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada (pois herda a graduação de $K\langle X\rangle$) e é chamada de* ***álgebra livre supercomutativa****.*

Segundo a definição 3.1.2 uma álgebra A é supercomutativa quando $A_0 \subseteq Z(A)$ e ainda temos $ab = -ba$ para quaisquer $a, b \in A_1$.

Lema 3.1.5. *Sejam $K[Y]$ a álgebra dos polinômios comutativos gerada por Y e $E(Z)$ a álgebra de Grassmann gerada pelo espaço vetorial com base Z. Então, as álgebras $K\langle Y; Z\rangle$ e $K[Y] \otimes E(Z)$ são isomorfas.*

Prova: Seja $\varphi : K[Y] \otimes E(Z) \longrightarrow K\langle Y; Z\rangle = K\langle X\rangle/I$ a aplicação dada por $\varphi(a \otimes b) = ab + I$. Naturalmente a aplicação φ é um homomorfismo de álgebras sobrejetor. Sejam $a = y_1y_2\dots y_n \in K[Y]$ e $b = z_1z_2\dots z_m \in E(Z)$, ambos não nulos. Fazendo as substituições $y_1 = \dots = y_n = 1$ e $z_1 = e_1, \dots, z_m = e_m$ onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é subconjunto da base de E, temos que $ab \notin T_2(E)$. Por outro lado, como $K\langle X\rangle/I$ é a álgebra livre supercomutativa, temos que $I = \cap\{Q|\ Q$ é T_2 ideal de alguma álgebra supercomutativa$\}$. Em particular, $I \subseteq T_2(E)$ e assim segue a injetividade de φ. ■

A álgebra $M_{1,1}(E)$ é a subálgebra de $M_2(E)$, vista no exemplo 1.1.28, que consiste das matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onde $a, d \in E_0$ e $b, c \in E_1$. Definamos em $M_{1,1}(E)$ a seguinte $\mathbb{Z}_2$-graduação: $M_{1,1}(E) = (M_{1,1}(E))_0 \oplus (M_{1,1}(E))_1$ onde $(M_{1,1}(E))_0 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in E_0\right\}$ e $(M_{1,1}(E))_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid b, c \in E_1\right\}$. Verificamos diretamente que $(M_{1,1}(E))_i(M_{1,1}(E))_j \subseteq (M_{1,1}(E))_{i+j}$ para todos $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Logo a álgebra $M_{1,1}(E)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Queremos nesta seção descrever o T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas pela álgebra $M_{1,1}(E)$. Já sabemos que para determinar as identidades $\mathbb{Z}$-graduadas satisfeitas pela álgebra $M_{1,1}(E)$ basta determinarmos as identidades satisfeitas pela álgebra livre $F_2(M_{1,1}(E))$, já que $T_2(M_{1,1}(E)) = T_2(F_2(M_{1,1}(E)))$. Para esta finalidade buscaremos um novo modelo para álgebra $F_2(M_{1,1}(E))$ de maneira que as identidades desta última se relacionem de forma bastante clara com as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$. Segue um **modelo genérico da álgebra** $M_{1,1}(E)$.

Dada a álgebra livre supercomutativa $K\langle Y; Z\rangle$ considere os conjuntos $Y = \{y_i^{(j)} | \ i \geq 1, j = 1, 2\}$, das variáveis de grau 0, e $Z = \{z_i^{(j)} | \ i \geq 1, j = 1, 2\}$, das variáveis de grau 1, como os conjuntos geradores. Considere agora as matrizes $A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & 0 \\ 0 & y_i^{(2)} \end{pmatrix}$ e $B_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} & 0 \end{pmatrix}$ e a subálgebra $Gen(M_{1,1}(E))$ de $M_2(K\langle Y; Z\rangle)$ gerada por estas matrizes. Essa álgebra é $\mathbb{Z}_2$-graduada considerando

$$Gen(M_{1,1}(E)) = Gen(M_{1,1}(E))_0 \oplus Gen(M_{1,1}(E))_1$$

onde

$$Gen(M_{1,1}(E))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix} | \ f_{11}, f_{22} \in (K\langle Y; Z\rangle)_0 \right\}$$

e

$$Gen(M_{1,1}(E))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & f_{12} \\ f_{21} & 0 \end{pmatrix} | \ f_{12}, f_{21} \in (K\langle Y; Z\rangle)_1 \right\}.$$

Veremos que a álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $Gen(M_{1,1}(E))$ é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável $F_2(M_{1,1}(E))$. Antes disso, necessitamos de uma lema.

Lema 3.1.6. *Se K é um corpo infinito e $f(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}) \in K\langle Y; Z\rangle$ é tal que $f(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m) = 0$ para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in E_0$ e $h_1, \ldots, h_m \in E_1$ então $f = 0$.*

Prova: Das relações $gh = (-1)^{w_{\mathbb{Z}_2}(g) w_{\mathbb{Z}_2}(h)}$, f pode ser expresso na forma

$$f(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}),$$

onde $m_i \in K\langle Y; Z\rangle$ são monômios de multigraus distintos. Como o corpo K é infinito segue do Corolário 1.4.10 que $\alpha_i m_i(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m) = 0$ para quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in E_0$ e $h_1, \ldots, h_m \in E_1$. Sendo assim, segue que $\alpha_i m_i(y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_m^{(2)}) = 0$. ∎

Lema 3.1.7. *A álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $Gen(M_{1,1}(E))$ é isomorfa à algebra relativamente livre de posto enumerável $F_2(M_{1,1}(E))$ na variedade de álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas determinadas por $M_{1,1}(E)$.*

Prova: Considere a aplicação $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow Gen(M_{1,1}(E))$ dada por

$$\varphi(f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m)) = f(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m).$$

