

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

TESE DE DOUTORADO

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos
com Ressonância

Francisco Odair Vieira de Paiva

Dezembro de 2002

200304850

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Multiplicidade de Soluções para Problemas Elípticos com Ressonância

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Francisco Odair Vieira de Paiva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 02 de dezembro de 2002.



Prof. Dr.: Djalmar Guedes de Figueiredo

Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Djalmar Guedes de Figueiredo
2. Profa. Dra. Ketty Abaroa de Rezende
3. Prof. Dr. Jean-Pierre Gossez
4. Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
5. Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

UNIDADE	FC
Nº CHAMADA	TIUNICAMP
	P166m
V	EX
TOMBO BC/	52209
PROC.	124103
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	13/02/03
Nº CPD	

CM00180072-6

DigID. 283766

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

De Paiva, Francisco Odair Vieira

D34m Multiplicidade de soluções para problemas elípticos com ressonância /
P166m Francisco Odair Vieira de Paiva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Morse, Teoria de. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Ressonância. I.
Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 02 de dezembro de 2002 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



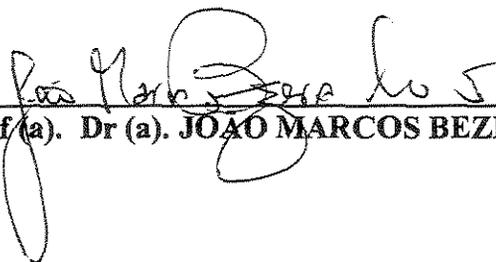
Prof (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO



Prof (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE



Prof (a). Dr (a). JEAN-PIERRE GOSSEZ



Prof (a). Dr (a). JOAO MARCOS BEZERRA DO Ó



Prof (a). Dr (a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

*... à minha família,
em especial à minha mãe.*

*“Somos muitos Severinos
iguais em tudo e na sina:
a de abrandar estas pedras
suando-se muito em cima,
a de tentar despertar
terra sempre mais extinta,
a de querer arrancar
alguns roçado da cinza.”*

*Morte e Vida Severina
João Cabral de Mello Neto*

Sumário

Agradecimentos	ii
Abstract	iii
Resumo	iv
Introdução	v
1 Teoria dos Pontos Críticos	1
2 Não-linearidades Assintoticamente Lineares	7
2.1 Introdução e principais resultados	7
2.2 A geometria do funcional	12
2.3 Estimativa para a nulidade	15
2.4 Uma condição de compacidade	17
2.5 Demonstração dos principais resultados	21
3 Não-linearidades Assimétricas	29
3.1 Introdução e principais resultados	29
3.2 Alguns lemas	33
3.3 Demonstração dos principais resultados	34
3.4 Uma equação ordinária	37
4 Apêndice	40
Referências Bibliográficas	43

Agradecimentos

À Deus, pelo seu amor.

Ao professor Djairo, pela orientação.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFC, em especial ao professor Gervásio Colares.

Aos professores de Departamento de Matemática da Unicamp, em especial àqueles que contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao professor Jianfu Yang, pelas aulas de teoria de Morse.

Aos companheiros e companheiras (que são muitos, graças à Deus), pela amizade.

Aos funcionários do IMECC/UNICAMP, em especial à Cidinha, Ednaldo e Tânia.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À Kelly, pelo seu amor.

Abstract

In this thesis we establish the existence of multiple solutions for the semilinear elliptic problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(x, u) & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a function of class C^1 such that $g(x, 0) = 0$ and which is asymptotically linear at infinity. We use critical groups to distinguish the critical points.

Resumo

Nesta tese estabelecemos multiplicidade de soluções para o problema elíptico semilinear

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(x, u) & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com bordo suave $\partial\Omega$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $g(x, 0) = 0$ e a qual é assintoticamente linear ou seccionalmente linear no infinito. Usamos grupos críticos para distinguir pontos críticos.

Introdução

O objetivo deste trabalho é o de estudar problemas de multiplicidade de soluções para equações do tipo $-\Delta u = g(x, u)$ em um espaço de Sobolev adequado, com condições de fronteira de Dirichlet. Tais equações podem modelar vários problemas em física e biologia.

Estudaremos equações elípticas com não-linearidades, tendo comportamento linear no infinito, de dois tipos: assintoticamente lineares e seccionalmente lineares (assimétricas). Discutiremos alguns resultados de multiplicidade via métodos variacionais e teoria de Morse.

Mais precisamente, consideraremos o problema do tipo elíptico

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = g(x, u) & \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e $g(x, 0) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Esta última condição nos diz que a função identicamente nula é solução de (P), que doravante será chamada de solução trivial. Estamos interessados em multiplicidade de soluções não triviais.

Soluções do problema (P) são precisamente os pontos críticos do funcional

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

em que $G(x, u) = \int_0^u g(x, t) dt$. O espaço de Sobolev no qual o funcional está definido é escolhido de acordo com as condições de fronteira, no presente caso a condição de fronteira de Dirichlet sugere o espaço $H_0^1(\Omega)$. Usualmente, para encontrar pontos críticos para o funcional F , mostra-se que o funcional tem

certa estrutura geométrica e que o conjunto de seus pontos críticos tem um tipo de compacidade, condição de Palais-Smale (*PS*).

Em nosso caso, mostraremos que o funcional F , tem ao mesmo tempo pontos críticos do tipo ponto de sela e passagem da montanha (generalizado). Estudamos também o caso em que a solução trivial é mínimo local. Neste caso, para estudar soluções de (P) que mudam de sinal, lidamos com geometrias mais particulares.

Uma das principais dificuldades no estudo de tais problemas é que a não-linearidade não satisfaz a celebrada condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Condição esta usada tradicionalmente para mostrar que as sequências de Palais-Smale são limitadas. Na literatura o problema aparece dividido em dois casos: ressonante e não ressonante. Chamamos o problema de ressonante quando o limite assintótico da não-linearidade pertence ao espectro do Laplaciano. Caso contrário o problema é dito não ressonante. O funcional F , no caso não ressonante, satisfaz a condição (*PS*). Nossos principais resultados dizem respeito ao problema ressonante. Trabalharemos com uma condição de compacidade mais fraca que (*PS*) chamada condição de Cerami (*C*).

Como corolário dos nossos resultados para o problema (P), obtemos multiplicidade para um problema autônomo. Consideremos o problema

$$(Pa) \quad \begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e satisfaz $g(0) = 0$. Além do comportamento linear no infinito a principal hipótese sobre g é uma condição de convexidade, a saber

$$\begin{cases} g(t) \text{ é convexa se } t \geq 0, & \text{e} \\ g(t) \text{ é concava se } t \leq 0. \end{cases}$$

Este problema foi estudado por Ambrosetti & Mancini em [1], Castro & Lazer em [10] e Mizoguchi [31] no caso assintoticamente linear. E por Cac em [8] no caso assintoticamente seccionalmente linear.

Nosso trabalho foi motivado pela técnica utilizada por Mizoguchi. Em seu trabalho Mizoguchi mostra que o funcional, associado a (Pa), tem duas geometrias distintas. Cada uma destas geometrias gera um ponto crítico não trivial. Devido ao tipo da não-linearidade, é possível calcular os índices de homotopia (índice de Conley) de cada ponto crítico. E assim se obtém a multiplicidade desejada.

A hipótese de convexidade sobre g implica que (ver Proposição 2.1, p. 18)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(t) - 2G(t)] = \infty,$$

em que $G(t) = \int_0^t g(s)ds$. Esta condição foi introduzida por Costa & Magalhães em [16], que mostraram ser suficiente para obter compacidade via a condição de Cerami. Este fato nos permite tratar o caso ressonante.

O primeiro capítulo expõe uma teoria abstrata de pontos críticos em espaços de Hilbert. De fato, apresentamos alguns resultados sobre teoria de Morse que podem ser encontrados essencialmente nos livros de Chang [13] e de Mawhin & Willem [30]. A diferença principal está no fato que nosso funcional satisfaz a condição de Cerami, enquanto que nos livros citados acima usa-se Palais-Smale.

No segundo capítulo estudamos o caso assintoticamente linear, ou seja, a não linearidade satisfaz

$$g(x, t) = \alpha t + o(t),$$

quando $|t| \rightarrow \infty$, e α é uma constante positiva. Para sermos precisos, neste caso, o problema é dito ressonante se α é um autovalor do problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nossas hipóteses sobre g são motivadas pela não linearidade do problema (Pa).

No terceiro capítulo estudaremos o problema assintoticamente seccionalmente linear,

$$g(x, t) = \alpha t^+ - \beta t^- + o(t)$$

quando $|t| \rightarrow \infty$, e α e β são constantes positivas. Neste caso o problema é dito ressonante quando o par (α, β) está no chamado espectro de Fučík. Isto é, (α, β) é um “autovalor” do problema seccionalmente linear

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^+ - \eta u^- & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ainda neste capítulo estudamos o caso $N = 1$, digamos $\Omega =]0, \pi[$. Tratamos de problemas com condições de fronteira de Dirichlet e periódicas. Obtemos resultados melhores (retiramos algumas hipóteses da não linearidade) devido a particularidade da dimensão. O quarto capítulo é um apêndice, onde demonstramos um lema de deformação.

Capítulo 1

Teoria dos Pontos Críticos

Neste capítulo, algumas definições e resultados da Teoria de Pontos Críticos e da Teoria de Morse são recordados. Estes resultados serão usados nas provas dos teoremas principais dos capítulos seguintes. Em [13] a condição (PS) é usada, enquanto que aqui usamos uma condição de compacidade mais fraca no funcional.

Seja H um espaço de Hilbert e $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Denote o conjunto dos pontos críticos de f por K . Dado $c \in \mathbb{R}$, seja $f_c = \{x \in H : f(x) \leq c\}$ e $K_c = f^{-1}(c) \cap K$.

Definição 1.1 *Dados $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$, dizemos que f satisfaz a condição de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$, denotemos por $(C)_c$, se toda sequência $\{x_n\} \subset H$ satisfazendo*

$$f(x_n) \rightarrow c \text{ e } (1 + \|x_n\|)\|f'(x_n)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

possui uma subsequência convergente. Se f satisfaz a condição $(C)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, dizemos que f satisfaz a condição (C) .

É conhecido que a condição (PS) implica a condição (C) .

Definição 1.2 *Dizemos que $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ possui a propriedade de deformação se para todo $a < b$ tais que $K \cap f^{-1}(a, b) = \emptyset$, temos que f_a é um retrato de deformação de $f_b \setminus K_b$.*

O próximo resultado é uma versão de um lema de deformação, em que (PS) é substituído por (C) (para referências veja [13]) provado em [35] (veja também [34]).

Lema 1.1 (Segundo Lema de Deformação) *Suponha que $f \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição (C) e a é o único possível valor crítico de f no intervalo $[a, b]$. Suponha que as componentes conexas de K_a são pontos isolados. Então, f_a é um retrato de deformação de $f_b \setminus K_b$.*

Este lema é uma ferramenta fundamental na teoria dos pontos críticos. Agora apresentaremos algumas versões de teoremas conhecidos, cujas provas podem ser encontradas em [13], com a hipótese (PS) . Entretanto, essencialmente as mesmas provas valem com a condição (C) substituindo a condição (PS) .

Denote $H_*(X, Y)$ como o grupo de homologia singular relativo com coeficientes em \mathbb{Z} , em que $Y \subset X$ são espaços topológicos.

Definição 1.3 *Seja x_0 um ponto crítico isolado de f , e seja $c = f(x_0)$. Chamamos*

$$C_p(f, x_0) = H_p(f_c \cap U_{x_0}, (f_c \setminus \{x_0\}) \cap U_{x_0})$$

o p -ésimo grupo crítico de f em x_0 , $p \in \mathbb{N}$, em que U_{x_0} é uma vizinhança de x_0 .

Teorema 1.1 *Seja $f \in C^1(H, \mathbb{R})$. Suponha que $\alpha \in H_j(f_b, f_a)$ é não trivial, e seja*

$$c = \inf_{\tau \in \alpha} \sup_{x \in |\tau|} f(x). \quad (1.1)$$

Suponha que f possui a propriedade de deformação. Então existe $x_0 \in K_c$ tal que $C_j(f, x_0) \neq 0$.

