UM JOGO DE BLOTTO

Maria Bernadete de Souza Côrtes

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

UM JOGO DE BLOTTO

Maria Bernadete de Souza Côrtes

Orientador: Prof. Flávio Rocha Gorini

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, com requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campinas, Dezembro de 1982

Trabalho realizado com o apoio da CAPES.

SUMÁRIO

Nesta tese lidamos com o seguinte jogo de Blotto: Dois políticos devem alocar, secretamente, seus recursos igualmente entre um número de eleitores. Cada eleitor vota no político que lhe der mais recursos.

Nós apresentaremos soluções assintoticamente ótimas para esse jogo.

ABSTRACT

In this thesis we deal with the following Blotto Games:

Two politicians must allocate secutly, their resources equally among a number of voters. Each voter votes for the politician that gives him more resources. The politician that receives more votes win the game.

We give asymptotically optimal soluctions for this game.

À minha

família

AGRADECIMENTOS

Neste momento gostaria de expressar o meu carinho às pessoas que, no decorrer desta etapa da minha vida, colaboraram para que eu concluísse este trabalho.

Ao Flávio, meu orientador de tese, agradeço o voto de confiança que em mim depositou ao propor este problema. À Marisa, sua esposa, pela paciência e compreensão com que nos acompanhou nestes últimos meses.

A Você, Moretti, o meu muito obrigada pelo seu empenho na resolução numérica do problema abordado nesta tese, além de me incentivar nos momentos de fracasso.

Ao Hilton e Isolda eu agradeço os amigos que vocês têm sido prá mim em Brasília, principalmente na discussão dos resultados.

Para os companheiros professores do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Estadual de Maringá eu agradeço a licença concedida durante este semestre, pois sem ela seria impossível a realização deste trabalho.

Aos amigos maringaenses o meu muito obrigada pelas cartas carinhosas, me encorajando sempre a concluir a tese.

A você, Téia, um agradecimento especial pela amiga que foi nesta etapa final do trabalho, assumindo parte da minha responsabilidade em Maringá.

Aos companheiros de república no dia a dia, eu agradeço o investimento que fizeram em mim durante o tempo de convivência, muitas vezes tornando ameno o cotidiano com o carinho e dedicação de uma amizade sincera, o meu obrigada Waltair, Wagner, Marcílio, Cixa, Lucinha, Marinho, Paulinho, Lilica, Renato, Agnaldo e Kiko.

Léo, obrigada pela paz que me transmitiu durante estes momentos de muita luta.

A tia Irma e família eu agradeço os braços abertos com que sempre me acolheram.

À minha amiga Cixa o meu muito obrigada pelo carinho com que realizou a revisão deste trabalho.

À minha família por ter acreditado em mim, participando das minhas alegrias e tristezas, compreendendo sempre as minhas explosões; a estes grandes amigos a minha gratidão.

Aos meus amigos de Brasília agradecer é muito pouco, onde eu encontrei a minha segunda família: Ignez, Juquinha, Jô, Hequinho, Bruno e Fabiana, a essa gente querida o meu carinho eterno.

A você, Hércelus, muito obrigada pela paciência e atenção no exaustivo trabalho de datilografia.

À Natureza eu agradeço a oportunidade de viver.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Uma das dificuldades de aplicação da teoria dos jogos é o estabelecimento de uma matriz satisfatoriamente quantificada. É difícil identificar todas as variáveis que intervêm para reduzir seus efeitos a uma escala homogênea de valores. Além disso, a teoria é estática — trabalha com valores dados, fixos e independentes do resultado do jogo. E as situações concretas são dinâmicas, com valores não fixos.

No entanto, como qualquer outra teoria científica, a teoria dos jogos é um "mapa simplificado" [6], isomorfo, da realidade. Sua utilidade está na razão direta do isomorfismo mantido em relação a algum aspecto do mundo real.

O conteúdo deste trabalho está distribuído de maneira que se segue. No Capítulo I apresentamos alguns exemplos de jogos de soma-zero com soluções puras e mistas, além de formalizarmos alguns conceitos necessários ao desenvolvimento dos problemas da Teoria dos Jogos.

O Capítulo II está dividido em três partes, sendo que na primeira delas apresentamos o problema proposto para este trabalho de tese. Na seção II-2 apresentamos um problema similar ao proposto e sua respectiva solução, desenvolvida recentemente e que nos auxiliou no nosso trabalho. Na Seção II-3 tecemos alguns comentários ressaltando a diferença existente entre os problemas das seções II-1 e II-2.

O Capítulo III está dividido em duas partes. Na seção III-1 desenvolvemos o problema proposto e obtemos duas soluções, sendo uma para o caso contínuo e outra para o caso discreto. Na seção III-2 tratamos da abordagem numérica do problema e apresentamos os resultados que conseguimos obter utilizando métodos computacionais.

No Capítulo IV apresentamos as conclusões do trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO I

Exemplos de Jogos de Soma-Zero. Conceitos.

A teoria dos jogos há muitos anos tem sido estudada e a primeira tentativa deu-se em 1.921 por Émile Borel durante suas pesquisas em cálculo de probabilidade. Esta teoria foi firmemente estabelecida por John Von Neumann em 1.928 quando ele provou o teorema minimax; Teorema Fundamental dos Jogos de Estratégias.

Dentro da teoria dos jogos encontra-se desenvolvido um jogo com características que mencionaremos a seguir, chamado "Jogo de Blotto". Essa denominação foi dada por M. Donald [10] que escreveu:

"O Jogo do Coronel Bloto, que é um problema de desdobramento militar, é encontrado no Caliban's Weekend Problems Book".

O problema é dado ao Coronel Bloto pelo seu general como um teste de competência. Blotto tem quatro unidades de força ao passo que o inimigo tem três unidades. Entre as forças opostos existe uma montanha com quatro passagens, e em cada passagem tem um forte. A guerra é declarada à noite e a solução deveria ser apresentada pela manhã.

As decisões a serem tomadas deveriam ser tais que resultassem em cada passagem, num cômputo do número de pontos maior do que o do inimigo. Ganha-se um ponto por cada forte conquistado e um ponto por cada unidade de força.

Blotto fez então o desdobramento de suas forças, baseado nos seus estudos que incluiam a probabilidade das forças inimigas terem sido agrupadas de uma das maneiras seguintes: uma unidade em cada uma das três passagens; duas em uma das passagnes e a terceira em outra; ou todas três forças numa única passagem.

"Em Princeton durante a II Guerra Mundial, dois matemáticos, Charles P. Winsor e John W. Iuckey, trabalhando em problemas militares na prática, aplicaram muitas vezes problemas do Coronel Blotto próximos à realidade".

Após essa breve abordagem histórica do jogo de Bloto, vamos defini-lo matematicamente.

Jogo de Blotto é um jogo de soma zero envolvendo dois jogadores I e II, e n campos de batalha independentes. O jogador I tem A unidades de forças para distribuir entre os campos de batalha, e o jogador II tem B unidades. Cada jogador deverá distribuir suas forças sem conhecer a distribuição do adversário. Se I envia x_i unidades de forças e II envia y_i unidades para o i-ésimo campo de batalha, existe um payoff

$k_i(x_i, y_i)$ para I como um resultado da batalha, o payoff como um todo é a soma dos payoffs dos campos de batalha individuais.

A título de exemplificação apresentamos a seguir como sendo um jogo, problemas reais onde foram introduzidas algumas simplificações.

Exemplo 1 - "Um equilíbrio dinâmico" [6]

O jogo da concorrência entre empresas é, em geral, "equilibrado". Por exemplo, a empresa X sólida e antiga, vê-se rapidamente ameaçada por uma associação Y, nova e agressiva. x orienta sua política pelas previsões feitas a partir de um balanço projetado para um ano. A organização y, ao fazer suas estimativas, toma como base não o seu balanço, mas a do grupo oponente. Seu objetivo consiste em afastar x do mercado e, para tanto, considera os lucros desta como seus prejuízos, e vice-versa. Seu jogo assume as características de "soma-zero". Ambas as companhias devem tomar uma decisão: empreender, ou não, uma vasta campanha publicitária. As duas controlam apenas suas próprias decisões, se bem que tenham as informações sobre os possíveis resultados provenientes das decisões a serem tomadas por ambas, isto é, conhecem a "matriz do jogo".