Esta aplicação é claramente um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado sobrejetor. Mostraremos que $T_2(M_{1,1}(E)) = Ker\varphi$. Com efeito, a inclusão $Ker\varphi \subset T_2(M_{1,1}(E))$ é fácil de ser observada já que cada matriz de $M_{1,1}(E)$ é uma especialização de uma matriz $Gen(M_{1,1}(E))$. Seja $f(y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_m) \in T_2(M_{1,1}(E))$. Então existem

$$f_{ij}(y_1^{(1)},y_1^{(2)},\ldots,y_n^{(2)},z_1^{(1)},\ldots,z_m^{(2)}) \in K\langle Y;Z\rangle, 1\le i,j\le 2$$

tais que a matriz $M = f(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m)$ é da forma

$$M = f_{11}e_{11} + f_{12}e_{12} + f_{21}e_{21} + f_{22}e_{22}.$$

Como $f \in T_2(M_{1,1}(E))$ os polinômios f_{ij} são tais que $f_{ij}(g_1^{(1)},g_1^{(2)},\ldots,g_n^{(2)},h_1^{(1)},\ldots,h_m^{(2)}) = 0$ para quaisquer $(g_1^{(1)},g_1^{(2)},\ldots,g_n^{(2)}) \in E_0$ e $(h_1^{(1)},\ldots,h_m^{(2)}) \in E_1$. Pelo Lema 3.1.6 temos que $f_{ij} = 0$, ou seja, $f(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m) = 0$ e portanto $f \in Ker\varphi$. O Teorema do Isomorfismo nos garante que

$$F_2(M_{1,1}(E)) = K\langle X\rangle/T_2(M_{1,1}(E)) \simeq Gen(M_{1,1}(E)).$$

■

Observamos que este lema nos permite não fazer distinções entre a álgebra $Gen(M_{1,1}(E))$ e a álgebra relativamente livre $F_2(M_{1,1}(E))$ e com o modelo genérico da álgebra $M_{1,1}(E)$. Utilizaremos este modelo genérico para encontrarmos uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduada de $M_{1,1}(E)$.

Proposição 3.1.8. *Seja I o T_2-ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$. Então os polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \in K\langle X\rangle$ pertencem a I.*

Prova: Pelo fato que $Z(E) = E_0$ e que se $g_1,g_2,g_3 \in E_1$ então $g_1g_2g_3 + g_3g_2g_1 = 0$. Deste modo, se $y_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \in (M_{1,1}(E))_0$ e $y_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in (M_{1,1}(E))_0$ então $a_1,a_2,b_1,b_2 \in E_0$ e $y_1y_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 & 0 \\ 0 & b_2b_1 \end{pmatrix} = y_2y_1$, logo $y_1y_2 - y_2y_1 \in I$. Agora se $z_i = \begin{pmatrix} 0 & c_i \\ d_i & 0 \end{pmatrix} \in (M_{1,1}(E)), i = 1,2,3$, então

$$z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_1d_2c_3 + c_3d_2c_1 \\ d_1c_2d_3 + d_3c_2d_1 & 0 \end{pmatrix},$$

e temos a proposição. ■

Seja J o ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \in K\langle X\rangle$. Identificaremos as variáveis y_i e z_i com suas imagens pela projeção canônica $K\langle X\rangle \longrightarrow K\langle X\rangle/J$. Seja $B \subset K\langle X\rangle$ o conjunto formado pelos monômios

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}},$$

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}},$$

onde $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l, c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ e $d_1 < d_2 < \cdots < d_m, k \geq 0, l \geq 0, m \geq 0$. Nos monômios do segundo tipo $k + l \geq 1$, nos monômios do quarto tipo se $k = l = 0$ seu grau é maior ou igual a 2. O símbolo $\widehat{\ }$ sobre a variável significa que ela pode não aparecer. Denotaremos por B a imagem de B pela projeção canônica. A próxima proposição nos mostra que o conjunto destes polinômios geram $K\langle X\rangle/J$.

Proposição 3.1.9. *O conjunto B gera $K\langle X\rangle/J$.*

Prova: Se $f \in K\langle X\rangle_0$ então $y_if - fy_i \in J$. Logo, todo polinômio em $K\langle X\rangle/J$ é uma combinação linear de monômios da forma $m = h_1(y)\widehat{z_{e_1}}h_2(y)z_{e_2}z_{e_3}\ldots z_{e_k} + J$ onde $h_1(y), h_2(y)$ são monômios nas variáveis $y_i's$. Note que, como $h(y)$ é um monômio nas variáveis y_i então $h(y) = y_{e_1}y_{e_2}\ldots y_{e_k} + J$, de modo que, $e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_k$. Se $h(z) \neq 0 + J$ é um monômio nas variáveis z_i então segue da identidade $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 \in J$ que

$$\widehat{z_{e_2}}z_{e_3}z_{e_4}\ldots z_{e_s} \equiv z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\ldots z_{c_m}\widehat{z_{d_m}} (\mathrm{mod}\ J),$$

onde $c_1 < c_2 < \cdots < c_m, d_1 < d_2 < \cdots < d_m$, e os índices são tais que os monômios têm o mesmo multigrau. De tudo isso temos que B gera $K\langle X\rangle/J$. ■

Proposição 3.1.10. *O conjunto $B \subset K\langle X\rangle$ é linearmente independente módulo $T_2(M_{1,1}(E))$.*

Prova: Já que o corpo K é infinito, basta mostrar que cada subconjunto multi-homogêneo de B é linearmente independente em $K\langle X\rangle/T_2(M_{1,1}(E))$. Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ monômios distintos em B e $\lambda_i \in K$, $1 \leq i \leq n$ escalares tais que

$$M = \lambda_1M_1 + \lambda_2M_2 + \cdots + \lambda_nM_n \in T_2(M_{1,1}(E)).$$

Denotando por $\overline{M}$ a matriz obtida pela substituição de y_i por A_i e z_i por B_i em $M \in B$, consideremos as afirmações:

a) Se A_i e B_i são as matrizes definidas na seção anterior então

$$A_{a_1}A_{a_2}\ldots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}\ldots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\ldots B_{c_m}\widehat{B_{d_m}}$$

é igual a expressão

$$y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}\cdots y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots \widehat{z_{d_m}^{(2)}}E_{t_1t_2}+$$

$$y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\cdots y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots \widehat{z_{d_m}^{(1)}}E_{t_3t_4},$$

onde as variáveis $z_{d_m}^{(1)}, z_{d_m}^{(2)}$ aparecem se, e somente se, a matriz B_{d_m} aparece. Além disso, se a matriz for par temos que $t_1 = t_2 = 1$ e $t_3 = t_4 = 2$ e se for ímpar então $t_1 = t_4 = 1$ e $t_2 = t_3 = 2$. A demonstração desta afirmação consiste em cálculos diretos.