Demonstração: A existência de x_0 se segue de

Afirmção 1: $H_j(f_c, f_c \setminus K_c) \neq 0$.

Demonstração: Para todo $\epsilon > 0$, $\exists \zeta \in \alpha$ com suporte $|\zeta| \subset f_{c+\epsilon}$. Seja $y = \partial\zeta$, $|y| \subset f_a \subset f_c$. Afirmamos que $[y] \in H_{j-1}(f_c \setminus K_c)$ é não trivial. De

fato, se $[y]$ é trivial, então existe uma j -cadeia singular τ tal que $|\tau| \subset f_c \setminus K_c$ e $[\partial\tau] = [y]$. Devido ao Segundo Lema de Deformação, $\exists \eta \in C(H, H)$, satisfazendo $\eta \sim id$ e $\eta(f_c \setminus K_c) \subset f_{c-\epsilon}$ para algum $\epsilon > 0$. Seja $\tau_1 = \eta(\tau)$, temos $[\tau_1] = [\tau]$ e $|\tau_1| \subset f_{c-\epsilon}$, que contradiz a definição de c .

Considere a sequência exata do par $(f_{c+\epsilon}, f_c \setminus K_c)$

$$\cdots \longrightarrow H_j(f_{c+\epsilon}, f_c \setminus K_c) \xrightarrow{\partial_{j-1}} H_{j-1}(f_c \setminus K_c) \xrightarrow{i_{j-1}} H_{j-1}(f_{c+\epsilon}) \longrightarrow \cdots$$

em que $i_{j-1} : f_c \setminus K_c \rightarrow f_{c+\epsilon}$ é a inclusão. Desde que $i_{j-1}([y]) = 0$, i.e., $[y] \in \ker i_{j-1} = \text{Im} \partial_{j-1}$, concluímos que

$$H_j(f_{c+\epsilon}, f_c \setminus K_c) \neq 0.$$

Novamente pelo Segundo Lema de Deformação $f_c \sim f_{c+\epsilon}$. Usando a invariância por homotopia dos grupos de homologia, temos

$$H_j(f_c, f_c \setminus K_c) = H_j(f_{c+\epsilon}, f_c \setminus K_c).$$

E assim a *Afirmção 1* está provada.

A próxima afirmação conclui a demonstração do teorema.

Afirmção 2: Suponha que $K_c = \{x_i\}_0^m$, então temos

$$H_*(f_c, f_c \setminus K_c) \simeq \bigoplus_{i=0}^m C_*(f, x_i).$$

Demonstração: Pelo Lema de Deformação, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$H_*(f_{c+\epsilon}, f_{c-\epsilon}) \simeq H_*(f_c, f_c \setminus K_c)$$

e

$$H_*(f_c \setminus K_c, f_{c-\epsilon}) \simeq H_*(f_{c-\epsilon}, f_{c-\epsilon}) \simeq 0.$$

Considerando a sequência exata da tripla $(f_c, f_c \setminus K_c, f_{c-\epsilon})$:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_q(f_c \setminus K_c, f_{c-\epsilon}) &\rightarrow H_q(f_c, f_{c-\epsilon}) \\ &\rightarrow H_q(f_c, f_c \setminus K_c) \rightarrow H_{q-1}(f_c \setminus K_c, f_{c-\epsilon}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

concluimos que

$$0 \rightarrow H_q(f_c, f_{c-\epsilon}) \rightarrow H_q(f_c, f_c \setminus K_c) \rightarrow 0,$$

i.e.,

$$H_q(f_c, f_{c-\epsilon}) \simeq H_q(f_c, f_c \setminus K_c).$$

Usando a propriedade da excisão, podemos decompor os grupos de homologia como soma direta dos grupos críticos, como se segue,

$$\begin{aligned} H_*(f_c, f_c \setminus K_c) &\simeq H_*\left(f_c \cap \bigcup_{i=0}^m B(x_i, \epsilon), f_c \cap \bigcup_{i=0}^m (B(x_i, \epsilon) \setminus \{x_i\})\right) \\ &\simeq \bigoplus_{i=0}^m C_*(f, x_i), \end{aligned}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. □

Definição 1.4 *Seja D uma bola de dimensão topológica j em H e S um subconjunto de H . Dizemos que ∂D e S estão enlaçados homologicamente, se $\partial D \cap S = \emptyset$ e $|\tau| \cap S \neq \emptyset$, para cada j cadeia singular τ com $\partial\tau = \partial D$, em que $|\tau|$ é o suporte de τ .*

A proposição seguinte fornece exemplos de conjuntos enlaçados homologicamente. As provas de que, de fato, elas se entrelaçam são consequências dos Exemplos 2 e 3, e do Teorema 1.2 do Capítulo II de [13].

Proposição 1.1 *Seja H_1 e H_2 dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert H . Suponha que*

$$H = H_1 \oplus H_2, \quad \dim H_1 < \infty.$$

Então, se $D_1 = B_R \cap H_1$ e $S_1 = H_2$, ∂D_1 e S_1 são enlaçados homologicamente.

Proposição 1.2 *Seja H_1 e H_2 dois subespaços fechados de um espaço de Hilbert H . Suponha que*

$$H = H_1 \oplus H_2, \quad \dim H_1 < \infty.$$

Considere $e \in H_2$, $\|e\| = 1$, e $R, r, \rho > 0$ com $\rho < R$. Sejam

$$D_2 = \{x + se : x \in H_1 \cap B_r, s \in [0, R]\} \text{ e } S_2 = H_2 \cap \partial B_\rho.$$

Então ∂D_2 e S_2 são enlaçados homologicamente.

O próximo teorema relaciona conjuntos homologicamente enlaçados com a existência de pontos críticos com grupos críticos não triviais.

Teorema 1.2 (Teorema 1.1', Capítulo II, [13]) *Suponha que ∂D e S são enlaçados homologicamente, em que D é uma bola de dimensão j . Se $f \in C(H, \mathbb{R}^1)$ satisfaz*

$$f(x) > a \quad \forall x \in S \quad \text{e} \quad f(x) \leq a \quad \forall x \in \partial D,$$

então $H_j(f_b, f_a) \neq 0$ para $b > \text{Max}\{f(x) \mid x \in D\}$.

Pretendemos dar uma estimativa dos grupos críticos de um ponto crítico isolado e degenerado. Para esta finalidade apresentamos o "Shifting Theorem". Primeiramente, considere o "Splitting Theorem" (ou Lema de Morse Generalizado).

Teorema 1.3 (Splitting Theorem) *Suponha que U é uma vizinhança de x_0 em um espaço de Hilbert H e que $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Suponha que x_0 é o único ponto crítico de f e que $A = d^2f(x_0)$ com núcleo N . Se 0 é um ponto isolado do espectro $\sigma(A)$ ou não está em $\sigma(A)$, então existe uma bola B_δ , $\delta > 0$, com centro em 0 , um homeomorfismo local que preserva ordem ϕ definido em B_δ , e uma aplicação C^1 $h : B_\delta \cap N \rightarrow N^+$ tal que*

$$f \circ \phi(z + y) = \frac{1}{2}(Az, z) + f(h(y) + y), \quad \forall x \in B_\delta,$$

em que $y = P_N x$, $z = P_{N^\perp} x$, e P_N é a projeção ortogonal sobre o subespaço N .

Chamamos $\mathcal{N} = \phi(U \cap N)$. O seguinte teorema relaciona os grupos críticos dos pontos críticos de f e os de $\tilde{f} := f|_{\mathcal{N}}$. Este teorema foi provado pela primeira vez por Gromoll e Meyer [26] (veja [13]).

Teorema 1.4 (Shifting Theorem) *Sob as hipóteses do “Splitting Theorem”, suponha que o índice de Morse de f em x_0 é μ . Então temos*

$$C_p(f, x_0) = C_{p-\mu}(\tilde{f}, x_0), \quad p = 0, 1, \dots$$

Se $d^2f(x_0)$ tem núcleo de dimensão finita, então temos

Corolário 1.1 *Suponha que N é de dimensão finita ν e x_0 é*

(i) *um mínimo local de \tilde{f} , então*

$$C_p(f, x_0) = \delta_{p\mu}\mathbb{Z},$$

(ii) *um máximo local de \tilde{f} , então*

$$C_p(f, x_0) = \delta_{p(\mu+\nu)}\mathbb{Z},$$

(iii) *nem um máximo local nem um mínimo local de \tilde{f} , então*

$$C_p(f, x_0) = 0 \quad \text{para } p \leq \mu \text{ e } p \geq \mu + \nu.$$

A demonstração do corolário acima pode ser encontrada em [13], e.

Capítulo 2

Não-linearidades Assintoticamente Lineares

2.1 Introdução e principais resultados

Neste capítulo consideraremos o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(x, u) && \text{em } \Omega \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $g(x, 0) = 0$, o que implica que (2.1) admite a solução trivial $u = 0$. Estamos interessados em soluções não triviais. Suponha que

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

As soluções clássicas do problema (2.1) correspondem aos pontos críticos do funcional F definido em $H_0^1(\Omega)$, por

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.2}$$

em que $G(x, t) = \int_0^t g(x, s) ds$. Sob as hipóteses acima, $F \in C^2$.

Denote por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ os autovalores do Laplaciano $-\Delta$ com a condição de fronteira de Dirichlet em Ω , em que cada λ_j ocorre na sequência tão freqüentemente quanto sua multiplicidade, e denote $\lambda_0 = 0$. Escrevemos $a(x) \not\leq b(x)$ para indicar que $a(x) \leq b(x)$ com a desigualdade estrita em um conjunto de medida não nula.

Considere as seguintes hipóteses sobre g :

$$(g1) \quad g \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}) \text{ e } g(x, 0) = 0;$$

$$(g2) \quad \frac{g(x, t)}{t} \quad \left(\frac{g(x, -t)}{-t} \right) \text{ é crescente com relação a } t \geq 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ e de forma estrita em uma vizinhança da origem};$$

$$(g3) \quad \lambda_j \not\leq L(x) = \liminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} = K(x) \not\leq \lambda_{j+1},$$

uniformemente em Ω ;

$$(g4) \quad \lambda_j \not\leq L(x) \quad \text{e} \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(x, t) - 2G(x, t)] = \infty, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Teorema 2.1 *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaça (g1) e (g2). Suponha que existam $k \geq 2$ e $m \geq k + 2$ tais que*

$$g'(x, t) \leq \lambda_{m+2} \quad \forall x \in \Omega \text{ e } t \in \mathbb{R}; \text{ e}$$

$$\lambda_{k-1} \leq g'(x, 0) < \lambda_k \leq \lambda_m \leq \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_{m+1};$$

em que os limites são uniformes em Ω . Suponha que (g3) ou (g4) são satisfeitas com $j = m$, então o problema (2.1) tem pelo menos duas soluções não triviais.

Teorema 2.2 *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaça (g1). Suponha que exista $m \geq 2$ tal que*

$$g'(x, 0) < \lambda_1 < \lambda_m \leq \liminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_{m+1},$$

em que os limites são uniformes em Ω . Suponha que (g3) ou (g4) são satisfeitas com $j = m$. Além disso se (g4) ocorre, suponha que existe $C(x) \in$

$L^1(\Omega)$ tal que $tg(x, t) - G(x, t) \geq C(x) \forall t \in \mathbb{R}$, e q.t.p em Ω . Então o problema (2.1) tem pelo menos três soluções não triviais, uma das quais muda de sinal, uma é positiva e outra é negativa.

Teorema 2.3 *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaça (g1) e (g2). Suponha que exista $m \geq 3$ tal que*

$$g'(x, 0) < \lambda_1 < \lambda_m \leq \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_{m+1},$$

em que os limites são uniformes em Ω . Suponha que (g3) ou (g4) são satisfeitas com $j = m$. Então o problema (2.1) tem pelo menos quatro soluções não triviais, uma das quais soluções muda de sinal, uma é positiva e outra é negativa.