Indicando por C_1 a decisão de x de empreender a campanha publicitária, por C_2 a resolução contrária, por B_1 e

B_2 decisões equivalentes por parte de y, e combinando essas opções, chega-se a quatro valores possíveis:

x \ y	B_1	B_2	
C_1	-1	+1	[-1]
C_2	-3	+2	
	[-1]	(+2)	

Os lucros (+) e prejuízos (-) de x (em milhões de cruzeiros, por exemplo), são, respectivamente, os prejuízos e lucros de y. A empresa x pode, ou não, fazer a campanha publicitária. O resultado mínimo é -1 para C_1, e -3 para C_2 - um prejuízo de 1 ou 3 milhões de cruzeiros. Escolhendo o curso de ação C_1 (fazer a campanha), x decidiu pelo maxmin. A empresa y, aplicando a estratégia B_1, terá um prejuízo máximo de -1 (mínimo prejuízo de x); e recorrendo a B_2, um mínimo prejuízo (lucro de x). Usando a estratégia B_1, estará aplicando o critério minimax; e neste caso, o maxmin de x é igual ao minmax de y (existe um "ponto de sela"), e o jogo tende a equilibrar-se em torno de B_1 e C_1: ambas as companhias empreenderão a campanha publicitária.

Surgimos então com uma outra definição: uma estratégia é uma estratégia pura quando o valor do jogo é o mesmo para os dois jogadores, ou seja, o maxmin de um jogador é igual ao minmax do adversário.

Exemplo 2:

Duas companhias A e B fornecedoras de um mesmo produto, desejam conquistar os mercados das cidades Rio de Janeiro e São Paulo, e para isto investem em publicidade, divulgando seus produtos. Assumiremos que A tem quatro (unidades) de dinheiro e B três (unidades) para investir em propaganda entre as duas cidades.

Consideramos que:

i) controlará o mercado a companhia que mais divulgar o seu produto;

II) os prejuízos do adversário serão considerados como benefícios da firma que dominar o mercado.

Ou seja,

Se A investir três (unidades de dinheiro) no Rio e uma unidade em São Paulo, e

Se B dispuser duas (unidades de dinheiro) no Rio e uma unidade em São Paulo,

então A ganhará no total de três (unidades de dinheiro). Entretato, se A investir duas (unidades de dinheiro) no Rio e B dispuser todas as três unidades também no Rio, então A perde duas unidades.

Logo, a companhia A tem cinco estratégias para repartir quatro (unidades de dinheiro) entre duas cidades ao passo que B tem quatro estratégias. Existem portanto, no total, vinte estratégias para as duas companhias investirem seu dinheiro.

A matriz payoff deste jogo, é então a seguinte:

		Companhia B				
		(3,0)	(0,3)	(2,1)	(1,2)	
Companhia A	(4,0)	4	0	2	1	0
	(0,4)	0	4	1	2	0
	(3,1)	1	-1	3	0	-1
	(1,3)	-1	1	0	2	-1
	(2,2)	-2	-2	2	2	-2
		4	4	3	3	

Suponhamos que a companhia B é forçada a anunciar para a companhia A que estratégia ela está tomando, e que ela anuncia y_o. Então a companhia A, pretende maximizar o seu payoff ou lucro, naturalmente escolher sua estratégia x_o tal que $k(x_o, y_o) = \max_x k(x, y_o)$. A melhor ação para a companhia B tomar sob estas circunstâncias seria anunciar y_o tal que

$$\max_x k\,(x, y_o) = \min_y \max_x k\,(x, y) = \bar{v},$$

onde $\bar{v}$ (o valor superior) pode ser interpretado como o máximo que a companhia A pode obter se a companhia B tomar a estratégia y_o.

Suponhamos que a situação se inverta e a companhia A tenha que anunciar sua estratégia x_o. Visto que a companhia B não deixa de escolher y_o tal que

$$k(x_o, y_o) = \min_y k(x_o, y),$$

a companhia A pode se proteger escolhendo x_o tal que

$$\min_y k\,(x_o, y) = \max_x \min_y k\,(x, y) = \underline{v}$$

onde $\underline{v}$ (o valor inferior) pode ser interpretado como o máximo que a companhia A pode garantir independente da escolha da estratégia da companhia B.

Se $\bar{v} = \underline{v}$ existem estratégias ótimas, isto é,

$\exists\ (x_o, y_o)$ tal que

$$\min_y \max_x k(x, y) = k(x_o, y_o) = v = \max_x \min_y k(x, y)$$

(x_o, y_o) é chamado ponto de sela ou ponto de equilíbrio.

Neste jogo temos:

$$\underline{v} = \max_x \min_y k(x,y) = 0 \quad e$$

$$\overline{v} = \min_{y} \max_{x} k(x, y) = 3$$

Como $\underline{v} \neq \overline{v}$, não se tem para este jogo uma estratégia pura ótima.

O teorema fundamental de Von Neumann, referente aos casos de jogo de "soma-zero" entre dois adversários, em que o maxmin é diferente do minimax, estabelece a possibilidade de calcular uma estratégia mista, e demonstra-se que o jogo se equilibrará em torno de um valor v.

Apresentaremos uma solução deste tipo no exemplo 3.

<u>Exemplo 3</u>

Dois políticos, I e II, dispõem de 120 segundos de propaganda em cinco canais de televisão, em um horário especial.

Os políticos deverão distribuir o tempo igualmente entre os canais escolhidos. Sabe-se de antemão que o eleitor votará no político que lhe oferecer mais tempo em propaganda.

Uma estratégia pura para o político I é o número de canais escolhidos para dividir o seu tempo. A situação é análoga para o político II.

Os dois políticos têm cinco estratégias possíveis para distribuir o tempo, ou seja

$X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ onde a estratégia $r \in X$ é o número de canais entre os quais os tempo (neste caso igual a 120 segundos) será dividido igualmente.

$r = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ onde $\sum_{i=1}^{5} r_i = 120$ e

$P\,(r_i = 0) = P(r_1 = 0) = \frac{5-r}{5}$ e

$P\,(r_i = \frac{120}{r}) = P(r_1 = \frac{120}{5}) = \frac{r}{5}.$

O mesmo ocorre para o político II, que fará uso de estratégias s pertencentes a Y.

Definição: Suponhamos que o político I escolhe $r \in X$ e o político II escolhe $s \in Y$, dizemos que r é melhor que s se a probabilidade do político I ganhar é maior que do político II. (Relembremos que ganhar no nosso exemplo significa permanecer mais tempo no vídeo, para cada estratégia escolhida).

Por exemplo, o político I escolhe $r = 3$ e o político II $s = 2$, ou seja, o político I distribuirá o tempo de 120 segundos entre três canais de televisão, e o político II o fará entre dois canais.

A situação resultante pode ser descrita pelo quadro abaixo, onde fixamos os canais escolhidos pelo político I e variamos os escolhidos pelo político II.

CANAL	1	2	3	4	5	(A)
POLÍTICO I (r = 3)	0	0	40	40	40	(B)
	0	0	0	60	60	(C)
POLÍTICO II (s = 2)	0	60	0	0	60	(D)
	60	60	0	0	0	(E)

Vamos considerar nas linhas C, D e E as possíveis distribuições de variável tempo, nos cinco canais, para o político II.

Observemos que para a distribuição na linha C, descrita por C_3^2, o político II no total sempre ganhará do político I.

Para a distribuição da linha D, descrita por $2\,C_3^1$, ocorre o empate entre os políticos.

Quanto à linha E, descrita por C_2^3, o político II perde em uma das posições.

Portanto, no total o político II ganha em duas posições, donde concluir-se que a estratégia s adotada é melhor que r.