b) Se $M \in B$ então a matriz $\overline{M}$ é da forma $P_M^1E_{ij} + P_M^2E_{kl}$, os índices i, j, k, l são determinados pela paridade da matriz $\overline{M}$ e os multigraus dos monômios $P_M^1, P_M^2 \in K\langle Y; Z\rangle$ dependem injetivamente de M, isto é, a aplicação que associa a cada matriz $M \in B$ o multigrau da matriz P_M^1 ou P_M^2 é injetiva. Além disso $P_M^1 \neq 0$ e $P_M^2 \neq 0$. A primeira parte desta afirmação ocorre diretamente da afirmação 1. Já a segunda parte, segue observando que se

$$P_M^1 = y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}\cdots y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots \widehat{z_{d_m}^{(2)}},$$

então M é monômio nas variáveis $y_{a_1}, y_{a_2}, \ldots, y_{a_k}, y_{b_1}, y_{b_2}, \cdots, y_{b_l}z_{c_1}, z_{c_2}, z_{d_1}, z_{d_2}, \ldots, z_{c_m}, \widehat{z_{d_m}}$, onde a variável z_{d_m} aparece no monômio M se, e somente se, $z_{d_m}^2$ aparece em P_M^1. Assim, podemos determinar a partir de P_M^1 as variáveis que aparecem em M. Agora observamos que como $M \in B$ a ordem em que as variáveis aparecem em M fica determinada pelos índices superiores nas variáveis $y_n^{(a)}, z_m^{(b)}$ de P_M^1 e o resultado segue. Se $M \in B$ então $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ e $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, portanto $P_M^1 \neq 0$.

Continuando a demonstração da proposição, temos que $T_2(M_{1,1}(E)) = T_2(Gen(M_{1,1}(E)))$ e se substituirmos y_i por A_i e z_i por B_i obtemos

$$\overline{M} = \lambda_1\overline{M_1} + \lambda_2\overline{M_2} + \cdots + \lambda_n\overline{M_n} = 0.$$

Segue da afirmação 2 que as matrizes $\overline{M_a}$ são da forma $P_M^1E_{ij} + P_M^2E_{kl}$, onde os índices i, j, k, l são determinados pela paridade da matriz $\overline{M_a}$. Observe que como os M_l são multi-homogêneos as matrizes $\overline{M_l}$ têm a mesma paridade. Então a equação $\overline{M} = \lambda_1\overline{M_1} + \lambda_2\overline{M_2} + \cdots + \lambda_n\overline{M_n} = 0$ fica

$$0 = (\lambda_1P_{M_1}^1 + \lambda_2P_{M_2}^1 + \cdots + \lambda_nP_{M_n}^1)e_{ij} + (\lambda_1P_{M_1}^2 + \lambda_2P_{M_2}^2 + \cdots + \lambda_nP_{M_n}^2)e_{kl}.$$

Assim

$$0 = \lambda_1P_{M_1}^1 + \lambda_2P_{M_2}^1 + \cdots + \lambda_nP_{M_n}^1) = \lambda_1P_{M_1}^2 + \lambda_2P_{M_2}^2 + \cdots + \lambda_nP_{M_n}^2)e_{kl}.$$

Pela afirmação 2, os multigraus dos monômios não nulos $P_{M_a}^1$ e $P_{M_a}^2$ dependem injetivamente de M_a e portanto, concluímos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. ■

Apresentamos agora o principal teorema desta seção.

Teorema 3.1.11. *Seja K é um corpo infinito com $charK \neq 2$. Então as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $M_{1,1}(E)$ seguem das identidades $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$.*

Prova: Sabemos que $J \subset T_2(M_{1,1}(E))$ pela Proposição 3.1.8. Seja $f \in T_2(M_{1,1}(E))$. Pela Proposição 3.1.9 existem escalares λ_i e monômios m_i em $B \subset K\langle X\rangle$ tais que $f \equiv \sum \lambda_i m_i (\text{mod } J)$. Já que $J \subset T_2(M_{1,1}(E))$ temos que $0 \equiv_{T_2(M_{1,1}(E))} f \equiv_{T_2(M_{1,1}(E))} \sum \lambda_i m_i$, e pela Proposição 3.1.10 $\lambda_i = 0$, assim, $f \equiv 0 (\text{mod } J)$, logo, $f \in J$ e portanto, $T_2(M_{1,1}(E)) \subset J$ e temos o resultado. ■

Observação 3.1.12. *Se um polinômio multi-homogêneo $f \in K\langle X\rangle$ não é uma identidade de $M_{1,1}(E)$ e a variável z_i ocorre nos monômios de f, então $deg_{z_i} f \leq 2$. Isto ocorre devido, caso existam três letras z_i num monômio, ao menos duas delas estarão numa das sequências c_i ou d_i. Mas, devido à identidade $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1 = 0$ tais monômios desaparecem.*

3.2 Um outro modelo genérico para $M_{1,1}(E)$

Nesta seção, construiremos um novo modelo para $Gen(M_{1,1}(E))$.

Sejam $Y = \{a_i^{(0)}, b_i^{(0)} | \ i = 1, 2, \ldots\}$ e $Z = \{a_i^{(1)}, b_i^{(1)} | \ i = 1, 2, \ldots\}$ conjuntos de variáveis comutativas e anticomutativas, respectivamente. Consideremos a álgebra supercomutativa $K\langle Y; Z\rangle$ livremente gerada pelos conjuntos Y e Z e L a álgebra gerada por 1 e pelas matrizes $C_i = a_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_i = a_i^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_i^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tomando os C_i como elementos pares e D_i como elementos ímpares, então L é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Verificaremos agora que L é de fato um outro modelo genérico para $M_{1,1}(E)$.

Proposição 3.2.1. *A álgebra L é isomorfa à $Gen(M_{1,1}(E))$.*

Prova: Seja $\varphi : Gen(M_{1,1}(E)) \longrightarrow L$ o homomorfismo dado por $\varphi(A_i) = C_i$ e $\varphi(B_i) = D_i$. O $Ker\varphi = 0$ uma vez que as matrizes A_i e B_i são especializações das matrizes C_i e D_i. Como $charK \neq 0$ podemos substituir $a_i^{(0)}$, $b_i^{(0)}$, $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ por $(y_i^{(1)} + y_i^{(2)})/2$, $(y_i^{(1)} - y_i^{(2)})/2$, $z_i^{(1)}$, z_i^2, respectivamente. ■

É imediato que as matrizes $a_i^{(0)}(e_{11} + e_{22})$ comutam com as matrizes de L. Denote por $B_2(L)$ a subálgebra de L que é gerada por 1 e por todos os elementos de L tais que toda matriz $C_i's$ aparecem em comutadores, temos ainda que os elementos $a_i^{(0)}(e_{11} + e_{22})$ não aparecerão em nenhum polinômio não nulo de $B_2(L)$.