Teorema 2.4 *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaça (g1) e (g2). Suponha que existe $k \geq 1$ tal que*

$$g'(x, t) \leq \lambda_{k+1} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{R}; \quad \text{e}$$

$$\lambda_{k-1} \leq g'(x, 0) < \lambda_k < \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x, t)}{t} < \lambda_{k+1},$$

em que os limites são uniformes em Ω , e 0 é uma solução isolada então o problema (2.1) tem exatamente duas soluções não triviais.

Observação 2.1 Dizemos que o problema (2.1) tem ressonância ou dupla ressonância quando ocorre, respectivamente,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} = \lambda_j,$$

$$\lambda_j \leq \liminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_{j+1},$$

para algum $j \geq 1$, uniformemente em Ω (veja [2, 5]). Multiplicidade para problemas com dupla ressonância foi tratado nos trabalhos recentes [37, 38, 39]. Em [37], o autor considera somente o caso autônomo e supõe hipóteses fortes de não-ressonância. O Teorema 2.5, abaixo, ilustra o caso de uma

função que satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1 e não satisfaz as hipóteses em [38, 39]. Sob as condições do Teorema 2.2, e com a hipótese mais restritiva de ressonância em apenas um autovalor, Dancer & Zhang [18] provaram que o problema (2.1) tem pelo menos três soluções: uma solução que muda de sinal, uma positiva e uma negativa.

Agora considere o problema autônomo

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.3}$$

em que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $g(0) = 0$. Castro & Lazer [10], e Ambrosetti & Mancini [1] provaram que se $g \in C^2$, $tg''(t) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R} , e

$$\lambda_{k-1} < g'(0) < \lambda_k < \lim_{t \rightarrow \pm\infty} g'(t) < \lambda_{k+1}$$

para algum $k \geq 1$, então o problema (2.3) tem exatamente duas soluções não triviais. Em Mizoguchi [31], está provado que se $g \in C^2$, $tg''(t) > 0$ q.t.p. em \mathbb{R} , e

$$\lambda_{k-1} \leq g'(0) < \lambda_k \leq \lambda_{k+1} < \lim_{t \rightarrow \pm\infty} g'(t) < \lambda_{k+2},$$

então existe pelo menos duas soluções não triviais para o problema (2.3). Nosso próximo resultado estende os resultados anteriores.

Teorema 2.5 *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $g(0) = 0$, que satisfaça*

$$\begin{cases} g(t) \text{ é convexa se } t \geq 0, & e \\ g(t) \text{ é concava se } t \leq 0. \end{cases}$$

Suponha que existam $k \geq 1$ e $m \geq k + 1$ tais que

$$\lambda_{k-1} \leq g'(0) < \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_m < \lim_{t \rightarrow \pm\infty} g'(t) \leq \lambda_{m+1},$$

então o problema (2.3) tem pelo menos duas soluções não triviais.

De fato, a hipótese de convexidade acima implica que (veja a Proposição 2.1)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(t) - 2G(t)] = \infty.$$

Assim o teorema anterior é um corolário do Teorema 2.1.

Observação 2.2 Em [4], Bartsch, Chang & Wang mostraram que se $g'(t) > g(t)/t, \forall t \neq 0$ e

$$g'(0) < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_k < \lim_{|t| \rightarrow \infty} g'(t) < \lambda_{k+1}, \quad (k > 2),$$

então o problema (2.3) tem pelo menos quatro soluções não triviais, duas destas soluções mudam de sinal, uma é positiva outra é negativa. Eles observam que as condições acima de não ressonância podem ser removidas usando argumentos como em [3] e [13]. Em [13], o autor supõe que $|g(t) - \lambda_{k+1}t|$ é limitado, bem como uma condição do tipo Landesman-Lazer. Em [3], os autores supõem que $|g(t) - \lambda_{k+1}t| \leq c(|t|^r + 1)$, $r \in (0, 1)$, para calcular os grupos críticos no infinito. O próximo resultado é um corolário do Teorema 2.3.

Teorema 2.6 *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $g(0) = 0$, que satisfaça*

$$\begin{cases} g(t) \text{ é convexa se } t \geq 0, \text{ e} \\ g(t) \text{ é concava se } t \leq 0. \end{cases}$$

Suponha que existe $m > 2$ tal que

$$g'(0) < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_m < \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{g(t)}{t} = \lambda_{m+1}.$$

Então o problema (2.3) tem pelo menos quatro soluções não triviais, uma das quais muda de sinal, uma é positiva e outra é negativa.

Observação 2.3 O funcional no caso não ressonante satisfaz a condição de Palais-Smale, (PS), e a dificuldade no caso ressonante é a perda da condição (PS). Mas se a função g satisfaz a condição

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(x, t) - 2G(x, t)] = \infty, \quad \text{uniformemente em } \Omega,$$

então, em [16] Costa & Magalhães, mostraram que tal condição é suficiente para se obter uma versão mais fraca da condição (PS) , chamada condição de Cerami, (C) , a qual foi introduzida por Cerami em [11]. A condição (C) foi usada por Bartolo, Benci & Fortunato em [2] para provar um resultado de minimax geral.

2.2 A geometria do funcional

Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(x, 0) = 0$. Suponha que existam $k \geq 2$ e $m \geq k + 2$ tais que

$$\lambda_{k-1} \leq g'(x, 0) < \lambda_k \quad \text{e} \quad (2.4)$$

$$\lambda_m \not\leq L(x) = \liminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_{m+1},$$

em que os limites são uniformes em Ω .

Seja $H = H_0^1(\Omega)$ e denote as normas em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ por $\|\cdot\|$ e $|\cdot|_2$, respectivamente. Sejam H_1 , H_2 e H_3 subespaços de H gerados pelas autofunções correspondentes aos autovetores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}\}$, $\{\lambda_k, \dots, \lambda_m\}$ and $\{\lambda_{m+1}, \dots\}$, respectivamente.

O próximo resultado é semelhante ao Lema 1 em [31]. A demonstração apresentada aqui é uma variação da prova encontrada em [31]. Seja F o funcional definido em (2.2).

Lema 2.1 *Sob as hipóteses acima e (g2), temos*

- (i) *Existe $r > 0$ e $a > 0$ tal que $F(u) \geq a$ para todo $u \in H_2 \oplus H_3$ com $\|u\| = r$;*
- (ii) *$F(u) \rightarrow -\infty$, quando $\|u\| \rightarrow \infty$, para $u \in H_1 \oplus H_2$;*
- (iii) *$F(u) \leq 0$ para todo $u \in H_1$; e*
- (iv) *$F(u) \geq 0$ para todo $u \in H_3$.*

Demonstração: Por (g2) e (2.4), podemos tomar números positivos α, δ satisfazendo

$$\lambda_{k-1} \leq \frac{g(x, t)}{t} \leq \alpha < \lambda_k$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| \leq \delta$. Além disso, $\frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_{m+1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ de (g2) e (2.4). Seja $H^{\lambda_{m+1}} = \ker(-\Delta - \lambda_{m+1}I)$. Então $H_2 \oplus H_3 = V \oplus W$, em que $V = H_2 \oplus H^{\lambda_{m+1}}$. Para $u \in H_2 \oplus H_3$, ponha $u = v + w$, com $v \in V$ e $w \in W$. Como V é gerado por um número finito de autofunções que estão em L^∞ , então existe $r > 0$ tal que

$$\sup_{x \in \Omega} |v(x)| \leq \frac{\gamma - \lambda_{m+1}}{\gamma - \alpha} \cdot \delta$$

se $\|v\| \leq r$, em que $\gamma > \lambda_{m+1}$ e $|\nabla w|_2^2 \geq \gamma|w|_2^2$ para todo $w \in W$. Suponha que $\|v\| \leq r$. Se $|v(x) + w(x)| \leq \delta$, então

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\lambda_k|v|^2 + \frac{1}{4}\gamma|w|^2 - G(x, v + w) \\ & \geq \frac{1}{2}\lambda_k|v|^2 + \frac{1}{4}\gamma|w|^2 - \frac{1}{2}\alpha(v + w)^2 \\ & = \frac{1}{2}\lambda_k|v|^2 + \frac{1}{4}\gamma|w|^2 - \frac{1}{2}\alpha|v|^2 - \frac{1}{2}\alpha|w|^2 - \alpha vw \\ & = -\frac{1}{4}\alpha|w|^2 + \frac{1}{4}(\gamma - \alpha)|w|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_k - \alpha)|v|^2 - \alpha vw \\ & \geq -\frac{1}{4}\alpha|w|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_k - \alpha)|v|^2 - \alpha vw \\ & \geq -\frac{1}{4}\lambda_{m+1}|w|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_k - \alpha)|v|^2 - \alpha vw. \end{aligned}$$

Se $|v(x) + w(x)| > \delta$, temos

$$|G(x, v + w)| \leq \frac{1}{2}\lambda_{m+1}(v + w)^2 - \frac{1}{2}(\lambda_{m+1} - \alpha)\delta^2$$

e assim

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\lambda_k|v|^2 + \frac{1}{4}\gamma|w|^2 - G(x, v + w) \\ & \geq \frac{1}{2}\lambda_k|v|^2 + \frac{1}{4}\gamma|w|^2 - \frac{1}{2}\lambda_{m+1}(v + w)^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{m+1} - \alpha)\delta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lambda_k|v|^2 + \frac{1}{4}\gamma|w|^2 - \frac{1}{2}\lambda_{m+1}|v|^2 - \frac{1}{2}\lambda_{m+1}|w|^2 - \lambda_{m+1}vw \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda_{m+1} - \alpha)\delta^2 \\
&= -\frac{1}{4}\lambda_{m+1}|w|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_k - \alpha)|v|^2 - \alpha vw \\
&+ \frac{1}{4}(\gamma - \lambda_{m+1})|w|^2 + (\alpha - \lambda_{m+1})vw + \frac{1}{2}(\alpha - \lambda_{m+1})|v|^2 \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda_{m+1} - \alpha)\delta^2 \\
&\geq -\frac{1}{4}\lambda_{m+1}|w|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_k - \alpha)|v|^2 - \alpha vw,
\end{aligned}$$

(para ver a última desigualdade, o leitor é convidado a considerar

$$\frac{1}{4}(\gamma - \lambda_{m+1})|w|^2 + (\alpha - \lambda_{m+1})vw + \frac{1}{2}(\alpha - \lambda_{m+1})|v|^2 + \frac{1}{2}(\lambda_{m+1} - \alpha)\delta^2$$

como uma forma quadrática em w e provar que ela é positiva definida).

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{2}\|v + w\|^2 - \int_{\Omega} G(x, u)dx \\
&\geq \frac{1}{4}\|w\|^2 - \frac{1}{4}\lambda_{m+1}|w|_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_k - \alpha)|v|_2^2 \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\lambda_{m+1}}{\gamma}\right), \frac{\lambda_k - \alpha}{2\lambda_{m+1}}\right\}\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Isto implica (i). Pela hipótese $\lambda_m \not\leq L(x)$, a Proposição 2 em [17] diz que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|u\|^2 - \int_{\Omega} L(x)u^2 dx \leq -\delta_1\|u\|^2 \quad \forall u \in H_1 \oplus H_2.$$

Para mostrar (ii), seja δ_1 dado acima e $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \lambda_1\delta_1$. Pela definição de $L(x)$, existe $M = M(\epsilon)$ tal que

$$2F(x, t) \geq (L(x) - \epsilon)t^2 - M \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Portanto, para $u \in H_1 \oplus H_2$, temos

$$\begin{aligned}
2F(u) &\leq \|u\|^2 - \int_{\Omega} L(x)u^2 dx + \epsilon|u|_2^2 + M|\Omega| \\
&\leq \left(-\delta_1 + \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 + M|\Omega| \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } \|u\| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

pois $\epsilon/\lambda_1 - \delta_1 < 0$. Prova-se diretamente que (iii) e (iv) se verificam. \square

2.3 Estimativa para a nulidade

Seja u_0 um ponto crítico de F , definido por (2.2). O índice de Morse $\mu(u_0)$ de u_0 é definido como a máxima dimensão dos subespaços de $H_0^1(\Omega)$ nos quais $F''(u_0)$ é negativa definida. Denotamos a dimensão do núcleo de $F''(u_0)$ por $\nu(u_0)$. O próximo lema estima $\nu(u_0)$ para um ponto crítico não trivial de F . A demonstração é semelhante a do Lema 6 em [31].

