



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

DANIEL DIAS DE CARVALHO SANTOS

**Um estudo sobre identificação de anomalias em
bases de regras fuzzy aplicado a estimação do
risco de endometriose**

Campinas

2018

Daniel Dias de Carvalho Santos

Um estudo sobre identificação de anomalias em bases de regras fuzzy aplicado a estimação do risco de endometriose

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Estevão Esmi Laureano

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Daniel Dias de Carvalho Santos e orientada pelo Prof. Dr. Estevão Esmi Laureano.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES; CNPq, 170715/2017-5

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Santos, Daniel Dias de Carvalho, 1990-
Sa59e Um estudo sobre identificação de anomalias em bases de regras fuzzy aplicado a estimação do risco de endometriose / Daniel Dias de Carvalho Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Estevão Esmi Laureano.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas fuzzy. 2. Endometriose. 3. Detecção de anomalias. I. Esmi, Estevão, 1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A study on identification of anomalies in fuzzy rule bases applied to the problem of estimation of risk of endometriosis

Palavras-chave em inglês:

Fuzzy systems

Endometriosis

Anomalies detection

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Estevão Esmi Laureano [Orientador]

Graciele Paraguaia Silveira

Francielle Santo Pedro Simões

Data de defesa: 27-04-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

**Dissertação de Mestrado defendida em 27 de abril de 2018 e aprovada pela
banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ESTEVÃO ESMI LAUREANO

Prof(a). Dr(a). GRACIELE PARAGUAIA SILVEIRA

Prof(a). Dr(a). FRANCIELLE SANTO PEDRO SIMÕES

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

A Deus e a minha família, de sangue ou não.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, pela oportunidade de evoluir sempre.

Ao professor Estevão Esmi Laureano, pela orientação, auxílio, amizade e por ter proporcionado a oportunidade de ajudar pessoas através da minha pesquisa.

Ao médico Dr. Kleber Cursino de Andrade, por ter apresentado a necessidade de se desenvolver um estimador de risco de endometriose e pela disponibilidade em nos ajudar a tratar o problema de endometriose e levar nosso trabalho até o fim.

Aos meus pais, Maria José de Paula Neto e Joaquim dos Santos Neto, que nunca mediram esforços quando precisei de ajuda, que estiveram ao meu lado em todos os momentos, meu porto seguro, minha definição de amor familiar.

As minhas irmãs, Elizabeth de Jesus Neto e Marcela Maria Santos de Carvalho, bem como minhas sobrinhas, Ana Laura e Anelize, pelo amor, carinho, suporte e companheirismo.

Agradecimentos especiais a Nilmara Pinto e Vinicius Wasques pela contribuição nas imagens e programação, além da amizade, claro!

A Rafael Santos, Beatriz Laiate, Daniela França, Flávio Raimundo, Pammela Ramos, Renato Moura, Caio Dadauto, Pedro Matos, Fidelis de Castro, David Caro, Livia Pierini, Danuza Equer, Laryssa Abdala, Fernanda Rocha, Silvia Souza, Daniel Ibanez, Jean François, Majid Ali, Maria Luisa Liesack, Felipe Vieira (*in memoriam*), Murilo Contini, Ronieri Oliveira e Ângelo Zétula pelo apoio nos estudos, pela amizade fraterna.

A minha família em Barão: Amanda Oliveira, Brunna Linhares, Caio Paraguassu, Igor Miranda, Luana Oliveira, Jordy Lasso, Hernán Giovanni Agamez e Steven Potts.

A Luana Meinerz, Evanize Castro, Antônio Melo, Rejiane Calixto, Taciana Neris e Eliciany Sanches pela amizade e por terem seguido seus sonhos, mesmo com grandes barreiras, e me inspirarem a seguir os meus.

A CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

Por fim, a Michel “Rashid” Dias, pela inspiração.

“Foco na missão.”
(Rashid)

Resumo

O trabalho propõe um sistema baseado em regras fuzzy para o problema de estimação de risco de endometriose. A endometriose é caracterizada pela presença de tecido endometrial fora da cavidade uterina. Isso acarreta em um processo inflamatório crônico, de forma que a paciente portadora da enfermidade sofre de diversos sintomas, dentre eles dores que chegam a ser incapacitantes e infertilidade. Destaca-se o tempo de diagnóstico da enfermidade que é em média maior que cinco anos. Esse atraso justifica o desenvolvimento de um modelo matemático que auxilie o especialista a encaminhar as pacientes para o procedimento padrão-ouro de diagnóstico: a laparoscopia com verificação histológica. Um sistema de base de regras fuzzy utilizando o método de Mamdani é proposto com a colaboração do Dr. Kleber Cursino de Andrade, um especialista que atua no CAISM (Centro de Atenção Integral à Saúde da Mulher), Campinas, Brazil. Após testes preliminares, é constatada a necessidade de se identificarem potenciais inconsistências na base de regras. São apresentados dois métodos para detecção de anomalias em uma base de regras fuzzy: um estático, baseado em uma medida de similaridade, e outro dinâmico, baseado em um método denominado “refletindo sobre as entradas”, adequado a regras implicativas. É aplicado o método baseado em similaridade, por se tratar de uma base de regras conjuntiva. Dessa forma, são apontadas as regras potencialmente contraditórias do sistema.

Palavras-chave: Sistemas de bases de regras fuzzy. Detecção de anomalias. Endometriose. Inconsistência de regras fuzzy.

Abstract

This work purposes a fuzzy rule-based system for the problem of estimation of endometriosis risk. Endometriosis is defined as the presence of endometrial tissue outside the uterine cavity. This implies in a chronic inflammatory reaction, so that the disease carrier suffers from several symptoms, among them potentially disabling pains and infertility. The diagnosis time of the disease is highlighted and it is on average greater than five years. This delay justifies the development of a mathematical model able to help the expert to refer the patients to the gold standard for the diagnosis: laparoscopy with histological verification. A fuzzy rule-based system using the Mamdani's method is purposed with the contribution of Dr. Kleber Cursino de Andrade, a specialist who works at CAISM (Integral Attention to Women's Health Center, in portuguese), Campinas, Brazil. After preliminaries tests, it is verified the necessity of identify potencial inconsistencies on the rule base. Two methods for anomalies detection in a fuzzy rule base are presented: one of them classified as static, based on a similarity measure, and the other one classified as dinamic, based on a method called "reflecting on the inputs" that is proper for implicative rules. The method based in similarity is applied, due to the rule base is conjunctive. Therefore, potentially contradictory rules of the system are detected.

Keywords: Fuzzy rule-based systems. Anomalies detection. Endometriosis. Inconsistency of fuzzy rules.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Conjunto fuzzy triangular	19
Figura 2 – Conjunto fuzzy trapezoidal	20
Figura 3 – a) Suporte e b) núcleo de um conjunto fuzzy	21
Figura 4 – α -níveis de um conjunto fuzzy para a) $\alpha = 0.5$ e b) $\alpha = 0.8$	22
Figura 5 – a) União e b) interseção entre os conjuntos fuzzy $A = (2, 3, 5)$ e $B = (3, 4, 6, 8)$	24
Figura 6 – Conjunto fuzzy $A = (0, 0, 2, 5)$ e seu complementar $A^C = (2, 5, 10, 10)$	25
Figura 7 – Exemplo de projeção de uma relação fuzzy R definida em $U \times V$ sobre o espaço U	32
Figura 8 – Temperatura do ambiente	34
Figura 9 – Diagrama de representação do SBRF	35
Figura 10 – Método de Mamdani	41
Figura 11 – Centro de gravidade, caso contínuo	42
Figura 12 – Centro de máximos.	42
Figura 13 – Contradição em uma base de regras.	44
Figura 14 – Regras que podem gerar contradição.	45
Figura 15 – Antecedente H	48
Figura 16 – Consequente DJ	48
Figura 17 – Representação gráfica de uma base de regras coerente.	51
Figura 18 – Antecedente H	52
Figura 19 – Consequente D	53
Figura 20 – Antecedente H	54
Figura 21 – Consequente D	54
Figura 22 – Antecedente H	55
Figura 23 – Consequente D	55
Figura 24 – Sistema reprodutor feminino com endometriose	60
Figura 25 – Escala Visual Analógica – EVA	63
Figura 26 – Visão geral do SBRF estimador de risco de endometriose	64
Figura 27 – Descritores dos antecedentes DM, DP, DC e C	64
Figura 28 – Descritores do consequente RC	65
Figura 29 – Saída do sistema para entrada $(0, 0, 0, 0)$	66
Figura 30 – Saída do sistema para entrada $(10, 10, 10, 10)$	67
Figura 31 – Saída do sistema para entrada $(1, 3, 2, 1)$	68
Figura 32 – Saída do sistema para entrada $(9, 7, 6, 6)$	68
Figura 33 – Saída do sistema para entrada $(1, 4, 8, 4)$	69

