



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Soluções ultra fracas, fracas, brandas e fortes para equações do tipo Navier-Stokes

Elder Jesús Villamizar Roa^{†*}

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar

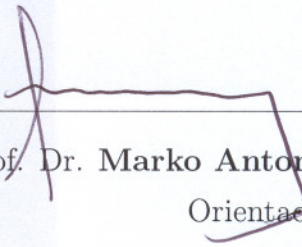
Co-orientador: Profa. Dra. María Angeles Rodríguez Bellido

^{†*}Este trabalho foi financiado por COLCIENCIAS, Colômbia.

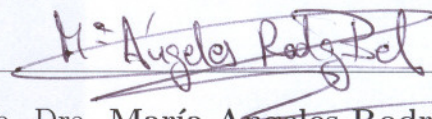
Soluções ultra fracas, fracas, brandas e fortes para equações do tipo Navier-Stokes

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado em matemática devidamente corrigida e defendida por **Elder Jesús Villamizar Roa** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 04 de julho de 2005.



Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar.
Orientador



Profa. Dra. María Angeles Rodríguez Bellido.
Co-orientadora

Banca examinadora:

Profa. Dra. María Angeles Rodríguez Bellido

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

Prof. Dr. Pablo Braz e Silva

Prof. Dr. Francisco Guillén González

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Villamizar Roa, Elder Jesús

V712s Soluções ultra fracas, fracas, brandas e fortes para equações do tipo
Navier-Stokes / Elder Jesús Villamizar Roa -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientadores : Marko Antonio Rojas Medar, María Angeles Rodríguez
Bellido

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Dinâmica dos fluidos. 3. Equações
diferenciais parciais. I. Rojas Medar, Marko Antonio. II. Rodríguez Bellido,
María Angeles. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Very weak, weak, mild and strong solutions for the equations of Navier-Stokes type.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Navier-Stokes equations. 2. Fluid dynamics. 3. Partial differential equations.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais

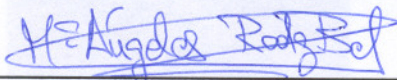
Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. María Angeles Rodríguez Bellido (U. de Sevilla, Espanha)
Prof. Dr. Jose Luiz Boldrini (UNICAMP)
Prof. Dr. Jaime Angulo Pava (UNICAMP)
Prof. Dr. Pablo Braz e Silva (UFPE)
Prof. Dr. Francisco Guillén González (U. de Sevilla, Espanha)

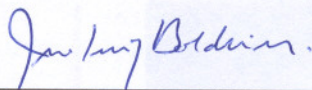
Data da defesa: 04/07/2005

Tese de Doutorado defendida em 04 de julho de 2005 e aprovada

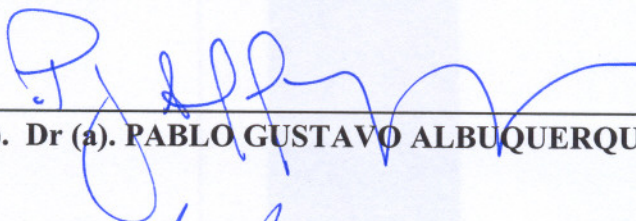
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



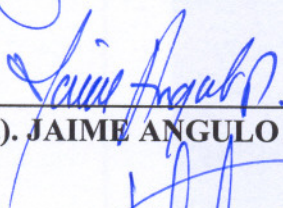
Prof. (a). Dr (a). MARIA ANGELES RODRIGUEZ BELLIDO



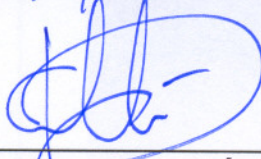
Prof. (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof. (a). Dr (a). PABLO GUSTAVO ALBUQUERQUE BRAZ E SILVA



Prof. (a). Dr (a). JAIME ANGULO PAVA



Prof. (a) Dr. (a) FRANCISCO GUILLÉN GONZÁLEZ

Esta aventura fabulosa fue el resultado de una ligereza mía cuando participaba en un seminario sobre poesía de los utensilios domésticos. Totó me preguntó cómo era que la luz se encendía con sólo apretar un botón, y yo no tuve el valor de pensarlo dos veces. -La luz es como el agua- le contesté: uno abre el grifo, y sale.

Doce cuentos peregrinos: "La luz es como el agua"

Gabriel García Márquez.

Dedico este trabajo a todos mis compatriotas que con su desempeño, en la ciencia, en el arte, en el deporte, en la literatura, etc, han mostrado al mundo parte de las cosas buenas que existen en ese bello territorio llamado Colombia.

Resumo

Abordamos vários problemas relativos à existência, unicidade, regularidade e estabilidade de alguns sistemas de equações do tipo Navier-Stokes; Estudamos a existência de soluções ultra fracas para as equações de Boussinesq estacionárias, com condições de fronteira pouco regulares, do tipo Dirichlet para a velocidade e condições mistas do tipo Dirichlet e Neumann para a temperatura. Seguidamente provamos a existência de soluções tempo-periódicas brandas e fortes em domínios não limitados para as equações de Boussinesq de evolução em espaços de Lorentz. Via a teoria de semigrupos provamos resultados de existência global, comportamento assintótico e estabilidade das soluções para as equações de fluidos micropolares. Posteriormente consideramos uma classe de equações não lineares estacionárias abstratas em um espaço de Hilbert separável e mostramos algumas propriedades qualitativas relativas a esse modelo, entre elas, uma propriedade sobre a cardinalidade do conjunto das soluções do modelo abstrato em questão e uma propriedade de dependência contínua das soluções com respeito aos dados do problema. Finalmente provamos a existência de soluções fortes para as equações de Navier-Stokes com densidade variável em domínios espaciais não limitados.

Abstract

We study several problems related to existence, uniqueness, regularity and stability of some systems of equations of Navier-Stokes type; we study the existence of very weak solutions for the stationary Boussinesq system, with non smooth mixed boundary data. We also prove the existence of mild and strong time-periodic solutions in unbounded domains for the evolutive Boussinesq system in the context of Lorentz's spaces.

Using the semigroup theory, we prove some results of global existence and exponential stability of solutions for the model of micropolar fluids. Later on, we consider a class of nonlinear stationary equations in a separable Hilbert space and show some qualitative properties relatives to the set of solutions of this model, that is, properties on the cardinality of the set of solutions as well continuous dependence properties of the solutions with respect to the data of the model.

Finally, we prove the existence of strong solutions for the Navier-Stokes equations with variable density in unbounded spatial domains.

Agradecimentos

As pessoas que são importantes para outras jamais saberão o quão importantes o são. Cada um tem seu próprio mérito e cada um é percebido com todo reconhecimento que merece.

“Mire e veja: o importante e bonito, do mundo, é isto: saber que as pessoas não estão sempre iguais, ainda não foram terminadas-mas que elas vão sempre mudando. Afinam ou desafinam. Verdade maior. É o que a vida me ensinou.” Guimarães Rosa.

Neste momento significativo quero expressar minha enorme gratidão:

- *A Deus por ter-me permitido cumprir este objetivo, por ser meu refúgio e fortaleza, socorro bem presente na angustia.*
- *Aos meus orientadores, Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar da Universidade Estadual de Campinas, Brasil, e Profa. Dra. María Angeles Rodríguez Bellido, da Universidad de Sevilla, Espanha, pelo privilégio que me deram de trabalhar junto, pelas orientações recebidas e pela confiança que em mim depositaram.*
- *A minha família: meus pais, Luis Antonio e Aminta, e meus irmãos Nancy Smith e Luis Hernan, por revestirem minha existência de amor, carinho, dedicação e por fazer dos meus sonhos, parte dos seus.*

- *A COLCIENCIAS-COLOMBIA, pelo apoio financeiro que me brindou, pelo trabalho sério que estão desenvolvendo e por acreditar que é educando ao povo como se obtém as verdadeiras mudanças dum país.*
- *À Universidade Estadual de Campinas, Campinas, S.P, Brasil, e À Universidade Industrial de Santander, Bucaramanga, Colômbia, pelo privilégio que me deram de estudar e fazer deste meu sonho, uma realidade.*
- *Aos Professores Doutores, Bernardo Mayorga, Marlio Paredes, Henry Lamos e Sonia Sabogal, da Universidade Industrial de Santander, por serem além de meus professores, meus amigos, que com sua extrema confiança me motivaram a seguir este caminho. “A ustedes, mil gracias”!!*
- *Aos Professores do departamento de matemática da Universidade Estadual de Campinas (IMECC), em especial, aos Professores Doutores, Marco A. Teixeira, Marcelo Santos, Caio Negreiros, Orlando Lopes, J. Luiz Boldrini, Jaime Angulo, Mario C. Matos, por compartilhar comigo, parte do seu grande conhecimento.*
- *Aos Professores Doutores que fizeram parte da banca examinadora, pelo empenho que colocaram na revisão detalhada desta tese.*
- *Ao pessoal da secretaria da pos-graduação do IMECC, que com constante cordialidade sempre se mostraram dispostos a ajuda-me na tramitação de documentos.*
- *Aos amigos e colegas brasileiros e colombianos, os quais não cito aqui por serem muitos, que com sua amizade e seu companheirismo sem hora ou lugar, possibilitou que minha presença fosse também um aprendizado de vida. A saudade já esta apertando!*
- *Ao meu amigo e colega Lucas Catão pelas nossas longas conversas, principalmente matemáticas, sobre Espaços de Lorentz, Espaços de Morrey, “Self-similar solutions,” etc...*

CONTEÚDO

1	Introdução	1
2	Soluções ultra fracas para as equações de Boussinesq estacionárias	11
2.1	Preliminares	11
2.2	Solução ultra fraca	17
2.3	Problema em θ	18
2.4	Problema em $\mathbf{u}$ e um problema relacionado	22
2.5	Teorema de existência	26
2.6	Dependência contínua: Caso Navier-Stokes	31
2.7	Dependência contínua: Caso Boussinesq	35
2.8	Interpretação do problema diferencial	45
2.8.1	Equações diferenciais	45
2.8.2	Condições de fronteira	46
3	Soluções periódicas brandas e fortes para as equações de Boussinesq	51
3.1	Introdução	51
3.2	Preliminares e resultados	54
3.3	Existência, unicidade e regularidade de soluções periódicas	63
3.3.1	Soluções periódicas brandas. Prova do Teorema 3.4	65

3.3.2	Soluções periódicas fortes. Prova do Teorema 3.5.	73
3.4	Estabilidade das soluções periódicas	97
3.4.1	Prova do Teorema 3.11.	97
3.4.2	Prova do Teorema 3.12	101
3.4.3	Prova do Teorema 3.13	103
4	Existência global e estabilidade exponencial para as equações dos fluidos micropolares	109
4.1	Introdução	109
4.2	Preliminares e resultados principais	113
4.3	Soluções estacionárias	116
4.4	Operador linearizado	119
4.5	Existência global e decaimento exponencial	125
5	Algumas propriedades genéricas de uma classe de equações estacionárias abstratas	135
5.1	Introdução ao problema abstrato	136
5.2	Preliminares técnicos	139
5.3	Prova dos teoremas	140
5.3.1	Prova do Teorema 5.1.	140
5.3.2	Prova do Teorema 5.2.	147
5.4	Aplicações	149
5.4.1	Modelo de fluidos micropolares	149
5.4.2	Equações estacionárias de Navier-Stokes	152
5.4.3	Outros modelos	153
6	Soluções fortes para as equações de Navier-Stokes não homogêneas em domínios não limitados	155
6.1	Preliminares e resultados principais	158
6.2	Estimativas a priori	164
6.3	Prova do Teorema 6.1.	171
6.4	Unicidade	176

6.4.1	Prova do Teorema 6.2.	178
7	Conclusões e trabalhos futuros	181
7.1	Conclusões gerais	181
7.2	Trabalhos futuros	182

CAPÍTULO 1

Introdução

Pure mathematics is the magician's real wand.

Novalis

Grandes avanços têm sido dados na análise matemática da teoria das equações de Navier-Stokes e de modo mais geral em modelos que são variantes destas equações, tais como as equações de Boussinesq para convecção, equações de fluidos micropolares, equações da magneto-hidrodinâmica, entre outras; avanços relativos à existência, unicidade, regularidade, estabilidade das soluções para estes modelos. Várias técnicas da análise têm sido utilizadas para responder a estas problemáticas, como por exemplo, métodos de energia, métodos de compacidade, teoria de Semigrupos, teoria dos potenciais hidrodinâmicos, técnicas de ponto fixo, etc. Entretanto, muitas questões ainda continuam sem serem respondidas.

Nesta tese abordamos vários problemas relativos à existência, unicidade, regularidade e estabilidade de alguns sistemas de equações do tipo Navier-Stokes; explicitamente, dividimos este trabalho em sete capítulos dos quais os cinco seguintes correspondem, cada um, a um sistema e problema diferente, porém intimamente relacionados, e no capítulo sete apresentamos as conclusões do trabalho, como também algumas idéias para futura pesquisa.

No Capítulo 2, estudamos as equações de Boussinesq estacionárias (2.1), com condições de fronteira do tipo Dirichlet para a velocidade e condições mistas do tipo Dirichlet e Neumann para a temperatura, abordando aspectos relativos à existência, unicidade e dependência

contínua de um tipo de soluções as quais chamaremos de *soluções ultra fracas*, cuja definição será dada posteriormente.

O ponto principal do problema radica em que as condições de fronteira consideradas, são condições não-regulares. De fato, alguns dos autores como Rabinowitz [106]; Zarubin [133]; Morimoto [92]; Gil [50]; Õeda [96], etc, têm estudado o problema (2.1) com condições de fronteira mistas para a temperatura θ e Dirichlet para a velocidade $\mathbf{u}$, mas seus trabalhos são feitos considerando condições de fronteira regulares o qual permite estender tais dados sobre o interior do domínio e conseqüentemente, isto leva à obtenção de um sistema com condições de fronteira homogêneas e faz possível o uso de argumentos padrões para a obtenção de existência de soluções, chamadas comumente de soluções fracas. Entretanto, quando os dados de fronteira são funções não regulares, isto é, quando os teoremas do Traço usuais não podem ser usados, a resolução do sistema (2.1)-(2.2) não tem sido pesquisada.

O conceito de solução ultra fraca é uma extensão natural do conceito de solução fraca e tem sido estudado inicialmente por Conca [21],[22] em problemas de homogenização para as equações de Stokes. A idéia principal de Conca [21] foi o uso do método da transposição introduzido anteriormente por Lions e Magenes [76]. Outro trabalho nesta linha para o problema de Stokes foi dado posteriormente por Amrouche e Girault em [4]. Posteriormente, Marusič-Paloka [87] estendeu os resultados de Conca para as equações de Navier-Stokes. A estratégia usada por Marusič-Paloka [87] se baseia no estudo da linearização das equações de Navier-Stokes combinada adequadamente com argumentos de ponto fixo. No sistema linearizado, ele aplicou os resultados obtidos por Conca [21],[22] e definiu uma contração que permite aplicar o Teorema do ponto fixo de Banach. A extensão para as equações de Boussinesq foram dadas por Santos *et al.* [114] os quais analisaram o sistema (2.1), mas com condições de fronteira do tipo Dirichlet não somente para a velocidade $\mathbf{u}$ mas também para a temperatura θ . Em outros modelos da Hidrodinâmica, Guillén-González *et al.* [51] estudaram o conceito de solução ultra fraca para o sistema de Stokes hidrostático com condições de Neumann não suaves sobre a superfície rígida e condições do tipo Dirichlet sobre o resto da fronteira. Em [115], são consideradas as equações estacionárias de Navier-Stokes com dados de fronteira em algum espaço $W^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma)$. Isto corresponde a um problema de um fluido estacionário em um domínio com uma cavidade, isto é, a união de um semi-espaço com um domínio limitado (a cavidade) e o Problema de Taylor, ou problema do equilíbrio

de um fluido entre dois cilindros co-centricos com o cilindro externo fixado e o interno em movimento rotacional sobre seu eixo.

Para nosso estudo das equações de Boussinesq estacionárias (2.1), com condições de fronteira do tipo Dirichlet para a velocidade e condições mistas do tipo Dirichlet e Neumann para a temperatura são de vital importância os trabalhos de Dauge [25], [27]. Nós abordamos dois aspectos diferentes: Por um lado, as condições de fronteira pertencem a alguns espaços os quais não são espaços traço no sentido padrão. Por outro lado, o fato de considerar condições de fronteira mistas para a temperatura, leva ao estudo de propriedades de existência, unicidade e regularidade de soluções de um problema dual do tipo elíptico com condições de bordo mistas o que complexifica o problema fazendo com que sua resolução carregue algumas condições sobre o domínio. De fato, para que este problema elíptico seja bem posto, precisamos impor algumas hipóteses sobre a geometria do domínio. Este é um interessante problema que foi estudado por Dauge em [25], [27]. É surpreendente observar que se desejamos obter resultados de regularidade para a solução de dito problema, um domínio suficientemente regular não pode ser considerado. De fato, o pedaço de contorno com dado Dirichlet e o pedaço de contorno com dado Neumann, se eles estão em contato, deve formar um ângulo α , $\alpha < \pi$. Além disso, dois tipos de condições de contorno não podem viver sobre um domínio suave. Por outra parte, o problema elíptico para a temperatura é acoplado com um sistema de Navier-Stokes para a velocidade, que deve ser resolvido num domínio não suave.

No Capítulo 3, estudamos o sistema de Boussinesq no caso evolutivo (3.1)-(3.5) e abordamos um problema relativo à existência de soluções tempo-periódicas brandas e fortes em domínios não limitados. Vários estudos têm sido feitos na análise matemática do sistema (3.1)-(3.5). Por exemplo, no trabalho [23] se estuda o problema de Boussinesq de evolução em um domínio que depende do tempo. Se prova a existência de soluções fracas e a unicidade num domínio bidimensional. Em [89] se estuda a existência e unicidade de soluções locais e globais fortes em domínios não limitados de classe C^2 . No trabalho [53] se estuda a possível unicidade da solução fraca colocando hipóteses extras na pressão para o problema de Cauchy. Em [52] se demonstra a existência e unicidade de soluções fortes do problema de Cauchy, isto é, do problema evolutivo em $\mathbb{R}^3$. Também se mostram taxas de decaimento para a solução desde que as forças tenham respectivos decaimentos. As ferramentas uti-

lizadas foram linearização, teoria do potencial e equações integrais. Citamos também os trabalhos de Morimoto [90], [91]. Em [90] se estuda a existência de soluções fracas para o modelo de Boussinesq através do método de Galerkin e em [91] se analisa a existência de soluções reprodutivas para este modelo. Dentro da teoria L^2 , no artigo [35] se investigou a existência de soluções com dado inicial em L^2 (resp. $W^{1,2}$) para o caso $n = 2$ (resp. $n = 3$) e se discutiu a existência global de atratores. No que respeita à teoria L^p , no artigo [17] se construíram soluções de classe $L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^n))$ com expoentes convenientes p e q usando teoria de operadores Integrais. Hishida [58] usando teoria de semigrupos, estudou a existência e unicidade de soluções fortes com valores em $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$ (Ω domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) quando o dado inicial não é necessariamente suave. Na teoria dos espaços L^p fracos, Hishida [59] estudou o problema de convecção em um domínio exterior do $\mathbb{R}^3$; no mesmo artigo, uma classe de soluções estacionárias é dada. No trabalho [97], é apresentado um estudo sobre a existência de soluções reprodutivas para o modelo em questão, em domínios exteriores usando o Método de Imersão de domínios em conjunto com o método de Galerkin, argumentos de compacidade e de energia.

Entretanto, ainda não tem sido investigado o estudo de soluções periódicas no tempo do sistema (3.1)-(3.5) em domínios não limitados; além disso, convém notar que mesmo em domínios limitados, a única técnica usada até agora para o estudo da existência de soluções periódicas é basicamente o método de Galerkin. A proposta do Capítulo 3 é provar a existência, unicidade e estabilidade de soluções periódicas brandas e fortes para o problema (3.1)-(3.5) usando como base a teoria de semigrupos em espaços de Lorentz.

A existência de soluções periódicas no tempo fortes para as equações de Navier-Stokes em domínios não limitados têm sido investigado por Kozono e Nakao [69], Maremonti [85],[86] e Taniuchi [125]. Em particular, Moremonti [85] provou a existência de uma solução periódica no tempo sobre o espaço todo $\mathbb{R}^3$ para uma força externa suficientemente pequena. O mesmo problema, no semi-espaço $\mathbb{R}_+^3$ foi considerado por Moremonti em [86]. Kozono and Nakao [69], fazendo uso das estimativas $L^p - L^r$ para o semigrupo gerado pelo operador de Stokes, construíram soluções periódicas no tempo para forças periódicas no tempo sendo suficientemente pequenas e a estabilidade deste tipo de soluções foi analisada posteriormente por Taniuchi em [125]. Convém notar que nestes trabalhos, a análise é feita unicamente na teoria dos espaços L^p fortes. Yamasaki [131] analisou o mesmo problema estudado em

[69] dentro da teoria de espaços de Morrey. Lembramos aqui, que a existência de soluções periódicas fortes para o caso Navier-Stokes em domínios arbitrários do $\mathbb{R}^3$, não limitados, é ainda uma questão em aberto.

Uma outra problemática que difere das duas últimas será abordada no Capítulo 4. Estudaremos aspectos relativos à existência global, comportamento assintótico y estabilidade das soluções para as equações de fluidos micropolares (4.1). Estas equações são generalizações das equações de Navier-Stokes no sentido que descrevem a dinâmica de fluidos com micro estrutura, isto é, as partículas imersas estão sujeitas tanto a translações como a rotações o que leva ao conhecimento de uma nova grandeza que é a velocidade angular para obter uma completa descrição do escoamento.

Este caso foi estudado por Lukaszewicz em uma série de artigos [83], [82], [81]. Veja também [80]. No artigo [83] se estuda o problema estacionário associado, em [82] a existência de soluções fracas para o modelo de evolução e em [81] a existência e unicidade de soluções fortes. Estes trabalhos foram feitos em domínios limitados e a técnica utilizada pelo autor foi linearização em conjunto com um Teorema de quase-ponto-fixo. Os resultados obtidos são análogos aos conhecidos para equações de Navier-Stokes clássicas.

Em [110] se estuda o modelo acoplado com uma equação para o campo magnético em domínios limitados, provando-se a existência e unicidade de soluções locais fortes. Estes resultados foram obtidos fazendo uso do método de Galerkin espectral em conjunto com o método de energia e argumentos de compacidade. Em [100] se demonstra a existência e unicidade de soluções globais fortes ao mesmo nível das equações clássicas de Navier-Stokes.

Analogamente, como no caso das equações de Navier-Stokes clássicas as soluções fracas no problema tridimensional não são necessariamente únicas (de fato, é um dos problemas em aberto clássicos da teoria das equações de Navier-Stokes). Na teoria das equações de Navier-Stokes, Serrin [117] mostra condições suficientes para a unicidade. Resultados análogos no caso das equações dos fluidos micropolares foram estudados no trabalho [101], onde também se estabelece a existência das derivadas fracionárias temporais.

Em [84] é estudada a existência e unicidade de soluções periódicas fortes para uma classe abstrata de equações diferenciais parciais (incluindo as equações micropolares em domínios limitados), utilizando novamente a técnica de Galerkin.

No caso de domínios não-cilíndricos, isto é, domínios que mudam com o tempo, em [111],

[102] foi estudada a existência de soluções fortes para uma classe especial de domínios e em [108] foi analisada a existência de soluções fracas para domínios mais gerais. A idéia dos três trabalhos mencionados acima é o uso duma transformação para levar o problema inicial a um problema de domínio fixo, resolver o problema neste novo domínio e depois retornar ao domínio inicial através de uma aplicação adequada.

Para domínios exteriores, em [29] estuda-se o problema estacionário e em [30] o problema de evolução. Neste último caso, na sua abordagem foi utilizada a técnica de imersão de domínios introduzida por Ladyzhenskaya no estudo das equações de Navier-Stokes (veja também Heywood [57]).

Entretanto, todos esses resultados são essencialmente baseados na teoria dos espaços L^2 .

Recentemente, Yamaguchi [130] abordou o estudo do sistema (4.1)-(4.2) do ponto de vista da teoria de semigrupos e provou a existência de soluções globais fortes para dados pequenos. Convém notar que [130] é o único trabalho baseado nesta teoria do qual o autor tem conhecimento.

Ao longo deste capítulo nós provamos a existência global de soluções fortes para o sistema (4.1)-(4.2) com condições de pequenez sobre os parâmetros as quais convergem uniformemente para soluções estacionárias quando $t \rightarrow \infty$ com uma taxa de decaimento exponencial. Esta problemática não tinha resposta até o momento o que motivou a realização deste estudo. Para mostrar a existência de soluções estacionárias para o sistema (4.1) em espaços da forma $L^3(\Omega) \times L^m(\Omega)$, fazemos uso de técnicas do ponto fixo; por outra parte, para provar a existência global e o comportamento assintótico das soluções do sistema (4.1)-(4.2), estabelecemos estimativas do tipo $(L^p \times L^q) - (L^r \times L^s)$ para o semigrupo analítico gerado pelo operador linearizado correspondente ao sistema ao redor da solução estacionária. Convém notar que estas estimativas incluem os casos $p \neq q$ e $r \neq s$, as quais são necessárias para resolver (4.1)-(4.2) com velocidade inicial de microrotação $w_0 \in L^m(\Omega)$ para $m < 3$. Neste sentido, nossos resultados sobre existência global de soluções fortes, generalizam os resultados de Yamaguchi [130] quem analisou somente o caso $p = q$ e $r = s$. Além disso, o semigrupo é obtido através das estimativas $(L^p \times L^q) - (L^r \times L^s)$ para o conjunto resolvente do operador linearizado, as quais clarificam como o comportamento do resolvente com respeito ao parâmetro espectral, depende dos expoentes p, q, r e s .

No Capítulo 5, abordamos um problema distinto aos tratados nos três capítulos ante-

riores. Consideramos uma classe de equações não lineares estacionárias abstratas em um espaço de Hilbert separável (veja (5.1)) e estudamos algumas propriedades qualitativas relativas a esse modelo, entre elas, uma propriedade sobre a cardinalidade do conjunto das soluções do modelo abstrato em questão e uma propriedade de dependência contínua das soluções com respeito aos dados do problema. O modelo abstrato considerado é de relevante importância pois envolve vários sistemas de equações da hidrodinâmica, tais como as equações dos fluidos micropolares, magneto-micropolares, equações de Boussinesq, equações de Navier-Stokes, entre outras. Vários autores têm estudado estes modelos separadamente e vários resultados relativos à existência, unicidade, regularidade, etc, têm sido encontrados. Em particular, a estrutura do conjunto de soluções das equações de Navier-Stokes foi estudada em [36], [35], [60], [127], [38] e as referências ali citadas.

O objetivo principal deste capítulo é provar dos teoremas relativos ao estudo de algumas propriedades genéricas para o conjunto de soluções de (5.1) motivados pelos resultados de [36],[35], [37], [38], [60], [127] para o problema de Navier-Stokes. Caracterizamos a existência e unicidade de soluções para o problema abstrato em estudo, o qual é fortemente usado, entre outras coisas, para aplicar o Teorema da função implícita, o Teorema de Smale e poder definir o grau topológico de uma certa aplicação determinada pelo inverso do operador de Stokes. Analisamos também o problema de dependência contínua do conjunto de soluções para o problema abstrato com respeito aos dados do problema usando uma análise funcional abstrata incluindo operadores de Fredholm.

No Capítulo 6 nos trasladamos às equações de Navier-Stokes com densidade variável (veja (6.1)) e abordamos o estudo de existência de soluções fortes no caso de um domínio espacial não limitado do $\mathbb{R}^3$. Este modelo generaliza as equações clássicas de Navier-Stokes no sentido que a densidade é agora assumida como sendo variável.

O primeiro a considerar matematicamente o modelo estudado neste capítulo foi o russo A.K. Kazhikov em 1974 sob a condição $0 < \alpha \leq \rho_0(x) \leq \beta$ sobre a densidade inicial [66]. Ele mostrou essencialmente a existência de soluções fracas em domínios limitados de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 . As provas detalhadas aparecem na monografia [6] onde se levanta a questão para o caso no qual $\alpha = 0$. (veja também os trabalhos de J.L. Lions [77], [78]). Também são apresentados alguns resultados de regularidade das soluções fracas.

Os que resolvem a questão da unicidade das soluções fortes foram O. Ladyzhenskaya e V.

Solonnikov [75] em 1975, utilizando basicamente teoria do potencial, linearização e ponto fixo; eles exigem $p > n$, $n = 2$ ou 3 ; também foram dados resultados de existência global, para o caso tridimensional exigem decaimento exponencial no tempo para a força externa. Este trabalho foi feito em domínios limitados.

O primeiro a resolver a questão levantada por Kazhikov, isto é, o caso $\alpha = 0$, foi o francês J. Simon [119] no ano 1978; também são interessantes seus artigos posteriores [120], [118]. Nestes trabalhos foi aplicado um novo teorema de compacidade nos chamados espaços de Nikolskii obtido por J. Simon em conjunto com o método de Galerkin e energia. Os resultados foram dados em domínios limitados.

O problema em domínios exteriores foi abordado pela matemática italiana Padula [103] no ano 1982; convém também ver o trabalho [104]. Nestes trabalhos é utilizado o método de imersão de domínios.

No artigo [67], Kim no ano 1987 aborda novamente o caso $\alpha = 0$ estabelecendo uma desigualdade diferencial importante (argumento que tinha já sido usado por Beirão da Veiga [9]), a qual foi fundamental para os trabalhos de existência de soluções fortes realizados em [112]. Kim mostra a existência de uma solução fraca mais regular que as obtidas por Kazhikov e Simon, mas é bom ressaltar que a densidade inicial é mais regular.

O japonês Okamoto via operadores de evolução estabelece resultados num contexto Hilbertiano, análogos aos de Fujita e T. Kato [40] no caso das equações de Navier-Stokes clássicas, no artigo [98], do ano 1982. O tipo de domínio considerado neste trabalho também são os domínios limitados.

O italiano R. Salvi [112] mostra a existência e unicidade de soluções fortes em domínios limitados, via o método de semi-Galerkin espectral e o Teorema de Aubin-Lions, obtendo assim os análogos aos resultados de J.G. Heywood [54] para o caso das equações de Navier-Stokes clássicas.

Um resultado de existência e unicidade de solução global forte sem decaimento exponencial na força externa foram dados em [11]. Resultados análogos das equações de Navier-Stokes clássicas de existência global, isto é, sem decaimento nenhum na força externa, para o sistema deste capítulo, foram obtidos em [12].

O problema em domínios não cilíndricos foi abordado em primeiro lugar por R. Salvi [113] com condições mistas na fronteira no ano 1984; (observe que o problema com condições

mistas não é abordado por nenhum dos autores anteriores) sob a condição $0 < \alpha \leq \rho_0(x) \leq \beta$.

Em domínios não limitados, Fernandez-Cara e Guillén [33] provaram a existência de soluções fracas usando o método de imersão de domínios e argumentos análogos aos de Simon [118]. Utilizando o método do regularizador e a teoria L^p para as equações parabólicas Itoh e Tani [63] mostram a existência e unicidade de solução forte em domínios não limitados com fronteira de classe C^2 , resultados análogos aos obtidos por [75], caso $p > n$, $n = 2$ ou 3 .

O livro de P. L. Lions [79] apresenta os resultados para este modelo nas páginas 19 até 78. São estudadas a existência de soluções fracas para o modelo em três situações: o problema de Dirichlet, o problema periódico no espaço e o caso de todo o espaço $\mathbb{R}^n$, para dimensão arbitrária $n \geq 2$. Neste livro a viscosidade é assumida a ser variável (dependente da densidade), e a densidade inicial é não negativa. O Autor também discute brevemente as soluções fortes nas páginas 32 e 33, para o caso bidimensional com densidade constante.

Entretanto, o estudo da existência e unicidade de soluções fortes do sistema (6.1)-(6.5) para o caso $p = 2$ no caso de domínios não limitados arbitrários, não tem sido discutido. Neste trabalho, seguimos as idéias de Heywood junto com argumentos usados por [33], [112] e [12] para mostrar a existência e unicidade de soluções fortes locais e globais no tempo para o sistema (6.1)-(6.5) em domínios não limitados. Desta maneira, a análise feita neste capítulo complementar o ciclo de respostas sobre a existência de soluções fracas e fortes, locais e globais para o sistema de Navier-Stokes não homogêneo; além disso, uma das motivações adicionais deste capítulo, é o futuro estudo do comportamento assintótico das soluções tendo como base os resultados aqui obtidos.

No Capítulo 7 apresentamos algumas conclusões gerais deste trabalho e daremos algumas idéias de pesquisa futura. Por último as referências bibliográficas. Este trabalho contou com a supervisão da Professora Dra. María Angeles Rodríguez Bellido, da Universidad De Sevilla, Espanha, e do Professor Dr. Marko Antonio Rojas Medar, da Universidade Estadual de Campinas, Brasil aos quais agradeço pelas orientações dadas. Agradeço também ao Professor Dr. F. Guillén da Universidad de Sevilla, Espanha, pelo interesse mostrado no trabalho e aos Professores V. Girault, C. Amrouche e M. Dauge, França, pelo fornecimento de material bibliográfico.

Elder Jesús Villamizar Roa

Campinas, 25 de maio de 2005.

CAPÍTULO 2

Soluções ultra fracas para as equações de Boussinesq estacionárias

Fantasy, energy, self-confidence and self-criticism are the characteristic endowments of the mathematician.

Sophus Lie

Neste capítulo faremos um estudo das equações de Boussinesq em estado estacionário com condições de fronteira do tipo Dirichlet para a velocidade e condições mistas do tipo Dirichlet e Neumann para a temperatura, abordando aspectos relativos à existência, unicidade e dependência contínua de um tipo de soluções as quais serão chamadas de *Soluções ultra fracas*.

2.1 Preliminares

As equações de Boussinesq da hidrodinâmica (Joseph [64]; Chandrasekhar [18]) aparecem de uma aproximação de ordem zero no acoplamento entre as equações de Navier-Stokes e as equações da termodinâmica. Em estado estacionário, este modelo é dado pelo seguinte

sistema de equações:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \beta \mathbf{f} \theta \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ -\chi\Delta\theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta &= h \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde Ω é um domínio do $\mathbb{R}^3$.

Lembremos que neste sistema, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ representa a velocidade do fluido, $p(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ representa a pressão, $\theta(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ representa a temperatura, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ é o vetor gravitacional em $\mathbf{x}$ e $h(\mathbf{x})$ é uma força externa; ρ, ν, β e χ são constantes físicas, representando, respectivamente, a densidade, a viscosidade cinemática, o coeficiente de expansão de volume e a conductância térmica do fluido. Sem perda de generalidade iremos tomar a densidade do fluido como sendo igual a um.

Neste capítulo, consideramos o sistema (2.1) com condições de fronteira não homogêneas para a velocidade $\mathbf{u}$ e condições mistas (Dirichlet e Neumann) não homogêneas para a temperatura θ . Denotamos por $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ a fronteira do domínio Ω , o qual ao longo deste capítulo, será um aberto limitado do $\mathbb{R}^3$. Então, as condições de fronteira são as seguintes:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma, \quad \theta = \xi \text{ sobre } \Gamma_1 \quad \text{e} \quad \partial_{\mathbf{n}}\theta = \zeta \text{ sobre } \Gamma_2, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{g}$ é uma função dada sobre Γ , e ξ, ζ são funções dadas sobre Γ_1 e Γ_2 , respectivamente.

Consideráveis avanços têm sido feitos na análise matemática do sistema (2.1), veja por exemplo, Rabinowitz [106]; Zarubin [133]; Morimoto [92]; Gil [50]; Ōeda [96] e referencias ali citadas. Alguns dos autores acima têm estudado o problema (2.1) com condições de fronteira mistas para a temperatura θ e Dirichlet para a velocidade $\mathbf{u}$, mas seus trabalhos são feitos considerando condições de fronteira regulares $\mathbf{g}, \xi$ e ζ , o qual permite estender as funções $\mathbf{g}, \xi$ e ζ sobre o interior do domínio Ω e conseqüentemente, isto leva à obtenção de um sistema com condições de fronteira homogêneas e faz possível o uso de argumentos padrões para a obtenção de existência de soluções, chamadas comumente de soluções fracas. Entretanto, quando $\mathbf{g}, \xi$ e ζ são funções não regulares, isto é, quando os teoremas do traço usuais não podem ser usados, a resolução do sistema (2.1)-(2.2) não tem sido pesquisada. Neste trabalho estudaremos este tipo de problemática, assumindo somente $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, $\xi \in L^2(\Gamma_1)$ e $\zeta \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$, sendo nosso principal objetivo provar a existência de uma *Solução Ultra Fraca* cuja definição será dada posteriormente.

O conceito de solução ultra fraca é uma extensão natural do conceito de solução fraca e tem sido estudado inicialmente por Conca [21],[22] em problemas de homogenização para as equações de Stokes. A idéia principal de Conca [21] foi o uso do método da transposição introduzido anteriormente por Lions e Magenes [76]. Outro trabalho nesta linha para o problema de Stokes foi dado posteriormente por Amrouche e Girault em [4]. Posteriormente, Marusič-Paloka [87] estendeu os resultados de Conca para as equações de Navier-Stokes. A estratégia usada por Marusič-Paloka [87] se baseia no estudo da linearização das equações de Navier-Stokes combinada adequadamente com argumentos de ponto fixo. No sistema linearizado, ele aplicou os resultados obtidos por Conca [21],[22] e definiu uma aplicação contração que permite aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. A extensão para as equações de Boussinesq foram dadas por Santos *et al.* [114] os quais analisaram o sistema (2.1), mas com condições de fronteira do tipo Dirichlet não somente para a velocidade $\mathbf{u}$ mas também para a temperatura θ . Em outros modelos da Hidrodinâmica, Guillén-González *et al.* [51] estudaram o conceito de solução ultra fraca para o sistema de Stokes hidrostático com condições de Neumann não suaves sobre a superfície rígida e condições do tipo Dirichlet sobre o resto da fronteira. Em [115], são consideradas as equações estacionárias de Navier-Stokes com dados de fronteira em algum espaço $W^{1-\frac{1}{q},q}(\Gamma)$. Isto corresponde a um problema de um fluido estacionário em um domínio com uma cavidade, isto é, a união de um semi-espaço com um domínio limitado (a cavidade) e o Problema de Taylor, ou problema do equilíbrio de um fluido entre dois cilindros co-cênicos com o cilindro externo fixado e o interno em movimento rotacional sobre seu eixo.

Neste capítulo, para nosso estudo das equações de Boussinesq estacionárias (2.1), com condições de fronteira do tipo Dirichlet para a velocidade e condições mistas do tipo Dirichlet e Neumann para a temperatura são de vital importância os trabalhos de Dauge [25], [27]. Neste capítulo, nós abordamos dois aspectos diferentes: Por um lado, as condições de fronteira pertencem a alguns espaços os quais não são espaços traço no sentido padrão. Por outro lado, o fato de considerar condições de fronteira mistas para a temperatura, leva ao estudo de propriedades de existência, unicidade e regularidade de soluções de um problema dual do tipo elíptico com condições de bordo mistas o que complexifica o problema fazendo com que sua resolução carregue algumas condições sobre o domínio. De fato, para que este problema elíptico seja bem posto, precisamos impor algumas hipóteses sobre a geometria

do domínio. Este é um interessante problema que foi estudado por Dauge em [25], [27]. É surpreendente observar que se desejamos obter resultados de regularidade para a solução de dito problema, um domínio suficientemente regular não pode ser considerado. De fato, o pedaço de contorno com dado Dirichlet e o pedaço de contorno com dado Neumann, se eles estão em contato, deve formar um ângulo α , $\alpha < \pi$. Além disso, dois tipos de condições de contorno não podem viver sobre um domínio suave. Por outra parte, o problema elíptico para a temperatura é acoplado com um sistema de Navier-Stokes para a velocidade, que deve ser resolvido num domínio não suave. Observamos que muitos dos resultados existentes na literatura sobre as equações de Navier-Stokes é feito para domínios suaves. Assim, nós tivemos que usar os resultados relativos ao lema de Leray-Hopf que aparecem no livro de Galdi [42], que exige menos hipóteses de regularidade sobre o domínio.

Antes de apresentar os resultados deste capítulo, faremos algumas considerações iniciais sobre o tipo de domínios a serem estudados. Iniciamos considerando os seguintes tipos de domínios limitados Ω do $\mathbb{R}^3$.

CASO 1. Ω é um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^3$ do tipo $\mathcal{D}^2$, isto é:

$$\Omega = \{(y, \mathbf{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{z} \in P, \Phi_0(\mathbf{z}) < y < \Phi_1(\mathbf{z})\}, \quad (2.3)$$

onde P é um polígono plano curvo com lados de classe C^2 , sem pontos de cúspide e $\Phi_0(\mathbf{z})$, $\Phi_1(\mathbf{z})$ são funções de classe $C^2(\overline{P})$, tais que para todo $\mathbf{z} \in \overline{P}$, $\Phi_0(\mathbf{z}) < \Phi_1(\mathbf{z})$. Consideramos a seguinte partição da fronteira Γ do domínio Ω :

$$\Gamma_2 = \{(y, \mathbf{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{z} \in \partial P, \Phi_0(\mathbf{z}) < y < \Phi_1(\mathbf{z})\}, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_1 = \bigcup_{i=0,1} \{(y, \mathbf{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{z} \in P, y = \Phi_i(\mathbf{z})\}. \quad (2.5)$$

Denotamos por ω a maior abertura de P e ϕ o supremo dos ângulos diedrais entre Γ_2 (lado do cilindro) e Γ_0 ou Γ_1 (bases do cilindro). Iremos considerar $0 < \phi \leq \pi/2$. Veja as figuras 2.1 e 2.2.

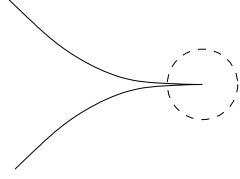


Figura 2.1: ponto de cúspide

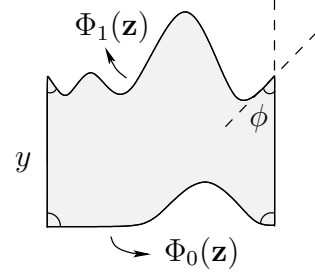


Figura 2.2: Corte de um domínio CASO 1.

CASO 2. Ω é um domínio de classe C^2 com fronteira Γ , dividida em duas partes $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tal que a medida de $\Gamma_1 \neq 0$ e $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ é vazio. Um exemplo típico deste tipo de domínios é $\Omega = Q_1 \setminus Q_2$, $\bar{Q}_2 \subset Q_1$, com Q_1, Q_2 sendo bolas de raios r_1, r_2 , respectivamente, $r_1 > r_2$.

A continuação estabeleceremos algumas notações sobre os espaços funcionais que serão usados neste capítulo. Consideramos os espaços $L^p(\Omega)$ usuais, com $1 \leq p \leq +\infty$, com norma denotada por $|\cdot|_p$. O símbolo $(\cdot, \cdot)$ denotará o produto interno em $L^2(\Omega)$. Denotamos por $W^{k,p}$ os espaços de Sobolev usuais, e suas respectivas normas serão indicadas por $\|\cdot\|_{k,p}$; em particular, $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{k,2}$. O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ (funções de classe C^∞ com suporte compacto) em $W^{k,p}(\Omega)$ é denotado por $W_0^{k,p}(\Omega)$ e $H_0^k = W_0^{k,2}$. Também denotamos por $H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \equiv \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ em } \Gamma_1\}$ e V o fecho de $\mathcal{V} \equiv \{\mathbf{u} \in C_0^\infty : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega\}$ na norma de $H^1(\Omega)$, sendo $((\cdot, \cdot))$ e $\|\cdot\|$ o produto interno e a norma, respectivamente. Com respeito às condições de fronteira para $\mathbf{u}$ e θ , assumimos somente $\zeta \in H^{-1/2}(\Gamma_2)$, $\xi \in L^2(\Gamma_1)$ e $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ com $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$ em Γ_2 e $\int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$, onde $\mathbf{n}$ denota a normal exterior de Γ . Quando Ω é do tipo considerado no CASO 2, assumimos que os fluxos $\varphi_1 = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ e $\varphi_2 = -\varphi_1 = \int_{\Gamma_2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ são suficientemente pequenos. Esta condição aparece explicitamente na aplicação do Lema 2.11 abaixo, como veremos posteriormente.

Para finalizar esta seção, apresentamos um par de resultados preliminares os quais serão fundamentais no desenvolvimento deste capítulo, relativos a aspectos de regularidade de soluções para a equação de Laplace nos domínios que estão sendo considerados.

Lema 2.1. *Seja $\Omega \in \mathcal{D}^2$ como no CASO 1, tal que $\phi \leq \pi/2$ e $\omega < \pi$, (ou Ω convexo) e seja*

$\psi \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ a solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta\psi &= f \text{ em } \Omega, \\ \psi &= 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi &= 0 \text{ sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

para algum dado $f \in L^2(\Omega)$. Então, $\psi \in H^2(\Omega)$.

Demonstração: A prova é um caso particular do Teorema 1 of [25]. Veja também [27]. ■

Lema 2.2. *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^3$ como no CASO 2, e com fronteira de classe C^2 . Seja $\psi \in H_{\Gamma_1}^1$ a solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta\psi &= f \text{ em } \Omega, \\ \psi &= 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi &= 0 \text{ sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (2.7)$$

para algum dado $f \in L^2(\Omega)$. Então, $\psi \in H^2(\Omega)$.

Demonstração: A condição $\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$ sendo vazio, permite adaptar a prova do Teorema 4, Cap. IV. Sec. II, do Mikailov [88] e o resultado segue. Ver também Nečas [94]. ■

Observação 2.3. *Os lemas anteriores continuam válidos se consideramos condições do tipo Dirichlet sobre Γ_2 e condições do tipo Neumann sobre Γ_1 .*

O conteúdo seguinte deste capítulo está organizado da seguinte maneira: Na Seção 2, damos a definição de solução ultra fraca e estabelecemos nossos principais resultados. Na Seção 3, provamos que dada uma velocidade $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ com divergência nula, existe uma única solução ultra fraca para o respectivo problema em θ . O estudo da solução para o problema em $\mathbf{u}$ é dado na Seção 4, o que permitirá provar a existência da solução ultra fraca, analisada em detalhe na Seção 5. Na Seção 6, analisamos a dependência contínua das soluções obtidas com respeito aos dados do problema e finalmente, na Seção 7, faremos algumas observações sobre a interpretação da solução obtida, do ponto de vista do problema diferencial.

2.2 Solução ultra fraca

Nesta seção damos a definição de solução ultra fraca para o Problema (2.1)-(2.2) e estabelecemos nossos principais teoremas deste capítulo.

Definição 2.4. Uma tripla $(\mathbf{u}, \theta, p)$ em $\mathbf{L}^3(\Omega) \times L^2(\Omega) \times W^{-1,3}(\Omega)$ é dita uma solução ultra fraca do Problema (2.1)-(2.2) se

$$-\nu(\mathbf{u}, \Delta \Phi) - B(\mathbf{u}, \Phi, \mathbf{u}) - \langle p, \operatorname{div} \Phi \rangle_{W^{-1,3}, W^{1,3/2}} = \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi) - \nu \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \partial_{\mathbf{n}} \Phi \, ds, \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{u}, \nabla \tau) = \int_{\Gamma_1} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \tau \, ds, \quad (2.9)$$

$$-\chi(\theta, \Delta \psi) - b(\mathbf{u}, \psi, \theta) - (h, \psi) + \chi \int_{\Gamma_1} \xi \partial_{\mathbf{n}} \psi \, ds = \chi \langle \zeta, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H^{1/2}(\Gamma_2)}, \quad (2.10)$$

para todo $\Phi \in \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega)$, para todo $\tau \in W^{1,3/2}(\Omega)$, $\int_{\Omega} \tau = 0$ e para todo $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ com $\partial_{\mathbf{n}} \psi|_{\Gamma_2} \equiv 0$. Recordamos que B e b são as formas trilineares definidas respectivamente por:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i \, d\Omega, \quad b(\mathbf{u}, \psi, \theta) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} u_j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \theta \, d\Omega.$$

Nossos principais resultados são os seguintes:

Teorema 2.5 (Existência). Existe uma constante positiva “a” tal que se a viscosidade ν é suficientemente grande em relação à “a”, então existe uma solução ultra fraca do Problema (2.1)-(2.2) no sentido da definição acima.

Teorema 2.6 (Dependência contínua). Seja $(\mathbf{u}_i, \theta_i), i = 1, 2$ duas soluções ultra fracas do Problema (2.1)-(2.2) correspondendo a forças externas $\mathbf{f} = \mathbf{f}_i (\in \mathbf{L}^3(\Omega))$, $h = h_i (\in L^2(\Omega))$, $i = 1, 2$ e dados de fronteira $\mathbf{g} = \mathbf{g}_i, \zeta = \zeta_i, \xi = \xi_i, i = 1, 2$, respectivamente. Então, existe uma constante $\nu^* > 0$ tal que para todo $\nu \geq \nu^*$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_3 + |\theta_1 - \theta_2|_2 &\leq c \{ |\xi_1 - \xi_2|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_1 - \zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} + |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 + |h_1 - h_2|_2 + \\ &\quad + |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{L^2(\Gamma)} + \epsilon \}, \end{aligned}$$

onde a constante c depende somente dos dados do problema Ω e ϵ satisfaz:

- Se $|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}|_{L^2(\Gamma)} = 0$, então $\epsilon = 0$.
- Se $|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}|_{L^2(\Gamma)} \neq 0$, então $\epsilon = |(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\epsilon) - (\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\epsilon)|_{L^2(\Gamma)}$, onde $\mathbf{g}_1^\epsilon$ e $\mathbf{g}_2^\epsilon$, são aproximações arbitrariamente próximas de $\mathbf{g}_1$ e $\mathbf{g}_2$, respectivamente.

Em particular, para $\nu \geq \nu^*$, o Problema (2.1)-(2.2) tem solução única.

Observação 2.7. Os teoremas acima continuam válidos se consideramos que os dados de fronteira sobre θ satisfazem somente $\zeta \in H^{-3/2}(\Gamma_2)$ e $\xi \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$.

2.3 Problema em θ

Nesta seção introduzimos o seguinte problema na variável temperatura θ , para uma velocidade $\mathbf{u}$ dada.

Problema em θ : Dado $h \in L^2(\Omega)$, $\xi \in L^2(\Gamma_1)$, $\zeta \in H^{-1}(\Gamma_2)$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ com $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre Γ_2 e $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon$, onde $\mathbf{u}^\epsilon = \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in V$, $\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon \in \mathbf{H}^1$ com $\operatorname{div} \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon = 0$ e $\mathbf{v}^\epsilon \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ com $|\mathbf{v}^\epsilon|_3$ sendo suficientemente pequeno em relação a χ , encontrar θ em $L^2(\Omega)$ tal que (2.10) é satisfeita.

Observação 2.8. Acima, a condição $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ é entendida no sentido fraco, isto é, $(\mathbf{u}, \nabla w) = 0$, para todo $w \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$. Como uma consequência, temos que a forma bilinear $\tilde{B}(\Psi, \Phi) = \chi(\nabla \Psi, \nabla \Phi) - B(\mathbf{u}, \Phi, \Psi)$ é fortemente elíptica. Na verdade, para todo $\Phi \in H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,3/2}(\Omega)$, o termo $B(\mathbf{u}, \Phi, \Phi) = -(1/2)(\mathbf{u}, \nabla |\Phi|^2) = 0$.

Lema 2.9. Sobre as hipóteses do **Problema em θ** , existe uma única solução θ in $L^2(\Omega)$ satisfazendo a equação (2.10).

Demonstração:. Dada uma função $b \in L^2(\Omega)$, consideremos o seguinte problema dual

$$\begin{cases} -\chi \Delta \psi - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi &= b \text{ em } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}} \psi &= 0 \text{ sobre } \Gamma_2, \\ \psi &= 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

A obtenção da solução fraca $\psi \in H_{\Gamma_1}^1$ é dada de maneira padrão, usando por exemplo, teoremas do ponto fixo. Observamos que entendemos que $\psi \in H_{\Gamma_1}^1$ é solução fraca de (2.11)

se ψ satisfaz o seguinte problema variacional

$$\chi(\nabla\psi, \nabla w) - (\mathbf{u} \cdot \nabla\psi, w) = (b, w), \quad \forall w \in H_{\Gamma_1}^1.$$

Com respeito à unicidade, notemos que se ψ_1, ψ_2 são duas soluções fracas de (2.11), então a diferença $\psi = \psi_1 - \psi_2 \in H_{\Gamma_1}^1$ satisfaz

$$\chi(\nabla\psi, \nabla w) - (\mathbf{u} \cdot \nabla\psi, w) = 0, \quad \forall w \in H_{\Gamma_1}^1.$$

Assim, tomando em particular $w = \psi$, obtemos que

$$\chi|\nabla\psi|_2^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\psi|^2 \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) |\psi|^2 = 0, \quad (2.12)$$

e portanto, $\psi_1 = \psi_2$.

Regularidade da ψ .

Sabemos que existe uma constante positiva c tal que

$$\chi |\nabla\psi|_2 \leq c|b|_2, \quad (2.13)$$

onde c depende somente de Ω . Além disso, afirmamos que $\psi \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Para provar isto, consideremos uma família de molificadores $\{\rho_\eta\}, \eta > 0$ e definimos $\mathbf{u}_\eta := \mathbf{u}_\eta^\epsilon + \mathbf{v}_\eta^\epsilon$, onde $\mathbf{u}_\eta^\epsilon = u^\epsilon * \rho_\eta, \mathbf{v}_\eta^\epsilon = \mathbf{v}^\epsilon * \rho_\eta$. Seja ψ_η a solução em $H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ do seguinte sistema regularizado

$$\begin{cases} -\chi\Delta\psi_\eta &= b + (\mathbf{u}_\eta \cdot \nabla)\psi_\eta = b + (\mathbf{u}_\eta^\epsilon \cdot \nabla)\psi_\eta + (\mathbf{v}_\eta^\epsilon \cdot \nabla)\psi_\eta := F_\eta, \\ \psi_\eta|_{\Gamma_1} &= 0, \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi_\eta|_{\Gamma_2} &= 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Como $\mathbf{u}_\eta^\epsilon, \mathbf{v}_\eta^\epsilon \in C(\bar{\Omega})$ e $\nabla\psi_\eta \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, temos que $F_\eta \in L^2(\Omega)$. Por outro lado, usando o Lema 2.1 e o Lema 2.2 (dependendo de se Ω é do tipo CASO 1 ou CASO 2) obtemos que $\psi_\eta \in H^2(\Omega)$, e satisfaz

$$\chi \|\psi_\eta\|_2 \leq c|F_\eta|_2, \quad (2.15)$$

com c dependendo somente de Ω . Usando as desigualdades de Hölder, Gagliardo-Nirenberg (veja, por exemplo, [39]), Young e desigualdades de interpolação, encontramos que

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}_\eta^\epsilon \cdot \nabla)\psi_\eta|_2 &\leq c\|\mathbf{u}_\eta^\epsilon\|_1 \|\nabla\psi_\eta\|_3 \leq c\|\mathbf{u}_\eta^\epsilon\|_1 \|\psi_\eta\|_1^{1/2} \|\psi_\eta\|_2^{1/2} \leq \frac{c}{\chi} \|\mathbf{u}_\eta^\epsilon\|_1^2 \|\psi_\eta\|_1 + \\ &+ \frac{\chi}{4} \|\psi_\eta\|_2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$|(\mathbf{v}_\eta^\epsilon \cdot \nabla)\psi_\eta|_2 \leq c|\mathbf{v}_\eta^\epsilon|_3 \|\nabla\psi_\eta\|_6 \leq c|\mathbf{v}^\epsilon|_3 \|\nabla\psi_\eta\|_6 \leq c\sigma \|\psi_\eta\|_2 \leq \frac{\chi}{4} \|\psi_\eta\|_2, \quad (2.17)$$

desde que $|\mathbf{v}^\epsilon|_3 \leq \sigma$ e $c\sigma < \frac{\chi}{4}$. Usando as desigualdades (2.16)-(2.17) em (2.15), obtemos que

$$\chi \|\psi_\eta\|_2 \leq c(|b|_2 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}_\eta^\epsilon\|_1^2 \|\psi_\eta\|_1),$$

para algum c dependendo somente de Ω . Como $|\nabla \psi|_2 \leq \frac{c}{\chi} |b|_2$, (com ψ_η em lugar de ψ) aplicando a desigualdade de Poincaré para ψ_η , obtemos

$$\chi \|\psi_\eta\|_2 \leq c(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}_\eta^\epsilon\|_1^2) |b|_2.$$

Conseqüentemente, usando o Teorema de Banach-Alaughlu em H^2 e a unicidade da solução de (2.11) em $H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$, podemos passar o limite a uma subsequência de $\{\eta\}$, e assim encontramos que

$$\|\psi\|_2 \leq \frac{c}{\chi} (1 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1^2) |b|_2. \quad (2.18)$$

Finalmente consideramos a aplicação que toma $b \in L^2(\Omega)$ e o leva na única solução ψ de (2.11) a qual esta em $H^2(\Omega)$. Esta aplicação é linear e continua de $L^2(\Omega)$ em $H^2(\Omega)$. Assim, a expressão $\mathcal{L} : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para $b \in L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{L}(b) = (h, \psi) + \chi \langle \zeta, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H^{1/2}(\Gamma_2)} - \chi \int_{\Gamma_1} \xi \partial_{\mathbf{n}} \psi \, ds,$$

com ψ sendo a única solução de (2.11), com dado $b \in L^2(\Omega)$, define uma aplicação linear continua em b atuando em $L^2(\Omega)$. O Teorema de representação de Riesz implica que existe uma única $\theta \in L^2(\Omega)$ tal que $\mathcal{L}(b) = (\theta, b)$ para todo $b \in L^2(\Omega)$. Isto prova o Lema 2.9 que nos dá a existência e unicidade da solução para o **Problema em θ** . ■

Uma estimativa para θ .

Fazendo $b = \theta$ na equação $(\theta, b) = \mathcal{L}(b)$, obtemos

$$|\theta|_2^2 = (h, \psi) + \chi \langle \zeta, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H^{1/2}(\Gamma_2)} - \chi \int_{\Gamma_1} \xi \partial_{\mathbf{n}} \psi \, ds \quad (2.19)$$

onde $\psi \in H^2 \cap H_{\Gamma_1}^1$ tal que $\partial_{\mathbf{n}} \psi|_{\Gamma_2} \equiv 0$ é a única solução de (2.11) com $b = \theta$. A continuação mostraremos algumas estimativas para o lado direito de (2.19). Como $|\nabla \psi|_2 \leq \frac{c}{\chi} |\theta|_2$, (por (2.13)) então

$$(h, \psi) \leq |h|_2 |\psi|_2 \leq c |h|_2 |\nabla \psi|_2 \leq \frac{c}{\chi} |h|_2 |\theta|_2.$$

Além disso, usando o fato de $|z|_{L^2(\Gamma)} \leq c(|\nabla z|_2^{1/2}|z|_2^{1/2} + |z|_2)$ para qualquer $z \in H^1(\Omega)$, com $z = \nabla\psi$, obtemos

$$\begin{aligned}
\chi \int_{\Gamma_1} \xi \partial_{\mathbf{n}} \psi \, ds &\leq \chi |\xi|_{L^2(\Gamma_1)} |\nabla \psi|_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leq \chi |\xi|_{L^2(\Gamma_1)} c(\|\psi\|_2^{1/2} |\nabla \psi|_2^{1/2} + |\nabla \psi|_2) \\
&\leq \chi |\xi|_{L^2(\Gamma_1)} \frac{c}{\chi} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1^2\right)^{1/2} |\theta|_2^{1/2} |\theta|_2^{1/2} + |\theta|_2 \right\} \\
&\leq c \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1\right) |\xi|_{L^2(\Gamma_1)} |\theta|_2.
\end{aligned}$$

A estimativa $|z|_{L^2(\Gamma)} \leq c(|\nabla z|_2^{1/2}|z|_2^{1/2} + |z|_2)$, válida para qualquer $z \in H^1(\Omega)$, é obtida da seguinte desigualdade:

$$|z|_{L^2(\Gamma)} \leq c |\nabla z|_2^{1/2} |z|_2^{1/2}, \quad \forall z \in H^1(\Omega) \text{ com media nula em } \Omega,$$

aplicada em z menos sua media em Ω . (Veja por exemplo, [74], p. 50).