Lema 2.2 *Consideremos as hipóteses do Lema 2.1. Além disso suponha que*

$$g'(x, t) \leq \lambda_{m+2} \quad \forall x \in \Omega \text{ e } t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

então temos $\nu(u_0) \leq m+1-k$, desde que u_0 seja um ponto crítico não trivial de F .

Demonstração: Seja u_0 um ponto crítico não trivial de F , isto é, uma solução não nula do problema (2.3). Denotemos $g(x, u_0) = g(u_0)$ e $g'(x, u_0) = g'(u_0)$. Note que $F''(u_0)u = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g'(u_0)u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

De $g(x, 0) = 0$, o problema (2.3) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} -\Delta u &= q(x)u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

em que $q(x) = g(u_0)/u_0$ se $u_0(x) \neq 0$ e $q(x) = g'(0)$ se $u_0(x) = 0$. Sabemos que u_0 é uma solução clássica de (2.3). Então u_0 não pode ser identicamente nula em algum subconjunto de Ω com medida positiva, pela propriedade da continuação única (veja [22]). Seja $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots$ e $\beta_1 < \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n \leq \dots$ os autovalores dos problemas

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \alpha q(x)u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.6)$$

e

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \beta g'(u_0)u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.7)$$

respectivamente. Sejam $\{\psi_n\}$ e $\{\phi_n\}$ as correspondentes autofunções dos problemas (2.6) e (2.7) satisfazendo

$$\int_{\Omega} q\psi_n\psi_m dx = \delta_{nm}$$

e

$$\int_{\Omega} g'(u_0)\phi_n\phi_m dx = \delta_{nm}$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $\beta_n < \alpha_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, por (g2) temos $g'(u_0(x)) \geq \frac{g(u_0(x))}{u_0(x)}$ e novamente pela propriedade da continuação única

$$\left| \left\{ x \in \Omega : g'(u_0(x)) > \frac{g(u_0(x))}{u_0(x)} \right\} \right| > 0.$$

Então aplicamos a Proposição 1.12 A de [21], e assim a *Afirmação* acima está provada.

Agora, suponha que $\{\nu_n\}$ e $\{\delta_n\}$ denotem os autovalores dos problemas

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \nu \lambda_{m+2}u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.8)$$

e

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \delta \lambda_{k-1}u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.9)$$

respectivamente. Isto implica que $\nu_n = \lambda_n/\lambda_{m+2}$ e $\delta_n = \lambda_n/\lambda_{k-1}$. Por (g2) e (2.5), temos

$$\lambda_{k-1} < \frac{g(u_0(x))}{u_0(x)} \leq g'(u_0(x)) \leq \lambda_{m+2}$$

para todo $x \in \Omega$ tal que $u_0(x) \neq 0$. Pelo mesmo método da prova da desigualdade $\beta_n < \alpha_n$, obtemos

$$\alpha_{k-1} < \delta_{k-1} = 1, \quad 1 = \nu_{m+2} < \alpha_{m+2} \quad \text{e} \quad 1 = \nu_{m+2} < \beta_{m+2}.$$

De $u_0 \neq 0$, segue-se então que 1 é um autovalor de (2.6). Portanto, segue-se que $\alpha_k = 1$, ou $\alpha_{k+1} = 1, \dots$, ou $\alpha_{m+1} = 1$.

Se $\alpha_{m+1} = 1$, o fato

$$\beta_{m+1} < \alpha_{m+1} = 1 = \nu_{m+2} < \beta_{m+2}$$

implica que 1 não é autovalor de (2.7), i.e., $\nu(u_0) = 0$.

Se $\alpha_m = 1$, o fato

$$\beta_m < \alpha_m = 1 = \nu_{m+2} < \beta_{m+2}$$

implica que $\nu(u_0) \leq 1$. Analogamente, se $\alpha_{m-1} = 1$ então $\nu(u_0) \leq 2, \dots$, e se $\alpha_k = 1$ então $\nu(u_0) \leq m+1-k$ ($k = m+1 - (m+1-k)$):

Isto completa a prova do lema. \square

2.4 Uma condição de compacidade

Agora provaremos uma condição de compacidade para o funcional F definido por (2.2), no caso ressonante.

Considere $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma C^1 -função e $G(x, t) = \int_0^t g(x, s) ds$ tal que

$$\lambda_j \leq \liminf_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \limsup_{|t| \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_{j+1}, \text{ uniformemente em } \Omega; \quad (2.10)$$

existe $C(x) \in L^1(\Omega)$ tal que

$$tg(x, t) - 2G(x, t) \geq C(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ para q.t.p. } x \in \Omega; \quad (2.11)$$

e

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(x, t) - 2G(x, t)] = \infty, \text{ para q.t.q. } x \in \Omega. \quad (2.12)$$

Em [16] está provado que as hipóteses (2.10), (2.11) e (2.12) são suficientes para provar que o funcional F , definido por (2.2), satisfaz a condição de Cerami.

Lema 2.3 *Se g e G satisfazem (2.10), (2.11) e (2.12) então F satisfaz a condição (C).*

Demonstração: A prova apresentada aqui é semelhante a prova do Lema 2 em [16]. Provaremos por contradição.

Sejam $c \in \mathbb{R}$ e uma sequência $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $F(u_n) \rightarrow c$ e $\|F'(u_n)\| \|u_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \{u_n g(x, u_n) - 2G(x, u_n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} [2F(u_n) - F'(u_n)u_n] = 2c. \quad (2.13)$$

Como Ω é limitado e $g(x, t)$ é subcrítico, então se $\{u_n\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$, pela compacidade das imersões de Sobolev e por argumentos padrões sabemos que existe uma subsequência de $\{u_n\}$ em $H_0^1(\Omega)$ que converge fortemente para um ponto crítico não trivial de F , e assim o lema está provado.

Suponha que F não satisfaça a condição $(C)_c$, então a sequência acima satisfaz $\|u_n\| \rightarrow \infty$ e obteremos uma contradição mostrando que o lado esquerdo de (2.13) deve divergir.

Afirmção: Existe $\Omega_0 \subset \Omega$ com $|\Omega_0| > 0$ tal que $|u_n(x)| \rightarrow \infty$ q.t.p. $x \in \Omega_0$.

Segue-se da *Afirmção* e (2.11) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n(x)g(x, u_n(x)) - 2G(x, u_n(x))\} = \infty \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega_0.$$

Além disso, segue-se de (2.11) que

$$u_n(x)g(x, u_n(x)) - 2G(x, u_n(x)) \geq C(x)$$

para q.t.p. $x \in \Omega$, com $C(x) \in L^1(\Omega)$.

O Lema de Fatou com $q_n = u_n(x)g(x, u_n(x)) - 2G(x, u_n(x))$ nos dá

$$\liminf \int_{\Omega} q_n dx \geq \liminf \int_{\Omega_0} q_n dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} C(x) dx = \infty,$$

que contradiz (2.13).

Agora provemos a *Afirmção*. Para este propósito, note que, novamente pelo Lema de Fatou e (2.10), temos

$$\liminf \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_j}{2} u_n^2 - G(x, u_n) \right] dx \geq 0. \quad (2.14)$$

Fazendo $v_n = u_n/||u_n||$, podemos supor que $v_n \rightarrow v$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, fortemente em $L^2(\Omega)$ e q.t.p. em Ω . Portanto, passando ao limite na desigualdade

$$\frac{1}{||u_n||^2} F(u_n) = \frac{1}{2}(1 - \lambda_j |v_n|_2^2) + \frac{1}{||u_n||^2} \int_{\Omega} \left[\frac{\lambda_j}{2} u_n^2 - G(x, u_n) \right] dx,$$

e usando (2.14), obtemos

$$0 \geq \frac{1}{2}(1 - \lambda_j |v|_2^2),$$

mostrando que $v \neq 0$. Seja $\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}$. E assim a *Afirmção* está provada. Portanto está terminada a demonstração do Lema. \square

Em virtude do lema acima, para provar que os Teoremas 2.5 e 2.6 se seguem dos Teoremas 2.1 e 2.3, respectivamente, devemos provar que a função g , do problema (2.3), satisfaz (2.11).

Proposição 2.1 *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não linear de classe C^1 , com $g(0) = 0$, que satisfaz*

$$\begin{cases} g(t) \text{ é convexa se } t \geq 0, & e \\ g(t) \text{ é concava se } t \leq 0. \end{cases}$$

Além disso, suponha que $g(t)/t$ seja limitado. Então

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(t) - 2G(t)] = \infty. \quad (2.15)$$

Demonstração: Fixe $t > 0$, e note que

$$\frac{1}{2}\{tg(t) - 2G(t)\} = \int_0^t \left(\frac{g(t)}{t}s - g(s) \right) ds.$$

A convexidade de g implica que $(g(t)/t)s > g(s)$ para $s \in (0, t)$. Denote por A_t a região do plano entre as curvas $s \mapsto (g(t)/t)s$ e $s \mapsto g(s)$ in $(0, t)$. Para cada $t > 0$, seja $s(t) \in (0, t)$ definido por

$$\frac{g(t)}{t}s(t) - g(s(t)) = \max_{s \in (0, t)} \left(\frac{g(t)}{t}s - g(s) \right);$$

e o triângulo Δ_t com vértices $(0, 0)$, $(s(t), g(s(t)))$ e $(t, g(t))$. Temos $\Delta_t \subset A_t$, pela convexidade de g , assim

$$|\Delta_t| \leq \frac{1}{2}\{tg(t) - 2G(t)\}.$$

Portanto a Proposição se segue de

Afirmção: $|\Delta_t| \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$.

De fato, a altura h_t de Δ_t , com relação a base $b_t = [(0, 0), (t, g(t))]$, é

$$h(t) = \left[\frac{g(t)}{t}s(t) - g(s(t)) \right] \cos \left(\arctan \left(\frac{g(t)}{t} \right) \right).$$

Assim $\liminf_{t \rightarrow \infty} h(t) > 0$, pois $g(t)/t$ é limitado; e $b_t \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$. Portanto a *Afirmção* fica provada. O argumento para $t < 0$ é inteiramente análogo. E assim, a demonstração da Proposição está completa. \square

Lema 2.4 *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo as condições seguintes: $g(x, t)/t$ limitado, $g(x, t) = 0 \quad \forall t \leq 0$ e*

$$\lambda_j \leq L(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_{j+1}, \quad j \geq 2. \quad (2.16)$$

Então, o funcional $F_+ : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F_+(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx,$$

satisfaz a condição (PS).

Demonstração: Seja $\{u_n\} \in H_0^1$ uma sequência tal que $\{F_+(u_n)\}$ é limitado, e $\|F'_+(u_n)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue-se que para todo $\varphi \in H_0^1$, temos

$$\langle F'_+(u_n), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi - \int_{\Omega} g(x, u_n) \varphi dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Seja $\varphi = u_n$; temos

$$\|u_n\|^2 \leq \int_{\Omega} g(x, u_n) u_n dx + O(\|u_n\|) \leq C|u_n|_2^2 + O(\|u_n\|).$$

Portanto, precisamos mostrar que $\{|u_n|_2\}$ é limitado, o que implica que $\{\|u_n\|\}$ é limitado. Como Ω é limitado e g tem crescimento subcrítico, então se $\{\|u_n\|\}$ é limitado, pela compacidade das imersões de Sobolev e por argumentos padrões, existe uma subsequência de $\{u_n\}$ em H_0^1 que converge fortemente, assim o Lema estará provado.