Figura 34 – Comportamento da variável x_1 (dismenorreia) com as demais entradas fixas em 5	70
Figura 35 – Comportamento da variável x_2 (dispareunia) com as demais entradas fixas em 5	70
Figura 36 – Comportamento da variável x_3 (dores nas costas e/ou nas pernas) com as demais entradas fixas em 5	71
Figura 37 – Comportamento da variável x_4 (cansaço) com as demais entradas fixas em 5	71
Figura 38 – Ativação das regras R_{41} e R_{42} considerando a entrada $x = (5; 5; 5; 7, 5)$. Nota-se que, para essa entrada, somente essas duas regras são ativadas.	73
Figura 39 – Saída do sistema considerando a entrada $x = (5; 5; 5; 7, 5)$. Nota-se que os conjuntos fuzzy na saída são disjuntos.	73

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela verdade do conectivo Booleano “e”	27
Tabela 2 – Tabela verdade do conectivo Booleano “ou”	28
Tabela 3 – Tabela verdade da negação clássica	29
Tabela 4 – Tabela verdade da implicação clássica	30
Tabela 5 – Representação tabular e matricial	31
Tabela 6 – Base de regras fuzzy	37
Tabela 7 – Regras apontadas como potencialmente contraditórias pelo método baseado em uma medida de similaridade proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994).	72
Tabela 8 – Base de regras fuzzy usada no estimador de risco de endometriose	80

Sumário

	Introdução	15
1	CONCEITOS BÁSICOS DE CONJUNTOS FUZZY	17
1.1	Definição de conjunto fuzzy	18
1.2	Suporte, núcleo e α -nível	20
1.3	Operações entre conjuntos fuzzy	23
1.4	Conectivos lógicos fuzzy	26
1.5	Relações fuzzy	31
1.6	Variáveis linguísticas e proposições fuzzy	33
1.7	Sistemas baseados em regras fuzzy	34
1.7.1	Módulo de fuzzificação	35
1.7.2	Módulo de inferência	35
1.7.2.1	Base de regras fuzzy	35
1.7.2.2	Método de inferência fuzzy	39
1.7.2.3	Método de Mamdani	40
1.7.3	Módulo de defuzzificação	41
2	VERIFICAÇÃO DE INTEGRIDADE DE UMA BASE DE REGRAS FUZZY	43
2.1	Método baseado em uma medida de similaridade	44
2.1.1	Exemplo	47
2.2	Resultados para uma base de regras implicativa através do método de “refletindo sobre as entradas”	50
2.2.1	Coerência	50
2.2.2	Redundância	55
2.3	Considerações finais sobre os métodos	58
3	APLICAÇÃO: SBRF ESTIMADOR DE RISCO DE ENDOMETRIOSE	59
3.1	Endometriose	59
3.1.1	Sinais e sintomas	61
3.1.2	Diagnóstico e tratamento	62
3.2	Estimador de risco de endometriose	63
3.3	Simulações com o método de Mamdani	65
3.3.1	Estimando a relevância de cada sintoma	69
3.4	Identificando regras potencialmente contraditórias	71

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	75
REFERÊNCIAS	76
APÊNDICES	79
APÊNDICE A – BASE DE REGRAS FUZZY USADA NO ESTI- MADOR DE RISCO DE ENDOMETRIOSE	80
APÊNDICE B – CÓDIGO UTILIZADO NA BASE DE REGRAS DO SISTEMA ESTIMADOR DE RISCO DE EN- DOMETRIOSE	83

Introdução

Uma regra fuzzy é uma declaração condicional utilizada para modelar conhecimentos imprecisos e/ou incertos expressos por termos linguísticos (BEDE, 2012). Tais termos linguísticos são modelados matematicamente através de conjuntos fuzzy. Regras fuzzy são frequentemente usadas para modelar conhecimentos advindos de especialistas ou de um conjunto de dados (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007; BEDE, 2012).

Os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) são sistemas que utilizam esse tipo de regra aliado à lógica fuzzy para gerar saídas a partir de entradas fuzzy (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017). É possível aplicar um SBRF a problemas de diversas áreas, como, por exemplo, em biomatemática (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017; JAYAWARDENA et al., 2014; SILVA, 2015), em aplicações médicas (SILVEIRA, 2007; BASSANI, 2016; SACILOTTO; VENDITE; SILVEIRA, 2018; BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017; ESGOBUE; ELDER, 1983), em controle (JAGER, 1995; GUPTA; YAMAKAWA, 1988), em geologia (WASQUES, 2015), entre outras.

A verificação de integridade de uma base de regras é de suma importância para o êxito da aplicação de um SBRF. Anomalias em uma base de regras podem causar erros de inferência em SBRF (VIAENE; WETS; VAN THIENEN, 2000), ou mesmo aumentar o tempo de computação do sistema – o que é bastante relevante para bases de regras extensas. Portanto, vários autores (YAGER; LARSEN, 1991; DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997; SCARPELLI; GOMIDE, 1994; SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994; LEUNG; SO, 1993) sugerem diferentes métodos de detecção de tais anomalias. Essas técnicas dependem dos tipos de regras fuzzy envolvidas: se as regras são consideradas como partes de informação ou como restrições nos possíveis valores de entrada no sistema (VIAENE; WETS; VAN THIENEN, 2000). No presente trabalho, são apresentados dois desses métodos, propostos por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994) e (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997), sendo o primeiro adequado tanto a regras implicativas quanto conjuntivas e o último adequado apenas a regras implicativas.

Neste trabalho, projetamos um SBRF para estimar o risco de uma mulher ter endometriose, no qual a base de regras foi elaborada em conjunto com o especialista Dr. Kleber Cursino de Andrade, que atua no CAISM (Centro de Atenção Integral à Saúde da Mulher), em Campinas, São Paulo, Brasil.

A endometriose é caracterizada como a presença do tecido do endométrio fora da cavidade uterina, o que provoca uma reação inflamatória crônica (KENNEDY et al., 2005; CRAMER; MISSMER, 2002). As pacientes portadoras demoram, na maioria dos casos, mais de 5 anos para serem diagnosticadas (SCHLEEDOORN et al., 2016;

DUNSELMAN et al., 2014). O atraso no diagnóstico aliado à natureza (mesmo que minimamente) invasiva do procedimento utilizado na detecção da doença (laparoscopia) justificam o desenvolvimento de um modelo matemático que estime o risco de uma mulher ter endometriose. Devido à natureza subjetiva dos sintomas associados à endometriose, em especial as dores, a teoria de conjuntos fuzzy surge como uma ferramenta adequada para modelar tais sintomas.

Após testes preliminares, constatamos que é necessário identificar potenciais anomalias na base de regras utilizada para que erros de inferência sejam evitados. Desta forma, o principal objetivo do trabalho se tornou a identificação de pares de regras potencialmente contraditórias na base de regras proposta.

Para tais fins, o Capítulo 1 apresenta os conceitos básicos da teoria de conjuntos fuzzy e da lógica fuzzy. Em particular, na Seção 1.7 são apresentados os SBRFs.

O Capítulo 2 apresenta dois dos métodos de detecção de anomalias em bases de regras. Um método baseia-se em uma medida de similaridade (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994), enquanto o outro apresenta resultados para uma base de regras implicativas (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997).

A aplicação de um SBRF ao problema de estimar o risco de uma paciente ter endometriose é apresentada no Capítulo 3, bem como os conceitos básicos referentes à patologia em questão. Ao longo desse capítulo, também são apresentadas regras potencialmente contraditórias apontadas pelo método baseado em similaridade proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994), apresentado no Capítulo 2.

Finalmente, são apresentadas as conclusões e considerações finais do trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros.

1 Conceitos Básicos de Conjuntos Fuzzy

Em diversas aplicações e descrição de fenômenos de qualquer natureza, faz-se imprescindível, muitas vezes, lidar com incertezas. Um exemplo é determinar se uma maçã pertence ao conjunto das maçãs maduras ou das maçãs verdes. É possível identificar uma maçã verde, bem como uma madura, mas não é possível classificar todas as maçãs dentro desses conjuntos, uma vez que podem haver maçãs em estados intermediários. A teoria de conjuntos fuzzy é capaz de lidar com conceitos que não podem ser definidos por limites de forma determinística, como os fazem a teoria de conjuntos clássicos. Com efeito, em Biomatemática - bem como em várias outras áreas de conhecimento -, são encontrados conceitos como níveis de dor, temperatura, classes sociais, e inúmeros outros que, dependendo da aplicação, não são bem representados classicamente.

Como exemplo, segundo (UNIÃO *et al.*, 2011), dependendo da estação do ano, da finalidade e local da instalação, a temperatura de um ar condicionado pode variar de 20,0°C a 28,0°C. Considere, para efeito de exemplo, que a temperatura para um indivíduo seja considerada *agradável* se está dentro dessa faixa de valores, digamos, entre 20,0°C e 28,0°C. Em caso contrário, deverá ser classificada como *desagradável*. Dessa forma, a modelagem despreza a incerteza de tais limites, visto que uma temperatura de 20,0°C seria classificada como *agradável*, ao passo que uma temperatura de 19,9°C seria considerada *desagradável*. Ademais, uma temperatura de 19,9°C seria considerada tão desagradável quanto uma de 2,0°C, outra incoerência da abordagem clássica para o problema em questão.