Analogamente, como $H^1(\Omega)$ é imerso continuamente em $H^{1/2}(\Gamma)$, devido à caracterização do operador traço (veja por exemplo, Galdi [42], Vol. I, pag. 48) obtemos

$$\|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \leq c \|\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\psi\|_1^{1/2} \|\psi\|_2^{1/2} \leq \frac{c}{\chi} \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1\right) |\theta|_2,$$

e assim,

$$\chi \langle \zeta, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H^{1/2}(\Gamma_2)} \leq \chi |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} |\psi|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \leq c \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1\right) |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} |\theta|_2.$$

Conseqüentemente,

$$|\theta|_2 \leq c \left\{ \frac{1}{\chi} |h|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1\right) (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\}. \quad (2.20)$$

Observação 2.10. *Se consideramos os termos de fronteira sobre a temperatura como foi indicado na observação 2.7, obtemos as seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned}
\chi \langle \xi, \partial_{\mathbf{n}} \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1), H^{1/2}(\Gamma_1)} &\leq \chi \|\xi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \|\partial_{\mathbf{n}} \psi\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq c \chi \|\xi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \|\psi\|_2 \\
&\leq c \left(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1^2\right) \|\xi\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} |\theta|_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi \langle \zeta, \psi \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma_2), H^{3/2}(\Gamma_2)} &\leq c \chi \|\zeta\|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)} \|\psi\|_{H^{3/2}(\Gamma_2)} \leq c \chi \|\zeta\|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)} \|\psi\|_2 \\
&\leq c \left(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1^2 \right) \|\zeta\|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)} |\theta|_2.
\end{aligned}$$

2.4 Problema em $\mathbf{u}$ e um problema relacionado

Assumamos que $\theta \in L^2(\Omega)$ é dado e consideremos o problema de resolver as equações (2.8),(2.9) em $\mathbf{u}$. Como é usual, eliminamos a pressão tomando funções teste com divergência nula (ela pode ser recuperada a posteriori via Lema de De Rham, veja [127]). Assim, o problema (2.8),(2.9) se reduz ao seguinte:

Problema em $\mathbf{u}$. Suponhamos que $\theta \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ com $\int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$. Encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ tal que

$$-\nu(\mathbf{u}, \Delta \Phi) - B(\mathbf{u}, \Phi, \mathbf{u}) = \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi) - \nu \int_\Gamma \mathbf{g} \cdot \partial_{\mathbf{n}} \Phi, \quad (2.21)$$

$$(\mathbf{u}, \nabla \tau) = \int_\Gamma (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \tau \, ds, \quad (2.22)$$

para todo $\Phi \in \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega)$, com $\operatorname{div} \Phi = 0$ e para todo $\tau \in W^{1,3/2}(\Omega)$, $\int_\Omega \tau = 0$. Antes de desenvolver o estudo sobre o **Problema em $\mathbf{u}$** , enunciamos os seguintes resultados os quais serão usados ao longo desta seção

Lema 2.11. *Seja Ω um domínio limitado, localmente lipschitziano do $\mathbb{R}^3$ como nos CASOS 1, 2 e $\mathbf{z}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ com $\int_\Gamma \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$. Então para todo $\sigma > 0$ existe uma função $\widehat{\mathbf{z}}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, com $\operatorname{div} \widehat{\mathbf{z}}_0 = 0$ in Ω , $\widehat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{z}_0$ sobre Γ verificando:*

$$|B(\mathbf{u}, \widehat{\mathbf{z}}_0, \mathbf{u})| \leq \left(\sigma + \sum_{j=1}^2 M_j |\varphi_j| \right) \|\mathbf{u}\|_1^2,$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, onde M_j , $j = 1, 2$ são algumas constantes positivas. Além disso, se Ω é do tipo CASO 1, temos que

$$|B(\mathbf{u}, \widehat{\mathbf{z}}_0, \mathbf{u})| \leq \sigma \|\mathbf{u}\|_1^2.$$

Demonstração: A prova pode ser deduzida do Lema 4.2 do Galdi [42], Cap. VIII, Sc. 4. Veja também Galdi [43]. ■

Lema 2.12. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado, lipschitz do tipo CASO 1 ou um domínio limitado, do tipo CASO 2. Consideremos o seguinte problema de valor de fronteira para as equações de Navier-Stokes com dados $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ satisfazendo $\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$:*

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{z} + (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \nabla p &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{z} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (2.23)$$

Se $|\mathbf{g}|_{L^2(\Gamma)}$ é suficientemente pequeno, então existe uma única solução ultra fraca $\mathbf{z}$ em $\mathbf{L}^3(\Omega)$ do problema (2.23), isto é, $\mathbf{z} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ satisfaz

$$\begin{aligned} -\nu(\mathbf{z}, \Delta \Phi) - B(\mathbf{z}, \Phi, \mathbf{z}) &= \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \partial_{\mathbf{n}} \Phi, \\ (\mathbf{u}, \nabla \tau) &= \int_{\Gamma} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \tau \, ds, \end{aligned}$$

para todo $\Phi \in \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega)$, com $\operatorname{div} \Phi = 0$ e para todo $\tau \in W^{1,3/2}(\Omega)$, $\int_{\Omega} \tau = 0$. Além disso, existe uma constante c_1 dependendo somente de ν tal que

$$|\mathbf{z}|_3 < \frac{c_1 \nu |\mathbf{g}|_{L^2(\Gamma)}}{\nu - c_1 |\mathbf{g}|_{L^2(\Gamma)}}. \quad (2.24)$$

Demonstração: Se Ω é um domínio limitado do tipo CASO 2, a prova é dada pelo Teorema 4 de [87].

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado Lipschitz do tipo CASO 1, necessitamos fazer algumas modificações na prova do Teorema 4 dada por Marusič-Paloka em [87]. Na verdade, precisamos modificar unicamente o Lema 2 em [87], atendendo o Remark 6 desse mesmo trabalho [87], isto é, supomos que Ω é um domínio limitado Lipschitz mas não necessariamente de classe $C^{1,1}$. O Lema 2 de [87] em menção é o seguinte:

Lema 2.13. *Seja Ω um domínio limitado de classe $C^{1,1}$. Seja $F \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ com $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Então o Problema de Oseen*

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{w} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \nabla \pi &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{w} &= 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

tem uma única solução $(\mathbf{w}, \pi) \in \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \times W^{1,3/2}(\Omega)/\mathbb{R}$.

Assim, quando Ω é do tipo CASO 1 obtemos um resultado análogo ao lema acima aplicando os resultados de Dauge para o problema de Stokes em domínios irregulares (Teorema 9.20 devido a M. Dauge [26]). O resultado de Dauge [26] ao qual estamos fazendo referência pode ser reescrito como segue:

Teorema 2.14. *Seja Ω um domínio limitado Lipschitz e $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ a solução do problema de Stokes:*

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= g & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{sobre } \Gamma, \end{cases} \quad (2.25)$$

onde $(\mathbf{f}, g) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Então, se Ω é um domínio convexo ou um cilindro com bases poligonais convexas e ângulos $\phi < 2\pi/3$, ou um cilindro com base regular, então $(\mathbf{u}, p) \in [\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)] \times H^1(\Omega)$. ■

Observação 2.15. *Na verdade, a classe de domínios Ω verificando o resultado prévio é maior (veja rigorosamente [26]).*

Agora, introduzimos um problema relacionado com o **Problema em $\mathbf{u}$** . Suponha que $\mathbf{u}$ é uma solução do **Problema em $\mathbf{u}$** tal que $\mathbf{u}$ possa ser escrita como a soma de uma “parte regular grande” $\mathbf{u}^\epsilon$, e uma “parte irregular pequena” $\mathbf{v}^\epsilon$, isto é,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon \quad (2.26)$$

onde $\mathbf{u}^\epsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\operatorname{div} \mathbf{u}^\epsilon = 0$ e $\mathbf{u}^\epsilon|_\Gamma = \mathbf{g}^\epsilon$ ($\mathbf{g}^\epsilon$ é uma aproximação suave de $\mathbf{g}$ em $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ tal que $|\mathbf{g} - \mathbf{g}^\epsilon|_{L^2} \ll 1$) e $\mathbf{v}^\epsilon \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ é a solução ultra fraca do problema

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{v}^\epsilon + (\mathbf{v}^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{v}^\epsilon + \nabla p^\epsilon &= \mathbf{0} & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^\epsilon &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{v}^\epsilon &= \mathbf{g} - \mathbf{g}^\epsilon & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (2.27)$$

dado pelo Lema 2.12 acima. Usando a definição de solução ultra fraca para o problema (2.23), temos em particular que,

$$-\nu(\mathbf{v}^\epsilon, \Delta \Phi) - B(\mathbf{v}^\epsilon, \Phi, \mathbf{v}^\epsilon) = -\nu \int_\Gamma (\mathbf{g} - \mathbf{g}^\epsilon) \cdot \partial_n \Phi \, ds,$$

para todo $\Phi \in \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega)$ com $\operatorname{div} \Phi = 0$. Observemos que $\partial_{\mathbf{n}} \Phi|_{\Gamma} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Usando (2.21) e (2.26) na última igualdade, obtemos

$$-\nu(\mathbf{u}^\epsilon, \Delta \Phi) = B(\mathbf{u}^\epsilon, \Phi, \mathbf{u}) + B(\mathbf{v}^\epsilon, \Phi, \mathbf{u}^\epsilon) + \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi) - \nu \int_{\Gamma} \mathbf{g}^\epsilon \cdot \partial_{\mathbf{n}} \Phi \, ds. \quad (2.28)$$

Observemos que $\mathbf{g}^\epsilon$ é suave e que $\mathbf{u}^\epsilon$ pertence a $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Podemos integrar por partes sobre o lado direito destas equações e encontrar

$$\nu((\mathbf{u}^\epsilon, \Phi)) = B(\mathbf{u}^\epsilon, \Phi, \mathbf{u}) + B(\mathbf{v}^\epsilon, \Phi, \mathbf{u}^\epsilon) + \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi). \quad (2.29)$$

Seguidamente, introduzimos

$$\mathbf{u}^\epsilon = \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}, \quad (2.30)$$

onde $\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon$ é uma extensão conveniente de $\mathbf{g}^\epsilon$ to Ω (veja o Lema 2.11 acima), e $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Das equações (2.29) e (2.30) podemos derivar uma equação para $\mathbf{u}$. Também escrevemos

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon = \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v} + \mathbf{v}^\epsilon = \mathbf{v} + \mathbf{V}^\epsilon, \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{V}^\epsilon := \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon$. Observemos que $\mathbf{V}^\epsilon$ pertence ao espaço $\mathbf{L}^3(\Omega)$ e $\mathbf{V}^\epsilon|_{\Gamma} = \mathbf{g}$. Aplicando (2.30) e (2.31) em (2.29) obtemos

$$\begin{aligned} \nu((\mathbf{v}, \Phi)) &= B(\mathbf{v}, \Phi, \mathbf{v}) + B(\mathbf{V}^\epsilon, \Phi, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \Phi, \mathbf{V}^\epsilon) + \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi) - \\ &\quad - \nu((\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon, \Phi)) + B(\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon, \Phi, \mathbf{V}^\epsilon) + B(\mathbf{v}^\epsilon, \Phi, \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Agora introduzimos a forma bilinear $L(\cdot, \cdot)$, definida como sendo

$$L(\mathbf{v}, \Phi) = B(\mathbf{V}^\epsilon, \Phi, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \Phi, \mathbf{V}^\epsilon), \quad (2.33)$$

e a forma linear $\mathbf{F}$ definida por

$$\langle \mathbf{F}, \Phi \rangle = -\nu((\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon, \Phi)) + B(\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon, \Phi, \mathbf{V}^\epsilon) + B(\mathbf{v}^\epsilon, \Phi, \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon). \quad (2.34)$$

Então

$$\nu((\mathbf{v}, \Phi)) = B(\mathbf{v}, \Phi, \mathbf{v}) + \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi) + L(\mathbf{v}, \Phi) + \langle \mathbf{F}, \Phi \rangle, \quad (2.35)$$

para todo $\Phi \in \mathbf{W}^{2,3/2}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,3/2}(\Omega)$, $\operatorname{div} \Phi = 0$. Se $\mathbf{v}$ é uma solução do problema (2.35), então ela também é solução do problema variacional, isto é,

$$\nu((\mathbf{v}, \Phi)) = B(\mathbf{v}, \Phi, \mathbf{v}) + \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi) + L(\mathbf{v}, \Phi) + \langle \mathbf{F}, \Phi \rangle, \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}. \quad (2.36)$$

Podemos ver que $L(\mathbf{v}, \Phi)$, $\langle \mathbf{F}, \Phi \rangle$ e $B(\mathbf{v}, \Phi, \mathbf{v})$ são aplicações lineares contínuas em Φ com respeito à topologia de $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Assumamos agora que $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ é uma solução de (2.36). Das considerações feitas anteriormente, segue-se que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{V}^\epsilon$ é uma solução do **Problema em u**.

Na seguinte seção provaremos a existência de uma solução ultra fraca do Problema (2.1)-(2.2), onde o campo velocidade é da forma $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{V}^\epsilon = \mathbf{v} + \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon$, com $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, e $\mathbf{V}^\epsilon = \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon$ e $\mathbf{v}^\epsilon, \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon$ são construídos como foi indicado anteriormente.

2.5 Teorema de existência

Iniciamos esta seção indicando a construção de uma aplicação $\mathbf{A} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ cujos pontos fixos dão soluções ultra fracas do sistema (2.1) no sentido da Definição 2.4. Nesta ordem, verificamos as hipóteses do Teorema do ponto fixo de Schauder o qual dará a prova do Teorema 2.5.

Para a velocidade na fronteira assumimos $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Primeiro introduzimos uma aproximação suave $\mathbf{g}^\epsilon$ de $\mathbf{g}$ em $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ tal que $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}^\epsilon\|_{L^2(\Gamma)}$ é suficientemente pequeno e tal que $\int_\Gamma \mathbf{g}^\epsilon \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$. Seja $\mathbf{v}^\epsilon$ a solução ultra fraca de (2.27) fornecida pelo Lema 2.12, com velocidade na fronteira sendo $\mathbf{g} - \mathbf{g}^\epsilon$. Mais explicitamente, tomamos $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}^\epsilon\|_{L^2(\Gamma)}$ suficientemente pequeno com respeito a ν de forma que o **Problema em θ** tenha uma (única) solução para cada $\mathbf{u}^\epsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ e tal que a desigualdade (2.39) abaixo, seja verdadeira.

Consideremos também a extensão $\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon$ de $\mathbf{g}^\epsilon$ satisfazendo

$$|B(\mathbf{v}, \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon, \mathbf{v})| \leq \frac{1}{4} \nu \|\mathbf{v}\|^2, \quad (2.37)$$

para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ dada pelo Lema 2.11. Notemos que se Ω é do tipo CASO 2, para obter a estimativa (2.37), usando o Lema 2.11 é necessário que o modulo do fluxo $|\varphi_1|$ seja suficientemente pequeno, como foi indicado na Seção 2.1. Agora, para $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, definimos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon = \mathbf{u}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon,$$

onde $\mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{v} + \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon$, e para este $\mathbf{u}$ resolvemos o **Problema em θ** . Tendo θ (a única solução do Problema em θ), podemos definir $\mathbf{A}(\mathbf{v}) \in \mathbf{V}$ como sendo a solução fraca do problema

$$E(\mathbf{A}(\mathbf{v}), \Phi) = B(\mathbf{v}, \Phi, \mathbf{A}\mathbf{v}) + \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi) + \langle \mathbf{F}, \Phi \rangle, \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}, \quad (2.38)$$

onde $E(\mathbf{v}, \Phi) := \nu((\mathbf{v}, \Phi)) - L(\mathbf{v}, \Phi)$. A forma bilinear $E(\cdot, \cdot)$ é contínua e coerciva sob as condições que foram colocadas. Observemos que $\theta = \theta(\mathbf{u}) = \theta(\mathbf{v} + \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon)$ e, em particular, verifica a estimativa (2.20) onde $\mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{v} + \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon$.

Para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ (e sua correspondente $\theta \in L^2(\Omega)$), o lado direito de (2.38) define um funcional contínuo e limitado em Φ sobre $\mathbf{V}$. Assim, usando o Lema de Lax-Milgram, a aplicação $\mathbf{A}$ está bem definida. Observamos que cada ponto fixo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ da aplicação $\mathbf{A}$ define um par $(\mathbf{u}, \theta) = (\mathbf{v} + \mathbf{V}^\epsilon, \theta)$, $V^\epsilon = \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon$, o qual é uma solução ultra fraca do Problema (2.1)-(2.2). Usando o Lema de De Rham podemos mostrar que existe um $p \in W^{-1,3}(\Omega)$ tal que a tripla $(\mathbf{u}, \theta, p)$ satisfaz todas as condições dadas na Definição 2.4.

Seguidamente iremos demonstrar a existência de pontos fixos do operador $\mathbf{A}$. Para tais fins aplicamos o Teorema do ponto fixo de Schauder ao operador $\mathbf{A}$ definido por (2.38). Nesta ordem, devemos construir uma bola $B_R(\mathbf{V}) \subset \mathbf{V}$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : B_R(\mathbf{V}) \subset \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}, \end{aligned}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

1. Existe um número real $R > 0$ tal que $\mathbf{A}(B_R(\mathbf{V})) \subset B_R(\mathbf{V})$.
2. $B_R(\mathbf{V})$ é um conjunto relativamente compacto em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
3. $B_R(\mathbf{V})$ é fechado em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
4. $\mathbf{A} : B_R(\mathbf{V}) \rightarrow B_R(\mathbf{V})$ é uma função contínua com respeito à topologia da L^2 .

passo 1: Definamos a bola:

$$B_R(\mathbf{V}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \|\mathbf{v}\| \leq R\}.$$

Tomando $\mathbf{A}(\mathbf{v})$ como função teste e levando em consideração a definição da forma bilinear E , obtemos:

$$\nu \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|^2 - B(\mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{v}^\epsilon) = -B(\mathbf{A}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon, \mathbf{A}(\mathbf{v})) + \beta(\theta \mathbf{f}, \mathbf{A}(\mathbf{v})) + \langle \mathbf{F}, \mathbf{A}(\mathbf{v}) \rangle.$$

Observemos que usando a pequenez da parte irregular $\mathbf{v}^\epsilon$ de $\mathbf{V}^\epsilon$, da expressão (2.24) temos que:

$$|\mathbf{v}^\epsilon|_3 < \frac{c_1 \nu |\mathbf{g} - \mathbf{g}^\epsilon|_{L^2(\Gamma)}}{\nu - c_1 |\mathbf{g} - \mathbf{g}^\epsilon|_{L^2(\Gamma)}} \leq \frac{\nu}{4}, \quad (2.39)$$

e assim,

$$B(\mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{v}^\epsilon) \leq c \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|^2 |\mathbf{v}^\epsilon|_3 \leq \frac{\nu}{4} \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|^2.$$

Pelo Lema 2.11, temos que:

$$B(\mathbf{A}(\mathbf{v}), \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon, \mathbf{A}(\mathbf{v})) \leq \frac{\nu}{4} \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|^2,$$

e portanto segue-se que:

$$\frac{\nu}{2} \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|^2 \leq \beta(\theta \mathbf{f}, \mathbf{A}(\mathbf{v})) + \langle \mathbf{F}, \mathbf{A}(\mathbf{v}) \rangle.$$

Notemos que:

$$\beta(\theta \mathbf{f}, \mathbf{A}(\mathbf{v})) \leq c \beta |\theta|_2 |\mathbf{f}|_3 \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|,$$

e que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{A}(\mathbf{v}) \rangle &= -\nu \int_{\Omega} \nabla \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega} (\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{v}) \cdot \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon \, d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} (\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}^\epsilon \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{v}^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{v}) \cdot \widehat{\mathbf{g}}^\epsilon \, d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned}$$

Limitaremos os termos I_i da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|, \\ I_2 &\leq c |\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon|_3 \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|, \\ I_3 + I_4 &\leq c |\mathbf{v}^\epsilon|_3 \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\| \leq \frac{\nu}{4} \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|. \end{aligned}$$

Conseqüentemente encontramos:

$$\nu \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\|_1 \leq c \left\{ |\theta|_2 |\mathbf{f}|_3 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2 \right\}.$$

Como já foi mostrado, temos que

$$\begin{aligned} |\theta|_2 &\leq c \left\{ \frac{1}{\chi} |h|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}^\epsilon\|_1 \right) (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} \\ &\leq c \left\{ \frac{1}{\chi} |h|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} (\|\mathbf{v}\| + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1) \right) (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\}, \end{aligned}$$

e isto implica que:

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\| &\leq c \left\{ \left\{ \frac{1}{\chi} |h|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} (\|\mathbf{v}\| + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1) \right) (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{f}|_3 \right. \\ &\quad \left. + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2 \right\} \\ &\leq \left\{ \frac{c}{\chi} |h|_2 + c \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 \right) (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{f}|_3 \\ &\quad + \frac{c}{\chi} (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) |\mathbf{f}|_3 \|\mathbf{v}\| + c (\|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2). \end{aligned}$$

Assim, como $\mathbf{v}$ pertence à bola $B_R(\mathbf{V})$, precisamos impor a condição

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{c}{\chi} |h|_2 + c \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 \right) (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{f}|_3 + \\ &+ \frac{c}{\chi} (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) |\mathbf{f}|_3 R + c (\|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2) \leq \nu R. \end{aligned}$$

Para verificar esta última desigualdade, reescrevemos a expressão previa como sendo

$$a R - \nu R + d \leq 0,$$

onde

$$\begin{cases} a &= \frac{c}{\chi} (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) |\mathbf{f}|_3, \\ d &= C \left\{ \frac{1}{\chi} |h|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2 \right) (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) |\mathbf{f}|_3 + (\|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^3) \right\}, \end{cases}$$

a qual tem uma raiz positiva se

$$a < \nu. \quad (2.40)$$

Se (2.40) é verificada, escolhemos R tal que:

$$R \leq \frac{d}{\nu - a}. \quad (2.41)$$

Observação 2.16. *Observemos que a hipótese de ν ser suficientemente grande (como aparece no enunciado do Teorema 2.5) pode substituída de maneira única por uma das seguintes condições:*

- $|\mathbf{f}|_3$ suficientemente pequena em relação a $\chi, |\xi|_{L^2(\Gamma_1)}, |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}$.
- χ suficientemente grande em relação a $|\mathbf{f}|_3, |\xi|_{L^2(\Gamma_1)}, |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}$.
- $(|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1}(\Gamma_2)})$ suficientemente pequeno em relação a $|\mathbf{f}|_3$ e χ .

Observação 2.17. *Se consideramos os dados de fronteira para a temperatura conforme à observação 2.7, podemos ver que R deve satisfazer*

$$aR^2 - \nu R + d \leq 0,$$

onde

$$\begin{cases} a &= \frac{c}{\chi^2} (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) |\mathbf{f}|_3, \\ d &= C \left\{ \frac{1}{\chi} |h|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2 \right) (|\xi|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) |\mathbf{f}|_3 + (\|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^3) \right\}, \end{cases}$$

o qual tem uma raiz positiva se $\nu^2 > 4ad$ e assim R deve satisfazer

$$\frac{\nu - \sqrt{\nu^2 - 4ad}}{2a} \leq R \leq \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 - 4ad}}{2a}.$$

Passo 2: $B_R(\mathbf{V})$ é um conjunto relativamente compacto em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. De fato, observemos que $B_R(\mathbf{V})$ é uma bola fechada em $\mathbf{V}$ e, portanto, limitada em $\mathbf{V}$. Como o conjunto $\mathbf{V} \hookrightarrow \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$, compactamente, $B_R(\mathbf{V})$ é relativamente compacta em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Passo 3: A bola $B_R(\mathbf{V})$ é fechada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Isto decorre do fato de $B_R(\mathbf{V})$ ser fechada em $\mathbf{V} \subset \mathbf{L}^2$.

Passo 4: $\mathbf{A} : B_R(\mathbf{V}) \rightarrow B_R(\mathbf{V})$ é uma aplicação contínua com respeito à topologia de $\mathbf{L}^2$. De fato, se $(\mathbf{v}_n)$ é uma seqüência tal que $\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v}$ fortemente em $\mathbf{L}^2$, temos que mostrar que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_n) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \quad \text{fortemente em } \mathbf{L}^2.$$

Observemos que a imersão compacta de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{L}^2$, implica a existência de uma subsequência $(\mathbf{A}(\mathbf{v}_{n_k}))$ limitada em $B_R(\mathbf{V}) \subset \mathbf{L}^2$ e portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{v}_{n_k}) &\rightharpoonup \tilde{\mathbf{w}} \quad \text{fracamente em } \mathbf{V}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{v}_{n_k}) &\rightarrow \tilde{\mathbf{w}} \quad \text{fortemente em } \mathbf{L}^2. \end{aligned}$$

Agora, para cada $\mathbf{v}_n$, resolvemos o **Problema em θ** dado pelo Lema 2.9, obtendo uma seqüência $\{\theta_n\}$ a qual é limitada na norma L^2 . Portanto, existe uma subsequência $\{\theta_{n_k}\}$ a qual converge fracamente em L^2 para alguma $\tilde{\theta}$. Na verdade, temos que

$$-\chi(\tilde{\theta}, \Delta\psi) - b(\mathbf{u}, \psi, \tilde{\theta}) - (h, \psi) = \chi \langle \zeta, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H^{1/2}(\Gamma_2)} - \chi \int_{\Gamma_1} \xi \partial_{\mathbf{n}} \psi \, ds, \quad (2.42)$$

para toda $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$, onde $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{V}^\epsilon$. Por outro lado, a função $\mathbf{v}$ tem associada uma temperatura θ a qual é solução da equação

$$-\chi(\theta, \Delta\psi) - b(\mathbf{u}, \psi, \theta) - (h, \psi) = \chi \langle \zeta, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H^{1/2}(\Gamma_2)} - \chi \int_{\Gamma_1} \xi \partial_{\mathbf{n}} \psi \, ds, \quad (2.43)$$

para toda $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$. A unicidade da solução do **Problema em θ** , implica $\theta = \tilde{\theta}$. Se tomamos o limite quando $n_k \rightarrow +\infty$, obtemos que $\tilde{\mathbf{w}}$ é solução do problema (2.36) com temperatura associada θ . Por unicidade, temos que $\mathbf{w} = \mathbf{A}(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{w}}$. Assim, $\mathbf{A}(\mathbf{v}_{n_k}) \rightharpoonup \mathbf{A}(\mathbf{v})$ fracamente em $\mathbf{V}$, e portanto $\mathbf{A}(\mathbf{v}_{n_k}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{v})$ fortemente em $\mathbf{L}^2$. Finalmente, toda a seqüência $(\mathbf{A}(\mathbf{v}_n))$ converge para $\mathbf{A}(\mathbf{v})$.

2.6 Dependência contínua: Caso Navier-Stokes

Como foi comentado anteriormente, Marušić-Paloka em [87] provou a existência de solução ultra fraca $\mathbf{z} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ do problema de Dirichlet para o sistema de Navier-Stokes com dados de fronteira no espaço $\mathbf{L}^2(\Gamma)$, e força externa $\mathbf{f}$ em $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, isto é,

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{z} + (\mathbf{z} \cdot \nabla) \mathbf{z} + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{z} &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{g} \text{ sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (2.44)$$

Além disso, sob condições de pequenez sobre os dados, um resultado de unicidade é obtido. Para nosso estudo de dependência contínua das soluções ultra fracas para o problema de Boussinesq (2.1)-(2.2), precisaremos saber da dependência contínua das soluções ultra fracas para o sistema de Navier-Stokes (2.44). Observamos aqui que no paper [87] nada é comentado ao respeito.

Para este fim, consideremos $\mathbf{v}_1^\epsilon, \mathbf{v}_2^\epsilon$ duas soluções ultra fracas de (2.44) com dados $\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1$, e $\mathbf{f}_2, \mathbf{g}_2$, respectivamente. Estudaremos o problema verificado por $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon$, isto é:

$$(P) \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}_2^\epsilon + \nabla(p_1^\epsilon - p_2^\epsilon) &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2, \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Consideremos inicialmente o problema (P) com $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 \equiv \mathbf{0}$ e para este caso consideremos o seu respectivo problema penalizado:

$$(P_p) \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{w}^m + (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{w}^m + (\mathbf{w}^m \cdot \nabla) \mathbf{v}_2^\epsilon + \nabla(p_1^{m,\epsilon} - p_2^{m,\epsilon}) &= \mathbf{0}, \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w}^m &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{w}^m|_\Gamma + \frac{1}{m} \left\{ \nu \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{w}^m - (p_1^{m,\epsilon} - p_2^{m,\epsilon}) \mathbf{n} - \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \mathbf{n}) \mathbf{w}^m - (\mathbf{w}^m \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_2^\epsilon \right\} \Big|_\Gamma &= \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2. \end{cases}$$

O Problema (P_p) o chamamos de problema penalizado, já que, formalmente falando, quando $m \rightarrow \infty$, encontramos o Problema (P). O Problema (P_p) pode ser escrito em sua forma variacional como:

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^m : \nabla \Psi - \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{w}^m - \int_{\Omega} (\mathbf{w}^m \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{v}_2^\epsilon + m \int_{\Gamma} \mathbf{w}^m \cdot \Psi &= \\ = m \int_{\Gamma} (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) \cdot \Psi - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \mathbf{n}) \mathbf{w}^m \cdot \Psi, \end{aligned} \quad (2.45)$$

para toda $\Psi \in \mathbf{H}_{div}^1 \equiv \{\Psi \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \Psi = 0\}$. Usando os argumentos feitos por Marusič-Paloka em [87], podemos deduzir a existência de uma única solução $\mathbf{w}^m$ em $\mathbf{H}_{div}^1(\Omega)$ da equação (2.45) tal que:

$$|\mathbf{w}^m|_{L^2(\Gamma)} \leq C(\mathbf{v}_1^\epsilon, \mathbf{v}_2^\epsilon) |(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)|_{L^2(\Gamma)}. \quad (2.46)$$

De fato, consideramos a seguinte forma bilinear $a : \mathbf{H}_{div}^1 \times \mathbf{H}_{div}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(\Phi, \Psi) = \nu \int_{\Omega} \nabla \Phi : \nabla \Psi - \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \Psi \cdot \Phi + m \int_{\Gamma} \Phi \cdot \Psi + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \mathbf{n}) \Phi \cdot \Psi,$$

a qual verifica:

$$a(\Phi, \Phi) = \nu \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 + m \int_{\Gamma} |\Phi|^2.$$

Devido ao Lema de Lax-Milgram obtemos a existência de uma única solução $\mathbf{w}^m \in \mathbf{H}_{\text{div}}^1$ de (2.45). Para a elipticidade da forma bilinear a , temos usado a seguinte desigualdade do tipo Poincaré:

$$|\phi|_{L^2(\Omega)} \leq C(|\nabla \phi|_{L^2(\Omega)} + |\phi|_{L^2(\Gamma)}), \quad \forall \phi \in H^1(\Omega). \quad (2.47)$$

Notemos que $\mathbf{w}^m$ verifica

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}^m, \mathbf{w}^m) &= m \int_{\Gamma} (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{w}^m + \int_{\Omega} (\mathbf{w}^m \cdot \nabla) \mathbf{w}^m \cdot \mathbf{v}_2^\epsilon \\ &\leq m |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{L^2(\Gamma)} |\mathbf{w}^m|_{L^2(\Gamma)} + \|\mathbf{w}^m\|_1^2 |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Observemos que usando a desigualdade (2.47) e notando que $|\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \leq \frac{\nu}{2}$, a expressão previa nos leva a:

$$\frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}^m|^2 + m \int_{\Gamma} |\mathbf{w}^m|^2 \leq m |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{L^2(\Gamma)} |\mathbf{w}^m|_{L^2(\Gamma)},$$

e assim,

$$|\mathbf{w}^m|_{L^2(\Gamma)} \leq |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{L^2(\Gamma)}.$$

Para obter a solução ultra fraca $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon$, estudamos seu problema dual, isto é,

$$\begin{cases} -\nu \Delta \Phi - (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \Phi - (\mathbf{v}_2^\epsilon \cdot \nabla^t) \Phi + \nabla \pi &= \mathbf{F}, \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \Phi &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \Phi|_{\Gamma} &= \mathbf{0}, \text{ sobre } \Gamma, \end{cases}$$

onde $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$. Se Ω é do tipo CASO 2, podemos trabalhar como em [87] e obter

$$\|\Phi\|_{W^{2,3/2}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{1,3/2}(\Omega)} \leq c |\mathbf{F}|_{3/2} (1 + |\mathbf{v}_1^\epsilon|_3 + |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3).$$

A idéia desta prova é uma adaptação da prova do Lema VIII.5.1 de [42] a qual é baseada em estimativas análogas para o sistema de Stokes. Se Ω é do tipo CASO 1, para obter o mesmo grau de regularidade da Φ , usamos o Teorema 2.14 devido a Dauge [26]. Agora usamos Ψ como função teste em (2.45), com $\mathbf{F} = |\mathbf{w}^m| \mathbf{w}^m$, e assim encontramos que

$$|\mathbf{w}^m|_3^3 + \int_{\Gamma} (\nu \partial_{\mathbf{n}} \Psi - \pi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}^m d\sigma = 0.$$

Portanto, usando (2.46) temos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (\nu \partial_{\mathbf{n}} \Phi - \pi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}^m d\sigma &\leq (\nu |\partial_{\mathbf{n}} \Phi|_{L^2(\Gamma)} + |\pi|_{L^2(\Gamma)}) |\mathbf{w}^m|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq C (\|\Psi\|_{W^{2,3/2}(\Omega)} + \|\pi\|_{W^{1,3/2}(\Omega)}) |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq C |\mathbf{w}^m|_3^2 (1 + |\mathbf{v}_1^\epsilon|_3 + |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3) |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, deduzimos

$$|\mathbf{w}^m|_3 \leq C \left(1 + |\mathbf{v}_1^\epsilon|_3 + |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3\right) |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{L^2(\Gamma)}. \quad (2.49)$$

As anteriores observações nos permitem mostrar o seguinte teorema:

Teorema 2.18. *Sejam $\mathbf{v}_1^\epsilon, \mathbf{v}_2^\epsilon$ duas soluções ultra fracas do sistema de Navier-Stokes com forças externas $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ e dados de fronteira sendo $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, respectivamente. Então existe uma única solução ultra fraca $\mathbf{w}$ do problema (P) satisfazendo*

$$|\mathbf{w}|_3 \leq C \left(1 + |\mathbf{v}_1^\epsilon|_3 + |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3\right) |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2|_{L^2(\Gamma)} + C |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (2.50)$$

Demonstração:. Primeiramente consideremos o caso onde $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = 0$. Pelo feito ao inicio da seção, temos que existe algum $\mathbf{w}^0 \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ e $\xi \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ tal que, passando eventualmente para uma subsequência,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^m &\rightharpoonup \mathbf{w}^0, \text{ fracamente em } \mathbf{L}^2(\Omega), \\
\mathbf{w}^m|_{\Gamma} &\rightharpoonup \xi, \text{ fracamente em } \mathbf{L}^2(\Gamma).
\end{aligned}$$

Primeiro provaremos que $\xi = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2$. Notemos que tomando $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ como função teste em (2.45), encontramos

$$\begin{aligned}
m \int_{\Gamma} (\mathbf{w}^m - (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)) \Psi &= \int_{\Omega} \mathbf{w}^m \Delta \Psi - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^m \partial_{\mathbf{n}} \Psi + \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{w}^m + \\
&+ \int_{\Omega} (\mathbf{w}^m \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{v}_2^\epsilon + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \mathbf{n}) \mathbf{w}^m \cdot \Psi \leq \\
&\leq |\mathbf{w}^m|_3 |\Delta \Psi|_{3/2} + |\mathbf{w}^m|_{L^2(\Gamma)} |\partial_{\mathbf{n}} \Psi|_{L^2(\Gamma)} + |\mathbf{v}_1^\epsilon|_3 |\mathbf{w}^m|_3 |\nabla \Psi|_3 + \\
&+ |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 |\mathbf{w}^m|_3 |\nabla \Psi|_3 + |\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \mathbf{n}|_{L^2(\Gamma)} |\mathbf{w}^m|_{L^4(\Gamma)} |\Psi|_{L^4(\Gamma)} \leq C.
\end{aligned}$$

Portanto, passando o limite quando $m \rightarrow \infty$, obtemos que

$$\int_{\Gamma} (\xi - (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)) \Psi = 0. \quad (2.51)$$

Assim, (2.51) tem-se para $\Psi \in \mathbf{L}^2$, em particular para $\Psi = \xi - (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)$. Isto implica que $\xi = (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2)$. Por outro lado, para $\Psi \in V$, temos

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^m \Delta \Psi + \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{w}^m + \int_{\Omega} (\mathbf{w}^m \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{v}_2^\epsilon = 0.$$

Portanto, passando o limite quando $m \rightarrow \infty$, encontramos

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^0 \Delta \Psi + \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{w}^0 + \int_{\Omega} (\mathbf{w}^0 \cdot \nabla) \Psi \cdot \mathbf{v}_2^\epsilon = 0.$$

De maneira análoga, para $\tau \in W^{1,3/2}(\Omega)$, $\int_{\Omega} \tau = 0$, encontramos:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^m \Delta \tau = \int_{\Gamma} \tau (\mathbf{w}^m \cdot \mathbf{n}) \implies \int_{\Omega} \mathbf{w}^0 \Delta \tau = \int_{\Gamma} \tau ((\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{n}).$$

Assim $\mathbf{w}^0$ é uma solução ultra fraca para (P) com $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = 0$. A unicidade é devida à linearidade e ela implica que a sequência toda $\{\mathbf{w}^m\}$ converge a $\mathbf{w}^0$. A estimativa (2.50) para este primeiro caso segue de (2.49) e da semi continuidade da norma $|\cdot|_3$.

Finalmente, para o caso $\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$ sendo não nula, consideramos a solução $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ do problema

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\mathbf{w}} + \nabla \tilde{q} &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}} &= \mathbf{0}, \text{ em } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{w}} &= \mathbf{0}, \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Assim, a solução ultra fraca requerida será dada por $\mathbf{w} = \mathbf{w}^0 + \tilde{\mathbf{w}}$. Como temos a desigualdade $|\tilde{\mathbf{w}}|_2 \leq C|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_{H^{-1}}$, a estimativa (2.50) é válida. $\blacksquare$

2.7 Dependência contínua: Caso Boussinesq

Nesta seção provaremos o Teorema 2.6. Separamos a prova em duas partes, a saber:

- Primeiramente, consideramos duas soluções $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, para o sistema (2.36) com segundos membros sendo, respectivamente, $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2$, mas com a mesma velocidade $\mathbf{g}$ na fronteira.
- Em segundo lugar, consideramos duas soluções $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, para o sistema (2.36) com segundos membros $\mathbf{f}$, e condições de fronteira, sendo respectivamente, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$.

A estimativa requerida será uma implicação das duas estimativas previas.

Passo 1: Consideremos duas soluções $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, para o sistema (2.36) com segundos membros $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2$, respectivamente, mas com a mesma velocidade na fronteira; assim temos que:

$$\nu((\mathbf{v}_i, \Phi)) = B(\mathbf{v}_i, \Phi, \mathbf{v}_i) + \beta(\theta_i \mathbf{f}_i, \Phi) + L(\mathbf{v}_i, \Phi) + \langle \mathbf{F}, \Phi \rangle, \quad i = 1, 2, \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}, \quad (2.52)$$

onde

$$L(\mathbf{v}_i, \Phi) = B(\mathbf{V}^\epsilon, \Phi, \mathbf{v}_i) + B(\mathbf{v}_i, \Phi, \mathbf{V}^\epsilon), \quad (2.53)$$

e

$$\langle \mathbf{F}, \Phi \rangle = -\nu((\hat{\mathbf{g}}^\epsilon, \Phi)) + B(\hat{\mathbf{g}}^\epsilon, \Phi, \mathbf{V}^\epsilon) + B(\mathbf{v}^\epsilon, \Phi, \hat{\mathbf{g}}^\epsilon), \quad \mathbf{V}^\epsilon = \hat{\mathbf{g}}^\epsilon + \mathbf{v}^\epsilon. \quad (2.54)$$

Da definição da aplicação L e o Lema de extensão 2.11 temos

$$|L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)| \leq \frac{3\nu}{4} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_1^2.$$

Tomando a diferença em (2.52) para $i = 1, 2$, levando em consideração que

$$(\theta_1 \mathbf{f}_1, \Phi) - (\theta_2 \mathbf{f}_2, \Phi) = (\theta_2 (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2), \Phi) + ((\theta_1 - \theta_2) \mathbf{f}_1, \Phi),$$

e fazendo $\Phi = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, encontramos

$$\begin{aligned} \nu((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)) &= B(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + \beta(\theta_2 (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2), \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \\ &+ \beta((\theta_1 - \theta_2) \mathbf{f}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{1}{4} \nu \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \leq c \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| + c |\theta_2|_2 |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 + c |\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}_1|_3. \quad (2.55)$$

Observemos que cada solução $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, de (2.52) satisfaz:

$$\nu \|\mathbf{v}_i\|^2 = \beta(\theta_i \mathbf{f}_i, \mathbf{v}_i) + B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{V}^\epsilon) + \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}_i \rangle,$$

com

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{v}_i \rangle = -\nu((\hat{\mathbf{g}}^\epsilon, \mathbf{v}_i)) + B(\hat{\mathbf{g}}^\epsilon, \mathbf{v}_i, \mathbf{V}^\epsilon) + B(\mathbf{v}^\epsilon, \mathbf{v}_i, \hat{\mathbf{g}}^\epsilon).$$

Usando estimativas análogas às que foram feitas anteriormente para $\mathbf{A}(\mathbf{v})$, podemos obter:

$$\nu \|\mathbf{v}_i\| \leq c \{ |\theta_i|_2 |\mathbf{f}_i|_3 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + |\mathbf{v}^\epsilon|_3 \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2 \} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\{ \frac{c}{\chi} |h_i|_2 + c \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 \right) (|\xi_i|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_i|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{f}_i|_3 \\ &+ \frac{1}{\chi} (|\xi_i|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_i|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) |\mathbf{f}_i|_3 \|\mathbf{v}_i\| + c (\|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Isto pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \left(\nu - \frac{1}{\chi} (|\xi_i|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_i|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) |\mathbf{f}_i|_3 \right) \|\mathbf{v}_i\|_1 &\leq c (\|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2) + \\ &+ \left\{ \frac{c}{\chi} |h_i|_2 + c \left(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\widehat{\mathbf{g}}^\epsilon\|_1^2 \right) (|\xi_i|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_i|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{f}_i|_3 \equiv M. \end{aligned}$$

Supondo uma das três opções indicadas na Observação 2.16, podemos concluir que $\|\mathbf{v}_1\|_1 \leq \frac{M}{\nu}$. Assim, para ν suficientemente grande em relação a M ou M suficientemente pequeno em relação a ν , obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\nu - \frac{M}{\nu} \right) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| &\leq c (|\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}_1|_3 + |\theta_2|_2 |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3) \\ &\leq c \left(|\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}_1|_3 + \left\{ \frac{1}{\chi} |h_2|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1 \right) (|\xi_2|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 \right). \end{aligned}$$

Acima temos usado a estimativa (2.20) para θ_2 . Portanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| &\leq \\ &\leq \frac{c}{\nu} \left(|\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}_1|_3 + \left\{ \frac{1}{\chi} |h_2|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1 \right) (|\xi_2|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 \right) \\ &\leq \frac{c}{\nu} \left(|\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}_1|_3 + C_2 |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde

$$\begin{cases} C_2 &= C(|h_2|_2, \chi, \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1^2, |\xi_2|_{L^2(\Gamma_1)}, |\zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \\ &= \frac{1}{\chi} |h_2|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1 \right) (|\xi_2|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}). \end{cases}$$

Agora voltemos ao **Problema em θ** . Assumamos inicialmente que $\xi_1 = \xi_2$ e $\zeta_1 = \zeta_2$. Então, como

$$(\theta_1, b_i) = (h_1, \psi_i) + \chi \langle \zeta_1, \psi_i \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H^{1/2}(\Gamma_2)} - \chi \int_{\Gamma_1} \xi_1 \partial_{\mathbf{n}} \psi_i ds, \quad (2.59)$$

onde $b_i = L_{\mathbf{u}_i}(\psi_i)$ com $L_{\mathbf{u}} := -\chi \Delta \psi - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \psi$, tomando a diferença para $i = 1, 2$, (com $b_i = \theta_1 - \theta_2$) obtemos

$$\begin{aligned} |\theta_1 - \theta_2|_2^2 &= (h_1, \psi_1) - (h_2, \psi_2) + \chi \langle \zeta_1, (\psi_1 - \psi_2) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H^{1/2}(\Gamma_2)} \\ &\quad - \chi \int_{\Gamma_1} \xi_1 \partial_{\mathbf{n}} (\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} -\chi \Delta \psi_1 - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \psi_1 &= \theta_1 - \theta_2, \\ -\chi \Delta \psi_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \psi_2 &= \theta_1 - \theta_2. \end{aligned}$$

Então, $-\chi \Delta (\psi_1 - \psi_2) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) (\psi_1 - \psi_2) + ((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla) \psi_2 = 0$. Portanto, multiplicando esta equação por $\psi_1 - \psi_2$ e integrando em Ω obtemos

$$\begin{aligned} \chi \|\psi_1 - \psi_2\|_1^2 &= \left| - \int_{\Omega} (((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla) \psi_2) \cdot (\psi_1 - \psi_2) d\Omega \right| \\ &= \left| - \int_{\Omega} (((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \nabla) \psi_2) \cdot (\psi_1 - \psi_2) d\Omega \right| \\ &\leq c \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_3 \|\nabla \psi_2\|_2 \|\psi_1 - \psi_2\|_1. \end{aligned}$$

Usando que $\|\nabla \psi_2\|_2^2 = \frac{c}{\chi} (\theta_1 - \theta_2, \psi_2)$ ($\implies \|\nabla \psi_2\|_2 \leq \frac{c}{\chi} |\theta_1 - \theta_2|_2$) encontramos

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_1 \leq \frac{c}{\chi^2} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_3 |\theta_1 - \theta_2|_2. \quad (2.61)$$

A regularidade da ψ_1, ψ_2 , permite-nos deduzir que:

$$\chi \|\psi_1 - \psi_2\|_2 \leq C (|(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) (\psi_1 - \psi_2)|_2 + |((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla) \psi_2|_2).$$

Como $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^\epsilon + \mathbf{v}_1^\epsilon$, encontramos :

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) (\psi_1 - \psi_2)|_2 &\leq c \|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1 \|\nabla (\psi_1 - \psi_2)\|_3 \\ &\leq c \|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1 \|\psi_1 - \psi_2\|_1^{1/2} \|\psi_1 - \psi_2\|_2^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{\chi} \|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1^2 \|\psi_1 - \psi_2\|_1 + \frac{\chi}{4} \|\psi_1 - \psi_2\|_2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$|((\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \nabla) \psi_2|_2 \leq c |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 \|\psi_2\|_2.$$

Portanto, usando que $\|\psi_2\|_2 \leq \frac{c}{\chi} \left(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1^2\right) |\theta_1 - \theta_2|_2$ e (2.61), encontramos:

$$\begin{aligned} \|\psi_1 - \psi_2\|_2 &\leq \frac{c}{\chi} \left(\frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1^2 \|\psi_1 - \psi_2\|_1 + |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 \|\psi_2\|_2 \right) \\ &\leq \frac{c}{\chi} \left(\frac{1}{\chi^3} \|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1^2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 |\theta_1 - \theta_2|_2 + \frac{1}{\chi} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 \left(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1^2\right) |\theta_1 - \theta_2|_2 \right) \\ &\leq \frac{c}{\chi^2} \left(1 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1^2 + \frac{1}{\chi^2} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1^2\right) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 |\theta_1 - \theta_2|_2. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Notemos que $(h_1, \psi_1) - (h_2, \psi_2) = (h_1 - h_2, \psi_2) + (h_1, \psi_1 - \psi_2)$; então, usando a estimativa (2.61) concluimos

$$(h_1 - h_2, \psi_2) \leq |h_1 - h_2|_2 |\psi_2|_2 \leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 |\theta_1 - \theta_2|_2.$$

$$(h_1, \psi_1 - \psi_2) \leq |h_1|_2 |\psi_1 - \psi_2|_2 \leq \frac{c}{\chi^2} |h_1|_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 |\theta_1 - \theta_2|_2.$$

As integrais de fronteira de (2.60) podem ser estimadas usando (2.61) – (2.62) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \chi \int_{\Gamma_1} \xi_1 \partial_{\mathbf{n}}(\psi_1 - \psi_2) ds &\leq \chi |\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)} |\partial_{\mathbf{n}}(\psi_1 - \psi_2)|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq c \chi |\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)} \left(\|\psi_1 - \psi_2\|_2^{1/2} \|\psi_1 - \psi_2\|_1^{1/2} + \|\psi_1 - \psi_2\|_1 \right) \tag{2.63} \\ &\leq \frac{c}{\chi} |\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)} \left(1 + \frac{1}{\chi} (\|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1 + \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1) \right) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 |\theta_1 - \theta_2|_2. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \chi \langle \zeta_1 (\psi_1 - \psi_2) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2), H_0^{1/2}(\Gamma_2)} &\leq \chi |\zeta_1|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} \\ &\leq \frac{c}{\chi} |\zeta_1|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} \left(1 + \frac{1}{\chi} (\|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1 + \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1) \right) \times \\ &\times |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 |\theta_1 - \theta_2|_2. \end{aligned}$$

Logo, coletando as estimativas anteriores, por (2.60), obtemos

$$\begin{aligned}
|\theta_1 - \theta_2|_2 &\leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 \\
&+ \left\{ \frac{c}{\chi^2} |h_1|_2 + \frac{c}{\chi} \left(1 + \frac{1}{\chi} (\|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1 + \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1) \right) (|\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_1|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 \\
&\leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + \frac{1}{\chi} C_{12} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

onde

$$\begin{cases} C_{12} = C(|h_1|_2, \chi, \|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1, \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1, |\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)}, |\zeta_1|_{L^2(\Gamma_2)}) \\ = \left\{ \frac{c}{\chi} |h_1|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi} (\|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1 + \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1) \right) (|\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_1|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}) \right\}. \end{cases}$$

Observação 2.19. *Se consideramos os dados de fronteira para a temperatura ξ_1, ζ_1 em $H^{-1/2}(\Gamma_1), H^{-3/2}(\Gamma_2)$, respectivamente, de acordo com a Observação 2.7, temos que:*

$$\begin{aligned}
\chi \langle \xi_1, \partial_{\mathbf{n}}(\psi_1 - \psi_2) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1), H^{1/2}(\Gamma_1)} &\leq \chi \|\xi_1\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \|\partial_{\mathbf{n}}(\psi_1 - \psi_2)\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \\
&\leq c \chi \|\xi_1\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \|\psi_1 - \psi_2\|_2 \\
&\leq \frac{c}{\chi} \|\xi_1\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} \left(1 + \frac{1}{\chi^2} (\|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1^2 + \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1^2) \right) \times \\
&\times |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 |\theta_1 - \theta_2|_2. \\
\chi \langle \zeta_1, \psi_1 - \psi_2 \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma_2), H^{3/2}(\Gamma_2)} &\leq c \chi \|\zeta_1\|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)} \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^{3/2}(\Gamma_2)} \\
&\leq c \chi \|\zeta_1\|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)} \|\psi_1 - \psi_2\|_2 \\
&\leq \frac{c}{\chi} \|\zeta_1\|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)} \left(1 + \frac{1}{\chi^2} (\|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1^2 + \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1^2) \right) \times \\
&\times |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 |\theta_1 - \theta_2|_2.
\end{aligned}$$

Assim, substituindo estas estimativas em (2.60) obtemos

$$\begin{aligned}
|\theta_1 - \theta_2|_2 &\leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 \\
&+ \left\{ \frac{c}{\chi^2} |h_1|_2 + \frac{c}{\chi} \left(1 + \frac{1}{\chi^2} (\|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1^2 + \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1^2) \right) (|\xi_1|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} + |\zeta_1|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)}) \right\} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 \\
&\leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + \frac{1}{\chi} C_{12} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} C_{12} &= C(|h_1|_2, \chi, \|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1, \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1 |\xi_1|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)}, |\zeta_1|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)}) \\ &= \left\{ \frac{c}{\chi} |h_1|_2 + \left(1 + \frac{1}{\chi^2} (\|\mathbf{u}_1^\epsilon\|_1^2 + \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1^2) \right) (|\xi_1|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)} + |\zeta_1|_{H^{-3/2}(\Gamma_2)}) \right\}. \end{cases}$$

Usando (2.60) e notando que $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 \leq c \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_1$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} |\theta_1 - \theta_2|_2 &\leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + \frac{1}{\chi} C_{12} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \\ &\leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + \frac{1}{\chi} \frac{C_{12}}{\nu} (|\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}_1|_3 + C_2 |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3). \end{aligned}$$

Por isso, tomando $|\mathbf{f}_1|_3$ ou $\{(|\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_1|_{H^{-1}(\Gamma_2)}), |h_1|_2\}$ suficientemente pequeno, ou ν ou χ suficientemente grande, segue-se que:

$$|\theta_1 - \theta_2|_2 \leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + \frac{C_2 C_{12}}{\nu \chi} |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3. \quad (2.65)$$

Substituindo (2.65) em (2.58), obtemos que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| &\leq \frac{c}{\nu} (|\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}_1|_3 + C_2 |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3) \\ &\leq \frac{c}{\nu} \left(\left\{ \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + \frac{1}{\nu \chi} C_2 C_{12} |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 \right\} |\mathbf{f}_1|_3 + C_2 |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 \right). \end{aligned}$$

Tomando $\{(|\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_1|_{H^{-1}(\Gamma_2)}), |h_1|_2\}$ ou $|\mathbf{f}_1|_3$ suficientemente pequeno, ou χ ou ν suficientemente grande, temos:

$$\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \leq \frac{c}{\nu \chi} (|h_1 - h_2|_2 |\mathbf{f}_1|_3 + \chi C_2 |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3).$$

Como $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_3 = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 \leq c \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|$, encontramos

$$\nu |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_3 + |\theta_1 - \theta_2|_2 \leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + C(1 + |\mathbf{f}_1|_3) \left[\frac{C_2 C_{12}}{\nu \chi} + C_2 \right] |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3.$$

Observemos que, se $\xi_1 \neq \xi_2$ e $\zeta_1 \neq \zeta_2$, então em (2.60) aparecem os seguintes termos adicionais:

$$\chi \int_{\Gamma_1} (\xi_1 - \xi_2) \partial_{\mathbf{n}} \psi_2 ds \quad \text{e} \quad \chi \int_{\Gamma_2} (\zeta_1 - \zeta_2) \psi_2 ds.$$

Estes termos podem ser estimados respectivamente por

$$c \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1 \right) |\xi_1 - \xi_2|_{L^2(\Gamma_1)} |\theta_1 - \theta_2|_2,$$

e

$$c \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1 \right) |\zeta_1 - \zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)} |\theta_1 - \theta_2|_2.$$

Portanto, (2.64) é substituído por:

$$\begin{aligned} |\theta_1 - \theta_2|_2 &\leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + \frac{1}{\chi} C_{12} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_3 + c \left(1 + \frac{1}{\chi} \|\mathbf{u}_2^\epsilon\|_1 \right) \times \\ &\times (|\xi_1 - \xi_2|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_1 - \zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}), \end{aligned}$$

e (2.65) por:

$$|\theta_1 - \theta_2|_2 \leq \frac{c}{\chi} |h_1 - h_2|_2 + \frac{C_2 C_{12}}{\nu \chi} |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 + C_2 (|\xi_1 - \xi_2|_{L^2(\Gamma_1)} + |\zeta_1 - \zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \nu |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_3 + |\theta_1 - \theta_2|_2 &\leq C^* (|h_1 - h_2|_2 + |\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2|_3 + |\xi_1 - \xi_2|_{L^2(\Gamma_1)} + \\ &+ |\zeta_1 - \zeta_2|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}), \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde C^* é uma constante positiva que depende dos dados do problema.

Passo 2: Considerando duas soluções $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, para o sistema (2.36) com segundos membros $\mathbf{f}$, e condições de fronteira $\mathbf{g}_1$ e $\mathbf{g}_2$, respectivamente. A expressão (2.52) é agora dada por:

$$\nu((\mathbf{v}_i, \Phi)) = B(\mathbf{v}_i, \Phi, \mathbf{v}_i) + \beta(\theta_i \mathbf{f}, \Phi) + L(\mathbf{v}_i, \Phi) + \langle \mathbf{F}_i, \Phi \rangle, \quad i = 1, 2, \quad \forall \Phi \in \mathbf{V}, \quad (2.67)$$

onde (2.53) é agora substituída por:

$$L(\mathbf{v}_i, \Phi) = B(\mathbf{V}_i^\epsilon, \Phi, \mathbf{v}_i) + B(\mathbf{v}_i, \Phi, \mathbf{V}_i^\epsilon), \quad (2.68)$$

e (2.54) por:

$$\langle \mathbf{F}_i, \Phi \rangle = -\nu((\widehat{\mathbf{g}}_i^\epsilon, \Phi)) + B(\widehat{\mathbf{g}}_i^\epsilon, \Phi, \mathbf{V}_i^\epsilon) + B(\mathbf{v}_i^\epsilon, \Phi, \widehat{\mathbf{g}}_i^\epsilon), \quad \mathbf{V}_i^\epsilon = \widehat{\mathbf{g}}_i^\epsilon + \mathbf{v}_i^\epsilon. \quad (2.69)$$

Centraremos-nos naqueles termos que não apareceram no Passo 1. Tomando $\Phi = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, podemos ver que

$$\begin{aligned} \nu((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)) &= B(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + \beta((\theta_1 - \theta_2) \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &+ L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \langle \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Observemos também que:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) &= B(\mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + B(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_2^\epsilon) \\ &+ B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon), \end{aligned}$$

e portanto,

$$|B(\mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)| \leq C|\mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon|_3 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \|\mathbf{v}_1\|.$$

$$\begin{aligned} |B(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_2^\epsilon)| &= |B(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^\epsilon) - B(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)| \\ &\leq C\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 + |B(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)| \\ &\leq C\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2 |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 + \frac{\nu}{4} C\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|^2. \end{aligned}$$

$$|B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon)| \leq C|\mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon|_3 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \|\mathbf{v}_1\|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle &= -\nu((\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)) + B(\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_2^\epsilon) + \\ &+ B(\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon) + B(\mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon) + \\ &+ B(\mathbf{v}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon), \end{aligned}$$

e assim,

$$|((\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))| \leq c\nu\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon\|_1,$$

$$|B(\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_2^\epsilon)| \leq c\|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon\|_1 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| |\mathbf{V}_2^\epsilon|_3,$$

$$|B(\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon)| \leq c\|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| |\mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon|_3,$$

$$|B(\mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon)| \leq c\|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| |\mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon|_3,$$

$$|B(\mathbf{v}_2^\epsilon, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon)| \leq c|\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1.$$

Juntando todas as estimativas anteriormente encontradas, de (2.70), obtemos:

$$\begin{aligned}
\nu \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| &\leq c \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| + c |\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}|_3 \\
&+ c (\|\mathbf{v}_1\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1) |\mathbf{V}_1^\epsilon - \mathbf{V}_2^\epsilon|_3 + c |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| + \\
&+ (\nu + c |\mathbf{V}_2^\epsilon|_3) \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon\|_1 + c |\mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1 + c |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1 \\
&\leq c \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| + c |\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}|_3 + \\
&+ c (\|\mathbf{v}_1\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1) |\mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon|_3 + \\
&+ (\nu + c |\mathbf{V}_2^\epsilon|_3 + \|\mathbf{v}_1\| + \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1) \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon\|_1 + c |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1 + c |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|.
\end{aligned}$$

Observemos que se tomamos $i = 1$ e $\Phi = \mathbf{v}_1$ em (2.67), encontramos

$$\nu \|\mathbf{v}_1\|^2 = B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{V}_1^\epsilon) + \beta(\theta_1 \mathbf{f}, \mathbf{v}_1) + \langle \mathbf{F}_1, \mathbf{v}_1 \rangle, \quad (2.71)$$

onde

$$\langle \mathbf{F}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = -\nu((\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon, \mathbf{v}_1)) + B(\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon, \mathbf{v}_1, \mathbf{V}_1^\epsilon) + B(\mathbf{v}_1^\epsilon, \mathbf{v}_1, \widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon).$$

Assim, estimando o lado direito de (2.71) de maneira análoga à estimativa (2.56) temos que

$$\nu \|\mathbf{v}_1\| \leq M = M(|\mathbf{f}|_3, |h_1|_2, \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1, |\xi_1|_{L^2(\Gamma_1)}, |\zeta|_{H^{-1/2}(\Gamma_2)}).$$

Sendo ν suficientemente grande, e pela pequenez de $|\mathbf{v}_2^\epsilon|_3$ temos que:

$$\begin{aligned}
\nu \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| &\leq c |\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}|_3 + c (\|\mathbf{v}_1\| + \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1) |\mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \\
&+ (\nu + c |\mathbf{V}_2^\epsilon|_3 + \|\mathbf{v}_1\| + \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1) \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon - \widehat{\mathbf{g}}_2^\epsilon\|_1.
\end{aligned} \quad (2.72)$$

Agora queremos verificar uma estimativa para a norma $|\mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon|_3$ em função da norma $|(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\epsilon) - (\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\epsilon)|_{L^2(\Gamma)}$. Para este fim, estudamos o problema verificado por $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1^\epsilon - \mathbf{v}_2^\epsilon$, isto é,

$$(PN) \left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{v}_1^\epsilon \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}_2^\epsilon + \nabla(p_1^\epsilon - p_2^\epsilon) &= \mathbf{0}, \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{G}, \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right.$$

onde $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\epsilon) - (\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\epsilon)$.