Suponha, por contradição, que $|u_n|_2 \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $v_n = u_n/|u_n|_2$. Então $|v_n|_2 = 1$ e $\{\|v_n\|\}$ é limitada. Podemos supor que $v_n \rightarrow v$ fracamente em H_0^1 , fortemente em L_2 e q.t.p. em Ω . Portanto, $u_n(x) \rightarrow \infty$ q.t.p. em Ω . De (2.17) se segue que

$$\int_{\Omega} [\nabla v \nabla \varphi - L(x)v^+ \varphi] dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1, \quad (2.18)$$

em que $v^+(x) = \max\{0, v(x)\}$. Por regularidade, temos

$$-\Delta v = L(x)v^+ \quad \text{in } \Omega.$$

Pelo princípio do máximo e pela propriedade da continuação única, $v = v^+ \geq 0$ e $L \equiv \lambda_j$ ou $L \equiv \lambda_{j+1}$. Desde que, $j \geq 2$, $v \equiv 0$, o que contradiz $|v|_2 = 1$. E assim a demonstração está completa. \square

2.5 Demonstração dos principais resultados

Pelo Lema 2.3 o funcional F , definido por (2.2), satisfaz a condição (C) (ou a condição (PS) no caso não ressonante). Então podemos usar os Teoremas do Capítulo 1. Sem perda de generalidade, podemos supor que F tem somente um número finito de pontos críticos.

Demonstração do Teorema 2.1

Os casos em que (g3) ou (g4) são admitidas serão considerados simultaneamente.

Sejam H_i , $i = 1, 2, 3$, definidos como no Lema 2.1. Considere

$$S_1 = \partial B_r \cap (H_2 \oplus H_3) \quad \text{e} \quad D_1 = \{v + te : v \in H_1, 0 \leq t \leq R, \|v + te\| \leq R\},$$

em que B_r denota a bola fechada de raio $r < R$ centrada em 0, e $e \in H_2$ é escolhido tal que

$$F(u) > 0 \quad \forall u \in S_1 \quad \text{e} \quad F(u) \leq 0 \quad \forall u \in \partial D_1. \quad (2.19)$$

Isso é possível por (i) e (iii) no Lema 2.1. Desde que ∂D_1 e S_1 estão homologicamente enlaçados e D_1 é uma bola de dimensão topológica k , segue-se por (2.19) que $H_k(F_b, F_0) \neq 0$, em que $b > \max\{F(u) \mid u \in D\}$ (veja Teorema 1.2 no Capítulo 1). Assim podemos concluir, pelo Teorema 1.1, que existe um ponto crítico u_1 de F , tal que

$$C_k(F, u_1) \neq 0. \quad (2.20)$$

Agora, seja $S_2 = H_3$ e $D_2 = B_R \cap (H_1 \oplus H_2)$. Por (ii) e (iv) no Lema 2.1, temos

$$F(u) \geq 0 \quad \forall u \in S_2 \quad \text{e} \quad F(u) < 0 \quad \forall u \in \partial D_2. \quad (2.21)$$

Novamente, desde que ∂D_2 e S_2 estão homologicamente enlaçados e D_2 é uma bola de dimensão topológica m , temos que existe u_2 , ponto crítico de F , tal que

$$C_m(F, u_2) \neq 0. \quad (2.22)$$

Agora temos que provar que $u_1 \neq u_2$, e são não triviais. Note que 0 é um ponto crítico isolado de F e $\mu(0) + \nu(0) \leq k - 1$ ($\lambda_{k-1} \leq g'(x, 0) < \lambda_k$). Pelo Shifting Theorem, $C_p(F, 0) = 0$ para todo $p \geq k$. Assim u_1 e u_2 são não triviais, por (2.20) e (2.22). Novamente pelo Shifting Theorem (Corolário 1.1) temos

- (a) $C_p(F, u_1) = \delta_{p\mu(u_1)}\mathbb{Z}$, ou
- (b) $C_p(F, u_1) = \delta_{p(\mu(u_1)+\nu(u_1))}\mathbb{Z}$, ou
- (c) $C_p(F, u_1) = 0$ se $p \notin]\mu(u_1), (\mu(u_1) + \nu(u_1)[$.

Se (a) ou (b) ocorrer, então $C_m(F, u_1) = 0$ por (2.20). Se (c) ocorrer então $k > \mu(u_1)$ por (2.20) e assim $m = k + m - k \geq \mu(u_1) + \nu(u_1)$ pelo Lema 2.2 ($\nu(u_1) \leq m + 1 - k$), novamente $C_m(F, u_1) = 0$ por (c). Portanto $u_1 \neq u_2$ por (2.22). E assim a demonstração do Teorema 2.1 está terminada. \square

Demonstração do Teorema 2.2

Seja

$$g_+(x, t) = \begin{cases} g(x, t) & t \geq 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

e considere o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g_+(x, u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Defina

$$F_+(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G_+(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Então $F_+ \in C^{2-0}$ e, pelo Lema 2.4, satisfaz a condição (PS).

Desde que $g'(x, 0) < \lambda_1$, $u = 0$ é um mínimo local estrito de F_+ . Seja $\varphi_1 > 0$ a primeira autofunção de (Δ, H_0^1) , e considere $\gamma > \lambda_1$ tal que $G_+(x, t) \geq (\gamma/2)t^2 - C$ para $t > 0$. Então

$$\begin{aligned} F_+(s\varphi_1) &= \frac{s^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi_1|^2 dx - \int_{\Omega} G_+(x, s\varphi_1) dx \\ &\leq \frac{\lambda_1 s^2}{2} \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx - \frac{\gamma s^2}{2} \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx + C \\ &= \frac{s^2(\lambda_1 - \gamma)}{2} \int_{\Omega} \varphi_1^2 dx + C \rightarrow -\infty, \quad \text{quando } s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Passagem da Montanha, F_+ tem um ponto crítico não trivial u_+ . Pelo princípio do máximo e teoria de regularidade para problemas elípticos podemos concluir que u_+ é clássica e $u_+ > 0$ para $x \in \Omega$ e a derivada normal $\partial u(x)/\partial n < 0$ para $x \in \partial\Omega$. Portanto u_+ é um ponto crítico do funcional F definido em (2.2). Similarmente, temos um ponto crítico negativo u_- de F .

Portanto podemos nos restringirmos ao espaço C_0^1 . Como $F_+|_{C_0^1}$ é de classe C^2 em uma C_0^1 -vizinhança de u_+ , o *Splitting Theorem* e o *Shifting Theorem* são válidos para $F_+|_{C_0^1}$, veja [13]. E de acordo com [18] vale o lema de deformação em C_0^1 (veja Apêndice). Além disso os grupos críticos de u_+ são determinados, veja [13],

$$C_p(F_+|_{C_0^1}, u_+) = \delta_{p1}\mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$C_p(F|_{C_0^1}, u_+) = C_p(F_\pm|_{C_0^1}, u_+) = \delta_{p1}\mathbb{Z}, \quad \forall p = 0, 1, 2, \dots$$

Analogamente,

$$C_p(F|_{C_0^1}, u_-) = C_p(F_-|_{C_0^1}, u_-) = \delta_{p1}\mathbb{Z}, \quad \forall p = 0, 1, 2, \dots$$

Afirmação: O problema (2.1) tem uma solução w que muda de sinal, tal que

$$C_2(F, w) \neq 0.$$

O teorema segue, claramente, desta *Afirmação*. (As informações que dizem respeito aos grupos críticos serão usadas na próxima seção).

Demonstração da Afirmação: Seja $P = \{u \in X = C_0^1(\Omega) : u \geq 0\}$, $D = P \cup (-P)$, e ϕ_i a autofunção normalizada associada a λ_i , $i = 1, 2$, temos $\phi_1 \in \overset{\circ}{P}$.

A principal ferramenta na demonstração da *Afirmação* é o fluxo gradiente φ^t de $-F$ em $H_0^1(\Omega)$, i.e.,

$$\frac{d}{dt}\varphi^t = -\nabla F \circ \varphi^t, \quad \varphi^0 = \text{id}.$$

Temos que $\varphi^t(u) \in X$ para $u \in X$ e φ^t induz um fluxo contínuo (local) sobre X que continuaremos denotando por φ^t . A principal propriedade de ordem de φ^t é que P e $-P$ são positivamente invariantes (isto segue de $g(x, t)t \geq 0$).

Aqui denotamos por $F^a = \{u \in X : F(u) \leq a\}$.

Como $m \geq 2$ por (ii) no Lema 2.1 existe $R > 0$ tal que $F(u) < 0$ para qualquer $u \in \text{span}\{\phi_1, \phi_2\}$ com $\|u\| \geq R$. Agora, seja

$$B = \{s\phi_1 + t\phi_2 : |s| \leq R, 0 \leq t \leq R\}$$

e

$$\partial B = \{s\phi_1 + t\phi_2 : |s| = R \text{ ou } t \in \{0, R\}\}.$$

Temos $\partial B \subset F^0 \cup D$. Seja $\beta = \max\{F(B)\}$ assim

$$(B, \partial B) \hookrightarrow (F^\beta \cup D, F^0 \cup D).$$

Seja $\xi_\beta \in H_2(F^\beta \cup D, F^0 \cup D)$ a imagem de $1 \in \mathbb{Z} = H_2(B, \partial B)$ pelo homomorfismo

$$\mathbb{Z} = H_2(B, \partial B) \rightarrow H_2(F^\beta \cup D, F^0 \cup D)$$

induzido pela inclusão. Para $\gamma \leq \beta$ seja

$$j_\gamma : H_2(F^\gamma \cup D, F^0 \cup D) \rightarrow H_2(F^\beta \cup D, F^0 \cup D)$$

também induzida pela inclusão. Agora definimos

$$\Gamma = \{\gamma \leq \beta : \xi_\beta \in \text{image}(j_\gamma)\}$$

e $c = \inf \Gamma$. Segue do próximo lema e de argumentos padrões de deformação, que c é um valor crítico de F .

Lema 2.5 $\xi_\beta \neq 0$.

De fato, seja $e_1 \in \mathring{P}$ o primeiro autovalor de

$$\begin{aligned} -\Delta u - g'(x, 0)u &= \lambda u & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

e seja $X_1 = \text{span}\{e_1\}$, $X_2 = X_1^\perp \cap X$. Temos que $\inf F(X_2 \cap \partial B_\rho) \geq \alpha > 0$ para algum $\rho > 0$ pequeno. Isto implica que

$$(B, \partial B) \subset (F^\beta \cup D, F^0 \cup D) \subset (X, X \setminus X_2 \cap \partial B_\rho).$$

Portanto o lema segue do fato que o homeomorfismo

$$H_2(B, \partial B) \rightarrow H_2(X, X \setminus X_2 \cap \partial B_\rho)$$

induzido pela inclusão é não trivial (veja [4]).

Como uma consequência do lema anterior temos $0 \notin \Gamma$, porque $j_0 = 0$. Como $F^0 \cup D$ é um retrato por deformação de $F^\gamma \cup D$ para $\gamma > 0$ suficientemente pequeno (veja Observação 4.1 no Apêndice), temos que $c > 0$. Claramente $\beta \in \Gamma$, assim $c \in (0, \beta]$.

Escolhemos $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_2(F^{c-\delta} \cup D, F^0 \cup D) & & \\ \downarrow j & \searrow j_{c-\delta} & \\ H_2(F^{c+\delta} \cup D, F^0 \cup D) & \xrightarrow{j_{c+\delta}} & H_2(F^\beta \cup D, F^0 \cup D) \\ \downarrow & & \\ H_2(F^{c+\delta} \cup D, F^{c-\delta} \cup D) & & \end{array}$$

Desde que $c + \delta \in \Gamma$ existe $\xi_{c+\delta} \in H_2(F^{c+\delta} \cup D, F^0 \cup D)$ com $j_{c+\delta}(\xi_{c+\delta}) = \xi_\beta$. Agora $\xi_{c+\delta} \notin \text{imagem}(j_{c-\delta})$ porque $c - \delta \notin \Gamma$. Portanto, como a coluna esquerda é uma sequência exata, temos $H_2(F^{c+\delta} \cup D, F^{c-\delta} \cup D) \neq 0$. Como na prova do Teorema 3.4 em [4] isto implica que existe um ponto crítico w tal que $w \notin D$ e $C_2(F, w) \neq 0$ (veja Apêndice). \square

Demonstração do Teorema 2.3

Pela demonstração do Teorema 2.2, o problema (2.1) tem três soluções não triviais, uma é positiva u_+ , outra é negativa u_- , e uma terceira solução w que muda de sinal. Além disso, temos

$$C_p(F|_{C_0^1}, u_\pm) = \delta_{p1} \mathbb{Z} \text{ e } C_2(F, w) \neq 0.$$

Afirmção: $C_2(F, w) = \delta_{p2} \mathbb{Z}$.