Nem sempre é possível encontrar um modelo matemático analítico “clássico” que represente bem o comportamento quando se trata desse tipo de incerteza, e também uma aproximação computacional pode ser inviável. Assim, Zadeh (ZADEH, 1965), trouxe à luz do conhecimento uma nova abordagem para lidar com esse tipo de incerteza: a noção de subconjunto fuzzy e outros conceitos básicos que formam as bases da teoria de conjuntos fuzzy e a lógica fuzzy.

Faremos uso de tais conceitos para produzir um sistema de classificação de uma mulher ter endometriose. Para tal, faz-se necessário, primeiro, estabelecer definições e resultados que serão utilizados no decorrer dessa dissertação. Os conceitos básicos neste capítulo são apresentados conforme (KLIR; YUAN, 1996; BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017; BEDE, 2012; PEDRYCZ; GOMIDE, 2007). As seções desse capítulo estão organizadas conforme segue: a Seção 1.1 define o que são conjuntos fuzzy e funções de pertinência. A Seção 1.2 trata dos conceitos de suporte, núcleo e α -níveis de um conjunto fuzzy. A Seção 1.3 discorre sobre a extensão de operações básicas com conjuntos clássicos

a conjuntos fuzzy. Os conectivos lógicos da lógica fuzzy são introduzidos na Seção 1.4 ao passo que as relações fuzzy são apresentadas na Seção 1.5. Na Seção 1.6 são introduzidos os conceitos de variáveis linguísticas e proposições fuzzy. O capítulo se encerra com a apresentação dos sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF) na Seção 1.7.

1.1 Definição de conjunto fuzzy

A teoria de conjuntos fuzzy é uma teoria matemática desenvolvida para modelar objetos e conceitos cujas fronteiras são incertas e/ou imprecisas. Diferentemente da lógica “clássica”, em que a proposição $x \in U$ pode ser falsa ou verdadeira – 0 ou 1, respectivamente, na teoria de conjuntos fuzzy uma proposição desse tipo pode assumir um grau de veracidade entre 0 e 1. Neste caso, surge a lógica fuzzy que consiste da extensão da lógica Booleana para o intervalo $[0, 1]$.

A seguir, começamos nossa discussão sobre o tema definindo o que é um subconjunto fuzzy:

Definição 1.1 (Conjunto fuzzy e função de pertinência (ZADEH, 1965)). *Seja U um conjunto (clássico). Um (sub)conjunto fuzzy A de U é determinado por uma função $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ denominada função de pertinência, sendo que $\mu_A(x)$ representa o grau de pertinência de x a A .*

Dessa forma, cada elemento de um conjunto fuzzy A pode ser visto como um elemento do universo U dotado de um grau de pertinência ao conjunto A . Além disso, dois elementos quaisquer $x, y \in U$ podem ser comparados quanto à pertinência a um conjunto fuzzy A , bastando, para tal, comparar suas funções de pertinência $\mu_A(x)$ e $\mu_A(y)$. Uma situação em que $\mu_A(x) > \mu_A(y)$ indica que x tem um maior grau de pertinência ao conjunto A que y .

Em uma perspectiva mais prática, retomando o exemplo no início do capítulo, assumamos que o universo de discurso das temperaturas é $U = [-10^\circ\text{C}, 50^\circ\text{C}]$. Suponhamos que exista um conjunto $D \in U$, chamado conjunto das temperaturas *desagradáveis* ao ser humano. Se quisermos representar a temperatura de $2, 0^\circ\text{C}$ como sendo *mais desagradável* do que uma outra de $19, 9^\circ\text{C}$, basta que o grau de pertinência da temperatura $2, 0^\circ\text{C}$ ao conjunto D seja maior que o grau de pertinência para $19, 9^\circ\text{C}$.

Exemplos típicos de conjuntos fuzzy comumente encontrados na literatura (KLIR; YUAN, 1996) incluem:

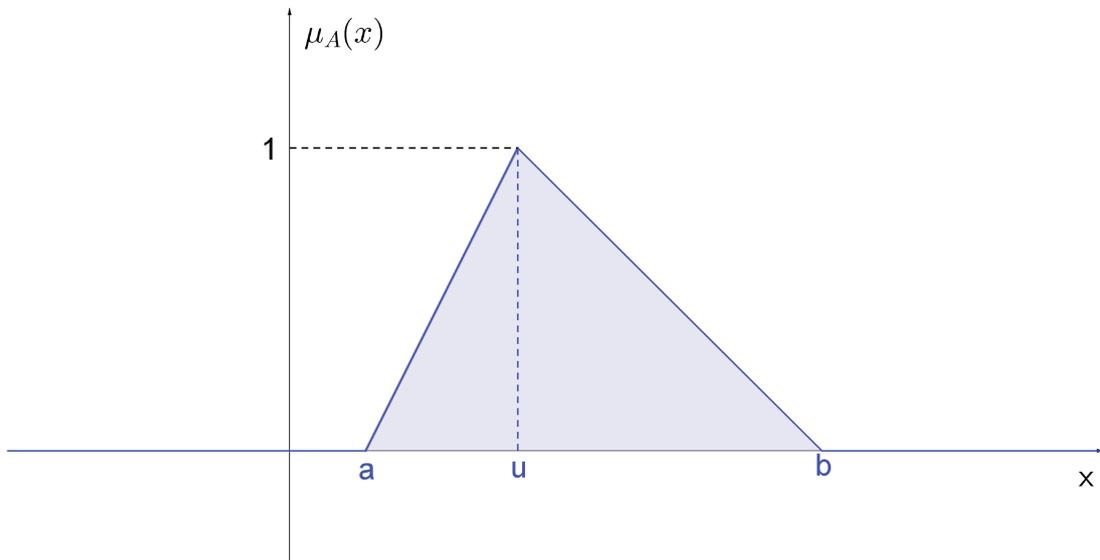
- 1) Conjuntos fuzzy triangulares: conforme o nome sugere, são conjuntos fuzzy de \mathbb{R}

cuja função de pertinência tem a forma de um triângulo e é descrita por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{u - a}, & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x - b}{u - b}, & \text{se } u < x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Esse tipo de conjunto fuzzy pode ser denotado por $(a; u; b)$. A Figura 1 ilustra um conjunto fuzzy triangular $(a; u; b)$.

Figura 1 – Conjunto fuzzy triangular



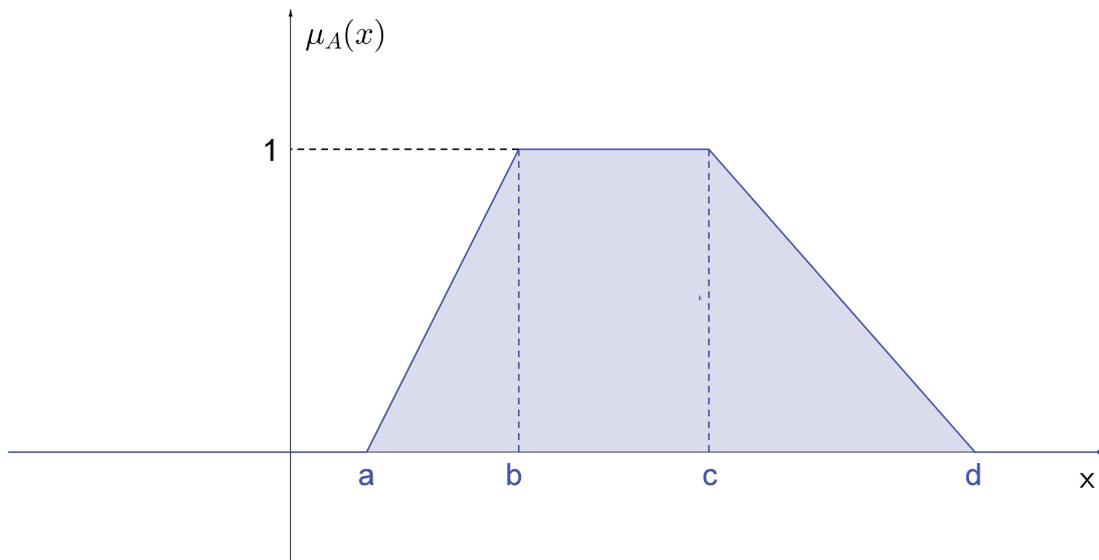
Fonte: próprio autor.

- 2) Conjuntos fuzzy trapezoidais: são conjuntos fuzzy de \mathbb{R} cuja função de pertinência é descrita por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{b - a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x < c \\ \frac{x - d}{c - d}, & \text{se } c \leq x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função de pertinência desse tipo de conjunto fuzzy tem a forma de um trapézio, conforme ilustra a Figura 2. Um conjunto fuzzy trapezoidal também pode ser representados na forma $(a; b; c; d)$.