Aplicando o Teorema 2.18, temos que existe uma única solução $\mathbf{w} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ do Problema (PN), que satisfaz

$$|\mathbf{w}|_3 \leq C \left(1 + |\mathbf{v}_1^\epsilon|_3 + |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \right) |(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\epsilon) - (\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\epsilon)|_{L^2(\Gamma)}. \quad (2.73)$$

Voltando à expressão (2.72), coletando as estimativas (2.66) encontramos que

$$\begin{aligned} \nu \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| &\leq c|\theta_1 - \theta_2|_2 |\mathbf{f}|_3 + \\ &+ c (\|\mathbf{v}_1\| + \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1) \left(1 + |\mathbf{v}_1^\epsilon|_3 + |\mathbf{v}_2^\epsilon|_3 \right) |(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_1^\epsilon) - (\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_2^\epsilon)|_{L^2(\Gamma)} \\ &+ c(\nu + c|\mathbf{V}_2^\epsilon|_3 + \|\mathbf{v}_1\|_1 + \|\widehat{\mathbf{g}}_1^\epsilon\|_1) |\mathbf{g}_1^\epsilon - \mathbf{g}_2^\epsilon|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

como queríamos provar. ■

2.8 Interpretação do problema diferencial

Nesta seção faremos uma análise orientada a estabelecer em que sentido as soluções $(\mathbf{u}, \theta)$ de (2.8)-(2.10) são também soluções de (2.1)-(2.2).

2.8.1 Equações diferenciais

Proposição 2.20. *Seja $(\mathbf{u}, \theta, p)$ em $\mathbf{L}^3(\Omega) \times L^2(\Omega) \times W^{-1,3}(\Omega)$ a única solução de (2.8)-(2.10). Então $(\mathbf{u}, \theta, p)$ verificam (2.1) no sentido das distribuições.*

Demonstração:. Tomemos funções test $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)^3, \tau, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ em (2.8)-(2.10). Então temos que

$$\begin{aligned} -\nu(\mathbf{u}, \Delta \Phi) - B(\mathbf{u}, \Phi, \mathbf{u}) - \langle p, \operatorname{div} \Phi \rangle &= \beta(\theta \mathbf{f}, \Phi), \\ (\mathbf{u}, \nabla \tau) &= 0, \\ -\chi(\theta, \Delta \psi) - b(\mathbf{u}, \psi, \theta) - (h, \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Isto implica que as equações (2.1) são satisfeitas no sentido distribucional. ■

2.8.2 Condições de fronteira

Dado que a velocidade $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$ e $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, temos que $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^3(\Omega)$; assim, $\mathbf{u}$ admite o traço normal $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ sobre Γ o qual pertence a $W^{-1/3,3}(\Gamma)$. Além disso,

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \tau \rangle_{W^{-1/3,3}(\Gamma), W^{1/3,3/2}(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \tau \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} ds, \quad \forall \tau \in W^{1,3/2}(\Omega).$$

Assim, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ sobre Γ como elementos de $W^{-1/3,3}(\Gamma)$.

Por outro lado, se Ω é um domínio do tipo CASO 2, (onde a fronteira é de classe C^2) definimos o espaço

$$Z \equiv \{\phi \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) : \phi \cdot \mathbf{n} = 0\}.$$

Seja $T_{\mathbf{u}} : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ o seguinte operador

$$T_{\mathbf{u}}(\phi) = \nu(\mathbf{u}, \Delta \Phi) + \langle p, \operatorname{div} \Phi \rangle + \langle -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p, \Phi \rangle, \quad (2.75)$$

onde $\Phi = \Phi(\phi) \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 \Phi = 0, & \text{em } \Omega, \\ \Phi = 0, & \text{sobre } \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} \Phi = \phi, & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (2.76)$$

Notemos que a forma bilinear $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{v})$ é elíptica sobre $\mathbf{H}_0^2(\Omega)$. Além disso, sendo Γ de classe C^2 , existe uma função $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ tal que

$$\mathbf{u}_0 = 0 \text{ sobre } \Gamma, \quad \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_0 = \phi \text{ sobre } \Gamma. \quad (2.77)$$

Assim, consideramos o problema de encontrar $\Phi \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi - \mathbf{u}_0 &\in H^2(\Omega), \\ a(\Phi - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) &= -a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Pelo Lema de Lax-Milgram, (2.78) tem uma única solução $\Phi \in \mathbf{H}^2(\Omega)$.

Das propriedades de $\mathbf{u}, p$ e $\Phi(\phi)$, podemos ver que $T_{\mathbf{u}}$ é um funcional linear contínuo de Z em $\mathbb{R}$. Conseqüentemente, o identificamos com um elemento de Z' (espaço dual topológico de Z). Definimos este elemento por $T_{\mathbf{u}}$ e o chamaremos de traço tangencial generalizado de

$\mathbf{u}$ sobre Γ .

Provaremos que o traço tangencial generalizado de $\mathbf{u}$ assim definido, é igual a $\mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$, sobre Γ . De fato, tomando $\Phi = \Phi(\phi)$ em (2.8), de (2.75), (2.76) deduzimos que

$$T_{\mathbf{u}}(\phi) = \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \partial_{\mathbf{n}} \Phi = \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \phi ds.$$

Como os elementos de Z verificam que $\phi \cdot \mathbf{n} = 0$, temos que

$$T_{\mathbf{u}}(\phi) = \int_{\Gamma} (\mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) \cdot \phi ds.$$

Como esta igualdade é válida para todo $\phi \in Z$, segue-se que

$$T_{\mathbf{u}}(\phi) = \mathbf{g} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \text{ em } Z'.$$

Observação 2.21. *Notemos que para demonstrar a existência de uma solução fraca do Problema 2.76, foi necessária a hipótese da regularidade do domínio, isto é, $\Gamma \in C^{1,1}$.*

No caso de um domínio Ω do tipo CASO 1, a pergunta que surge é se existe uma função $\tilde{\phi} \in H^2(\Omega)$ tal que $\tilde{\phi} = 0$ sobre Γ , $\partial_{\mathbf{n}} \tilde{\phi} = \phi$ sobre Γ , com $\tilde{\phi} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Esta condição a princípio não é verificada globalmente. Neste caso, somente podemos dar significado às condições de contorno nas partes regulares da fronteira Γ . Isto é possível graças aos resultados de Agmon-Douglis-Nirenberg, [2, 3]. Nesses trabalhos se demonstra a regularidade de uma solução num domínio através da eleição dum sistema de cartas locais, que vão localizando vizinhanças do interior do domínio ou da sua fronteira. Portanto, escolhemos somente aquelas vizinhanças que correspondam às regiões interiores e aquelas partes da fronteira nas quais ha regularidade do tipo $C^{1,1}$.

Para dar sentido às condições de fronteira do tipo Dirichlet em Γ_1 para a temperatura, quando Ω é do tipo CASO 2, definimos o operador $D_{\theta} : H^{1/2}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$D_{\theta}(\phi) = -\chi(\theta, \Delta\psi) - b(\mathbf{u}, \psi, \theta) - (h, \psi), \quad (2.79)$$

onde $\psi = \psi(\phi) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é a única solução fraca do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi = 0, & \text{em } \Omega, \\ \psi = 0, & \text{sobre } \Gamma, \\ \chi \partial_{\mathbf{n}} \psi = -\phi, & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \partial_{\mathbf{n}} \psi = 0, & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.80)$$

Pode ser verificado que D_θ é um operador linear contínuo. Notemos que se $(\mathbf{u}, \theta)$ é solução fraca de (2.1) temos

$$D_\theta(\phi) = \int_{\Gamma_1} \theta \cdot \phi ds, \quad \forall \phi,$$

por isso, denotamos este operador como o operador traço generalizado sobre Γ_1 . Tomando $\psi = \psi(\phi)$ como função teste em (2.10) obtemos

$$D_\theta(\phi) = \int_{\Gamma_1} \xi \cdot \phi ds, \quad \forall \phi,$$

assim, $D_\theta = \xi$ como elementos de $(H^{1/2}(\Gamma_1))'$.

Observação 2.22. *Análogo ao problema (2.76), para provar a existência de uma solução fraca para o problema (2.80), foi necessária regularidade de classe $C^{1,1}$ na fronteira do domínio. Portanto, em domínios do tipo CASO 1, somente podemos dar significado às condições de fronteira do tipo Dirichlet em Γ_1 para a temperatura, nas partes regulares da fronteira.*

Para Ω do tipo CASO 2, podemos dar um significado à condição de fronteira do tipo Neumann para a temperatura, definindo o operador $N_\theta : H^{3/2}(\Gamma_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$N_\theta(\phi) = -\chi(\theta, \Delta\psi) - b(\mathbf{u}, \psi, \theta) - (h, \psi), \quad (2.81)$$

onde $\psi = \psi(\phi) \in H^2(\Omega)$ é a única solução fraca do problema

$$\begin{cases} \Delta^2\psi &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \chi\psi &= \phi, \text{ sobre } \Gamma_2, \\ \psi &= 0, \text{ sobre } \Gamma_1, \\ \partial_{\mathbf{n}}\psi &= 0, \text{ sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (2.82)$$

Pode ser verificado que N_θ é um operador linear contínuo. Notemos que se $(\mathbf{u}, \theta)$ é solução fraca de (2.1) temos

$$N_\theta(\phi) = \int_{\Gamma_2} \partial_{\mathbf{n}}\theta \cdot \phi ds, \quad \forall \phi,$$

por isso, denotamos este operador como o operador traço normal generalizado sobre Γ_1 . Tomando $\psi = \psi(\phi)$ como função teste em (2.10) obtemos

$$N_\theta(\phi) = \langle \zeta, \phi \rangle_{H^{-3/2}(\Gamma_2), H^{3/2}(\Gamma_2)}, \quad \forall \phi \in H^{3/2}(\Gamma_2),$$

portanto, $N_\theta = \zeta$ como elementos de $(H^{3/2}(\Gamma_2))'$.

Observação 2.23. *Análogo ao Problema (2.76), Problema (2.80), para provar a existência de uma solução fraca para o problema (2.82), foi necessária regularidade de classe $C^{1,1}$ na fronteira do domínio. Portanto, em domínios do tipo CASO 1, somente podemos dar significado às condições de fronteira do tipo Neumann para a temperatura sobre Γ_2 , nas partes regulares da fronteira.*

CAPÍTULO 3

Soluções periódicas brandas e fortes para as equações de Boussinesq

...We reflect that the majorities of the ideas we deal with were conceived by others, often centuries ago. In a great measure it is really the intelligence of other people that confronts us in science.

Ernst Mach

3.1 Introdução

Consideremos um fluido viscoso dentro de um domínio Ω do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. As equações de Boussinesq no caso evolutivo, descrevem a evolução da temperatura e o campo de velocidade de um fluido newtoniano viscoso incompressível. Devido à aproximação de Boussinesq (Chandrasekhar [18], Joseph [64]), variações da densidade podem ser ignoradas exceto no termo gravitacional, no qual podem ser assumidas sendo proporcionais às variações de temperatura. Então, em forma adimensional, a relação entre o campo de velocidade $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$,

a pressão $p(x, t) \in \mathbb{R}$ e a temperatura $\theta(x, t) \in \mathbb{R}$ pode ser descrita pelo seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = \beta \theta g + f_1, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi \Delta \theta + (u \cdot \nabla) \theta = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

$$u = 0 \text{ sobre } \partial \Omega \quad (3.4)$$

$$\theta = 0 \text{ sobre } \partial \Omega, \quad (3.5)$$

onde g representa o campo gravitacional em x , f a referência de temperatura e f_1 uma outra força externa que atua no sistema. ρ, ν, β, χ são constantes físicas positivas as quais representam, respectivamente, a densidade, a viscosidade cinemática, o coeficiente de expansão de volume e a conductância térmica. A equação (3.1) representa a lei de conservação do momentum, a equação (3.2) indica a incompressibilidade do fluido e a equação (5.1) representa a equação de evolução para a temperatura. Sem perda de generalidade, ao longo deste capítulo assumiremos que as constantes são iguais a um. Para evitar complexidade técnica no estudo do sistema (3.1)-(3.5) assumiremos que $f_1 \equiv 0$. Para forças f_1 , que não sejam nulas, nossos argumentos continuam válidos fazendo as respectivas modificações.

Consideráveis avanços têm sido feitos na análise matemática do sistema (3.1)-(3.5); por exemplo, no trabalho [23] se estuda o problema de Boussinesq de evolução em um domínio que depende do tempo. Se prova a existência de soluções fracas e a unicidade num domínio bidimensional. Em [89] se estuda a existência e unicidade de soluções locais e globais fortes em domínios não limitados de classe C^2 . No trabalho [53] se estuda a possível unicidade da solução fraca colocando hipóteses extras na pressão para o problema de Cauchy. Em [52] se demonstra a existência e unicidade de soluções fortes do problema de Cauchy, isto é, do problema evolutivo em $\mathbb{R}^3$. Também se mostram taxas de decaimento para a solução desde que as forças externas possuam os respectivos decaimentos. As ferramentas utilizadas foram linearização, teoria do potencial e equações integrais. Citamos também os trabalhos de Morimoto [90], [91]. Em [90] se estuda a existência de soluções fracas para o modelo de Boussinesq através do método de Galerkin e em [91] se analisa a existência de soluções reprodutivas para este modelo. Dentro da teoria L^2 , no artigo [35] se investigou a existência

de soluções com dado inicial em L^2 (resp. $W^{1,2}$) para o caso $n = 2$ (resp. $n = 3$) e discutiu a existência global de atratores. No que respeita à teoria L^p , no artigo [17] se constroem soluções de classe $L^p(0, T; L^q(\mathbb{R}^n))$ com expoentes convenientes p e q usando teoria de operadores integrais. Hishida [58] usando teoria de semigrupos, estudou a existência e unicidade de soluções fortes com valores em $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$ (Ω domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) quando o dado inicial não é necessariamente suave. Na teoria de espaços L^p fracos, Hishida [59] estudou o problema de convecção em um domínio exterior do $\mathbb{R}^3$; no mesmo artigo, uma classe de soluções estacionárias é dada. No trabalho [97], é apresentado um estudo sobre a existência de soluções reprodutivas para o modelo em questão, em domínios exteriores usando o Método de Imersão de domínios em conjunto com o método de Galerkin, argumentos de compacidade e de energia.

Entretanto, o estudo de soluções periódicas no tempo do sistema (3.1)-(3.5) não tem sido investigado em domínios não limitados; além disso, convém notar que mesmo em domínios limitados, a única técnica usada até agora para o estudo da existência de soluções periódicas é basicamente o método de Galerkin. A proposta do presente capítulo é provar a existência, unicidade e estabilidade de soluções periódicas brandas e fortes para o problema (3.1)-(3.5) usando como base a Teoria de semigrupos em espaços de Lorentz.

A existência de soluções tempo-periódicas fortes para as equações de Navier-Stokes em domínios não limitados têm sido investigado por Kozono and Nakao [69], Maremonti [85],[86] e Taniuchi [125]. Em particular, Maremonti [85] provou a existência de uma solução tempo-periódica sobre o espaço todo $\mathbb{R}^3$ para uma força externa suficientemente pequena. O mesmo problema, no semi-espaço $\mathbb{R}_+^3$ foi considerado por Maremonti em [86]. Kozono and Nakao [69], fazendo uso das estimativas $L^p - L^r$ para o semigrupo gerado pelo operador de Stokes, construíram soluções periódicas no tempo para forças tempo-periódicas sendo suficientemente pequenas e a estabilidade deste tipo de soluções foi analisada posteriormente por Taniuchi em [125]. Convém notar que nestes trabalhos, a análise é feita unicamente na teoria dos espaços L^p fortes. Yamasaki [131] analisou o mesmo problema estudado em [69] dentro da teoria de espaços de Morrey. Outras referencias, incluindo resultados para domínios limitados podem ser encontradas em [85], [86], [69]. Lembremos aqui, que a existência de soluções periódicas fortes para o caso Navier- Stokes em domínios arbitrários do $\mathbb{R}^3$, não limitados, é ainda uma

questão em aberto.

O restante deste capítulo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2, depois de alguns preliminares, estabelecemos nossos principais resultados. Na Seção 3 provamos os resultados de existência e unicidade de soluções periódicas brandas e fortes e finalmente, na Seção 4, faremos um estudo sobre a estabilidade das soluções periódicas anteriormente obtidas.

3.2 Preliminares e resultados

Iniciamos apresentando alguns preliminares sobre os espaços de Lorentz os quais serão a base de nossa análise ao longo deste capítulo. O leitor interessado numa análise detalhada e profunda sobre os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}(\Omega)$ é referido a ver, por exemplo, [13], [61], [123]. Para cada função Lebesgue mensurável f definida sobre um domínio Ω do $\mathbb{R}^n$, definimos a função distribuição de f por

$$\lambda_f(s) = m(\{x \in \Omega : |f(x)| > s\}), \quad s > 0,$$

onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. A cada função $\lambda_f(s)$ associamos a função

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}, \quad t > 0.$$

As funções λ_f e f^* são não-negativas e não-crescentes. Se λ_f for continua e estritamente decrescente, então f^* é a função inversa de λ_f . O espaço de Lorentz $L^{(p,q)} = L^{(p,q)}(\Omega)$ é a coleção de todas as f tais que $\|f\|_{pq}^* < \infty$, onde

$$\|f\|_{pq}^* = \begin{cases} \left(\frac{p}{q} \int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q dt / t \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < p < \infty, 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & 0 < p \leq \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Observemos que $L^p(\Omega) = L^{(p,p)}(\Omega)$. No caso $q = \infty$, $L^{(p,\infty)}(\Omega)$ são chamados os espaços de Marcinkiewicz ou espaços L^p fracos. Lembremos também que são válidas as relações, $L^{(p,q_1)}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^{(p,q_2)}(\Omega) \subset L^{(p,\infty)}(\Omega)$ para $0 < q_1 \leq p \leq q_2 \leq \infty$.

A expressão $\|f\|_{(p,q)}^*$ dá uma topologia natural para $L^{(p,q)}(\Omega)$ tal que $L^{(p,q)}(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico. Por outro lado, a desigualdade triangular não é verdadeira para $\|f\|_{(p,q)}^*$.

Um caminho natural de metrizar o espaço $L^{(p,q)}(\Omega)$ é definindo

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) \, ds, \quad \text{for } t > 0,$$

a qual pode ser computado como [61]

$$f^{**}(t) = \sup_{m(E) \geq t} \left\{ \frac{1}{m(E)} \int_E |f(x)| \, dx \right\}.$$

Assim, definimos a norma $\|f\|_{(p,q)}$ como

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\frac{p}{q} \int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)]^q dt / t \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{se } 1 < p < \infty, 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & , \text{ se } 1 < p \leq \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Os espaços $L^{(p,q)}$ dotados com esta norma $\|f\|_{(p,q)}$ são espaços de Banach e vale a seguinte relação

$$\|f\|_{(p,q)}^* \leq \|f\|_{(p,q)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{(p,q)}^*,$$

para $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Observemos que na definição de $\|f\|_{(p,q)}$, o caso $p = 1$ tem sido excluído; embora as expressões façam sentido, elas não definem uma norma. Uma definição alternativa da norma $\|f\|_{(p,\infty)}$ é (veja [8]):

$$\|f\|_{(p,\infty)} = \sup_{m(E) < \infty} \left\{ m(E)^{-1/p'} \int_E |f(x)| \, dx \right\},$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Duais de espaços de Lorentz [61] são extensões naturais da propriedade de dualidade dos espaços L^p . O espaço conjugado do $L^{(p,1)}(\Omega)$ é $L^{(p',\infty)}(\Omega)$ e o espaço conjugado do $L^{(p,q)}(\Omega)$ é $L^{(p',q')}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, e assim, estes espaços são reflexivos.

Pelas mesmas razões que o espaço $L^1(\Omega)$ não é o espaço conjugado do $L^\infty(\Omega)$, $L^{(p,1)}(\Omega)$ não é o espaço conjugado do $L^{(p',\infty)}(\Omega)$ ([61], p.261). Notemos que $C_0^\infty(\Omega)$, o qual consiste de todas as funções C^∞ com suporte compacto, não é denso em $L^{(p,\infty)}(\Omega)$.

Proposição 3.1. (*Desigualdade de Hölder generalizada*) [99]. *Seja $1 < p_1, p_2, r < \infty$. Seja $f \in L^{(p_1,q_1)}(\Omega)$ e $g \in L^{(p_2,q_2)}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$, então o produto $h = fg$ pertence a $L^{(r,s)}(\Omega)$ onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, e $s \geq 1$ é qualquer numero tal que $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}$. Além disso,*

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r) \|f\|_{(p_1,q_1)} \|g\|_{(p_2,q_2)}. \quad (3.6)$$

Os espaços de Lorentz tem a mesma relação de escala que os espaços L^p , isto é, para todo $k > 0$ tem-se que

$$\|f(kx)\|_{(p,q)}^* = k^{\frac{-n}{p}} \|f\|_{(p,q)}^*.$$

Os espaços $L^{(p,\infty)}$ têm a vantagem de serem uma das extensões mais naturais dos espaços L^p que contem, funções homogêneas de grau $\frac{-n}{p}$; por exemplo, sobre o espaço $\mathbb{R}^3$, um típico exemplo de tais funções é dado por qualquer combinação linear dos campos vetoriais as quais são funções homogêneas de grau -1 e verificam $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, (veja [49]).

Estas funções estão no espaço $L^{(3,\infty)}(\mathbb{R}^3)$ mas elas não pertencem ao espaço $L^3(\mathbb{R}^3)$. Este fato é chave na hora de resolver o problema de encontrar *soluções auto-semelhantes* (veja [7]) de sistemas de equações como por exemplo o caso das equações de Navier-Stokes, o que constitui uma das motivações do estudo de soluções de equações do tipo Navier-Stokes no contexto dos espaços de Lorentz.

Seguidamente introduziremos a notação usada ao longo do capítulo, sobre os espaços de divergência nula. Denotamos por $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ o conjunto de todos os campos com divergente nulo, cujas componentes são elementos de $C_0^\infty(\Omega)$. Por $L_\sigma^r(\Omega)$, $1 < r < \infty$, denotamos o fecho de $C_{0,\sigma}^\infty$ na norma L^r . Se X é um espaço de Banach, denotamos por $BC^m([t_1, t_2]; X)$ o conjunto de todas as funções $u \in C^m([t_1, t_2]; X)$ tais que $\sup_{t_1 < t < t_2} \|d^m u(t)/dt^m\|_X < \infty$. Lembremos a decomposição de Helmholtz:

$$L^r(\Omega) = L_\sigma^r(\Omega) \oplus G^r(\Omega), \quad 1 < r < \infty,$$

onde $G^r(\Omega) = \{\nabla p \in L^r(\Omega) : p \in L_{loc}^r(\overline{\Omega})\}$ (veja [41]). Denotamos por P_r , ou simplesmente por P , o operador projeção de L^r sobre L_σ^r e por $A_r = -P_r \Delta$, ou simplesmente por $A = -P \Delta$ o operador de Stokes com domínio $D(A_r) = \{u \in H^{2,r}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\} \cap L_\sigma^r$. Os adjuntos de L_σ^r e A_r são $L^{r'}$ e $A_{r'}$, respectivamente, onde $1/r + 1/r' = 1$.

Denotamos por B_q , ou simplesmente por B o operador de Laplace em $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, com condição de fronteira do tipo Dirichlet sendo nula: $B_q = -\Delta$ com domínio $D(B_q) = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$. Sabemos que $-A_r$, $-B_q$ são geradores infinitesimais de semigrupos analíticos $\{e^{-tA_r}\}_{t \geq 0}$, $\{e^{-tB_q}\}_{t \geq 0}$, de classe C_0 em $L_\sigma^r(\Omega)$, $L^q(\Omega)$, respectivamente (veja por exemplo, [46],[124]). Borchers and Miyakawa [16] estabeleceram a seguinte decomposição de Helmholtz dos espaços de Lorentz spaces. Estendemos P_r para um operador limitado sobre $L^{(r,d)}(\Omega)$, o

qual denotamos por $P_{r,d}$. Seja $L_\sigma^{(r,d)}(\Omega) = \text{Imagen}(P_{r,d})$ e $G^{(r,d)}(\Omega) = \text{Nucleo}(P_{r,d})$. Então,

$$L^{(r,d)}(\Omega) = L_\sigma^{(r,d)}(\Omega) \oplus G^{(r,d)}(\Omega), \quad (3.7)$$

e

$$L_\sigma^{(r,d)}(\Omega) = \{u \in L^{(r,d)}(\Omega) : \nabla \cdot u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega=0}\}, \quad (3.8)$$

$$G^{(r,d)}(\Omega) = \{\nabla v \in L^{(r,d)}(\Omega) : v \in L_{loc}^{(r,d)}(\bar{\Omega})\}. \quad (3.9)$$

Em vista de [16], os operadores A e B definem, respectivamente, operadores fechados em $L_\sigma^{(r,d)}(\Omega)$ e $L^{(r,d)}(\Omega)$ com domínios

$$D_{r,d}(A) = \{u \in L_\sigma^{(r,d)}(\Omega) : \nabla u, D^2u \in L^{(r,d)}(\Omega), u|_{\partial\Omega=0}\},$$

$$D_{r,d}(B) = \{w \in L^{(r,d)}(\Omega) : \nabla w, D^2w \in L^{(r,d)}(\Omega), w|_{\partial\Omega=0}\},$$

e $-A, -B$ geram semigrupos uniformemente limitados sobre $L_\sigma^{(p,d)}(\Omega)$ e $L^{(p,d)}(\Omega)$, respectivamente. Não obstante, contrario ao que acontece com os espaços $L_\sigma^p(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, estes semigrupos não são fortemente contínuos em $t = 0$ se $d = \infty$ o que cria dificuldades adicionais na análise de nosso problema.

Ao longo deste capítulo, vamos fazer as seguintes suposições sobre o domínio Ω .

Condição 1.

(CASO 1). Ω é o domínio todo $\mathbb{R}^n$ ou o semi-espaço $\mathbb{R}_+^n$, onde $n \geq 3$.

(CASO 2). Ω é um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe $C^{2+\mu}(\mu > 0)$, onde $n \geq 4$.

Aplicando o operador projeção nas equações (3.1)-(3.2), podemos tratar o problema (3.1)-(3.5) em espaços de Lorentz convenientes como sendo o seguinte sistema de evolução semi-linear do tipo parabólico:

$$u_t + Au + P(u \cdot \nabla u) = P(\theta g), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

$$\theta_t + B\theta + (u \cdot \nabla \theta) = f, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

O sistema (3.10)-(3.11) tem associado o seguinte sistema de equações integrais no espaço $L_\sigma^{(r,\infty)}(\Omega) \times L^{(\tilde{r},\infty)}(\Omega)$

$$u(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla u)(s) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(\theta g)(s) ds, \quad (3.12)$$

$$\theta(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla \theta)(s) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} f(s) ds. \quad (3.13)$$

Neste caso, diremos que (u, θ) é uma solução periódica branda para (3.10)-(3.11).

Através deste capítulo vamos impor as seguintes hipóteses sobre a força externa f e sobre o campo g :

Condição 2.

Os expoentes $r, \tilde{r}$ e $q, \tilde{q}$ em concordância com a condição 1, satisfazem:

(CASO 1). $2 < r, \tilde{r} < n, \frac{n}{2} < q, \tilde{q} < n, \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}} < \min\{\frac{2}{n} - \frac{1}{q}, \frac{2}{n} - \frac{1}{\tilde{q}}\}.$

(CASO 2.) $\frac{2n}{(n-1)} \leq r, \tilde{r} < n, \frac{n}{2} < q, \tilde{q} < n, \frac{1}{r} - \frac{1}{\tilde{r}} < \min\{\frac{2}{n} - \frac{1}{q}, \frac{2}{n} - \frac{1}{\tilde{q}}\}.$

Para cada $r, \tilde{r}$ e $q, \tilde{q}$ assumimos que f é um elemento de

$$BC(\mathbb{R}, L^{(\tilde{p}, \infty)}(\Omega) \cap L^{(\tilde{l}, \infty)}(\Omega)), \quad (3.14)$$

para $1 < \tilde{p}, \tilde{l} < \infty$ com $1/\tilde{r} + 2/n < 1/\tilde{p}$, $1/\tilde{q} < 1/\tilde{l} < 1/\tilde{q} + 1/n$ desde que $n \geq 4$ nos dois CASOS (1,2). (Notemos que sendo $n < 2\tilde{q}, \tilde{r} < n$, a desigualdade $1/\tilde{q} < 1/\tilde{l} < 1/\tilde{q} + 1/n$ implica que $1/\tilde{l} < 2/n + 1/\tilde{r}$).

Se $n = 3$, no CASO 1, assumimos que f satisfaz

$$f \in BC(\mathbb{R}, L^{(\tilde{l}, \infty)}(\Omega)) \text{ tal que } f(s) = B_{\tilde{p}, \infty}^\delta h(s) \text{ para algum } h \in BC(\mathbb{R}, D(B_{\tilde{p}, \infty}^\delta)) \quad (3.15)$$

para $1 < \tilde{p} < \min\{\tilde{r}, \tilde{q}\}$ e $\delta > 0$ satisfazendo $3/2\tilde{p} + \delta > 1 + \max\{1 + 3/2\tilde{r}, 1/2 + 3/2\tilde{q}\}$ e $1/\tilde{q} < 1/\tilde{l} < 1/\tilde{q} + 1/3$.

Com respeito ao campo g fazemos as seguintes suposições: $g \in L^{(a, \infty)}(\Omega)^n \cap L^{(b, \infty)}(\Omega)^n$ onde a e b são tais que $1/a > 2/n + 1/r - 1/\tilde{r}$, $1/b < 1/n + 1/q - 1/\tilde{r}$, ($b > 1$).

Observação 3.2. A condição (3.15) pode ser substituída por $f(s) = \nabla \cdot G(s)$, $G(s) = (G_1, \dots, G_n) \in BC(\mathbb{R}; L^{(\tilde{p}, \infty)}(\Omega))^n$ com $\nabla G(t) \in BC(\mathbb{R}; L^{(\tilde{p}, \infty)}(\Omega))^{n \times n}$ para $1 < \tilde{p} < \infty$ com $1/\tilde{r} + 1/3 < 1/\tilde{p}$. Isto implica que $f(s) = \Delta h(s)$ para algum $h \in BC(\mathbb{R}; D(B_{\tilde{p}, \infty}))$.

Observação 3.3. No CASO 2, assumimos que $n \geq 4$ quando Ω é um domínio exterior. Isto se deve à restrição sobre as estimativas do gradiente para o semigrupo gerado pelo operador de Stokes em $L^{(p, \infty)}$. (Veja Lema 3.15).

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 3.4. *Sejam Ω satisfazendo a Condição 1 e f, g satisfazendo a Condição 2 acima, com f sendo uma função periódica com período $\tau > 0$, isto é, para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(t + \tau)$. Então existem constantes positivas β_1, β_2 , tais que se*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{p}, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{l}, \infty)} \leq \beta_1, \quad n \geq 4, \quad \text{nos CASOS 1 e 2,}$$

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|h(s)\|_{(\tilde{p}, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{l}, \infty)} \leq \beta_1, \quad n = 3, \quad \text{no CASO 1,}$$

$$\|g\|_{(b, \infty)} + \|g\|_{(a, \infty)} \leq \beta_2, \quad \text{nos CASOS 1 e 2,}$$

então existe uma solução periódica branda (u, θ) de (3.12), (3.13) tal que $u \in BC(\mathbb{R}; L_\sigma^{(r, \infty)})^n$, $\theta \in BC(\mathbb{R}; L^{(\tilde{r}, \infty)})$, com $\nabla u \in BC(\mathbb{R}; L^{(q, \infty)})^{n \times n}$, $\nabla \theta \in BC(\mathbb{R}; L^{(\tilde{q}, \infty)})^n$. Esta solução é periódica com o mesmo período τ da força externa. Além disso, se as grandezas

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla u(s)\|_{(q, \infty)}, \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\theta(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)},$$

são suficientemente pequenas, a solução é única nesta classe de espaços funcionais.

Teorema 3.5. *Sob as hipóteses do Teorema 3.4, se f é Holder continua em $\mathbb{R}$ com valores em $L^{(n, \infty)}(\Omega)$ e $g \in L^{(n, \infty)}(\Omega)^n$, então a solução periódica dada pelo Teorema 3.4 satisfaz para cada $n < r^* < q^* = nq/(n - q)$:*

1. $u \in BC(\mathbb{R}; L_\sigma^{(n, \infty)})^n \cap C^1(\mathbb{R}; L_\sigma^{r^*})^n$, $\theta \in BC(\mathbb{R}; L^{(n, \infty)}) \cap C^1(\mathbb{R}; L^{r^*})$.
2. $Au \in C(\mathbb{R}; L_\sigma^{r^*})^n$, $B_n \theta \in C(\mathbb{R}; L^{r^*})$.
3. As equações (3.10)-(3.11) são satisfeitas em $(L_\sigma^{r^*})^n, L^{r^*}$, respectivamente, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 3.6. *Nossos resultados são válidos para domínios Ω limitados. Além disso, a versão dos Teoremas acima é particularmente válida nos espaços L^p (fortes). Isto leva à obtenção de soluções periódicas para o sistema de Boussinesq ao mesmo nível de regularidade das soluções periódicas obtidas por Kozono e Nakao [70] para o caso das equações de Navier-Stokes. Notamos também que neste caso, se Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, ($n \geq 2$), os nossos resultados continuam válidos e as condições de regularidade sobre as forças podem ser enfraquecidas; na verdade, neste caso basta tomar $f \in L^r, r > n/2, g \in L^p, p > n$ onde a dimensão n pode ser $n \geq 2$ e podemos obter soluções (u, θ) de (3.1)-(3.5) na classe $u \in BC(\mathbb{R}; D(A_r^{1/2}))^n$, $\theta \in BC(\mathbb{R}; D(B_r^{1/2}))$.*

Observação 3.7. *Notemos que a condição 2 não impede que $r = \tilde{r}$ e $q = \tilde{q}$. Isto permitirá, em particular, obter soluções com o mesmo grau de regularidade tanto para o campo velocidade como para a função temperatura.*

Com respeito à estabilidade das soluções periódicas do sistema de Boussinesq (3.1)-(3.5), assumimos que $(u(x,0), \theta(x,0))$ é inicialmente perturbado por $(u_\epsilon, \theta_\epsilon)$. Assim, o sistema perturbado é governado pelo seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_t - \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla q &= wg, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ w - \Delta w + (v \cdot \nabla)w &= f, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ w &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ v(x,0) &= u(x,0) + u_\epsilon(x), \quad x \in \Omega, \\ w(x,0) &= w(x,0) + \theta_\epsilon(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Mostraremos que se a solução periódica (u, θ) e a perturbação inicial $(u_\epsilon, \theta_\epsilon)$ são ambos suficientemente pequenos nas normas dos espaços $BC(0, \infty; L^{(r, \infty)} \cap L^{(q^*, \infty)})$ e $L^{(n, \infty)}(\Omega)$, respectivamente, então existe uma única solução forte global (v, w) de (3.16) tal que as normas $\|v(t) - u(t)\|_p, \|w(t) - \theta(t)\|_p$ com $n < p < \infty$, convergem para zero com certas taxas de decaimento quanto t tende ao ∞ .

Se (u, θ, p) e (v, w, q) são soluções de (3.1)-(3.5) e (3.16), respectivamente, então a tripla $(\tilde{u}, \tilde{\theta}, \tilde{p}) = (v - u, w - \theta, p - q)$ satisfaz o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} + (u \cdot \nabla)\tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla)u + (\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + \nabla \tilde{p} &= \tilde{\theta}g, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \operatorname{div} \tilde{u} &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \tilde{\theta}_t - \Delta \tilde{\theta} + (u \cdot \nabla)\tilde{\theta} + (\tilde{u} \cdot \nabla)\theta + (\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{\theta} &= 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \tilde{u} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ \tilde{\theta} &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ \tilde{u}(x,0) &= u_\epsilon(x), \quad x \in \Omega, \\ \tilde{\theta}(x,0) &= \theta_\epsilon(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Assim nosso problema de estabilidade pode ser analisado estudando a existência de soluções globais fortes do sistema (3.17) e seu comportamento assintótico. Notemos que se $(u, \theta) =$

$(0, 0)$, o problema (3.17) coincide com o problema de valor inicial para o sistema de Boussinesq. Inicialmente, provaremos a existência global de uma solução branda com uma certa propriedade de decaimento. Posteriormente mostraremos que essa solução branda pode ser identificada localmente no tempo com a solução forte do problema. Nossa definição de solução forte e solução branda para o problema de valor inicial são dadas a seguir:

Definição 3.8. *Seja $u_\epsilon \in L_\sigma^{(n,\infty)}$, $\theta_\epsilon \in L^{(n,\infty)}$. Um par $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ definido sobre $(0, T) \times \Omega$, com $0 < T \leq \infty$ é dito uma solução forte do sistema (3.17), de classe $S_{r^*}(0, T)$, $n < r^* < \infty$ com condição inicial sendo $(u_\epsilon, \theta_\epsilon)$ se*

1. $\tilde{u} \in BC_w([0, T]; L_\sigma^{(n,\infty)})^n \cap C^1((0, T); L_\sigma^{r^*})^n$, $\tilde{\theta} \in BC_w([0, T]; L^{(n,\infty)}) \cap C^1((0, T); L^{r^*})$,
2. $A\tilde{u} \in C((0, T); L_\sigma^{r^*})^n$, $B\tilde{\theta} \in C((0, T); L^{r^*})$,
3. $\tilde{u}_t + A\tilde{u} + P((\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)\tilde{u}) = P(wg)$, em $L_\sigma^{r^*}$, $x \in \Omega$, $0 < t < T$,
4. $\tilde{\theta}_t + B\tilde{\theta} + (\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{\theta} + (u \cdot \nabla)\tilde{\theta} + (\tilde{u} \cdot \nabla)\theta = f$ em L^{r^*} , $x \in \Omega$, $0 < t < T$,

onde BC_w denota a classe de funções fracamente-* contínuas com

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\tilde{u}(t), \phi) = (u_\epsilon, \phi), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} (\tilde{\theta}(t), \varphi) = (\theta_\epsilon, \varphi),$$

for all $\phi \in L_\sigma^{(n',1)}(\Omega)^n$, $\varphi \in L^{(n',1)}(\Omega)$, $n' = n/(n-1)$.

A seguir damos a definição de solução branda de (3.17). Nossa definição é essencialmente devida a [71].

Definição 3.9. *Seja $(u_\epsilon, \theta_\epsilon) \in L_\sigma^{(n,\infty)} \times L^{(n,\infty)}$ e $n < \delta < \infty$. Um par $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ de funções mensuráveis sobre $\Omega \times (0, T)$, $0 < T \leq \infty$, é dito uma solução branda de (3.17) na classe $S_\delta(0, T)$ se ela satisfaz*

- (i) $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in BC_w([0, T]; L_\sigma^{(n,\infty)})^n \times BC_w([0, T]; L^{(n,\infty)})$,
- (ii) $t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{\delta})}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in BC([0, T]; L_\sigma^p)^n \times BC([0, T]; L^p)$,

para $n < p < \delta$. Além disso, para todo $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$, $\varphi \in C_0^\infty$ e todo $0 < t < T$, as funções $\tilde{u}, \tilde{\theta}$ satisfazem

$$\begin{aligned} (\tilde{u}(t), \phi) &= (e^{-tA}u_\epsilon, \phi) + \int_0^t (\tilde{u} \otimes \tilde{u}(s), \nabla e^{-(t-s)A}\phi)ds + \int_0^t (\tilde{u} \otimes u(s), \nabla e^{-(t-s)A}\phi)ds + \\ &+ \int_0^t (u \otimes \tilde{u}(s), \nabla e^{-(t-s)A}\phi)ds + \int_0^t (e^{-(t-s)A}\tilde{\theta}g(s), \phi)ds, \\ (\tilde{\theta}(t), \varphi) &= (e^{-tB}\theta_\epsilon, \varphi) + \int_0^t (\tilde{\theta}\tilde{u}(s), \nabla e^{-(t-s)B}\varphi)ds + \int_0^t (\theta\tilde{u}(s), \nabla e^{-(t-s)B}\varphi)ds + \\ &+ \int_0^t (\tilde{\theta}u(s), \nabla e^{-(t-s)B}\varphi)ds. \end{aligned}$$

Observação 3.10. Podemos mostrar que se $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ é uma solução branda de (3.17) na classe $S_\delta(0, T)$, então as integrais do lado direito da definição 3.9 estão bem definidas e satisfazem a equação para toda $\phi \in L_\sigma^{(n',1)}$, $\varphi \in L^{(n',1)}$.

Provaremos os seguintes teoremas:

Teorema 3.11. (Existência) Seja $(u_\epsilon, \theta_\epsilon) \in L_\sigma^{(n,\infty)}(\Omega)^n \times L^{(n,\infty)}(\Omega)$ e (u, θ) a solução periódica dada pelo Teorema 3.4. Então existem constantes positivas η_0, η_1, η_2 tais que, se

$$\|g\|_{(n,\infty)} \leq \eta_0,$$

$$\|u_\epsilon\|_{(n,\infty)} + \|u\|_{BC((0,\infty);L^{(r,\infty)})} + \|u\|_{BC((0,\infty);L^{(q^*,\infty)})} \leq \eta_1, \quad q^* = nq/n - q,$$

$$\|\theta_\epsilon\|_{(n,\infty)} + \|\theta\|_{BC((0,\infty);L^{(\tilde{r},\infty)})} + \|\theta\|_{BC((0,\infty);L^{(q^*,\infty)})} \leq \eta_2, \quad q^* = nq/n - q,$$

então existe uma solution branda $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ de (3.17) na classe $S_{2n}(0, \infty)$ satisfazendo para cada $n < r < \infty$,

$$\|\tilde{u}(t)\|_p \leq ct^{\frac{-n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{p})}, \quad \|\tilde{\theta}(t)\|_p \leq ct^{\frac{-n}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{p})} \quad (3.18)$$

para $n < p \leq r$.

Teorema 3.12. Existe uma constante $k = k(n)$ tal que qualquer solução branda $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ de (3.17) na classe $S_{2n}(0, \infty)$ dada pelo Teorema 3.11 com

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{1}{4}} \max (\|\tilde{u}\|_{2n}, \|\tilde{\theta}\|_{2n}) \leq k, \quad (3.19)$$

é única.

Teorema 3.13. *Sob as hipóteses do Teorema 3.11, assumamos que (u, θ) é a solução forte de (3.1)-(3.5) em $(0, \infty)$ para g e f como no Teorema 3.5. Então a solução branda dada pelo Teorema 3.11 é uma solução forte do sistema (3.17) sobre $(0, \infty)$.*

Finalizamos esta seção relembrando a definição da função Beta, a qual será usada com frequência ao longo deste capítulo em cálculos de estimativas.

Definição 3.14. *Para todo $x, y > 0$, a Função Beta $B(x, y)$ é definida por*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Notemos que para todo $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &\leq \max(1, 2^{1-y}) \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} dt + \max(1, 2^{1-x}) \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{y-1} dt \\ &< 2\frac{1}{x}2^{-x} + 2\frac{1}{y}2^{-y} < \infty. \end{aligned}$$

3.3 Existência, unicidade e regularidade de soluções periódicas

Nesta seção provaremos o Teorema 3.4 e o Teorema 3.5. Ao longo deste capítulo, as letras c, C denotarão varias constantes. Em particular, $C = C(*, \dots)$ denotará constantes as quais dependem somente das quantidades que aparecem em parênteses. Iniciamos recordando o seguinte resultado que dá estimativas $L^{(r, \infty)} - L^{(p, \infty)}$ dos semigrupos $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}, \{e^{-tB}\}_{t \geq 0}$.

Lema 3.15. *[15], [16], [59] (1). Seja Ω como no CASO 1 da Condição 1 e A' o respectivo dual de A . Então*

$$\begin{aligned} \|e^{-tA'} \phi\|_{(r,1)} &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)} \|\phi\|_{(p,1)}, \quad 1 < p \leq r < \infty, \\ \|\nabla e^{-tA'} \phi\|_{(r,1)} &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)-1/2} \|\phi\|_{(p,1)}, \quad 1 < p \leq r < \infty, \\ \|e^{-tA} a\|_{(r,\infty)} &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)} \|a\|_{(p,\infty)}, \quad 1 < p \leq r < \infty, \\ \|\nabla e^{-tA} a\|_{(r,\infty)} &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)-1/2} \|a\|_{(p,\infty)}, \quad 1 < p \leq r < \infty, \end{aligned} \tag{3.20}$$

para todo $a \in L_\sigma^{(p,\infty)}$, $\phi \in L_\sigma^{(p,1)}$ e todo $t > 0$, onde $c = c(n, p, r)$.

(2). Seja Ω como no CASO 2 da Condição 1. Então

$$\begin{aligned} \|e^{-tA'}\phi\|_{(r,1)} &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)}\|\phi\|_{(p,1)}, \quad 1 < p \leq r < \infty, \\ \|\nabla e^{-tA'}\phi\|_{(r,1)} &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)-1/2}\|\phi\|_{(p,1)}, \quad 1 < p \leq r \leq n, \\ \|e^{-tA}a\|_{(r,\infty)} &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)}\|a\|_{(p,\infty)}, \quad 1 < p \leq r < \infty, \\ \|\nabla e^{-tA}a\|_{(r,\infty)} &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)-1/2}\|a\|_{(p,\infty)}, \quad 1 < p \leq r \leq n, \end{aligned} \quad (3.21)$$

para todo $a \in L_\sigma^{(p,\infty)}$, $\phi \in L_\sigma^{(p,1)}$ e todo $t > 0$, onde $c = c(n, p, r)$.

Com respeito a $r = \infty$, temos

Lema 3.16. [15], [19]

$$\|e^{-tA}a\|_\infty \leq c(p)t^{-n/2p}\|a\|_p, \quad 1 < p \leq 2n,$$

para toda $a \in L_\sigma^p$ and todo $t > 0$.

Observação 3.17. Estimativas similares são válidas para o semigrupo $\{e^{-tB}\}_{t \geq 0}$.

Observação 3.18. As estimativas anteriores são válidas em particular, para o caso dos espaços L^p (fortes). Veja, por exemplo, [65], [62], [44],[15], [14]. Estas estimativas são as seguintes:

- Seja Ω como no CASO 1 da Condição 1. Então

$$\begin{aligned} \|e^{-tA}a\|_r &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)}\|a\|_p, \quad 1 < p \leq r < \infty, \\ \|\nabla e^{-tA}a\|_r &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)-1/2}\|a\|_p, \quad 1 < p \leq r \leq \infty, \end{aligned}$$

para todo $a \in L_\sigma^p$ e todo $t > 0$, onde $c = c(n, p, r)$.

- Seja Ω como no CASO 2 da Condição 1. Então

$$\begin{aligned} \|e^{-tA}a\|_r &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)}\|a\|_p, \quad 1 < p \leq r < \infty, \\ \|\nabla e^{-tA}a\|_r &\leq ct^{-n/2(1/p-1/r)-1/2}\|a\|_p, \quad 1 < p \leq r \leq n, \end{aligned}$$

para todo $a \in L_\sigma^p$ e todo $t > 0$, onde $c = c(n, p, r)$.

Lema 3.19. [16],[59] *Seja Ω um domínio satisfazendo a Condição 1 e suponha que $1 < q < n$, $1 \leq d \leq \infty$ e $q^* = nq/(n - q)$. Se $\phi \in L^{(p,\infty)}(\Omega)$ para algum $p < \infty$ e $\nabla\phi \in L^{(q,d)}(\Omega)^n$, então $\phi \in L^{(q^*,d)}(\Omega)$ e vale a estimativa*

$$\|\phi\|_{(q^*,d)} \leq C \|\nabla\phi\|_{(q,d)},$$

com $C > 0$ independente de ϕ .

Denotamos por X o espaço das funções escalares $\{u \in BC(\mathbb{R}; L^{(\tilde{r},\infty)}) : \nabla u \in BC(\mathbb{R}; L^{(\tilde{q},\infty)})^n\}$ com a norma em $\|\cdot\|_X$ definida como

$$\|u\|_X \equiv \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(\tilde{r},\infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla u(s)\|_{(\tilde{q},\infty)}.$$

Também definimos o conjunto Y como sendo o espaço de funções vetoriais $Y \equiv \{u \in BC(\mathbb{R}; L^{(r,\infty)})^n : \nabla u \in BC(\mathbb{R}; L^{(q,\infty)})^{n \times n}\}$ com a norma $\|\cdot\|_Y$ definida por

$$\|u\|_Y \equiv \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r,\infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla u(s)\|_{(q,\infty)}.$$

Estes espaços são espaços de Banach. Definimos os seguintes operadores F_1 e G em $Y \times Y$ e $Y \times X$, respectivamente, por

$$F_1(u, v)(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla v)(s) ds, \quad (3.22)$$

$$G(u, \theta)(t) = - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla \theta)(s) ds. \quad (3.23)$$

3.3.1 Soluções periódicas brandas. Prova do Teorema 3.4

Para provar a existência de soluções periódicas para o sistema integral (3.12),(3.13) usamos o seguinte esquema de aproximações:

$$\theta_0(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} f(s) ds, \quad (3.24)$$

$$u_0(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(\theta_0 g)(s) ds, \quad (3.25)$$

$$u_{m+1}(t) = F(u_m, \theta_m)(t), \quad (3.26)$$

$$\theta_{m+1}(t) = \theta_0(t) + G(u_m, \theta_m)(t), \quad (3.27)$$

onde,

$$\begin{aligned} F(u_m, \theta_m)(t) &= - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u_m \cdot \nabla u_m)(s) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(\theta_m g)(s) ds, \\ G(u_m, \theta_m)(t) &= - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u_m \cdot \nabla \theta_m)(s) ds. \end{aligned}$$

Observação 3.20. Quando f_1 é não nulo, na seqüência acima definimos u_0 e u_{m+1} como sendo $u_0(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(f_1) ds$ e $u_{m+1}(t) = u_0(t) + F(u_m, \theta_m)(t)$.

Primeiramente encontramos algumas estimativas para as aproximações acima para o qual é necessário o uso dos seguintes lemas.

Lema 3.21. *Seja $r, \tilde{r}, q$ e $\tilde{q}$ como no Teorema 3.4. Então temos que*

$$\begin{aligned} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|F_1(u, v)\|_{(r, \infty)} &\leq c_1 \left(\sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|v(s)\|_{(r, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla v(s)\|_{(q, \infty)} \right), \\ \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla F_1(u, v)\|_{(q, \infty)} &\leq c_1 \left(\sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla v(s)\|_{(q, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla u(s)\|_{(q, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla v(s)\|_{(q, \infty)} \right), \\ \sup_{s \in \mathbb{R}} \|G(u, \theta)\|_{(\tilde{r}, \infty)} &\leq c_2 \left(\sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\theta(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} \right), \\ \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla G(u, \theta)\|_{(\tilde{q}, \infty)} &\leq c_2 \left(\sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla u(s)\|_{(q, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} \right), \end{aligned}$$

para todo $u, v \in Y$, $\theta \in X$ onde $c_1 = c_1(n, r, q)$, $c_2 = c_2(n, \tilde{r}, \tilde{q})$.

Demonstração:. A prova é uma aplicação do Lema 3.15 e da desigualdade de Hölder generalizada. De fato,

$$\begin{aligned} G(u, \theta)(t) &= - \int_{-\infty}^{t-1} e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla \theta)(s) ds - \int_{t-1}^t e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla \theta)(s) ds \\ &= G_1(t) + G_2(t). \end{aligned}$$

Então para todo $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} |(G_1(t), \psi)| &\leq \int_{-\infty}^{t-1} \|\nabla e^{-(t-s)B} \psi\|_{((r\tilde{r}/(r+\tilde{r}))', 1)} \|\theta u\|_{(r\tilde{r}/(r+\tilde{r}), \infty)} ds \\ &\leq c \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-n/2r-1/2} \|\psi\|_{(\tilde{r}', 1)} \|\theta(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} \|u(s)\|_{(r, \infty)} ds \\ &\leq c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\theta(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-n/2r-1/2} \|\psi\|_{(\tilde{r}', 1)} ds. \end{aligned}$$

Como $n > r$, a integral acima converge. Por dualidade, temos que para todo $t \in \mathbb{R}$, $\|G_1(t)\|_{(\tilde{r}, \infty)} \leq c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\theta(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|G_2(t)\|_{(\tilde{r}, \infty)} &\leq \int_{t-1}^t (t-s)^{-n/2(1/r+1/\tilde{q}-1/\tilde{r})} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} ds \\ &\leq c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)}. \end{aligned}$$

Notemos que a última integral é finita devido à hipótese de $1/r - 1/\tilde{r} < 2/n - 1/\tilde{q}$. Agora, usando o Lema 3.15, Hölder e o Lema 3.19 (com $d = \infty$), obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla G(u, \theta)\|_{(\tilde{q}, \infty)} &\leq \int_{-\infty}^{t-1} \|\nabla e^{-(t-s)B}(u \cdot \nabla \theta)(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} ds + \int_{t-1}^t \|\nabla e^{-(t-s)B}(u \cdot \nabla \theta)(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} ds \\ &\leq c \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-n/2r-1/2} \|u(s)\|_{r, \infty} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} + \\ &\quad + c \int_{t-1}^t (t-s)^{-n/2q} \|u(s)\|_{(q^*, \infty)} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} \\ &\leq c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-n/2r-1/2} ds + \\ &\quad + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(q, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} \int_{t-1}^t (t-s)^{-n/2q} ds \\ &\leq c \left(\sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_{(r, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla u(s)\|_{(q, \infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q}, \infty)} \right), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $c = c(n, \tilde{r}, \tilde{q}, r, q)$. Note que como $n/2 < q$ a última integral converge. Isto completa as estimativas do operador $G(u, \theta)$ e $\nabla G(u, \theta)$ do Lema. As estimativas para o operador F_1 são encontradas de forma análoga lembrando que agora a dualidade é dada tomando $\phi \in C_{0, \sigma}^\infty(\Omega)$. ■

Lema 3.22. *Seja θ_0 definida como em (3.24). Então temos que $\theta_0 \in X$.*

Demonstração:. Se f satisfaz (3.14), então usando o Lema 3.15 obtemos

$$\begin{aligned} \|\theta_0(t)\|_{(\tilde{r}, \infty)} &\leq \int_{-\infty}^{t-1} \|e^{-(t-s)B} f(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} ds + \int_{t-1}^t \|e^{-(t-s)B} f(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} ds \\ &\leq c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{p}, \infty)} \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-n/2(1/\tilde{p}-1/\tilde{r})} ds \\ &\quad + c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{l}, \infty)} \int_{t-1}^t (t-s)^{-n/2(1/\tilde{l}-1/\tilde{r})} ds. \end{aligned}$$

Isto é válido para todo $t \in \mathbb{R}$. A constante $c = c(n, \tilde{r}, \tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{l})$. Das hipóteses (3.14), isto é, $1/\tilde{r} + 2/n < 1/\tilde{p}$ e $1/\tilde{l} < 2/n + 1/\tilde{r}$, concluímos que cada integral acima é finita e conseqüentemente, $\|\theta_0(t)\|_{(\tilde{r}, \infty)} \leq c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{p}, \infty)} + c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{l}, \infty)}$.

Uma análise similar prova que

$$\begin{aligned} \|\nabla \theta_0(t)\|_{(\tilde{q}, \infty)} &\leq c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{p}, \infty)} \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-n/2(1/\tilde{p}-1/\tilde{q})-1/2} ds \\ &+ c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{l}, \infty)} \int_{t-1}^t (t-s)^{-n/2(1/\tilde{l}-1/\tilde{q})-1/2} ds. \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $c = c(n, q, r, p, l)$. Como $1/\tilde{p} > 1/\tilde{r} + 2/n > 1/n + 1/\tilde{q}$ e $1/\tilde{l} < 1/\tilde{q} + 1/n$, as duas integrais acima convergem.

Por outro lado, se $n = 3$ a análise anterior não continua valendo pois seria necessário que $3/2(1/\tilde{p} - 1/\tilde{r}) > 1$, com $\tilde{p} > 1$ e isto não acontece. Conseqüentemente precisamos assumir uma nova condição; de fato, se f satisfaz (3.15), usando a seguinte estimativa, (a qual é conseqüência da analiticidade do semigrupo)

$$\|B^\delta e^{-tB} a\|_{(\tilde{p}, \infty)} \leq C t^{-\delta} \|a\|_{(\tilde{p}, \infty)}, \quad \forall a \in L^{(\tilde{p}, \infty)}, \quad t > 0, \quad c = c(\tilde{p}, \delta), \quad \delta \geq 0$$

e o Lema 3.15, obtemos

$$\begin{aligned} \|\theta_0(t)\|_{(\tilde{r}, \infty)} &\leq \int_{-\infty}^{t-1} \|e^{-(t-s)B} B^\delta h(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} ds + \int_{t-1}^t \|e^{-(t-s)B} f(s)\|_{(\tilde{r}, \infty)} ds \\ &\leq c \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-3/2(1/\tilde{p}-1/\tilde{r})} \|B^\delta e^{-(t-s)B/2} h(s)\|_{(\tilde{p}, \infty)} ds \\ &+ c \int_{t-1}^t (t-s)^{-3/2(1/\tilde{l}-1/\tilde{r})} \|f(s)\|_{(\tilde{l}, \infty)} ds \\ &\leq c \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-3/2(1/\tilde{p}-1/\tilde{r})-\delta} \|h(s)\|_{(\tilde{p}, \infty)} ds \\ &+ c \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{l}, \infty)} \int_{t-1}^t (t-s)^{-3/2(1/\tilde{l}-1/\tilde{r})} ds \\ &\leq c \left(\sup_{s \in \mathbb{R}} \|h(s)\|_{(\tilde{p}, \infty)} + \sup_{s \in \mathbb{R}} \|f(s)\|_{(\tilde{l}, \infty)} \right), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ com $c = c(n, \tilde{r}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{l}, \delta)$. Uma estimativa semelhante pode ser obtida para $\|\nabla \theta_0\|_{(\tilde{q}, \infty)}$, ($n = 3$). Isto prova o lema. ■

Seguidamente estimaremos os termos $F(u_m, \theta_m)$ e $G(u_m, \theta_m)$. Iniciamos com o seguinte lema.

Lema 3.23. *Os termos $\|F(u_m, \theta_m)\|_Y$, $\|G(u_m, \theta_m)\|_X$ satisfazem as seguintes estimativas*

$$\|F(u_m, \theta_m)\|_Y \leq 2c_1\|u_m\|_Y^2 + c_3\|\theta_m\|_X, \quad (3.28)$$

$$\|G(u_m, \theta_m)\|_X \leq 2c_2\|u_m\|_Y\|\theta_m\|_X, \quad (3.29)$$

onde c_1 , c_2 são como no Lema 3.21 e c_3 depende de g mas é independente de m .

Demonstração:. Notemos que

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(g\theta_m) ds \right\|_Y \leq c_3\|\theta_m\|_X. \quad (3.30)$$

De fato,

$$\left\| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(g\theta_m) ds \right\|_{(r,\infty)} \leq \int_{-\infty}^{t-1} \|e^{-(t-s)A} P(g\theta_m)\|_{(r,\infty)} + \int_{t-1}^t \|e^{-(t-s)A} P(g\theta_m)\|_{(r,\infty)}.$$

A primeira integral acima, pode ser estimada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t-1} \|e^{-(t-s)A} P(g\theta_m)\|_{(r,\infty)} &\leq c \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^\gamma \|g\|_{(a,\infty)} \|\theta_m(s)\|_{(\tilde{r},\infty)} \\ &\leq c \|g\|_{(a,\infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\theta_m(s)\|_{(\tilde{r},\infty)} \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^\gamma ds, \end{aligned}$$

onde $\gamma = -n/2(1/a + 1/\tilde{r} - 1/r)$. Como $1/a > 2/n - 1/\tilde{r} + 1/r$, a última integral converge.