Proposição 3.2.2. *As matrizes $E_i = b_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D_i = \begin{pmatrix} 0 & c_i^{(1)} \\ d_i^{(1)} & -1 \end{pmatrix}$ satisfazem as seguintes relações:*

$$E_iE_j \text{ são centrais}, \qquad E_iE_j = E_jE_i,$$

$$E_iD_j = -D_jE_i, \qquad D_i^2D_j = -D_jD_i^2.$$

Prova: Imediata. ■

Seja $B_2(M_{1,1}(E))$ a subálgebra de $Gen(M_{1,1}(E))$ gerada por $1 = e_{11}+e_{22}$ e pelos elementos de $Gen(M_{1,1}(E))$ tais que as matrizes $C_i^{'}s$ aparecem apenas em comutadores. Em outras palavras, $B_2(Gen(M_{1,1})(E)) = B_2(F) = B_2(X)/(T_2(M_{1,1}(E)) \cap B_2(X))$. Então $B_2(M_{1,1}(E))$ é canonicamente isomorfa a $B_2(L)$, e identificaremos $B_2(F) = B_2(M_{1,1}(E))$ e $B_2(L)$.

Proposição 3.2.3. *Se $f \in B_2(L)$ é um polinômio multi-homogêneo, então f é uma combinação linear de elementos da forma*

$$E_{i_1}^{\alpha_1} E_{i_2}^{\alpha_2} \cdots E_{i_k}^{\alpha_k} D_{j_1}^2 D_{j_2}^2 \cdots D_{j_l}^2 g(D_{n_1}, D_{n_2}, \cdots, D_{n_m}),$$

onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$, $\{j_1, j_2, \cdots, j_l\} \cap \{n_1, n_2, \cdots, n_m\} = \emptyset$ e g é um polinômio multilinear.

Prova: Seja $f \in B_2(L)$. Como $1 = e_{11} + e_{22}$ é central, não aparecem matrizes do tipo $a_i^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ na expansão de f. Pelo Lema Proposição 3.2.3 podemos escrever

$$f = E_{i_1}^{\alpha_1} E_{i_2}^{\alpha_2} \cdots E_{i_k}^{\alpha_k} h(D_{n_1}, D_{n_2}, \cdots, D_t),$$

onde h é um polinômio multi-homogêneo. Se o grau de h para algum D_i é maior que 2, então pela Observação 3.1.12 h seria uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $M_{1,1}(E)$. Logo, $deg_{D_i} h \leq 2$ para todo i. Escrevamos h como uma soma de monômios não nulos $h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i$, onde $\lambda_i \in K$ e M_i é um monômio que só tem variáveis ímpares. Usando a identidade $z_1 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_1 = 0$, como na Proposição 3.1.9, podemos escrever $M_i = D_{c_1} D_{d_1} D_{c_2} D_{d_2} \ldots \widehat{D_{c_m} D_{d_m}}$ com $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_m$. Agora observemos que se $c_i = c_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$ e analogamente $d_i \neq d_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$. Isto significa que cada i pode aparecer no máximo duas vezes, em cada $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ e outra em $\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$. Assim a menos de sinal, temos $M_i = \ldots D_i^2 \ldots$ e usando $D_i^2 D_j = -D_j D_i^2$ temos $M_i = D_i^2 \ldots$. Como $D_i^2 D_j^2 = D_j^2 D_i^2$ segue que $M_i = D_{j_1}^2 D_{j_2}^2 \ldots D_{j_l}^2 g_i(D_{n_1}, D_{n_2} \ldots, D_{n_m})$ onde $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$, g_i é um monômio multilinear e $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\} \cap \{n_1, n_2, \ldots, n_m\} = \emptyset$. Já que todos os $M_i^{'}s$ têm o mesmo multigrau o resultado segue. ■

3.3 Resultados auxiliares de Combinatória

Na próxima seção faremos usos de alguns resultados de combinatória que serão dados e provados nesta seção.

Definição 3.3.1. *Sejam $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ uma permutação dos símbolos $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $A, B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tais que*

$$A \cup B = \{1, 2, \ldots, n\}, A \cap B = \emptyset.$$

Um par (i_α, i_β), $1 \leq \alpha, \beta \leq n$, forma uma ***inversão colorida****(em relação à partição $\{A, B\}$) se $1 \leq \alpha < \beta \leq n$, $\{\alpha, \beta\} \subset A$ ou $\{\alpha, \beta\} \subset B$, e $i_\alpha > i_\beta$. Se q é o número de inversões coloridas então $(-1)^q$ é o* ***sinal colorido*** *desta permutação com relação à partição $\{A, B\}$.*

Exemplo 3.3.2. *A tabela abaixo mostra os sinais coloridos de todas as permutações de $\{1, 2, 3\}$.*

	123	132	231	213	312	321
123	+	-	+	-	+	-
12;3	+	+	+	-	-	-
13;2	+	+	-	+	-	-
23;1	+	-	-	+	+	-

Observação 3.3.3. *Consideraremos as partições como pares não ordenados, deste modo o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ tem exatamente 2^{n-1} partições, incluindo a partição trivial. No caso da partição trivial $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $B = \emptyset$, o sinal colorido é igual a 1 para todas as partições pois a permutação principal não possui nenhuma inversão.*

Lema 3.3.4. *As transposições $(t, t+2)$ mudam o sinal colorido de qualquer permutação em relação a qualquer partição.*

Prova: Consideremos as permutações $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ e $j = (i_1, \ldots, i_t, i_{t+1}, i_{t+2}, \ldots, i_n)$ dos símbolos $\{1, 2, \ldots, n\}$. Seja $\{A, B\}$ uma partição qualquer deste conjunto e a partir desta partição defina q_A^i como sendo o número de inversões coloridas (i_α, i_β) tais que $\{\alpha, \beta\} \subset A$ na permutação i e, de modo análogo, defina q_B^i, q_{A^j}, q_B^j. Temos duas possibilidades para os símbolos i_t, i_{t+1}, i_{t+2}:

(1) Os três elementos pertencem ao mesmo conjunto na partição;

(2) Não acontece (1).