Definimos então o seguinte payoff:

$k\ (r,\ s) = 1$ se r melhor que s

$k\ (r,\ s) = -1$ se s melhor que r

$k\ (r,\ s) = 0$ no caso de empate

Com esta definição obtemos para o jogo em questão, a seguinte matriz payoff:

II \ I	1	2	3	4	5
1	0	-1	-1	-1	-1
2	1	0	1	-1	-1
3	1	-1	0	1	1
4	1	1	-1	0	1
5	1	1	-1	-1	0

Podemos observar que nesse jogo não temos nenhuma estratégia ótima, também não devemos considerar no jogo a estratégia 1, pois ela é dominada, portanto reduzimos a matriz payoff como segue:

II \ I	2	3	4	5	
2	0	1	-1	-1	-1
3	-1	0	1	1	-1
4	1	-1	0	1	-1
5	1	-1	-1	0	-1
	1	1	1	1	

Uma possível estratégia mista para o político I seria aleatorizar as estratégias 2, 3 e 4 com a seguinte probabilidade $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Obtivemos esta solução resolvendo o seguinte problema:

p_2, p_3, p_4 e p_5 ; $p_i \geq 0$ então

$$(p_2\ p_3\ p_4\ p_5)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_2' \\ p_3' \\ p_4' \\ p_5' \end{pmatrix} \geq 0$$

ou seja,

$$\begin{cases} -p_3 + p_4 + p_5 \geq 0 \\ p_2 - p_4 - p_5 \geq 0 \\ -p_2 + p_3 - p_5 \geq 0 \\ -p_2 + p_3 + p_4 \geq 0 \\ p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \geq 0 \\ p_i \geq 0 \end{cases}$$

Das três primeiras desigualdades temos:

$$+\begin{cases} -p_3 + p_4 + p_5 \geq 0 \\ p_2 - p_4 - p_5 \geq 0 \\ -p_2 + p_3 - p_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$-2p_5 \geq 0 \rightarrow -p_5 \geq 0$$

Portanto $p_5 = 0$ e $p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{3}$

Nos exemplos apresentados fazemos usos de conceitos e de terminologias necessárias ao desenvolvimento da Teoria dos Jogos, tais como jogo de soma-zero, payoff, estratégia mista, que vale a pena ser formalizado nesta etapa do trabalho.

Definição: Um jogo de soma-zero consiste de um par de conjuntos R e S e uma função de valor real K definida sobre os pares (r, s) onde $r \in R$ e $s \in S$, temos então $\{R, S, K\}$

Terminologia: Os elementos r e s dos conjuntos R e S são chamados estratégias para os jogadores I e II, respectivamente. A função K é chamada a função payoff, ou simplesmente payoff.

Interpretação: O número K (r, s) é a quantia que o jogador II paga a I caso I jogue a estratégia r e II a estratégia s.

O termo soma-zero significa que para algum par de estratégias (correspondentes) $r \in R$ e $s \in S$, onde $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ e $S = \{s_1, s_2 \ldots, s_n\}$, a soma dos pagamentos, K (r, s), de I para II, mais a de II para I é zero ou simplesmente o que um jogador ganha o outro perde.

Uma estratégia mista para I é qualquer probabilidade sobre R.

Seja μ uma probabilidade sobre R, isto é, $\mu(r_i) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{N} \mu(r_i) = 1$ se I toma a estragégia mista μ o payoff toma a forma

$$k(\mu,s) = \sum_{i=1}^{N} \mu(r_i)\ k(r_i,\ s),$$ também chamado payoff esperado, pois se X é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade μ, então

$$k(\mu,\ s) = E\ k(X,\ s).$$

A estratégia mista μ pode ser executada como segue: Um experimento é conduzido com n possíveis resultados desde que a probabilidade do i-ésimo resultado seja $\mu(r_i)$ A i-ésima estratégia pura é usada pelo jogador I, se e somente se o i-ésimo resultado tem ocorrido e a renda para o jogador I torna-se a renda esperada para este experimento; normalmente

$$k(\mu,\ s) = \sum_{i=1}^{N} \mu(r_i)\ k(r_i,\ s)$$

Portanto, podemos interpretar uma estratégia mista como sendo uma distribuição de probabilidade definida sobre o espaço de estratégias puras.

Usando a matriz nxn e n grande, a programação linear é o método mais prático para calcular o valor do jogo, ou seja, a estratégia ótima do jogo matricial.

Ewald Burger [3] mostra que todo programa linear pode ser reduzido a um jogo matricial, de modo que, em uma interpretação exata, há uma equivalência entre programação linear e a teoria dos jogos matriciais.

CAPÍTULO II

II-1. Formalização do problema

O problema proposto e que desenvolvemos neste trabalho, consiste de um jogo de soma zero, com estratégias mistas, em cuja função payoff são consideradas não somente a probabilidade de um dos jogadores ganhar numa dada situação, mas sim a diferença entre as probabilidades de um jogador ganhar e perder no decorrer do jogo.

Este problema retrata a situação apresentada a seguir.

Dois políticos competindo para eleição devem alocar seus recursos eleitorais, e de antemão um não conhece a alocação do outro. Essa situação, como já vimos anteriormente, ocorre na classe de jogos de guerra chamada "Coronel Blotto Games".

Nesse jogo assumiremos que cada político I e II tem recursos para distribuir individualmente entre n eleitores, indicados por 1, 2, ..., n. Uma estratégia pura para o jogador I é o número de eleitores escolhidos para dividir seus recursos, o mesmo ocorrendo para o jogador II.

Se o jogador I decide dividir recursos entre r eleitores, $r \in \{1,2,\dots,n\}$, então cada eleitor receberá zero recursos com probabilidade $\frac{n-r}{n}$, e receberá $\frac{1}{r}$ recursos com probabilidade $\frac{r}{n}$. Assim o eleitor i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ recebe x_i recursos onde $P(x_i = 0) = \frac{n-r}{n}$ e $P(x_i = \frac{1}{r}) = \frac{r}{n}$ sendo

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. O mesmo se dá para o jogador II, ou seja, se II dividir seus recursos entre s eleitores, $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ então o eleitor i receberá y_i recursos onde $P(y_i = 0) = \frac{n-s}{n}$ e $P(y_i = \frac{1}{s}) = \frac{s}{n}$. O número de votos obtidos pelo jogador I será o número de vezes que x_i é maior que y_i, isto é, se

$x_r = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y_s = (y_1, \dots, y_n)$ então

$W(x_r, y_s) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i > y_i)$ representa o número de votos que o jogador I ganha e

$L(x_r, y_s) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i < y_i)$ representa o número de votos que o jogador II ganha.

O jogador que receber mais votos ganha o jogo, portanto o payoff é o valor esperado da função:

$$K(x_r, y_s) \begin{cases} 1 & \text{se} \quad W(x_r, y_s) > L(x_r, y_s) \\ 0 & \text{se} \quad W(x_r, y_s) = L(x_r, y_s) \\ -1 & \text{se} \quad W(x_r, y_s) < L(x_r, y_s) \end{cases}.$$

onde

$$x_r = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ P(x_i = 0) = \frac{n-r}{n} \quad \text{e} \right.$$

$$\left. P(x_i = \frac{1}{r}) = \frac{r}{n},\ r \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\} \quad \text{e}$$

$$y_s = \left\{ (y_1, y_2, \ldots, y_n);\ y_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1,\ P(y_i = 0) = \frac{n-s}{n} \quad \text{e} \right.$$

$$\left. P(y_i = \frac{1}{s}) = \frac{s}{n},\ s \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$$

Ou seja,

$$k(r,s) = P\left[\sum_{i=1}^{n} 1(x_i > y_i) > \sum_{i=1}^{n} 1(x_i < y_i)\right] - P\left[\sum_{i=1}^{n} 1(x_i > y_i) < \sum_{i=1}^{n} 1(x_i < y_i)\right]$$

onde

$$R = S = \{1, 2, \ldots, n\}$$

A solução do nosso problema é deixada para o capítulo III.

II-2 - Apresentação de um problema similar ao proposto.

Neste item apresentaremos um problema desenvolvido recentemente em Berkeley [8] e sua respectiva solução. O motivo de sua inclusão no corpo desta dissertação é que este nos foi bastante útil no desenvolvimento do nosso trabalho, apesar de exibir uma função mais simples.