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{t-1}^t \|e^{-(t-s)A} P(g\theta_m)\|_{(r,\infty)} &\leq c \int_{t-1}^t (t-s)^\xi \|g\|_{(b,\infty)} \|\theta_m(s)\|_{(\tilde{r},\infty)} \\ &\leq c \|g\|_{(b,\infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\theta_m(s)\|_{(\tilde{r},\infty)} \int_{t-1}^t (t-s)^\xi ds, \end{aligned}$$

onde $\xi = -n/2(1/b + 1/\tilde{r} - 1/r)$. Pela Condição 2, $g \in L^{(b,\infty)}(\Omega)^n$ com $b > 1$ e $1/b < 1/n + 1/q - 1/\tilde{r}$. Usando que $r < n$, $n/2 < q$, temos que $1/r + 1/n > 2/n > 1/q$; portanto, $1/b < 1/n + 1/q - 1/\tilde{r} < 1/n + 1/n + 1/r - 1/\tilde{r}$, implicando que $1/b < 2/n + 1/r - 1/\tilde{r}$ e conseqüentemente as integrais acima convergem.

$$\left\| \nabla \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(g\theta_m) ds \right\|_{(q,\infty)} \leq \int_{-\infty}^{t-1} \|\nabla e^{-(t-s)A} P(g\theta_m)\|_{(q,\infty)} + \int_{t-1}^t \|\nabla e^{-(t-s)A} P(g\theta_m)\|_{(q,\infty)}.$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t-1} \|\nabla e^{-(t-s)A} P(g\theta_m)\|_{(q,\infty)} &\leq c \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-n/2(1/a+1/\tilde{r}-1/q)-1/2} \|g\|_{(a,\infty)} \|\theta_m(s)\|_{(\tilde{r},\infty)} \\
&\leq c \|g\|_{(a,\infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\theta_m(s)\|_{(\tilde{r},\infty)} \int_{-\infty}^{t-1} (t-s)^{-n/2(1/a+1/\tilde{r}-1/q)-1/2}.
\end{aligned}$$

Como $n/2 < q, r < n$ e $1/\tilde{r} - 1/r > 2/n - 1/a$, concluímos que $1/a + 1/\tilde{r} - 1/q > 2/n + 1/r - 1/q > 1/r > 1/n$ e assim a última integral converge. Analogamente podemos mostrar que

$$\int_{t-1}^t \|\nabla e^{-(t-s)A} P(g\theta_m)\|_{(q,\infty)} \leq c \|g\|_{(b,\infty)} \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\theta_m(s)\|_{(\tilde{r},\infty)}.$$

Assim provamos a desigualdade (3.30) com

$$c_3 = c \left(\|g\|_{(b,\infty)} + \|g\|_{(a,\infty)} \right) \quad (3.31)$$

e c independente de m . Portanto, do Lema 3.21 e (3.30) obtemos (3.28). A desigualdade (3.29) é obtida aplicando diretamente as duas últimas desigualdades do Lema 3.21. ■

Agora notemos que, usando Lema 3.22 e o Lema 3.23, obtemos

$$\|u_{m+1}\|_Y \leq 2c_1 \|u_m\|_Y^2 + c_3 \|\theta_m\|_X, \quad (3.32)$$

$$\|\theta_{m+1}\|_X \leq \|\theta_0\|_X + 2c_2 \|u_m\|_Y \|\theta_m\|_X. \quad (3.33)$$

Seja

$$a_m = \text{Max}\{\|u_m\|_Y, \|\theta_m\|_X\}, \quad m = 1, 2, \dots \quad a_0 = \|\theta_0\|_X.$$

Então, segue-se de (3.32) e (3.33) que

$$a_{m+1} \leq a_0 + \tilde{c} a_m^2 + c_3 a_m, \quad \tilde{c} = \max(2c_1, 2c_2).$$

Assim, se

$$c_3 < 1, \quad 4a_0\tilde{c} < (1 - c_3)^2, \quad (3.34)$$

então a sequência $\{a_m\}_{m=0}^\infty$ é limitada, com

$$a_m \leq \frac{(1 - c_3) - \sqrt{(1 - c_3)^2 - 4\tilde{c}a_0}}{2\tilde{c}} \equiv k, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow a_m \leq k < 1/2\tilde{c}. \quad (3.35)$$

Assumamos (3.34) (Notemos que esta condição implica uma condição de pequenez de f e g). Fazendo $w_m = u_m - u_{m-1}$ ($u_{-1} \equiv 0$), $\Theta_m = \theta_m - \theta_{m-1}$, ($\theta_{-1} \equiv 0$), temos

$$\begin{aligned} w_{m+1}(t) &= - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(w_m \cdot \nabla u_m)(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u_{m-1} \cdot \nabla w_m)(s) ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(g\Theta_m)(s) ds, \\ \Theta_{m+1}(t) &= - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} P(w_m \cdot \nabla \theta_m)(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u_{m-1} \cdot \nabla \Theta_m)(s) ds. \end{aligned}$$

Estas igualdades implicam que

$$\begin{aligned} \|w_{m+1}\|_Y &\leq 2c_1(\|w_m\|_Y \|u_m\|_Y + \|u_{m-1}\|_Y \|w_m\|_Y) + c_3 \|\Theta_m\|_X \\ &\leq 4c_1 k \|w_m\|_Y + c_3 \|\Theta_m\|_X \\ &\leq 2\tilde{c}k(\|w_m\|_Y + \|\Theta_m\|_X), \end{aligned} \tag{3.36}$$

desde que $c_3 \leq 2\tilde{c}k$, (Esta condição e (3.34) implica uma condição de pequenez do campo g nas normas $L^{(a,\infty)}$ e $L^{(b,\infty)}$). De outro lado,

$$\begin{aligned} \|\Theta_{m+1}\|_X &\leq 2c_2 \|w_m\|_Y \|\theta_m\|_X + 2c_2 \|u_{m-1}\|_Y \|\Theta_m\|_X \\ &\leq 2c_2 k(\|w_m\|_Y + \|\Theta_m\|_X). \end{aligned} \tag{3.37}$$

De (3.36), (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Max}\{\|w_{m+1}\|_Y, \|\Theta_{m+1}\|_X\} &\leq 2\tilde{c}k \text{Max}\{\|w_m\|_Y, \|\Theta_m\|_X\} \leq \dots \\ &\leq (2\tilde{c}k)^{m+1} a_0, \quad \forall m = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{3.38}$$

Notemos que $u_m(t) = \sum_{j=0}^m w_j(t)$, $\theta_m(t) = \sum_{j=0}^m \Theta_j(t)$. Como $\tilde{c}k < 1$ (devido a (3.35)), a desigualdade (3.38) permite concluir que existem funções $u \in Y$, $\theta \in X$ tais que quando m tende ao ∞ ,

$$u_m \longrightarrow u \text{ em } Y, \quad \theta_m \longrightarrow \theta \text{ em } X.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
& \left\| - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u_m \cdot \nabla u_m)(s) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla u)(s) ds \right\|_Y \\
& \leq \left\| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P((u_m - u) \cdot \nabla u_m)(s) ds \right\|_Y \\
& + \left\| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla (u_m - u))(s) ds \right\|_Y \\
& \leq 2c_1 \|u_m - u\|_Y \|u_m\|_Y + 2c_1 \|u\|_Y \|u_m - u\|_Y \\
& < \|u_m - u\|_Y, \quad \forall m.
\end{aligned}$$

Então, em Y

$$- \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u_m \cdot \nabla u_m)(s) ds \longrightarrow \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla u)(s) ds. \quad (3.39)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
& \left\| - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u_m \cdot \nabla \theta_m)(s) ds + \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla \theta)(s) ds \right\|_X \\
& \leq \left\| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} ((u_m - u) \cdot \nabla \theta_m)(s) ds \right\|_X \\
& + \left\| \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla (\theta_m - \theta))(s) ds \right\|_X \\
& \leq 2c_2 \|u_m - u\|_Y \|\theta_m\|_X + 2c_2 \|u\|_Y \|\theta_m - \theta\|_X \\
& < \|u_m - u\|_Y + \|\theta_m - \theta\|_X, \quad \forall m.
\end{aligned}$$

Assim, em X

$$- \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u_m \cdot \nabla u_m)(s) ds \longrightarrow \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla u)(s) ds. \quad (3.40)$$

Finalmente, quando $m \longrightarrow \infty$,

$$\left\| - \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} P(g(\theta_m - \theta))(s) ds \right\|_Y \leq c_3 \|\theta_m - \theta\|_X \longrightarrow 0. \quad (3.41)$$

De (3.39), (3.40) e (3.41) concluimos que (u, θ) é uma solução do sistema de equações integrais (3.12), (3.13).

Periodicidade.

Sendo f uma função periódica, com período $\tau > 0$, as funções u_m e θ_m são também periódicas com o mesmo período τ para todo $m = 0, 1, 2, \dots$. Conseqüentemente, o limite (u, θ) é periódico com período τ .

Unicidade.

Suponhamos que existe (u_1, θ_1) sendo uma outra solução de (3.12)-(3.13), tal que $\|u_1\|_Y \leq k$, $\|\theta_1\|_X \leq k$, onde k é a constante de (3.35). Trabalhando como antes, podemos encontrar que

$$\begin{aligned}\|\theta - \theta_1\|_X &\leq 2c_2k\|u - u_1\|_Y + 2c_2k\|\theta - \theta_1\|_X, \\ \|u - u_1\|_Y &\leq c_3\|\theta - \theta_1\|_X + 2c_1k\|u - u_1\|_Y.\end{aligned}$$

Assim, se $M \equiv \text{Max}\{\|u - u_1\|_Y, \|\theta - \theta_1\|_X\}$ temos

$$M \leq \tilde{c}kM,$$

pois $c_3 \leq \tilde{c}k$, implicando que $\theta = \theta_1$, $u = u_1$. ■

3.3.2 Soluções periódicas fortes. Prova do Teorema 3.5.

Nesta subseção mostraremos que a solução periódica (u, θ) dada pelo Teorema 3.4, é na verdade uma solução forte do sistema diferencial (3.1)-(3.5), desde que assumamos certas condições adicionais de regularidade sobre as forças externas f e g . Para demonstrar o Teorema 3.5, precisamos o seguinte resultado de existência local de soluções fortes para o problema de valor inicial (3.1)-(3.5). Este resultado segue os argumentos de Kato [65] e Giga [45] feitos no contexto dos espaços L^p fortes. Para tais fins, primeiramente damos a definição de solução forte do problema de valor inicial (3.1)-(3.5).

Definição 3.24. *Seja $a \in L_\sigma^{(n,\infty)}$, $b \in L^{(n,\infty)}$ e $n < r^* < \infty$. Um par (v, w) definido sobre $(t_0, t_1) \times \Omega$ é dito uma solução forte de (3.1)-(3.5) de classe $S_{r^*}(t_0, t_1)$, com valor inicial (a, b) se*

1. $v \in BC_w([t_0, t_1]; L_\sigma^{(n,\infty)})^n \cap C^1((t_0, t_1); L_\sigma^{r^*})^n$, $w \in BC_w([t_0, t_1]; L^{(n,\infty)}) \cap C^1((t_0, t_1); L^{r^*})$,
2. $Av \in C((t_0, t_1); L_\sigma^{r^*})^n$, $Bw \in C((t_0, t_1); L^{r^*})$, $t_0 < t < t_1$,

$$3. \quad v_t + Av + P(v \cdot \nabla v) = P(wg), \text{ em } L_\sigma^{r^*}, \quad x \in \Omega, \quad t_0 < t < t_1,$$

$$4. \quad w_t + Bw + (v \cdot \nabla w) = f \text{ em } L^{r^*}, \quad x \in \Omega, \quad t_0 < t < t_1,$$

onde BC_w denota a classe de funções limitadas e fracamente-* contínuas, junto com

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} (v(t), \phi) = (a, \phi), \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} (v(t), \varphi) = (b, \varphi),$$

para toda $\phi \in L_\sigma^{(n',1)}(\Omega)^n, \varphi \in L^{(n',1)}(\Omega)$, onde $n' = n/(n-1)$.

A continuação apresentamos um resultado de existência local e unicidade de soluções fortes para o problema de valor inicial

Teorema 3.25. (i). (Existência). *Seja $n/2 < q < n$ e $1 < l < \infty$ tal que $1/q < 1/l < 1/q + 1/n$. Suponhamos que $a \in (L_\sigma^{(n,\infty)})^n \cap (L_\sigma^{(q^*,\infty)})^n$, $b \in L^{(n,\infty)} \cap L^{(q^*,\infty)}$, onde $q^* = nq/(n-q)$, $f \in BC(\mathbb{R}; L^{(l,\infty)})$ sendo Hölder contínua com valores em $L^{(r^*,\infty)}$, $g \in L^{(b,\infty)} \cap L^{(r^*,\infty)}$ com $b > n/2$ e $n < r^* < q^*$. Então existe $T \in (0, 1]$ tal que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ existe uma solução forte de classe $S_{r^*}(t_0, t_0 + T)$, para o problema (3.1)-(3.5) em $(t_0, t_0 + T)$ com valor inicial $v(t_0) = a, w(t_0) = b$. Além disso, a solução satisfaz $v \in BC((t_0, t_0 + T); L_\sigma^{(q^*,\infty)})^n$, $w \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(q^*,\infty)})$, com*

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|v(t)\|_{(q^*,\infty)} \leq C_1, \quad \sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|w(t)\|_{(q^*,\infty)} \leq C_2, \quad (3.42)$$

onde C_1, C_2 são independentes de t_0 e o tempo T é estimado como sendo

$$T \equiv \left[\frac{\tilde{k}}{c_1 \text{Max}\{\|a\|_{(n/\alpha,\infty)}, \|b\|_{(n/\alpha,\infty)} + \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(l,\infty)})}\}} \right]^{\frac{\alpha-1}{2}}, \quad (3.43)$$

com $\tilde{k}/c_1 = \tilde{k}/c_1(n, q, l)$.

(ii). (Unicidade). *Existe uma constante $\gamma = \gamma(n, r^*)$ tal que qualquer solução (v, w) na classe acima, satisfazendo*

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow t_0^+} t^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v(t)\|_{r^*} &\leq \gamma, \\ \limsup_{t \rightarrow t_0^+} t^{n/2(1/n-1/r^*)} \|w(t)\|_{r^*} &\leq \gamma, \end{aligned}$$

é única.

Proposição 3.26. *Seja $n/2 < q < n$ e $1 < l < \infty$ tal que $1/q < 1/l < 1/q + 1/n$. Suponhamos que $a \in (L_\sigma^{(n,\infty)})^n \cap (L_\sigma^{(q^*,\infty)})^n$, $b \in L^{(n,\infty)} \cap L^{(q^*,\infty)}$, onde $q^* = nq/(n-q)$, $f \in BC(\mathbb{R}; L^{(l,\infty)})$ com valores em $L^{(n,\infty)}$, $g \in L^{(b,\infty)} \cap L^{(n,\infty)}$ com $b > n/2$. Então existe $T \in (0, 1]$ e funções v, w na classe $v \in BC_w([t_0, t_0 + T]; L_\sigma^{(n,\infty)})^n$, $w \in BC_w([t_0, t_0 + T]; L^{(n,\infty)})$ com $v \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(q^*,\infty)})^n$, $w \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(q^*,\infty)})$ e $(t - t_0)^{1/2} \nabla v \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n,\infty)})^{n \times n}$, $(t - t_0)^{1/2} \nabla w \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n,\infty)})^n$, tal que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$,*

$$v(t) = e^{-(t-t_0)A}a + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A}P(wg)ds - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A}P(v \cdot \nabla v)ds, \quad (3.44)$$

$$w(t) = e^{-(t-t_0)B}b + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B}f ds - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B}(v \cdot \nabla w)ds, \quad (3.45)$$

em $L_\sigma^{(n,\infty)}(\Omega)^n \cap L_\sigma^{r^*}(\Omega)^n$ e $L^{(n,\infty)}(\Omega)^n \cap L^{r^*}(\Omega)$, respectivamente, onde $n < r^* < q^*$. Além disso, as funções v, w satisfazem $t^{1/4}v \in BC((t_0, t_0 + T); L_\sigma^{2n})^n$, $t^{1/4}w \in BC((t_0, t_0 + T); L^{2n})$. Aqui T é estimado como

$$T \equiv \left[\frac{\tilde{k}}{c_1 \text{Max}\{\|a\|_{(n/\alpha,\infty)}, \|b\|_{(n/\alpha,\infty)} + \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(l,\infty)})}\}} \right]^{\frac{\alpha-1}{2}}, \quad (3.46)$$

e $\tilde{k}/c_1 = \tilde{k}/c_1(n, q, l)$.

Demonstração: (Proposição 3.26).

Construiremos a solução das equações integrais (3.44)-(6.23) de acordo com a seguinte seqüência:

$$v_{m+1}(t) = v_0(t) + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A}P(w_m g)ds - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A}P(v_m \cdot \nabla v_m)ds, \quad (3.47)$$

$$w_{m+1}(t) = w_0(t) + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B}f ds - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B}(v_m \cdot \nabla w_m)ds, \quad (3.48)$$

onde $v_0(t) = e^{-(t-t_0)A}a$, $w_0(t) = e^{-(t-t_0)B}b$.

Como este Lema lida somente com existência de soluções locais, assumiremos por um momento que $0 < T \leq 1$. Seja $\alpha = n/q^*$, $q^* = nq/(n-q)$. Então $0 < \alpha < 1$. Na demonstração da Proposição 3.26, iremos precisar dos seguintes lemas:

Lema 3.27. *A seqüência (3.47), (3.48) satisfaz a seguinte estimativa*

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|v_m(t)\|_{(n/\alpha,\infty)} \leq K_{m,1}, \quad (3.49)$$

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|w_m(t)\|_{(n/\alpha,\infty)} \leq K_{m,2}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.50)$$

para algumas constantes $K_{m,1}, K_{m,2}$ as quais são independentes de t_0 . Além disso, existe (v, w) com

$$\begin{aligned}(t - t_0)^{(1-\alpha)/2} v(\cdot) &\in BC((t_0, t_0 + T); L_\sigma^{(n/\alpha, \infty)})^n, \\ (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} w(\cdot) &\in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n/\alpha, \infty)}),\end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|v_m(t) - v(t)\|_{(n/\alpha, \infty)} &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|w_m(t) - w(t)\|_{(n/\alpha, \infty)} &= 0.\end{aligned}$$

Demonstração:. A prova é dada por indução. De fato,

$$\begin{aligned}\|v_0\|_{(n/\alpha, \infty)} &\leq c \|a\|_{(n/\alpha, \infty)}, \\ \|w_0\|_{(n/\alpha, \infty)} &\leq c \|b\|_{(n/\alpha, \infty)},\end{aligned}$$

para $t_0 < t < t_0 + T$, onde c independe de t_0 . Conseqüentemente,

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|v_0(t)\|_{(n/\alpha, \infty)} \leq c T^{(1-\alpha)/2} \|a\|_{(n/\alpha, \infty)} \equiv K_{0,1}, \quad (3.51)$$

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|w_0(t)\|_{(n/\alpha, \infty)} \leq c T^{(1-\alpha)/2} \|b\|_{(n/\alpha, \infty)} \equiv K_{0,2}. \quad (3.52)$$

Suponhamos verdadeiro (3.49), (3.50). Provaremos (3.49), (3.50) para o caso $m + 1$. Notemos que para todo $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$ e todo $t_0 < t < t_0 + T$, o Lema 3.15 implica

$$\begin{aligned}\left| \left(- \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) ds, \phi \right) \right| &= \left| \int_{t_0}^t (v_m \otimes v_m(s), \nabla e^{-(t-s)A} \phi) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|v_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)}^2 \|\nabla e^{-(t-s)A} \phi\|_{(n/(n-2\alpha), 1)} ds \\ &\leq c \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha/2-1/2} \|v_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)}^2 ds \cdot \|\phi\|_{(n/(n-\alpha), 1)} \\ &\leq c B((1-\alpha)/2, \alpha) K_{m,1}^2 (t-t_0)^{-(1-\alpha)/2} \|\phi\|_{(n/(n-\alpha), 1)},\end{aligned}$$

onde $B(.,.)$ denota a função Beta e $c = c(n, q)$ é independente de t_0 . Por dualidade temos que

$$\left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) ds \right\|_{(n/\alpha, \infty)} \leq C_{1,1} K_{m,1}^2 (t - t_0)^{-(1-\alpha)/2}, \quad t_0 < t < t_0 + T.$$

com $C_{1,1} = C_{1,1}(n, q)$. Agora,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(gw_m)(s) ds \right\|_{(n/\alpha, \infty)} &\leq c \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2b} \|g\|_{(b, \infty)} \|w_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)} ds \\ &\leq c \|g\|_{(b, \infty)} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} (t - t_0)^{-(1-\alpha)/2} \\ &\quad \times \int_{t_0}^t \|w_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)} (t-s)^{-n/2b} ds \\ &\leq c (t - t_0)^{-(1-\alpha)/2} K_{m,2} \|g\|_{(b, \infty)} \\ &\leq (t - t_0)^{-(1-\alpha)/2} C_{2,1} K_{m,2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|v_{m+1}\|_{(n/\alpha, \infty)} \leq K_{0,1} + C_{1,1} K_{m,1}^2 + C_{2,1} K_{m,2}. \quad (3.53)$$

Agora, para todo $\phi \in C_0^\infty$ e todo $t_0 < t < t_0 + T$,

$$\begin{aligned} \left| \left(- \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v_m \cdot \nabla w_m)(s) ds, \phi \right) \right| &= \left| \int_{t_0}^t (v_m \otimes v_m(s), \nabla e^{-(t-s)B} \phi) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|v_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)} \|w_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)} \|\nabla e^{-(t-s)B} \phi\|_{(n/(n-2\alpha), 1)} ds \\ &\leq c \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha/2-1/2} \|v_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)} \|w_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)} \cdot \|\phi\|_{(n/(n-\alpha), 1)} ds \\ &\leq c B((1-\alpha)/2, \alpha) K_{m,1} K_{m,2} (t - t_0)^{-(1-\alpha)/2} \|\phi\|_{(n/(n-\alpha), 1)}. \end{aligned}$$

Por dualidade,

$$\left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v_m \cdot \nabla w_m)(s) ds \right\|_{(n/\alpha, \infty)} \leq C_{1,2} K_{m,2} K_{m,1} (t - t_0)^{-(1-\alpha)/2}, \quad t_0 < t < t_0 + T.$$

Agora, usando o Lema 3.19 (com $d = \infty$) temos que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|e^{-(t-s)B} f(s)\|_{(n/\alpha, \infty)} &\leq c \int_{t_0}^t \|\nabla e^{-(t-s)B} f(s)\|_{(q, \infty)} ds \\ &\leq c \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2(1/l-1/q)-1/2} \|f(s)\|_{(l, \infty)} ds \\ &\leq c \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L(l, \infty))} (t - t_0)^{-(1-\alpha)/2+3/2-n/2l}, \end{aligned}$$

para todo $t_0 < t < t_0 + T$ com $c = c(n, q, l)$. Como $1/l < 1/q + 1/n$, temos que

$$(1 - \alpha)/2 < 3/2 - n/2l,$$

e assim a estimativa anterior nos leva a

$$(t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} f(s) \right\|_{(n/\alpha, \infty)} \leq c \|f\|_{BC(\mathbb{R}, L^{(b, \infty)})} T^{(1-\alpha)/2}. \quad (3.54)$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|w_{m+1}(t)\|_{(n/\alpha, \infty)} &\leq K_{0,2} + c \|f\|_{BC(\mathbb{R}, L^{(l, \infty)})} T^{(1-\alpha)/2} \\ &+ C_{1,2} K_{m,1} K_{m,2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Então, podemos tomar $K_{m+1,1}, K_{m+1,2}$ como sendo

$$\begin{aligned} K_{m+1,1} &= K_{0,1} + C_{1,1} K_{m,1}^2 + C_{2,1} K_{m,2}, \\ K_{m+1,2} &= K_{0,2} + c \|f\|_{BC(\mathbb{R}, L^{(l, \infty)})} T^{(1-\alpha)/2} + C_{1,2} K_{m,1} K_{m,2}. \end{aligned}$$

Tomando $K_m = \text{Max}(K_{m,1}, K_{m,2})$, $m = 1, 2, \dots$, de (3.55) e (3.53) temos

$$K_{m+1} \leq K_0 + \tilde{C} K_m^2 + C_{2,1} K_m, \quad (3.56)$$

donde $K_0 = c_1 T^{(1-\alpha)/2} \text{Max}\{\|a\|_{(n/\alpha, \infty)}, \|b\|_{(n/\alpha, \infty)} + \|f\|_{BC(\mathbb{R}, L^{(l, \infty)})}\}$ e $\tilde{C} = \text{Max}\{C_{1,1}, C_{1,2}\}$.

Se consideramos

$$C_{2,1} < 1, \quad K_0 < \frac{(1 - C_{2,1})^2}{4\tilde{C}}, \quad (3.57)$$

temos que

$$K_m < \frac{(1 - C_{2,1}) - \sqrt{(1 - C_{2,1})^2 - 4\tilde{C}K_0}}{2\tilde{C}} \equiv k < \frac{1}{2\tilde{C}}, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.58)$$

Assumindo (3.57) e trabalhando de forma análoga à Subseção 2.3.1, podemos concluir, devido à estimativa uniforme com respeito a m (3.58), que existe uma dupla (v, w) tal que

$$(t - t_0)^{(1-\alpha)/2} v(.) \in BC((t_0, t_0 + T); L_\sigma^{(n/\alpha, \infty)})^n, \quad (3.59)$$

$$(t - t_0)^{(1-\alpha)/2} w(.) \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n/\alpha, \infty)}), \quad (3.60)$$

satisfazendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|v_m(t) - v(t)\|_{(n/\alpha, \infty)} = 0, \quad (3.61)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|w_m(t) - w(t)\|_{(n/\alpha, \infty)} = 0. \quad (3.62)$$

Assim concluimos a prova do lema. ■

Lema 3.28. *Se K_0 definido por (3.56) é suficientemente pequeno, então o limite (v, w) dado pelo Lema 3.27 satisfaz a seguinte estimativa*

$$(t - t_0)^{1/2} \nabla v(\cdot) \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n, \infty)})^{n \times n}, \quad (3.63)$$

$$(t - t_0)^{1/2} \nabla w(\cdot) \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n, \infty)})^n, \quad (3.64)$$

com

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{1/2} \|\nabla v_m(t) - \nabla v(t)\|_{(n, \infty)} = 0, \quad (3.65)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{1/2} \|\nabla w_m(t) - \nabla w(t)\|_{(n, \infty)} = 0. \quad (3.66)$$

Demonstração:. A prova é dada por indução. De fato, provaremos que

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{1/2} \|\nabla v_m(t)\|_{(n, \infty)} \leq J_{m,1}, \quad (3.67)$$

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{1/2} \|\nabla w_m(t)\|_{(n, \infty)} \leq J_{m,2}, \quad (3.68)$$

para algumas constantes $J_{m,1}, J_{m,2}$ as quais são independentes de t_0 , $m = 0, 1, \dots$

Notemos que pelo lema 3.15

$$\|\nabla v_0\|_{(n, \infty)} \leq C(t - t_0)^{-1/2} \|a\|_{(n, \infty)},$$

$$\|\nabla w_0\|_{(n, \infty)} \leq C(t - t_0)^{-1/2} \|b\|_{(n, \infty)},$$

onde $C = C(n)$ independe de t_0 . Portanto podemos tomar $J_{0,1}$ e $J_{0,2}$ sendo respectivamente, $C\|a\|_{(n, \infty)}$, $C\|b\|_{(n, \infty)}$.

Suponhamos verdadeiras as desigualdades (3.67), (3.68). Então

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) \right\|_{(n, \infty)} &\leq \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2(\alpha/n)-1/2} \|v_m(s)\|_{(n/\alpha, \infty)} \|\nabla v_m(s)\|_{(n, \infty)} ds \\ &\leq cK_{m,1} J_{m,1} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha/2-1/2} (s-t_0)^{\alpha/2-1} ds \\ &\leq C_{3,1} k J_{m,1} (t-t_0)^{-1/2}, \end{aligned}$$

para todo $t_0 < t < t_0 + T$, onde $C_{3,1} = C_{3,1}(n, q)$ independe de t_0 .

Agora

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(gw_m)(s) ds \right\|_{(n,\infty)} &\leq \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2(\alpha/n)-1/2} \|g\|_{(n,\infty)} \|w_m(s)\|_{(n/\alpha,\infty)} ds \\
&\leq c \|g\|_{(n,\infty)} K_{m,2} \int_{t_0}^t (t-s)^{-(\alpha+1)/2} (s-t_0)^{-(1-\alpha)/2} ds \\
&\leq c B((1-\alpha)/2, (1+\alpha)/2) k \|g\|_{(n,\infty)} \\
&= C_{4,1} k \|g\|_{(n,\infty)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t-t_0)^{1/2} \|\nabla v_{m+1}\|_{(n,\infty)} \leq J_{0,1} + C_{3,1} k J_{m,1} + C_{4,1} k \|g\|_{(n,\infty)}. \quad (3.69)$$

Agora, para todo $t_0 < t < t_0 + T$,

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v_m \cdot \nabla w_m)(s) \right\|_{(n,\infty)} &\leq \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2(\alpha/n)-1/2} \|v_m(s)\|_{(n/\alpha,\infty)} \|\nabla w_m(s)\|_{(n,\infty)} ds \\
&\leq c K_{m,1} J_{m,2} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha/2-1/2} (s-t_0)^{\alpha/2-1} ds \\
&\leq C_{2,2} k J_{m,2} (t-t_0)^{-1/2},
\end{aligned}$$

onde $C_{2,2}$ é independente de t_0 . Como

$$\left\| \nabla \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} f(s) ds \right\|_{(n,\infty)} \leq c (t-t_0)^{-1/2} \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(n,\infty)})},$$

concluimos que

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t-t_0)^{1/2} \|w_{m+1}(t)\|_{(n,\infty)} \leq J_{0,2} + C_{2,2} k J_{m,2} + c \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(n,\infty)})}. \quad (3.70)$$

Assim, podemos tomar $J_{m+1,1}$ e $J_{m+1,2}$ sendo respectivamente,

$$J_{0,1} + C_{3,1} k J_{m,1} + C_{4,1} k \|g\|_{(n,\infty)}, \quad J_{0,2} + C_{2,2} k J_{m,2} + c \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(n,\infty)})}.$$

Seja

$$\begin{aligned}
J_m &= \text{Max}\{J_{m,1}, J_{m,2}\}, \quad m = 1, 2, \dots \\
J_0 &= \text{Max}\{J_{0,1} + C_{4,1} k \|g\|_{(n,\infty)}, J_{0,2} + c \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(n,\infty)})}\}.
\end{aligned}$$

Então

$$J_{m+1} \leq J_0 + k\tilde{C}J_m, \quad (3.71)$$

onde $\tilde{C} = \text{Max}\{C_{3,1}, C_{2,2}\}$.

Conseqüentemente, se

$$k < 1/\tilde{C}, \quad (3.72)$$

temos uma estimativa uniforme para a seqüência $\{J_m\}$ dada por

$$J_m \leq \frac{J_0}{1 - \tilde{C}k} \equiv J, \quad m = 0, 1, \dots$$

Supondo (3.72), podemos ver que os limites v, w satisfazem (3.63)-(3.64) e assim a prova do lema é finalizada. ■

Lema 3.29. *O limite (v, w) dado pelo Lema 3.27 e Lema 3.28, satisfaz a seguinte estimativa*

$$(t - t_0)^{1/4}v(.) \in BC((t_0, t_0 + T); L_\sigma^{2n})^n, \quad (3.73)$$

$$(t - t_0)^{1/4}w(.) \in BC((t_0, t_0 + T); L^{2n}), \quad (3.74)$$

com

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{1/4} \|v_m(t) - v(t)\|_{2n} = 0, \quad (3.75)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{1/4} \|w_m(t) - w(t)\|_{2n} = 0. \quad (3.76)$$

Demonstração:. Como nos dois últimos lemas, a prova é dada por indução. De fato, provaremos que existem constantes $N_{m,1}, N_{m,2}$, as quais independem de t_0 , tais que

$$\|v_m(t)\|_{2n} \leq N_{m,1}(t - t_0)^{-1/4} \quad (3.77)$$

$$\|w_m(t)\|_{2n} \leq N_{m,2}(t - t_0)^{-1/4}. \quad (3.78)$$

Como $L^{(p_0, \infty)} \cap L^{(p_1, \infty)} \subset L^p$ e $\|f\|_p \leq C(p_0, p_1, \lambda) \|f\|_{(p_0, \infty)}^{1-\lambda} \|f\|_{(p_1, \infty)}^\lambda$ desde que tomemos $p_0 \neq p_1, 0 < \lambda < 1$ e $1/p = (1 - \lambda)/p_0 + \lambda/p_1$, temos

$$\|v_0(t)\|_{2n} \leq C(t - t_0)^{-1/4} \|a\|_{(n, \infty)},$$

$$\|w_0(t)\|_{2n} \leq C(t - t_0)^{-1/4} \|b\|_{(n, \infty)},$$

onde $C = C(n)$ é independente de t_0 . Assim, definimos $N_{0,1}$ e $N_{0,2}$ como sendo $C\|a\|_{(n,\infty)}$ e $C\|b\|_{(n,\infty)}$, respectivamente.

Suponhamos verdadeiro (3.77)-(3.78); provaremos (3.77)-(3.78) no caso $m + 1$. De fato, notemos que para todo $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$, $\varphi \in C_0^\infty$, vale

$$\begin{aligned} \left| \left(- \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) ds, \phi \right) \right| &\leq \int_{t_0}^t \|v_m \otimes v_m\|_n \|\nabla e^{-(t-s)A} \phi\|_{n'} \\ &\leq C \int_{t_0}^t \|v_m\|_{2n}^2 (t-s)^{-3/4} \|\phi\|_{(2n)'}, \\ \left| \left(- \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v_m \cdot \nabla w_m)(s) ds, \varphi \right) \right| &\leq \int_{t_0}^t \|w_m \cdot v_m\|_n \|\nabla e^{-(t-s)B} \varphi\|_{n'} \\ &\leq C \int_{t_0}^t \|v_m\|_{2n} \|w_m\|_{2n} (t-s)^{-3/4} \|\varphi\|_{(2n)'}. \end{aligned}$$

Logo, por dualidade,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) ds \right\|_{2n} &\leq C_{1,1} N_{m,1}^2, \\ \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v_m \cdot \nabla w_m)(s) ds \right\|_{2n} &\leq C_{1,2} N_{m,1} N_{m,2}. \end{aligned}$$

Notemos também que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(gw_m) \right\|_{2n} &\leq \int_{t_0}^t \|e^{-(t-s)A} P(gw_m)\|_{2n} \leq \int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} \|g\|_{(n,\infty)} \|w_m\|_{(2n)} \\ &\leq c \|g\|_{(n,\infty)} N_{m,2}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} f(s) ds \right\|_{2n} &\leq \int_{t_0}^t \|e^{-(t-s)B} f(s)\|_{2n} \leq \int_{t_0}^t (t-s)^{-1/4} \|f(s)\|_{(n,\infty)} ds \\ &\leq c \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(n,\infty)})}. \end{aligned}$$

As desigualdades acima implicam que

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{1/4} \|v_{m+1}\|_{2n} &\leq N_{0,1} + C_{1,1} N_{m,1}^2 + C_{2,1} N_{m,2}, \\ \sup_{t_0 < t < t_0 + T} (t - t_0)^{1/4} \|w_{m+1}\|_{2n} &\leq N_{0,2} + C_{1,2} N_{m,1} N_{m,2} + c \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(n,\infty)})}, \end{aligned}$$

com $C_{2,1} = c\|g\|_{(n,\infty)}$. Como antes, fazendo $N_m = \max\{N_{m,1}, N_{m,2}\}$, $m = 1, 2, \dots$ e $N_0 = \max\{N_{0,2} + c\|f\|_{BC(\mathbb{R}; L(n,\infty))}, N_{0,1}\}$, obtemos

$$N_{m+1} \leq N_0 + \tilde{C}N_m^2 + C_{2,1}N_m,$$

onde $\tilde{C} = \max\{C_{1,1}, C_{1,2}\}$. Se consideramos

$$C_{2,1} < 1, \quad N_0 < \frac{(1 - C_{2,1})^2}{4\tilde{C}}, \quad (3.79)$$

temos que a sequência $\{N_m\}_{m=0}^{m=\infty}$ é limitada por

$$N_m \leq \frac{(1 - C_{2,1}) - \sqrt{(1 - C_{2,1})^2 - 4N_0\tilde{C}}}{2\tilde{C}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

supondo (3.79) e trabalhando como no Lema 3.27 e no Lema 3.28, concluímos a prova do lema. ■

Agora vamos continuar com a prova da Proposição 3.26. Usando o Lema 3.27 e o Lema 3.28, provaremos que

$$v \in BC((t_0, t_0 + T); L_\sigma^{(n,\infty)} \cap L_\sigma^{(q^*,\infty)})^n, \text{ e}$$

$$w \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n,\infty)} \cap L^{(q^*,\infty)}).$$

Para isto, precisamos provar que

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|v_m(t)\|_{(n/s,\infty)} \leq M_{1,s,m}, \quad s = \alpha, \quad s = 1, \quad (3.80)$$

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|w_m(t)\|_{(n/s,\infty)} \leq M_{2,s,m}, \quad s = \alpha, \quad s = 1, \quad (3.81)$$

com $M_{1,s,m}, M_{2,s,m}$ independentes de t_0 . Cálculos análogos aos feitos na prova do Lema 3.27 e do Lema 3.28, nos levam a

$$M_{1,\alpha,0} = C\|a\|_{(n/\alpha,\infty)}, \quad M_{1,1,0} = C\|a\|_{(n,\infty)},$$

$$M_{2,\alpha,0} = C\|b\|_{(n/\alpha,\infty)}, \quad M_{2,1,0} = C\|b\|_{(n,\infty)},$$

onde $C = C(n, s)$ é independente de t_0 . Suponhamos por indução que (3.80), (3.81) são válidas. Notemos que

$$\begin{aligned}
& \left| \left(- \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) ds, \phi \right) \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{t_0}^t (v_m \otimes v_m(s), \nabla e^{-(t-s)A} \phi) ds \right| \\
& \leq \int_{t_0}^t \|v_m\|_{(n/\alpha, \infty)} \|v_m\|_{(n/s, \infty)} \|\nabla e^{-(t-s)A} \phi\|_{(n/(n-\alpha-s), 1)} ds \\
& \leq CK_{m,1} M_{1,s,m} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha/2-1/2} (s-t_0)^{-(1-\alpha)/2} \cdot \|\phi\|_{(n/(n-s), 1)} ds \\
& \leq CkM_{1,s,m} B((1-\alpha)/2, (1+\alpha)/2) \|\phi\|_{(n/(n-s), 1)},
\end{aligned}$$

para todo $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$ e todo $t_0 < t < t_0 + T$, $C = C(n, q, s)$ independente de t_0 . Por dualidade temos que,

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) ds \right\|_{(n/s, \infty)} \leq C_{5,1} k M_{1,s,m}, \quad s = 1, \alpha, \quad (3.82)$$

onde $C_{5,1}$ independe de t_0 .

Notemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(gw_m) \right\|_{(n/s, \infty)} & \leq c \|g\|_{(b, \infty)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2b} \|w_m(s)\|_{(n/s, \infty)} ds \\
& \leq C_{6,1} M_{2,s,m},
\end{aligned} \quad (3.83)$$

com $C_{6,1} = c \|g\|_{(n, \infty)}$ e

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t t_0^t e^{-(t-s)B} f(s) ds \right\|_{(n/\alpha, \infty)} & \leq \int_0^t t_0^t (t-s)^{-n/2(1/l-\alpha/n)} \|f(s)\|_{(l, \infty)} ds \\
& \leq \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(l, \infty)})}. \\
\left\| \int_0^t e^{-(t-s)B} f(s) ds \right\|_{(n, \infty)} & \leq \int_0^t (t-s)^{-n/2(1/n-1/n)} \|f(s)\|_{(n, \infty)} ds \\
& \leq cT \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(n, \infty)})}.
\end{aligned}$$

Agora, para todo $\phi \in C_0^\infty$ e todo $t_0 < t < t_0 + T$,

$$\begin{aligned}
& \left| \left(- \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v_m \cdot \nabla w_m)(s) ds, \phi \right) \right| \leq \\
& \leq \left| \int_{t_0}^t (w_m \cdot v_m(s), \nabla e^{-(t-s)B} \phi) ds \right| \\
& \leq \int_{t_0}^t \|v_m\|_{(n/\alpha, \infty)} \|w_m\|_{(n/s, \infty)} \|\nabla e^{-(t-s)B} \phi\|_{(n/(n-\alpha-s), 1)} ds \\
& \leq CK_{m,1} M_{2,s,m} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha/2-1/2} (s-t_0)^{-(1-\alpha)/2} ds \cdot \|\phi\|_{(n/(n-s), 1)} \\
& \leq Ck M_{2,s,m} B((1-\alpha)/2, (1+\alpha)/2) \|\phi\|_{(n/(n-s), 1)}.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v_m \cdot \nabla w_m)(s) ds \right\|_{(n/s, \infty)} \leq C_{4,2} k M_{2,s,m}, \quad s = 1, \alpha, \quad (3.84)$$

onde $C_{4,2}$ é independente de t_0 .

Assim, de (3.82)-(3.84) podemos tomar

$$M_{1,s,m+1} = M_{1,s,0} + C_{5,1} k M_{1,s,m} + C_{6,1} M_{2,s,m}, \quad (3.85)$$

$$M_{2,s,m+1} = M_{2,s,0} + c \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(l, \infty)})} + C_{4,2} k M_{2,s,m}. \quad (3.86)$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
M_{s,m} &= \text{Max}\{M_{1,s,m}, M_{2,s,m}\}, \\
M_{s,0} &= \text{Max}\{M_{1,s,0}, M_{2,s,0} + c \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{(l, \infty)})}\}, \\
\tilde{C} &= \text{Max}\{C_{5,1}, C_{4,2}\},
\end{aligned}$$

de (3.85), (3.86) obtemos

$$M_{s,m+1} \leq M_{s,0} + k\tilde{C} M_{s,m} + C_{6,1} M_{s,m}, \quad m = 0, 1, \dots, s = 1, \alpha.$$

Então, se

$$C_{6,1} < 1, \quad k\tilde{C} < 1, \quad (3.87)$$

obtemos que

$$M_{s,m} \leq \frac{M_{s,0}}{1 - k\tilde{C} - C_{6,1}}, \quad m = 0, 1, \dots, s = 1, \alpha,$$

o que em consequência nos leva a

$$\begin{aligned} v &\in BC((t_0, t_0 + T); L_\sigma^{(n,\infty)} \cap L_\sigma^{(q^*,\infty)})^n, \\ w &\in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n,\infty)} \cap L^{(q^*,\infty)}), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|v_m(t) - v(t)\|_{(n/s,\infty)} &= 0, \quad s = 1, \alpha, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|w_m(t) - w(t)\|_{(n/s,\infty)} &= 0, \quad s = 1, \alpha. \end{aligned}$$

Agora veremos que sob as condições (3.57), (3.72), (3.87), o limite (v, w) pertence à classe requerida na Proposição. Além disso, tem-se que

$$\int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) ds \longrightarrow \int_0^t e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla v)(s) ds, \quad \text{em } L_\sigma^{(n,\infty)}, \quad (3.88)$$

$$\int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(w_m g)(s) ds \longrightarrow \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(w g)(s) ds, \quad \text{em } L_\sigma^{(n,\infty)}, \quad (3.89)$$

$$\int_0^t e^{-(t-s)B} P(v_m \cdot \nabla w_m)(s) ds \longrightarrow \int_0^t e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla w)(s) ds, \quad \text{em } L^{(n,\infty)}, \quad (3.90)$$

uniformemente em $t \in (t_0, t_0 + t)$ quando $m \rightarrow \infty$. De fato, notemos que pelo Lema 3.15, Lema 3.27 e Lema 3.28, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v_m \cdot \nabla v_m)(s) ds - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla w)(s) ds \right\|_{n,\infty} &\leq \\ &\int_{t_0}^t \|e^{-(t-s)A} P((v_m - v) \cdot \nabla w_m)(s)\|_{(n,\infty)} ds + \\ &\int_{t_0}^t \|e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla (v_m - v))(s)\|_{(n,\infty)} ds \leq \\ &\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha/2} \|v_m(s) - v(s)\|_{(n/\alpha,\infty)} \|\nabla v_m(s)\|_{(n,\infty)} ds + \\ &\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha/2} \|v(s)\|_{(n/\alpha,\infty)} \|\nabla (v_m(s) - v(s))\|_{(n,\infty)} ds \leq \\ &cB(1 - \alpha/2, 1/2)J \sup_{t_0 < s < t_0 + T} (s - t_0)^{(1-\alpha)/2} \|v_m(s) - v(s)\|_{(n/\alpha,\infty)} + \\ &cB(1 - \alpha/2, (1 + \alpha)/2)k \sup_{t_0 < s < t_0 + T} (s - t_0)^{1/2} \|\nabla v_m(s) - \nabla v(s)\|_{(n,\infty)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(w_m g)(s) ds - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(w g)(s) ds \right\|_{(n,\infty)} \leq \\
& \int_{t_0}^t \|e^{-(t-s)A} P((w_m - w)g)(s)\|_{(n,\infty)} ds \leq \\
& \leq c \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2b+(1-\alpha)/2} \|g\|_{(b,\infty)} \|w_m(s) - w(s)\|_{(n/\alpha,\infty)} \\
& \leq c T^{1-n/2b} (s-t_0)^{(1-\alpha)/2} \|w_m(s) - w(s)\|_{(n/\alpha,\infty)} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos (3.90).

Seguidamente provaremos a continuidade fraca-* da soluço para o dado inicial. Primeiramente notemos que para qualquer $\varphi \in L_{\sigma}^{(n',1)}$ e $\phi \in L^{(n',1)}$ temos

$$\begin{aligned}
|(e^{-(t-t_0)A} a - a, \varphi)| &= |(a, e^{-(t-t_0)A} \varphi - \varphi)| \\
&\leq \|a\|_{(n,\infty)} \|e^{-(t-t_0)A} \varphi - \varphi\|_{(n',1)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0^+. \\
|(e^{-(t-t_0)B} b - b, \phi)| &= |(b, e^{-(t-t_0)A} \phi - \phi)| \\
&\leq \|b\|_{(n,\infty)} \|e^{-(t-t_0)B} \phi - \phi\|_{(n',1)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0^+.
\end{aligned}$$

Como

$$\|v\|_{(q^*,\infty)}, \|w\|_{(q^*,\infty)} \leq c$$

e $t^{1/4} \|v\|_{2n}, t^{1/4} \|w\|_{2n} \leq c$, podemos obter

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow t_0^+} \left(\int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(wg) - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla v), \varphi \right) &= 0, \\
\lim_{t \rightarrow t_0^+} \left(\int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} f - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v \cdot \nabla w), \phi \right) &= 0.
\end{aligned}$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \left(e^{-(t-s)B} (v \cdot \nabla w), \phi \right) ds &\leq \int_{t_0}^t \|v\|_{(q^*,\infty)} \|w\|_{2n} \|\nabla e^{-(t-s)B} \phi\|_{((1-1/q^*-1/2n)^{-1},1)} \\
&\leq c \int_{t_0}^t s^{-1/4} (t-s)^{-n/2q-1/2} \|\phi\|_{(n',1)} \\
&\rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow t_0^+.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \left(e^{-(t-s)A} (v \cdot \nabla v), \varphi \right) ds &\leq \int_{t_0}^t \|v\|_{(q^*, \infty)} \|v\|_{2n} \|\nabla e^{-(t-s)A} \varphi\|_{((1-1/q^*-1/2n)^{-1}, 1)} \\
&\leq c \int_{t_0}^t s^{-1/4} (t-s)^{-n/2q-1/2} \|\varphi\|_{(n', 1)} \\
&\rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow t_0^+.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \left(e^{-(t-s)A} P(wg), \varphi \right) ds &\leq \int_{t_0}^t \|e^{-(t-s)A} P(wg)\|_{(n, \infty)} \|\varphi\|_{(n', 1)} \\
&\leq \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2q^*} ds \|w\|_{(q^*)} \|g\|_{(n, \infty)} \|\varphi\|_{(n', 1)} \\
&\rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow t_0^+.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \left(e^{-(t-s)B} f(s), \phi \right) ds &\leq \int_{t_0}^t \|e^{-(t-s)B} f(s)\|_{(n, \infty)} \|\phi\|_{(n', 1)} \\
&\leq \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2(1/n-1/n)} ds \|f\|_{(n, \infty)} \\
&\rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow t_0^+.
\end{aligned}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (3.47)-(3.48), pelas estimativas anteriores vemos que (v, w) é uma solução de (3.44)-(3.45).

Agora estimamos o intervalo de tempo da existência da solução em termos dos dados do problema. Como k é determinado por (3.58), temos que existe uma constante $\tilde{k}$ independente de t_0 tal que se $K_0 \leq \tilde{k}$, então as condições (3.57), (3.72), (3.87) são satisfeitas. Agora, de (3.56) vemos que T pode ser escolhido como

$$T \equiv \left[\frac{\tilde{k}}{c_1 \text{Max}\{\|a\|_{(n/\alpha, \infty)}, \|b\|_{(n/\alpha, \infty)} + \|f\|_{BC(\mathbb{R}; L^{l, \infty})}\}} \right]^{\frac{\alpha-1}{2}}. \quad (3.91)$$

Observação 3.30. A solução (v, w) das equações integrais (3.44)-(3.45) satisfaz que

$$v \in BC((t_0, t_0 + T); L_{\sigma}^{r^*})^n, \quad w \in BC((t_0, t_0 + T), L^{r^*}),$$

para todo $r^* \in (n, q^*)$, com

$$\|v\|_{r^*} \leq C \|v\|_{(n, \infty)}^{1-\lambda} \|u\|_{(q^*, \infty)}^{\lambda}, \quad \|w\|_{r^*} \leq C \|w\|_{(n, \infty)}^{1-\lambda} \|w\|_{(q^*, \infty)}^{\lambda}, \quad (3.92)$$

onde λ é tal que $1/r^* = (1-\lambda)/n + \lambda/q^*$.

Notemos que sendo a e b elementos de $L_\sigma^{(n,\infty)}(\Omega)^n \cap L_\sigma^{(q^*,\infty)}(\Omega)^n$ e $L^{(n,\infty)}(\Omega) \cap L^{(q^*,\infty)}(\Omega)$, respectivamente, temos que a e b pertencem a $L_\sigma^{r^*}(\Omega)^n$ e $L^{r^*}(\Omega)$, respectivamente. Consequentemente, as normas $\|e^{-(t-t_0)A}a\|_{r^*} \leq C\|a\|_{r^*}$ e $\|e^{-(t-t_0)B}b\|_{r^*} \leq C\|b\|_{r^*}$ são finitas. Além disso, não é difícil ver que

$$\begin{aligned} \left| \left(\int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla v) ds, \phi \right) \right| &\leq C \int_{t_0}^t \|v\|_{r^*}^2 (t-s)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{(r^*)'} - \frac{1}{(r^*/2)'}) - \frac{1}{2}} ds \|\phi\|_{(r^*)'}, \\ &\leq C \|v\|_{r^*}^2 \int_{t_0}^t (t-s)^{-\frac{n}{2r^*} - \frac{1}{2}} ds \|\phi\|_{(r^*)'}, \\ &\leq C \|\phi\|_{(r^*)'}, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$.

Por dualidade, temos que

$$\int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla v) ds \in L_\sigma^{r^*}(\Omega).$$

Analogamente, podemos ver que

$$\int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v \cdot \nabla w) ds \in L^{r^*}(\Omega).$$

Além disso, como

$$\left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(wg) ds \right\|_{r^*} \leq C \|w\|_{r^*} \|g\|_{(n,\infty)},$$

e

$$\left\| \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (f) ds \right\|_{r^*} \leq C \|f\|_{(n,\infty)},$$

concluimos que as igualdades (3.44)-(3.45) são satisfeitas em $L_\sigma^{r^*}(\Omega)^n$ e $L^{r^*}(\Omega)$, respectivamente.

Finalmente estudaremos a unicidade da solução. Seja (v_1, w_1) uma outra solução de (3.44)-(3.45), na classe dada pela Proposição 3.26, com a mesma condição inicial. seja $(V, W) = (v - v_1, w - w_1)$. Notemos que $(V(t), W(t)) \in L_\sigma^n \times L^n$ para todo $0 < t < T$, com

$$\sup_{t_0 < t < T} \|V(t)\|_n < \infty, \quad \sup_{t_0 < t < T} \|W(t)\|_n < \infty. \quad (3.93)$$

De fato, tomando $n < q < \min\{2n, r^*\}$ temos para toda $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$ e todo $t_0 < t < T$,

$$\begin{aligned}
|(V(t), \phi)| &\leq \left| \int_{t_0}^t (v \otimes v(s) - v_1 \otimes v_1, \nabla e^{-(t-s)A} \phi) ds \right| \\
&+ \left| \int_{t_0}^t (e^{-(t-s)A} P(Wg)(s), \phi) ds \right| \\
&\leq C(n, q) \left\{ \left(\sup_{t_0 < s < T} s^{n/2(1/n-1/q)} \|v(s)\|_q \right)^2 + \left(\sup_{t_0 < s < T} s^{n/2(1/n-1/q)} \|v_1(s)\|_q \right)^2 \right\} \|\phi\|_{n'} \\
&+ C(n, q) \left\{ \left(\sup_{t_0 < s < T} s^{n/2(1/n-1/q)} \|w(s)\|_q + \sup_{t_0 < s < T} s^{n/2(1/n-1/q)} \|w_1(s)\|_q \right) \right. \\
&\times \left. \left(\sup_{t_0 < s < T} s^{1/2} \|g\|_{(n,\infty)} \right) \right\} \|\phi\|_{n'}.
\end{aligned}$$

Analogamente, para toda $\varphi \in C_0^\infty$ e todo $t_0 < t < T$

$$\begin{aligned}
|(W(t), \varphi)| &\leq C(n, q) \left\{ \sup_{t_0 < s < T} s^{n/2(1/n-1/q)} \|v(s)\|_q \sup_{t_0 < s < T} s^{n/2(1/n-1/q)} \|w(s)\|_q \right. \\
&+ \left. \sup_{t_0 < s < T} s^{n/2(1/n-1/q)} \|v_1(s)\|_q \sup_{t_0 < s < T} s^{n/2(1/n-1/q)} \|w_1(s)\|_q \right\} \|\varphi\|_{n'}.
\end{aligned}$$

Por dualidade podemos concluir (3.93).

Definamos $K_V(t) \equiv \sup_{t_0 < t < T} \|V(t)\|_{(n,\infty)}$ e $K_W(t) \equiv \sup_{t_0 < t < T} \|W(t)\|_{(n,\infty)}$. Seja p tal que $1/p = 1 - 1/n - 1/r^*$. Então,

$$\begin{aligned}
|(V(t), \phi)| &\leq \left| \int_{t_0}^t (V \otimes v(s) - v_1 \otimes V(s), \nabla e^{-(t-s)A} \phi) ds \right| + \left| \int_{t_0}^t (e^{-(t-s)A} P(Wg)(s), \phi) ds \right| \\
&\leq \int_{t_0}^t (\|v(s)\|_r^* + \|v_1(s)\|_r) \|V(s)\|_n \|\nabla e^{-(t-s)L} \phi\|_p ds \\
&+ \int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} \|W(s)\|_n \|g\|_{(n,\infty)} \|\phi\|_{n'} \\
&\leq CK_V(t) \left(\sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v(s)\|_{r^*} + \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v_1(s)\|_{r^*} \right) \\
&\times \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2(1/n'-1/p)-1/2} s^{-n/2(1/n-1/r^*)} ds \|\phi\|_{n'} \\
&+ K_W s^{1/2} \|g\|_{(n,\infty)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \|\phi\|_{n'} \\
&\leq CK_V(t) B(1/2 - n/2r^*, 1/2 + n/2r^*) \|\phi\|_{n'} \\
&\times \left(\sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v(s)\|_{r^*} + \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v_1(s)\|_{r^*} \right) \\
&+ CK_W(t) B(1/2, 1/2) \sup_{t_0 < s < t} s^{1/2} \|g\|_{(n,\infty)} \|\phi\|_{n'},
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$ e todo $t_0 < t < T$. Por dualidade,

$$\begin{aligned} \|V(t)\|_n &\leq K_V(t) \left(\sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v(s)\|_{r^*} + \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v_1(s)\|_{r^*}^* \right) \\ &+ C_2 K_W(t) s^{1/2} \|g\|_{(n,\infty)}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} |(W(t), \varphi)| &\leq \int_{t_0}^t (\|w_1(s)\|_{r^*} \|V(s)\|_n + \|v(s)\|_{r^*} \|W(s)\|_n) \|\nabla e^{-(t-s)B} \varphi\|_p ds \\ &\leq C C K_V(t) \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|w_1(s)\|_{r^*} \|\varphi\|_{n'} + \\ &+ C K_W(t) \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v(s)\|_{r^*} \|\varphi\|_{n'}, \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty$ e todo $t_0 < t < T$. Por dualidade,

$$\begin{aligned} \|W(t)\|_n &\leq C_3 K_V(t) \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|w_1(s)\|_{r^*} \\ &+ C_4 K_W(t) \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v(s)\|_{r^*}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Seja $K(t) = \max\{K_V(t), K_W(t)\}$. Então temos que

$$\begin{aligned} \max\{\|U(t)\|_n, \|W(t)\|_n\} &\leq C_* K(t) \left(\sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v(s)\|_{r^*} \right. \\ &+ \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|v_1(s)\|_{r^*} \\ &+ \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|w(s)\|_{r^*} + \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} \|w_1(s)\|_{r^*} \\ &+ \tilde{C}_* K(t) s^{1/2} \|g\|_{(n,\infty)} \Big). \end{aligned}$$

Definamos a constante γ como sendo

$$k = \frac{1}{4\tilde{C}}, \quad \tilde{C} = C_* + C_{**}.$$

Pelas hipóteses do teorema, existe $t_0 < t_1 \leq T$, tal que

$$\begin{aligned} \sup_{t_0 < s < t} s^{n/2(1/n-1/r^*)} (\|w(s)\|_{r^*} + \|w_1(s)\|_{r^*} + \|v(s)\|_{r^*} + \|v_1(s)\|_{r^*}) + \\ + \sup_{t_0 < s < t} s^{1/2} < \frac{1}{2C}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Portanto temos que

$$\max\{\|V(t)\|_n, \|W(t)\|_n\} \leq \frac{1}{2}K(t), \text{ para } t_0 < t < t_1.$$

Como $K(t)$ é não-decrescente, concluimos que

$$\|V(t)\|_n \equiv 0, \quad \|W(t)\|_n \equiv 0,$$

para $t_0 < t \leq t_1$ e assim $v(t) = v_1(t), w(t) = w_1(t)$, sobre o intervalo $[t_0, t_1]$. Resta mostrar que

$$v(t) = v_1(t), w(t) = w_1(t), \text{ sobre } [t_0, T]. \quad (3.97)$$

Por definição, temos que

$$\sup_{t_1 < s < T} \|v(s)\|_{r^*} + \sup_{t_1 < s < T} \|v_1(s)\|_{r^*} \equiv M_1 < \infty \quad (3.98)$$

$$\sup_{t_1 < s < T} \|w(s)\|_{r^*} + \sup_{t_1 < s < T} \|w_1(s)\|_{r^*} \equiv M_2 < \infty. \quad (3.99)$$

Podemos concluir (3.97) a partir da seguinte proposição.

Proposição 3.31. *Existe uma constante $\xi = \xi(n, r, M_1, M_2)$ tal que, se $v = v_1$ e $w = w_1$ em $[t_0, \tau]$ para algum $\tau \in [t_1, T)$, então $v = v_1$ e $w = w_1$ em $[t_0, \tau + \xi]$.*

Demonstração:.(Proposição 3.31). Definamos $D_V(t) \equiv \sup_{\tau < s < t} \|V(s)\|_n$ e $D_W(t) \equiv \sup_{\tau < s < t} \|W(s)\|_n$. Similarmente aos cálculos feitos para mostrar (3.94)-(3.95), temos

$$\begin{aligned} |(V(t), \phi)| &\leq \int_{\tau}^t (\|v(s)\|_{r^*} + \|v_1(s)\|_r) \|V(s)\|_n \|\nabla e^{-(t-s)A} \phi\|_p ds \\ &+ \int_{\tau}^t (t-s)^{-1/2} \|W(s)\|_n \|g\|_{(n, \infty)} \|\phi\|_{n'} \\ &\leq CM_1 D_V(t) \int_{\tau}^t (t-s)^{-n/2r^*-1/2} ds \|\phi\|_{n'} \\ &+ D_W(t) \int_{\tau}^t (t-s)^{-1/2} \|g\|_{(n, \infty)} \\ &\leq CM_1 D_V(t - \tau)^{\frac{r-n}{2r^*}} \|\phi\|_{n'} + CD_W(t) \|g\|_{(n, \infty)}, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_{0, \sigma}^{\infty}$ e todo $\tau < t < T$.