Para o caso (1), suponhamos sem perda de generalidade, que dois dos símbolos i_t, i_{t+1}, i_{t+2} pertencem a A. Neste caso $q_B^i = q_B^j$ e os números q_A^i e q_A^j têm paridades diferentes e portanto vale o resultado. No caso (2) podemos supor sem perda de generalidade que dois dos símbolos i_t, i_{t+1}, i_{t+2} pertencem a A e o outro a B. Temos três possibilidades a considerar: ou $i_t, i_{t+1} \in A$ ou $i_t, i_{t+2} \in A$ ou $i_{t+1}, i_{t+2} \in A$. É fácil ver que para qualquer uma dessas possibilidades $q_B^i = q_B^j$ e os números q_A^i e q_A^j têm paridades diferentes. ∎

Proposição 3.3.5. *Seja $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ uma permutação fixa de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Então o sinal colorido de i é igual a 1 ou -1 com relação a todas as partições, ou então é igual a 1 para 2^{n-2} partições e -1 para as outras 2^{n-2} partições.*

Prova: Pelo Lema 3.3.4 é suficiente provar a proposição apenas para permutações i tais que $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$. Faremos indução sobre n. Para $n = 1$ e $n = 2$ o resultado é imediato. Para $n = 3$ o resultado segue do Exemplo 3.3.2. Suponhamos agora que $n > 3$ e que o resultado é válido para $1, 2, \ldots, n-1$. Seja $i^{'} = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, i_n)$ a permutação dos $n-1$ símbolos $\{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{i_n\}$ obtida da permutação i apagando-se o símbolo i_n. Pela hipótese de indução a proposição vale para $i^{'}$. Como $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$ segue que $i_n = n$ ou $i_{n-1} = n$.

Se $i_{n-1} < i_n$ então $i_n = n$. Se $\{A, B\}$ é uma partição de $\{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{i_n\}$ então $\{A \cup \{i_n\}, B\}$ e $\{A, B \cup \{i_n\}\}$ são partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e os sinais coloridos destas partições são os mesmos de $i^{'}$ com relação a partição $\{A, B\}$.

Se $i_{n-1} > i_n$ então $i_{n-1} = n$ e neste caso i_{n-1} forma inversão colorida apenas com i_n. Definimos $i^{''} = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}, i_n)$ e a proposição vale para $I^{''}$. Seja (C, D) uma partição de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ e ε o sinal colorido de $i^{''}$ com relação a (C, D). Formamos duas partições $\{C \cup \{n\}, D\}$ e $\{C, D \cup \{n\}\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Em uma delas i_n e $i_{n-1} = n$ pertencem a conjuntos diferentes da partição, logo o sinal colorido de i com relação a essa partição será ε. Na outra partição i_n e $i_{n-1} = n$ pertencem ao mesmo conjunto da partição e o sinal colorido de i em relação a esta partição será $-\varepsilon$ e temos o resultado. ■

Proposição 3.3.6. *Seja $i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ tal que $i_1 < i_3 < \ldots$ e $i_2 < i_4 < \ldots$. Se $i \neq (1, 2, \ldots, n)$ então o sinal colorido de i é igual a 1 para 2^{n-2} partições e é igual a -1 para outras 2^{n-2} partições de $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Prova: Segue da proposição 3.3.5. Faremos indução em n, e observamos que por hipótese de indução tanto no caso $i_{n-1} < i_n$ quanto no caso $i_{n-1} > i_n$ obtemos 2^{n-2} vezes o sinal colorido 1 e 2^{n-2} vezes o sinal colorido -1. ■

3.4 As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $E \otimes E$

Nesta seção encontraremos uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas do quadrado tensorial da álgebra de Grassmann E.

No capítulo 1 vimos que a álgebra $E \otimes E$ possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação canônica dada por

$$E \otimes E = (E \otimes E)_0 \oplus (E \otimes E)_1,$$

onde $(E \otimes E)_0 = (E_0 \otimes E_0) \oplus (E_1 \otimes E_1)$ e $(E \otimes E)_1 = (E_0 \otimes E_1) \oplus (E_1 \otimes E_0)$.

Assim como foi feito para a álgebra $M_{1,1}(E)$, usaremos um modelo genérico para álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada relativamente livre na variedade das álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas definidas por $E \otimes E$ a fim de obtermos o T_2-ideal de $E \otimes E$.

Sejam $a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)}$ variáveis comutativas e $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)}$ variáveis anticomutativas, $i = 1, 2, \ldots$. Consideramos $K\langle Y; Z\rangle$ a álgebra livre supercomutativa livremente gerada pelos conjuntos $Y = \{a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}, d_i^{(0)}\}$ e $Z = \{a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)}\}$ de variáveis pares e ímpares, respectivamente. Denotemos por F a subálgebra do produto tensorial $K\langle Y; Z\rangle \otimes K\langle Y; Z\rangle$ gerada pelos elementos da forma:

$$Y_i = a_i^{(0)} \otimes b_i^{(0)} + a_i^{(1)} \otimes b_i^{(1)}, Z_i = c_i^{(0)} \otimes d_i^{(0)} + c_i^{(1)} \otimes d_i^{(1)}.$$

Então $F = F_0 \oplus F_1$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural, considerando Y_i como variáveis pares e Z_i como variáveis ímpares.

Proposição 3.4.1. *A álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada F é isomorfa à álgebra relativamente livre de posto enumerável $K\langle X\rangle/T_2(E\otimes E)$ na variedade das álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas definidas por $E\otimes E$.*

Prova: O homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow F$ definido por $\varphi(y_i) = Y_i$ e $\varphi(z_i) = Z_i$ é claramente um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado sobrejetor. É necessário agora que mostremos que $Ker\varphi = T_2(E\otimes E)$. De fato, $Ker\varphi \subset T_2(E\otimes E)$ já que cada elemento de $E\otimes E$ é uma especialização de um elemento de F. Seja $f \in T_2(E\otimes E)$, então $\varphi(f)$ é um polinômio em $K\langle Y;Z\rangle\otimes K\langle Y;Z\rangle$ que se anula para cada substituição dos $a_i^{(0)}, b_i^{(0)}, c_i^{(0)}$ por elementos E_0 e dos $a_i^{(1)}, b_i^{(1)}, c_i^{(1)}, d_i^{(1)}$ por elementos de E_1. Daí segue que $\varphi(f) = 0$ em $K\langle Y;Z\rangle\otimes K\langle Y;Z\rangle$, ou seja, $f \in Ker\varphi$ e pelo Teorema do Isomorfismo conclui-se a prova. ■

Precisamos de algumas propriedades elementares da álgebra $E\otimes E$. É fácil ver que seu centro é igual a $E_0\otimes E_0$.