Figura 2 – Conjunto fuzzy trapezoidal



Fonte: próprio autor.

Um conjunto clássico é um caso particular de conjunto fuzzy. Com efeito, um subconjunto clássico A de U é associado a um conjunto fuzzy cuja função de pertinência assume apenas valores 0 ou 1. Mais especificamente, a função de pertinência desse conjunto fuzzy é denominada *função característica*, e é dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad \forall x \in U$$

Denotaremos a classe dos números fuzzy de U pelo símbolo $\mathcal{F}(U)$

Na seção seguinte, apresentamos uma família de conjuntos clássicos que estão relacionados a conjuntos fuzzy.

1.2 Suporte, núcleo e α -nível

Um conjunto fuzzy pode ser associado biunivocamente a uma família de α -níveis. Vejamos, a seguir, dois conjuntos clássicos que podem ser associados a um conjunto fuzzy e que são importantes na detecção de anomalias em uma base de regras: o suporte e o núcleo.

Definição 1.2 (Suporte e núcleo). *Seja A um conjunto fuzzy. O suporte de A , representado por $\text{supp}(A)$, é o subconjunto clássico de U*

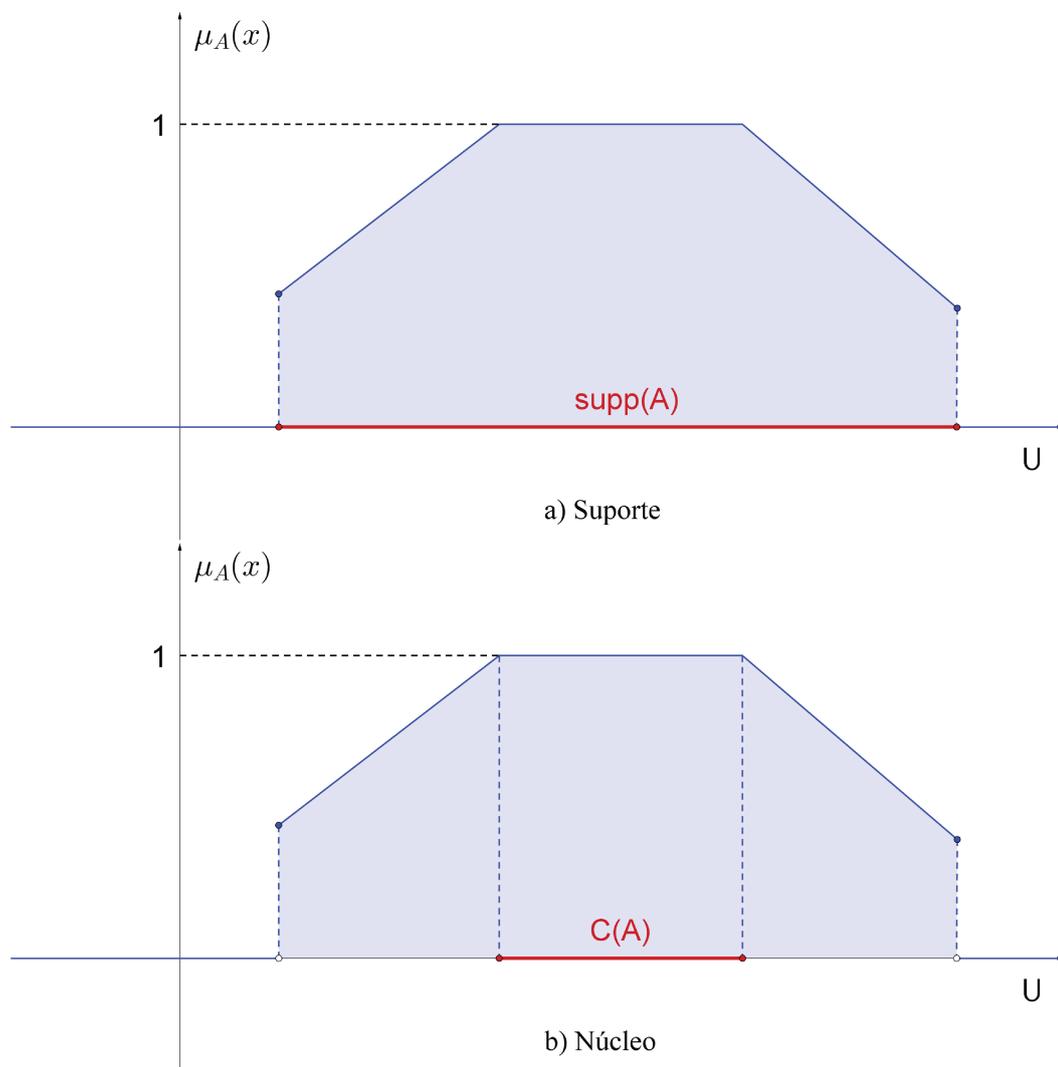
$$\text{supp}(A) = \{x \in U; A(x) > 0\}.$$

O núcleo de A , representado por $C(A)$, é o subconjunto clássico de U

$$C(A) = \{x \in U; A(x) = 1\}.$$

Assim sendo, o suporte de um conjunto fuzzy A é formado por todos pertencem parcial ou totalmente ao conjunto A , ou seja, independentemente do grau de pertinência, desde que seja maior que 0. Por outro lado, os elementos que compõem o núcleo de A são somente aqueles que pertencem totalmente ao conjunto A , isto é, com grau de pertinência igual a 1. Exemplos de suporte e núcleo de um conjunto fuzzy são mostrados na Figura 3.

Figura 3 – a) Suporte e b) núcleo de um conjunto fuzzy



Fonte: próprio autor.

Por vezes, se faz necessário identificar elementos que tenham um grau mínimo de pertinência, um limiar $\alpha \in (0, 1]$. Isso nos leva ao conceito de α -nível definido a seguir.

Definição 1.3 (α -nível (KLIR; YUAN, 1996)). *Seja A um conjunto fuzzy de U . Um*

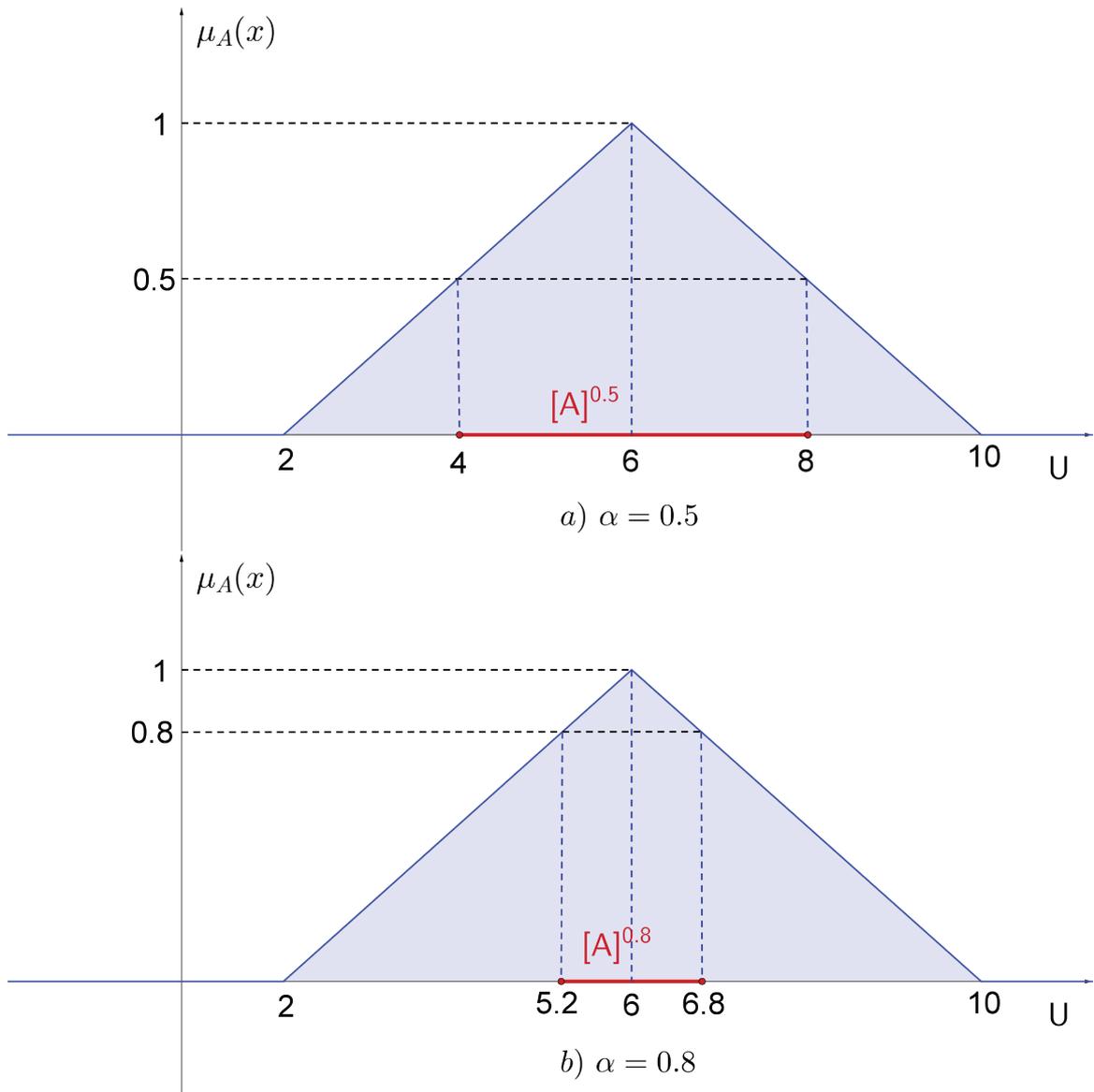
α -nível de A é o conjunto

$$[A]^\alpha = \{x \in U; \mu_A(x) \geq \alpha\}, \text{ para qualquer } \alpha \in (0, 1].$$

Adicionalmente, se U é um espaço topológico, definimos $[A]^0$ como sendo o fecho de $\text{supp}(A)$, isto é, $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}$.