Analogamente,

$$\|W(t)\|_n \leq C(M_1 D_V(t) + M_2 D_W(t))(t - \tau)^{\frac{r-n}{2r}}, \quad \tau < t < T. \quad (3.100)$$

Seja $D(t) \equiv \max\{D_V(t), D_W(t)\}$ e $M \equiv \max\{M_1, M_2\}$. Então temos que

$$\max(\|V(t)\|_n, \|W(t)\|_n) \leq \tilde{C} M D(t)(t - \tau)^{\frac{r-n}{2r}}.$$

Definamos ξ como sendo

$$\xi \equiv \frac{1}{(4CM)^{\frac{2r}{r-n}}}.$$

Então temos que

$$D(\tau + \xi) \leq \frac{1}{2} D(\tau + \xi).$$

Conseqüentemente, $D(\tau + \xi) = 0$. Isto implica que $v = v_1$ e $w = w_1$ sobre $[t_0, \tau + \xi]$, e assim a prova da unicidade é completada. ■

O seguinte lema da Teoria de semigrupos analíticos será usado na demonstração do Teorema 3.25. Para ver a prova deste lema, referimos o leitor a Tanabe [124], Cap. 3. Ver também Pazy [105], Cap. 2.

Lema 3.32. *Seja X um espaço de Banach, u_0 um elemento de X e $T(t)$ um semigrupo de classe C_0 gerado por um operador $\tilde{A}$. Suponha ainda que f é uma função Hölder contínua no tempo com valores em X , isto é, existem constantes K, γ , com $\gamma \leq 1$ tais que $\|f(t) - f(s)\|_X \leq K|t - s|^\gamma$ para $0 \leq t \leq T^*$ e $0 \leq s \leq T^*$. Então a função*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

é uma solução forte do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) &= \tilde{A}u(t) + f(t), \quad 0 < t \leq T^*, \\ u(0) &= u_0. \end{cases}$$

tal que $u \in C([0, T^]; X) \cap C^1((0, T^*]; X)$ e $u(t) \in D(\tilde{A})$ para cada $t \in (0, T^*]$ e $\tilde{A}u \in C((0, T^*]; X)$.*

Prova of Teorema 3.25. Pela Proposição 3.26 temos que existe $T \in (0, 1]$ e funções v, w na classe $v \in BC_w([t_0, t_0 + T]; L_\sigma^{(n, \infty)})^n$, $w \in BC_w([t_0, t_0 + T]; L^{(n, \infty)})$ com $v \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(q^*, \infty)})^n$, $w \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(q^*, \infty)})$ e $(t - t_0)^{1/2} \nabla v \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n, \infty)})^{n \times n}$, $(t - t_0)^{1/2} \nabla w \in BC((t_0, t_0 + T); L^{(n, \infty)})^n$, tal que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, o sistema integral (3.44)-(6.23) é satisfeito na norma do espaço L^{r^*} . Sendo (v, w) solução do sistema integral (3.44)-(6.23), podemos provar a Hölder continuidade no tempo dos termos

$$F(v, w) \equiv -P(v \cdot \nabla v) + P(wg), \quad G(v, w) \equiv -(v \cdot \nabla w) + f,$$

no espaço L^{r^*} . Para isto, seguimos as idéias de Kozono e Ogawa [70] (Lema A.4), e usamos a hipóteses de Hölder continuidade da função f . Estes argumentos são padrões por tanto omitiremos os detalhes. Finalmente usando o Lema 4.25, concluimos que a solução integral (v, w) satisfaz os itens da Definição 3.24. Isto conclui a prova do Teorema. $\blacksquare$

Prova do Teorema 3.5. Seja (u, θ) a solução periódica das equações integrais (3.12), (3.13) dada pelo Teorema 3.4. Como $u \in Y, \theta \in X$, pelo Lema 3.19 temos que $u \in BC(\mathbb{R}; L_\sigma^{(n, \infty)} \cap (L^{(q^*, \infty)})^n)$, $\theta \in BC(\mathbb{R}; L^{(n, \infty)} \cap L^{(q^*, \infty)})$. Seja T definido por (3.43). Pelo Teorema 3.25, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, existe uma solução forte (v, w) de (3.1)-(3.5) sobre o intervalo $(t_0, t_0 + T)$ com condição inicial $(u(t_0), \theta(t_0))$. De (3.35), (3.42) temos que

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|v(t)\|_{(q^*, \infty)} + \sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|\nabla u(t)\|_{(q, \infty)} \leq C_{7,1}, \quad (3.101)$$

$$\sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|w(t)\|_{(q^*, \infty)} + \sup_{t_0 < t < t_0 + T} \|\nabla \theta(t)\|_{(q, \infty)} \leq C_{7,2}, \quad (3.102)$$

onde $C_{7,1}, C_{7,2}$ são independentes de t_0 . Substituindo (a, b) por $(u(t_0), \theta(t_0))$ em (3.44), (6.23), por (3.12), (3.13), podemos ver que

$$\begin{aligned} u(t) - v(t) &= - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla u)(s) + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla v) \\ &\quad + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(\theta f) - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(wg) \\ &= - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P((u - v) \cdot \nabla u) - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P(v \cdot \nabla (u - v)) \\ &\quad + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)A} P((\theta - w)g) \\ &\equiv I_1(t) + I_2(t) + I_3(t), \quad t_0 < t < t_0 + T, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned}
\theta(t) - w(t) &= - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla \theta)(s) + \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v \cdot \nabla w)(s) \\
&= - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} ((u - v) \cdot \nabla \theta) - \int_{t_0}^t e^{-(t-s)B} (v \cdot \nabla (\theta - w))(s) \\
&\equiv I_4(t) + I_5(t), \quad t_0 < t < t_0 + T.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|I_1(t)\|_{(n,\infty)} &\leq C \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2(1/q)} \|(u-v)(s)\|_{(n,\infty)} \|\nabla u(s)\|_{(q,\infty)} ds \\
&\leq C \sup_{s \in \mathbb{R}} \|\nabla u(s)\|_{(q,\infty)} \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|(u-v)(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2q}, \tag{3.105}
\end{aligned}$$

para todo $t_0 < t < t_0 + T$, onde $C = C(n, q)$ independe de t_0 .

$$\begin{aligned}
|(I_2(t), \phi)| &= \left| \int_{t_0}^t (v \otimes (u-v)(s) \nabla e^{-(t-s)A} \phi) ds \right| \\
&\leq C \int_{t_0}^t \|v(s)\|_{(q^*,\infty)} \|\nabla e^{-(t-s)A} \phi\|_{(q',1)} \|u(s) - v(s)\|_{(n,\infty)} ds \\
&\leq C \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|v(s)\|_{(q^*,\infty)} \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|u(s) - v(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2q} \|\phi\|_{(n',1)},
\end{aligned}$$

para todo $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$ e para todo $t_0 < t < t_0 + T$, onde C é independente de t_0 . Por dualidade, concluimos que

$$\|I_2(t)\|_{(n,\infty)} \leq C \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|v(s)\|_{(q^*,\infty)} \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|u(s) - v(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2q}, \tag{3.106}$$

para todo $t_0 < t < t_0 + T$.

$$\begin{aligned}
\|I_3(t)\|_{(n,\infty)} &\leq C \int_{t_0}^t (t-s)^{-n/2(1/b)} \|\theta(s) - w(s)\|_{(n,\infty)} \|g\|_{(b,\infty)} ds \\
&\leq C \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|\theta(s) - w(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2b}, \tag{3.107}
\end{aligned}$$

para todo $t_0 < t < t_0 + T$, com C independente de t_0 .

Uma análise similar pode ser feita para estimar os termos I_4, I_5 e assim podemos concluimos que

$$\|I_4(t)\|_{(n,\infty)} \leq C \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|\nabla \theta(s)\|_{(\tilde{q},\infty)} \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|(u-v)(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{(1-n/2\tilde{q})} \quad (3.108)$$

$$\|I_5(t)\|_{(n,\infty)} \leq C \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|v(s)\|_{(q^*,\infty)} \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|\theta(s) - w(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2q}, \quad (3.109)$$

para todo $t_0 < t < t_0 + T$, com C independente de t_0 .

De (3.101)-(3.109) segue-se que para todo $t_0 < t < t_0 + T$,

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{(n,\infty)} &\leq C_1 \left(\sup_{t_0 < s < t_0+t} \|u(s) - v(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2q} + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|\theta(s) - w(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2b} \right), \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \|\theta(t) - w(t)\|_{(n,\infty)} &\leq C_2 \left(\sup_{t_0 < s < t_0+t} \|\theta(s) - w(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2q} + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t_0 < s < t_0+t} \|u(s) - v(s)\|_{(n,\infty)} (t-t_0)^{1-n/2\tilde{q}} \right), \end{aligned} \quad (3.111)$$

onde C_1, C_2 são constantes independentes de t_0 .

Para todo $t_0 < t < t_0 + T$ seja

$$E(t) = \max\{\|u(t) - v(t)\|_{(n,\infty)}, \|\theta(t) - w(t)\|_{(n,\infty)}\}.$$

Assim, segue-se de (3.110)-(3.111) que para qualquer $t_0 < t < t_0 + T$

$$E(t) \leq C_3 \sup_{t_0 < s < t_0+t} E(s) (t-t_0)^{1-n/2p},$$

onde $p = \max\{b, q\}$. Tomando $\varsigma \equiv \min\{(1/2C_3)^{2p/(2p-n)}, T\}$ concluímos que

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_3 \varsigma^{1-n/2p} \sup_{t_0 < s < t_0+t} E(s) \\ &\leq 1/2 \sup_{t_0 < t < t_0+t} E(s), \end{aligned}$$

para todo $t_0 < t < t_0 + \varsigma$, e assim encontramos que

$$E(t) \equiv 0 \text{ on } [t_0, t_0 + \varsigma].$$

Como ς pode ser tomado independentemente de t_0 , temos que $E(t) \equiv 0$ sobre $[t_0, t_0 + T]$. Isto implica $u = v$ em $[t_0, t_0 + T]$, $\theta = w$ em $[t_0, t_0 + T]$. Finalmente, como t_0 é arbitrário pelo Teorema 3.25, concluímos que (u, θ) é a solução requerida no Teorema 3.5. $\blacksquare$

3.4 Estabilidade das soluções periódicas

Nesta seção provaremos o Teorema 3.11, o Teorema 3.12 e o Teorema 3.13 relativos à estabilidade das soluções periódicas do sistema de Boussinesq.

3.4.1 Prova do Teorema 3.11.

Construiremos a solução branda de acordo com a seguinte sequência:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_0(t) &= e^{-tA}u_\epsilon, \\ \tilde{\theta}_0(t) &= e^{-tB}\theta_\epsilon,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{u}_{m+1}(t), \phi) &= (\tilde{u}_0(t), \phi) + \int_0^t (\tilde{u}_m \otimes \tilde{u}_m(s), \nabla e^{-(t-s)A}\phi)ds + \int_0^t (u \otimes \tilde{u}_m(s), \nabla e^{-(t-s)A}\phi)ds + \\ &+ \int_0^t (\tilde{u}_m \otimes u(s), \phi)ds + \int_0^t (e^{-(t-s)A}\tilde{\theta}_m g, \phi)(s)ds, \\ &\equiv (\tilde{u}_0(t), \phi) + (I_1(t), \phi) + (I_2(t), \phi) + (I_3(t), \phi) + (I_4(t), \phi), \\ (\tilde{\theta}_{m+1}(t), \varphi) &= (\tilde{\theta}_0(t), \varphi) + \int_0^t (\tilde{\theta}_m \tilde{u}_m(s), \nabla e^{-(t-s)B}\varphi)ds + \int_0^t (\theta \tilde{u}_m(s), \nabla e^{-(t-s)B}\varphi)ds + \\ &+ \int_0^t (\tilde{\theta}_m u(s), \nabla e^{-(t-s)B}\varphi)ds \\ &\equiv (\tilde{\theta}_0(t), \varphi) + (J_1(t), \varphi) + (J_2(t), \varphi) + (J_3(t), \varphi),\end{aligned}$$

para $m = 0, 1, \dots$, para todo $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$, $\varphi \in C_0^\infty$ e para todo $0 < t < \infty$. Primeiramente mostraremos que existem constantes positivas $K_{m,3}, K_{m,4}$, tais que para algum $\gamma \in (0, 1)$,

$$\sup_{0 < t < \infty} t^{\frac{1-\gamma}{2}} \|\tilde{u}_m(t)\|_{n/\gamma} \leq K_{m,3}, \quad \sup_{0 < t < \infty} t^{\frac{1-\gamma}{2}} \|\tilde{\theta}_m(t)\|_{n/\gamma} \leq K_{m,4}. \quad (3.112)$$

A prova é dada por indução. De fato, notemos que

$$\begin{aligned}|(\tilde{u}_0, \phi)| &\leq \|\tilde{u}_0(t)\|_{n/\gamma} \|\phi\|_{n/(n-\gamma)} \leq ct^{-(1-\gamma)/2} \|u_\epsilon\|_{(n,\infty)} \|\phi\|_{n/(n-\gamma)}, \\ |(\tilde{\theta}_0, \varphi)| &\leq \|\tilde{\theta}_0(t)\|_{n/\gamma} \|\varphi\|_{n/(n-\gamma)} \leq ct^{-(1-\gamma)/2} \|\theta_\epsilon\|_{(n,\infty)} \|\varphi\|_{n/(n-\gamma)}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sup_{0 < t < \infty} t^{\frac{1-\gamma}{2}} \|\tilde{u}_0(t)\|_{n/\gamma} &\leq c \|\tilde{u}_0\|_{(n,\infty)} = K_{0,3}, \\ \sup_{0 < t < \infty} t^{\frac{1-\gamma}{2}} \|\tilde{\theta}_0(t)\|_{n/\gamma} &\leq c \|\tilde{\theta}_0\|_{(n,\infty)} = K_{0,4}.\end{aligned}$$

Trabalhando como no Lema 3.27 obtemos que para todo $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$ e $\varphi \in C_0^\infty$ as seguintes estimativas são satisfeitas

$$\begin{aligned}
|(I_1(t), \phi)| &\leq \int_0^t \|\tilde{u}_m \otimes \tilde{u}_m(s)\|_{n/2\gamma} \|\nabla e^{-(t-s)A} \phi\|_{n/(n-2\gamma)} ds \\
&\leq cB\left(\frac{1-\gamma}{2}, \gamma\right) K_{m,3}^2 t^{\frac{\gamma-1}{2}} \|\phi\|_{n/(n-\gamma)}, \\
|(J_1(t), \varphi)| &\leq \int_0^t \|\tilde{\theta}_m \tilde{u}_m(s)\|_{n/2\gamma} \|\nabla e^{-(t-s)A} \varphi\|_{n/(n-2\gamma)} ds \\
&\leq cB\left(\frac{1-\gamma}{2}, \gamma\right) K_{m,3} K_{m,4} t^{\frac{\gamma-1}{2}} \|\varphi\|_{n/(n-\gamma)}, \\
|(I_4(t), \phi)| &\leq \int_0^t \|e^{-(t-s)A} (\tilde{\theta}_m g(s))\|_{n/\gamma} \|\phi\|_{n/(n-\gamma)} ds \\
&\leq cB(1/2, (\gamma+1)/2) K_{m,4} \|g\|_{(n,\infty)} \|\phi\|_{n/(n-\gamma)}.
\end{aligned}$$

Agora estimamos as integrais $I_2(t)$, $I_3(t)$, $J_2(t)$ e $J_3(t)$ com a ajuda do Lema 3.15. De fato,

$$\begin{aligned}
|(I_2(t), \phi)| &\leq \int_0^{t-1} |(u \otimes \tilde{u}_m(s), \nabla e^{-(t-s)A} \phi)| ds + \int_{t-1}^t |(u \otimes \tilde{u}_m(s), \nabla e^{-(t-s)A} \phi)| ds \\
&\leq C \left\{ \left(\sup_{0 \leq s \leq t} s^{(1-\gamma)/2} \|\tilde{u}_m(s)\|_{n/\gamma} \right) \|u\|_{BC(0,\infty;L(r,\infty))} \int_0^{t-1} (t-s)^{-n/2r-1/2} s^{(\gamma-1)/2} ds \right. \\
&\quad + \left(\sup_{0 \leq s \leq t} s^{(1-\gamma)/2} \|\tilde{u}_m(s)\|_{n/\gamma} \right) \|u\|_{BC(0,\infty;L(q^*,\infty))} \times \\
&\quad \times \left. \int_{t-1}^t (t-s)^{-n/2q^*-1/2} s^{(\gamma-1)/2} ds \right\} \|\phi\|_{n/(n-\gamma)}.
\end{aligned}$$

Então considerando primeiro o caso $t > 2$ e seguidamente o caso $t < 2$, depois de vários cálculos podemos concluir que

$$\begin{aligned}
|(I_2(t), \phi)| &\leq c(\gamma, r, q^*, n) (\|u\|_{BC(0,\infty;L(r,\infty))} + \|u\|_{BC(0,\infty;L(q^*,\infty))}) \times \\
&\quad \times \left(\sup_{0 \leq s \leq t} s^{(1-\gamma)/2} \|\tilde{u}_m(s)\|_{n/\gamma} \right) t^{(\gamma-1)/2} \|\phi\|_{n/(n-\gamma)}.
\end{aligned}$$

Os outros termos podem ser estimados de forma análoga. Na verdade, podemos obter que

$$\begin{aligned}
|(I_3(t), \phi)| &= \left| \int_0^t (\tilde{u}_m \otimes u(s), \nabla e^{-(t-s)A} \phi) ds \right| \leq \\
&\leq c(\gamma, r, q^*, n) (\|u\|_{BC(0,\infty;L(r,\infty))} + \|u\|_{BC(0,\infty;L(q^*,\infty))}) \times \\
&\quad \times \left(\sup_{0 \leq s \leq t} s^{(1-\gamma)/2} \|\tilde{u}_m(s)\|_{n/\gamma} \right) t^{(\gamma-1)/2} \|\phi\|_{n/(n-\gamma)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(J_2(t), \varphi)| &= \left| \int_0^t (\theta \cdot \tilde{u}_m(s), \nabla e^{-(t-s)A} \varphi) ds \right| \leq \\
&\leq c(\gamma, \tilde{r}, q^*, n) (\|\theta\|_{BC(0, \infty; L^{\tilde{r}, \infty})} + \|\theta\|_{BC(0, \infty; L^{(q^*, \infty)})}) \times \\
&\times \left(\sup_{0 < s < t} s^{(1-\gamma)/2} \|\tilde{u}_m(s)\|_{n/\gamma} \right) t^{(\gamma-1)/2} \|\varphi\|_{n/(n-\gamma)}. \\
\\
|(J_3(t), \varphi)| &= \left| \int_0^t (\tilde{\theta}_m \cdot u(s), \nabla e^{-(t-s)A} \varphi) ds \right| \leq \\
&\leq c(\gamma, r, q^*, n) (\|u\|_{BC(0, \infty; L^{(r, \infty)})} + \|u\|_{BC(0, \infty; L^{(q^*, \infty)})}) \times \\
&\times \left(\sup_{0 < s < t} s^{(1-\gamma)/2} \|\tilde{\theta}_m(s)\|_{n/\gamma} \right) t^{(\gamma-1)/2} \|\varphi\|_{n/(n-\gamma)}.
\end{aligned}$$

As desigualdades acima e a dualidade implicam (3.112) para o caso $m+1$, com

$$K_{m+1,3} = K_{0,3} + C_{8,1} K_{m,3}^2 + C_{9,1} K_{m,3} + C_{10,1} K_{m,4} \quad (3.113)$$

$$K_{m+1,4} = K_{0,4} + C_{8,2} K_{m,3} K_{m,4} + C_{9,2} K_{m,3} + C_{10,2} K_{m,4}, \quad (3.114)$$

onde $C_{9,1}$ e $C_{10,2}$ depende de $\|u\|_{BC(0, \infty; L^r)} + \|u\|_{BC(0, \infty; L^{q^*})}$ e $C_{10,1}$, $C_{9,2}$ depende de $\|g\|_{(n, \infty)}$ e $\|\theta\|_{BC(0, \infty; L^{\tilde{r}, \infty})} + \|\theta\|_{BC(0, \infty; L^{(q^*, \infty)})}$, respectivamente.

Fazendo $K_m = \max\{K_{m,3}, K_{m,4}\}$, $m = 0, 1, \dots$, de (3.113), (3.114) obtemos que

$$K_{m+1} \leq K_0 + C_1 K_m^2 + C_2 K_m,$$

para algumas constantes C_1, C_2 , onde C_2 depende de $\|u\|_{BC(0, \infty; L^r)} + \|u\|_{BC(0, \infty; L^{q^*})}$, $\|g\|_{(n, \infty)}$ e $\|\theta\|_{BC(0, \infty; L^{\tilde{r}, \infty})} + \|\theta\|_{BC(0, \infty; L^{q^*})}$. Consequentemente, se assumimos que

$$C_2 < 1, \quad (3.115)$$

$$4K_0 C_1 < (1 - C_2)^2, \quad (3.116)$$

então a sequência $\{K_m\}_{m=0}^\infty$ é limitada com

$$K_m \leq \frac{1 - C_2 - \sqrt{(1 - C_2)^2 - 4K_0 C_1}}{2C_1} \equiv k, \quad m = 0, 1, \dots \quad (3.117)$$

Notemos que as condições (3.115)-(3.116) implicam uma condição de pequenez de g, u, θ e do dado inicial $u_\epsilon, \theta_\epsilon$, nas respectivas normas. Isto permite ver que existe um par $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ tal que

$$t^{(1-\gamma)/2}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in BC(0, \infty; L_\sigma^{n/\gamma})^n \times BC(0, \infty; L^{n/\gamma}),$$

com

$$\sup_{0 < t < \infty} t^{(1-\gamma)/2} (\|\tilde{u}_m(t) - \tilde{u}(t)\|_{n/\gamma}, \|\tilde{\theta}_m(t) - \tilde{\theta}(t)\|_{n/\gamma}) \rightarrow (0, 0), \quad (3.118)$$

quando $m \rightarrow \infty$. Em particular, tomando $\gamma = 1/2$, obtemos a condição (ii) da Definição 3.9. Para provar que $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in BC_w([0, \infty); L_\sigma^{(n, \infty)})^n \times BC_w([0, \infty); L^{(n, \infty)})$, prosseguimos de maneira similar à prova das desigualdades (3.80), (3.81) ($s = 1$) usando argumentos de dualidade. Não é difícil ver que o limite $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ satisfaz a equação da Definição 3.9. Seguidamente provaremos (3.18). Como $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ é de classe $S_{2n}(0, \infty)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(t)\|_p &\leq C \|\tilde{u}(t)\|_{(2n, \infty)}^\eta \|\tilde{u}(t)\|_{(n, \infty)}^{1-\eta} \leq C \|\tilde{u}(t)\|_{2n}^\eta \|\tilde{u}(t)\|_{(n, \infty)}^{1-\eta} \leq C t^{-(1-n/p)/2}, \\ \|\tilde{u}(t)\|_p &\leq C \|\tilde{\theta}(t)\|_{(2n, \infty)}^\eta \|\tilde{\theta}(t)\|_{(n, \infty)}^{1-\eta} \leq C \|\tilde{\theta}(t)\|_{2n}^\eta \|\tilde{\theta}(t)\|_{(n, \infty)}^{1-\eta} \leq C t^{-(1-n/p)/2}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

para $n < p < 2n$, onde $1/p = (1 - \eta)/n + \eta/2n$. Além disso, como

$$\|\tilde{u}(t)\|_{(n, \infty)} \leq k, \quad t^{1/4} \|\tilde{u}(t)\|_{2n} \leq k,$$

concluimos a prova de (3.18) para $n < p \leq 2n$. Quando $p > 2n$ temos que

$$\begin{aligned} t^{(1-n/r)/2} u &\in L^\infty((0, \infty); L_\sigma^r)^n, \\ t^{(1-n/r)/2} \theta &\in L^\infty((0, \infty); L_\sigma^r), \end{aligned}$$

desde que (3.115)-(3.116) sejam verificadas para $\gamma = n/r$. Usando a desigualdade de Hölder, podemos concluir (3.18) para $p > 2n$ e assim a prova do Teorema 3.11 esta concluída. ■

Observação 3.33. *Em concordância com Teorema 3.11, seguindo as idéias de [16], podemos mostrar que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\|\tilde{u}(t)\|_{(n, \infty)}, \|\tilde{\theta}(t)\|_{(n, \infty)}) = (0, 0), \quad (3.120)$$

desde que u_ϵ e θ_ϵ sejam elementos do fecho, na norma $L^{(n, \infty)}$, dos espaços $C_{0, \sigma}^\infty, C_0^\infty$, respectivamente.

3.4.2 Prova do Teorema 3.12

Seja $(\tilde{u}^1, \tilde{\theta}^1)$ uma outra solução branda de (3.17), com a mesma condição inicial, na classe $S_{2n}(0, \infty)$ satisfazendo a condição (3.19). Seja $(U, \Theta) = (\tilde{u} - \tilde{u}^1, \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^1)$ e definamos $K_U(t) \equiv \sup_{t>0} \|U(t)\|_{(n, \infty)}$, e $K_\Theta(t) \equiv \sup_{t>0} \|\Theta(t)\|_{(n, \infty)}$. Notemos que para cada $\phi \in C_{0, \sigma}^\infty$ e $0 < t < \infty$, temos

$$\begin{aligned} |(U(t), \phi)| &\leq \left| \int_0^t (U \otimes \tilde{u}(s) + \tilde{u}^1 \otimes U, \nabla e^{-(t-s)A} \phi) ds \right| \\ &+ \left| \int_0^t (U \otimes u(s) + u \otimes U, \nabla e^{-(t-s)A} \phi) ds \right| \\ &+ \left| \int_0^t (e^{-(t-s)A} P(\Theta g)(s), \phi) ds \right| \\ &\equiv (I_1(t), \phi) + (I_2(t), \phi) + (I_3(t), \phi). \end{aligned}$$

Estimando os termos I_1, I_2, I_3 , temos que

$$\begin{aligned} |(I_1(t), \phi)| &\leq CK_U(t) \left(\sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}\|_{2n} + \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}^1\|_{2n} \right) \int_0^t (t-s)^{-3/4} s^{-1/4} ds \|\phi\|_{(n', 1)} \\ &\leq CB(1/4, 3/4) \left(\sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}\|_{2n} + \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}^1\|_{2n} \right) K_U(t) \|\phi\|_{(n', 1)}. \\ |(I_2(t), \phi)| &\leq CK_U \left(\sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|u\|_{(q^*, \infty)} \right) \int_0^t (t-s)^{-n/2q^*} s^{n/2q-1} ds \|\phi\|_{(n', 1)} \\ &\leq CB(n/2q + 1/2, n/2q) K_U(t) \left(\sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|u\|_{(q^*, \infty)} \right) \|\phi\|_{(n', 1)}. \\ |(I_3(t), \phi)| &\leq CB(1/2, 1/2) K_\Theta(t) \left(\sup_{s>0} s^{1/2} \|g\|_{(n, \infty)} \right) \|\phi\|_{(n', 1)}. \end{aligned}$$

Portanto, por dualidade,

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{(n, \infty)} &\leq \{C_1 \left(\sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}\|_{2n} + \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}^1\|_{2n} \right) + C_2 \left(\sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|u\|_{(q^*, \infty)} \right)\} K_U(t) + \\ &+ C_3 \left(\sup_{s>0} s^{1/2} \|g\|_{(n, \infty)} \right) K_\Theta(t). \end{aligned}$$

Analogamente, para toda $\varphi \in C_0^\infty$ e $0 < t < \infty$, temos

$$\begin{aligned} |(\Theta(t), \varphi)| &\leq \left| \int_0^t (\tilde{\theta} \cdot U(s) + \Theta \cdot \tilde{u}^1(s), \nabla e^{-(t-s)B} \varphi) ds \right| \\ &+ \left| \int_0^t (\Theta \cdot u(s) + \theta \cdot U(s), \nabla e^{-(t-s)B} \varphi) ds \right| \\ &\equiv (J_1(t), \varphi) + (J_2(t), \varphi). \end{aligned}$$

Estimando os termos J_1, J_2 como nas últimas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned} |(J_1(t), \varphi)| &\leq C(K_U(t) \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{\theta}\|_{2n} + K_\Theta(t) \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}^1\|_{2n}) \|\varphi\|_{(n',1)} \\ |(J_2(t), \varphi)| &\leq C(K_\Theta(t) \sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|u\|_{(q^*,\infty)} + K_U(t) \sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|\theta\|_{(q^*,\infty)}) \|\varphi\|_{(n',1)}. \end{aligned}$$

Portanto, por dualidade,

$$\begin{aligned} \|\Theta(t)\|_{(n,\infty)} &\leq \{C_4(\sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|u\|_{(q^*,\infty)} + \sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|\theta\|_{(q^*,\infty)})\}(K_\Theta(t) + K_U(t)) + \\ &+ C_5(\sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{\theta}\|_{2n} + \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}^1\|_{2n})(K_\Theta(t) + K_U(t)). \end{aligned}$$

Seja $K(t) = \max\{K_U(t), K_\Theta(t)\}$. Então temos que

$$\begin{aligned} \max\{\|U(t)\|_{(n,\infty)}, \|\Theta(t)\|_{(n,\infty)}\} &\leq C_* \left\{ \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{\theta}\|_{2n} + \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}^1\|_{2n} + \right. \\ &+ \left. \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}\|_{2n} \right\} K(t) + \\ &+ C_{**} \left\{ \sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|u\|_{(q^*,\infty)} + \sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|\theta\|_{(q^*,\infty)} + \right. \\ &+ \left. \sup_{s>0} s^{1/2} \|g\|_{(n,\infty)} \right\} K(t). \end{aligned}$$

Definamos a constante k como sendo

$$k = \frac{1}{4\tilde{C}}, \quad \tilde{C} = C_* + C_{**}.$$

Pelas hipóteses do teorema, existe $0 < t_0 < \infty$, tal que

$$\begin{aligned} &(\sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{\theta}\|_{2n} + \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}^1\|_{2n} + \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{u}\|_{2n} + \sup_{s>0} s^{1/4} \|\tilde{\theta}^1\|_{2n}) + \\ &(\sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|u\|_{(q^*,\infty)} + \sup_{s>0} s^{1-n/2q} \|\theta\|_{(q^*,\infty)} + \sup_{s>0} s^{1/2} \|g\|_{(n,\infty)}) \leq \frac{1}{2\tilde{C}}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\max\{\|U(t)\|_{(n,\infty)}, \|\Theta(t)\|_{(n,\infty)}\} \leq \frac{1}{2} K(t), \quad \text{para } 0 < t \leq t_0.$$

Como $K(t)$ é não-decrescente, temos que

$$\|U(t)\|_{(n,\infty)} \equiv 0, \quad \|\Theta(t)\|_{(n,\infty)} \equiv 0,$$

para $0 < t \leq t_0$ e assim $\tilde{u}(t) = \tilde{u}^1(t), \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}^1(t)$, sobre o intervalo $[0, t_0]$. Usando cálculos análogos aos feitos na prova da unicidade no Teorema 3.25, não é difícil mostrar que existe uma constante $\varsigma > 0$ tal que se $\tilde{u}(t) = \tilde{u}^1(t), \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}^1(t)$ em $[0, \tau]$ para algum $\tau \in [t_0, \infty)$, então temos que $\tilde{u}(t) = \tilde{u}^1(t), \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}^1(t)$ em $[0, \tau + \varsigma]$. Isto permite concluir a demonstração do teorema. $\blacksquare$

3.4.3 Prova do Teorema 3.13

Para provar o Teorema 3.13 faremos uso do seguinte lema de existência local de soluções po problema de valor inicial.

Lema 3.34. *Seja $(u_\epsilon, \theta_\epsilon) \in (L_\sigma^{(n, \infty)} \cap L_\sigma^{2n}) \times (L^{(n, \infty)} \cap L^{2n})^n$ e (u, θ) definida sobre $(0, \infty)$ a solução periódica forte de (3.1)-(3.5). Então existe $T^* > 0$ e uma única solução branda $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ de (3.17) na classe $S_{2n}(0, T^*)$ satisfazendo*

$$\tilde{u}(t) = e^{-tA}u_\epsilon - \int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} + u \cdot \nabla \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla u + \tilde{\theta}g)(s)ds, \text{ em } L_\sigma^{(n, \infty)} \quad (3.121)$$

$$\tilde{\theta}(t) = e^{-tB}\theta_\epsilon - \int_0^t e^{-(t-s)B}(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\theta} + u \cdot \nabla \tilde{\theta} + \tilde{u} \cdot \nabla \theta)(s)ds, \text{ em } L^{(n, \infty)}. \quad (3.122)$$

Além disso $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ é também uma solução forte de (3.17) em $(0, T^*)$.

Demonstração:. Construiremos a solução forte de acordo com o seguinte esquema sequencial:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(t) &= e^{-tA}u_\epsilon, \\ \tilde{\theta}_0(t) &= e^{-tB}\theta_\epsilon, \\ \tilde{u}_{m+1}(t) &= e^{-tA}u_\epsilon - \int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{u}_m \cdot \nabla \tilde{u}_m)(s)ds - \int_0^t e^{-(t-s)A}P(u \cdot \nabla \tilde{u}_m)(s)ds - \\ &\quad - \int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{u}_m \cdot \nabla \tilde{u})(s)ds - \int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{\theta}_m g)(s)ds \\ \tilde{\theta}_{m+1}(t) &= e^{-tB}\theta_\epsilon - \int_0^t e^{-(t-s)B}(u \cdot \nabla \tilde{\theta}_m)(s)ds - \int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{u}_m \cdot \nabla \theta)(s)ds - \\ &\quad - \int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{u}_m \cdot \nabla \tilde{\theta}_m)(s)ds. \end{aligned}$$

Assim, usando que (u, θ) é uma solução forte de (3.1)-(3.5) podemos ver que para todo $0 < T < \infty$,

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} t^{1/4} \|\tilde{u}_m(t)\|_{2n} &\leq K_{m,1}^T, \\ \sup_{0 < t < T} t^{1/4} \|\tilde{\theta}_m(t)\|_{2n} &\leq K_{m,2}^T, \\ \sup_{0 < t < T} t^{1/2} \|\nabla \tilde{u}_m(t)\|_{(n,\infty)} &\leq L_{m,1}^T, \\ \sup_{0 < t < T} t^{1/2} \|\nabla \tilde{\theta}_m(t)\|_{(n,\infty)} &\leq L_{m,2}^T, \end{aligned}$$

para algumas constantes $K_{m,1}^T, K_{m,2}^T, L_{m,1}^T, L_{m,2}^T$ e $m = 0, 1, \dots$. Omitiremos esta prova pois os cálculos são essencialmente análogos aos feitos na demonstração do Lema 3.27 e do Lema 3.28. Portanto, de forma análoga ao Teorema 3.25, podemos ver que existe $T^* > 0$ o qual depende de $\|u\|_{(q^*, \infty)}, \|\theta\|_{(q^*, \infty)}, \|u_\epsilon\|_{2n}, \|\theta_\epsilon\|_{2n}$ e um limite $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ tal que

$$\begin{aligned} t^{1/4} \tilde{u} &\in BC([0, T^*]; L_\sigma^{2n})^n, \\ t^{1/4} \tilde{\theta} &\in BC([0, T^*]; L^{2n}), \end{aligned}$$

satisfazendo,

$$\sup_{0 < t < T^*} \|\tilde{u}_m - \tilde{u}\|_{2n} \rightarrow 0, \text{ quando } m \rightarrow \infty, \quad (3.123)$$

$$\sup_{0 < t < T^*} \|\tilde{\theta}_m - \tilde{\theta}\|_{2n} \rightarrow 0, \text{ quando } m \rightarrow \infty. \quad (3.124)$$

Além disso,

$$t^{1/2}(\nabla \tilde{u}, \nabla \tilde{\theta}) \in BC_w([0, T^*]; L^{(n,\infty)})^{n \times n} \times BC_w([0, T^*]; L^{(n,\infty)})^n,$$

e

$$(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in BC_w([0, T^*]; L_\sigma^{(n,\infty)})^{n \times n} \times BC_w([0, T^*]; L^{(n,\infty)})^n.$$

Assim, de forma análoga ao feito na prova do Teorema 3.12, podemos ver que $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ é a única solução de (3.17) na classe $S_{2n}(0, T^*)$ satisfazendo (3.19). Segue-se da Definição 3.9 que

$$\begin{aligned} (\tilde{u}(t), \phi) &= (e^{-tA} u_\epsilon, \phi) - \int_0^t (e^{-(t-s)A} P(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u})(s), \phi) ds - \\ &- \int_0^t (e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla \tilde{u})(s), \phi) ds - \int_0^t (e^{-(t-s)A} P(\tilde{u} \cdot \nabla u)(s), \phi) ds - \\ &- \int_0^t (e^{-(t-s)A} P(\tilde{\theta} g)(s), \phi) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\theta}(t), \varphi) &= (e^{-tB}\theta_\epsilon, \varphi) - \int_0^t (e^{-(t-s)B}(u \cdot \nabla \tilde{\theta})(s), \varphi) ds \\
&\quad - \int_0^t (e^{-(t-s)A}P(\tilde{u} \cdot \nabla \theta)(s), \varphi) ds - \int_0^t (e^{-(t-s)A}P(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\theta})(s), \varphi) ds,
\end{aligned}$$

para todo $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty$, $\varphi \in C_0^\infty$ e todo $0 < t < T^*$.

Podemos mostrar que os termos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u})(s) ds, \\
&\int_0^t e^{-(t-s)A}P(u \cdot \nabla \tilde{u})(s) ds, \\
&\int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{\theta}g)(s) ds, \\
&\int_0^t e^{-(t-s)A}P(\tilde{u} \cdot \nabla u)(s) ds,
\end{aligned}$$

pertencem ao espaço $L_\sigma^{(n,\infty)}$ para $0 < t < T^*$.

Da mesma maneira os termos

$$\begin{aligned}
&\int_0^t e^{-(t-s)B}(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\theta})(s) ds, \\
&\int_0^t e^{-(t-s)B}(\tilde{u} \cdot \nabla \theta)(s) ds, \\
&\int_0^t e^{-(t-s)B}(u \cdot \nabla \tilde{\theta})(s) ds,
\end{aligned}$$

pertencem ao espaço $L^{(n,\infty)}$ para $0 < t < T^*$.

Assim, obtemos que (3.121)-(3.122) são satisfeitas nos espaços $L_\sigma^{(n,\infty)}$, $L^{(n,\infty)}$, respectivamente.

A continuação mostraremos que esta solução branda $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ é na verdade uma solução forte. Seja $p \in (n, 2n)$. Pelas hipóteses do lema, os dados iniciais satisfazem

$$u_\epsilon \in L_\sigma^p(\Omega)^n, \theta_\epsilon \in L^p(\Omega),$$

com

$$\|u_\epsilon\|_p \leq C \|u_\epsilon\|_{(n,\infty)}^{(1-\eta)} \|u_\epsilon\|_{2n}^\eta, \quad \|\theta_\epsilon\|_p \leq C \|\theta_\epsilon\|_{(n,\infty)}^{(1-\eta)} \|\theta_\epsilon\|_{2n}^\eta,$$

onde $1/p = (1-\eta)/n + \eta/2n$. Portanto, as normas

$$\|e^{-tA}u_\epsilon\|_p \leq C \|u_\epsilon\|_p, \quad \|e^{-tB}\theta_\epsilon\|_p \leq C \|\theta_\epsilon\|_p,$$

são finitas. Também podemos mostrar que os termos

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-(t-s)A} P(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u})(s) ds, \\ & \int_0^t e^{-(t-s)A} P(u \cdot \nabla \tilde{u})(s) ds, \\ & \int_0^t e^{-(t-s)A} P(\tilde{\theta}g)(s) ds, \\ & \int_0^t e^{-(t-s)A} P(\tilde{u} \cdot \nabla u)(s) ds, \end{aligned}$$

pertencem ao espaço L_σ^p para $0 < t < T^*$. Da mesma maneira os termos

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-(t-s)B} (\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\theta})(s) ds, \quad \int_0^t e^{-(t-s)B} (\tilde{u} \cdot \nabla \theta)(s) ds, \\ & \int_0^t e^{-(t-s)B} (u \cdot \nabla \tilde{\theta})(s) ds, \end{aligned}$$

pertencem ao espaço L^p para $0 < t < T^*$.

Finalmente, trabalhando de forma análoga ao feito na demonstração do Teorema 3.25, podemos provar a Hölder continuidade no tempo dos termos

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}g, \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u}, u \cdot \nabla \tilde{u}, \tilde{u} \cdot \nabla u, \\ & \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\theta}, u \cdot \nabla \tilde{\theta}, \tilde{u} \cdot \nabla \theta, \end{aligned}$$

no espaço L^p . Por último usamos novamente o Lema 4.25, o qual nos permite concluir que a solução integral $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ satisfaz os itens da Definição 3.24. Isto conclui a prova do lema. ■

Como na Seção 3, com a ajuda do Lema 3.34 e a unicidade da solução branda, podemos ver que $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ é uma solução forte. Omitiremos aqui mais detalhes da prova pois ela é semelhante à demonstração do Teorema 3.5. ■

CAPÍTULO 4

Existência global e estabilidade exponencial para as equações dos fluidos micropolares

The essence of mathematics lies in its freedom.

Georg Cantor

4.1 Introdução

Neste capítulo estamos interessados no estudo da existência global, comportamento assintótico e estabilidade das soluções para as equações de fluidos micropolares. Fluidos micropolares são fluidos não Newtonianos, com tensor stress assimétrico, cujo modelo foi introduzido por Eringer [31]. Este modelo é uma essencial generalização do modelo das equações de Navier-Stokes no sentido que descreve a dinâmica de fluidos com micro estrutura, isto é, as partículas imersas estão sujeitas tanto a translações como a rotações o que leva ao conhecimento duma nova grandeza que é a velocidade angular para obter uma completa descrição do escoamento.

O modelo é dado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - (\mu + \mu_r)\Delta u + \nabla p = 2\mu_r \text{rot} w + f, & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \text{div} u = 0, & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ w_t + u \cdot \nabla w - \chi\Delta w - \gamma\nabla \text{div} w + 4\mu_r w = 2\mu_r \text{rot} u + g & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4.1)$$

Ao longo deste capítulo, estas equações serão consideradas em um conjunto da forma $\Omega \times (0, \infty)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado, representando o domínio do fluido, com fronteira $\partial\Omega$ sendo suave e $(0, \infty)$ sendo o intervalo de tempo. Completamos o sistema adicionando as seguintes condições iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} u(x, t) = 0, \quad w(x, t) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

Em (4.1) as incógnitas são $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)(x, t)$, $w(x, t) = (w_1, w_2, w_3)(x, t)$ and $p(x, t)$ denotando o campo de velocidade, a velocidade angular de rotação das partículas e a pressão hidrostática do fluido no ponto $x \in \Omega$ e no tempo $t \in (0, \infty)$, respectivamente. A densidade do fluido esta sendo considerada, sem perda de generalidade, sendo constante igual a um. As equações $(4.1)_1$, $(4.1)_3$ representam as leis de conservação do momento linear e do momento angular, respectivamente. A equação $(4.1)_2$ corresponde à incompressibilidade do fluido. Os campos $f = (f_1, f_2, f_3)$ e $g = (g_1, g_2, g_3)$ são densidades de forças externas para o momentum linear e angular das partículas, respectivamente, as quais iremos considerar, por simplicidade nos cálculos, sendo identicamente nulas. Quando f, g são diferentes de zero, obtemos resultados similares aos que iremos apresentar neste capítulo, desde que estas forças estejam em espaços de funções convenientes. As constantes positivas $\mu, \mu_r, \gamma = c_0 + c_d - c_a, \chi = c_a + c_d$, caracterizam as propriedades físicas do fluido; μ é a viscosidade cinemática usual, μ_r, c_0, c_a, c_d são novas viscosidades relacionadas com a assimetria e, em consequencia, com o campo de rotação interna w . Assumimos que $c_0 + c_d > c_a$. Denotamos por u_0 e w_0 os dados do problema representando respectivamente as velocidades iniciais. Na formulação (4.1) as componentes i -ésimas de $(u \cdot \nabla u)$ e $(u \cdot \nabla w)$ são dadas, respectivamente, por

$$(u \cdot \nabla u)_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \quad (u \cdot \nabla w)_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j}.$$

Convém notar que se o parâmetro μ_r é zero, o sistema $(4.1)_1$ -(4.1)₂ se reduz ao conhecido sistema de Navier-Stokes e o campo de velocidade angular u se torna independente do campo

de velocidade de microrotação w . Para a derivação das equações (4.1) e uma discussão ampla do seu significado físico, referimos o leitor ver [31].

Consideráveis avanços têm sido dados do ponto de vista da análise matemática do sistema (4.1)-(4.2); em particular, no que respeita à existência de soluções fracas e fortes. Veja por exemplo, [80], [81], [82], [83] e as referências ali citadas. No artigo [83] se estuda o problema estacionário associado, em [82] a existência de soluções fracas para o modelo de evolução e em [81] a existência e unicidade de soluções fortes. Estes trabalhos foram feitos em domínios limitados e a técnica utilizada pelo autor foi linearização em conjunto com um teorema de quase-ponto-fixo. Os resultados obtidos são análogos aos conhecidos para equações de Navier-Stokes clássicas.

Em [110] se estuda o modelo acoplado com uma equação para o campo magnético em domínios limitados, provando-se a existência e unicidade de soluções locais fortes. Estes resultados foram obtidos fazendo uso do Método de Galerkin espectral em conjunto com o Método de energia e argumentos de compacidade. Em [100] se demonstra a existência e unicidade de soluções globais fortes ao mesmo nível das equações clássicas de Navier-Stokes.

Analogamente, como no caso das equações de Navier-Stokes clássicas, as soluções fracas no problema tridimensional não são necessariamente únicas (de fato, é um dos problemas em aberto clássicos da teoria das equações de Navier-Stokes). Na teoria das equações de Navier-Stokes, Serrin [117] mostra condições suficientes para a unicidade. Resultados análogos no caso das equações de fluidos micropolares foram estudados no trabalho [101], onde também se estabelece a existência das derivadas fracionárias temporais.

Em [84] é estudada a existência e unicidade de soluções periódicas fortes para uma classe abstrata de equações diferenciais parciais (incluindo as equações micropolares em domínios limitados), utilizando novamente a técnica de Galerkin.

No caso de domínios não-cilíndricos, isto é, domínios que mudam com o tempo, em [111], [102] foi estudada a existência de soluções fortes para uma classe especial de domínios e em [108] foi analisada a existência de soluções fracas para domínios mais gerais. A idéia dos três trabalhos mencionados acima é o uso duma transformação para levar o problema inicial a um problema de domínio fixo, resolver o problema neste novo domínio e depois retornar ao domínio inicial através de uma aplicação adequada.

Para domínios exteriores, em [29] estuda-se o problema estacionário e em [30] o problema

de evolução. Neste último caso, na sua abordagem foi utilizada a técnica de imersão de domínios introduzida por Ladyzhenskaya no estudo das equações de Navier-Stokes (veja também Heywood [57]).

Entretanto, todos esses resultados são essencialmente baseados na teoria dos espaços L^2 . Recentemente, Yamaguchi [130] abordou o estudo do sistema (4.1)-(4.2) do ponto de vista da Teoria de semigrupos e provou a existência de soluções globais fortes do problema de valor inicial, com dados pequenos com a mesma regularidade tanto para a velocidade angular como para a velocidade de microrotação. Convém notar que [130] é o único trabalho baseado nesta teoria do qual o autor tem conhecimento.

Neste capítulo trabalhamos dois aspectos principalmente. Em primeiro lugar provamos a existência global de soluções fortes para o sistema (4.1)-(4.2) com condições de pequenez sobre os parâmetros em espaços onde a regularidade para a velocidade angular e a velocidade de microrotação não são necessariamente iguais, contrario ao feito por Yamaguchi [130] e em segundo lugar provamos que tais soluções convergem uniformemente para soluções estacionárias quando $t \rightarrow \infty$ com uma taxa de decaimento exponencial, aspecto que não foi abordado até o momento na literatura. Neste contexto, as soluções estacionárias serão ditas soluções assintoticamente estáveis. Consideramos os dados iniciais u_0, w_0 satisfazendo $(u_0, w_0) \in L^3(\Omega) \times L^m(\Omega)$, para $m \geq 3/2$. Em particular mostramos a existência de soluções fortes no espaço $L^3(\Omega) \times L^3(\Omega)$, espaço que é importante dentro da teoria das equações de Navier-Stokes. Veja Giga e Miyakawa [48], Kozono e Ozawa [72].

Para mostrar a existência de soluções estacionárias para o sistema (4.1) no espaço $L^3(\Omega) \times L^m(\Omega)$, faremos uso de técnicas do ponto fixo. Por outra parte, para provar a existência global e o comportamento assintótico das soluções do sistema (4.1)-(4.2), estabelecemos estimativas do tipo $(L^p \times L^q) - (L^r \times L^s)$ para o semigrupo analítico gerado pelo operador linearizado ao redor da solução estacionária. Convém notar que estas estimativas incluem os casos $p \neq q$ e $r \neq s$, as quais são necessárias para resolver (4.1)-(4.2) com $w_0 \in L^m(\Omega)$ para $m < 3$. Neste sentido, nossos resultados sobre existência global de soluções fortes, generalizam os resultados de Yamaguchi [130] quem analisou somente o caso $p = q$ e $r = s$ para o problema de valor inicial. Além disso, o semigrupo é obtido através das estimativas $(L^p \times L^q) - (L^r \times L^s)$ para o resolvente do operador linearizado, as quais clarificam como o comportamento do resolvente com respeito ao parâmetro espectral, depende dos expoentes p, q, r e s .

Do ponto de vista da estabilidade, Kozono e Ogawa [72], estudaram a estabilidade para as equações de Navier-Stokes via caracterização das potências fracionárias do respectivo operador linearizado em lugar das estimativas $L^p - L^r$ para o semigrupo. A estabilidade via estimativas do tipo $L^p - L^r$ do semigrupo gerado pelo operador linearizado, tem sido estudado por Borchers e Miyakawa [16], Chen [20], Kozono e Ogawa [71].

O restante deste capítulo está organizado da seguinte maneira. Na segunda seção apresentamos alguns resultados preliminares, damos algumas definições e estabelecemos nossos principais resultados. Na Seção 3, estudamos o caso estacionário mostrando um resultado de existência e unicidade de solução forte. Na quarta seção analisamos o operador linearizado e na última seção provaremos a existência e estabilidade das soluções globais.

4.2 Preliminares e resultados principais

Antes de estabelecer nossos resultados, introduziremos a notação que será usada ao longo deste capítulo e algumas definições. Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave $\partial\Omega$. Consideramos os espaços de Sobolev usuais

$$W^{m,q}(\Omega) = \{f \in L^q(\Omega) : \|\partial^k f\|_{L^q(\Omega)} < \infty, \text{ para } |k| \leq m\},$$

para $m \geq 1$ e $1 \leq q \leq \infty$ com a norma denotada por $\|\cdot\|_{m,q}$. Como é usual, denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ (funções de classe $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto) em $W^{1,p}(\Omega)$. Denotamos por $\|\cdot\|_{\{p,q\}}$ a norma no espaço $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$ e por $\|\cdot\|_{\{p,q\} \rightarrow \{r,s\}}$ (respectivamente, $\|\cdot\|_{p \rightarrow r}$) a norma de um operador limitado de $L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega) \times L^s(\Omega)$ (respectivamente, de $L^p(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega)$). Denotamos o espaço $C_{0,\sigma}^\infty$ como sendo o conjunto das funções C_0^∞ com divergência nula y conseqüentemente, denotamos por $L_\sigma^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ o fecho do espaço $C_{0,\sigma}^\infty$ na norma $L^p(\Omega)$.

Sabemos por Fujiwara e Morimoto [41], que vale a decomposição de Helmholtz do espaço de campos vetoriais L^p como sendo

$$L^p(\Omega) = L_\sigma^p(\Omega) \oplus \{\nabla q : q \in W^{1,p}(\Omega)\}.$$

Lembramos que o espaço $L_\sigma^p(\Omega)$ pode ser caracterizado por ([42])

$$L_\sigma^p(\Omega) = \{\phi \in L^p(\Omega)^3 : \operatorname{div} \phi = 0 \text{ em } \Omega, \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Seja $P = P_p$ o operador projeção de $L^p(\Omega)$ em $L_\sigma^p(\Omega)$. Então o operador de Stokes em $L_\sigma^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ é definido por

$$D(A_p) = L_\sigma^p(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega), \quad A_p u = -P_p \Delta u.$$

Definimos também o operador de Laplace em $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, por

$$D(B_q) = W_0^{1,q}(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega), \quad B_q v = -\Delta v.$$

É conhecido que o operador de Stokes gera um semigrupo analítico limitado $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$, de classe C_0 em $L_\sigma^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ (veja por exemplo, Giga [46]). Também, é um resultado clássico que o operador de Laplace gera um semigrupo analítico limitado $\{e^{-tB_q}\}_{t \geq 0}$, de classe C_0 em $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$. A partir de agora, omitiremos por comodidade, os subíndices p, q dos operadores A_p, B_q .

Uma vez estabelecida a nossa notação para este capítulo prosseguimos com a apresentação de algumas definições e o enunciado de nossos principais resultados.

Definimos a seguinte classe de soluções estacionárias para o problema (4.1)-(4.2).

Definição 4.1. *Seja $3/2 \leq m < \infty$ e $K > 0$. Dizemos que um par de funções $(\bar{u}, \bar{w})$ é uma solução estacionária de classe (m, K) para (4.1)-(4.2), se:*

$$\begin{aligned} (\bar{u}, \bar{w}) &\in D(A_3) \times D(B_m), \\ \|A\bar{u}\|_3 + \|B\bar{w}\|_m &\leq K, \end{aligned}$$

e satisfaz

$$\begin{cases} (\mu + \mu_r)A\bar{u} - 2\mu_r \operatorname{rot} \bar{w} + P\{\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}\} = 0, & \text{em } L_\sigma^3(\Omega), \\ \chi B\bar{w} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{w} - \gamma \nabla \operatorname{div} \bar{w} + 4\mu_r \bar{w} - 2\mu_r \operatorname{rot} \bar{u} = 0, & \text{em } L^m(\Omega). \end{cases} \quad (4.3)$$

Aqui temos usado que $W^{1,m}(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ junto com o fato de $P \operatorname{rot} \bar{w} = \operatorname{rot} \bar{w}$. Notemos que $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{w} = 0$ em Ω ; além disso, como $\bar{w} = 0$ sobre $\partial\Omega$, vemos que $\operatorname{rot} \bar{w} \cdot n = 0$ sobre $\partial\Omega$. Portanto, $\operatorname{rot} \bar{w} \in L_\sigma^3(\Omega)$. Notemos também que $W^{1,3}(\Omega) \subset L^m(\Omega)$.

A existência de soluções estacionárias de classe (m, K) é dada pelo seguinte teorema

Teorema 4.2. *Para cada $m \in [3/2, \infty)$ existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(m)$ e $K_0 > 0$ tal que se $\mu, \chi \geq \bar{\delta}$, então o problema (4.1)-(4.2) tem uma única solução estacionária $(\bar{u}, \bar{w})$ de classe (m, K_0) .*

Observação 4.3. *A existência de soluções estacionárias para o modelo em questão é estudada em Lukaszewicz[80]. Usando uma versão do Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder é mostrada a existência de soluções estacionárias fracas considerando dois problemas; um problema para u , fixada w e seguidamente, um problema para w com u conhecida. Sobre certas condições de pequenez da viscosidade, a solução é única. Resultados de regularidade também podem ser encontrados nesta referência. Convém notar também, que as soluções obtidas por Lukaszewicz[80], pertencem aos espaços $V \times H_0^1(\Omega)$ (no caso das soluções fracas) e ao espaço $V \times H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ (no caso das soluções fortes). Em nosso caso, a classe de espaços solução, é maior.*

Seguidamente, como estamos interessados ao respeito da estabilidade das soluções estacionárias $(\bar{u}, \bar{w})$ dadas pelo Teorema 4.5, e ao mesmo tempo, com a existência global de uma solução forte de (4.1)-(4.2), fazemos

$$u = \bar{u} + \tilde{u}, \quad w = \bar{w} + \tilde{w}, \quad p = \bar{p} + \tilde{p},$$

em (4.1)-(4.2), onde $\bar{p}$ é a pressão associada a $(\bar{u}, \bar{w})$ e $(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{p})$ estabelece a perturbação ao redor de $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{p})$. A seguir, a definição de solução forte de (4.1)-(4.2).

Definição 4.4. *Dizemos que um par de funções (u, w) é solução forte de (4.1)-(4.2) sobre $[0, \infty)$ se a perturbação $(\tilde{u}, \tilde{w})$ esta na classe*

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u - \bar{u} \in C([0, \infty); L_\sigma^3(\Omega)) \cap C((0, \infty); D(A_3)) \cap C^1((0, \infty); L_\sigma^3(\Omega)), \\ \tilde{w} &= w - \bar{w} \in C([0, \infty); L^m(\Omega)) \cap C((0, \infty); D(B_m)) \cap C^1((0, \infty); L^m(\Omega)), \end{aligned}$$

e satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{u}_t + (\mu + \mu_r)A\tilde{u} + P\{\bar{u} \cdot \nabla \tilde{u} + \tilde{u} \cdot \nabla \bar{u} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u}\} - 2\mu_r \text{rot} \tilde{u} & = & 0, \quad t > 0, \\ \tilde{w}_t + \chi B\tilde{w} + \bar{u} \cdot \nabla \tilde{w} + \tilde{u} \cdot \nabla \bar{w} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{w} - \gamma \nabla \text{div} \tilde{w} + 4\mu_r \tilde{w} - 2\mu_r \text{rot} \tilde{u} & = & 0, \quad t > 0, \\ \tilde{u}(0) & = & u_0 - \bar{u}, \\ \tilde{w}(0) & = & w_0 - \bar{w}. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Nosso teorema sobre estabilidade de soluções estacionárias é o seguinte

Teorema 4.5. *Seja $3/2 \leq m < \infty$ e consideremos $(u_0, w_0) \in L^3_\sigma(\Omega) \times L^m(\Omega)$. Então existe $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ ($\bar{\delta}$ dada pelo Teorema) tal que se*

$$\gamma + \mu_r < \delta, \quad \max\left\{\frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi}\right\} < \delta,$$

então a solução estacionária $(\bar{u}, \bar{w})$ dada pelo Teorema 4.5 é estável no seguinte sentido: existe uma constante positiva $\epsilon = \epsilon(\mu, \mu_r, \chi, \gamma, m)$ tal que se

$$\|u_0 - \bar{u}\|_3 + \|w_0 - \bar{w}\|_m < \epsilon,$$

então o sistema (4.1)-(4.2) tem uma única solução forte (u, w) sobre $[0, \infty)$, a qual decai exponencialmente, isto é,

$$\|u(t) - \bar{u}\|_\infty + \|w(t) - \bar{w}\|_\infty = o(e^{-\zeta t}),$$

quando $t \rightarrow \infty$, sendo $\zeta = \zeta(\mu, \mu_r, \chi, \gamma, m)$ alguma constante positiva.

4.3 Soluções estacionárias

Nesta seção construiremos uma solução estacionária $(\bar{u}, \bar{w})$ de classe (m, K) para provar o Teorema 4.5. Para tais fins, iniciamos definindo a aplicação $F : D(A_3) \times D(B_m) \rightarrow D(A_3) \times D(B_m)$ dada por:

$$F \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu + \mu_r} A^{-1} \{P\{\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}\} - 2\mu_r \text{rot} \bar{w}\} \\ -\frac{1}{\chi} B^{-1} \{\bar{u} \cdot \nabla \bar{w} + 4\mu_r \bar{w} - \gamma \nabla \text{div} \bar{w} - 2\mu_r \text{rot} \bar{u}\} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Notemos que os sistema (4.3) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix}, \text{ em } D(A_3) \times D(B_m). \quad (4.6)$$

O Teorema 4.5 é uma consequência da seguinte proposição.

Proposição 4.6. *Seja $m \in [3/2, \infty)$. Existem constantes positivas $\bar{\delta} = \bar{\delta}(m)$ e $K_0 = K_0(\mu, \mu_r, \gamma, \chi, m) > 0$ tal que se $\mu, \chi \geq \bar{\delta}$, então a aplicação F é uma contração sobre o espaço métrico completo*

$$E_{K_0} = \{(\bar{u}, \bar{w}) \in D(A_3) \times D(B_m) : \|A\bar{u}\|_3 + \|B\bar{w}\|_m \leq K_0\}.$$

Para provar a Proposição 4.6 usaremos o seguinte lema o qual é verificado a partir da desigualdade de Hölder e imersões de Sobolev devidas a Giga [47].