De fato, seja $w_+ = \max\{w, 0\}$ e $w_- = w_+ - w$. Por (g2) temos

$$\begin{aligned} \langle F''(w)w_+, w_+ \rangle &= \int_{\Omega} (|\Delta w_+|^2 - f'(x, w)w_+^2) \\ &= \int_{\Omega} (w_+ f(x, w) - f'(x, w)w_+^2) \\ &= \int_{\Omega} w_+^2 \left(\frac{f(x, w)}{w_+} - f'(x, w) \right) \\ &= \int_{\Omega} w_+^2 \left(\frac{f(x, w_+)}{w_+} - f'(x, w_+) \right) < 0. \end{aligned}$$

De modo similar temos $\langle F''(w)w_-, w_- \rangle < 0$. Como w_+ e w_- são ortogonais, temos $\langle F''(w)u, u \rangle < 0$ para todo $u \in \text{span}\{w_+, w_-\}$, i.e., o índice de Morse de w é maior ou igual a 2. Pelo Shifting Theorem temos $C_p(F, w) = \delta_{p2}\mathbb{Z}$. E a *Afirmção* está provada.

Agora pela demonstração do Teorema 2.1, existe um ponto crítico não trivial u tal que

$$C_m(F, u) \neq 0, \text{ com } m > 2,$$

e assim $u \neq w$. Pelo Teorema 1 em [12], temos

$$C_p(F|_{C_0^1}, u) = C_p(F, u),$$

e assim $u \neq u_{\pm}$. Portanto u é uma quarta solução não trivial. \square

Demonstração do Teorema 2.4

Seja $a < b$ tal que $F(K) \in (a, b)$ (veja [1]), então pela hipótese

$$\lambda_{k-1} \leq g'(x, 0) < \lambda_k < \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x, t)}{t} < \lambda_{k+1}, \quad (2.23)$$

em que os limites são uniformes em Ω . Está provado em [28], que

$$C_p(F, 0) = \delta_{p(k-1)}\mathbb{Z}$$

e

$$H_p(F_b, F_a) = \delta_{pk}\mathbb{Z}.$$

Além disso, note que se u é um ponto crítico não trivial de F por (2.23), o Lema 2.2 diz que u é não degenerado e que seu índice de Morse é k . Portanto

$$C_p(F, u) = \delta_{pk}\mathbb{Z}.$$

Seja m o número de pontos críticos não triviais de F , pela identidade de Morse (veja Teorema 4.3, capítulo I, [13]), temos

$$(-1)^k = (-1)^{k-1} + m(-1)^k.$$

Disto segue que $m = 2$. Então o problema (2.1) tem exatamente duas soluções não triviais. \square

Capítulo 3

Não-linearidades Assimétricas

3.1 Introdução e principais resultados

Considere o problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(x, u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(x, 0) = 0$, o que implica que o problema (3.1) admite a solução trivial $u = 0$. Novamente estamos interessados em soluções não triviais. Suponha que

$$\alpha_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x, t)}{t}, \quad \alpha_{\pm} \in \mathbb{R}, \quad \text{uniformemente em } \Omega. \quad (3.2)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\alpha_- \leq \alpha_+$. As soluções clássicas do problema (2.1) correspondem a pontos críticos do funcional F definido em $H_0^1(\Omega)$, por

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} G(x, u) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad (3.3)$$

em que $G(x, t) = \int_0^t g(x, s) ds$. Sob as hipóteses acima, $F \in C^2$.

Denote por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, em que cada λ_j ocorre na sequência tão freqüentemente quanto sua multiplicidade. Note que $\lambda_{j-1} < \lambda_j < \lambda_{j+1}$ implica que λ_j é simples.

É fato que a existência de soluções para o problema (2.1) está ligada fortemente a posição do par $(\alpha_-, \alpha_+) \in \mathbb{R}^2$ em relação ao chamado espectro de Fučik de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ (veja [23], onde esta noção de espectro foi introduzida). Este espectro é definido como

$$\Sigma := \{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 ; \exists u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}, -\Delta u = \mu u^+ - \nu u^-\}, \quad (3.4)$$

em que $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = u - u^+$. É claro que Σ contém as linhas $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ e $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$ e os pontos (λ_j, λ_j) , $j \geq 1$. No caso unidimensional $N = 1$, o conjunto Σ foi totalmente descrito por Fučik em [23].

Consideremos $N \geq 2$ e que $\lambda_{j-1} < \alpha_- \leq \lambda_j = \lambda_{j+k} \leq \alpha_+ < \lambda_{j+k+1}$ para algum $j \geq 2$ e $k \geq 0$. É conhecido que Σ contém pelo menos duas curvas $c_{ji}(t)$, $i = 1, 2$, com imagem em $Q = [\lambda_j, \lambda_{j+k+1}] \times [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ passando por (λ_j, λ_j) . De fato, se λ_j é simples então $\Sigma \cap Q = \text{imagem}(c_{j1}) \cup \text{imagem}(c_{j2})$. Também é possível que $c_{j1} = c_{j2}$. Caso contrário, diremos que o traço de c_{j1} fica abaixo do traço de c_{j2} . Para estas e outras propriedades de c_{j1} e c_{j2} recomendamos [7], [25], [27] e [33].

Com as notações acima, suponhamos que

$$(\alpha_+, \alpha_-) \text{ está na imagem de } (c_{j1}) \text{ (ou abaixo)}. \quad (3.5)$$

Além disso, suporemos que g satisfaz as seguintes hipóteses.

$$\frac{g(x, t)}{t} \left(\frac{g(x, -t)}{-t} \right) \text{ é crescente com relação a } t \geq 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad (3.6)$$

e de forma estrita em uma vizinhança da origem;

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(x, t) - 2G(x, t)] = \infty, \text{ para q.t.p. } x \in \Omega. \quad (3.7)$$

Teorema 3.1 *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $g(x, 0) = 0$, que satisfaça (3.2) e (3.6). Suponha que existam $k \geq 2$, $m \geq k+2$ e $r, \alpha > 0$ tais que $g'(x, t) \leq \lambda_{m+1} \forall x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$;*

$$\lambda_{k-1} \leq \frac{g(x, t)}{t} \leq \alpha < \lambda_k, \quad \forall |t| \leq r; \text{ e}$$

$$\lambda_{m-1} < \alpha_- \leq \lambda_m \leq \alpha_+ < \lambda_{m+1}.$$

Suponha que (3.5) ocorre com $j = m$. Além disso, se $(\alpha_+, \alpha_-) \in c_{m1}$ suponha (3.7). Então o problema (2.1) tem pelo menos duas soluções não triviais.

Teorema 3.2 Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $g(x, 0) = 0$, que satisfaça (3.2) e (3.6). Suponha que existam $m > 3$, $k \geq 0$ e r , $\alpha > 0$ tais que

$$\frac{g(x, t)}{t} \leq \alpha < \lambda_1, \quad \forall |t| \leq r;$$

e

$$\lambda_{m-1} < \alpha_- \leq \lambda_m = \lambda_{m+k} \leq \alpha_+ < \lambda_{m+k+1}.$$

Suponha que (3.5) ocorre com $j = m$. Além disso, se $(\alpha_+, \alpha_-) \in c_{m1}$ suponha (3.7). Então o problema (2.1) tem pelo menos quatro soluções não triviais, uma das quais muda de sinal, uma é positiva e uma outra é negativa.

Observação 3.1 Com as hipóteses acima o funcional F , definido por (2.2), tem um ponto crítico do tipo Ponto de Sela, isto foi provado em [19], por Domingos & Ramos. Dancer & Zhang, em [18], provaram que o problema (3.1) tem pelo menos três soluções: uma solução que muda de sinal, uma positiva e outra negativa; nas condições do Teorema 2.3.

Agora considere o problema autônomo

$$\begin{aligned} -\Delta u &= g(u) & \text{em } \Omega \\ u &= 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.8}$$

em que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $g(0) = 0$. Suponha que

$$\begin{cases} g(t) \text{ é convexa se } t \geq 0, & \text{e} \\ g(t) \text{ é concava se } t \leq 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

A última hipótese foi considerada por vários autores, e.g. veja [1], [10] e [31] para o caso em que $[\alpha_-, \alpha_+] \cap \{\lambda_j\} = \emptyset$. Em [8] e [9], os autores consideraram este problema quando $]\alpha_-, \alpha_+[\cap \{\lambda_j\} \neq \emptyset$.

Teorema 3.3 *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $g(0) = 0$, que satisfaça (3.9). Suponha que existam $k \geq 2$ e $m \geq k + 2$ tais que $\lambda_{k-1} \leq g'(0) < \lambda_k$ e*

$$\lambda_{m-1} < \alpha_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} g'(t) \leq \lambda_m \leq \alpha_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) < \lambda_{m+1}.$$

Suponha que ou (α_+, α_-) está em c_{m1} ou abaixo. Então o problema (3.8) tem pelo menos duas soluções não triviais.

De fato, a hipótese de convexidade de g implica que (veja Proposition 2.1)

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(t) - 2G(t)] = \infty.$$

Assim o teorema anterior é um corolário do Teorema 2.1. O próximo resultado é um corolário do Teorema 2.3.

Teorema 3.4 *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $g(0) = 0$, que satisfaça (3.9). Suponha que $g'(0) < \lambda_1$ e que existam $m > 3$ e $k \geq 0$ tais que*

$$\lambda_{m-1} < \alpha_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g(t)}{t} \leq \lambda_m = \lambda_{m+k} \leq \alpha_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t} < \lambda_{m+k+1}.$$

Suponha que ou (α_+, α_-) está em c_{m1} ou abaixo. Então o problema (3.8) tem pelo menos quatro soluções não triviais, uma das quais muda de sinal, uma é positiva e outra é negativa.

Observação 3.2 O funcional no caso não ressonante satisfaz a condição de Palais-Smale, (PS), e a dificuldade no caso ressonante é a perda da condição (PS). Mas se a função g satisfaz a condição

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(x, t) - 2G(x, t)] = \infty, \quad \text{uniformemente em } \Omega,$$

então, em [15], Costa & Cuesta mostraram que tal condição é suficiente para obter a condição de Cerami. Como no capítulo anterior podemos substituir a convergência uniforme pela convergência q.t.p. no limite acima.

3.2 Alguns lemas

Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(x, 0) = 0$. Suponha que existam $k \geq 2$ e $m \geq k + 2$ tais que

$$\lambda_{k-1} \leq g'(x, 0) < \lambda_k$$

$$\lambda_{m-1} < \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g(x, t)}{t} \leq \lambda_m \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(x, t)}{t} < \lambda_{m+1};$$
(3.10)

em que os limites são uniformes para x em Ω .

Seja $H = H_0^1(\Omega)$ e denote as normas em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ por $\|\cdot\|$ e $|\cdot|_2$, respectivamente. Sejam H_1 , H_2 e H_3 subespaços de $H_0^1(\Omega)$ gerados pelas autofunções correspondentes aos autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}\}$, $\{\lambda_k, \dots, \lambda_{m-1}\}$ and $\{\lambda_m, \dots\}$, respectivamente.

Seja F definido como em (3.3). A demonstração dos dois lemas abaixo é análoga a dos correspondentes no capítulo anterior.

Lema 3.1 *Sob as hipóteses acima e (3.6), temos*

- (i) *Existem $r > 0$ e $a > 0$ tal que $F(u) \geq a$ para todo $u \in H_2 \oplus H_3$ com $\|u\| = r$;*
- (ii) *$F(u) \rightarrow -\infty$, quando $\|u\| \rightarrow \infty$, para $u \in H_1 \oplus H_2$; e*
- (iii) *$F(u) \leq 0$ para todo $u \in H_1$.*

Lema 3.2 *Considere as hipóteses do Lema 3.1. Além disso, suponha que*

$$g'(x, t) \leq \lambda_{m+1} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{R};$$

então temos $\nu(u_0) \leq m - k$, desde que u_0 seja um ponto crítico não trivial de F .