Exemplos de α -níveis de um conjunto fuzzy A é mostrado na Figura 4 para o conjunto fuzzy triangular $A = (2, 6, 10)$. No exemplo, para $\alpha = 0,5$, temos o conjunto crisp $[A]^{0,5} = [4, 8]$ e, para $\alpha = 0,8$, temos o conjunto crisp $[A]^{0,8} = [5.2, 6.8]$. De maneira geral, para o presente exemplo, temos $[A]^\alpha = [4\alpha + 2, 10 - 4\alpha] \forall \alpha \in [0, 1]$.

Figura 4 – α -níveis de um conjunto fuzzy para a) $\alpha = 0.5$ e b) $\alpha = 0.8$



Fonte: próprio autor.

Uma aplicação interessante é a escolha dos elementos mais representativos de um conceito dado por um conjunto fuzzy A (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007). Isso pode ser feito através da escolha de um valor adequado para α , de forma que o α -nível de A contenha os elementos mais representativos de A .

A partir do teorema de representação de Negoita e Ralescu (NEGOITA; RALESCU, 1975), um conjunto fuzzy pode ser representado através de seus α -níveis, de tal forma que resultados advindos da teoria de conjuntos crisp sejam aplicáveis a conjuntos fuzzy. Porém, o teorema não será apresentado aqui, visto que foge ao escopo do presente trabalho. Contudo, o leitor interessado por consultar, por exemplo, (KLIR; YUAN, 1996; BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017; PEDRYCZ; GOMIDE, 2007).

A próxima seção trata das extensões das operações entre conjuntos crisp (a saber, união, interseção, igualdade, complementar e inclusão) para conjuntos fuzzy.

1.3 Operações entre conjuntos fuzzy

As operações básicas entre conjuntos, como união, interseção, igualdade, inclusão e complementar, podem ser estendidas do caso crisp (clássico) para o caso fuzzy. Essas operações desempenham papéis fundamentais em um SBRF e em métodos de detecção de anomalias em uma base de regras (KLIR; YUAN, 1996; BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017; PEDRYCZ; GOMIDE, 2007; DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997).

Por ora, são apresentadas as definições desses conceitos, enquanto deixamos suas aplicações em SBRF para os Capítulos 2 e 3.

Definição 1.4 (União). *Sejam A e B dois conjuntos fuzzy de U . O conjunto fuzzy que define a união de A e B é representado pelo conjunto fuzzy $A \cup B$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U.$$

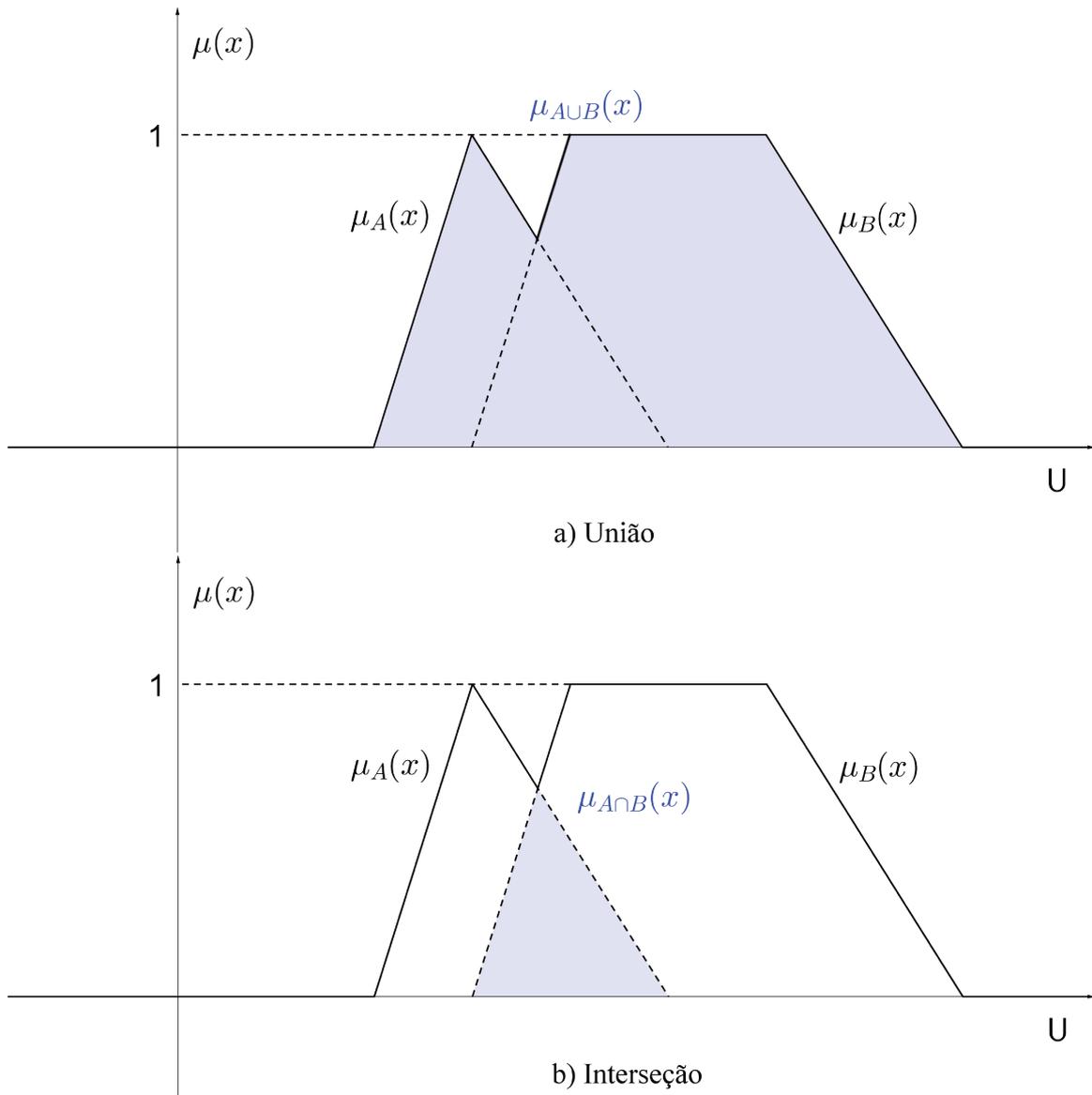
Definição 1.5 (Interseção). *O conjunto fuzzy que expressa a interseção entre A e B é o conjunto fuzzy $A \cap B$ cuja função de pertinência é definida por*

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U.$$

Exemplo 1.1. *Considere os conjuntos fuzzy $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, tais que $A = (2, 3, 5)$ e $B = (3, 4, 6, 8)$. A união usual desses conjuntos, bem como a interseção, são mostrados nas Figuras 5 a) e b).*

O conceito de igualdade, definido a seguir, indica se dois conjuntos fuzzy são iguais ou não. Contudo, essa definição não contempla graus de igualdade, conforme fazem medidas de similaridade (BUSTINCE; PAGOLA; BARRENECHEA, 2007), que serão apresentadas oportunamente no Capítulo 2.

Figura 5 – a) União e b) interseção entre os conjuntos fuzzy $A = (2, 3, 5)$ e $B = (3, 4, 6, 8)$



Fonte: próprio autor.

Definição 1.6 (Igualdade). *Os conjuntos fuzzy A e B são ditos iguais se*

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \quad \forall x \in U.$$

A seguir, é apresentada a definição de inclusão de conjuntos fuzzy.

Definição 1.7 (Inclusão (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017)). *Sejam $A, B \in \mathcal{F}(U)$, A é dito estar contido em B , $A \subseteq B$, se*

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \quad \forall x \in U.$$

A noção de igualdade, assim como inclusão, pode ser equivalentemente definida

através dos α -níveis dos conjuntos fuzzy. Em particular, valem as seguintes propriedades (KLIR; YUAN, 1996):

- $A = B \Leftrightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$;
- $A \subseteq B \Leftrightarrow [A]^\alpha \subseteq [B]^\alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]$,

sendo $\mu_A(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid x \in [A]^\alpha, \forall x \in U\}$. Por definição, temos que $\sup \emptyset = 1$.