Dois políticos distribuem seus recursos igualmente entre um número de eleitores aleatoreamente, e o payoff de I para II é o número de votos que I ganha menos o número de votos que II ganha.

Considera-se as seguintes restrições no conjunto das estratégias puras para ambos jogadores: $X = (x_1, \ldots, x_n)$; $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ e $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots x_{i_k} = \frac{1}{k}$ onde $1 \leq k \leq n$. Isto é, os jogadores decidem distribuir seus recursos igualmente entre k eleitores.

O payoff é

$$k_n(x,y) = \frac{\left[W_n(x,y) - L_n(x,y)\right]}{n}$$, ou seja, é a proporção de votos que I obtém menos a proporção de votos que II obtém. Desde que $k_n(x,y) = k_n\ (\P_x, \P_y)$ pode-se restringir o jogo para estratégias da espécie: jogadores escolhem um número $1 \leq k \leq n$ ao acaso e divide seus recursos igualmente entre k elei-

tores, também seleciona ao acaso para este uma seqüência $x_1, \ldots, x_n$ de variáveis aleatórias permutáveis com

$\sum_{i=1}^{n} x_i=1$ e $P(x_1=0) = 1 - \frac{k}{n}$ e $P(x_1= \frac{1}{k}) = \frac{k}{n}$. Então, se o jogador I seleciona r e II s existe um payoff

$$k_n(r,s) = \frac{1}{n}\left[E \; W_n(x_r, y_s) - L_n(x_r, y_s)\right]$$ onde

$x_r = (x_1, \ldots, x_n)$, $\sum_{i=1}^{n} x_i=1$

$P(x_i=0) = 1 - P(x_i= \frac{1}{r}) = 1 - \frac{r}{n}$ para todo i e

$y_s = (y_1, \ldots, y_n)$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$

$P(y_i=0) = 1 - P(y_i = \frac{1}{s})$ para todo i e

x_r é independente de y_s. Desde que

$$W_n(x_r,y_s) = \sum_{i=1}^{n} 1\left[x_i > y_i\right]$$

e

$$L_n(x_r, y_s) = \sum_{i=1}^{n} 1\left[x_i < y_i\right]$$

tem-se então

$$k_n(r,s) = P(x_1>y_1) - P(x_1 < y_1)$$

$$k_n(r,s) = \begin{cases} P(x_1=\frac{1}{r},\ y_1=0) - P(y_1 = \frac{1}{s}) & \text{se } r > s \\ P(x_1=\frac{1}{r},\ y_1=0) - P(x_1=0,\ y_1 = \frac{1}{s}) & \text{se } r = s \\ P(x_1=\frac{1}{r}) - P(x_1=0,\ Y_1 = \frac{1}{s}) & \text{se } r < s \end{cases}$$

Portanto

$$k(r,\ s) = \begin{cases} \frac{r}{n} - \frac{s}{n} - \frac{r.s}{n^2} & \text{se } r < s \\ 0 & \text{se } r = s \\ \frac{r}{n} - \frac{s}{n} + \frac{r.s}{n^2} & \text{se } r > s \end{cases}$$

A fim de achar uma solução quase ótima para este jogo, faz-se n ir para infinito e $r=r_n$, $s=s_n$ sejam tais que $\frac{r_n}{n} \to x$, $\frac{s_n}{n} \to y$. Logo $k_n(r_n,\ s_n) \to k(x,y)$,

$$k(x,y) = \begin{cases} x - y - xy & \text{se } x > y \\ 0 & \text{se } x = y \\ x - y + xy & \text{se } x < y \end{cases}$$

Então, considera-se agora o jogo: jogador I escolhe um número $x \in [0,1]$ e o jogador II escolhe, independente de I, um número $y \in [0,1]$. O payoff é igual a $k(x,y)$. Este jogo coincide com o então chamado Silent Duel (ver Dresher [5] ou [9] em teoria dos jogos) e uma solução ótima para o jogador I é selecionar x segundo a densidade.

$$f_o(x) = \frac{1}{4x^3} \quad \text{para } \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

$$f_o(x) = 0 \quad \text{caso contrário.}$$

Seja $F_o(x) = \int_o^x f(t)dt.$

Isto resulta em

<u>Proposição</u>. Uma estratégia quase ótima para o jogador I é selecionar k segundo P_n, onde P_n é uma probabilidade em

{1, 2, ..., n} tal que

$$P_n(i) = F_o\left(\frac{i}{n}\right) - F_o\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad i=1,\dots,n.$$

<u>Demonstração</u>. Se o jogador I seleciona k segundo P_n e II escolhe algum $1 \leq k_n \leq n$, o payoff é

$$k_n(P_n,K_n) = \sum_{i=1}^{n} k_n(i, k_n)\ P_n(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{i}{n}, \frac{k_n}{n}\right)\left(F_o\left(\frac{i}{n}\right) - F_o\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)$$

$$k_n(P_n, k_n) = \int_o^1 R\left(x, \frac{k_n}{n}\right) d\ f_o(x)$$

onde $R(x,y) = k\left(\frac{i}{n}, y\right)$ se $\frac{i-1}{n} < x \leq \frac{i}{n}$. É fácil verificar que

$$\left| R(x,\frac{k_n}{n}) - k\ (x,\ \frac{k_n}{n}) \right| \leq \frac{2}{n} \text{ para todo } 1 \leq k_n \leq n$$

Como $\int k(x,y)\ d\ F_o(x) \geq 0$ para todo y, tem-se

$$k_n(P_n,\ k_n) = \int R(x,\frac{k_n}{n})\ d\ f_o(x) - \int K(x,\ \frac{k_n}{n})\ d\ F_o(x) +$$

$$+ \int k(x,\ \frac{k_n}{n})\ d\ F_o(x)$$

$$\geq \int R(x,\frac{k_n}{n}) - k(x,\ \frac{k_n}{n})\ d\ F_o(x)$$

$$\geq -\frac{2}{n} \text{ para todo } 1 \leq k_n \leq n$$

Portanto provou-se que

$$\inf_{1 \leq k_n \leq n} k_n\ (P_n,\ k_n) \geq -\frac{2}{n}$$

significando que P_n é assintoticamente ótimo para o jogador I.

II - 3 - Comentários

A título de situarmos melhor o problema que nós propomos a resolver seria oportuno tecer alguns comentários ressaltando a diferença fundamental existente entre as seções II - 1 e II - 2.

De acordo com o que foi apresentado na seção

II-2, o payoff do problema já resolvido

$$k_n(r,\ s) = P(x_i > y_i) - P(x_i < y_i),$$

assumiu uma forma simples durante o desenvolvimento teórico, o que possibilitou uma solução mais imediata.

Entretanto, isto não ocorre no nosso problema, exposto na seção II-1, cujo payoff

$$k_n(r,s) = P\left[\sum_{i=1}^{n} 1(x_i > y_i) > \sum_{i=1}^{n} 1(x_i < y_i)\right] - P\left[\sum_{i=1}^{n} 1(x_i > y_i) < \sum_{i=1}^{n} 1(x_i < y_i)\right] \quad \text{onde } R = S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

será descrito por uma função de distribuição de probabilidade hipergeométrica, conforme veremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO III

III-1 - Desenvolvimento do Problema.

O jogo implica em construir uma tripla $\{R, S, K\}$, onde R denota o espaço de estratégias do jogador I, S o espaço de estratégias do jogador II, e K uma função de valor real R e S.

O jogador I escolhe uma estratégia $r \in R$. Para $\{r, s\}$ o payoff do jogador I é $K(r,s)$ e o payoff para o jogador II é $-k(r,s)$.

Propriedade 1. Se o jogo acima tem valor então $v = 0$.

Como $k(r,s) = -k(s,r)$ temos

$$v = \min_s \max_r k(r,s) = \min_s \left(\max_r - k(s,r) \right) = \min_s k(- \min (s,r))$$

$$= -\max_s \min_r k(s,r) = \max_r \min_s k(r,s) = -v$$

$$v = -v \to 2v = 0 \to v = 0$$

Propriedade 2. Para qualquer permutação II de $1, 2, \ldots, n$ e qualquer estratégia pura $x_r = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e

$y_s = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, temos

$k(x_r, y_s) = k(\P x_r, \P y_s)$ para todo $\P$.