3.3 Demonstração dos principais resultados

Segue de [15] que o funcional F , definido por (3.3), satisfaz a condição de Cerami (C) (ou (PS) no caso não ressonante, veja Lema 6.3 em [20]). Sem perda de generalidade, podemos supor que F tem somente um número finito de pontos críticos.

Primeiro observamos um resultado de existência, provado em [19], para o problema (2.1). Consideraremos uma hipótese análoga a (3.7).

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} [tg(x, t) - 2G(x, t)] = -\infty \quad (3.11)$$

Teorema 3.5 (Teoremas 2.2 e 3.5, [19]) *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory, que satisfaz (3.2). Suponha que existem $j \geq 2$ e $k \geq 0$, tal que*

$$\lambda_{j-1} < \alpha_- \leq \lambda_j = \lambda_{j+k} \leq \alpha_+ < \lambda_{j+k+1}.$$

Além disso, se

- (i) $(\alpha_+, \alpha_-) \in c_{j1}$, ou está abaixo, suponha (3.7) e $tg(x, t) - 2G(x, t) \geq C(x)$, com $C(x) \in L^1(\Omega)$; ou
- (ii) $(\alpha_+, \alpha_-) \in c_{j2}$, ou está acima, suponha (3.11) e $tg(x, t) - 2G(x, t) \leq C(x)$, com $C(x) \in L^1(\Omega)$.

Então o problema (3.1) tem uma solução.

No caso que $(\alpha_+, \alpha_-) \notin \Sigma$ as hipóteses (3.7) and (3.11) não são necessárias. Para a demonstração dos resultados enunciados na introdução usaremos apenas o item (i) do teorema acima. O item (ii) será usado na última seção deste capítulo.

Considere a decomposição

$$H_0^1(\Omega) = V_1 \oplus V_2,$$

em que V_1 é o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$, em que $l = j - 1$ no caso (i) e $l = j + k$ no caso

(ii). Para todo $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, existe um homeomorfismo γ_0 em $H_0^1(\Omega)$ tal que, se

$$S = \gamma_0(V_2), \quad A = R\gamma_0(B_1) \quad \text{e} \quad \partial A = R\gamma_0(\partial B_1),$$

em que B_1 denota a bola unitária fechada de V_1 centrada na origem, e R suficientemente grande (dependendo de ϵ); então existem constantes a e b tais que

$$\sup_{\partial A} F_\epsilon < a \leq \inf_S \leq \sup_A F_\epsilon \leq b, \quad (3.12)$$

em que F_ϵ denota $F_\epsilon^+ = F(u) + 2\epsilon\|u\|^2$ no caso (i) ou $F_\epsilon^- = F(u) - 2\epsilon\|u\|^2$ no caso (ii). Está provado em [19] que F_ϵ satisfaz a condição de Cerami, para $0 < \epsilon < 1/4$. Isto, juntamente com (3.12) implica que F_ϵ tem um ponto crítico u_ϵ , que satisfaz

$$a \leq F_\epsilon(u_\epsilon) \leq b \quad \text{e} \quad F'_\epsilon(u_\epsilon) = 0.$$

Como em [19] temos que $u_{\epsilon_n} \rightarrow u$ em $H_0^1(\Omega)$ para alguma sequência $\epsilon_n \rightarrow 0$. Claramente u é um ponto crítico de F .

Observação 3.3 Se g , no teorema acima, é C^1 , então os funcionais F_ϵ são de classe C^2 . Além disso, os conjuntos ∂A e S estão homologicamente enlaçados e A é uma bola de dimensão topológica l . Então por (3.12), o Teorema 1.1 implica que

$$C_l(F_\epsilon, u_\epsilon) \neq 0.$$

Desde que $u_{\epsilon_n} \rightarrow u$ e $F_{\epsilon_n} \rightarrow F$ em $C^1(B_\rho(u), \mathbb{R})$ para algum $\rho > 0$, pela continuidade dos grupos críticos (veja Teorema I 5.6 em [13]), temos

$$C_l(F, u) \neq 0.$$

Demonstração do Teorema 3.1

Como na demonstração do Teorema 2.1, usando o Lema 3.1, temos que existe um ponto crítico não trivial u de F , definido por (3.3), tal que

$$C_k(F, u) \neq 0.$$

Pelo Shifting Theorem temos:

$$(a) C_p(F, u) = \delta_{kp}, \text{ ou}$$

$$(b) C_p(F, u) = 0 \quad \forall p \notin [\mu(u), \mu(u) + \nu(u)].$$

Além disso pelo Lema 3.2 temos que $\nu(u) \leq m - k$.

Pelo Teorema 3.5, parte (i), e a Observação 3.3 temos que existe w , ponto crítico não trivial de F , tal que

$$C_{m-1}(F, w) \neq 0.$$

Se (a) é satisfeita então $u \neq w$ desde que $m - 1 > k$. Se não, temos (b), ou seja $k - 1 \geq \mu$. Daí $m - 1 = m - k + k - 1 \geq \mu + \nu$ (neste ponto é importante que λ_m seja simples), novamente por (b)

$$C_{m-1}(F, u) = 0.$$

E assim $u \neq w$, como queríamos demonstrar. \square

Demonstração do Teorema 3.2

Pela Demonstração do Teorema 2.2, temos que o problema (3.8) tem três soluções não triviais, uma é positiva u_+ , outra é negativa u_- , e uma terceira solução w muda de sinal. Além disso temos

$$C_p(F|_{C_0^1}, u_{\pm}) = \delta_{p1}\mathbb{Z} \quad \text{e} \quad C_p(F, w) = \delta_{p2}\mathbb{Z}.$$

Pelo Teorema 3.5 e a Observação 3.3 temos que existe u , ponto crítico não trivial de F , tal que

$$C_{m-1}(F, u) \neq 0.$$

Desde que $m - 1 > 2$ e pelo Teorema 1 em [12] temos

$$C_p(F|_{C_0^1}, u) = C_p(F, u),$$

concluimos que u é uma quarta solução não trivial do problema (3.8). \square

3.4 Uma equação ordinária

Nesta seção estudaremos o caso unidimensional, $N = 1$, com, digamos $\Omega =]0, \pi[$. Neste caso Σ é totalmente conhecido (veja [23]), e é precisamente a união das curvas c_{j1} , c_{j2} ($j \geq 2$), mencionadas na introdução, que agora são globalmente definidas, juntamente com as linhas $\mathbb{R} \times \{\lambda_1\}$ e $\{\lambda_1\} \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.6 *Seja $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $g(x, 0) = 0$, que satisfaz (3.2). Suponha que existem $k \geq 2$ e $\alpha > 0$ tal que*

$$\lambda_{k-1} \leq \inf_{t \neq 0} \frac{g(x, t)}{t} \leq \frac{g(x, t)}{t} \leq \alpha < \lambda_k \quad |t| \leq r, \quad \text{e} \quad \alpha_+ \geq \alpha_- > \lambda_k. \quad (3.13)$$

Suponha que (α_-, α_+) está entre as curvas $c_{(m-1)2}$ e c_{m1} com $m \geq k + 2$. Além disso, se

- (i) $(\alpha_-, \alpha_+) \in c_{m1}$, suponha (3.7) e $tg(x, t) - 2G(x, t) \geq C(x)$,
 $C(x) \in L^1$; ou
- (ii) $(\alpha_-, \alpha_+) \in c_{(m-1)2}$, suponha (3.11) e $tg(x, t) - 2G(x, t) \leq C(x)$,
 $C(x) \in L^1$; ou
- (iii) $(\alpha_-, \alpha_+) \notin \Sigma$, suponha $tg(x, t) - 2G(x, t) \geq C(x)$ ou
 $tg(x, t) - 2G(x, t) \leq C(x)$, $C(x) \in L^1$.

Então o problema

$$\begin{aligned} -\ddot{u} &= g(x, u) \quad \text{em} \quad]0, \pi[\\ u(0) &= u(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

tem pelo menos duas soluções não triviais.

Demonstração: A idéia da demonstração é a mesma do Teorema 2.1.

A hipótese (3.13) implica (i), (iii) do Lema 3.1 e (ii), no mesmo lema, com $H_1 \oplus \varphi_k$ (φ_k a autofunção associada a λ_k). Assim o problema (3.14) tem uma solução não trivial u tal que

$$C_k(F, u) \neq 0.$$

Pelo Teorema 3.5 e a Observação 3.3, temos uma solução não trivial w tal que

$$C_{m-1}(F, w) \neq 0.$$

Desde que

$$\text{Ker}(F''(u_0)) = \{u \in H_0^1(]0, \phi[) ; -\ddot{u} = g'(x, u_0)u\},$$

temos

$$\nu(u_0) = \dim \text{Ker}(F''(u_0)) \leq 1.$$

Portanto, pelo Shifting Theorem, temos

$$C_p(F, u) = \delta_{pk}\mathbb{Z} \quad \text{and} \quad C_p(F, w) = \delta_{p(m-1)}\mathbb{Z}.$$

Portanto $w \neq u$ desde que $k < m - 1$, como queríamos demonstrar. \square

Consideraremos agora o problema periódico

$$\begin{aligned} -\ddot{u} &= g(x, u) \quad \text{em }]0, 2\pi[\\ u(0) - u(2\pi) &= 0 = u'(0) - u'(2\pi), \end{aligned} \tag{3.15}$$

Neste caso $\lambda_j = (j - 1)^2$ para $j \geq 1$. O espectro de Fučik Σ é definido como em (3.4) exceto que agora trabalharemos no espaço, $H_{per}^1(]0, 2\pi[)$, das funções periódicas de período 2π no espaço $H_0^1(]0, 2\pi[)$. É bem conhecido (veja [15]) e fácil provar que Σ é composto das duas retas $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ e das curvas C_j , $j \geq 2$,

$$C_j = \left\{ (\mu, \nu) \in \mathbb{R}_+^2 ; \frac{1}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \frac{2}{j-1} \right\}, \quad j \geq 2.$$

Temos um teorema análogo para este caso. Novamente usaremos resultados de existência provados em [19] (see also [15]). Também podemos provar um lema análogo ao Lema 2.1. Desde que

$$\text{Ker}(F''(u_0)) = \{u \in H_{per}^1(]0, 2\pi[) ; -\ddot{u} = g'(x, u_0)u\},$$

temos

$$\nu(u_0) = \dim \text{Ker}(F''(u_0)) \leq 2.$$

Portanto podemos aplicar o Shifting Theorem e obter as mesmas conclusões como na demonstração do Teorema 3.6 sobre os grupos críticos.

Teorema 3.7 *Seja $g :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $g(x, 0) = 0$, que satisfaz (3.2). Suponha que existem $k \geq 2$, e $r, \alpha > 0$ que satisfazem (3.13). Suponha que (α_-, α_+) está entre as curvas C_{m-1} e C_m com $m \geq k+2$. Além disso, se*

- (i) $(\alpha_-, \alpha_+) \in C_m$, suponha (3.7) e $tg(x, t) - 2G(x, t) \geq C(x)$,
 $C(x) \in L^1$; ou
- (ii) $(\alpha_-, \alpha_+) \in C_{(m-1)}$, suponha (3.11) e $tg(x, t) - 2G(x, t) \leq C(x)$,
 $C(x) \in L^1$; ou
- (ii) $(\alpha_-, \alpha_+) \notin \Sigma$, suponha $tg(x, t) - 2G(x, t) \geq C(x)$ ou
 $tg(x, t) - 2G(x, t) \leq C(x)$, com $C(x) \in L^1$.

Então o problema (3.15) tem pelo menos duas soluções não triviais.