Lema 4.7. *Seja $1 < p, q, r < \infty$ satisfazendo as relações*

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{r} > \frac{1}{q} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1. \quad (4.7)$$

Então valem as seguintes estimativas

$$\|P(u \cdot \nabla v)\|_r \leq C(p, q, r) \|Au\|_p \|Av\|_q, \quad (4.8)$$

$$\|(u \cdot \nabla w)\|_r \leq C(p, q, r) \|Au\|_p \|Bw\|_q, \quad (4.9)$$

para toda $u \in D(A_p), v \in D(A_q), w \in D(B_q)$.

Demonstração: (Proposição 4.6.) Notemos que pela estimativa (4.8) e pela inclusão $W^{1,m}(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu + \mu_r} \|P\{\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}\} - 2\mu_r \text{rot} \bar{w}\|_3 &\leq \frac{c_1}{\mu + \mu_r} \|A\bar{u}\|_3^2 + \frac{2\mu_r}{\mu + \mu_r} \|\text{rot} \bar{w}\|_3 \\ &\leq \frac{c_1}{\mu + \mu_r} \|A\bar{u}\|_3^2 + \frac{2c_2\mu_r}{\mu + \mu_r} \|B\bar{w}\|_m. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Por outro lado, da desigualdade (4.9) e da inclusão $W^{1,3}(\Omega) \subset L^m(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi} \|\bar{u} \cdot \nabla \bar{w} + 4\mu_r \bar{w} - \gamma \nabla \text{div} \bar{w} - 2\mu_r \text{rot} \bar{u}\|_m &\leq \frac{c_3}{\chi} \|A\bar{u}\|_3 \|B\bar{w}\|_m + \frac{4\mu_r}{\chi} \|\bar{w}\|_m \\ &\quad + \frac{\gamma}{\chi} \|\nabla \text{div} \bar{w}\|_m + \frac{2\mu_r}{\chi} \|\text{rot} \bar{u}\|_m \\ &\leq \frac{c_3}{\chi} \|A\bar{u}\|_3 \|B\bar{w}\|_m + \frac{4c_4\mu_r}{\chi} \|B\bar{w}\|_m \\ &\quad + \frac{c_5\gamma}{\chi} \|B\bar{w}\|_m + \frac{2c_6\mu_r}{\chi} \|A\bar{u}\|_3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\| F \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{D(A_3) \times D(B_m)} &\leq \tilde{C}(\|A\bar{u}\|_3 + \|B\bar{w}\|_m) + \tilde{C}_1(\|A\bar{u}\|_3 + \|B\bar{w}\|_m)^2 \\ &\leq \tilde{C}K_0 + \tilde{C}_1K_0^2, \end{aligned}$$

desde que $\|A\bar{u}\|_3 + \|B\bar{w}\|_m \leq K_0$, onde $\tilde{C}, \tilde{C}_1$ são dados por

$$\tilde{C} = \max\left(\frac{2c_2\mu_r}{\mu + \mu_r} + \frac{c_5\gamma}{\chi} + \frac{4c_4\mu_r}{\chi}, \frac{2c_6\mu_r}{\chi}\right), \quad \tilde{C}_1 = \max\left(\frac{c_1}{\mu + \mu_r}, \frac{c_3}{\chi}\right).$$

Seja $K_0 = (1 - \tilde{C})/\tilde{C}_1$. Então, se μ e χ são suficientemente grandes tais que $\tilde{C} < 1$, temos que $F(E_{K_0}) \subset E_{K_0}$.

Observação 4.8. *Notemos que podemos substituir a condição de μ e χ ser suficientemente grandes, no Teorema 4.5, pela condição de μ_r e γ serem suficientemente pequenos.*

Usando os mesmos argumentos para encontrar (4.10)-(4.11) podemos concluir que

$$\left\| F \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} \right\|_{D(A_3) \times D(B_m)} \leq \tilde{C}_2 \{ \|A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_3 + \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m \}, \quad (4.12)$$

para $(u_1, w_1), (u_2, w_2) \in E_{K_0}$ e alguma constante $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(\mu, \mu_r, \chi, \gamma, m, K_0)$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu + \mu_r} \|P(\bar{u}_1 \cdot \nabla \bar{u}_1) - P(\bar{u}_2 \cdot \nabla \bar{u}_2) - 2\mu_r \text{rot}(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_3 &\leq \frac{c_1}{\mu + \mu_r} \|A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_3 \times \\ &\times (\|A\bar{u}_1\|_3 + \|A\bar{u}_2\|_3) + \\ &+ \frac{2c_2\mu_r}{\mu + \mu_r} \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m \\ &\leq \frac{2c_1K_0}{\mu + \mu_r} \|A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_3 + \\ &+ \frac{2c_2\mu_r}{\mu + \mu_r} \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m; \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\chi} \|\bar{u}_1 \cdot \nabla \bar{w}_1 - \bar{u}_2 \cdot \nabla \bar{w}_2 + 4\mu_r(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) - \gamma \nabla \text{div}(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) - 2\mu_r \text{rot}(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_m \\ &\leq \frac{c_3}{\chi} \left(\|A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_3 \|B\bar{w}_1\|_m \right) + \frac{c_3}{\chi} \left(\|A\bar{u}_2\|_3 \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m \right) \\ &+ \frac{4c_4\mu_r}{\chi} \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m + \frac{c_5\gamma}{\chi} \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m + \frac{2c_6\mu_r}{\chi} \|A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_3 \\ &\leq \frac{c_3K_0}{\chi} \left(\|A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_3 + \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m \right) \\ &+ \frac{4c_4\mu_r}{\chi} \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m + \frac{c_5\gamma}{\chi} \|B(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\|_m + \frac{2c_6\mu_r}{\chi} \|A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_3. \end{aligned}$$

Desta forma encontramos (4.12) com $\tilde{C}_2$ dada por

$$\tilde{C}_2 = \max\left(\frac{2c_1K_0}{\mu + \mu_r} + \frac{c_3K_0}{\chi} + \frac{2c_6\mu_r}{\chi}, \frac{c_3K_0}{\chi} + \frac{2c_2\mu_r}{\mu + \mu_r} + \frac{4c_4\mu_r}{\chi} + \frac{c_5\gamma}{\chi}\right).$$

Escolhamos $\bar{\delta}(m)$ tal que para $\mu, \chi \geq \bar{\delta}(m)$, tenhamos que $\tilde{C}_2 < 1$ (e por tanto $\tilde{C} < 1$). Com esta escolha, temos que F é uma contração. ■

4.4 Operador linearizado

Seja $(\bar{u}, \bar{w})$ sendo a solução estacionária dada pelo Teorema 4.5. Nesta seção faremos uma análise do operador Linearizado $L = L_{p,q}$ com respeito a $(\bar{u}, \bar{w})$ o qual é dado por

$$\begin{aligned} D(L_{p,q}) &= D(A_p) \times D(B_q), \\ L &= L_0 + L_1, \\ L_0 \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\mu + \mu_r)Au \\ \chi Bw \end{bmatrix}, \\ L_1 \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} P\{\bar{u} \cdot \nabla u + u \cdot \nabla \bar{u}\} - 2\mu_r \text{rot} w \\ \bar{u} \cdot \nabla w + u \cdot \nabla \bar{w} + 4\mu_r w - \gamma \nabla \text{div} w - 2\mu_r \text{rot} u \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $p, q \in (1, \infty)$ são escolhidos adequadamente como veremos abaixo.

O seguinte lema é relativo a uma estimativa do operador L_1 .

Lema 4.9. *Suponhamos que $p, q \in (1, \infty)$ satisfazem*

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq 1 - \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{q} > \frac{1}{m} - \frac{1}{3}. \quad (4.13)$$

Então existe uma constante $C_{p,q}(m) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left\| L_1 \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} &\leq C_{p,q}(m) \left\{ (\|A\bar{u}\|_3 + \|B\bar{w}\|_m) \|Au\|_p + \|A\bar{u}\|_3 \|Bw\|_q \right. \\ &\quad \left. + \mu_r \|Au\|_p + (\mu_r + \gamma) \|Bw\|_q \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

para toda $(u, w) \in D(A_p) \times D(B_q)$.

Demonstração.: A demonstração segue do Lema 4.7 junto com as inclusões

$$W^{1,q} \subset L^p(\Omega), \quad W^{1,p} \subset L^q(\Omega), \quad D(A_p) \subset L^q(\Omega).$$

■

Para $0 < \omega < \pi/2$, seja

$$\Sigma_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi - \omega\} \cup \{0\}.$$

Então temos o seguinte lema

Lema 4.10. *Sejam p, q como no Lema 4.9. Então para cada $\omega \in (0, \pi/2)$, existe uma constante $M_{p,q}(m, \omega)$ tal que*

$$\left\| L_1(\lambda + L_0)^{-1} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} \leq K_{p,q} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}}, \quad (4.15)$$

para todo $\lambda \in \Sigma_\omega$ e $(u, w) \in L_\sigma^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$, onde

$$K_{p,q} \equiv M_{p,q} \left\{ (\mu_r + \gamma) + \left(\max \left\{ \frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi} \right\} \right) K_0 \right\},$$

sendo K_0 a constante do Teorema 4.5.

Demonstração:. É conhecido (Giga [46]) que para cada $\omega \in (0, \pi/2)$,

$$\Sigma_\omega \subset \rho(-A_p) \cap \rho(-B_q),$$

com

$$K_p(\omega) = \sup_{\lambda \in \Sigma_\omega} (1 + |\lambda|) \|(\lambda + A)^{-1}\|_{p \rightarrow p} < \infty, \quad (4.16)$$

$$\hat{K}_q(\omega) = \sup_{\lambda \in \Sigma_\omega} (1 + |\lambda|) \|(\lambda + B)^{-1}\|_{q \rightarrow q} < \infty. \quad (4.17)$$

Lembremos $\rho(\cdot)$ é a notação padrão do conjunto resolvente e que $\|\cdot\|_{p \rightarrow q}$ denota a norma de um operador limitado definido de $L^p(\Omega)$ para $L^q(\Omega)$. Pelo Lema 4.9 e as estimativas (4.16)-(4.17) obtemos

$$\begin{aligned} \left\| L_1(\lambda + L_0)^{-1} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} &\leq C_{p,q} \left\{ (\|A\bar{u}\|_3 + \|B\bar{w}\|_m + \mu_r)(1 + K_p(\omega)) \frac{1}{(\mu + \mu_r)} \|u\|_p \right. \\ &\quad \left. + (\|A\bar{u}\|_3 + \mu_r + \gamma)(1 + \hat{K}_q(\omega)) \frac{1}{\chi} \|w\|_q \right\}. \end{aligned}$$

Como $(\bar{u}, \bar{w})$ pertence à classe (m, K_0) , temos que $\|A\bar{u}\|_3 + \|B\bar{w}\|_m \leq K_0$ e assim

$$\begin{aligned} \left\| L_1(\lambda + L_0)^{-1} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} &\leq C_{p,q} \left\{ (\mu_r + K_0)(1 + K_p(\omega)) \frac{1}{(\mu + \mu_r)} \|u\|_p \right. \\ &\quad \left. + (\mu_r + \gamma + K_0)(1 + \hat{K}_q(\omega)) \frac{1}{\chi} \|w\|_q \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Portanto, tomando $M_{p,q}(m, \omega) = C_{p,q}(1 + \hat{K}_q(\omega) + K_p(\omega))$ obtemos (4.15). $\blacksquare$

A continuação apresentamos um lema que será fundamental no cálculo das estimativas $(L^p \times L^q) - (L^r \times L^s)$ do resolvente do operador $-L$.

Lema 4.11. *Sejam p, q como no Lema 4.9. Para cada $\omega \in (0, \pi/2)$ seja*

$$\delta_{p,q} = \delta_{p,q}(m, \omega) \equiv \min \left\{ \frac{1}{(1 + K_0)M_{p,q}(m, \omega)}, \frac{1}{\bar{\delta}} \right\}, \quad (4.19)$$

onde $\bar{\delta}, K_0$ e $M_{p,q}(m, \omega)$ são as constantes do Teorema 4.5 e do Lema 4.10. Se

$$\gamma + \mu_r < \delta_{p,q}, \quad \max \left\{ \frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi} \right\} < \delta_{p,q}, \quad (4.20)$$

então, $\Sigma_\omega \subset \rho(-L_{p,q})$. Além disso, para cada $j = 0, 1$, se r, s satisfazem

$$0 \leq \beta \equiv \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \leq 1 - \frac{j}{2}, \quad 0 \leq \xi \equiv \frac{3}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{s} \right) \leq 1 - \frac{j}{2}, \quad (4.21)$$

então, existe uma constante $C = C(p, q, r, s, m, \omega, \mu, \mu_r, \chi, \gamma)$ tal que

$$\left\| \nabla^j (\lambda + L)^{-1} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{r,s\}} \leq C \{ (1 + |\lambda|)^{\beta+j/2-1} + (1 + |\lambda|)^{\xi+j/2-1} \} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}}, \quad (4.22)$$

para todo $\lambda \in \Sigma_\omega$ e $(u, w) \in L_\sigma^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$.

Demonstração:. Da condição (4.19) segue-se que

$$K_{p,q} \equiv M_{p,q} \left\{ (\mu_r + \gamma) + \left(\max \left\{ \frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi} \right\} \right) K_0 \right\} < 1;$$

portanto, do Lema 4.10 temos que para todo $\lambda \in \Sigma_\omega$, existe o operador inverso

$$[I + L_1(\lambda + L_0)^{-1}]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ -L_1(\lambda + L_0)^{-1} \}^n,$$

sobre o espaço $L_\sigma^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$, satisfazendo

$$\|[I + L_1(\lambda + L_0)^{-1}]^{-1}\|_{\{p,q\} \rightarrow \{p,q\}} \leq \frac{1}{1 - K_{p,q}}. \quad (4.23)$$

Portanto,

$$(\lambda + L)^{-1} = (\lambda + L_0)^{-1}[I + L_1(\lambda + L_0)^{-1}]^{-1}, \quad \lambda \in \Sigma_\omega, \quad (4.24)$$

existe como operador limitado sobre $L_\sigma^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$. Assim obtemos que $\Sigma_\omega \subset \rho(-L_{p,q})$. A continuação, mostraremos as estimativas (4.22) para $j = 0, 1$. Notemos primeiramente que pelas condições (4.21), valem as imersões

$$D(A_p^{\beta+j/2}) \subset W^{j,r}(\Omega), \quad D(B_q^{\xi+j/2}) \subset W^{j,s}(\Omega).$$

Estas relações nos permitem obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \left\| \nabla^j (\lambda + L_0)^{-1} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{r,s\}} &= \left\| \nabla^j (\lambda + (\mu + \mu_r)A)^{-1} u \right\|_r + \left\| \nabla^j (\lambda + \chi B)^{-1} w \right\|_s \\ &\leq C \|A^{\beta+j/2} (\lambda + (\mu + \mu_r)A)^{-1} u\|_p + C \|B^{\xi+j/2} (\lambda + \chi B)^{-1} w\|_q \\ &\leq \|A(\lambda + (\mu + \mu_r)A)^{-1} u\|_p^{\beta+j/2} \|(\lambda + (\mu + \mu_r)A)^{-1} u\|_p^{1-\beta-j/2} \\ &\quad + \|B(\lambda + \chi B)^{-1} w\|_q^{\xi+j/2} \|(\lambda + \chi B)^{-1} w\|_q^{1-\xi-j/2} \\ &\leq \frac{C}{\mu + \mu_r} (1 + K_p(\omega)) \left(1 + \frac{1}{\mu + \mu_r} |\lambda|\right)^{\beta+j/2-1} \|u\|_p \\ &\quad + \frac{C}{\chi} (1 + \hat{K}_q(\omega)) \left(1 + \frac{1}{\chi} |\lambda|\right)^{\xi+j/2-1} \|w\|_q, \end{aligned} \quad (4.25)$$

para todo $\lambda \in \Sigma_\omega$ e $(u, w) \in L_\sigma^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$. Conseqüentemente, devido a (4.23)-(4.24) e (4.25) obtemos (4.22). ■

A continuação fixaremos $\omega \in (0, \pi/2)$ mas arbitrário; portanto, a constante $\delta_{p,q}$ do Lema 4.11 depende somente de p, q, m . O Lema 4.11 permite mostrar não somente a geração de um semigrupo mas também as estimativas $(L^p \times L^q) - (L^r \times L^s)$ do mesmo.

Proposição 4.12. *Sejam p, q como no Lema 4.9 e assumamos que μ, μ_r, χ, γ satisfazem (4.20). Então o operador $-L$ gera um semigrupo analítico limitado $\{e^{-tL}\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 sobre o espaço $L_\sigma^p \times L^q(\Omega)$. Além disso, para $j = 0, 1$ e r, s satisfazendo (4.21), existe uma*

constante $C = C(p, q, r, s, m, \mu, \mu_r, \chi, \gamma)$ tal que

$$\left\| \nabla^j e^{-tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{r,s\}} \leq C \{t^{-(3/2)(1/p-1/r)-j/2} + t^{-(3/2)(1/q-1/s)-j/2}\} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}}, \quad (4.26)$$

para toda $t > 0$ e $(u, w) \in L_\sigma^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$.

Demonstração: Usando a estimativa (4.22) ($j=0$) para $\{r, s\} = \{p, q\}$ da teoria clássica de semigrupos analíticos segue-se a primeira parte da demonstração (veja por exemplo [124], [105]). Para obter a desigualdade (4.26)_j, avaliamos a integral de Dunford

$$\nabla^j e^{-tL} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \nabla^j (\lambda + L)^{-1} e^{t\lambda} d\lambda, \quad t > 0,$$

usando a desigualdade (4.22). Aqui, quando $\beta + j/2$ e $\xi + j/2$ são positivos, o resolvente é integrado de $\infty e^{-i\varphi}$ até $\infty e^{i\varphi}$ ao longo do caminho $\Gamma : \lambda = |\lambda| e^{\pm i\varphi}$ para um $\varphi \in (\pi/2, \pi - \omega)$ fixo mas arbitrário. Quando $\beta + j/2 = 0$, isto é, $r = p$ e $j = 0$, dividimos a integral de Dunford em duas partes e substituímos Γ por $\bar{\Gamma} = \Gamma_t \cup \Gamma_1$ onde $\Gamma_t : \lambda = |\lambda| e^{\pm i\varphi}$, ($|\lambda| \geq 1/t$) e $\Gamma_1 : (1/t) e^{i\arg\lambda}$, $-\varphi \leq \arg\lambda \leq \varphi$. Assim,

$$\|e^{-tL}\|_{\{p,q\} \rightarrow \{p,s\}} \leq \frac{c}{2\pi} \int_{\bar{\Gamma}} |\lambda|^{-1} e^{t\operatorname{Re}\lambda} |d\lambda| + \frac{c}{2\pi} \int_{\Gamma} |\lambda|^{-1+\xi} e^{t\operatorname{Re}\lambda} |d\lambda|.$$

O caso $\xi + j/2 = 0$ é tratado analogamente. Um calculo elementar implica as estimativas desejadas (4.26)_j. ■

Observação 4.13. *Notemos que existe um número positivo ζ satisfazendo*

$$\operatorname{Re} \sigma(L_{p,q}) > \zeta, \quad (4.27)$$

onde $\sigma(\cdot)$ representa o espectro do operador $L_{p,q}$. Isto significa que $\sigma(L_{p,q}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \zeta\}$. Esta propriedade é útil para derivar o decaimento exponencial de e^{-tL} quando $t \rightarrow \infty$.

Proposição 4.14. *Sejam p, q como no Lema 4.9 e assumamos a condição (4.19). Se $\zeta > 0$ satisfaz (4.27), então existe uma constante $C_\zeta = C_\zeta(p, q, \mu, \mu_r, \chi, \gamma)$ tal que*

$$\left\| e^{-tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} \leq C_\zeta e^{-\zeta t} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}}, \quad (4.28)$$

para todo $t \geq 0$ e $(u, w) \in L_\sigma^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$.

Proposição 4.15. *Sejam p, q como no Lema 4.9 e assumamos a condição (4.19). Se $\zeta > 0$ satisfaz (4.27) então para $j = 0, 1$ e $\{r, s\}$ satisfazendo (4.21), existe uma constante $C_\zeta = C_\zeta(r, s, p, q, m, \mu, \mu_r, \chi, \gamma)$ tal que*

$$\left\| \nabla^j e^{-tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{r,s\}} \leq C_\zeta \{t^{-(3/2)(1/p-1/r)-j/2} + t^{-(3/2)(1/q-1/s)-j/2}\} e^{-\zeta t} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}}, \quad (4.29)$$

para todo $t > 0$ e $(u, v) \in L_\sigma^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$.

Lema 4.16. *Para qualquer $\zeta > 0$ satisfazendo (4.27) existe $\zeta^* > \zeta$ tal que ζ^* também satisfaz (4.27), isto é, $\text{Re } \sigma(L_{p,q}) > \zeta^*$.*

Demonstração:. (Lema 4.16). A demonstração deste lema segue-se devido ao fato de $\sigma(L_{p,q})$ ser um conjunto fechado. ■

Demonstração:. (Proposição 4.14). Usando o Lema 4.16 e levando em consideração que $\Sigma_\omega \subset \rho(-L_{p,q})$ temos que existe um número $\zeta^* > \zeta$ tal que

$$\Theta_\omega^{\zeta^*} \equiv \Sigma_\omega \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda \geq -\zeta^*\} \subset \rho(-L_{p,q}).$$

Podemos tomar $\varphi = \varphi(\zeta^*) \in (\pi/2, \pi)$ tal que

$$\Gamma \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -\zeta + |\lambda + \zeta| e^{\pm i\varphi}\} \subset \Theta_\omega^{\zeta^*}.$$

Por causa de (4.22) com $j = 0$ encontramos que

$$\|(\lambda + L)^{-1}\|_{\{p,q\} \rightarrow \{p,q\}} \leq C_{\zeta^*}, \quad \lambda \in \Theta_\omega^{\zeta^*},$$

onde $C_{\zeta^*} = C_{\zeta^*}(p, q, \mu, \mu_r, m, \chi, \gamma)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left\| e^{-tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_\Gamma (\lambda + L)^{-1} e^{t\lambda} d\lambda \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} \\ &\leq \frac{C_{\zeta^*} e^{-\zeta t}}{\pi} \int_0^\infty e^{t\eta \cos \varphi} d\eta \cdot \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} \\ &= \frac{-C_{\zeta^*} e^{-\zeta t}}{\pi t \cos \varphi} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}}, \end{aligned}$$

para $t > 0$. Esta estimativa, junto com as estimativas do semigrupo dadas pela Proposição 4.12 implicam (4.28). ■

Demonstração: (Proposição 4.15). Dado $\zeta > 0$, pelo Lema 4.16 escolhamos $\tau = \tau(\zeta) > 0$ suficientemente pequeno tal que $\zeta/(1-\tau)$ também satisfaz (4.27). Da Proposição 4.14 temos que

$$\left\| e^{-tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} \leq C_{\zeta/(1-\tau)} e^{-(\zeta/(1-\tau))t} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}}, \quad t \geq 0.$$

A última desigualdade junto com a Proposição 4.12 nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \left\| \nabla^j e^{-tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{r,s\}} &= \left\| \nabla^j e^{-\tau t L} e^{-(1-\tau)tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{r,s\}} \\ &\leq C \{ (\tau t)^{-(3/2)(1/p-1/r)-j/2} + (\tau t)^{-(3/2)(1/q-1/s)-j/2} \} \times \\ &\quad \times \left\| e^{-(1-\tau)tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}} \\ &\leq C_{\zeta} \{ t^{-(3/2)(1/p-1/r)-j/2} + t^{-(3/2)(1/q-1/s)-j/2} \} e^{-\zeta t} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{p,q\}}. \end{aligned}$$

Esta desigualdade prova (4.29). ■

4.5 Existência global e decaimento exponencial

Na presente seção provaremos o Teorema 4.5. Seja $(\bar{u}, \bar{w})$ a solução estacionária de classe (m, K_0) dada pelo Teorema 4.5. Portanto, se escrevemos $(\tilde{u}, \tilde{w}) = (u - \bar{u}, w - \bar{w})$, temos que $(\tilde{u}, \tilde{w})$ deve satisfazer o sistema (4.4), o qual pode ser reescrito na seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u}) \\ \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & t > 0, \\ \tilde{u}(0) = u_0 - \bar{u}, \\ \tilde{w}(0) = w_0 - \bar{w}, \end{cases} \quad (4.30)$$

em espaços $L^p_{\sigma}(\Omega) \times L^q(\Omega)$ adequados, onde L é o operador linearizado estudado na seção anterior. Como $-L$ gera um semigrupo analítico limitado, a formulação integral associada

a (4.30), que também chamaremos de formulação branda, é dada por

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} = e^{-tL} \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} - \int_0^t e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} P(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u}) \\ \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{w} \end{bmatrix} (s) ds. \quad (4.31)$$

Para deduzir as estimativas de decaimento, primeiro provamos um resultado de existência global o qual é dado pela seguinte proposição.

Proposição 4.17. *Seja m e r_0 satisfazendo*

$$3/2 \leq m < 3, \quad 3 < r_0 < \infty. \quad (4.32)$$

Suponhamos que o dado inicial $(u_0 - \bar{u}, w_0 - \bar{w}) \in L^3_\sigma(\Omega) \times L^m(\Omega)$ e consideremos a constante $\delta_{p,q}(m)$ dada por (4.19) e seja

$$\delta' = \delta'(m, r_0) \equiv \min \left\{ \delta_{3,m}, \delta_{3r_0/(3+r_0), mr_0/(m+r_0)} \right\}.$$

Se

$$\gamma + \mu_r < \delta', \quad \max \left\{ \frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi} \right\} < \delta',$$

então existe uma constante positiva $\epsilon = \epsilon(m, r_0, \mu, \mu_r, \chi, \gamma)$ tal que se

$$\|u_0 - \bar{u}\|_3 + \|w_0 - \bar{w}\|_m < \epsilon, \quad (4.33)$$

o sistema (4.30) tem uma única solução forte $(\tilde{u}, \tilde{w}) \in L^3_\sigma(\Omega) \times L^m(\Omega)$ definida sobre o intervalo $[0, \infty)$. Além disso, se $\zeta > 0$ satisfaz 4.27 para $\{p, q\} = \{3r_0/(3+r_0), mr_0/(m+r_0)\}$ e $\{3, m\}$, então valem as seguintes estimativas

$$\|\tilde{u}(t)\|_r \leq C_\zeta t^{-(3/2)(1/3-1/r)} e^{-\zeta t} (\|u_0 - \bar{u}\|_3 + \|w_0 - \bar{w}\|_m), \quad (4.34)$$

$$\|\tilde{w}(t)\|_s \leq \tilde{C}_\zeta t^{-(3/2)(1/m-1/s)} e^{-\zeta t} (\|u_0 - \bar{u}\|_3 + \|w_0 - \bar{w}\|_m), \quad (4.35)$$

$$\|\nabla \tilde{u}(t)\|_{r_1} \leq C'_\zeta t^{-(3/2)(1/3-1/r_1)-1/2} e^{-\zeta t} (\|u_0 - \bar{u}\|_3 + \|w_0 - \bar{w}\|_m), \quad (4.36)$$

$$\|\nabla \tilde{w}(t)\|_{s_1} \leq \tilde{C}'_\zeta t^{-(3/2)(1/m-1/s_1)-1/2} e^{-\zeta t} (\|u_0 - \bar{u}\|_3 + \|w_0 - \bar{w}\|_m), \quad (4.37)$$

para $3 \leq r < \infty, m \leq s < 3m/(3-m), 3 \leq r_1 < r_0$, e $m \leq s_1 < (1/m + 1/r_0 - 1/3)^{-1}$, e para todo $t > 0$, onde $C_\zeta = C_\zeta(r, \mu, \mu_r, \gamma, \chi, m, r_0)$, $\tilde{C}_\zeta = \tilde{C}_\zeta(s, \mu, \mu_r, \gamma, \chi, m, r_0)$, $C'_\zeta = C'_\zeta(r_1, \mu, \mu_r, \gamma, \chi, m, r_0)$ e $\tilde{C}'_\zeta = \tilde{C}'_\zeta(s_1, \mu, \mu_r, \gamma, \chi, m, r_0)$.

Observação 4.18. A constante δ' na Proposição 4.17 está bem definida pois $\{3, m\}$ e $\{3r_0/(3+r_0), mr_0/(m+r_0)\}$ satisfazem 4.13.

Observação 4.19. Notemos que na Proposição 4.17, $m \in [3/2, 3)$. Para $m \in [3, \infty)$, consideramos $3/2 < r_0 < \infty$ na Proposição 4.17 e o resultado continua válido. Nós faremos com detalhe somente o caso $m \in [3/2, 3)$ pois como veremos posteriormente, neste caso existe maior dificuldade para estimar o decaimento de $\|\tilde{w}\|_\infty$.

Observação 4.20. Notemos que se em particular, tomamos $\bar{u} = \bar{w} = 0$ e $m = 3$, o resultado desta Proposição implica o resultado Principal de existência de solução dado por Yamaguchi[130].

Para provar a Proposição 4.17, precisaremos dos seguintes dois lemas.

Lema 4.21. Seja m como na Proposição 4.17 e $\zeta > 0$ satisfazendo (4.27) para $\{p, q\} = \{3, m\}$. Suponhamos também que

$$\gamma + \mu_r < \delta_{3,m}, \quad \max\left\{\frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi}\right\} < \delta_{3,m}, \quad (4.38)$$

Se $\{r, s\}$ satisfazem

$$3 \leq r < \infty, \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{r} = \frac{1}{m} - \frac{1}{s}, \quad (4.40)$$

então

$$\left\| \nabla^j e^{-tL} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{r,s\}} \leq C_\zeta t^{-(3/2)(1/3-1/r)-j/2} e^{-\zeta t} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\{3,m\}}, \quad (4.41)$$

para todo $t > 0, j = 0, 1$, e $(u, w) \in L_\sigma^3(\Omega) \times L^m(\Omega)$, onde $C_\zeta = C_\zeta(r, m, \mu, \mu_r, \chi, \gamma)$.

Observação 4.22. Notemos que de (4.39)-(4.40) temos que $m \leq s < 3m/(3-m)$.

Demonstração:. Pela condição (4.32) podemos ver que $\{3, m\}$ satisfaz (4.13). Além disso, a condição (4.40) junto com

$$0 \leq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{r} \right) < \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{j}{2}, \quad j = 0, 1,$$

implicam que $\{r, s\}$ satisfaz (4.21). Conseqüentemente, a desigualdade (4.41) segue da Proposição 4.15. ■

Lema 4.23. *Sejam m, r_0 como na Proposição 4.17 e $\zeta > 0$ satisfazendo (4.27) para $\{p, q\} = \{3r_0/(3+r_0), mr_0/(m+r_0)\}$. Suponhamos também que*

$$\gamma + \mu_r < \delta_{3r_0/(3+r_0), mr_0/(m+r_0)}, \quad \max\left\{\frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi}\right\} < \delta_{3r_0/(3+r_0), mr_0/(m+r_0)}. \quad (4.42)$$

Se $\{r, s\}$ satisfazem (4.39)-(4.40) junto com a condição

$$0 \leq 1 + 3\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \leq 2 - j, \quad j = 0, 1, \quad (4.43)$$

então

$$\left\| \nabla^j e^{-tL} \begin{bmatrix} P(u \cdot \nabla v) \\ u \cdot \nabla w \end{bmatrix} \right\|_{\{r,s\}} \leq C_\zeta t^{-(3/2)(1/r_0 - 1/r) - (1+j)/2} e^{-\zeta t} \|u\|_{r_0} (\|\nabla v\|_3 + \|\nabla w\|_m), \quad (4.44)$$

para todo $t > 0, j = 0, 1, u \in L_\sigma^{r_0}(\Omega), \nabla v \in L^3(\Omega)$ e $\nabla w \in L^m(\Omega)$, onde a constante $C_\zeta = C_\zeta(r, m, \mu, \mu_r, \chi, \gamma)$.

Demonstração:. Por hipóteses $\{p, q\}$ são tais que $1/p = 1/r_0 + 1/3, 1/q = 1/r_0 + 1/\alpha$. Então, devido a (4.32) que $p, q \in (1, \infty)$. Além disso, $\{p, q\}$ satisfazem (4.13) (Note que o par $\{3, m\}$ satisfaz (4.13)). Notemos também que a condição (4.21) é satisfeita pelo par $\{p, q\}$; na verdade, pelas hipóteses do lema temos que

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2}\left\{1 + 3\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right\} \in [0, 1 - \frac{j}{2}].$$

Portanto, da Proposição 4.15 junto com a desigualdade de Hölder, implicam (4.44). ■

Observação 4.24. *Para a integrabilidade de 4.44_j em $t = 0$, o número r deve satisfazer $3(1/r_0 - 1/r) < 1 - j$.*

Demonstração:. (Proposição 4.17). Iniciamos definindo o espaço de Banach

$$\mathcal{B} \equiv \left\{ \begin{array}{l} t^\beta e^{\zeta t}(u, w) \in BC([0, \infty); L_\sigma^{r_0}(\Omega) \times L^{s_0}(\Omega)) \\ (u, w) : t^{1/2} e^{\zeta t}(\nabla u, \nabla w) \in BC([0, \infty); L^3(\Omega) \times L^m(\Omega)) \\ v(0) = u_0 - \bar{u}, w(0) = w_0 - \bar{w} \end{array} \right\}.$$

com a norma dada por

$$\left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{B}} = \sup_{t>0} t^\beta e^{\zeta t} (\|u(t)\|_{r_0} + \|w(t)\|_{s_0}) + \sup_{t>0} t^{1/2} e^{\zeta t} (\|\nabla u(t)\|_3 + \|\nabla w(t)\|_\alpha),$$

onde

$$s_0 = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{3} \right)^{-1}, \quad \beta = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{s_0} \right) > 0.$$

Consideremos a aplicação $\Upsilon : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ dada por

$$\Upsilon \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} (t) = e^{-tL} \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} - \int_0^t e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} P(u \cdot \nabla u) \\ u \cdot \nabla w \end{bmatrix} (s) ds.$$

Para $J > 0$, definamos o conjunto

$$\mathcal{B}_J = \left\{ (u, w) \in \mathcal{B} : \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{B}} \leq J \right\}$$

Como

$$\gamma + \mu_r < \delta', \quad \max \left\{ \frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi} \right\} < \delta',$$

podemos aplicar o Lema 4.21 e o Lema 4.23 para $j = 0, \{r, s\} = \{r_0, s_0\}$ e $j = 1, \{r, s\} = \{3, m\}$. Podemos tomar uma constante positiva $\epsilon = \epsilon(r_0, m, \mu, \mu_r, \gamma, \chi)$ tal que se a perturbação inicial $\|u_0 - \bar{u}\|_3 + \|w_0 - \bar{w}\|_m < \epsilon$, existe uma constante $J = J(\|u_0 - \bar{u}\|_3, \|w_0 - \bar{w}\|_m)$ tal que

$$\Upsilon(\mathcal{B}_J) \subset \mathcal{B}_J, \text{ e}$$

$$\Upsilon \text{ é uma contração sobre } \mathcal{B}_J.$$

De fato, diretamente do Lema 4.21 obtemos que

$$\left\| e^{-tL} \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{\{r_0, s_0\}} \leq C_\zeta t^{-(3/2)(1/3-1/r_0)} e^{-\zeta t} \left\| \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{\{3, m\}},$$

o que é equivalente a

$$t^\beta e^{\zeta t} \left\| e^{-tL} \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{\{r_0, s_0\}} \leq C_\zeta \left\| \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{\{3, m\}}.$$

Da mesma forma, temos que

$$\left\| \nabla e^{-tL} \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{\{3, m\}} \leq C_\zeta t^{-1/2} e^{-\zeta t} \left\| \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{\{3, m\}}.$$

Por outro lado, segue-se diretamente do Lema 4.23 que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} P(u \cdot \nabla u) \\ u \cdot \nabla w \end{bmatrix} ds \right\|_{\{r_0, s_0\}} &\leq \int_0^t \left\| e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} P(u \cdot \nabla u) \\ u \cdot \nabla w \end{bmatrix} ds \right\|_{\{r_0, s_0\}} \\
&\leq C_\zeta \int_0^t (t-s)^{-1/2} e^{-\zeta(t-s)} \|u\|_{r_0} (\|\nabla u\|_3 + \|\nabla w\|_m) \\
&\leq C_\zeta t^{-\beta} e^{-\zeta t} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{B}}^2.
\end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \int_0^t e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} P(u \cdot \nabla u) \\ u \cdot \nabla w \end{bmatrix} ds \right\|_{\{3, m\}} &\leq \int_0^t \left\| \nabla e^{-(t-s)L} \begin{bmatrix} P(u \cdot \nabla u) \\ u \cdot \nabla w \end{bmatrix} ds \right\|_{\{3, m\}} \\
&\leq C_\zeta \int_0^t (t-s)^{(-3/2)(1/r_0-1/3)-1} e^{-\zeta(t-s)} \|u\|_{r_0} \\
&\quad \times (\|\nabla u\|_3 + \|\nabla w\|_m) ds \\
&\leq C_\zeta t^{-1/2} e^{-\zeta t} \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{B}}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, destas duas últimas desigualdades temos que

$$\left\| \Upsilon \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{B}} \leq C_0 \left\| \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{\{3, m\}} + C_1 \left\| \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} \right\|_{\mathcal{B}}^2.$$

Assim, tomando

$$J_0 = C_0 \left\| \begin{bmatrix} u_0 - \bar{u} \\ w_0 - \bar{w} \end{bmatrix} \right\|_{\{3, m\}} < \frac{1}{4C_1}$$

obtemos que de fato

$$\Upsilon(\mathcal{B}_J) \subset (\mathcal{B}_J), \text{ com } J = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_1 J_0}}{2C_1}.$$

Trabalhando de maneira similar aos cálculos acima, não é difícil mostrar que Υ é contração. Conseqüentemente, o sistema (4.31) tem uma solução em $\mathcal{B}_J$, a qual satisfaz as estimativas (4.34)-(4.35) para $\{r, s\} = \{r_0, s_0\}$ e as estimativas (4.36)-(4.37) para $\{r_1, s_1\} = \{3, m\}$. A prova da unicidade é padrão e portanto será omitida. Para ver que a solução $(\tilde{u}, \tilde{w})$ de (4.31) satisfaz as estimativas (4.34)-(4.35) para os outros valores de r, s, r', s' , reaplicamos o Lema

4.21 e o Lema 4.23. Usando os argumentos de Fujita e Kato [40], Giga e Miyakawa [48], Kozono e Ogawa [70], podemos ver a Hölder continuidade com respeito ao tempo do termo não linear em $L^3_\sigma(\Omega) \times L^\alpha(\Omega)$ e isto nos permite mostrar que $(\tilde{u}, \tilde{w})$ é na verdade, uma solução forte para o sistema (4.30). Para isto podemos usar o seguinte teorema (veja Tanabe [124], Cap. 3. Ver também Pazy [105], Cap. 2.).

Lema 4.25. *Seja X um espaço de Banach, u_0 um elemento de X e $T(t)$ um semigrupo de classe C_0 gerado por um operador $\tilde{A}$. Suponha ainda que f é uma função Hölder contínua no tempo com valores em X , isto é, existem constantes K, γ , com $\gamma \leq 1$ tais que $\|f(t) - f(s)\|_X \leq K|t - s|^\gamma$ para $0 \leq t \leq T^*$ e $0 \leq s \leq T^*$. Então a função*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

é uma solução forte do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = \tilde{A}u(t) + f(t), & 0 < t \leq T^*, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

tal que $u \in C([0, T^]; X) \cap C^1((0, T^*]; X)$ e $u(t) \in D(\tilde{A})$ para cada $t \in (0, T^*]$ e $\tilde{A}u \in C((0, T^*]; X)$.*

Assim, a demonstração da Proposição 4.17 é concluída. ■

Demonstração: (Teorema 4.5.) Tomemos $m = 3/2$ e escolhamos $r_0(m)$ satisfazendo (4.32). Se

$$\chi + \mu_r < \delta', \quad \max\left\{\frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi}\right\} < \delta',$$

então pela Proposição 4.17, existe uma constante positiva $\epsilon = \epsilon(\mu, \mu_r, \gamma, \chi, m, r_0)$ tal que se

$$\|u_0 - \bar{u}\|_3 + \|w_0 - \bar{w}\|_m < \epsilon,$$

existe uma única solução forte $(\tilde{u}, \tilde{w})$ do sistema (4.30) no intervalo $[0, \infty)$. Além disso, $(\tilde{u}, \tilde{w})$ satisfaz as estimativas de decaimento (4.34)-(4.37) para m , onde $\zeta > 0$ é um numero positivo fixo o qual satisfaz (4.27) para $\{p, q\} = \{3r_0/(3 + r_0), mr_0/(m + r_0)\}$ e $\{3, m\}$.

Notemos que pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg*, usando a estimativa para $\|\nabla \tilde{u}(t)\|_{r'}$ para algum $r' > 3$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t)\|_{\infty} &\leq C\|\nabla \tilde{u}(t)\|_{r'}^a \|\tilde{u}(t)\|_3^{1-a} \\ &\leq C_{\zeta} \tilde{C} t^{-a(3/2)(1/3-1/r')-a/2} e^{-\zeta t},\end{aligned}$$

onde a satisfaz

$$0 = a\left(\frac{1}{r'} - \frac{m}{3}\right) + (1-a)\frac{1}{3}.$$

Portanto temos que, $\|\tilde{u}(t)\|_{\infty} = o(e^{-\zeta t})$, quando $t \rightarrow \infty$.

Notemos que não podemos aplicar o mesmo argumento diretamente, para encontrar o decaimento no caso da velocidade de microrrotação w ; de fato, neste caso

$$\text{para } m = 3/2, \quad s_0 = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{3}\right)^{-1} < 3.$$

Para superar esta dificuldade, aplicaremos a Proposição 4.17 com um outro valor para α . De fato, escolhamos α_0 e r_0 tais que

$$\frac{3}{2} < \frac{3r_0}{2r_0 - 3} < \alpha_0 < 3.$$

Esta última desigualdade implica que $1/\alpha_0 + 1/r_0 < 2/3$, ou seja

$$\left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{3}\right)^{-1} > 3. \quad (4.45)$$

Das estimativas (4.34)-(4.37) com $\{r, s\} = \{3, \alpha_0\}$, podemos encontrar um $T > 0$, suficientemente grande, tal que

$$\|\tilde{u}(T)\|_3 + \|\tilde{w}(T)\|_{\alpha_0} < \epsilon(\mu, \mu_r, \chi, \gamma, \alpha_0, r_0), \quad (4.46)$$

*A desigualdade de Gagliardo-Nirenberg estabelece: Se $u \in L^q(\Omega)$ com $D^{\alpha}u \in L^r(\Omega)$, $|\alpha| = m > 0$ e se $1 \leq s, r \leq \infty$, então $D^{\alpha}u \in L^s(\Omega)$, $|\alpha| = s$, e vale a seguinte estimativa

$$|u|_{j,s} \leq c|u|_{m,r}^a \|u\|_q^{1-a}, \quad c = c(n, m, j, q, r, a),$$

onde

$$|u|_{k,p} \equiv \left(\sum_{|l|=k} \int_{\Omega} |D^l u|^p\right)^{1/p},$$

e

$$\frac{1}{s} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-a)\frac{1}{q},$$

para todo a no intervalo $j/m \leq a \leq 1$. Se $j = 0, s = \infty$, então $rm \geq n$. Veja [42].

desde que

$$\gamma + \mu_r < \delta'(\alpha_0, r_0), \quad \max\left\{\frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi}\right\} < \delta'(\alpha_0, r_0),$$

com

$$\tilde{\delta}'(\alpha_0, r_0) \equiv \min\{\delta_{3r_0/(3+r_0), \alpha_0 r_0/(\alpha_0+r_0)}, \delta_{3, \alpha_0}\}.$$

Seja $\delta = \min\{\tilde{\delta}'(\alpha_0, r_0), \delta'(m, r_0)\}$. Suponhamos que

$$\gamma + \mu_r < \delta, \quad \max\left\{\frac{1}{\mu + \mu_r}, \frac{1}{\chi}\right\} < \delta.$$

Como $(u(T), w(T)) \in L^3_\sigma(\Omega) \times L^{\alpha_0}(\Omega)$, aplicamos a Proposição 4.17 com condição inicial sendo $(u(T), w(T))$ e $m = \alpha_0$. Conseqüentemente, podemos deduzir (4.34)-(4.37) para $\alpha = \alpha_0$, sendo $\zeta > 0$ um número positivo fixo, satisfazendo (4.27) para

$$\{p, q\} = \{3r_0/(3 + r_0), \alpha_0 r_0/(\alpha_0 + r_0)\} \text{ e } \{3, \alpha_0\}.$$

Agora podemos ter as estimativas de decaimento de $\|\nabla \tilde{w}(t)\|_s$ para algum $s > 3$ pois já temos que vale (4.45). Notemos que aqui temos usado também o fato da solução ser única. Conseqüentemente temos que

$$\|\tilde{w}\|_\infty = o(e^{-\zeta t}), \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

■

CAPÍTULO 5

Algumas propriedades genéricas de uma classe de equações estacionárias abstratas

Obviousness is always the enemy of correctness. Hence we must invent a new and difficult symbolism in which nothing is obvious.

Bertrand Russell.

O objetivo deste capítulo é estudar algumas propriedades qualitativas de uma classe de equações não lineares estacionárias abstratas, em um espaço de Hilbert separável X , que envolvem vários modelos da dinâmica dos fluidos [32]. O conteúdo deste capítulo está organizado da seguinte maneira: Na Seção 1 apresentamos o problema abstrato propriamente dito e enunciamos os nossos principais resultados. Na segunda seção faremos um resumo de alguns preliminares sobre a teoria de operadores de Fredholm e lembraremos o Teorema de Smale sobre a versão infinito-dimensional do Teorema de Sard. Na Seção 3 provamos os Teoremas anunciados e na última seção apresentamos algumas aplicações dos resultados obtidos no caso de modelos particulares da hidrodinâmica como equações de Navier-Stokes,

equações de fluidos micropolares, equações de Boussinesq, entre outras.

5.1 Introdução ao problema abstrato

O objetivo deste capítulo é estudar algumas propriedades genéricas qualitativas da seguinte classe de equações não lineares estacionárias abstratas, em um espaço de Hilbert separável X :

$$A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B_1\mathbf{u} + B_2\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (5.1)$$

onde A , B_i , $i = 1, 2$, são operadores lineares em X satisfazendo as seguintes propriedades: A é um operador auto-adjunto, estritamente positivo em X com domínio $D(A)$ e inversa compacta. Assim, existe uma base ortonormal de X , denotada por $\{\mathbf{w}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que

$$A\mathbf{w}_j = \lambda_j \mathbf{w}_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \longrightarrow \infty.$$

O produto escalar e a norma em X serão denotados por $(\cdot, \cdot)$ e $|\cdot|$, respectivamente. Como $\{\mathbf{w}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal em X , para todo $\mathbf{u} \in X$ temos:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathbf{w}_j, \quad \text{onde } c_j = (\mathbf{u}, \mathbf{w}_j).$$

O domínio do operador A é caracterizado por

$$D(A) = \left\{ \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathbf{w}_j : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 c_j^2 < \infty \right\}.$$

e para $\mathbf{u} \in D(A)$ temos que $A\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j c_j \mathbf{w}_j$. Devido a esta caracterização do operador A , definimos as potências do operador A como $A^\alpha : D(A^\alpha) \longrightarrow X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ com domínio

$$D(A^\alpha) = \left\{ \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathbf{w}_j : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2\alpha} c_j^2 < \infty \right\}$$

com $A^\alpha \mathbf{u} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha c_j \mathbf{w}_j$ e $c_j = (\mathbf{u}, \mathbf{w}_j)$. Denotaremos por $X^\alpha = D(A^{\alpha/2})$. Para cada α , o espaço X^α é um espaço de Hilbert com o respectivo produto interno dado por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\alpha = (A^{\alpha/2} \mathbf{u}, A^{\alpha/2} \mathbf{v}).$$

A norma associada será denotada por $|\cdot|_\alpha$. Denotamos também por $((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_1$ e $|\cdot|_1 = \|\cdot\|$. O espaço dual de X^α será denotado por $X^{-\alpha}$. Assim, identificando X com seu espaço dual, temos $X^\alpha \hookrightarrow X \hookrightarrow X^{-\alpha}$ onde as imersões são contínuas e com imagem densa.

Em (5.1) B é um operador bilinear e B_1 e B_2 são operadores lineares em X satisfazendo as seguintes hipóteses:

$$B : D(A^{1/2}) \times D(A^\beta) \longrightarrow X, \quad (5.2)$$

$$B_i : D(A^\beta) \longrightarrow X, \quad (5.3)$$

com $\beta \in [3/4, 1)$, são aplicações contínuas, isto é,

$$\begin{aligned} (B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w}) &\leq C|\mathbf{u}|_1|\mathbf{v}|_{2\beta}|\mathbf{w}|, \quad \mathbf{u} \in D(A^{1/2}), \mathbf{v} \in D(A^\beta), \mathbf{w} \in X, \\ (B_i \mathbf{u}, \mathbf{v}) &\leq C|\mathbf{u}|_{2\beta}|\mathbf{v}|, \quad \mathbf{u} \in D(A^\beta), \mathbf{v} \in X. \end{aligned}$$

Além disso, supomos que:

$$(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D(A^{1/2}), \quad (5.4)$$

$$(B_1 \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in D(A^{1/2}). \quad (5.5)$$

Admitiremos que B, B_i têm extensões contínuas $B : X \times X^1 \rightarrow X^{-2\beta}$, $B : X^1 \times X^1 \rightarrow X^{-2\beta+1}$, $B : X^1 \times X \rightarrow X^{-2\beta}$, e $B_i : X \rightarrow X^{-2\beta}$, $B_i : X^1 \rightarrow X^{1-2\beta}$ para $i = 1, 2$ respectivamente. Notemos que por desigualdades de interpolação (veja por exemplo, [76]), (5.2) e (5.3) implicam que:

$$|(B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w})| \leq c_1 |A^{1/2} \mathbf{u}| |A^{1/2} \mathbf{v}|^{2-2\beta} |A \mathbf{v}|^{2\beta-1} |\mathbf{w}| \quad \text{para } \mathbf{v} \in D(A),$$

e

$$|(B_i \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_{2i} |A^{1/2} \mathbf{u}|^{2-2\beta} |A \mathbf{u}|^{2\beta-1} |\mathbf{v}| \quad \text{para } \mathbf{u} \in D(A).$$

As normas de B e B_i com valores em $X^{-\alpha}$ são denotadas por $\|B\|_\alpha$ e $\|B_i\|_\alpha$ respectivamente. Assumiremos que a função dada $\mathbf{f}$ é um elemento dado que pertence ao espaço X , entanto que $\mathbf{u}$ representa a incognita do problema.

A equação (5.1) é de relevante importância pois cobre vários modelos das equações da hidrodinâmica, tais como as equações dos fluidos micropolares, magneto-micropolares,

equações de Boussinesq, equações de Navier-Stokes, entre outras. Vários autores têm estudado estes modelos separadamente e uma grande variedade de resultados relativos à existência, unicidade, regularidade, etc, têm sido encontrados. Em particular, a estrutura do conjunto de soluções das equações de Navier-Stokes foi estudada em [36], [37], [60], [127], [38] e as referências ali citadas.

Neste capítulo, estudaremos algumas propriedades genéricas para o conjunto de soluções de (5.1) motivados pelos resultados de [36],[37], [38], [60], [127] para o problema de Navier-Stokes. Nossas técnicas de análise são na maioria, generalizações das técnicas apresentadas nos trabalhos citados acima. Não entanto, a existência de operadores B_1 e B_2 sendo não nulos, implicam a realização duma análise abstrata adequada de forma que possamos caracterizar a existência e unicidade de soluções para o problema, o qual é fortemente usado, entre outras coisas, para aplicar o Teorema da Função Implícita, o Teorema de Smale e poder definir o grau topológico de uma certa aplicação determinada pelo operador A^{-1} . O problema de dependência contínua do conjunto de soluções com respeito aos dados do problema, para o caso Navier-Stokes, foi analisado em [60] usando uma representação analítica, finito-dimensional. Nós, estudamos este problema usando uma análise funcional abstrata incluindo operadores de Fredholm. Explicitamente, nosso objetivo será provar os seguintes resultados:

Teorema 5.1. *Consideremos a equação (5.1), suponhamos que $\|B_2\|_1 < 1$ e suponhamos válidas as condições (5.4)-(5.5). Então existe um conjunto aberto e denso $\mathcal{O} \subset X$ tal que para todo $\mathbf{f} \in \mathcal{O}$, o conjunto de soluções de (5.1) é finito e de cardinalidade ímpar. Além disso, o número de soluções $\mathcal{R}(\mathbf{f})$ de (5.1), com dado $\mathbf{f}$, sobre cada componente conexa de $\mathcal{O}$ é constante.*

Teorema 5.2 (Dependência Contínua). *Seja $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{O}$, sendo $\mathcal{O}$ dado no Teorema 5.1. Então existe uma vizinhança de $\mathbf{f}_0$ tal que para todo $\mathbf{f}$ dentro desta vizinhança, $\text{Card } \mathcal{R}(\mathbf{f}) = \text{Card } \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) < \infty$. Além disso, se $\mathbf{f}$ converge para $\mathbf{f}_0$ em X , $\mathcal{R}(\mathbf{f})$ converge para $\mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$ no sentido da métrica de Hausdorff sobre X .*

5.2 Preliminares técnicos

Recordemos primeiro algumas definições e fatos da Teoria linear de *Operadores de Fredholm* (veja [122], e as referências citadas ali). Se E_1 e E_2 são dois espaços de Banach, um operador linear contínuo $L : E_1 \longrightarrow E_2$ é chamado um operador de Fredholm se:

1. Núcleo de $L = \text{Nu}(L)$, tem dimensão finita.
2. Imagem de $L = \text{Im}(L)$, é fechado.
3. Conúcleo de $L = E_2 \setminus \text{Im}(L)$, tem dimensão finita.

Se L é um operador de Fredholm, então seu índice ind é definido como sendo o número inteiro $\text{ind } L = \dim \text{Nu}(L) - \dim \text{Conúcleo de } L$. Se $L = L_1 + L_2$ onde L_1 é um operador compacto de E_1 em E_2 e L_2 é um isomorfismo (respectivamente é sobrejetivo e $\dim \text{Nu}(L_2) = q$), então L é um Operador de Fredholm de índice 0 (respectivamente de índice q).

Seja $M \subset E_1$ uma variedade diferenciável. Um *mapa Fredholm* é uma aplicação $\mathcal{F}$ de classe C^1 , $\mathcal{F} : M \longrightarrow E_2$ tal que para cada $\mathbf{u} \in M$, a diferencial $D\mathcal{F}(\mathbf{u})$ é um operador de Fredholm. Neste caso, segue-se das propriedades dos operadores de Fredholm que o índice é independente de $\mathbf{u}$ [122]; neste caso o índice de $\mathcal{F}$ é definido como o índice de $D\mathcal{F}(\mathbf{u})$.

Seja $\mathcal{F}$ uma aplicação de classe C^1 de uma variedade diferenciável M de E_1 sobre E_2 . Recordemos que $\mathbf{u} \in M$ é chamado de *ponto regular* de $\mathcal{F}$ se $D\mathcal{F}(\mathbf{u})$ é sobrejetivo e é dito *ponto singular* se ele não é ponto regular. As imagens dos pontos singulares dadas por $\mathcal{F}$ são chamadas de valores singulares ou valores críticos. Seu complemento em E_2 constitui o conjunto de valores regulares de $\mathcal{F}$. Assim, um valor regular de $\mathcal{F}$ é um ponto $\mathbf{f} \in E_2$ o qual não pertence à imagem $\mathcal{F}(M)$, ou tal que $D\mathcal{F}(\mathbf{u})$ é sobrejetiva em todo ponto $\mathbf{u}$ na pre imagem $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})$. Para provar o Teorema 5.1, faremos uso da seguinte versão infinito-dimensional do Teorema de Sard [122].

Teorema 5.3 (Smale). *Sejam E_1 e E_2 dois espaços de Banach, $M \subset E_1$ aberto e conexo e $\mathcal{F} : M \longrightarrow E_2$ uma aplicação de Fredholm de classe C^k com $k > \max(\text{ind } \mathcal{F}, 0)$. Então o conjunto de valores regulares de $\mathcal{F}$ formam um subconjunto aberto e denso do espaço E_2 . Se $\text{ind } \mathcal{F} = 0$ e $\mathbf{f}$ é um valor regular de $\mathcal{F}$, então $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})$ é um conjunto discreto. Se $\text{ind } \mathcal{F} > 0$,*

$k \geq \text{ind } \mathcal{F}$ e $\mathbf{f}$ é um valor regular de $\mathcal{F}$, então $F^{-1}(\mathbf{f})$ é vazio ou uma variedade em M de classe C^k e dimensão $\text{ind } \mathcal{F}$.

5.3 Prova dos teoremas

5.3.1 Prova do Teorema 5.1.

Antes de apresentar a prova do Teorema 5.1 propriamente dita, daremos alguns resultados com respeito à resolução da equação (5.1).

Teorema 5.4. *Se $\|B_2\|_1 < 1$, então para todo $\mathbf{f} \in X^{-1}$ a equação (5.1) tem pelo menos uma solução fraca $\mathbf{u} \in X^1$ no seguinte sentido: para todo $\mathbf{v} \in X^1$, $\mathbf{u}$ verifica*

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + (B(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v}) + (B_1\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (B_2\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{X^{-1}, X}, \quad (5.6)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$ denota a dualidade entre X^{-1} e X . O conjunto de soluções $\mathbf{u}$ de (5.1) pertencem à bola $\{\mathbf{u} \in X^1 : \|\mathbf{u}\| \leq r\}$, onde $r = \frac{\|\mathbf{f}\|_{-1}}{1 - \|B_2\|_1}$ e além disso, se B_2 satisfaz

$$1 - \|B_2\|_1 > (\|B\|_1 \|\mathbf{f}\|_{-1})^{1/2}, \quad (5.7)$$

então a equação (5.1) tem uma única solução.

Demonstração:. Para demonstrar o Teorema 5.4 (existência) consideramos a aproximação de Galerkin e usamos o seguinte resultado o qual é uma consequência do Teorema de Brouwer. (Veja [32]).

Lema 5.5. *Seja H um espaço de Hilbert de dimensão finita, com produto interno $[\cdot, \cdot]$ e norma $[\cdot]$. Se o operador $Q : H \longrightarrow H$ é contínuo e se*

$$\exists a > 0 \text{ with } [y] = a : [Q(y), y] > 0, \quad (5.8)$$

então existe $y \in H$ com $[y] \leq a$ tal que $Q(y) = 0$.

As aproximações de Galerkin acima referidas são dadas pela seguinte expressão:

$$\mathbf{u}^k = \sum_{j=1}^k c_{jk} \mathbf{w}_j, \quad k \in \mathbb{N},$$

onde os coeficientes c_{jk} são números reais determinados de tal forma que $\mathbf{u}^k$ é solução do seguinte problema:

$$A\mathbf{u}^k + P_k(B(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k) + B_1\mathbf{u}^k + B_2\mathbf{u}^k) = P_k\mathbf{f}. \quad (5.9)$$

Aqui P_k representa a projeção ortogonal associada ao espaço vetorial fechado X_k , gerado por $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ ou equivalentemente para $j = 1, \dots, k$,

$$((\mathbf{u}^k, \mathbf{w}_j)) + (B(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{w}_j) + (B_1\mathbf{u}^k, \mathbf{w}_j) + (B_2\mathbf{u}^k, \mathbf{w}_j) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_j). \quad (5.10)$$

Para cada $\mathbf{u} \in X_k$, consideramos a aplicação $\Phi : X_k \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(\mathbf{v}) = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + (B(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v}) + (B_1\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (B_2\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}).$$

Como Φ é linear e continua, pelo Teorema de Riesz-Fréchet, existe $Q\mathbf{u} \in X_k$ satisfazendo:

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + (B(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v}) + (B_1\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (B_2\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) = ((Q\mathbf{u}, \mathbf{v})),$$

para todo $\mathbf{v} \in X_k$.