Lema 3.4.2. *Os polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ são identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas para a álgebra $E\otimes E$. Se $charK = p > 2$ então o polinômio $y_1^pz_1 - z_1y_1^p$ também é uma identidade graduada para $E\otimes E$.*

Prova: O primeiro polinômio é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $E\otimes E$ pois a componente par $E_0\otimes E_0\oplus E_1\otimes E_1$ é uma álgebra comutativa. Mostraremos agora que o segundo polinômio é uma identidade graduada. Como é multilinear, basta mostrar que $g_1g_2g_3\otimes h_1h_2h_3 + g_3g_2g_1\otimes h_3h_2h_1 = 0$ sempre que $g_i, h_i, i = 1,2,3$ são homogêneos tais que que $w_G(h_i) = w_G(g_i) + 1$. Neste caso temos

$$
\begin{aligned}
g_1g_2g_3 &= (-1)^{(w_G(g_1)w_G(g_2))}g_2g_1g_3 = (-1)^{(w_G(g_1)w_G(g_2)+w_G(g_1)w_G(g_3))}g_2g_3g_1 \\
&= (-1)^{(w_G(g_1)w_G(g_2)+w_G(g_1)w_G(g_3)+w_G(g_2)w_G(g_3))}g_3g_2g_1,
\end{aligned}
$$

e

$$
h_1h_2h_3 = (-1)^{\sigma},
$$

onde

$$
\sigma = w_G(h_1)w_G(h_2) + w_G(h_1)w_G(h_3) + w_G(h_2)w_G(h_3) = w_G(g_1g_2) + w_G(g_1g_3) + w_G(g_2g_3) + 1.
$$

Ou seja, $h_1h_2h_3 = -(-1)^{w_G(g_1g_2)+w_G(g_1g_3)+w_G(g_2g_3)}h_3h_2h_1$, e segue que o segundo polinômio $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ é uma identidade.

Agora, seja $a \in E_0\otimes E_0\oplus E_1\otimes E_1$, ou seja, $a = \sum(e_i\otimes f_i + g_i\otimes h_i)$ onde $e_i, f_i \in E_0$ e $g_i, h_i \in E_1$. Como a é uma soma de elementos que comutam dois a dois e $charK = p > 2$ segue que

$$
a^p = \sum(e_i^p\otimes f_i^p + g_i^p\otimes h_i^p),
$$

e como $g_i, h_i \in E_1$ segue que $g_i^p = h_i^p = 0$, assim $a^p = \sum(e_i^p\otimes f_i^p)$. Como os elementos $e_i^p\otimes f_i^p$ são centrais em $E\otimes E$, temos que $[y^p, z]$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada. ■

Lema 3.4.3. *A álgebra* $B_2(F) = B_2(X)/B_2(X)\cap T_2(E\otimes E)$ *é imagem homomorfa de* $B_2(L)\simeq B_2(M_{1,1}(E)) = B_2(X)/B_2(X)\cap T_2(M_{1,1}(E))$.

Prova: Sabemos que $T_2(M_{1,1}(E))\subset T_2(E\otimes E)$ e portanto $B_2(X)/B_2(X)\cap T_2(E\otimes E)$ é imagem homomorfa de $B_2(X)/B_2(X)\cap T_2(M_{1,1}(E))$ pela aplicação induzida por $\pi : K\langle X\rangle/T_2(M_{1,1}(E)) \longrightarrow K\langle X\rangle/T_2(E\otimes E)$ onde $\pi(f+T_2(M_{1,1}(E))) = f+T_2(E\otimes E)$ e $f\in K\langle X\rangle$. ■

Usaremos agora o outro modelo genérico de $M_{1,1}(E)$ construído na seção anterior para provar o seguinte resultado.

Lema 3.4.4. *Sejam* $g_i(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ *polinômios multilineares linearmente independentes módulo o* T_2*-ideal* $T_2(M_{1,1}(E))$*. Então os polinômios*

$$y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_k^{i_k}z_{n+1}^2\cdots z_{n+r}^2 g(z_1,z_2,\ldots,z_n),$$

são linearmente independentes módulo o T_2*-ideal* $T_2(M_{1,1}(E))$.

Prova: Basta mostrar que os polinômios acima de mesmo multigrau são linearmente independentes, uma vez que o corpo K é infinito. Mas neste caso, qualquer combinação linear é um polinômio da forma

$$y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_k^{i_k}z_{n+1}^2\cdots z_{n+r}^2 g(z_1,z_2,\ldots,z_n),$$

onde $g(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ é uma combinação linear dos $g_i(z_1,z_2,\ldots,z_n)$. Se mostrarmos que $y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_k^{i_k}z_{n+1}^2\cdots z_{n+r}^2 g(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ pertence a $T_2(M_{1,1}(E))$ somente quando $g(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ pertence a $T_2(M_{1,1}(E))$ o resultado está provado, já que os $g_i(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ são linearmente independentes módulo $T_2(M_{1,1}(E))$.

Observemos que

$$E_i^\alpha = (b_i^{(0)})^\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^\alpha \text{ e } D_i^2 = (c_i^{(0)}d_i^{(0)})\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Assim fazendo $y_i = E_i$, $1\le i\le k$ e $z_j = D_j$, $1\le j\le n+r$, podemos concluir que o monômio $y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_k^{i_k}z_{n+1}^2\cdots z_2^{n+r}$ é igual a

$$(b_i^{(0)})^{i_1}(b_i^{(0)})^{i_2}\cdots(b_i^{(0)})^{i_k}(c_{n+1}^{(1)}d_{n+1}^{(1)})\cdots(c_{n+r}^{(1)}d_{n+r}^{(1)})\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^{(i_1+i_2+\cdots+i_{k+r})}.$$

Assim, se $y_1^{i_1}y_2^{i_2}\cdots y_k^{i_k}z_{n+1}^2\cdots z_2^{n+r}g(z_{1,z_2,\ldots,z_n}) = 0$, então o polinômio $g(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ se anula quando substituímos $z_1 = D_1,\ldots,z_n = D_n$. Logo $g(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in T_2(M_{1,1}(E))$. ■

Lema 3.4.5. *Os monômios multilineares* $m_{ij} = z_{i_1}z_{j_1}z_{i_2}z_{j_2}\ldots z_{i_m}\widehat{z_{j_m}}$*, onde* $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$*,* $j_1 < j_2 < \ldots < j_{m-1} < j_m$ *e* z_{j_m} *é omitido quando o grau de* m_{ij} *é ímpar, são linearmente independentes módulo as identidades* $\mathbb{Z}_2$*-graduadas de* $E\otimes E$.