A noção de complemento de um conjunto crisp na teoria de conjuntos clássica pode ser estendida para a teoria de conjuntos fuzzy conforme se segue.

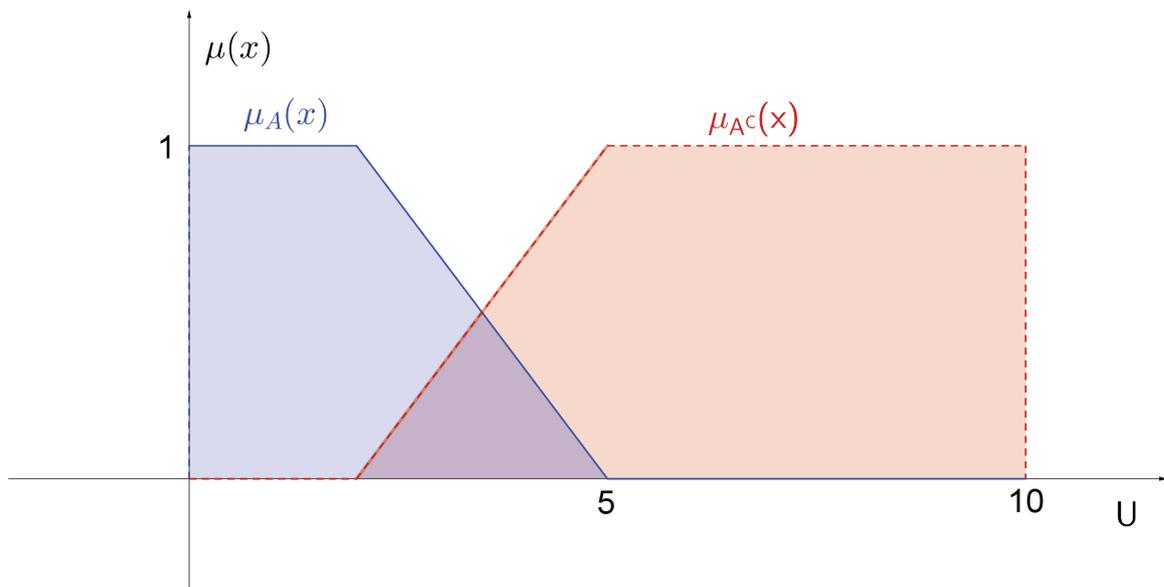
Definição 1.8 (Complementar). *Seja $A \in \mathcal{F}(U)$ um conjunto fuzzy. O conjunto fuzzy $A^C \in \mathcal{F}(U)$, chamado complementar do conjunto fuzzy A , é representado através da função de pertinência dada por*

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in U.$$

Exemplo 1.2. *Considere o conjunto fuzzy $A = (0, 0, 2, 5)$, no universo $U = [0, 10]$. O complementar A^C de A é o conjunto fuzzy $A^C = (2, 5, 10, 10)$. A Figura 6 exibe os conjuntos fuzzy A e A^C .*

Também se pode perceber, através da Figura 6, que na teoria de conjuntos fuzzy pode não valer a Lei do Meio Excluído, ou seja, pode acontecer de $A \cap A^C \neq \emptyset$.

Figura 6 – Conjunto fuzzy $A = (0, 0, 2, 5)$ e seu complementar $A^C = (2, 5, 10, 10)$



Fonte: próprio autor.

Proposição 1.1. *Sejam, A, B e C conjuntos fuzzy de U . As principais propriedades envolvendo operações entre conjuntos fuzzy são listadas a seguir.*

- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cap B = B \cap A$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cap A = A$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cup \emptyset = A$;
- $A \cap U = A$ e $A \cup U = U$;
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ (leis de DeMorgan).

Na próxima seção, serão apresentados os conectivos lógicos fuzzy, que nada mais são do que uma extensão dos conectivos lógicos Booleanos.

1.4 Conectivos lógicos fuzzy

A grosso modo, podemos dizer que a lógica fuzzy está para a teoria de conjuntos fuzzy assim como a lógica clássica está para a teoria de conjuntos clássica. De fato, ela corresponde a uma extensão da lógica clássica.

Nesta seção, apresentamos os conectivos lógicos *e*, *ou*, *negação* e *implicação*.

Segundo (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017), os conectivos lógicos são usados na representação matemática de sentenças condicionais do tipo

Se x is A e y is **not** B , **então** z is C .

Observa-se o uso do verbo em inglês *to be* ao invés do português *ser/estar* justamente pela dicotomia semântica da tradução. Se o verbo *is* é traduzido como *é*, então a proposição x is A pode ser interpretada como $x = A$. Em contrapartida, se o verbo é traduzido como *está*, então uma interpretação plausível da proposição x is A é $x \in A$.

O conectivo “e” da lógica Booleana expressa a ideia de conjunção. O valor lógico da aplicação desse conectivo a duas ou mais proposições (explicadas na subseção 1.6) é 1 apenas no caso em que todas as variáveis envolvidas tenham o valor lógico 1, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Tabela verdade do conectivo Booleano “e”

x	y	x e y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Uma *norma triangular* ou *t-norma* é a extensão do conectivo “e” para o intervalo $[0, 1]$. Sua definição é apresentada a seguir.

Definição 1.9 (T-norma). *O operador $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\Delta(x, y) = x \Delta y$ para todo $x, y \in [0, 1]$, é uma t-norma se satisfaz as seguintes condições:*

- a) *elemento neutro:* $\Delta(1, x) = 1 \Delta x = x$;
- b) *comutativa:* $\Delta(x, y) = x \Delta y = y \Delta x = \Delta(y, x)$;
- c) *associativa:* $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$;
- d) *monotonicidade:* se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \Delta y \leq u \Delta v$.

Note que as propriedades a), b) e d) da t-norma implicam na reprodução da tabela verdade do conectivo Booleano “e” (Tabela 1).

Além disso, segundo (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007), as t-normas generalizam a intersecção entre conjuntos da seguinte forma: sejam A e B conjuntos fuzzy de U . A intersecção $A \cap_{\Delta} B$ é representada pela função de pertinência dada por

$$\mu_{A \cap_{\Delta} B}(x) = \mu_A(x) \Delta \mu_B(x), \quad \forall x \in U.$$

Exemplo 1.3. *Exemplos bem conhecidos de t-normas são:*

- *mínimo:* $\Delta(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y$;
- *produto:* $\Delta(x, y) = x \cdot y$;
- *Lukasiewicz:* $\Delta(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$;
- *Produto drástico:* $\Delta(x, y) = \begin{cases} y, & \text{se } x = 1 \\ x, & \text{se } y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

O operador lógico “ou” da lógica Booleana expressa a ideia de disjunção. Ele requer que apenas uma das proposições envolvidas tenham o nível lógico 1 para que o

Tabela 2 – Tabela verdade do conectivo Booleano “ou”

x	y	x ou y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

resultado de sua aplicação a tais proposições seja 1. A Tabela 2 mostra a tabela verdade desse conectivo para duas proposições.

A operação *t-conorma* ou *conorma triangular*, também conhecida como *s-norma*, estende o conectivo “ou” Booleano para o intervalo $[0, 1]$. As *s-normas* são definidas abaixo.

Definição 1.10 (T-conorma ou s-norma (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017)). *O operador $\nabla : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\nabla(x, y) = x \nabla y$ para todo $x \in [0, 1]$, é uma t-conorma (ou s-norma) se satisfaz as seguintes condições:*

- a) *elemento neutro:* $\nabla(0, x) = 0 \nabla x = x$;
- b) *comutativa:* $\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$;
- c) *associativa:* $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$;
- d) *monotonicidade:* se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \nabla y \leq u \nabla v$.

De forma similar às t-normas, as propriedades a), b) e d) das s-normas implicam na reprodução da Tabela 2, a tabela verdade do conectivo Booleano “ou”.

As s-normas fornecem uma generalização da união entre conjuntos (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007). De fato, sejam A e B conjuntos fuzzy de U . A união $A \cup_{\nabla} B$, para todo $x \in U$, é definida pela função de pertinência dada por

$$\mu_{A \cup_{\nabla} B}(x) = \mu_A(x) \nabla \mu_B(x).$$

Exemplo 1.4. *Dois exemplos de s-normas bem conhecidos da literatura são:*

- *Máximo:* $\nabla(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y$;
- *Soma limitada:* $\nabla(x, y) = \min\{1, x + y\}$.

O conectivo lógico que expressa a *negação* da lógica Booleana é o “ \neg ” e, diferentemente das t-normas e s-normas, é um operador unário e satisfaz a Tabela 3. A extensão desse conceito, denominada *negação fuzzy* é dada a seguir.