O operador $Q : X_k \rightarrow X_k$ satisfaz as condições do Lema 5.5. De fato, a continuidade é uma consequência da continuidade de B, B_1, B_2 em X^1 . Além disso, a condição (5.8) é obtida de

$$\begin{aligned} ((Q\mathbf{u}, \mathbf{u})) &\geq \|\mathbf{u}\|^2 - \|B_2\|_1 \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{f}\|_{-1} \\ &= \|\mathbf{u}\| (\|\mathbf{u}\| - \|B_2\|_1 \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{f}\|_{-1}) \\ &> 0, \end{aligned}$$

desde que $\|\mathbf{u}\| > \|\mathbf{f}\|_{-1}/(1 - \|B_2\|_1)$. Consequentemente, obtemos a existência de uma $\mathbf{u}^k \in X_k$ tal que $Q\mathbf{u}^k = 0$ e assim a equação (5.10) é satisfeita.

Notemos que $\mathbf{u}^k$ é limitada em X^1 ; de fato, multiplicando (5.10) por c_{jk} e somando com respeito a $k = 1, \dots, n$, obtemos para cada $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^k\|^2 &= -(B_2\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k) + (\mathbf{f}, \mathbf{u}^k) \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{-1} \|\mathbf{u}^k\| + \|B_2\|_1 \|\mathbf{u}^k\|^2. \end{aligned}$$

Como $\|B_2\|_1 < 1$, encontramos

$$\|\mathbf{u}^k\| \leq \frac{\|\mathbf{f}\|_{-1}}{1 - \|B_2\|_1}.$$

Portanto, existe uma subsequência $\{\mathbf{u}^{kn}\}$ de $\{\mathbf{u}^k\}$ tal que $\mathbf{u}^{kn}$ converge fracamente em X^1 para alguma $\mathbf{u}$. Como $X^1 \hookrightarrow X$ compactamente, obtemos a existência de uma subsequência a qual é denotada novamente por $\{\mathbf{u}^k\}$, tal que $\mathbf{u}^{kn}$ converge fortemente em X para $\mathbf{u}$. Isto é suficiente para passar ao limite quando $k \rightarrow \infty$. Assim concluímos que o limite $\mathbf{u}$ satisfaz (5.6). Observamos aqui que para realizar o respectivo processo de passo ao limite, é preciso usar de novo, as hipóteses sobre as extensões contínuas dos operadores $B, B_i, i = 1, 2$.

Tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ ($\mathbf{u}$ na igualdade (5.6) e usando (5.4), (5.5) obtemos que cada solução $\mathbf{u}$ de (5.1) pertence à bola $\{\mathbf{u} \in^1: \|\mathbf{u}\| \leq r\}$, onde $r = \frac{\|\mathbf{f}\|_{-1}}{1 - \|B_2\|_1}$. Finalmente, se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ são duas soluções de (5.1) com o mesmo dado $\mathbf{f}$, então a diferença $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, satisfaz para todo $\mathbf{w} \in X^1$

$$((\mathbf{u}, \mathbf{w})) + (B(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) - B(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2), \mathbf{w}) + (B_1 \mathbf{u}, \mathbf{w}) + (B_2 \mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0. \quad (5.11)$$

Tomando $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ em (5.11), obtemos que

$$\|\mathbf{u}\|^2 + (B(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1), \mathbf{u}) + (B_2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0,$$

e conseqüentemente,

$$[(1 - \|B_2\|_1)^2 - \|B\|_1 \|\mathbf{f}\|_{-1}] \|\mathbf{u}\|^2 \leq 0, \quad (5.12)$$

devido a que $\|\mathbf{u}_1\| \leq r = \frac{\|\mathbf{f}\|_{-1}}{1 - \|B_2\|_1}$. Assim, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ e isto finaliza a prova do Teorema. $\blacksquare$

Agora, se tomamos $\mathbf{f} \in X$ podemos mostrar a seguinte estimativa de $\mathbf{u}$ na norma de X^2 . De fato, da igualdade (5.10), para todo $\phi \in X_k, k = 1, 2, \dots, k$, temos

$$(A^{1/2} \mathbf{u}^k, A^{1/2} \phi) + (B(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k), \phi) + (B_1 \mathbf{u}^k, \phi) + (B_2 \mathbf{u}^k, \phi) = (\mathbf{f}, \phi).$$

Considerando em particular $\phi = A\mathbf{u}^k \in X_k$, usando (5.4) e (5.5), as desigualdades de Young e interpolação, obtemos:

$$\begin{aligned} |A\mathbf{u}^k|^2 &\leq |\mathbf{f}| |A\mathbf{u}^k| + |(B(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k), A\mathbf{u}^k)| + |(B_1 \mathbf{u}^k, A\mathbf{u}^k)| + |(B_2 \mathbf{u}^k, A\mathbf{u}^k)| \\ &\leq |\mathbf{f}| |A\mathbf{u}^k| + c_1 |A^{1/2} \mathbf{u}^k|^{3-2\beta} |A\mathbf{u}^k|^{2\beta} + c_2 |A^{1/2} \mathbf{u}^k|^{2-2\beta} |A\mathbf{u}^k|^{2\beta} \\ &\leq c_\epsilon |\mathbf{f}|^2 + \epsilon |A\mathbf{u}^k|^2 + c_\epsilon |A^{1/2} \mathbf{u}^k|^\alpha + \epsilon |A\mathbf{u}^k|^2 + c_\epsilon |A^{1/2} \mathbf{u}^k|^2 + \epsilon |A\mathbf{u}^k|^2, \end{aligned}$$

com $\alpha = (3 - 2\beta)/(1 - \beta)$. Aqui, c_ϵ indica uma constante positiva dependendo de ϵ .

Tomando ϵ suficientemente pequeno e usando que $|A^{1/2}\mathbf{u}^k| \leq r$, obtemos $|A\mathbf{u}^k|^2 \leq C$, onde C depende de $|\mathbf{f}|$ e da pequenez de $\|B_2\|_1$, mas independente de k . Esta estimativa implica que as soluções $\mathbf{u}$ em X^1 de (5.1) pertencem ao espaço $D(A)$. De (5.1) obtemos que

$$\begin{aligned} |A\mathbf{u}| &\leq |\mathbf{f}| + |B(\mathbf{u}, \mathbf{u})| + |B_1\mathbf{u}| + |B_2\mathbf{u}| \\ &\leq |\mathbf{f}| + c_1|A^{1/2}\mathbf{u}|^{3-2\beta}|A\mathbf{u}|^{2\beta-1} + c_2|A^{1/2}\mathbf{u}|^{2-2\beta}|A\mathbf{u}|^{2\beta-1} \\ &\leq |\mathbf{f}| + c_1|A^{1/2}\mathbf{u}|^{(3-2\beta)/(1-\beta)} + c_2|A^{1/2}\mathbf{u}|^2. \end{aligned}$$

Portanto, usando que $|A^{1/2}\mathbf{u}| \leq r$ (o qual depende de $|\mathbf{f}|$) temos:

$$|A\mathbf{u}| \leq c, \quad c = c(|\mathbf{f}|) \quad (5.13)$$

para alguma constante $c > 0$ independente de $\mathbf{u}$.

Agora vamos aplicar o Teorema 5.3 para mostrar o Teorema 5.1. Para isto, faremos a seguinte identificação:

$$\begin{aligned} M &= E_1 = D(A), \quad E_2 = X \\ \mathcal{F}(\mathbf{u}) &= A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + B_1\mathbf{u} + B_2\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Das hipóteses sobre $B, B_i, i = 1, 2$ temos que $\mathcal{F}$ faz sentido como aplicação de $D(A)$ em X . Observamos que para qualquer $\mathbf{f} \in X : \mathcal{R}(\mathbf{f}) := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})$.

Lema 5.6. *A aplicação $\mathcal{F} : D(A) \longrightarrow X$ é própria.*

Demonstração:. Seja K um conjunto compacto de X . Segue-se de (5.13) que $\mathcal{F}^{-1}(K)$ é limitado em $D(A)$ devido ao fato de K ser limitado em X . Assim $\mathcal{F}^{-1}(K)$ é compacto em $D(A^\beta)$ pois $D(A) = X^2 \hookrightarrow X^{2\beta} = D(A^\beta)$ compactamente. Como $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}), B_i, i = 1, 2$ são aplicações contínuas de $D(A^\beta) \longrightarrow X$, temos que $B(\mathcal{F}^{-1}(K)), B_i(\mathcal{F}^{-1}(K))$ são compactas em X . Como o conjunto $A^{-1}\{\mathbf{f} - B(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})) - \sum_{i=1}^2 B_i(\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})); \mathbf{f} \in K\}$ é relativamente compacto em $D(A)$ e contém $\mathcal{F}^{-1}(K)$, concluímos que $\mathcal{F}^{-1}(K)$ é compacto em $D(A)$. ■

Observação 5.7. *O Lema 5.6 implica que o conjunto $\mathcal{R}(\mathbf{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})$ é um subconjunto compacto de $D(A)$ para todo $\mathbf{f} \in X$.*

Notemos que $\mathcal{F}$ é uma aplicação C^∞ de $D(A)$ em X e que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in D(A)$:

$$D\mathcal{F}(\mathbf{u}).\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + B_1\mathbf{v} + B_2\mathbf{v}.$$

Temos também que para cada $\mathbf{u} \in D(A)$ as aplicações lineares:

$$\mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{v} \mapsto B_i\mathbf{v}, \quad i = 1, 2$$

são contínuas de $X^{2\beta}$ em X . Portanto, se $(\mathbf{v}_n)$ é uma sequência limitada em $D(A)$, então como $D(A) \hookrightarrow X^{2\beta}$ compactamente, existe uma subsequência $(\mathbf{v}_{nk})$ que converge fortemente em $X^{2\beta}$ para algum $\mathbf{v} \in X^{2\beta}$. Consequentemente,

$$\begin{cases} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{nk}) \longrightarrow B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ B(\mathbf{v}_{nk}, \mathbf{u}) \longrightarrow B(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \\ B_i\mathbf{v}_{nk} \longrightarrow B_i\mathbf{v}, \end{cases} \quad \text{em } X$$

isto é, $\mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} \mapsto B(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, $\mathbf{v} \mapsto B_i\mathbf{v}$, $i = 1, 2$ são compactas de $D(A)$ em X .

Como A é um isomorfismo de $D(A)$ em X , então usando as propriedades dos operadores de Fredholm comentadas no início da Seção 5.2, concluímos que $D\mathcal{F}(\mathbf{u})$ é um operador de Fredholm de índice 0 e $\mathbf{u}_0$ é um ponto regular de $\mathcal{F}$. Aplicando o Teorema 5.3, temos que $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})$ é um conjunto discreto para cada valor regular $\mathbf{f}$ de $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ é própria, então $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})$ é um conjunto finito. Consequentemente fazendo $\mathcal{O}$ o conjunto de valores regulares de $\mathcal{F}$, o qual é aberto e denso devido ao Teorema de Smale (Teorema 5.3), concluímos uma parte da demonstração do Teorema 5.1. Notemos que a hipótese de $\|B_2\|_1 < 1$ foi usada para garantir a existência de pelo menos uma solução de (5.1).

Agora iremos mostrar que o número de soluções de (5.1) em cada componente conexa de $\mathcal{O}$ é constante. Seja $\mathcal{O}_j$, $j \in \Lambda$ as componentes conexas de $\mathcal{O}$ e sejam $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1$ dois pontos de $\mathcal{O}_j$, para algum j . Tomemos $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}_0)$. Então, existe uma curva contínua:

$$t \in [0, 1] \mapsto \mathbf{f}(t) \in \mathcal{O}_j, \quad \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_0, \mathbf{f}(1) = \mathbf{f}_1.$$

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} T &: [0, 1] \times D(A) \longrightarrow X \\ (s, \mathbf{u}) &\longmapsto T(s, \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(s). \end{aligned}$$

Diretamente das hipóteses, segue-se que $T(0, \mathbf{u}_0) = 0$, a aplicação $T(s, \cdot)$ é de classe C^∞ e além disso para $(s, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times D(A)$ temos que:

$$D_{\mathbf{u}}T(s, \cdot) = D\mathcal{F}(\mathbf{u}).$$

$D_{\mathbf{u}_0}T(0, \cdot)$ é um isomorfismo de $D(A)$ em X pois $D\mathcal{F}(\mathbf{u})$ é um operador de Fredholm de índice 0. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0}$ de 0 e $\mathbf{u}_0$, respectivamente, e uma única função contínua $s \mapsto \mathbf{u}(s)$, $s \in \mathcal{U}_0$, tal que

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}(s)) = \mathbf{f}(s), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0.$$

Como $\mathbf{f}(s)$ é um valor regular de $\mathcal{F}$, para todo $s \in [0, 1]$, então $\mathbf{u}(s)$ é definida para todo s , $0 \leq s \leq 1$, e por isso $\mathbf{u}(1) \in \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}_1)$. Agora, $\text{Card } \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}_0) \leq \text{Card } \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f}_1)$ como consequência da unicidade de $\mathbf{u}(s)$. Por simetria, o número de pontos é o mesmo.

Falta mostrar que o número de soluções de (5.1) é de cardinalidade ímpar. Iniciamos lembrando que se $F = I - F_0$ é um operador definido num espaço normado Y , com F_0 sendo um operador compacto e I representando o operador identidade em Y , e se W é um domínio limitado de Y , $g \in Y$, g não pertencendo ao espaço $F(\partial W)$, podemos definir o inteiro $D(F, W, g)$ o qual é chamado de grau topológico de F , em W , no ponto g , satisfazendo as seguintes propriedades [107], [28]:

- Se $W = W_1 \cup W_2$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ e g não pertence ao espaço $F(\partial W_1) \cap F(\partial W_2)$, então g não pertence ao espaço $F(\partial W)$ e

$$D(F, W, g) = D(F, W_1, g) + D(F, W_2, g).$$

- Se $D(F, W, g) \neq 0$, e elemento $g \in F(W)$, a equação $F(u) = g$ tem pelo menos uma solução em W .
- $D(F, W, g)$ permanece constante se F, W, g , mudam continuamente, de forma que g nunca pertença ao conjunto $F(\partial W)$. Entende-se que F varia continuamente se $F = F(\theta) = I - F_0(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, e $\theta \mapsto F_0(\theta)\phi$ é uma aplicação uniformemente contínua com respeito a ϕ ($\phi \in Y$).

Por outro lado, se $u \in Y$ é a única solução de $F(u) = g$, em alguma vizinhança de u , podemos definir, para ϵ suficientemente pequeno, o grau $D(F, W_\epsilon(u), g)$, onde W_ϵ é a bola de raio ϵ , centrada em u . Este número é independente de ϵ como consequência da terceira propriedade anteriormente citada. Assim, podemos definir o *Índice de F em u* como sendo

$$Ind(u) = D(F, W_\epsilon, g), \quad \epsilon < \epsilon_0.$$

Sabemos que (ver [107]) o índice do operador identidade em qualquer ponto u é um, e se F_0 é um operador linear compacto em Y e $I - F_0$ é um a um, o índice de $I - F_0$ é ± 1 ; além disso, se a equação $F(u) = g$ possui um número finito de soluções u_j num domínio limitado W , e não possui soluções em ∂W , então

$$D(F, W, g) = \sum_{j=1}^k ind(u_j).$$

Lembramos também que se F_0 é Fréchet diferenciável num ponto u_0 com derivada G , e se $I - G$ é um a um, então u_0 é uma solução isolada da equação $F(u) = F(u_0)$ e podemos definir o índice

$$ind(u_0) := ind(F, u_0) = ind(I - G, 0) = ind(I - G).$$

Voltando à equação (5.1), fixado $\mathbf{f} \in \mathcal{O}$, reescrevemos (5.1) como

$$\begin{cases} F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + A^{-1} \left(B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^2 B_j \mathbf{u} \right) = A^{-1}(\mathbf{f}) = \mathbf{g}, \\ \mathbf{u}, \mathbf{g} \in D(A). \end{cases}$$

Notemos que $F = (I - F_0)$, com $-F_0 := A^{-1}(B + \sum_{j=1}^2 B_j)$ o qual é compacto. Se $\mathbf{u}_\lambda$ é solução de $F(\mathbf{u}_\lambda) = \lambda \mathbf{g}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, então por (5.13) temos:

$$|A\mathbf{u}_\lambda| \leq c(|\mathbf{f}|) < R := 1 + c(|\mathbf{f}|).$$

Portanto, o grau de Leray-Schauder $D(F, B_R, \lambda \mathbf{g})$ (veja por exemplo, [28]), onde B_R é a bola aberta de $D(A)$ de radio R , está bem definido. Se $\lambda \mathbf{f}$ é um valor regular de $\mathcal{F}$, então $\lambda \mathbf{g}$ é um valor regular de F . Assim, novamente pelo Teorema de Smale, se $F^{-1}(\lambda \mathbf{g}) = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$

(conjunto finito), temos que

$$D(F, B_R, \lambda \mathbf{g}) = \sum_{i=1}^k \text{ind}(\mathbf{u}_j).$$

Notemos que existe $\lambda_0 \in [0, 1]$, tal que B_2 satisfaz $1 - \|B_2\|_1 > (\sqrt{\|B\|_1 \|\lambda \mathbf{f}\|_{-1}})^{1/2}$ para todo $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Assim, devido ao Teorema 5.4 temos que $\mathcal{F}^{-1}(\lambda \mathbf{f})$ contém um único ponto $\mathbf{u}_\lambda$. Para estes valores de λ , usando argumentos similares aos feitos anteriormente, podemos mostrar que $D\mathcal{F}(\mathbf{u}_\lambda)$ é um isomorfismo e conseqüentemente $D(F, B_R, \lambda \mathbf{g}) = \pm 1$. Como $D(F, B_R, \lambda \mathbf{g})$ é invariante por homotopia, temos que $D(F, B_R, \mathbf{g}) = \pm 1$. Isto implica que k é um número ímpar. ■

5.3.2 Prova do Teorema 5.2.

Antes de apresentar a prova do Teorema 5.2 propriamente dita, mostraremos o seguinte lema auxiliar:

Lema 5.8. *Seja $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{O}$, $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$. Existem vizinhanças $\mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}, \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0}$ of $\mathbf{f}_0$ e $\mathbf{u}_0$, respectivamente, tais que $\text{Card}(\mathcal{U}_{\mathbf{u}_0} \cap \mathcal{R}(\mathbf{f})) = 1$ para todo $\mathbf{f} \in \mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}$. Além disso a aplicação $\mathcal{U}_{\mathbf{f}_0} \ni \mathbf{f} \mapsto \mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0}$ é de classe C^∞ , onde $\{\mathbf{u}_{\mathbf{f}}\} := \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0} \cap \mathcal{R}(\mathbf{f})$.*

Demonstração:. Consideremos a aplicação $T : X \times D(A) \longrightarrow X$ tal que $T(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}$. Notemos que $T(\mathbf{f}_0, \mathbf{u}_0) = 0$ e T é de classe C^∞ . Como $D\mathcal{F}(\mathbf{u})$ é um operador de Fredholm de índice 0, temos que $D_{\mathbf{u}_0}T(\mathbf{f}_0, \cdot)$ é um isomorfismo de $D(A)$ para X . Assim, do Teorema da função implícita, segue-se que existem vizinhanças $\mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}, \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0}$ de $\mathbf{f}_0$ e $\mathbf{u}_0$, respectivamente, e uma função ξ , de classe C^∞ definida como $\xi : \mathcal{U}_{\mathbf{f}_0} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0}$ tal que $T(\mathbf{f}, \xi(\mathbf{f})) = 0$, para todo $\mathbf{f} \in \mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}$. Em particular, para qualquer $\mathbf{f} \in \mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}$, existe uma única $\mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0}$ com $\xi(\mathbf{f}) = \mathbf{u}_{\mathbf{f}}$, isto é, $T(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathbf{f}}) = 0$, ou equivalentemente $\mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0} \cap \mathcal{R}(\mathbf{f})$. Além disso a aplicação $\mathcal{U}_{\mathbf{f}_0} \ni \mathbf{f} \mapsto \mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in \mathcal{U}_{\mathbf{u}_0}$ é de classe C^∞ . ■

Prova of Teorema 5.2.

O Teorema 5.1 implica que o conjunto $\mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$ é finito. Seja $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$, pelo Lema 5.8 existem vizinhanças $\mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}$, $\mathcal{U}_{\mathbf{u}}$ de $\mathbf{f}_0$ e $\mathbf{u}$, respectivamente, tais que $\text{Card}(\mathcal{U}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)) = 1$ para todo $\mathbf{f} \in \mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}$. Além disso, a aplicação

$$\mathcal{U}_{\mathbf{f}_0} \ni \mathbf{f} \longmapsto \mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in \mathcal{U}_{\mathbf{u}} \quad (5.14)$$

é de classe C^∞ , onde $\{\mathbf{u}_{\mathbf{f}}\} = \mathcal{U}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{R}(\mathbf{f})$. Como $\mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$ é finito, existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que as bolas $\{B(\mathbf{u}, \delta) : \mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)\}$ são disjuntas duas a duas e para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) : B(\mathbf{u}, \delta) \subset \mathcal{U}_{\mathbf{u}}$. Pela continuidade da função (5.14), existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}$ de $\mathbf{f}_0$ tal que $\mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in B(\mathbf{u}, \delta)$, para $\mathbf{f} \in \mathcal{U}$. Fazendo $U = \cap \{\mathcal{U} : \mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)\}$, temos que se $\mathbf{f} \in U$, então a função

$$\mathcal{R}(\mathbf{f}_0) \ni \mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in \mathcal{U}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{R}(\mathbf{f})$$

é injetiva e como consequência, $\text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) \leq \text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f})$. Para ver a igualdade, usamos um argumento de contradição; assuma que o conjunto $\{\mathbf{f} \in U : \text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) < \text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f})\}$ é infinito. Então, existe uma seqüência $(\mathbf{f}_k), \mathbf{f}_k \in U$ convergindo para $\mathbf{f}_0$ em X tal que $\text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) < \text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f}_k)$, $k \in \mathbb{N}$. O subconjunto $\{\mathbf{u}_{\mathbf{f}_k} : \mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)\}$ tem exatamente $\text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$ elementos por causa de $\mathbf{u}_{\mathbf{f}_k}$ ser o único elemento de $\mathcal{R}(\mathbf{f}_k)$ o qual está numa certa vizinhança da solução $\mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$. Por tanto, ele não é todo o $\mathcal{R}(\mathbf{f}_k)$.

Tomemos uma seqüência $(\mathbf{a}_k) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{f}_k) \setminus \{\mathbf{u}_{\mathbf{f}_k} : \mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)\}$. Notemos que $\mathbf{a}_k$ não pertence ao conjunto $\cup \{\mathcal{U}_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)\}$. Por (5.13), a seqüência $(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $D(A)$. Assim, devido ao Teorema de Banach-Alaughlu, existe $\mathbf{a} \in D(A)$, e um subconjunto infinito $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{a}_k$ converge fracamente para $\mathbf{a}$ em $D(A)$ quando $\mathcal{N} \ni k \longrightarrow \infty$. Como $D(A) \hookrightarrow X$ (onde $\hookrightarrow$ denota a imersão compacta), então $\mathbf{a}_k \longrightarrow \mathbf{a}$ converge fortemente em X para alguma subseqüência $(\mathbf{a}_k)$, e isto é suficiente para passar o limite. Consequentemente, o limite $\mathbf{a} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$. Isto leva a uma contradição pois

$$\cup \{\mathcal{U}_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)\}^C \ni \mathbf{a} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) \subset \cup \{\mathcal{U}_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)\}.$$

Portanto, o conjunto $\{\mathbf{f} \in U : \text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) < \text{Card} \mathcal{R}(\mathbf{f})\}$ é finito e consequentemente, existe

$\tilde{U}$, uma vizinhança suficientemente pequena em U , tal que:

$$\forall \mathbf{f} \in \tilde{U}, \quad \text{Card } \mathcal{R}(\mathbf{f}) = \text{Card } \mathcal{R}(\mathbf{f}_0).$$

Agora, mostraremos que se $\mathbf{f}$ tende para $\mathbf{f}_0$ em X , então $\mathcal{R}(\mathbf{f})$ converge para $\mathcal{R}(\mathbf{f}_0)$ na métrica de Hausdorff sobre X . Seja $\epsilon > 0$, então existe $\mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}$ tal que $\mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in B(\mathbf{u}, \epsilon)$ para qualquer $\mathbf{f} \in \mathcal{U}_{\mathbf{f}_0}$ e assim $\mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in \{\mathbf{u}\} + B(0, \epsilon) \subset \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) + B(0, \epsilon)$. Isto implica que

$$\mathcal{R}(\mathbf{f}) \subset \{\mathbf{u}_{\mathbf{f}} : \mathbf{u} \in \mathcal{R}(\mathbf{f}_0)\} \subset \mathcal{R}(\mathbf{f}_0) + B(0, \epsilon).$$

Como $\mathbf{u}_{\mathbf{f}} \in B(\mathbf{u}, \epsilon)$, então $\mathbf{u} \in B(\mathbf{u}_{\mathbf{f}}, \epsilon) = \{\mathbf{u}_{\mathbf{f}}\} + B(0, \epsilon) \subset \mathcal{R}(\mathbf{f}) + B(0, \epsilon)$. Assim,

$$\mathcal{R}(\mathbf{f}_0) \subset \mathcal{R}(\mathbf{f}) + B(0, \epsilon),$$

e a demonstração é concluída. ■

Corolário 5.9. *Sob as condições do Teorema 5.2, a aplicação*

$$\mathcal{O} \ni \mathbf{f} \mapsto \mathcal{R}(\mathbf{f}) \in D(A)$$

é contínua se consideramos a métrica de Hausdorff sobre X . Além disso, a função

$$\mathcal{O} \ni \mathbf{f} \mapsto \text{Card } \mathcal{R}(\mathbf{f}) \in \mathbb{Z}$$

é constante sobre toda componente conexa do conjunto $\mathcal{O}$.

5.4 Aplicações

Nesta seção faremos alguns breves comentários sobre algumas aplicações de nossos resultados em certos modelos particulares de equações estacionárias.

5.4.1 Modelo de fluidos micropolares

Como uma aplicação dos teoremas provados anteriormente, consideramos primeiramente o modelo de fluidos micropolares. A dinâmica dum fluido micropolar, em estado estacionário,

dentro de um domínio Ω é descrita pelo seguinte sistema de equações em Ω [80].

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\nu + \nu_r)\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 2\nu_r \text{rot } \mathbf{w} + \mathbf{f}_1, \\ -\sigma\Delta \mathbf{w} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} - \beta\nabla \text{div } \mathbf{w} + 4\nu_r \mathbf{w} = 2\nu_r \text{rot } \mathbf{u} + \mathbf{f}_2, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad (5.15)$$

As equações (5.15) descrevem as leis do momentum, momentum angular e conservação da massa, respectivamente; Nesta equações, $\mathbf{u}$ representa a velocidade do fluido, p a respectiva pressão hidrostática e $\mathbf{w}$ a velocidade angular de rotação das partículas. Além disso, $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ representam campos de forças externas; $\nu, \nu_r, \sigma, \beta$ são constantes físicas positivas (ν é a usual viscosidade Newtoniana do fluido, ν_r é a viscosidade de microrotação, σ e β são constantes que dependem de novas viscosidades relativas à assimetria do tensor stress). A densidade do fluido é considerada, sem perda de generalidade, como sendo igual a um. Assumimos que Ω é um conjunto limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave $\partial\Omega$. Consideramos as condições do bordo como sendo $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ sobre $\partial\Omega$. Observamos aqui que no caso de condições de fronteira sendo não nulas, mas suficientemente regulares.

Por X denotamos o espaço de Hilbert $H \times L^2(\Omega)^3$ onde H é o fecho do conjunto

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0\}$$

na norma de $L^2(\Omega)^3$. A norma em X é denotada por $|\cdot|$.

Agora introduzimos os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{U}) &= (-(\nu + \nu_r)P\Delta \mathbf{u}_1, -\sigma\Delta \mathbf{w}_1 - \beta\nabla \text{div } \mathbf{w}_1) \\ &\equiv (A_1 \mathbf{u}_1, A_2 \mathbf{w}_1), \\ B(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= (P((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_2), (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{w}_2), \\ B_1(\mathbf{U}) &= (0, 0), \\ B_2(\mathbf{U}) &= (-2\nu_r \text{rot } \mathbf{w}_1, -2\nu_r \text{rot } \mathbf{u}_1 + 4\nu_r \mathbf{w}_1), \end{aligned}$$

para $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1) \in D(A)$, $\mathbf{V} = (\mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2) \in D(A)$. O operador P acima é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)^3$ sobre o subespaço H . Com estas notações, o sistema (5.15) toma a forma (5.1) com $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$.

Observaremos que as hipóteses do Teorema 5.1 são satisfeitas. O operador A é auto-adjunto,

positivo, com domínio

$$D(A) = (W^{2,2}(\Omega)^3 \cap V) \times (W^{2,2}(\Omega)^3 \cap W_0^{2,2}(\Omega)^3)$$

onde $W^{2,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ são os espaços de Sobolev usuais, e V é o fecho de $\mathcal{V}$ na norma de $W_0^{1,2}(\Omega)$; na verdade, V pode ser caracterizado por $V = \{\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$. Denotamos por $X^\alpha = D(A^{\alpha/2})$ e $X_i^\alpha = D(A_i^{\alpha/2})$, $i = 1, 2$. Observemos que $X_2^\alpha = D(\Delta^{\alpha/2})$. Das propriedades do operador de Stokes e de Laplace [128], concluimos que para $\mathbf{u} \in X_1^1$, $\mathbf{v} \in X_i^2$,

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}| &\leq c \|\mathbf{u}\|_{L^6} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^3} \leq c \|\mathbf{u}\|_{L^6} |\nabla \mathbf{v}|^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{W^{2,2}}^{1/2} \\ &\leq C |A_1^{1/2} \mathbf{u}| |A_i^{1/2} \mathbf{v}|^{1/2} |A_i \mathbf{v}|^{1/2}. \end{aligned}$$

Na verdade as normas $|A\mathbf{U}|$ and $\|\mathbf{U}\|_{W^{2,2}}$ são equivalentes em $D(A)$ e as normas $|A^{1/2}\mathbf{U}|$ e $\|\mathbf{U}\|_{W^{1,2}}$ são equivalentes em $D(A^{1/2})$.

Podemos mostrar que

$$|B(\mathbf{U}, \mathbf{V})| \leq c |A^{1/2} \mathbf{U}| |A^{1/2} \mathbf{V}|^{1/2} |A \mathbf{V}|^{1/2},$$

para $\mathbf{U} \in X^1$, $\mathbf{V} \in X^2$. A condição (5.4) é verificada graças às propriedades da forma trilinear

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j,$$

para $\mathbf{u}$ em $D(A_1^{1/2})$, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. (Veja [127]).

Também podemos verificar que $|(B_2(\mathbf{U}), \mathbf{V})| \leq c |A^{1/2} \mathbf{U}| |\mathbf{V}|$, $\mathbf{U} \in D(A^{1/2})$, $\mathbf{V} \in X$. Do Teorema 5.1, segue-se que para todo $\mathbf{f} \in \mathcal{O}$, o conjunto de soluções de (5.15) é finito e de cardinalidade ímpar. Além disso, o número de soluções sobre cada componente conexa de $\mathcal{O}$ é constante. As consequências do Teorema 5.2 são também obtidas.

5.4.2 Equações estacionárias de Navier-Stokes

Como uma outra aplicação do Teorema 5.1 e Teorema 5.2 consideramos as equações estacionárias de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \text{ em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \phi \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.16)$$

onde $\mathbf{f} \in H$, $\phi \in W^{1,3/2}(\partial\Omega)$ (o espaço das funções traço em $W^{1,2}(\Omega))^3$ com $\int_{\partial\Omega} \phi \cdot \mathbf{n} ds = 0$, $\mathbf{n}$ sendo a normal exterior sobre $\partial\Omega$). Um estudo das propriedades dadas pelo Teorema 5.1 para este sistema pode ser encontrado, por exemplo, em [35], [36], [38]. Notemos que sendo $\phi \in W^{1,3/2}(\partial\Omega)$, para todo $\delta > 0$ existe uma extensão G de ϕ , com $G \in W^{2,2}(\Omega)$, $\operatorname{div} \phi = 0$, $G = \phi$ sobre $\partial\Omega$ tal que para todo $\mathbf{u} \in V$,

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u} \cdot \nabla G, \mathbf{u})| &\leq \delta \|\phi\|_{W^{1,3/2}(\partial\Omega)} |\nabla \mathbf{u}|^2 \\ \|G\|_{W^{2,2}(\Omega)} &\leq C(\delta) \|\phi\|_{W^{1,3/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Seja $U = \mathbf{u} - G$ e definamos

$$\begin{aligned} AU &= -\nu P\Delta U, \\ B(U, U) &= P((U \cdot \nabla)U), \\ F &= \mathbf{f} + \nu\Delta G - (G \cdot \nabla)G, \\ B_2U &= P((U \cdot \nabla)G) + P((G \cdot \nabla)U), \\ B_1U &= 0. \end{aligned}$$

Acima temos usado a notação padrão P para indicar o operador projeção $P : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow H$, sendo H o fecho do conjunto $\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$, na norma do $L^2(\Omega)$ e V o fecho de $\mathcal{V} = \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$, na norma do $H^1(\Omega)$. Com estas notações, levamos o problema 5.16 à seguinte equação abstrata

$$AU + B(U, U) + B_1U + B_2U = F,$$

e sobre esta equação aplicamos os resultados estudados neste capítulo.

5.4.3 Outros modelos

Os Teoremas 5.1 e 5.2 podem ser aplicados no modelo de fluidos magnetomicropolares. Neste modelo, além das incógnitas $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ que representam as respectivas velocidades translacional e de microrotação, existe uma nova incognita denotada por $\mathbf{h}$ correspondente ao campo magnético. Uma descrição mais detalhada deste modelo pode ser encontrada em [109] e nas referencias citadas ali.

Outros problems podem ser estudados no mesmo caminho, por exemplo, a equação do calor, as equações de Boussinesq entre outros.

CAPÍTULO 6

Soluções fortes para as equações de Navier-Stokes não homogêneas em domínios não limitados

I would quarrel with mathematics, and say that the sum of zeros is a dangerous number.

Stanislaw Jerzy Lec

Neste capítulo estudamos alguns aspectos relativos à existência de soluções fortes para as equações de Navier-Stokes não homogêneas no caso de um domínio espacial não limitado do $\mathbb{R}^3$. Na sua forma não conservativa, estas equações são dadas pelo seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Assumimos que as equações (6.1) são satisfeitas no conjunto aberto $Q = \Omega \times (0, T)$ onde Ω é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ representando o domínio do fluido e $(0, T)$ é um intervalo de tempo. Complementamos este sistema adicionando a (6.1) as seguintes condições de fronteira

e condições iniciais

$$\mathbf{u} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \text{ em } \Omega, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}, \text{ quando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (6.4)$$

$$\rho(0) = \rho_0, \text{ em } \Omega. \quad (6.5)$$

Aqui, as incógnitas são ρ , $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e p denotando a densidade de massa, a velocidade e a pressão do fluido, respectivamente. A constante $\mu > 0$ representa a viscosidade dinâmica do fluido e $\mathbf{f}$ é uma força externa dada atuando sobre o sistema. ρ_0 e $\mathbf{u}_0$ correspondem aos dados iniciais do problema. A i -ésima componente de $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ é dada por $(\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Além disso, $\mathbf{u} \cdot \nabla \rho = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}$. A primeira equação em (6.1) corresponde a lei de conservação do momento linear, a segunda equação em (6.1) corresponde a conservação da massa e a terceira equação em (6.1) representa a incompressibilidade do fluido.

O modelo clássico das equações de Navier-Stokes, corresponde ao caso especial quando $\rho(x, t) = \rho_0$ é uma constante positiva; neste caso, a segunda equação em (6.1) é automaticamente satisfeita. Este caso tem sido bastante estudado. (Veja por exemplo, Ladyshenskaya [73], Temam [126] e as referências encontradas ali). O primeiro a considerar matematicamente o modelo estudado neste capítulo foi o russo A.K. Kazhikov no ano 1974 sob a condição $0 < \alpha \leq \rho_0(x) \leq \beta$ sobre a densidade inicial [66]. Ele mostrou essencialmente a existência de soluções fracas em domínios limitados de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 . As provas detalhadas aparecem na monografia [6] onde se levanta a questão para o caso no qual $\alpha = 0$. (veja também os trabalhos de J.L. Lions [77], [78]). Também são apresentados alguns resultados de regularidade das soluções fracas.

Os que resolvem a questão da unicidade das soluções fortes foram O. Ladyzhenskaya e V. Solonnikov [75] no ano 1975, utilizando basicamente Teoria do Potencial, linearização e ponto fixo; eles exigem $p > n$, $n = 2$ ou 3 ; também foram dados resultados de existência global, para o caso tridimensional exigem decaimento exponencial no tempo para a força externa. Este trabalho foi feito em domínios limitados.

O primeiro a resolver a questão levantada por Kazhikov, isto é, o caso $\alpha = 0$, foi o francês J. Simon [119] no ano 1978; também são interessantes seus artigos posteriores [120], [118]. Nestes trabalhos foi aplicado um novo Teorema de compacidade nos chamados espaços

de Nikolskii obtido por J. Simon em conjunto com o Método de Galerkin e Energia. Os resultados foram dados em domínios limitados.

O problema em domínios exteriores foi abordado pela matemática italiana Padula [103] no ano 1982; convém também ver o trabalho [104]. Nestes trabalhos é utilizado o Método de Imersão de domínios.

No artigo [67], Kim no ano 1987 aborda novamente o caso $\alpha = 0$ estabelecendo uma desigualdade diferencial importante (argumento que tinha já sido usado por Beirão da Veiga [9]), a qual foi fundamental para os trabalhos de existência de soluções fortes realizados em [112]. Kim mostra a existência de uma solução fraca mais regular que as obtidas por Kazhikov e Simon, mas é bom ressaltar que a densidade inicial é mais regular.

O japonês Okamoto via operadores de evolução estabelece resultados num contexto Hilbertiano, análogos aos de Fujita e T. Kato [40] no caso das equações de Navier-Stokes clássicas, no artigo [98], do ano 1982. O tipo de domínio considerado neste trabalho também são os domínios limitados.

O italiano R. Salvi [112] mostra a existência e unicidade de soluções fortes em domínios limitados, via o método de Semi-Galerkin espectral e o Teorema de Aubin-Lions, obtendo assim os análogos aos resultados de J.G. Heywood [54] para o caso das equações de Navier-Stokes clássicas.

Um resultado de existência e unicidade de solução global forte em domínios limitados sem decaimento exponencial na força externa, foram dados em [11]. Resultados análogos aos das equações de Navier-Stokes clássicas de existência global, isto é, sem decaimento nenhum na força externa, para o sistema deste capítulo, foram obtidos em [12].

O problema em domínios não cilíndricos foi abordado em primeiro lugar por R. Salvi [113] com condições mistas na fronteira no ano 1984; (observe que o problema com condições mistas não é abordado por nenhum dos autores anteriores) sob a condição $0 < \alpha \leq \rho_0(x) \leq \beta$.

Em domínios não limitados, Fernandez-Cara e Guillén [33] provaram a existência de soluções fracas usando o Método de Imersão de domínios e argumentos análogos aos de Simon [118]. Utilizando o Método do regularizador e a teoria L^p para as equações parabólicas Itoh e Tani [63] mostram a existência e unicidade de solução forte em domínios não limitados com fronteira de classe C^2 , resultados análogos aos obtidos por [75], caso $p > n$, $n = 2$ ou 3 .

O livro de P. L. Lions [79] também apresenta resultados para este modelo nas páginas

19 até 78. São estudadas a existência de soluções fracas para o modelo em três situações: o problema de Dirichlet, o problema periódico no espaço e o caso de todo o espaço $\mathbb{R}^n$, para dimensão arbitrária $n \geq 2$. Neste livro a viscosidade é assumida ser variável (dependente da densidade), e a densidade inicial é não negativa. O Autor também discute brevemente as soluções fortes nas páginas 32 e 33, para o caso bidimensional com densidade constante.

Entretanto, o estudo da existência e unicidade de soluções fortes do sistema (6.1)-(6.5) para o caso $p = 2$ no caso de domínios não limitados arbitrários, não tem sido discutido. Neste trabalho, seguimos as idéias de Heywood junto com argumentos usados por [33], [112] e [12] para mostrar a existência e unicidade de soluções fortes locais e globais no tempo para o sistema (6.1)-(6.5) em domínios não limitados. Desta maneira, a análise feita neste capítulo complementaria o ciclo de respostas sobre a existência de soluções fracas e fortes, locais e globais para o sistema de Navier-Stokes não homogêneo; além disso, uma das motivações adicionais deste capítulo, é o futuro estudo do comportamento assintótico das soluções tendo como base os resultados aqui obtidos.

Dentro das equações clássicas de Navier-Stokes, o problema de existência de soluções fortes foi estudado por Heywood [54], onde é usado o método espectral de Galerkin, argumentos de compacidade e métodos de energia para o caso $p = 2$. Observamos que Heywood considerou domínios com fronteira sendo uniformemente de classe C^3 . Esta hipótese foi necessária unicamente para obter a regularidade do problema de Stokes sem o uso da Teoria do Potencial.

6.1 Preliminares e resultados principais

Iniciamos esta seção recordando algumas definições e fatos que serão usados ao longo deste capítulo. Consideramos os espaços de Sobolev usuais

$$W^{m,q}(\Omega) = \{\phi \in L^q(\Omega) : \|\partial^k \phi\|_{L^q(\Omega)} < \infty, \text{ for } |k| \leq m\}$$

para $m \geq 1$ e $1 \leq q \leq \infty$ com as normas $\|\cdot\|_{m,q}$. Quando $q = 2$ denotamos por $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. A norma no espaço L^q será denotada por $\|\cdot\|_q$ e quando $q = 2$, denotamos por $(\cdot, \cdot)$ o produto escalar em L^2 e a norma associada a denotaremos simplesmente por $\|\cdot\|$.

Indicamos aqui que para $G \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$\|D^2 \mathbf{u}\|_{q,G} = \left(\sum_{i,j,k=1}^3 \int_G \left| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|^q dx \right)^{1/q}.$$

Os espaços $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $C_0^k(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ são definidos de maneira usual, com o superíndice indicando derivadas contínuas até uma certa ordem.

Ao longo deste capítulo, assumimos Ω como sendo qualquer subconjunto aberto do $\mathbb{R}^3$, que pode ser limitado ou não limitado, com fronteira $\partial\Omega$ sendo uniformemente de classe C^3 . Lembramos que a fronteira de Ω é dita uniformemente de classe C^k , $k = 1, 2, \dots$ se é possível escolher coordenadas cartesianas locais (x_1, x_2, x_3) numa vizinhança U_x para cada $x \in \partial\Omega$, tal que $\partial\Omega \cap U_x$ é representado por uma função $x_3 = \psi(x_1, x_2; x)$ de classe C^k ; além disso, as vizinhanças U_x podem ser escolhidas como sendo bolas, todas do mesmo tamanho, com respectivos centros x , e com suas derivadas até ordem k de cada função $\psi(\cdot, \cdot, x)$ limitadas por uma constante independente de x .

Como em Heywood [54], definimos os seguintes espaços funcionais de divergência nula.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Omega) &= \{\phi : \phi \in C_0^\infty(\Omega)^3, \operatorname{div} \phi = 0\}, \\ D_0^{1,2}(\Omega) &= \text{fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ na norma } \|\nabla \phi\|, \\ W_0^{1,2}(\Omega) &= \text{fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ na norma } \|\phi\|_{1,2}, \\ J(\Omega) &= \text{fecho de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ na norma } \|\phi\|, \\ J_0(\Omega) &= \text{fecho de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ na norma } \|\nabla \phi\|, \\ J_0^*(\Omega) &= \{\phi \in D_0^{1,2}(\Omega)^3, \operatorname{div} \phi = 0\}, \\ J_1(\Omega) &= \text{fecho de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ na norma } \|\phi\|_{1,2}, \\ J_1^*(\Omega) &= \{\phi : \phi \in W_0^{1,2}(\Omega)^3, \operatorname{div} \phi = 0\}. \end{aligned}$$

É conhecido que o complemento ortogonal de $J(\Omega)$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ é dado por

$$G(\Omega) = \{\phi : \phi = \nabla p, p \in W_{loc}^{1,2}(\Omega), \nabla p \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}.$$

Alguns dos espaços acima podem parecer similares, mas de fato, *a priori* eles não o são. Na verdade, olhando para os espaços $J_1(\Omega)$ e $J_1^*(\Omega)$, a condição de divergência nula é imposta sobre seus membros, antes e depois de ter tomado o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ na norma H^1 . Analogamente acontece com os espaços $J_0(\Omega)$ e $J_0^*(\Omega)$. As relações entre estes espaços funcionais é

uma questão fundamental no estudo da unicidade da solução para sistemas do tipo Navier-Stokes, como foi assinalado pela primeira vez por Heywood [56]. Para qualquer domínio Ω , temos que $J_1(\Omega) \subset J_1^*(\Omega)$, $J_0(\Omega) \subset J_0^*(\Omega)$; se Ω é um domínio limitado ou um domínio exterior, por exemplo, temos que $J_1(\Omega) = J_1^*(\Omega)$, $J_0(\Omega) = J_0^*(\Omega)$; entretanto, existem domínios com fronteira não compacta para os quais os espaços $J_1(\Omega)$, $J_1^*(\Omega)$, $J_0(\Omega)$, $J_0^*(\Omega)$ são distintos. Referimos ao leitor ver Galdi [42], Cap. III, e as referências ali citadas, a fim de obter uma maior informação acerca destes aspectos, incluindo definições mais gerais e suas correspondentes propriedades.

Voltando ao problema (6.1)-(6.5), estabelecemos aqui as condições que serão impostas sobre os dados do problema:

$$\mathbf{u}_0 \in J_0(\Omega), \quad D^2 \mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (6.6)$$

$$\rho_0 \in C^1(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha \leq \rho_0 \leq \beta \text{ q.t.p em } \Omega, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)), \quad \mathbf{f}_t \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)). \quad (6.8)$$

O principal objetivo deste capítulo é provar os seguintes teoremas:

Teorema 6.1. *Seja Ω qualquer domínio do $\mathbb{R}^3$, com fronteira uniformemente de classe C^3 . Suponhamos que as condições (6.6)-(6.8) sobre os dados ρ_0 , $\mathbf{u}_0$, e $\mathbf{f}$ sejam satisfeitas. Então, existe um intervalo de tempo $(0, T^*)$ e funções $\mathbf{u}$, ρ , p definidas e satisfazendo o sistema (6.1) em $\Omega \times (0, T^*)$, tais que*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T^*; J_0(\Omega)), \\ D^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}_t &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \nabla p &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \rho &\in L^\infty(0, T^*; W^{1,\infty}(\Omega)), \\ \rho_t &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega)), \\ \|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_0\| &\rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Com respeito à existência de soluções globais fortes temos o seguinte teorema:

Teorema 6.2. *Assumamos que as condições (6.6)-(6.8) são satisfeitas pelos dados ρ_0 , $\mathbf{u}_0$ e suponhamos que $\mathbf{f} \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{H}^1(\Omega)^n)$, $\mathbf{f}_t \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega)^n)$. Então, se as normas $\|\nabla \mathbf{u}_0\|$*

e $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0,\infty;\mathbf{L}^2(\Omega))}$ são suficientemente pequenas, a solução de (6.1) existe globalmente no tempo e satisfaz

$$\sup_{t \geq 0} \|\nabla \mathbf{u}(t)\| \leq C, \quad (6.9)$$

$$\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{u}_t(t)\| \leq C, \quad (6.10)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \|\nabla \mathbf{u}_t(s)\|^2 ds \leq C, \quad (6.11)$$

$$\sup_{t \geq 0} \|A\mathbf{u}(t)\| \leq C, \quad (6.12)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_6^2 ds \leq C, \quad (6.13)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \|D^2 \mathbf{u}(s)\|_6^2 ds \leq C, \quad (6.14)$$

onde C denota alguma constante positiva.

As soluções fortes de (6.1)-(6.5) serão construídas primeiramente em domínios limitados usando o método de semi-Galerkin com auto-funções do operador de Stokes como base de funções e posteriormente será analisado o caso de domínios não limitados através da técnica de expansão de domínios, para o qual será fundamental a obtenção de estimativas a priori, independentes do tamanho de Ω ou de $\partial\Omega$.

Seja Ω um domínio limitado com fronteira de classe C^3 . Seja P a projeção ortogonal de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ sobre o subespaço $J(\Omega)$. Por definição, o operador de Stokes é a aplicação linear $A : D(A) \subset J(\Omega) \rightarrow J(\Omega)$, com domínio $D(A) = J_0(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ definido por $A\mathbf{v} = -P\Delta\mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in D(A)$. É conhecido que A é um operador positivo, auto-adjunto o qual é caracterizado pela relação

$$(A\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{w} \in D(A), \forall \mathbf{v} \in J_0(\Omega).$$

A aplicação $A : D(A) \rightarrow J(\Omega)$ é um a um e sobre. A inversa A^{-1} é completamente contínua como uma aplicação $A^{-1} : J(\Omega) \rightarrow J(\Omega)$. A é um operador simétrico e conseqüentemente seu inverso também o é. Sendo completamente contínuo e simétrico, o operador A^{-1} possui uma seqüência ortogonal de auto-funções $\{\mathbf{w}^j\}$ completas em $J_0(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$. Como a imagem contém $\mathcal{D}(\Omega)$, as autofunções são completas em $J(\Omega)$. Elas também são completas em $J_0(\Omega)$.

Resultados mais gerais podem ser encontrados em [5].

Sob as condições (6.6)-(6.8), usando o projetor ortogonal P e o operador de Stokes A , podemos dar a definição de solução forte do sistema (6.1)-(6.5) com Ω sendo um domínio limitado. De fato, dizemos que um par $(\mathbf{u}, \rho)$ é uma solução forte de (6.1)-(6.5) se existe um tempo $T^*(0 < T^* \leq T)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &\in C([0, T^*]; J_0 \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T^*]; J(\Omega)), \\ \rho &\in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T^*]),\end{aligned}$$

satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho \mathbf{f}) + \mu A \mathbf{u} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T^*), \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T^*), \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Observação 6.3. Note que da definição anterior para todo $\mathbf{v} \in J(\Omega)$.

$$(\rho \mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + (\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mu(A \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\rho \mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad t \in (0, T^*) \quad (6.16)$$

O foco para a obter a existência de solução para o sistema (6.15) é o estudo do seguinte sistema de problemas aproximados: Definimos J_m como sendo o subespaço de $J_0(\Omega)$ gerado por $\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^m\}$, ortonormal em $J(\Omega)$. Para cada m consideramos o seguinte problema finito-dimensional: Encontrar $T^m \in (0, T]$ e $\mathbf{u}^m \in C^1([0, T^m]; J_m)$, $\rho^m \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T^m])$ tal que para todo $\mathbf{w} \in J_m$:

$$(\rho^m(\mathbf{u}_t^m + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m), \mathbf{w}) + \mu(A \mathbf{u}^m, \mathbf{w}) = (\rho^m \mathbf{f}, \mathbf{w}), \quad \text{em } \Omega \times (0, T^m), \quad (6.17)$$

$$\rho_t^m + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \rho^m = 0, \quad \text{em } \Omega \times (0, T^m), \quad (6.18)$$

$$\mathbf{u}^m(0) = \mathbf{u}_0^m, \quad \text{em } \Omega, \quad (6.19)$$

$$\rho^m(0) = \rho_0, \quad \text{em } \Omega, \quad (6.20)$$

onde $\mathbf{u}_0^m = \sum_{j=0}^{j=m} c_{jm} \mathbf{w}^j$.

Para provar o Teorema 6.1 e o Teorema 6.2 precisamos alguns resultados preliminares.

Lema 6.4. [54] *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira uniformemente de classe C^3 . Seja $\mathbf{w} \in J_0^*(\Omega)$ uma solução fraca do problema de Stokes*

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{w} + \nabla p = \mathbf{f}, \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \text{ em } \Omega, \\ \mathbf{w} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

isto é, a igualdade $\int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \nabla \phi dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \phi dx$ é satisfeita para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então $\mathbf{w}$ possui segundas derivadas no espaço $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e além disso, as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$\|D^2 \mathbf{w}\| \leq C_{\partial}(\|\mathbf{P}\mathbf{f}\| + \|\nabla \mathbf{w}\|), \quad (6.21)$$

$$\|\nabla \mathbf{w}\|_3 \leq C_{\partial}(\|\mathbf{P}\mathbf{f}\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{w}\|^{1/2} + \|\nabla \mathbf{w}\|), \quad (6.22)$$

com constantes dependendo somente da regularidade de $\partial\Omega$ mais independentes do tamanho de $\partial\Omega$ ou Ω .

Observação 6.5. *A hipótese que estamos considerando, de Ω ser um domínio uniformemente de classe C^3 , é necessária unicamente para provar o Lema 6.4 independentemente da Teoria Potencial. Para detalhes, veja [54], Lema 1 e Lema 2.*

Lema 6.6. [116] *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ qualquer domínio do $\mathbb{R}^3$. Então*

$$\int_{\Omega} |\phi|^4 dx \leq 3^{-3/2} \|\phi\| \|\nabla \phi\|^3, \quad \forall \phi \in J_1(\Omega). \quad (6.23)$$

Nos seguintes lemas, assumiremos que $\phi(t), \psi(t), f(t), h(t)$ são funções suaves, não-negativas e definidas para todo $t \geq 0$.

Lema 6.7. [54] *Seja $\phi(0) = \phi_0$ e $\phi_t(t) + \psi(t) \leq g(\phi(t)) + f(t)$ para $t \geq 0$, com g uma função Lipschitz contínua não-negativa definida para $\phi \geq 0$. Então $\phi(t) \leq F(t; \phi_0)$ para $t \in [0, T(\phi_0))$ onde $F(\cdot; \phi_0)$ é a solução do problema de valor inicial $F_t(t) = g(F(t)) + f(t); F(0) = \phi_0$ e $[0, T(\phi_0))$ é o intervalo maximal. Além disso, se g é não-decrescente, então*

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq \tilde{F}(t, \phi_0),$$

com

$$\tilde{F}(t, \phi_0) = \phi_0 + \int_0^t [g(F(\tau, \phi_0)) + f(\tau)] d\tau.$$

Lema 6.8. [54] *Seja $\phi(0) = \phi_0$ e $\phi_t(t) + \psi(t) \leq h(t)\phi(t) + f(t)$ para $t \geq 0$. Então*

$$\phi(t) \leq \bar{F}(t; \phi_0); \quad \int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq \tilde{F}_*(t, \phi_0)$$

para todo $t > 0$ onde

$$\bar{F}(t; \phi_0) = \phi_0 + \int_0^t f(\tau) \left(\exp \int_0^\tau -h(s) ds \right) d\tau \exp \int_0^t h(\tau) d\tau$$

e

$$\tilde{F}_*(t, \phi_0) = \phi_0 + \int_0^t [h(\tau) \bar{F}(\tau, \phi_0) + f(\tau)] d\tau.$$

Assim, as estimativas para $\phi(t)$, e $\int_0^t \psi(\tau) d\tau$ são obtidas das estimativas para ϕ_0 , $\int_0^t f(\tau) d\tau$ e $\int_0^t h(\tau) d\tau$.

Lema 6.9. [54] *Seja Ω qualquer domínio do $\mathbb{R}^3$, com fronteira uniformemente de classe C^3 . Seja $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ uma seqüência de subdomínios tais que $\Omega = \cup_{k=1}^\infty \Omega_k$, e tais que a regularidade C^3 das fronteiras $\partial\Omega_k$ é uniforme com respeito a k . Seja $\mathbf{a} \in J_0(\Omega)$ com $\|D^2 \mathbf{a}\|$ finita. Então existe uma seqüência de funções $\mathbf{a}_k \in J_0(\Omega_k)$ com $\|D^2 \mathbf{a}_k\| \leq M$ com M independente de k e $\|\nabla \mathbf{a}_k\|_{\Omega_k} \leq \|\nabla \mathbf{a}\|$, tal que $\|\nabla \mathbf{a}_k - \nabla \mathbf{a}\| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Aqui é entendido que $\mathbf{a}_k \equiv 0$ fora de Ω_k .*

6.2 Estimativas a priori

Nesta seção mostramos algumas estimativas a priori para as aproximações $(\mathbf{u}^m, \rho^m)$ de (6.17)-(6.20) (Ω limitado). Estas estimativas são obtidas de maneira usual; entretanto, em nosso caso elas são obtidas combinando variantes de argumentos usados por [54], [67], de maneira que as constantes que ali apareçam sejam independentes do tamanho do domínio Ω .

Sabemos que se $\mathbf{u}^m$ é dado, podemos obter a solução de (6.18) usando o método das características (veja [75]) satisfazendo

$$0 < \alpha \leq \rho^m(x, t) \leq \beta. \quad (6.24)$$

Por técnicas padrões mostra-se que existe uma solução de (6.17), veja por exemplo [121]. Tomando $\mathbf{w} = \mathbf{u}^m$ em (6.17) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 = (\rho^m \mathbf{f}, \mathbf{u}^m).$$

Portanto, usando (6.24) e integrando com respeito ao tempo em $[0, t]$, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^m(s)\|^2 ds &\leq \frac{1}{2} \|(\rho_0)^{1/2} \mathbf{u}_0\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{f}(s)\|^2 ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}^m(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Gronwall obtemos

$$\|\mathbf{u}^m(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^m(s)\|^2 ds \leq C,$$

onde C denota uma constante positiva genérica dependendo dos dados do problema e do tempo final T . Aqui usamos que $\|\mathbf{u}_0\| \leq C_\Omega \|\nabla \mathbf{u}_0\| < \infty$.

Agora tomemos $\mathbf{w} = \mathbf{u}_t^m(t) \in J_m$ e depois $\mathbf{w} = -\epsilon A \mathbf{u}^m \in J_m, \epsilon > 0$, em (6.17). Então, somando as equações resultantes e trabalhando como em [67], obtemos

$$\|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \mu \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 + \|A \mathbf{u}^m\|^2 \leq c_\partial (\|\mathbf{f}\|^2 + \|(\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m\|^2). \quad (6.25)$$

Usando o Lema 6.4, a conhecida desigualdade de Sobolev $\|\phi\|_6 \leq C \|\nabla \phi\|$ a qual vale para ϕ em $D_0^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, com constante absoluta $C < 48^{1/6}$, e a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m\|^2 &\leq \|\mathbf{u}^m\|_6^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_3^2 \leq c_\partial \|\mathbf{u}^m\|_6^2 (\|A \mathbf{u}^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}^m\|^{1/2} + \|\nabla \mathbf{u}^m\|)^2 \\ &\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 (\|A \mathbf{u}^m\| \|\nabla \mathbf{u}^m\| + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2) \\ &\leq \epsilon \|A \mathbf{u}^m\|^2 + c_{\partial, \epsilon} (\|\nabla \mathbf{u}^m\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^4). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Lembremos que $c_\partial, c_{\partial, \epsilon}$ são constantes genéricas as quais não dependem do tamanho do domínio Ω . Usando (6.26) em (6.25) obtemos

$$\|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \mu \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 + \frac{1}{2} \|A \mathbf{u}^m\|^2 \leq c_\partial (\|\nabla \mathbf{u}^m\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 + \|\mathbf{f}\|^2). \quad (6.27)$$

Como $\|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|^2 \leq \|\nabla \mathbf{u}_0\|^2$, usando o Lema 6.7 concluímos que existe algum intervalo $[0, \bar{T})$, e funções contínuas $F_1(t)$ e $F_2(t)$ tais que

$$\|\nabla \mathbf{u}^m(t)\|^2 \leq F_1(t); \quad \int_0^t \|A \mathbf{u}^m(\tau)\|^2 d\tau \leq F_2(t). \quad (6.28)$$

Além disso, $\bar{T}$ pode ser assumido como $\bar{T} \geq T(\|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu, \partial\Omega)$ e

$$F_1(t) \leq F_1(t; \|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu, \partial\Omega); \quad F_2(t) \leq F_2(t; \|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu, \partial\Omega), \quad (6.29)$$

para $t \in [0, T(\|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu, \partial\Omega)]$. Em particular, $F_1(\cdot; \|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu, \partial\Omega)$ é a solução da equação diferencial $F' = c_{\partial, \nu} F^2 + c_{\partial, \mu} F^3$ com a condição inicial $F(0; \|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu, \partial\Omega) = \|\nabla \mathbf{u}_0\|$, e $T(\|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu, \partial\Omega)$ é o correspondente intervalo maximal. De fato, $T(\|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu, \partial\Omega)$ é determinado somente por $\|\nabla \mathbf{u}_0\|, \mu$ e a regularidade C^3 da fronteira $\partial\Omega$.

De acordo com o Lema 6.4, as desigualdades (6.28) implicam

$$\int_0^t \|D^2 \mathbf{u}^m(\tau)\|^2 d\tau \leq F_3(t),$$

para alguma função contínua $F_3(t)$. Da desigualdade (6.27) obtemos

$$\int_0^t \|\mathbf{u}_t^m(\tau)\|^2 d\tau \leq F_4(t),$$

sendo $F_4(t)$ alguma função contínua.