Como definir o payoff, $k(r,s)$, para este jogo?

Suponhamos que o jogador I escolha a seguinte estratégia: $x_r = (o,\ o,\ o, \ldots, \frac{1}{r} \ldots, \frac{1}{r},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r})$ e o jogador II

a estratégia: $y_s = (0,\ 0,\ 0, \ldots, \frac{1}{s} \ldots, \frac{1}{s},\ 0,\ 0,\ 0, \ldots, \frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s})$,

onde $r>s$, como no quadro abaixo:

$$\begin{array}{ll|l}
 & \overleftrightarrow{\qquad\qquad n-r \qquad\qquad} & \overleftrightarrow{\qquad\qquad r \qquad\qquad} \\
 & \mathrm{I}\ (0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ 0 \ldots, 0 & \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}, \frac{1}{r}) \\
\circledast & & \\
 & \mathrm{II}\ (0,0,0, \ldots,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots 0, & 0,0, \ldots \ldots 0,\ 0,\ \frac{1}{s}, \frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s}, \frac{1}{s}) \\
 & & \qquad\qquad\quad |\overleftrightarrow{\quad X \quad}|
\end{array}$$

Seja X o número de eleitores que recebem $\frac{1}{s}$ recursos dispostos segundo a ordem do desenho ⊛

Sabendo que o eleitor vota no político que lhe der mais recursos, então o político I ganha em $r-X$ posições e o político II em X posições.

Ou seja,

$k(r,s) = P_{(n,s,r)}\ (X<r-s) - P(X>r-s)$ onde $r>s$ e $\max\ (0,\ r+s-n) \leq X \leq s$.

Dados n, s, r, X tem uma distribuição hipergeométrica onde n - nº de eleitores

s - o tamano da amostra

r - o nº de "peças defeituosas" (votos perdidos) com

$$P(X = x) = \frac{\binom{n-s}{s-x} \cdot \binom{r}{x}}{\binom{n}{s}}$$

Temos condição então de escrever a matriz payoff. Para o caso $n = 10$ esta matriz é a seguinte:

POLÍTICO II

POLÍTICO I	r \ s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	0	$\frac{4}{5}$	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{13}{15}$	1	1	1	1	1	1
	3	-1	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{6}$	1	1	1	1
	4	-1	$-\frac{13}{15}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	1
	5	-1	-1	$-\frac{5}{12}$	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{41}{42}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{7}{9}$	$-\frac{1}{2}$	-1
	6	-1	-1	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{41}{42}$	0	-1	-1	-1	-1
	7	-1	-1	-1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{11}{12}$	1	0	-1	-1	-1
	8	-1	-1	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$	1	1	0	-1	-1
	9	-1	-1	-1	-1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	0	-1
	10	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	0

Podemos observar que não existe uma estratégia pura ótima. Não devemos considerar a estratégia $r = 1$, pois ela é uma estratégia dominada.

A fim de achar uma solução quase ótima para este jogo, façamos n ir para infinito; antes porém citaremos alguns teoremas.

Teorema 1 (Chebyshev)

Seja uma variável aleatória negativa, e $E(Y)<\infty$, então

$$P(Y>\varepsilon) \geqq \frac{E(Y)}{\varepsilon}$$

Teorema 2

Seja Y uma variável aleatória qualquer, e $E(Y^2) < \infty$, então $P(Y > \varepsilon) \leqq \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2}$

Demonstração:

Se $(Y > \varepsilon) \rightarrow (Y^2 > \varepsilon^2)$, então

$$(Y > \varepsilon) \subset (Y^2 > \varepsilon^2),$$

$$P(Y > \varepsilon) \leqq P(Y^2 > \varepsilon^2) \quad \circledast$$

Usando o teorema 1 para $Y^2 = Z$ temos

$$P(Z > \varepsilon^2) \leqq \frac{E(Z)}{\varepsilon^2} = \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2}$$

Substituindo em $\circledast$

$$P(Y > \varepsilon) \leqq \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2}$$

Lema 1. Seja X_n com $E(X_n^2) \to 0$. Então $\forall\ \varepsilon_n$ tal que

$\varepsilon_n \to \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$, temos:

$$\begin{cases} P(X_n > \varepsilon_n) \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{e} \\ P(X_n < -\varepsilon_n) \to 1 \end{cases}$$

Demonstração: Usando o teorema 2 temos:

$$P(X_n > \varepsilon_n) \leq \frac{E(X_n^2)}{\varepsilon_n} \quad \text{e} \quad \lim P(X_n > \varepsilon_n) \leq \lim \frac{E(X_n^2)}{\varepsilon_n} \to 0$$

$$P(X_n < -\varepsilon_n) = 1 - P(X_n > \varepsilon_n) \to 1$$

Corolário:

Se $E(X_n) = \mu_n \to$, $Var\ (X_n) \to 0$ e

$\varepsilon_n \to \varepsilon > 0$, então:

$$\begin{cases} P(X_n > \mu_n + \varepsilon_n) \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{e} \\ P(X_n < \mu_n - \varepsilon_n) \to 1 \end{cases}$$

Demonstração: Temos $Y_n = X_n - \mu_n$

$$E(Y_n) = E(X_n - \mu_n) = E(X_n) - \mu_n = \mu_n - \mu_n = 0$$

$$E(Y_n) = 0$$

$$Var(Y_n) = E(Y_n^2) - E^2(Y_n) = E(Y_n^2) = Var\ (X_n)$$

Aplicando o lema para Y_n

$$\begin{cases} P(Y_n > \varepsilon_n) \to 0 \\ P(Y_n < -\varepsilon_n) \to 1 \end{cases}$$

Como $Y_n = X_n - \mu_n \to$

$$\begin{cases} P(X_n - \mu_n > \varepsilon_n) \to 0 \\ P(X_n - \mu_n < -\varepsilon_n) \to 1 \end{cases}$$

Teorema 3

Mostremos que: $E\left(\dfrac{X_n}{n} = \dfrac{r_n s_n}{n^2}\right) \quad x\, y$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X_n}{n}\right) \to 0 \qquad , \text{ quando}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n}{n} \to x$ $\qquad r_n > s_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_n}{n} \to y$ $\qquad X_n \sim H_n(n,\ s_n,\ r_n)$

n = total de objetos

s_n = tamanho da amostra

r_n = nº de defeituosa

Demonstração:

$$\text{Seja } Y_n = \frac{X_n}{n}$$

$$E(X_n) = \frac{s_n r_n}{n}$$

$$\text{Var } (X_n) = \frac{r_n s_n \ (n - s_n) \ (n - r_n)}{n^2 \ (n - 1)}$$

Tomando $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$ $\qquad E(Y_n) = \mu_n$

$$\rightarrow E(Y_n) = \frac{1}{n} \ E(X_n) = \frac{r_n \cdot s_n}{n^2}$$

$$\text{e } \text{Var}(Y_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{n^2} \text{ Var } (X_n) = \frac{r_n s_n (n - s_n)(n - r_n)}{n^2 \ n^2 \ (n - 1)}$$

$$E(Y_n) = \frac{r_n s_n}{n^2} = \mu_n \rightarrow x y \text{ , pois}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} \cdot \frac{s_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = x.y \text{ (por hipótese)}$$

$$\text{Var}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \left[\frac{r_n s_n}{n^2} \cdot \frac{(n-r_n)}{(n-1)} \cdot \frac{(n - s_n)}{n} \right]$$

Como: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r_n . s_n}{n^2} = x.y$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n - r_n}{n-1}\right) = (1 - x)$ e

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{s_n}{n}) = (1 - y)$$

Então

$$\text{Var}(Y_n) \rightarrow 0$$

Agora suponhamos que: $xy - x + y < 0$

$\rightarrow xy < x - y$

então $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $xy + \varepsilon = x - y$

$\rightarrow \varepsilon = x - y - xy$

Seja então $\varepsilon_n = \frac{r_n}{n} - \frac{s_n}{n} - \frac{r_n s_n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{r_n s_n}{n^2} = x - y - xy$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = xy + \varepsilon - xy = \varepsilon > 0$$