Prova: Suponhamos por absurdo que os monômios sejam linearmente dependentes, isto é, suponha que existem escalares α_{ij}, não nulos, e monômios m_{ij} tais que $\sum \alpha_{ij} m_{ij}$ em $K\langle X \rangle / T_2(E \otimes E)$. Desde modo temos que $\sum \alpha_{ij} m_{ij} \in T_2(E \otimes E)$. Como o corpo K é infinito, podemos supor que estes monômios têm o mesmo multigrau e, renomeando suas variáveis, podemos supor que todos os m_{ij} são monômios nas variáveis $z_1, z_2, \ldots, z_k$ para $k \in \mathbb{N}$ conveniente. Suponha que o monômio $z_1 z_2 \ldots z_{k-1} z_k$ participa desta combinação linear com coeficiente não nulo α.

Considere a identidade $\sum \alpha_{ij}(m_{ij} z_{k+1})$ e uma partição $\{A, B\}$ do conjunto $\{1, 2, \ldots, k\}$ onde $|A| = n$ e $|B| = m$. Fazendo as substituições $z_i \mapsto e_{2i-1} \otimes 1$, se $i \in A$, $z_i \mapsto 1 \otimes e_{2i}$, se $i \in B$ e $z_{k+1} \mapsto e_{2n+1} e_{2n+3} \ldots e_{2k-1} \otimes e_{2m+2} e_{2m+4} \ldots e_{2k}$ e denotando por $\overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A,B)}$ o resultado do monômio $m_{ij} z_{k+1}$ após a substituição, temos que, como $\sum \alpha_{ij}(m_{ij} z_{k+1})$ é uma identidade para $E \otimes E$, então $\sum \alpha_{ij} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A,B)} = 0$. Assim

$$0 = \sum_{(A,B)} \left(\sum \alpha_{ij} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A,B)} \right)$$

onde o primeiro somatório é feito sobre todas as 2^{k-1} partições de $\{1, 2, \ldots, k\}$. Reorganizando a soma obtemos

$$0 = \sum \alpha_{ij} \left(\sum_{(A,B)} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A,B)} \right).$$

Afirmamos que $\displaystyle\sum_{(A,B)} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A,B)} = 0$ sempre que $m_{ij} \neq z_1 z_2 \ldots z_k$. De fato, suponha que $m_{ij} = z_{n_1} \ldots z_{n_k} \neq z_1 \ldots z_k$, então

$$\overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A,B)} = (-1)^{\sigma(A,B)} e_1 e_3 \ldots e_{2k-1} \otimes e_2 e_4 \ldots e_{2k},$$

onde $\sigma(A, B)$ é o sinal colorido da permutação $(n_1, \ldots, n_k)$ com relação à partição $\{A, B\}$. Sabemos por hipótese que $n_1 < n_3 < \ldots$, e $n_2 < n_4 < \ldots$ em m_{ij}. Como $(n_1, \ldots, n_k) \neq (1, 2, \ldots, k)$, segue da Proposição 3.3.6 que

$$\sum_{(A,B)} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A,B)} = \left(\sum_{(A,B)} (-1)^{\sigma(A,B)} \right) e_1 e_3 \ldots e_{2k-1} \otimes e_2 e_4 \ldots e_{2k} = 0.$$

A afirmação acima diz que para igualdade $0 = \displaystyle\sum \alpha_{ij} \left(\sum_{(A,B)} \overline{m_{ij} z_{k+1}}^{(A,B)} \right)$ os monômios $m_{ij} \neq z_1 z_2 \ldots z_{k-1} z_k$ darão contribuição nula. Como para o monômio $z_1 z_2 \ldots z_{k-1} z_k$ o sinal colorido é 1 em relação à qualquer partição, obtemos que $\alpha 2^{k-1}(e_1 e_3 \ldots e_{2k-1} \otimes e_2 e_4 \ldots e_{2k}) = 0$, o que é um absurdo pois $\alpha \neq 0$ e $char K \neq 2$. ■

Lema 3.4.6. *Seja $f(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in B_2(M_{1,1}(E)) \equiv B_2(L)$ um polinômio graduado onde substituímos E_i por y_i e D_i por z_i nos geradores de L. Então, módulo $T_2(E \otimes E)$, f é igual a uma combinação linear de polinômios da forma*

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m} z_{i_1}^2 z_{i_2}^2 \cdots z_{i_k}^2 g_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_l}),$$

onde $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \emptyset$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e g_j é um polinômio multilinear. Se $charK = p > 0$ impomos $\alpha_i < p$, $i = 1, \ldots, m$.

Além disso, se os polinômios multilineares g_j's forem linearmente independentes módulo $T_2(E \otimes E)$, então os polinômios acima também o são.

Prova: Como o corpo K é infinito, podemos considerar f multi-homogêneo e a primeira parte segue do Lema 3.4.2. Se $charK = p > 0$ e $a \in E_1 \otimes E_1$ então $a^p = 0$. Desta forma, para $charK > 0$ impomos $\alpha_i < p$, $i = 1, \ldots, m$. Se os g_j's são linearmente independentes módulo $T_2(E \otimes E)$ procedemos de modo análogo à demonstração da Proposição 3.4.4. ■

Teorema 3.4.7. *O ideal das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra $E \otimes E$ é gerado pelos polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$, e se $charK = p > 2$, também por $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$.*

Prova: A idéia central desta demonstração é mostrar que se um polinômio não é consequência das identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$, e se $charK = p > 2$, $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$, então ele não é identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $E \otimes E$.

Como os dois primeiros formam uma base para as identidades graduadas de $M_{1,1}(E)$ e $T_2(M_{1,1}(E)) \subseteq T_2(E \otimes E)$, podemos trabalhar na álgebra relativamente livre determinada por eles, ou seja, $Gen(M_{1,1}(E))$. Podemos considerar apenas os polinômios onde as variáveis pares aparecem apenas em comutadores.