Reunimos as estimativas encontradas anteriormente no seguinte Lema:

Lema 6.10. *Seja $(\mathbf{u}^m, \rho^m)$ a solução de (6.17)-(6.20). Existe $\bar{T} > 0$, independente de m , tal que as seguintes estimativas valem para $t \in [0, \bar{T})$:*

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \rho^m(x, t) \leq \beta, \\ \|\nabla \mathbf{u}^m(t)\|^2 &\leq F_1(t); \\ \int_0^t \|A \mathbf{u}^m(\tau)\|^2 d\tau &\leq F_2(t), \\ \int_0^t \|D^2 \mathbf{u}^m(\tau)\|^2 d\tau &\leq F_3(t), \\ \int_0^t \|\mathbf{u}_t^m(\tau)\|^2 d\tau &\leq F_4(t), \end{aligned}$$

onde F_j são funções contínuas definidas em $[0, \bar{T})$, $j = 1, \dots, 4$.

Agora vamos obter estimativas a priori de regularidade superior para $\mathbf{u}^m$. Derivando a equação (6.17) com respeito a t , tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t^m(t) \in J_m(\Omega)$ e usando o fato que $\rho_t^m =$

$-\operatorname{div}(\rho^m \mathbf{u}^m)$, e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2 &= (\rho_t^m \mathbf{f}^m, \mathbf{u}_t^m) + (\rho^m \mathbf{f}_t^m, \mathbf{u}_t^m) - (\rho^m \mathbf{u}^m \nabla \mathbf{u}_t^m, \mathbf{u}_t^m) - \\
&\quad - (\rho^m \mathbf{u}_t^m \nabla \mathbf{u}^m, \mathbf{u}_t^m) + \frac{1}{2} (\rho_t^m \mathbf{u}_t^m, \mathbf{u}_t^m) \\
&\leq \int \left(2\rho^m |\mathbf{u}^m| |\mathbf{u}_t^m| |\nabla \mathbf{u}_t^m| + \rho^m |\mathbf{u}^m| |\mathbf{u}_t^m| |\nabla \mathbf{u}^m|^2 + \right. \\
&\quad + \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 |\mathbf{u}_t^m| |D^2 \mathbf{u}^m| + \rho^m |\mathbf{u}^m|^2 |\nabla \mathbf{u}^m| |\nabla \mathbf{u}_t^m| + \\
&\quad + \rho^m |\mathbf{u}_t^m|^2 |\nabla \mathbf{u}^m| + \rho^m |\mathbf{u}^m| |\mathbf{u}_t^m| |\nabla \mathbf{f}| + \\
&\quad \left. + \rho^m |\mathbf{u}^m| |\mathbf{f}| |\nabla \mathbf{u}_t^m| + \rho^m |\mathbf{u}_t^m| |\mathbf{f}_t| \right) dx \equiv \sum_{j=1}^8 I_j. \quad (6.30)
\end{aligned}$$

Agora estimamos cada termo I_j . Iremos usar basicamente o Lema 6.4 e o Lema 6.6, junto com a desigualdade de Young e desigualdades básicas de interpolação, o que nos permitirá obter estimativas independentes do tamanho do domínio Ω .

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 2\|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\mathbf{u}^m\|_6 \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_3 \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \\
&\leq c_\partial \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\mathbf{u}^m\|_6 \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_6^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \\
&\leq c_\partial \|\rho^m\|_\infty^{3/4} \|\nabla \mathbf{u}^m\| \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^{3/2} \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^2 + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2 \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 \|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\mathbf{u}^m\|_6 \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_3 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_4^2 \\
&\leq c_\partial \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\mathbf{u}^m\|_6 \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_3 \|\nabla \mathbf{u}^m\|^{1/2} \|\nabla^2 \mathbf{u}^m\|^{3/2} \\
&\leq c_\partial \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}^m\| \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_6^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}^m\|^{1/2} (\|A\mathbf{u}^m\| + \|\nabla \mathbf{u}^m\|)^{3/2} \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\|^{3/2} \|\mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} (\|\nabla \mathbf{u}^m\| + \|A\mathbf{u}^m\|)^{3/2} \\
&\leq c_\partial (\|\nabla \mathbf{u}^m\| + \|A\mathbf{u}^m\|)^2 + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \|\mathbf{u}_t^m\| \|\nabla \mathbf{u}^m\|^3 \\
&\leq c_\partial (\|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 + \|A\mathbf{u}^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^6 \|\mathbf{u}_t^m\|^2) + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \|\rho^m\|_\infty \|\mathbf{u}^m\|^2_3 \|\mathbf{u}_t^m\|_6 \|D^2 \mathbf{u}^m\| \\
&\leq \|\rho^m\|_\infty \|\mathbf{u}^m\|_6^2 \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \|D^2 \mathbf{u}^m\| \\
&\leq c_\partial \|\rho^m\|_\infty \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| (\|A \mathbf{u}^m\| + \|\nabla \mathbf{u}^m\|) \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 (\|A \mathbf{u}^m\| + \|\nabla \mathbf{u}^m\|)^2 + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2 \\
&\leq c_\partial (\|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 \|A \mathbf{u}^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^6) + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \|\rho^m\|_\infty \|\mathbf{u}^m\|_6^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_6 \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \\
&\leq \|\rho^m\|_\infty \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 \|D^2 \mathbf{u}^m\| \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \\
&\leq c_\partial \|\rho^m\|_\infty \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 (\|A \mathbf{u}^m\| + \|\nabla \mathbf{u}^m\|) \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \\
&\leq c_\partial (\|\rho^m\|_\infty \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 \|A \mathbf{u}^m\| \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^3 \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|) \\
&\leq c_\partial (\|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 \|A \mathbf{u}^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^6) + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}^m\| \|\mathbf{u}_t^m\|_6 (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_3 \\
&\leq \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}^m\| \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_6^{1/2} (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^{3/2} \|\nabla \mathbf{u}^m\| \|\mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 \|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\mathbf{u}^m\|_6 (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_3 \|\nabla \mathbf{f}\| \\
&\leq \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\mathbf{u}^m\|_6 (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|_6^{1/2} (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{f}\| \\
&\leq \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\mathbf{u}^m\|_6 (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{f}\| \\
&\leq \|\rho^m\|_\infty^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}^m\| (\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{f}\| \\
&\leq c_\partial (\|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 \|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{f}\|^2) + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &\leq \|\rho^m\|_\infty \|\mathbf{u}^m\|_6 \|\mathbf{f}\|_3 \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \\
&\leq c_\partial \|\rho^m\|_\infty \|\nabla \mathbf{u}^m\| \|\mathbf{f}\|^{1/2} \|\mathbf{f}\|_6^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\| \|\mathbf{f}\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{f}\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_t^m\| \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 \|\mathbf{f}\|_{H^1}^2 + \epsilon \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2.
\end{aligned}$$

$$I_8 \leq c_{\partial}(\|\mathbf{f}_t\|^2 + \|\mathbf{u}_t^m\|^2).$$

Substituindo as estimativas anteriores em (6.30), obtemos

$$\frac{d}{dt} \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2 \leq c_{\partial}(\|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \|A\mathbf{u}^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^6 + \|\mathbf{f}\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{f}_t\|^2). \quad (6.31)$$

Lembremos que a constante c_{∂} acima obtida, é independente do tamanho do domínio.

Notemos que tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t^m$ em (6.17) encontramos

$$\|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^2 = (\rho^m \mathbf{f}, \mathbf{u}_t^m) - ((\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m, \mathbf{u}_t^m) - \mu(A\mathbf{u}^m, \mathbf{u}_t^m).$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young e usando que $\mathbf{u}_0^m \in J_0(\Omega)$, $\|D^2 \mathbf{u}_0^m\| < \infty$ e $\alpha > 0$, a última igualdade implica que

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u}_t^m(0)\|^2 &\leq c_{\partial}(\|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|A\mathbf{u}^m(0)\|^2 + \|(\mathbf{u}^m(0) \cdot \nabla) \mathbf{u}^m(0)\|^2) \\ &\leq c_{\partial}(\|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|A\mathbf{u}^m(0)\|^2 + \|\mathbf{u}^m(0)\|_6^2 \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|_3^2) \\ &\leq c_{\partial}(\|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|A\mathbf{u}^m(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|^2 (\|A\mathbf{u}^m(0)\| \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\| + \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|^2)) \\ &\leq c_{\partial}(\|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|A\mathbf{u}^m(0)\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}^m(0)\|^4) \\ &\leq c_{\partial}(\|\mathbf{f}(0)\|^2 + \|A\mathbf{u}_0\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_0\|^6 + \|\nabla \mathbf{u}_0\|^4). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Portanto $\|\mathbf{u}_t^m(0)\|^2$ é uniformemente limitado e conseqüentemente, com a ajuda do Lema 6.8, a desigualdade (6.31) implica que

$$\|\mathbf{u}_t^m(t)\|^2 \leq F_5(t); \quad \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_t^m(\tau)\|^2 d\tau \leq F_6(t),$$

para algumas funções contínuas $F_5(t), F_6(t)$.

Observação 6.11. *Notemos que para obter a estimativa (6.32) não foi necessário usar que $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.*

Agora iremos obter algumas estimativas uniformes para o termo $\|A\mathbf{u}^m\|$. Tomando $\mathbf{v} = A\mathbf{u}^m$ em (6.17) obtemos

$$\mu \|A\mathbf{u}^m\|^2 = (\rho^m \mathbf{f}, A\mathbf{u}^m) + (\rho^m \mathbf{u}_t^m, A\mathbf{u}^m) - (\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^m, A\mathbf{u}^m). \quad (6.33)$$

Usando o Lema 6.4 temos

$$\begin{aligned}
|(\rho^m(\mathbf{u}^m \cdot \nabla)\mathbf{u}^m, A\mathbf{u}^m)| &\leq \|\rho^m\|_\infty \|\mathbf{u}^m\|_6 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_3 \|A\mathbf{u}^m\| \\
&\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\| (\|A\mathbf{u}^m\|^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}^m\|^{1/2} + \|\nabla \mathbf{u}^m\|) \|A\mathbf{u}^m\| \\
&\leq (\|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^6) + \epsilon \|A\mathbf{u}^m\|^2.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

Usando (6.34) em (6.33), encontramos que

$$\|A\mathbf{u}^m\|^2 \leq c_\partial (\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^4 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^6), \tag{6.35}$$

sendo c_∂ independente do tamanho de Ω . Notemos que pelo Lema 6.4, as estimativas anteriores implicam

$$\|D^2 \mathbf{u}^m\| \leq c_\partial (\|A\mathbf{u}^m\| + \|\nabla \mathbf{u}^m\|). \tag{6.36}$$

Notemos também que

$$\|\mathbf{u}^m\|_6 \leq c_\partial \|\nabla \mathbf{u}^m\|. \tag{6.37}$$

Assim, coletando as últimas estimativas, obtemos o seguinte lema:

Lema 6.12. *Seja $(\mathbf{u}^m, \rho^m)$ solução de (6.17)-(6.20). Então para $t \in [0, \bar{T})$, as seguintes estimativas são satisfeitas*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_t^m(t)\|^2 &\leq F_5(t), \\
\int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_t^m(\tau)\|^2 d\tau &\leq F_6(t), \\
\|A\mathbf{u}^m\|^2 &\leq F_7(t), \\
\|D^2 \mathbf{u}^m\| &\leq F_8(t), \\
\|\mathbf{u}^m\|_6 &\leq F_9(t),
\end{aligned}$$

para algumas funções contínuas $F_5(t), F_6(t), F_7(t), F_8(t)$ e $F_9(t)$.

Para derivar estimativas de maior regularidade, usamos a regularidade do operador de Stokes [5]. De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\mu(\nabla \mathbf{u}^m, \nabla \mathbf{w}) &= -(\rho^m(\mathbf{u}_t^m + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla)\mathbf{u}^m - \mathbf{f}), \mathbf{w}) \\
&\equiv (\Psi, \mathbf{w}),
\end{aligned} \tag{6.38}$$

para qualquer $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$. As estimativas previas implicam que Ψ é uniformemente limitada em $L^2(0, T; \mathbf{L}^6(\Omega))$ para todo $T' < \bar{T}$. Assim, segue-se dos resultados de Amrouche e Girault [5], que

$$\mathbf{u}^m \in L^2(0, T'; \mathbf{W}^{2,6}(\Omega)). \quad (6.39)$$

Pelas imersões de Sobolev temos que

$$\nabla \mathbf{u}^m \in L^2(0, T'; \mathbf{L}^\infty(\Omega)^3).$$

Como $\rho_0 \in C^1(\bar{\Omega})$, aplicando os resultados de Ladyzhenskaya (veja Lema 1.3 em [75]), para ρ^m , podemos obter diretamente que

$$\nabla \rho^m \in L^\infty(0, T'; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \quad (6.40)$$

$$\rho_t^m \in L^\infty(0, T'; L^\infty(\Omega)). \quad (6.41)$$

Observação 6.13. *Notemos aqui que nas estimativas obtidas até o momento para $(\mathbf{u}^m, \rho^m)$ o domínio em consideração, é um domínio limitado. Notemos também que as estimativas dadas pelo Lema 6.10 e o Lema 6.12 têm a propriedade de não depender do tamanho do domínio; o mesmo acontece com as estimativas (6.39), (6.40) e (6.41).*

6.3 Prova do Teorema 6.1.

Iniciamos mostrando a seguinte proposição relativa à existência de soluções fortes do sistema (6.1)-(6.5) para o caso Ω domínio limitado

Proposição 6.14. *Suponhamos que as condições (6.6)-(6.8) são satisfeitas pelos dados $\rho_0, \mathbf{u}_0$, e $\mathbf{f}$. Então o problema (6.1)-(6.5) possui uma solução forte $(\mathbf{u}, \rho)$ definida em algum intervalo de tempo $[0, T^*)$, onde $T^* \in (0, T]$. Esta solução satisfaz*

$$P(\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f}) + \mu A \mathbf{u} = 0, \quad (6.42)$$

e

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (6.43)$$

q.t.p., em $\Omega \times (0, T^*)$. Além disso, se $(\mathbf{u}_1, \rho_1)$ é uma outra solução com

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &\in L^4(0, T^*; J_0(\Omega)), \quad \frac{d}{dt} \mathbf{u}_1 \in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^3(\Omega)), \\ \rho_1 &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega)), \quad \nabla \rho_1 \in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \end{aligned}$$

então $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ e $\rho = \rho_1$.

Demonstração: As estimativas encontradas na seção previa, implicam a existência de uma subsequência $(\mathbf{u}^m, \rho^m)$, a qual também denotamos pelo mesmo superíndice m , e um par $(\mathbf{u}, \rho)$ tal que $(\mathbf{u}^m, \rho^m)$ converge para $(\mathbf{u}, \rho)$ em algum sentido fraco, o qual é suficiente para passar ao limite em (6.17)-(6.20) e obter (6.15). Na verdade, para qualquer $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ e qualquer $\mathbf{v} \in \cup_{j \geq 1} J_j$

$$\int_0^{T^*} (\rho^m \mathbf{u}_t^m + \rho(\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m) - \mu \Delta \mathbf{u}^m + \rho^m \mathbf{f}, \mathbf{v}) \phi = 0. \quad (6.44)$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$< \rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f} - \mu \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} > = 0, \quad q.t.p. \text{ em } (0, T^*), \quad (6.45)$$

para todo $\mathbf{v} \in \cup_{j \geq 1} J_j$.

Isto implica $P(\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f} - \mu \Delta \mathbf{u}) = 0$, *q.t.p.* em $\Omega \times (0, T^*)$.

Com respeito à equação da densidade, observemos por exemplo que, $\mathbf{u}^m \rightarrow \mathbf{u}$ fortemente em $L^2(0, T'; \mathbf{L}^2(\Omega))$, e $\rho_t^m \rightarrow \rho_t$ fracamente em $L^2(0, T'; L^2(\Omega))$ e $\nabla \rho^m \rightarrow \nabla \rho$ fracamente em $L^2(0, T'; \mathbf{L}^2(\Omega))$ para todo $T' < T^*$. Isto leva a

$$\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0,$$

no sentido distribucional. Também podemos provar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \mathbf{u}_0\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|A\mathbf{u}(t) - A\mathbf{u}_0\| = 0.$$

Finalmente, como

$$\|\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})\| \leq c_\partial (\|A\mathbf{u}\| + \|\nabla \mathbf{u}\|^3 + \|\nabla \mathbf{u}\|^2),$$

(c_∂ independente do tamanho de Ω) e $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, temos

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f} - \mu \Delta \mathbf{u} \in L^2(0, T'; \mathbf{L}^2(\Omega)), \quad T' < T^*.$$

Como as funções $\phi^m(t, x) = \sum_{j=1}^m c_j(t) \mathbf{w}^j(x)$, com coeficientes contínuos em $[0, T]$ são densas em $L^2(0, T; J(\Omega))$, então temos que existe uma função $p(t, x)$ com $\nabla p \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ tal que

$$\rho \mathbf{u}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \rho \mathbf{f} - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p.$$

Com respeito à unicidade, denotemos por $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$, $\varrho = \rho - \rho_1$. Assim, $\mathbf{v}$, ϱ satisfazem o seguinte sistema

$$\begin{cases} P(\rho \mathbf{v}_t + \rho_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}) + \mu A \mathbf{v} &= P(\varrho \mathbf{f} - \varrho \mathbf{u}_{1t} - \varrho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho_1(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}), \\ \varrho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \varrho &= -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_1. \end{cases} \quad (6.46)$$

Multiplicando a primeira equação em (6.46) por $\mathbf{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho)^{1/2} \mathbf{v}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 &= (\varrho \mathbf{f} - \varrho \mathbf{u}_{1t} - \varrho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \rho_1(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &+ \frac{1}{2} (\rho_t \mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\rho_1(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Estimando de maneira usual, a partir da última equação encontramos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 + \int_0^t \|\nabla \mathbf{v}\|^2 ds &\leq C_\partial \int_0^t (\|\mathbf{f}\|_3^2 + \|\mathbf{u}_{1t}\|_3^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \|A \mathbf{u}\|^2) \|\varrho\|^2 ds \\ &+ C_\partial \int_0^t (\|\nabla \mathbf{u}_1\|^4 + \|\nabla \mathbf{u}\|^4 + \|\rho_t\|_\infty) \|\mathbf{v}\| ds. \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda equação em (6.46) por ϱ , integrando com respeito a x e t em $\Omega \times (0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\varrho\|^2 &\leq c_\partial \int_0^t \|\mathbf{v}\| \|\nabla \rho_1\|_\infty \|\varrho\| ds \\ &\leq c_\partial \int_0^t \|\mathbf{v}\|^2 ds + c_\partial \int_0^t \|\nabla \rho_1\|_\infty^2 \|\varrho\|^2 ds. \end{aligned}$$

A partir das duas últimas desigualdades podemos encontrar que

$$\|\mathbf{v}\|^2 + \|\varrho\|^2 \leq c_\partial \int_0^t H(s) (\|\mathbf{v}\|^2 + \|\varrho\|^2) ds,$$

onde $H(t)$ é uma função integrável. Portanto, pelo Lema de Gronwall temos que

$$\|\mathbf{v}\|^2 + \|\varrho\|^2 = 0, \text{ isto é, } \mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \rho = \rho_1. \quad (6.47)$$

Isto completa a prova no caso de domínios limitados. ■

Agora, no caso de Ω ser um domínio não limitado com fronteira $\partial\Omega$ uniformemente de classe C^3 , escolhemos uma seqüência crescente de subdomínios limitados $\{\Omega_k\}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ tais que $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ e $\partial\Omega_k$ sendo uniformemente de classe C^3 , para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $\{\mathbf{u}_{0k}\}$ em $J_0(\Omega)$ com $\nabla \mathbf{u}_{0k}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$, tal que o suporte $\{\mathbf{u}_{0k}\} \subset \overline{\Omega}_k$, com $\|\nabla \mathbf{u}_{0k}\| \leq \|\nabla \mathbf{u}_0\|$ e $\|\nabla(\mathbf{u}_{0k} - \mathbf{u}_0)\| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. A existência de esta seqüência é dada pelo Lema 6.9.

Em cada subdomínio Ω_k , definimos por $\mathbf{u}^k, \rho^k$ sendo a solução forte dada pela Proposição 6.14 construída em $\Omega_k \times (0, T)$ com condição inicial sendo $\mathbf{u}^k(0) = \mathbf{u}_{0k}, \rho^k(0) = \rho_0^k$, onde ρ_0^k é a restrição de ρ_0 a Ω_k . A existência de um intervalo comum de existência $[0, T^*)$ para todo k , é de fato satisfeita. Os dados $\mathbf{f}$ em (6.8) são agora assumidos sendo a restrição de $\mathbf{f}$ a Ω_k . Todas as soluções $\{(\mathbf{u}^k, \rho^k)\}$ satisfazem as estimativas da Seção 3. Além disso, estas estimativas são uniformes com respeito a k . Assim, para qualquer l fixo, e para $l \leq k$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k &\in L^\infty(0, T^*; J_0(\Omega_l)), \\ D^2 \mathbf{u}^k &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^6(\Omega_l)), \\ \mathbf{u}_t^k &\in L^2(0, T^*; J_0(\Omega_l)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_l)), \\ \nabla \rho^k &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega_l)), \\ \rho_t^k &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_l)). \end{aligned}$$

Queremos aplicar o processo diagonal de Cantor tomando como seqüência inicial $\{(\mathbf{u}^k, \rho^k)\}_{k \geq 1}$. Para isto prosseguimos como em Heywood [54]. Em primeira instância, como cada solução $(\mathbf{u}^k, \rho^k)$ está definida somente em Ω_k , estendemos dita solução para o domínio todo Ω . Acontece que devido à regularidade que deve preservar cada solução $(\mathbf{u}^k, \rho^k)$, esta extensão não deve ser arbitrária; por exemplo, a extensão por zero funciona somente no caso de soluções fracas. Neste caso, como estamos trabalhando com soluções fortes, usamos os Teoremas de extensão de espaços de Sobolev (veja por exemplo, Adams [1], Cap.IV). Assim, cada par $(\mathbf{u}^k, \rho^k)$ é estendido a Ω por um novo par $(\tilde{\mathbf{u}}^k, \tilde{\rho}^k)$ de maneira que dita extensão preserva a

regularidade nos espaços nos quais está definida $(\mathbf{u}^k, \rho^k)$, isto é,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}^k &\in L^\infty(0, T^*; J_0(\Omega)), \\ D^2 \tilde{\mathbf{u}}^k &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^6(\Omega)), \\ \tilde{\mathbf{u}}_t^k &\in L^2(0, T^*; J_0(\Omega)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \nabla \tilde{\rho}^k &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \\ \tilde{\rho}_t^k &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega)).\end{aligned}$$

Além disso as normas de $(\tilde{\mathbf{u}}^k, \tilde{\rho}^k)$ nos espaços acima podem ser melhoradas, devido à continuidade do operador extensão, por constantes que dependem somente da regularidade do domínio e dos expoentes dos espaços de Sobolev envolvidos, vezes as normas respectivas de $(\mathbf{u}^k, \rho^k)$. Denotemos ditas extensões novamente por $(\mathbf{u}^k, \rho^k)$. Seja $k = 1$. Notemos que das últimas estimativas podemos extrair uma subsequência $\{(\mathbf{u}^{1,k}, \rho^{1,k})\}$ de $\{(\mathbf{u}^k, \rho^k)\}$, a qual converge no respectivo sentido fraco para algum limite $(\mathbf{u}_1, \rho_1)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &\in L^\infty(0, T^*; J_0(\Omega_1)), \\ D^2 \mathbf{u}_1 &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^6(\Omega_1)), \\ \mathbf{u}_{1t} &\in L^2(0, T^*; J_0(\Omega_1)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_1)), \\ \nabla \rho_1 &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega_1)), \\ \rho_{1t} &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_1)).\end{aligned}$$

Novamente, extraímos uma subsequência $\{(\mathbf{u}^{2,k}, \rho^{2,k})\}$ de $\{(\mathbf{u}^{1,k}, \rho^{1,k})\}$, a qual converge no respectivo sentido fraco para algum limite $(\mathbf{u}_2, \rho_2)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_2 &\in L^\infty(0, T^*; J_0(\Omega_2)), \\ D^2 \mathbf{u}_2 &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^6(\Omega_2)), \\ \mathbf{u}_{2t} &\in L^2(0, T^*; J_0(\Omega_2)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega_2)), \\ \nabla \rho_2 &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega_2)), \\ \rho_{2t} &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega_2)).\end{aligned}$$

Assim, continuando com este processo encontramos uma seqüência de subsequências de $\{(\mathbf{u}^k, \rho^k)\}_{k \geq 1}$ a qual pode ser escrita como linhas duma matriz. Tomemos a seqüência diagonal, a qual é uma subsequência de $\{(\mathbf{u}^k, \rho^k)\}$ e satisfaz as estimativas acima para todo

$k \in \mathbb{N}$. Denotando o seu respectivo limite por $(\mathbf{u}, \rho)$, temos que este limite satisfaz

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &\in L^\infty(0, T^*; J_0(\Omega)), \\ \nabla \mathbf{u} &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^6(\Omega)), \\ D^2 \mathbf{u} &\in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^6(\Omega)), \\ \mathbf{u}_t &\in L^2(0, T^*; J_0(\Omega)) \cap L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega)), \\ \nabla \rho &\in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}^\infty(\Omega)), \\ \rho_t &\in L^\infty(0, T^*; L^\infty(\Omega)).\end{aligned}$$

Observação 6.15. *Notemos que a velocidade $\mathbf{u}$ satisfaz $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T^*; \mathbf{L}_{loc}^2(\Omega))$. Notemos também que a regularidade espacial da $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^6(\Omega)$, implica um decaimento da $\mathbf{u}$ para zero, quando $|\mathbf{x}|$ tende ao infinito.*

6.4 Unicidade

Seja $(\mathbf{u}, \rho, p)$ e $(\mathbf{u}_1, \rho_1, p_1)$ sendo duas soluções fortes de (6.1) em $[0, T^*)$, correspondentes ao mesmo dado $\mathbf{u}_0, \rho_0, \mathbf{f}$. Definamos $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$, $\varrho = \rho - \rho_1$, e $\pi = p - p_1$. Notemos que $\mathbf{v}$ satisfaz $\mathbf{v}_t \in L^2(0, T^*; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Como $\mathbf{v}(\cdot, 0) \equiv 0$, concluímos que $\mathbf{v} \in L^2(0, T^*; L^2(\Omega))$. Também temos que $\mathbf{v} \in L^2(0, T^*; J_0(\Omega))$. Como resultado obtemos o seguinte teorema

Teorema 6.16. *Seja Ω um domínio do $\mathbb{R}^3$ com fronteira uniformemente de classe C^3 tal que $J_0(\Omega) \cap \mathbf{L}^2(\Omega) = J_1(\Omega)$. Se $\varrho \in L^\infty(0, T^*; L^{3/2}(\Omega))$, então $\rho = \rho_1$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ e $p = p_1$.*

Demonstração:. Para provar este teorema, tomamos a diferença entre as respectivas equações de conservação do momentum, isto é,

$$\rho \mathbf{v}_t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \mu \Delta \mathbf{v} + \nabla \pi = \varrho(\mathbf{f} - \mathbf{u}_{1t} - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_1. \quad (6.48)$$

Então, multiplicando esta identidade por $\mathbf{v}$, integrando em Ω e usando que $J_0(\Omega) \cap L^2(\Omega) = J_1(\Omega)$ obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho)^{1/2} \mathbf{v}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \leq \int (|\varrho| \|\mathbf{f} - \mathbf{u}_{1t} - \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1\| |\mathbf{v}| + \rho |\mathbf{v}|^2 |\nabla \mathbf{u}_1|) dx$$

Trabalhando como na Seção 3, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho)^{1/2} \mathbf{v}\|^2 + \mu \|\nabla \mathbf{v}\|^2 &\leq \|\varrho\|_{3/2} \|\mathbf{f} - \mathbf{u}_{1t} - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1\|_6 \|\mathbf{v}\|_6 + \|(\rho)^{1/2} \mathbf{v}\|^2 \|\nabla \mathbf{u}_1\|_\infty \\ &\leq c_\partial \|\varrho\|_{3/2}^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{u}_{1t} - (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1\|_6^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \|(\rho)^{1/2} \mathbf{v}\|^2 \|\nabla \mathbf{u}_1\|_\infty. \end{aligned}$$

Conseqüentemente encontramos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\rho)^{1/2} \mathbf{v}\|^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \leq F(t) \|\varrho\|_{3/2}^2 + G(t) \|(\rho)^{1/2} \mathbf{v}\|^2, \quad (6.49)$$

para algumas funções não-negativas $F(t), G(t) \in L^1(0, T^*)$. Notemos que

$$\varrho_t + \operatorname{div}(\mathbf{u}\varrho) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_1. \quad (6.50)$$

assim podemos deduzir que

$$(|\varrho|^{3/2})_t + \operatorname{div}(\mathbf{u}|\varrho|^{3/2}) \leq \frac{3}{2} |\mathbf{v}| |\nabla \rho_1| |\varrho|^{1/2}.$$

Integrando em Ω obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int |\varrho|^{3/2} dx &\leq \frac{3}{2} \int |\mathbf{v}| |\nabla \rho_1| |\varrho|^{1/2} dx \\ &\leq \frac{3}{2} \|\mathbf{v}\|_6 \|\nabla \rho_1\| \|\varrho\|_{3/2}^{1/2} \\ &\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{v}\| \|\nabla \rho_1\| \|\varrho\|_{3/2}^{1/2}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\varrho\|_{3/2}^2 &= \frac{4}{3} \|\varrho\|_{3/2}^{1/2} \frac{d}{dt} \|\varrho\|_{3/2}^{3/2} \\ &\leq c_\partial \|\nabla \mathbf{v}\| \|\nabla \rho_1\| \|\varrho\|_{3/2} \\ &\leq \frac{\mu}{4} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + H(t) \|\varrho\|_{3/2}^2, \end{aligned} \quad (6.51)$$

para alguma função não-negativa $H(t) \in L^1(0, T^*)$. As desigualdades acima implicam que

$$\frac{\mu}{4} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|^2 + \|\varrho\|_{3/2}^2) \leq (F(t) + G(t) + H(t)) (\|\mathbf{v}\|^2 + \|\varrho\|_{3/2}^2).$$

Finalmente, pelo Lema de Gronwall, a desigualdade acima implica o teorema. ■

6.4.1 Prova do Teorema 6.2.

A prova deste teorema segue combinando as técnicas apresentadas nas seções previas e argumentos devidos a Heywood e Rennacher [55], Boldrini e Medar [12]. Podemos repetir os argumentos usados na prova do Teorema 6.1 e obter

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2 + c \|A\mathbf{u}^m\|^2 + c \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^2 \leq c_1 \|\nabla \mathbf{u}^m\|^6 + c_2 \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}\|, \quad (6.52)$$

onde c, c_1, c_2 são constantes as quais são independentes do tamanho do domínio Ω . Assim, resultados sobre desigualdades diferenciais podem ser aplicados para concluir que para $\|\nabla \mathbf{u}_0\|$ e $\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}\|$, sendo suficientemente pequenos,

$$\sup_{t \geq 0} \|\nabla \mathbf{u}^m\| \leq C_\sigma.$$

Multiplicando (6.52) por $e^{\alpha t}$, com $\alpha > 0$, integrando no tempo de 0 até t , e multiplicando a desigualdade resultante por $e^{-\alpha t}$ e usando as limitações uniformes de (6.9), obtemos que

$$e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \|\mathbf{u}_t^m\|^2 ds \leq C_\sigma, \quad e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \|A\mathbf{u}^m(s)\|^2 ds \leq C_\sigma.$$

Agora, lembremos que derivando a equação (6.17) com respeito a t , tomando $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t^m(t) \in J_m(\Omega)$, usando que $\rho_t^m = -\operatorname{div}(\rho^m \mathbf{u}^m)$, encontramos

$$\frac{d}{dt} \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}_t^m\|^2 \leq c_\partial (\|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \|A\mathbf{u}^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^6 + \|\mathbf{f}\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{f}_t\|^2). \quad (6.53)$$

com as constantes sendo independentes do tamanho do domínio (veja (6.31)). Assim, multiplicando (6.53) por $e^{\alpha t}$, integrando com respeito a t de 0 até t obtemos

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \|(\rho^m)^{1/2} \mathbf{u}_t^m\|^2 + \int_0^t e^{\alpha s} \|\nabla \mathbf{u}_t^m(s)\|^2 ds &\leq c_\partial \|\mathbf{u}_t(0)\|^2 + \int_0^t e^{\alpha s} (\|\mathbf{f}\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{f}_t\|^2) ds + \\ &+ c_\partial(\alpha) \int_0^t e^{\alpha s} (\|\mathbf{u}_t^m\|^2 + \|A\mathbf{u}^m\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}^m\|^2) ds. \end{aligned}$$

Usando a última desigualdade podemos encontrar (6.10)-(6.11). Analogamente a (6.33), tomando $\mathbf{v} = A\mathbf{u}^m$ em (6.17) obtemos

$$\mu \|A\mathbf{u}^m\|^2 = (\rho^m \mathbf{f}, A\mathbf{u}^m) + (\rho^m \mathbf{u}_t^m, A\mathbf{u}_t^m) - (\rho^m (\mathbf{u}^m \cdot) \mathbf{u}^m, A\mathbf{u}^m). \quad (6.54)$$

Assim, estimando o lado direito de (6.54), obtemos a desigualdade (6.12).

As estimativas previas implicam que

$$e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \|\rho^m(\mathbf{u}_t^m + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m - \mathbf{f})\|_6 ds \leq C \quad (6.55)$$

Como na Seção 3, a partir da desigualdade acima segue-se (6.13)-(6.14). Isto finaliza a prova do Teorema. ■

Como em [12], se consideramos forças externas com decaimento exponencial no tempo, podemos também obter soluções mais regulares que as dadas pelo Teorema 6.2. Na verdade, podemos mostrar o seguinte resultado

Teorema 6.17. *Suponhamos que as condições (6.6)-(6.8) são satisfeitas pelos dados $\rho_0, \mathbf{u}_0$ e suponhamos que para algum $\xi > 0$, $e^{\xi t} \mathbf{f} \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{H}^1(\Omega))$, $e^{\xi t} \mathbf{f}_t \in L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))$. Então, se $\|\nabla \mathbf{u}_0\|$ e $\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(0, \infty; \mathbf{L}^2(\Omega))}$ são suficientemente pequenas em norma, a solução de (6.1)-(6.5) existe globalmente em tempo e além disso existe uma constante positiva $\xi^* \leq \xi$ tal que para qualquer $0 \leq \theta \leq \xi^*$, valem as seguintes estimativas*

$$\sup_{t \geq 0} e^{\xi^* t} \|\nabla \mathbf{u}(t)\| < \infty, \quad (6.56)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{\theta t} \|\mathbf{u}_t(t)\| < \infty, \quad (6.57)$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\theta s} \|\nabla \mathbf{u}_t(s)\|^2 ds < \infty, \quad (6.58)$$

$$\sup_{t \geq 0} e^{\theta t} \|A\mathbf{u}(t)\| < \infty, \quad (6.59)$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\theta s} \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_6^2 ds < \infty \quad (6.60)$$

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\theta s} \|D^2 \mathbf{u}(s)\|_6^2 ds < \infty. \quad (6.61)$$

CAPÍTULO 7

Conclusões e trabalhos futuros

The real mathematician is an enthusiast per se.

Without enthusiasm no mathematics.

Novalis

7.1 Conclusões gerais

Neste trabalho de tese apresentamos resultados de existência, unicidade, regularidade e estabilidade de alguns sistemas de equações do tipo Navier-Stokes.

Provamos resultados de existência, unicidade e dependência contínua de soluções ultra fracas para as equações de Boussinesq estacionárias, com condições de fronteira pouco regulares, do tipo Dirichlet para a velocidade e condições mistas do tipo Dirichlet e Neumann para a temperatura.

Provamos resultados existência, unicidade e estabilidade de soluções periódicas no tempo brandas e fortes em domínios não limitados, para o sistema de Boussinesq no caso evolutivo em espaços L^p fracos.

Provamos a existência global de soluções fortes para o sistema de equações dos fluidos micropolares com condições de pequenez sobre os parâmetros e mostramos que tais soluções

convergem uniformemente para soluções estacionárias quando $t \rightarrow \infty$, com uma taxa de decaimento exponencial.

Consideramos uma classe de equações não lineares estacionárias abstratas em um espaço de Hilbert separável e demonstramos propriedades qualitativas relativas a esse modelo, entre elas, uma propriedade sobre a cardinalidade do conjunto das soluções do modelo abstrato em questão e uma propriedade de dependência contínua das soluções com respeito aos dados do problema.

Demonstramos a existência de soluções fortes para as equações de Navier-Stokes não homogêneas para o caso $p = 2$ no caso de domínios não limitados uniformemente de classe C^3 .

7.2 Trabalhos futuros

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, ficaram questões a serem analisadas no futuro, a saber:

Como foi comprovado, é de relevante importância estudar propriedades de problemas de valor de fronteira do tipo elíptico e problemas de Navier-Stokes em estado estacionário, sobre domínios n -dimensionais pouco regulares. Se pretende realizar um estudo mais amplo desta problemática. Isto possivelmente permitirá melhorar as dificuldades técnicas apresentadas no estudo de existência de soluções ultra fracas com condições mistas sobre os dados de fronteira, consideradas no Capítulo 2, assim como também aplicar tais teorias na resolução de outros problemas relacionados.

Sabemos que a existência de soluções periódicas para as equações de Navier-Stokes e variantes destas, como as equações de Boussinesq, em domínios tri-dimensionais arbitrários é ainda uma questão em aberto. Pretendemos tentar resolver parcialmente este problema aumentando a classe de domínios para os quais este problema já tem resposta.

Utilizando técnicas de semigrupos, pretendemos explorar um pouco mais questões matemáticas relativas a existência de solução para o modelo de fluidos micropolares.

Se pretende realizar um estudo sobre a existência de atratores globais para o modelo evolutivo, correspondente modelo abstrato estacionário considerado no Capítulo 5. Lembremos que dito sistema cobre vários modelos das equações da mecânica dos fluidos em domínios tri-

dimensionais e neste tipo de domínios o não conhecimento da unicidade das soluções fracas, impede o uso de técnicas usuais para a obtenção de atratores.

Será possível fazer um estudo via operadores de evolução para o modelo apresentado no Capítulo 6 deste trabalho? Esta é uma pergunta que continua em aberto. Observamos que no caso não-homogêneo tal estudo foi feito por Okamoto [98] no contexto L^2 , porém um estudo no contexto L^p ainda não existe uma resposta para esta questão.

O comportamento assintótico das soluções do modelo de Navier-Stokes não homogêneo, quando t vai para o infinito, não tem sido estudado. Isto constitui uma nova pergunta que merece ser analisada. Outras questões sobre dito modelo são as seguintes:

Um estudo do modelo em domínios estreitos (Thin domains) também é um aspecto que mereceria ser desenvolvido.

Questões numéricas associadas ao modelo proposto seriam interessantes de desenvolver. Este é um campo que não tem sido pesquisado.

Estudar o modelo associado em domínios que variam com o tempo constitui questões interessantes a serem analisadas.

Estudar problemas de controle onde as restrições dinâmicas vêm dadas pelo sistema estudado neste trabalho.

Qual será o comportamento da solução do sistema se a viscosidade convergem para zero? Será que a solução converge à solução de um fluido não homogêneo ideal (ou de Euler)?

Como são as explosões da solução forte?

As mesmas perguntas feitas para as equações de Navier-Stokes clássicas poderiam ser feitas para este modelo?

BIBLIOGRAFIA

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).
- [2] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I*. Comm. Pure Appl. Math., 12, (1959), 623-727.
- [3] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Comm. Pure Appl. Math., 17, (1964), 35-92.
- [4] Amrouche, C., Girault, V. *Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension*. Czech. Math. J., 44, 119, (1994), 109-140.
- [5] Amrouche G., Girault V., *On the existence and regularity of the solutions of Stokes problem in arbitrary dimension*. Proc. Japan Acad. Ser. A., 67, (1991), 171-175.
- [6] Antonzev, S.N., Kazhikov, A.V., Monakhov, V. N., *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, North-Holland, Amsterdam, (1990).
- [7] Barraza, O., *Self-similar solutions in the weak L^p -spaces of the Navier-Stokes equations*. Rev. Matem. Iberoam. 12, 2, (1996), 411-439.

- [8] Benilan, P., Brezis, H., Crandall, M., *A semilinear Equation in $L^1(R^n)$* . Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie V 2, (1975), 523-555.
- [9] Beirão da Veiga, H., *Diffusion on viscous fluids, existence and asymptotic properties of solutions* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 10, (1983), 341-355.
- [10] Boldrini, J.L., Rojas-Medar, M.A., Fernández-Cara, E., *Semi-Galerkin approximation and strong solutions to the nonhomogeneous asymmetric fluids*. J. Math. Pures. Appl., 82, (2003), 1499-1525.
- [11] Boldrini, J.L., Rojas-Medar, M.A., *Global solutions to the equations for the motion of stratified incompressible fluids*. Mat. Contemp., 3, (1992), 1-8.
- [12] Boldrini, J.L., Rojas-Medar, M.A., *Global strong solutions of the equations for motion of nonhomogeneous incompressible fluids*, in: C. Conca, G.n. Gatica (Eds), Numerical Methods in Mechanics, in: Pitman Res. Notes Math. Ser., 371, (1997), 35-40.
- [13] Bergh, J., Lofstrom, J., *Interpolation Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, (1976).
- [14] Borchers, W., Miyakawa, T., *Algebraic L^2 decay for Navier-Stokes flows in exterior domains*. Acta Math. 165, (1990), 189-227.
- [15] Borchers, W., Miyakawa, T., *L^2 decay for Navier-Stokes flows in halfspaces*. Math. Ann. 282, (1988), 139-155.
- [16] Borchers, W., Miyakawa, T., *On stability of exterior stationary Navier-Stokes flows*. Acta Math. 174, (1995), 311-382.
- [17] Cannon, J. R., DiBenedetto, E., *The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p* , *Approximation Methods for Navier-Stokes Problems*, Edited by Rautmann, R., Lect. Notes in Math., Vol. 771, Springer-Verlag, Berlin, (1980).
- [18] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, New york, (1981).
- [19] Chen, Z., *Solutions of the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in exterior damains*. Pacific J. Math., 159, (1993), 227-240.

- [20] Chen, Z., *L^r – stability of viscous incompressible fluid motions in unbounded domains.* J. Math. Anal. Appl., 181, (1994), 768-788.
- [21] Conca, C. *Stokes equations with non-smooth data*, Rev. Math. Appl., 10, (1989), 115-122.
- [22] Conca, C. *étude d'un fluide traversant une paroi perforée II. Comportement limite loin de la paroi*, J. Math. Pures et Appl., 66, (1987), 45-69.
- [23] Conca, C., Rojas-Medar, M., *The initial value problem for the Boussinesq equations in a time-dependent domain.* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.) 94, 1, (2000), 39-48.
- [24] Dauge, M. *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains.* Lecture Notes in Mathematics, 1341, Springer-Verlag, (1988).
- [25] Dauge, M. *Problèmes mixtes pour le laplacien dans les domaines polyédraux courbes.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, (1989), 553-558.
- [26] Dauge, M. *Stationary Stokes and Navier-Stokes Systems on two- or three-Dimensional Domains with corners. Part 1: Linearized Equations.* Siam J. Math. Anal. , 20, 1, (1989).
- [27] Dauge, M. *Neumann and Mixed Problems on Curvilinear Polyhedra.* Integr. Equat. Oper. Birkhauser, Th. 15, (1992).
- [28] Deimling, K. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, (1980).
- [29] Durán, M., Ortega-Torres, E., Rojas-Medar, M.A., *Stationary solutions of magneto-micropolar fluid equations in exterior domains.* Proyecciones, 22, 1, (2003), 63-79.
- [30] Durán, M., Ferreira, J., Rojas-Medar, M.A., *Reproductive weak solutions of magneto-micropolar fluid equations in exterior domains.* Mathematical and Computer Modelling, 35, (2002), 779-791.
- [31] Eringen, A.C. *Theory of micropolar fluids.* J. Math. Mech., 16, (1966), 1-8.

- [32] Fernandez-Cara, E., Guillén- González F., Rojas-Medar, M.A., *Una Formulación Abstracta para Algunas Ecuaciones de la Mecánica de los Fluidos Incompresibles*, Mini-curso 58 Seminário Brasileiro de Análise, Universidade Estadual de Campinas, (2003).
- [33] Fernández-Cara, E., Guillén-González, F., *The existence of nonhomogeneous, viscous and incompressible flow in unbounded domain*. Comm. P. D. E. 17, (1992), 1253-1265.
- [34] Fife, P. C., Joseph, D. D., *Existence of convective solutions of the generalized Bérnard problem which are analytic in their norm*. Arch. Rational Mech. Anal., 33, (1969), 116-138.
- [35] Foias, C., Manley, O., Temam, R., *Attractors for the Bérnard problem: existence and physical bounds on their fractal dimension*. Nonlinear Anal. T. M.A., 11, (1987), 939-967.
- [36] Foias, C., Saut, J., *Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationaries*. Anal. Scuola Norm. Sup. Pisa. 4, 10, (1983), 169-177.
- [37] Foias, C., Temam, R., *Structure of the set of stationary solutions of the Navier-Stokes equations*. Comm. Pure Appl. Math., 30, (1977), 149-164.
- [38] Foias, C., Temam, R., *Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationaries et les phénomènes successifs de bifurcation*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 4, (1978), 29-63.
- [39] Friedman, A., *Partial Differential Equations*. Holt-Rinchart-Winston, (1969).
- [40] Fujita, H., Kato, T., *On the Navier-Stokes initial value-problem, I*, Arch. Rational Mech. Anal., 16, (1964), 669-315.
- [41] Fujiwara, D., Morimoto, H., *An L^r -Theorem of the Helmholtz decomposition of vectos fields*, Fac.Sci.Univ.Tokio, sec. IA 24, (1977), 658-700.
- [42] Galdi, G., *An Introduction to the Matematical Theory of the Navier-Stokes Equations*, Vol. I, II. Springer-Verlag (1994).
- [43] Galdi, G., *On the existence of steady motions of a viscous flow with non-homogeneous boundary conditions*. Le matematiche, Vol. 44, fasc. 1, (1991), 503-524.

- [44] Giga, Y., Sôh, H., *On the Stokes operator in exterior domains*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec IA, 36, (1989), 103-130.
- [45] Giga, Y. *Solutions for the semilinear parabolic equation in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-stokes system*. J. Diff. Eq., 62, (1986), 186-212.
- [46] Giga, Y. *Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces*. Math. Z., 187, (1981), 297-329.
- [47] Giga, Y., *Domains of fractional powers of the Stokes operator in L_r spaces*. Arch. Rational Mech. Anal. 89, (1985), 251-265.
- [48] Giga, Y., Miyakawa, T., *Solutions in L_r of the Navier-Stokes initial value problem*. Arch. Rational Mech. Anal., 89, (1985), 276-281.
- [49] Giga, Y., Miyakawa, T., *Navier-Stokes flow in $\mathbb{R}^3$ with measures as initial vorticity and Morrey spaces*. Comm. Partial Diff. Equations, 14, (1989), 577-618.
- [50] Gil, M.I., *Solvability of a system of stationary Boussinesq equations*. J. Diff. Eq., 27, (1991), 1377-1382.
- [51] Guillén, F., Rodríguez-Bellido, M.A., Rojas-Medar, M.A, *Hydrostatic Stokes equations with non-smooth data for mixed boundary conditions*. Ann. I. H. Poincaré, 21, (2004), 807-826.
- [52] Guillén-González, F., Santos da Rocha, M, Rojas-Medar, M. A., *The Cauchy problem and decay rates for strong solutions of a Boussinesq system*. Abstract and Applied Analysis, In press.
- [53] Guillén-González, F., Santos da Rocha, M, Rojas-Medar, M. A., *Conditions on the pressure to obtain uniqueness on the Cauchy problem to the Boussinesq equations*. Preprint.
- [54] Heywood, J. G., *The Navier-Stokes equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions*. Ind. Univ. Math. Journal., 29, 5, (1980), 639-681.

- [55] Heywood, J. G. Rennacher, R. *Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem I: regularity of solutions and second order error estimates for spatial discretization*. SIAM J. Num. Anal., 19, (1982), 275-311.
- [56] Heywood, J. G. *On uniqueness Questions in the Theory of Viscous Flow*. Acta Math., 136, (1976), 61-102.
- [57] Heywood, J.G., *An error estimate uniform in time for spectral Galerkin approximations of the Navier-Stokes problem*. P.J. Math., 96, (1982), 333-345.
- [58] Hishida, T., *Existence and Regularizing Properties of Solutions for the Nonstationary Convection Problem*. Funkcialaj Ekvacioj, 34, (1991), 449-474.
- [59] Hishida, T., *On a class of Stable Steady Flows to the Exterior Convection Problem*. J. Diff. Eq., 141, (1997), 54-85.
- [60] Holly, K., *Some application of the implicit function theorem to stationary Navier- Stokes equations*. Ann. Polon. Math., 54, 2, (1991), 93-100.
- [61] Hunt, R., *On $L(p, q)$ spaces*. L 'Enseignement Mathématique, t., 12, 4, (1966), 249-276.
- [62] Iwashita, H., *$L_q - L_r$ estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces*. Math. Ann., 285, (1989), 265-288.
- [63] Itoh, S., Tani, A., *Solvability of nonstationary problems for nonhomogeneous incompressible fluids and the convergence with vanishing viscosity*. Tokyo J. Math., 22, (1999), 17-42.
- [64] Joseph, D. *Stability of Fluid Motion*. Springer-Verlag, Berlin, (1976).
- [65] Kato, T., *Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$, with applications to weak solutions*. Math. Z., 187, (1984), 471-480.
- [66] Kazhikov, A. V., *Solvability of the initial and boundary-value problem for the equations of motion of an inhomogeneous viscous incompressible fluid*. Dok. Akad. Nauk. 216, (1974), 1008-1010. English Transl., Soviet Physics. Dokl., (1974), 331-332.

- [67] Kim, J.U., *Weak solutions of an initial boundary-value problems for an incompressible viscous fluid with non-negative density*. SIAM J. Math. Anal. 18, (1963), 615-643.
- [68] Korenev, N.K., *On some problems of convection in a viscous incompressible fluid*. Vestnik Leningrand Univ. Math., 4, (1977), 125-137.
- [69] Kozono, H., Nakao, M., *Periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*. J. Tohoku Math., 48, (1996), 33-50.
- [70] Kozono, H., Ogawa, T., *Some L^p estimate for the exterior Stokes flow and an application to the nonstationary Navier-Stokes equations*. Indiana Univ. Math. J., 41, (1992), 789-808.
- [71] Kozono, H., Ogawa, T., *On stability of the Navier-Stokes flows in exterior domains*. Arch. Rational Mech. Anal., 128, (1994), 1-31.
- [72] Kozono, H., Ozawa, T., *Stability in L^r of the Navier-Stokes flows in an n -dimensional bounded domain*. J. Math. Anal. Appl., 152, (1990), 35-45.
- [73] Ladyzhenskaya, O., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*. New York: Gordon and Breach, (1969).
- [74] Ladyzhenskaya, O.; Ural'tseva, N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Academic Press, (1968).
- [75] Ladyzhenskaya, O. A.; Solonnikov, V. A., *Unique solvability of an initial and boundary value problem for viscous incompressible fluids* Zap. Naučn Sem. Leningrado Otdel Math. Inst. Steklov, 52, (1975), 52-109; English Translation: J. Soviet Math., 9, (1978), 697-749.
- [76] Lions, J.L; Magenes, E., *Problèmes aux limites non-homogènes et applications*. Vol. 1 e 2, Dunod, Paris, (1968).
- [77] Lions, J.L; *On some questions in boundary value problems of mathematical physics, in "Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations"*, G.M. de la Penha and L.A. Medeiros Eds., North-Holland, Amsterdam, (1978).

- [78] Lions, J.L *On some problems connected with Navier-Stokes equations*, in “*Nonlinear Evolutions Equations*”, M.C. Crandall Ed., Academic Press, New York, (1978).
- [79] Lions, P.L *Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 1: Incompressible Models*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1996).
- [80] Lukaszewicz, G., *Micropolar Fluids. Theory and Applications, Modelling and Simulation in Science, Engineering and Technology*. Birkäuser, Boston, Basel, Berlin, (1999).
- [81] Lukaszewicz, G., *On the existence, uniqueness and asymptotic properties for solutions of flows of asymmetric fluids*. Rend. Accad. Naz. Sci., Memoire di Matematica, 13, (1989), 27–31.
- [82] Lukaszewicz, G., *On the nonstationary flows of a symmetric fluids*. Rend. Accad. Naz. Memoire di Matematica, 12, (1988), 83–97.
- [83] Lukaszewicz, G., *On stationary flows of asymmetric fluids, Volume XII*. Rend. Accad. Naz. Sci. detta dei XL, 106, 1988, 35-44.
- [84] Lukaszewicz, G., Ortega-Torres, E.E. and Rojas-Medar, M.A., *Strong periodic solutions for a class of abstract evolution equations*. Non. Anal., 54, 6, (2003), 1045–1056.
- [85] Maremonti, P., *Existence and stability of time periodic solutions of the Navier-Stokes equations in whole space*. Nonlinearity, 4, (1991), 503-529.
- [86] Maremonti, P., *Some theorems of existence for solutions of the Navier-Stokes equations with slip boundary conditions in half-space*. Rich. Mat., 40, (1991), 81-135.
- [87] Marusič-Paloka, E., *Solvability of the Navier-Stokes system with L^2 boundary data*. Appl. Math. Optim., 41, (2000), 365-375.
- [88] Mikhailov, V.P., *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, (1978).
- [89] Moretti, A. C., Rojas-Medar, M. A., Rojas-Medar, M. D., *The equations of a viscous incompressible chemically active fluid: existence and uniqueness of strong solutions in an unbounded domain*. Comput. Math. Appl., 44, no.3-4, (2002), 287–299.

- [90] Morimoto, H., *On the existence of weak solutions of the equation of natural convection.* J. Fac. Sci. Univ. Tokio, Sect. IA, 36, (1989), 87-102.
- [91] Morimoto, H., *Non-stationary Boussinesq equations and its reproductive property.* Preprint.
- [92] Morimoto, H., *On the existence and uniqueness of the stationary solution to the equations of natural convection.* Tokio J. Math., 14, (1991), 218-226.
- [93] Morimoto, H., *Nonstationary Boussinesq equations.* J. Fac. Sci. Univ Tokyo, Sec., IA Math., 39, (1992) 61-75.
- [94] Nečas, J., *L' application de l'égalité de Rellich sur les systèmes elliptiques du deuxième ordre.* J. Math. Pures Appl. 44, (1965), 133-147.
- [95] Ōeda, K., *Stationary solutions of the heat convection equations in exterior domains.* Proc. Japan, Acad., A 73, (1997), 111-115.
- [96] Ōeda, K., *On the initial value problem for the heat convection equation of Boussinesq approximation in a time-dependent domain.* Proc. Japan Acad., Ser. A, 64, (1988), 143-146.
- [97] Ōeda, K., *Periodic solutions of the heat convection equation in exterior.* Proc. Japan Acad., Ser. A, 73, (1997), 49-54.
- [98] Okamoto, H., *On the equation of nonstationary stratified fluid motion: uniqueness and existence of the solutions.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1A Math., 30, (1984), 615-643.
- [99] O'Neil, R., *Convolution operators and $L(p, q)$ spaces.* Duke Math. J., 30, (1963), 129-142.
- [100] Ortega-Torres, E., Rojas-Medar, M.A., *Magneto-micropolar fluid motion: global existence of strong solutions.* Abstract Applied Analysis, 4, 2, (1999), 109-125.
- [101] Ortega-Torres, E., Rojas-Medar, M.A., *On the uniqueness and regularity of the weak solutions for magneto-micropolar equations.* Rev. Mat. Apl., 17, (1996), 75-90.

- [102] Ortega-Torres, E., Rojas-Medar, M.A., *The initial value problem for the equations of magneto-micropolar fluid in a time-dependent domain*. Mat. Contemp., 15, (1998), 259–281.
- [103] Padula, M., *An existence theorem for nonhomogeneous incompressible fluids*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 31, 1, (1982), 119-124.
- [104] Padula, M., *On the existence and uniqueness of nonhomogeneous motions in exterior domains*. Math. Z., 203, 4, (1990), 581-604.
- [105] Pazy, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial differential Equations*. Applied Math. Sci., 44, Springer, (1983).
- [106] Rabinowitz, P.H., *Existence and uniqueness of rectangular solutions of the Bérnard convection*. Arch. Rat. Mech. Anal., 29, (1968), 32-57.
- [107] Rabinowitz, P.H., *Théorie de degré topologique et applications à des problèmes aux limites non linéaires*. Lectures Notes of a Course at the Universite of Paris VI and XI, (1973).
- [108] Reséndiz, A.J., Rojas-Medar, M.A., *Existence of weak solution of micropolar fluid equations in a time dependent domain*. Rev. Mat. Apl., 23, (2002), 27-46.
- [109] Rojas-Medar, M.A., *Magneto-Micropolar Fluid motion: existence and uniqueness of Strong Solution*. Math. Nach., 188, (1997), 301-319.
- [110] Rojas-Medar, M.A., *Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution*. Math. Nachr., 188, (1997), 301–319.
- [111] Rojas-Medar, M.A., *On the existence of weak and strong solutions for the magneto-micropolar fluid equations in a time dependent domain*. Numerical methods in mechanics. 141–148, Pitman Res. Notes Math. Ser., 371, Longman, Harlow, (1997).
- [112] Salvi, R., *The equations of viscous incompressible nonhomogeneous fluid: on the existence and regularity*. J. Australian Math. Soc., Series B - Applied Mathematics, Vol. 33, Part 1, (1991), 94–110.

- [113] Salvi, R., *On the existence of weak solutions of a non linear mixed problem for non homogeneous fluids in a time dependent domain.* Comm. Math. Univ. Carolinae 26, (1985), 185-199.
- [114] Santos, M., Rojas-Medar, M.A, Rojas-Medar, D. *On the existence and uniqueness of the stationary solution to equations of natural convection with boundary data in L^2 .* Proc. R. Soc. London. A, 459, (2003), 609-621.
- [115] Serre, D., *Equations de Navier-Stokes stationnaires avec données peu régulières.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 10, (1983), 187-195.
- [116] Serrin, J., *The Initial Value Problem for the Navier-Stokes equations.* Nonlinear Problems, edited by R.E. Langer. The Univ. of Wisconsin Press, Madison, (1963).
- [117] Serrin, J., *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Arch. Rat. Mech. Anal., 9 (1962), 187-195.
- [118] Simon, J., *Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure.* SIAM J. Math. Anal., 21, (1990), 1073-1117.
- [119] Simon, J., *Écoulement d'un fluide non homogène avec une densité initiale s'annulant.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 287, 15, (1978), 1009-1012.
- [120] Simon, J., *Sur les fluides visqueux incompressibles et non homogènes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 309, 7, (1989), 447-452.
- [121] Simon, J., *Existencia de solución del problema de Navier-Stokes con densidad variable.* Lectures at the University of Sevilla, Spain, (1989).
- [122] Smale, S., *An infinite- dimensional version of Sard's Theorem.* Amer. J. Math., 87, (1965), 861-866.
- [123] Stein, E. M., Weiss, G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, N.J., (1971).
- [124] Tanabe, H., *Equations of evolution.* Pitman, London, (1979).

- [125] Taniuchi, Y., *On stability of periodic solutions of the Navier-Stokes equations in unbounded domains*. Hokkaido Math. J., 28, 1, (1999), 147-173.
- [126] Temam, R., *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*. North-Holland. Amsterdam, (1979).
- [127] Temam, R., *Navier Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, (1995).
- [128] Temam, R., *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2nd Edition*. Springer, New York, (1997).
- [129] Villamizar-Roa, E.J., Rodríguez-Bellido, M.A, Rojas-Medar, M. A., *Some Properties of a Class of Abstract Stationary Equations*. Springer, New York, (1997). To appear.
- [130] Yamaguchi, N., *existence of global solution to the micropolar fluid system in bounded domain*. Math. Meth. Appl. Sci., (2005).
- [131] Yamasaki, M., *Solutions in Morrey Spaces of the Navier-Stokes Equations with Time-Dependent External Force*. Funk. Ekv., 43, (2000), 419-460.
- [132] Yudovich, V.I., *The Linearization Method in Hydrodynamical Stability Theory*. Vol. 74, Trans. of Math. Monogr., Am. Math. Soc.(1989).
- [133] Zarubin, A.G., *The problem of stationary free convection*. USSR Comput. Maths. Math. Phys., 8, (1968), 265-272.