Podemos então tomar

$$\mu_n - \varepsilon_n = \frac{r_n s_n}{n^2} - \left(\frac{r_n}{n} - \frac{s_n}{n} - \frac{r_n s_n}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n - \varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n - \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \mu - \varepsilon$$

$$\mu_n + \varepsilon_n = \frac{r_n s_n}{n^2} + \left(\frac{r_n}{n} - \frac{s_n}{n} - \frac{r_n s_n}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n + \varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n + \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \mu + \varepsilon$$

Pelo lema, temos

$$P(Y_n > \mu_n + \varepsilon_n) \rightarrow 0$$

$$Y_n = \frac{X_n}{n}$$

$$P(Y_n < \mu_n - \varepsilon_n) \rightarrow 0$$

Portanto temos:

$$K_n(r_s s_n) = P\left(\frac{X_n}{n} < \frac{r_n}{n} - \frac{s_n}{n}\right) - P\left(\frac{X_n}{n} > \frac{r_n}{n} - \frac{s_n}{n}\right), \quad \text{se } r_n \geqq s_n \text{ e}$$

$$\lim K_n\ (r_n,\ s_n) = +1 \qquad \text{se} \quad xy - x + y < 0 \quad \text{e} \quad x > y$$

$$\lim K_n\ (r_n,\ s_n) = -1 \qquad \text{se} \quad xy - x + y > 0 \quad \text{e} \quad x > y$$

Pela propriedade 1

$K_n(r_n,\ s_n) = -K\ (s_n,\ r_n)$ temos

$$\lim K_n(r_n,\ s_n) = +1 \qquad \text{se} \quad xy - y + x < 0 \quad \text{e} \quad y > x$$

$$\lim K_n(r_n,\ s_n) = -1 \qquad \text{se} \quad xy - y + x > 0 \quad \text{e} \quad y < x$$

Este fato nos permite observar o seguinte jogo (K, X, Y) no quadrado unitário, ou seja,

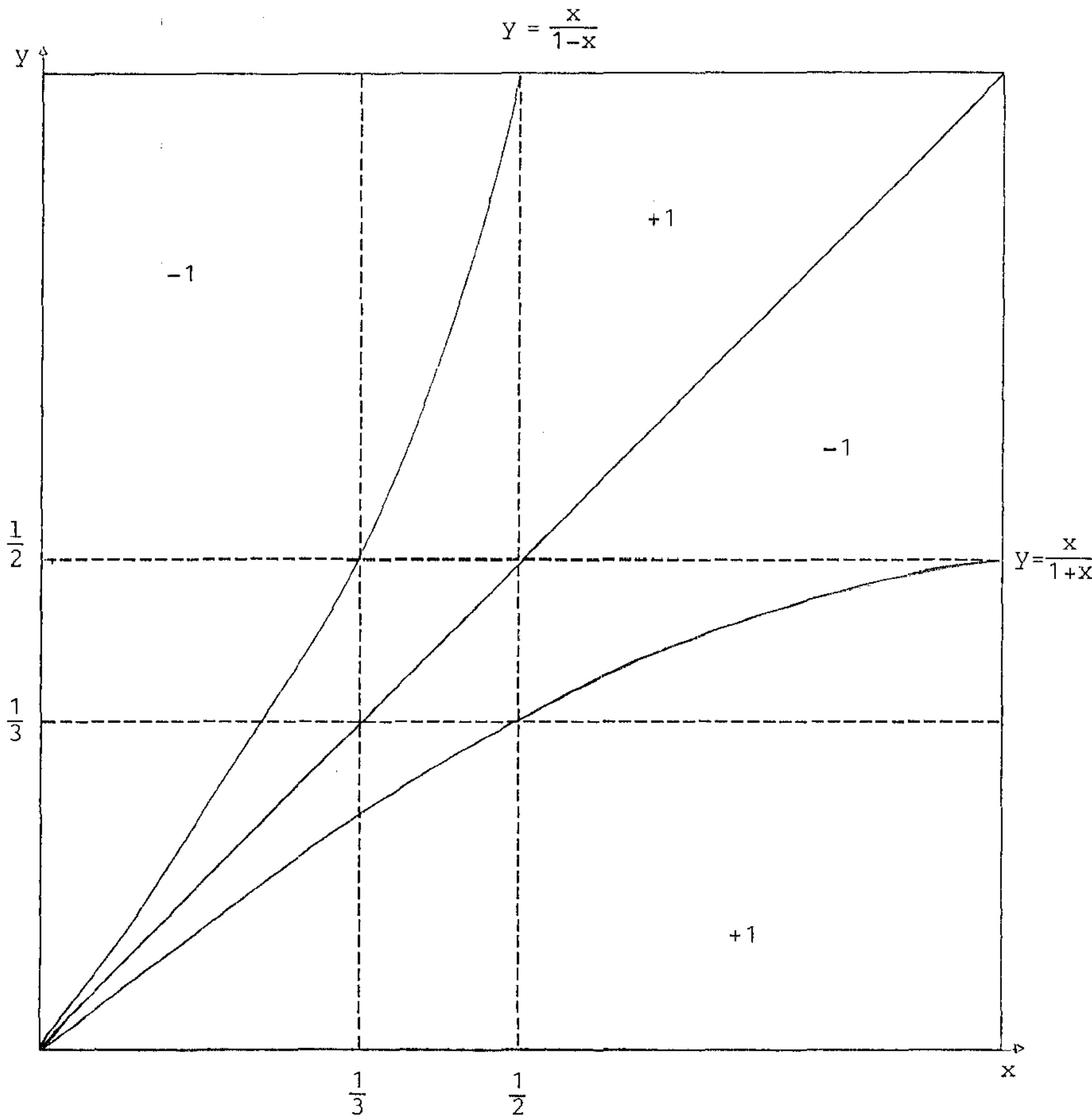
$X = Y = [0,1]$ e

$$K(x,y) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad xy - x + y < 0 \\ 0 & \text{se} \quad xy - x + y = 0 \\ -1 & \text{se} \quad xy - x + y > 0 \end{cases} \qquad \text{se } x > y$$

e $K(x,y) = -K(y,n)$ se $x < y$

e $K(x,y) = 0$ se $x = y$

Para maior compreensão representemos graficamente a função payoff.



$$\max_x K(x,y) = 1 \quad y$$

$$\min_y K(x,y) = -1$$

Portanto, esse jogo não possui estratégia pura ótima.

Vamos considerar o seguinte jogo:

$\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{K}$ onde $\tilde{X} = \tilde{Y}$ é o conjunto de todas as probabilidades sobre o intervalo $[0,1]$.

Seja $\mu \in \tilde{X}$ e $\lambda \in \tilde{Y}$ o payoff fica

$$\tilde{K}(\mu,\lambda) = \iint K(x,y)\ d_\mu(x) d_\lambda(y)$$

<u>Propriedade</u>

Se $K(\mu_o,y) \geqq 0\ \forall\ y$ então μ_o é ótimo onde

$$K(\mu_o,y) = \int K(x,y)\ d\mu_o(x)$$

<u>Demonstração</u>

Seja $\lambda \in \tilde{Y}$, como $K(\mu,\lambda) = -K(\lambda,\mu)$ então basta mostrar que $\min\limits_{\lambda \in \tilde{Y}} \tilde{K}\ (\mu_o) = 0$

$$\tilde{K}(\mu_o \lambda) = \iint K(x,y) d_{\mu_o}(x)\ d_\lambda(y)$$

$$\tilde{K}(\mu_o \lambda) = \int K(\mu_o,y)\ d_\lambda(y) \geqq 0\ \forall\ \lambda,$$

portanto

$$\min \tilde{K}(\mu_o,\lambda) \geqq 0\ \forall\ \lambda$$

Proposição:

Se X tem distribuição de probabilidade μ, onde

$$P(X = x) = \mu(\{x\}) = P_x(x) = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$P(X = \frac{x}{x+1}) = \mu\left(\left\{\frac{x}{x+1}\right\}\right) = P_x(x) = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$x \in (\frac{1}{2}, 1)$ então P_x é ótimo.