Suponha, sem perda de generalidade, o polinômio próprio $f \neq 0$ em $Gen(M_{1,1}(E))$. Pelo Lema 3.4.3, $0 \neq f \in B_2(M_{1,1}(E)) \simeq B_2(L)$. Segundo a Proposição 3.2.3 teremos que f é combinação linear de polinômios da forma

$$E_{i_1}^{\alpha_1} E_{i_2}^{\alpha_2} \cdots E_{i_k}^{\alpha_k} D_{j_1}^2 D_{j_2}^2 \cdots D_{j_l}^2 g(D_{n_1}, D_{n_2}, \cdots, D_{n_m}),$$

onde $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$, $\{j_1, j_2, \cdots, j_l\} \cap \{n_1, n_2, \cdots, n_m\} = \emptyset$ e g é um polinômio multilinear. Se substituirmos E_i por y_i e D_i por z_i em f temos pelo Lema 3.4.6 que, módulo $T_2(E \otimes E)$, f é igual a uma combinação linear de polinômios da forma

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m} z_{i_1}^2 z_{i_2}^2 \cdots z_{i_k}^2 g_j(z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_l}),$$

onde $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \emptyset$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ e g_j é um polinômio multilinear e, se $charK = p > 0$ devemos impor $\alpha_i < p$, $i = 1, \ldots, m$.

Observe que se $\alpha_i < p$, $i = 1, \ldots, m$ então f não pode ser consequência de $y_1^p z_1 - z_1 y_1^p$. Ainda, fazendo as substituições, $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 1 \otimes 1 \in E \otimes E$ e $z_{i_r} = (e_{i_r} + e_{u_r}) \otimes 1$ e $z_{j_s} = e_{j_s} \otimes 1 \in E_1 \otimes E_0$ para $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \cap \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \neq \emptyset$ vemos que f não pertence a $T_2(E \otimes E)$ e assim concluímos a demonstração. ■

Como corolário deste teorema obtemos uma nova prova da coincidência dos T-ideais das álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ sobre um corpo de característica zero.

Corolário 3.4.8. *Se a característica do corpo K é zero as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ são PI equivalentes. Em outra palavras, $T(M_{1,1}(E)) = T(E \otimes E)$.*

Prova: Pela Proposição 1.5.15, sabemos que se duas álgebras graduadas satisfazem as mesmas identidades graduadas, então elas satisfazem as mesmas identidades ordinárias. As identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{1,1}(E)$ e de $E \otimes E$ seguem das identidades $y_1y_2 - y_2y_1$, $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ para um corpo de característica zero. Portanto, as álgebras $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais ordinárias quando a característica de K é zero. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 449–463 (1950).

[2] S. S. Azevedo, *A basis for $\mathbb{Z}$-graded identities of matrices over infinite fields*, Serdica Math. Journal **29 (2)**, 149–158(2003).

[3] S. S. Azevedo, *Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field*, Commun. Algebra **30 (12)**, 5849-5860(2002).

[4] YU. A. Bahturin, *Identical relations in Lie algebras*, VNU Scienc Press BV, Utrecht, First English Edition, (1987).

[5] A. Berele, *Homogeneous polynomial identities*, Israel J. Math. **42**, 258–272 (1982).

[6] P. Zh. Chiripov, P. N. Siderov, *On bases for identities of some varieties of associative algebras*, Pliska Sutida Mathematica Bulgaria **2**, 103–115(1981).

[7] J. Colombo, P. Koshlukov, *Central polynomials in the matrix algebra of order two*, Linear Algebra Appl. **377**, 53–67 (2004).

[8] C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Pure and Applied Mathematics: A Series of Text and Monographs, Vol XI, Interscience Publishers (1962).

[9] M. Denh, *Uber die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, Math. Ann. **85**, 184–194 (1922).

[10] O. M. Di Vincenzo, *On the graded identities of $M_{1,1}(E)$*, Israel J. Math. **80 3**, 323-335 (1992).

[11] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza , *Graded polynomial for tensor products by the Grassmann algebra*, Commun. Algebra, **31 (3)**, 1453–1474(2003).

[12] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0* (Russian), Algebra and Logic **20**, 282–290 (1981). Translation: Algebra and Logic **20**, 188–194 (1981).

[13] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Graduate Course in Algebra, Springer, Singapore, (1999).

[14] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Mathematical surveys and monographs , No. **122**, Providence, American Mathematical Society, (2005).

[15] M. Hall, *Projective planes*, Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229–277(1943).

[16] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Math. Monographs **15**, Math. Assoc. Amer., New York (1968).

[17] N. Jacobson, *PI-Algebra. An introduction*, Lecture Notes in Mathematics, **441**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).

[18] I. Kaplansky , *Rings with a polynomial identity* , Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 575–580(1948).

[19] A. R. Kemer, *Ideals of identities of associative algebras*, Translations of Mathematical Monographs, **87**, American Mathematical Society, Providence, RI, (1991).

[20] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $p \neq 2$, J. Algebra **241**, 410–434 (2001).

[21] P. Koshlukov, S. S. Azevedo, *Graded identities for T-prime algebras over fields of positive characteristic*, Israel J. Math. **128**, 157-176(2002).

[22] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7**, 237–264(1958).

[23] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181**, 429–438 (1973).

[24] C. Procesi, *Rings with polynomial identities*, Pure And Applied Mathematics, **17**, Marcel Dekker, Inc., New York (1973).

[25] Yu. P. Razmyslov, *Finite basing of the identities of a matrix algebra of secound order a field of characteristic zero*, Algebra and Logic, **12**, 47–63(1973).

[26] Yu. P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero*,(Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **38**, 723–756(1974). Translation: Math. USRR, Izv. **8**, 727–760(1974).

[27] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math., **23**, 187–188(1976).

[28] L. H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York (1980).

[29] A. H. Stojanova-Venkova, *Bases of identities of Grassmann algebras*, Serdica **6**, 63–72 (1980).

[30] R. G. Swan, *An application of graph theory to algebra*, Proc. Amer. Math. Soc., **14**, 367–373(1963).

[31] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}$-graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Comum. Algebra **26 (2)**,601–612 (1998).

[32] S. Yu. Vasilovsky, *$\mathbb{Z}_n$-graded polynomial identities of the full matrix algebra of order n*, Proc. Amer. Math. Soc. **127 (12)**,3517–3524 (1999).

[33] W. Wagner, *Uber die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, Math. Ann. **113**, 528–567 (1936).