Capítulo 4

Apêndice

Neste capítulo provaremos que se u_1, \dots, u_r são todos os pontos críticos de F que mudam de sinal, então podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que

$$H_*(F^{c+\epsilon} \cup D, F^{c-\epsilon} \cup D) \simeq \bigoplus_{i=0}^r C_*(F, x_i).$$

Sejam $N' \subset N$ duas vizinhanças fechadas de $\{u_1, \dots, u_r\}$ satisfazendo

$$\text{dist}(N', \partial N) \geq \frac{7}{8}\delta, \quad \delta > 0.$$

Pela condição (C) existem constantes b e $\bar{\epsilon}$ positivas, tais que

$$\|F'(u)\| \geq b \quad \forall x \in F^{c+\bar{\epsilon}} \setminus (F^{c-\bar{\epsilon}} \cup N'),$$

$$0 < \bar{\epsilon} < \text{Min}\left\{\frac{1}{4}\delta b^2, \frac{1}{8}\delta b\right\}.$$

Defina uma função suave, como segue,

$$p(s) = \begin{cases} 0 & \text{para } s \notin [c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}] \\ 1 & \text{para } s \in [c - \epsilon, c + \epsilon], \end{cases}$$

com $0 \leq p(s) \leq 1$ e $0 < \epsilon < \frac{\bar{\epsilon}}{2}$. Sejam $A = \overline{H \setminus (N')_{\frac{\delta}{8}}}$, em que $(N')_{\delta} = \{u \in H; \text{dist}(u, N') \leq \delta\}$, e $B = N'$. Seja

$$d(u) = \frac{\text{dist}(u, B)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)}.$$

Temos $0 \leq d(u) \leq 1$, $d = 0$ em N' e $d = 1$ fora de $(N')_{\frac{\delta}{8}}$. Defina

$$q(s) = \begin{cases} 1 & 0 \leq s \leq 1 \\ 1/s & s \geq 1. \end{cases}$$

Denote $h(u) = d(u)p(F(u))q(\|F'(u)\|)$. Considere a EDO

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(\tau) &= -h(\sigma(\tau))F'(\sigma(\tau)), \\ \sigma(0) &= u_0 \quad \forall u_0 \in X. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A existência global e unicidade do fluxo $\sigma(t)$ em \mathbb{R} , para a EDO acima, são conhecidos. Seja

$$\eta(u, t) = \sigma(t), \quad \text{com } \sigma(0) = u.$$

Então $\eta \in C([0, 1] \times X, X)$ satisfaz

$$\eta(1, F^{c+\epsilon} \setminus N) \subset F^{c-\epsilon}.$$

Esse resultado pode ser encontrado em [13] (Teorema I 3.3).

Lema 4.1 *Suponha que existam somente um número finito de pontos críticos u_1, \dots, u_r , de F no nível c . Então podemos escolher $\epsilon > 0$ e vizinhanças $N_i \subset X \setminus D$ de u_i com as seguintes propriedades:*

- (i) $N_i \cap N_j = \emptyset$ para $i \neq j$;
- (ii) $u_i = N_i \cap K$;
- (iii) $F^{c-\epsilon} \cup N_i$ é positivamente invariante sob φ^t ;
- (iv) existe $T \geq 0$ com $\varphi^T(F^{c+\epsilon}) \subset F^{c-\epsilon} \cup N_1 \cup \dots \cup N_r$.

Demonstração: Seja $u_0 \in F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon] \cap X$. Pela condição (C), temos que existe $\delta > \epsilon$ tal que $0 < h(u)$ é limitado quando $u \in F^{-1}[c - \delta, c + \delta] \cap H$. Seja

$$w(\tau, u_0) = \int_0^\tau h(\eta(\zeta, u_0)) d\zeta, \quad \tau \in [0, 1]. \tag{4.2}$$

Sejam $t = w(\tau, u_0) : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, e $\varphi(t, u_0) = \eta(\tau, u_0)$. Então

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\eta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = -F'(\eta(\tau, u_0)) = -F'(\varphi(t, u_0)).$$

Agora escolhemos as vizinhanças (N_i) 's satisfazendo (i), (ii) e (iii), e ϵ como no resultado acima e definimos $T = \max\{w(1, u_0) ; u_0 \in F^{c+\epsilon}\}$. Assim, temos

$$\varphi^T(F^{c+\epsilon} \setminus N) \subset F^{c-\epsilon}, \quad N = N_1 \cup \dots \cup N_r,$$

e usando (iii) temos (iv). □

Fazendo $N = N_1 \cup \dots \cup N_r$ as propriedades (iii) e (iv), no lema acima, implicam que $F^{c-\epsilon} \cup N \cup D$ é um retrato por deformação de $F^{c+\epsilon} \cup D$, assim

$$H_*(F^{c-\epsilon} \cup N \cup D, F^{c-\epsilon} \cup D) \simeq H_*(F^{c+\epsilon} \cup D, F^{c-\epsilon} \cup D).$$

A propriedade de excisão, dos grupos de homologia, implica que

$$\begin{aligned} H_*(N, N \cap F^{c-\epsilon}) &\simeq H_*(F^{c-\epsilon} \cup N, F^{c-\epsilon}) \\ &\simeq H_*(F^{c-\epsilon} \cup N \cup D, F^{c-\epsilon} \cup D). \end{aligned}$$

Agora pelas propriedades (i) e (ii), temos

$$H_*(N, N \cap F^{c-\epsilon}) \simeq \bigoplus_{i=0}^r H_*(N_i, N_i \cap F^{c-\epsilon}) \simeq \bigoplus_{i=0}^r C_*(F, x_i).$$

Como queríamos demonstrar.

Observação 4.1 A mesma idéia, do Lema 4.1, pode ser usada para mostrar que $F^0 \cup D$ é um retrato de deformação de $F^\gamma \cup D$ para $\gamma > 0$ suficientemente pequeno. De fato, pode-se provar que o fluxo usado em [35] tem as mesmas órbitas que o fluxo φ^t .

Referências Bibliográficas

- [1] A. Ambrosetti & G. Mancini, *Sharp nonuniqueness results for some nonlinear problems*, *Nonlinear Analysis*, **5** (1979), 635-645.
- [2] P. Bartolo, V. Benci & D. Fortunato, *Abstract Critical Point Theory and Applications to some Nonlinear Problems with Strong Resonance at Infinity*, *Nonlinear Analysis*, **7** (1983), 981-1012.
- [3] T. Bartsch & S.-L. Li, *Critical point theory for asymptotically quadratic functionals and applications to problems with resonance*, *Nonlinear Analysis*, **28** (1997), 419-441.
- [4] T. Bartsch, K. C. Chang & Z-Q. Wang, *On the Morse indices of sign changing solutions of nonlinear elliptic problems*, *Math. Z.*, **233** (2000), 655-677.
- [5] H. Berestycki & D.G. de Figueiredo, *Double resonance in semilinear elliptic problems*, *Comm. Partial Differential Equations*, **6** (1981), 91-120.
- [6] H. Brezis & L. Nirenberg, *Remarks on finding critical points*, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **XLIV** (1991), 939-963.
- [7] N.P. Cac, *On Nontrivial Solutions of a Dirichlet Problem whose Jumping Nonlinearity Crosses a Multiple Eigenvalue*, *J. Differential Equations* **80** (1989), 379-404.
- [8] N.P. Cac, *Sharp Multiplicity Results for a Semilinear Dirichlet Problem*, *Comm. Partial Differential Equations* **18** (1993), 557-582.
- [9] A. Castro, J. Cossio & J. M. Neuberger, *A minmax principle, index of the critical point, and existence of sign-changing solutions to elliptic*

- boundary value problems*, E. Journal of Differential Equations, Vol.1998 (1998), No. 02, 1-18.
- [10] A. Castro & A. C. Lazer, *Critical Point Theory and the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem*, Ann. Mat. Pura Appl., Vol.120, No. 4 (1979), 113-137.
- [11] G. Cerami, *Un criterio de esistenza per i punti critic su varietà ilimitade*, Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett., **112** (1978), 332-336.
- [12] K. C. Chang, *H^1 versus C^1 isolated critical points*, C.R. Acad. Sci. Paris, **319** (1994), 441-446.
- [13] K. C. Chang, *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solutions Problems*, Birkhäuser, Boston (1993).
- [14] K. C. Chang, S. Li & J. Liu, *Remarks on Multiple Solutions for Asymptotically Linear Elliptic Boundary Value Problems*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Vol.3 (1994), pp. 179-187.
- [15] D.G. Costa & M. Cuesta, *Existence Results for Resonant Perturbations Fučik Spectrum*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **8** (1996), 295-314.
- [16] D. G. Costa & C. A. Magalhães, *Variational Elliptic Problems which are Nonquadratic at Infinity*, Nonlinear Analysis, Vol.23, No. 11 (1994), 1401-1412.
- [17] D. G. Costa & A.S. Oliveira, *Existence solutions for a class of semilinear elliptic problems double resonance*, Bol. Soc. Brasil. Mat., Vol.19 (1988), 21-37.
- [18] E. N. Dancer & Z. Zhang, *Fucik Spectrum, Sign-Changing, and Multiple Solutions for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems with Resonance at Infinity*, Jorunal of Mathmatical Analysis and Aplications, Vol.250 (2000), 449-464.
- [19] A.N. Domingos & M. Ramos, *On the Solvability of a Resonant Elliptic Equations with Asymmetric Nonlinearity*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **11** (1998), 45-57.

- [20] D.G. de Figueiredo, *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, TATA, Bombay (1989)
- [21] D. G. de Figueiredo, *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*, Lectures Notes in Mathematics, **957** (1982), 34-87.
- [22] D. G. de Figueiredo & J. P. Gossez, *Strict monotonicity of eigenvalues and Unique Continuation*, Comm. Partial Differential Equations, Vol.17, No. 1-2 (1992), 339-346.
- [23] S. Fučík, *Boundary Value Problems with Jumping Nonlinearities*, Časopis pro Pěstování Matematiky **101** (1976), 69-87.
- [24] M.F. Furtado & E.A.B. Silva, *Double resonant problems which are locally non-quadratic at infinity*, Proceedings of the USA-Chile Workshop on Nonlinear Analysis. Electron. J. Differential Equations. Conf. 06 (2001), 155-171.
- [25] T. Gallouët & O. Kavian, *Résultats d'existence et de non-existence pour certains problèmes demi-linéaires à l'infini*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **3** (1981), 129-136.
- [26] D. Gromoll & W. Meyer, *On differentiable functions with isolated critical points*, Topology **8** (1969), 331-369.
- [27] C.A. Magalhães, *Multiplicity results for a semilinear elliptic problem with crossing of multiple eigenvalues*, Differential Integral Equations **4** (1991), 155-171.
- [28] S. Li, K. Perera & J. Su, *Computation of Critical Groups in Elliptic Boundary Value Problems where the Asymptotic Limits may not Exist*, To appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A
- [29] S. Li & M. Willem, *Applications of local linking to critical point theory*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.189 (1995), 6-32.
- [30] J. Mawhin & M. Willem, *Critical point theory and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, 1989.

- [31] N. Mizoguchi, *Multiple Nontrivial Solutions of Semilinear Elliptic Equations and their Homotopy Indices*, *Jornal of Differential Equations*, Vol.108 (1994), 101-119.
- [32] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations* (1986), 65 AMS Conf. Ser. Math..
- [33] M. Schechter, *The Fučik Spectrum*, *Indiana Univ. Math. J.* 43 (1994), 1139-1157.
- [34] E. A. B. Silva & M. A. Teixeira, *A version of Rolle's Theorem and Applications*, *Boletim da Soc. Brasileira de Matemática*, Vol.29, No. 2 (1998), 301-327.
- [35] E. A. B. Silva, *Existence and multiplicity of solutions for semilinear elliptic systems*, *Nonlinear Diff. Eq. Appl.*, 1 (1994), 339-363.
- [36] E.A.B. Silva, *Critical point theorems and applications to a semilinear elliptic problem*, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 3 (1996), 245-261.
- [37] J. Su, *Semilinear elliptic boundary value problems with double resonance*, *Nonlinear Analysis*, 48 (2002), 881-895.
- [38] W. Zou, *Multiple solutions for elliptic equations with resonance*, *Nonlinear Analysis*, 48 (2002), 363-376.
- [39] W. Zou & J.Q. Liu, *Multiple Solutions for Resonant Elliptic Equations via Local Linking Theory and Morse Theory*, *J. Differential Equations* , 170 (2001), 68-95.