Prova:

Devemos mostrar que

$K(\mu,y) = \frac{1}{2} K(x,y) + \frac{1}{2} K(\frac{x}{x+1}, y) \geq 0 \quad \forall \gamma\ y \quad [0,1]$ o que é trivial, bastando observar o diagrama da página 35.

Para se obter uma solução ótima, que tenha densidade, basta tomarmos x no intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$ de acordo com uma densidade f qualquer, tal que

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = 1$$ e seguidamente assumimos P_x, ou

seja: escolhemos y da seguinte forma:

$y = x$ com probabilidade $\frac{1}{2}$

$y = \frac{x}{x+1}$ com probabilidade $\frac{1}{2}$

portanto $P(Y \leq y) = \frac{1}{2} P(x \leq y) + \frac{1}{2} P(\frac{x}{x+1} \leq y)$ e x é escolhido entre $(\frac{1}{2}, 1)$ de acordo com f, isto é

$$g(y) = \frac{1}{2}\, f(y) + \frac{1}{2}\, f\left(\frac{y}{1-y}\right) \cdot \frac{1}{(1-y)^2}$$

Portanto, se escolhermos pontos no intervalo (0, 1) de acordo com a densidade g teremos uma solução ótima.

Isto nos sugere, para N grande, tomarmos estratégias do tipo

$$P_n(r) = \int_{\frac{r-1}{n}}^{\frac{r}{n}} g(t)\,dt$$

<u>Proposição</u>: A seqüência de estratégias P_n é assintaticamente ótima no seguinte sentido $\lim_{n\to\infty} K_n(P_n, s_n) = 0$ onde

$$K_n(P_n\ s_n) = \min K_n\ (P_n, s_n) \leq 0$$

<u>Demonstração</u>:

$$\text{Se } K_n(P_n, s_n) = \sum_{r=1}^{n} K(r, s_n)\ P_n(r)$$

$$K_n(P_n, s_n) = \sum_{r=1}^{n} K(r, s_n) \int_{\frac{r-1}{n}}^{\frac{r}{n}} g(x)\,dx$$

$$K_n(P_n, s_n) = \sum_{r=1}^{n} \int_{\frac{r-1}{n}}^{\frac{r}{n}} K(r, s_n)\ g(x)\,dx$$

Seja $R_n(x, s_n) = K(r,s_n)$ e $\frac{r-1}{n} \leq x \leq \frac{r}{n}$, então

$$K(P_n, s_n) = \int_0^1 R_n(x, s_n)\, g(x)\, dx$$

como $\frac{s_n}{n} \varepsilon [0,1]$, $\frac{s_n}{n}$ é limitada.

Seja $\frac{s_n'}{n'}$ uma subseqüência que converge para y,

então

$R_n(x, s_n)$ converge para $K(x,y)$ se $xy - x + y \neq 0$

Como $R_n(x,s_n)$ é limitado e $P\left(x \neq \frac{y}{1-y}\right) = 1$

então

$$\lim_{n\to\infty} K_n\ (P_n, s_n') = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} R_n(x, s_n')\ g(x)\, dx$$

$$\lim_{n\to\infty} K_n\ (P_n, s_n') = \int_o^1 K(x,y)\ g(x)\, dx \quad 0$$

c.q.d.

III - 2 - Abordagem numérica.

A primeira idéia do trabalho apresentado, era buscar um "modelo matemático" ou uma "equação geral" para o problema através de dados empíricos computacionais.

Elaboramos um programa que gera a matriz payoff, e como já vimos anteriormente, não existe uma estratégia pura ótima.

No segundo programa procuramos uma possível estratégia mista para um dado N e usando a Programação Linear resolvemos o seguinte problema:

$$\text{Minimizar } W = -P_1 - P_2 \dots - P_n$$

sujeito as restrições
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} (-a_i j) P_i \leqq 0 & j = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^{n} P_i = 1 & i = 1, \dots, n \\ P_i \geqq 0 \end{cases}$$

Os resultados obtidos, aparentemente sem uma lógica seqüencial, não ofereceram condições para atingir o nosso objetivo e desta forma deixamos para uma outra oportunidade o estudo computacional.

A seguir apresentamos os programas elaborados e alguns dados obtidos.

RESULTADOS NUMÉRICOS

P_5 = (0, 0.454545, 0.454545, 0, 0.090909)

P_{10} = (0, 0, 0, 0.1861703, 0.4468085, 0, 0.1436170, 0, 0.04255321, 0.180851)

P_{11} = (0, 0, 0, 0, 0.4192377, 0.1905626, 0, 0, 0.1615245, 0.06715064, 0.1615245)

P_{12} = (0, 0, 0, 0, 0.4425262, 0.1017302, 0.06982377, 0, 0.1206119, 0.1044661, 0.06408229, 0)

P_{13} = (0, 0, 0, 0, 0, 0.4615385, 0.08875737, 0, 0.009144719, 0.1151156, 0.07692311, 0.1715977, 0.07692305)

P_{14} = (0, 0, 0, 0, 0, 0.499418, 0, 0.08731074, 0.02910362, 0.1525031, 0.07799761, 0.1525031, 0.001164016, 0)

P_{15} = (0, 0, 0, 0, 0, 0.4769849, 0, 0.1727824, 0, 0.1741157, 0.04202834, 0.1340893, 0, 0, 0)

P_{16} = (0, 0, 0, 0, 0, 0.1108672, 0, 0,1362663, 0, 0.07876946, 0.03985581, 0, 0.05326397, 0.09996741, 0.026412, 0.04172116)

P_{17} = (0, 0, 0, 0, 0, 0.08532734, 0.3495312, 0.06275997, 0.1250494, 0, 0.1225174, 0.04362307, 0.1240367, 0.01594024, 0.07121492, 0, 0)

P_{18} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2555417, 0, 0.3781030, 0, 0, 0.04835631, 0.05618742, 0.02271723, 0.02819456, 0.02184844, 0.0782377, 0.1108137)

P_{19} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1423017, 0.175079, 0.1469273, 0.16167, 0, 0.01106126, 0.09711119, 0.01289982, 0.09261861, 0.005670885, 0.08327615, 0, 0)

P_{20} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.3508177, 0.06503941, 0.1185263, 0.0179715, 0.09977201, 0.004753786, 0.1482098, 0, 0, 0.02824077, 0.1049786, 0.01435957, 0.04733051)

P_{21} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.1631937, 0.09195671, 0.04432928, 0.1008418, 0, 0.02956231, 0.05759291, 0.0314468, 0.053003, 0.02884434, 0.05989971, 0.04432935, 0.07231516, 0.04432928)

P_{22} = (0,0,0,0,0,0,0,0.9002676,0.1656769,0.07295429,0.2713706,0,0,0.03445449, 0.05432835, 0.03550177, 0.04816271, 0.02503594, 0.03925733, 0.02754542, 0.06437197, 0.07131335)

P_{23} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.180798, 0.01255479, 0.266786, 0.1129078, 0, 0, 0.05387206, 0.02181349, 0.0474078, 0.01129365, 0.0452945, 0.02835688, 0.07972234, 0.05947061, 0.07972267)

P_{24} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.149893, 0.05736326, 0.1694358, 0.2023097, 0, 0, 0.05949945, 0.004277078, 0.06731828, 0, 0.06836709, 0.004250587, 0.07182596, 0, 0.1454587, 0)

P_{26} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2104785, 0.117036, 0.2724106, 0.01053213, 0.5358397, 0.002575517, 0.07212414, 0.01291968, 0.0714966, 0.004943372, 0.06562592, 0.01090795, 0.08491758, 0.03121828, 0.08456335, 0, 0)

P_{30} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.08485383, 0.09396499, 0.08706138, 0,1309272, 0.1491246, 0, 0.002511202, 0.04817195, 0.01058497, 0.052273, 0.01140913,