Definição 1.11 (Negação fuzzy (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017)). Uma função $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é denominada negação fuzzy se satisfaz:

- a) $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$;
- b) é decrescente, ou seja, se $x \leq y$, então $N(x) \geq N(y)$.

Se N for estritamente decrescente e $N(N(x)) = x, \forall x \in [0, 1]$ (involução), então N é denominada uma negação forte.

Tabela 3 – Tabela verdade da negação clássica

x	$\neg x$
0	1
1	0

O conectivo N generaliza a ideia de complementar de um conjunto fuzzy (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007). De fato, seja A um conjunto fuzzy de U . A função de pertinência que representa o complementar A^{C_N} de A é dada por

$$\mu_{A^{C_N}}(x) = N(\mu_A(x)), \quad \forall x \in U.$$

Exemplo 1.5. Exemplos comumente encontrados na literatura de negações são:

- $N(x) = 1 - x$ (negação fuzzy usual);
- $N(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 1 \\ 1, & \text{se } x \in [0, 1) \end{cases}$

Por fim, a *implicação fuzzy*, extensão do operador de implicação Booleano, é definida como se segue.

Definição 1.12 (Implicação fuzzy). O operador $\longrightarrow: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, sendo que $\longrightarrow(x, y) = x \longrightarrow y$, para todo $x, y \in [0, 1]$, é denominado implicação fuzzy se satisfaz:

- a) é decrescente no primeiro argumento: se $x \leq y$, então $(x \longrightarrow a) \geq (y \longrightarrow a)$;
- b) é crescente no segundo argumento: se $x \geq y$, então $(a \longrightarrow x) \geq (a \longrightarrow y)$;
- c) reproduz a tabela verdade da implicação da lógica Booleana dada na Tabela 4

Exemplo 1.6. Dois exemplos de implicações fuzzy encontradas na literatura são:

- Implicação de Łukasiewicz: $x \longrightarrow_{\text{L}} = \max\{1 - x + y, 1\}$;

Tabela 4 – Tabela verdade da implicação clássica

x	y	$x \longrightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- *Implicação de Rescher-Gaines:* $x \longrightarrow_{RG} y = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ 0, & \text{se } x > y \end{cases}$.

Duas classes de implicações fuzzy são as *S-implicações* e as *R-implicações*, definidas a seguir.

Definição 1.13 (S-implicação (BEDE, 2012)). *Seja ∇ uma t-conorma e N uma negação forte. Então, a aplicação*

$$x \longrightarrow y = N(x) \nabla y$$

é chamada S-implicação.

Exemplo 1.7. *S-implicações comumente encontradas na literatura são:*

- *Implicação de Kleene-Dienes:* $x \longrightarrow_{KD} y = \max\{1 - x, y\}$ com a s-norma do máximo e a negação fuzzy usual;
- *Implicação de Łukasiewicz:* $x \longrightarrow_L y = \max\{1 - x + y, 1\}$ com a s-norma dada pela soma limitada e a negação usual.

Definição 1.14 (R-implicação (BEDE, 2012)). *Seja Δ uma t-norma. Então, a aplicação*

$$x \longrightarrow y = \sup\{z \mid x \Delta z \leq y\}$$

é chamada R-implicação, ou implicação residual.

Exemplo 1.8. *Três exemplos de R-implicações são mostrados a seguir.*

- *Implicação de Łukasiewicz:* $x \longrightarrow_L y = \min\{1 - x + y, 1\}$, com a t-norma de Łukasiewicz;
- *Implicação de Gödel:* $x \longrightarrow_G y = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ y, & \text{se } x > y \end{cases}$ com a t-norma do mínimo.

Na sequência, apresentamos um conceito central que representa uma base de regras: uma relação fuzzy.

1.5 Relações fuzzy

A associação entre dois ou mais objetos é descrita matematicamente por uma relação (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017). A relação clássica indica se há, ou não, associação entre elementos. Já a relação fuzzy destaca o grau de relação entre os elementos.

Definição 1.15 (Relação Fuzzy (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017)). *Uma relação fuzzy R sobre o produto cartesiano $U_1 \times \dots \times U_n$ é dada por um subconjunto fuzzy do produto cartesiano $U_1 \times \dots \times U_n$, em que sua função de pertinência é definida por $\mu_R : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$.*

Um caso especial de relação fuzzy é o produto cartesiano, definido abaixo.

Definição 1.16 (Produto Cartesiano Fuzzy). *O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy A_i de $U_i, i = 1, \dots, n$, com respeito uma t-norma Δ , é a relação fuzzy $A_1 \times_{\Delta} A_2 \times_{\Delta} \dots \times_{\Delta} A_n$, cuja função de pertinência é definida por*

$$\mu_{A_1 \times_{\Delta} \dots \times_{\Delta} A_n}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \Delta \dots \Delta \mu_{A_n}(x_n) \quad \forall x_i \in U_i, i = 1, \dots, n.$$

O produto cartesiano fuzzy usual é definido pela t-norma do mínimo. Neste caso, denotamos simplesmente por $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Sejam $U = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $V = \{y_1, \dots, y_m\}$. Uma relação binária (entre dois universos) $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ pode ser representada através de uma tabela ou na forma matricial, como mostrado na Tabela 5

Tabela 5 – Representação tabular e matricial

$$\begin{array}{c|ccc} R & y_1 & \dots & y_m \\ \hline x_1 & r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & r_{n1} & \dots & r_{nm} \end{array} \quad \text{e } R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

A projeção de uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ em U é definida como se segue.

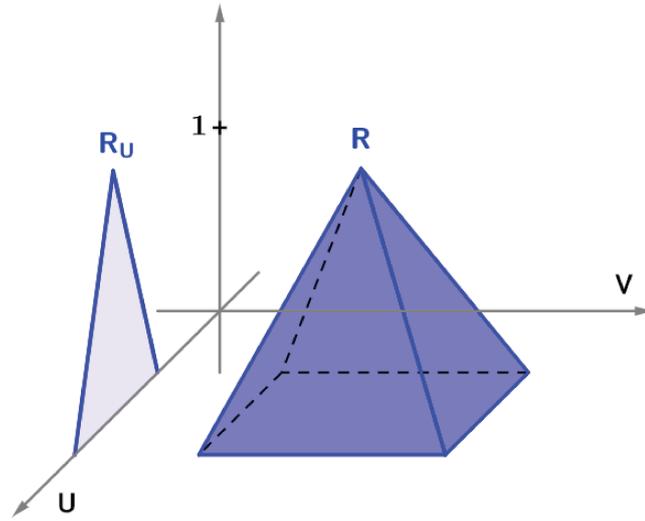
Definição 1.17 (Projeção). *Sejam U e V universos arbitrários. Seja R uma relação fuzzy sobre $U \times V$, a projeção de R em U é um conjunto fuzzy em U , representado pela função de pertinência*

$$\mu_{R_U}(u) = \text{proj}_U R(u) = \sup_{v \in V} \mu_R(u, v),$$

sendo $u \in U$.

A Figura 7 ilustra a projeção de uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ sobre o espaço U .

Figura 7 – Exemplo de projeção de uma relação fuzzy R definida em $U \times V$ sobre o espaço U



Fonte: próprio autor.

Dentre outras aplicações, a projeção é utilizada no método de detecção de anomalias “refletindo sobre as entradas” (YAGER; LARSEN, 1991), que será comentada na Seção 2.2.

As composições entre relações fuzzy são de fundamental importância em SBRF, uma vez que é através delas que o processo de inferência pode ser realizado, como será mostrado na seção seguinte. Diferentes famílias de operadores de composições entre relações fuzzy surgem a partir das t-normas, s-normas e implicações fuzzy (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007). Consideremos, para as definições seguintes, as relações fuzzy $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ e $S \in \mathcal{F}(V \times W)$.

Definição 1.18 (Composição sup-t). *Dada uma t-norma Δ . A relação $R \circ^t S : U \times W \rightarrow [0, 1]$, descrita por*

$$\mu_{R \circ^t S}(x, z) = \sup_{y \in V} [\mu_R(x, y) \Delta \mu_S(y, z)], \quad \forall (x, z) \in U \times W,$$

é chamada composição sup-t de R e S .

Exemplo 1.9. *A composição sup – min (ou max – min) é um caso particular da composição sup-t quando $\Delta = \min$. Neste caso, denotamos simplesmente por $R \circ S$ a composição de R e S .*

Definição 1.19 (Composição inf-s). *Dada uma s-norma ∇ . A relação $R \otimes^s S : U \times W \rightarrow [0, 1]$, descrita por*

$$\mu_{R \otimes^s S}(x, z) = \inf_{y \in V} [\mu_R(x, y) \nabla \mu_S(y, z)], \quad \forall (x, z) \in U \times W,$$

é chamada composição inf-s de R e S .

Exemplo 1.10. A composição $\text{inf} - \text{max}$ (ou $\text{min} - \text{max}$) é um caso particular da composição inf - s quando $\nabla = \text{max}$. Neste caso, denotamos simplesmente por $R \otimes S$ a composição de R e S .