0.05145362, 0.01059609, 0.05171417, 0.01238656, 0.05494502, 0.01607732,
0.05738289, 0.01730174, 0.05726058)

```
      SUBROUTINE FATX(X,N,R,S,ELEN2)
      INTEGER X,N,R,S
      ELEN2=0
      N1=N-R-S+X
      DO 40 I=1,N1
      Y =IFLOAT(I)
40    ELEN2=ELEN2+ALOG(Y)
      N1=S-X
      DO 45 I=1,N1
      Y = FLOAT(I)
45    ELEN2=ELEN2+ALOG(Y)
      N1=R-X
      DO 50 I=1,N1
      Y = FLOAT(I)
50    ELEN2=ELEN2+ALOG(Y)
      DO 55 I=1,X
      Y = FLOAT(I)
55    ELEN2 = ELEN2 + ALOG(Y)
      DO 60 I=1,N
      Y = FLOAT(I)
60    ELEN2=ELEN2+ALOG(Y)
      RETURN
      END
      REAL MIN,A(60,60),RHS(60),IN(60,60),ANS(60)
      INTEGER INEQ(60),CO(60),OBV(60),D(60),B(60)
      INTEGER N,F,R,S,X
      TYPE 777
777   FORMAT(1X,'N ? ',$)
      ACCEPT 666,N
666   FORMAT(G)
      DO 1000 S=2,N
      DO 1000 R=S,N
      A(R-1,S-1)=0.0
      IF(R.EQ.S)GO TO 1000
      J=R-S
      K=MAX0(0,S+R-N)
      I1=MAX0(0,K)
      F=MIN0(R-S-1,S)
      SUMA=0.0
      SOMA1=0.0
      N1=N-R
      ELEN1=0
      DO 20 I=1,N1
      Y=FLOAT(I)
20    ELEN1=ELEN1+ALOG(Y)
      DO 25 I=1,R
      Y = FLOAT(I)
25    ELEN1=ELEN1+ALOG(Y)
      N1=(N-S)
      DO 30 I=1,N1
      Y = FLOAT(I)
30    ELEN1=ELEN1+ALOG(Y)
      DO 35 I=1,S
      Y = FLOAT(I)
35    ELEN1=ELEN1+ALOG(Y)
      IF(I1.GT.F)GO TO 888
      DO 10 X=I1,F,1
      CALL FATX(X,N,R,S,ELEN2)
      AAA=ELEN1-ELEN2
      AAA=EXP(AAA)
```

```
10        SUMA1=SUMA1+AAA
888       LL=R-S+1
          LL=MAX0(LL,K)
          IF(LL.GT.S)GO TO 8888
          DO 21 X=LL,S,1
          CALL FATX(X,N,R,S,ELEN2)
          AAA=ELEN1-ELEN2
          AAA=EXP(AAA)
21        SUMA=SUMA+AAA
8888      A(R-1,S-1) = SUMA1 - SUMA
1000      CONTINUE
          M=N
          N=N-1
          DO 1001 S=2,N
          DO 1001 R=1,(S-1)
1001      A(R,S)=(A(S,R))
          DO 1111 S=2,N
          DO 1111 R=1,(S-1)
1111      A(S,R)=(-A(R,S))
          DO 3001 J=1,N
3001      A(M,J)=1.0
          M1=M+1
          M2=M+2
          MM=2*M
          MN=M+N
          MIN=0.00001
          MAXIT=3*M
          MMM=M1
          II=M2
          DO 2000 J=1,N
2000      A(M1,J)=1.0
          TYPE 2200,M
2200      FORMAT(1X,'M =',G)
          DO 3000 J=1,(M-1)
          RHS(J)=0.0
3000      INEQ(J)=1
          INEQ(M)=0
          RHS(M)=1.0
          WRITE(20,123)M,N
123       FORMAT(1X,2G)
          DO 5000 R=1,M1
5000      WRITE(20,5001)(A(R,S),S=1,N)
5001      FORMAT(2X,50(1X,G))
          WRITE(20,567)(INEQ(I),I=1,M)
567       FORMAT(1X,50G)
          WRITE(20,567)(RHS(I),I=1,M)
          CALL EXIT
          END
```

```
      REAL MIN,A(50,50),RHS(50) ,IN(50,50),ANS(50)
      INTEGER INEQ(50), CO(50), NBV(50), D(50), B(50)
      READ(20,1) M , N
      TYPE 1, M , N
1     FORMAT (2G)
      M1=M+1
      M2=M+2
      MM=2*M
      MN=M+N
      MIN=0.00001
      MAXIT=2*M+100
      MMM=M1
      II=M2
      DO 2 I=1,M
2     READ(20,3) (A(I,J),J=1,N)
3     FORMAT (50G)
      READ(20,3)(A(M1,J),J=1,N)
      READ(20,3)(INEQ(I),I=1,M)
      READ(20,3)(RHS(I),I=1,M)
      CALL H01ADF (A,MMM,M,N,INEQ,RHS,MIN,MAXIT,MN,MM,M1,M2,CO,
     1IN,II,NBV,D,B,ANS,OPT,NUMIT,IPAR,IFAIL)
      IF (IFAIL.EQ.0) GO TO 20
      WRITE(22,10) IFAIL
10    FORMAT (1X,'ERRO-IFAIL=',I3)
      STOP
20    K= IPAR+1
      GO TO (30,40,50),K
30    WRITE (22,31) NUMIT
31    FORMAT (1X,'NUMERO DE ITERACOES:',I3)
      WRITE (22,32)(B(I),ANS(I),I=1,M)
32    FORMAT(/,2X,'X',I3,'  =  ',G)
      WRITE(22,33)OPT
33    FORMAT(/,10X,'VALOR DA FUNCAO OBJETIVO = ',G)
      STOP
40    WRITE (22,41)
41    FORMAT(1X,'O PROBLEMA NAO TEM SOLUCAO FACTIVEL')
      STOP
50    WRITE (22,51)
51    FORMAT (1X,'O PROBLEMA NAO TEM SOLUCAO LIMITADA')
      STOP
      END
```

CAPÍTULO IV

Neste trabalho obtivemos uma solução ótima para o caso contínuo e assintoticamente ótima para o caso discreto.

No caso contínuo garantimos que se tomarmos $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ de acordo com uma densidade f qualquer, onde $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)dt = 1$, e X tenha a seguinte distribuição de probabilidade $\mu(\{x\}) = \frac{1}{2}$ e $\mu\left(\left\{\frac{x}{x+1}\right\}\right) = \frac{1}{2}$ então $\forall y \in [0,1]$

$$g(y) = \frac{1}{2}\, f(y) + \frac{1}{2}\, f\left(\frac{y}{1-y}\right) \frac{1}{(1-y)^2}$$

é uma solução ótima, ou seja,

$$K(\mu,y) \geq 0$$

Para o caso discreto mostramos que para N grande podemos tomar estratégias do tipo

$$P_n(r) = \int_{\frac{r-1}{n}}^{\frac{r}{n}} g(t)dt,$$ e provamos que

$$\lim_{n\to\infty} K_n(P_n, s_n) = 0$$

Uma maneira de implementar P_n na prática seria, por exemplo, escolher um número entre $\frac{n}{2}$ e n uniformemente. Seja r esse número. Em seguida jogue uma moeda, se der cara fico com r e se for coroa tomo $\frac{r}{r+n}.n$.

REFERÊNCIAS

[1] Borel, E., 1938, Traite du Calcul des Probabilites et des ses Applications, Aplications des Jeus des Hasard, Vol. IV, Fascicule 2, (Gauthier-Villares, Paris, France)

[2] Breiman, L., (1968); Probability. Addison - Wesley, Menlo Park.

[3] Burger, E., (1963); Introduction to the Theory of Games, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[4] Davis, Morton D., Games Theory, 1970, New York - London

[5] Dresher, M., (1961), Games of Strategy, Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[6] Enciclopédia Abril, vol. 7, pág. 151

[7] Gale, David, 1960, The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, New York

[8] Gorini, F.R., (1978), Win-Lose Blotto Games, Department of Statistics, University of California, Berkeley

[9] Karlin, Samuel, (1962), Mathematical Methods Theory in Games, Programming, and Economics, Addison-Wesley Publishing Company.

[10] Luenberg, David G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, California - London.

[11] Mc Donald, John, and John W. Tuckey, "A Theory of Strategy", Fortune (1949), pág. 102, June