Definição 1.20 (Composição inf -I). Dada uma implicação fuzzy \longrightarrow . A relação $R \triangleleft^i S : U \times W \rightarrow [0, 1]$, descrita por

$$\mu_{R \triangleleft^i S}(x, z) = \inf_{y \in V} [\mu_R(x, y) \longrightarrow \mu_S(y, z)], \quad \forall (x, z) \in U \times W,$$

é chamada composição inf -I de R e S .

Exemplo 1.11. Se a implicação utilizada for a de Rescher-Gaines, temos

$$\mu_{R \triangleleft^i S}(x, z) = \inf_{y \in V} [\mu_R(x, y) \longrightarrow \mu_S(y, z)], \quad \forall (x, z) \in U \times W.$$

Na sequência, serão introduzidos mais alguns conceitos básicos da Lógica Fuzzy.

1.6 Variáveis linguísticas e proposições fuzzy

O conceito de variável linguística é importante na modelagem fuzzy e na construção de um SBRF e sua definição é apresentada a seguir.

Definição 1.21 (Variável linguística (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017)). Uma variável linguística x definida em um universo U é uma variável cujos valores assumidos são subconjuntos fuzzy de U .

Retomando um exemplo do início do capítulo, podemos citar a variável linguística temperatura de um ambiente, cujos valores são os conjuntos fuzzy que representam os termos linguísticos *muito fria* (MF), *fria* (F), *agradável* (A), *quente* (Q) e *muito quente* (MQ). Esses rótulos podem ser modelados pelos conjuntos fuzzy dados na Figura 8.

Uma proposição é uma sentença que afirma (ou nega) uma qualidade de um sujeito e pode assumir os valores *verdadeiro* ou *falso*. Na lógica fuzzy, nos interessa saber não somente se um indivíduo possui (ou não) uma característica, mas também o grau de pertinência dessa característica ao sujeito. Uma proposição atômica (com respeito a uma variável linguística x que pode assumir como valor um conjunto fuzzy A) possui a seguinte forma:

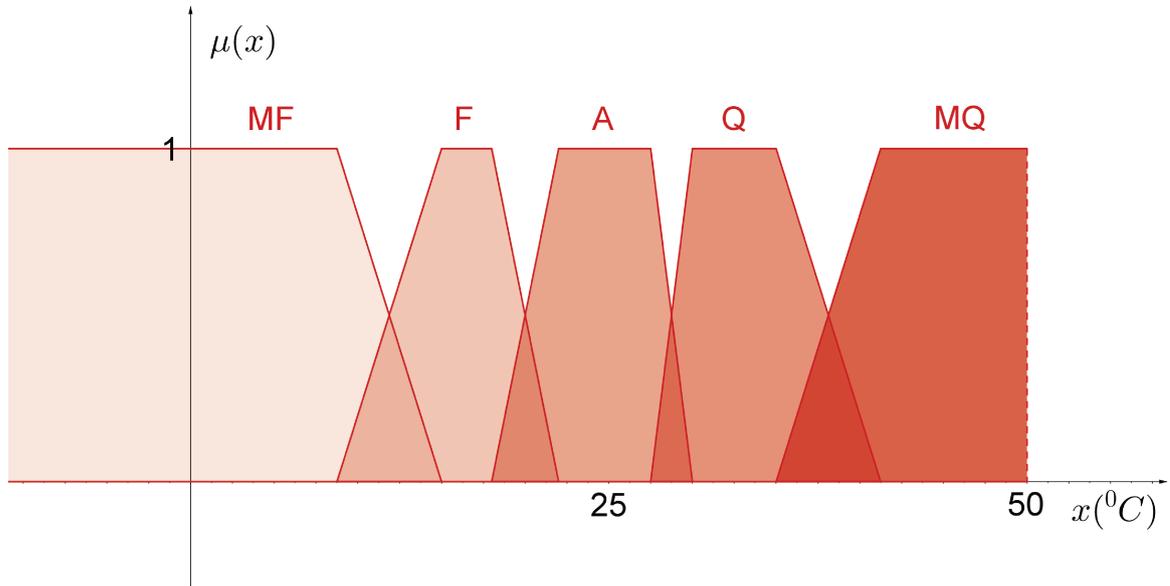
$$x \text{ is } A,$$

sendo que A é um conjunto fuzzy, e o grau de veracidade da proposição é dado por $\mu_A(x)$.

Uma proposição composta é o resultado de agregação de proposições atômicas através de conectivos lógicos. Dessa forma, consideremos as proposições p e q :

$$p : x_1 \text{ is } A_1 \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ is } A_n;$$

Figura 8 – Temperatura do ambiente



Exemplo de modelagem de uma variável linguística. Fonte: próprio autor.

$$q : x_1 \text{ is } A_1 \text{ ou } x_2 \text{ is not } A_2 \text{ e } \dots \text{ ou } x_n \text{ is } A_n.$$

Se os conectivos *e*, *ou* e *not* são modelados respectivamente por uma t-norma Δ , uma s-norma ∇ e uma negação fuzzy N , então estas proposições podem ser reduzidas a uma proposição atômica (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007) do tipo *x is A*, cuja função de pertinência é dada por

$$p : \underbrace{x_1 \text{ is } A_1 \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ is } A_n}_{\mathbf{x} \text{ is } A: \mu_A(x) = \mu_{A_1}(x_1) \Delta \dots \Delta \mu_{A_n}(x_n)} ;$$

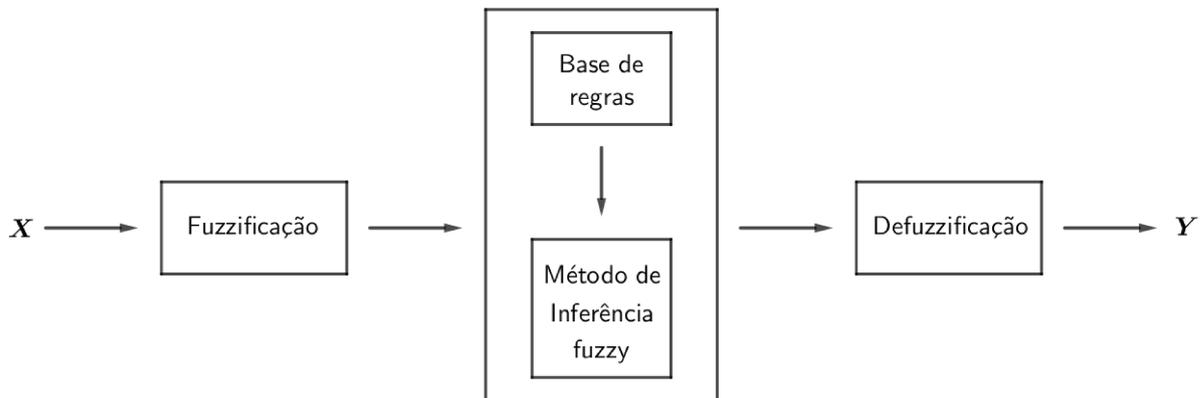
$$q : \underbrace{x_1 \text{ is } A_1 \text{ ou } x_2 \text{ is not } A_2 \text{ e } \dots \text{ ou } x_n \text{ is } A_n}_{\mathbf{x} \text{ is } A: \mu_A(x) = \mu_{A_1}(x_1) \nabla N(\mu_{A_2}(x_2)) \Delta \dots \nabla \mu_{A_n}(x_n)} .$$

A seção seguinte trata dos SBRF, destacando cada um de seus módulos fundamentais, bem como da definição de regras fuzzy.

1.7 Sistemas baseados em regras fuzzy

Os SBRF representam um papel central em modelagem fuzzy (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007). Seguindo o raciocínio de (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017), um ser humano toma atitudes baseadas em seu próprio conhecimento e raciocínio, por vezes impreciso. Esse conhecimento, em geral, advém de declarações condicionais do tipo “Se o tempo para chegar ao destino é curto, então a velocidade de caminhada é alta”. Através de uma coleção de regras desse tipo e também de seus critérios pessoais, um indivíduo é capaz de tomar uma decisão. Nesse exemplo, a decisão a ser tomada seria a velocidade da caminhada.

Figura 9 – Diagrama de representação do SBRF



Fonte: próprio autor.

Os SBRFs são capazes de simular esse tipo de raciocínio através de métodos de inferência e bases de regras fuzzy. Essas regras, por sua vez, são modeladas matematicamente utilizando-se de variáveis linguísticas e proposições fuzzy, definidas na Seção 1.6. Um SBRF é composto, segundo (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007), de três módulos fundamentais: *fuzzificação*, *inferência* e *defuzzificação*. O módulo de inferência é composto por uma base de regras fuzzy e um método de inferência fuzzy. Um esquema geral de um SBRF pode ser visto na Figura 9. Nesta seção, serão apresentados os três módulos a começar pelo primeiro deles, o módulo de fuzzificação.

1.7.1 Módulo de fuzzificação

O módulo de fuzzificação é responsável por receber as entradas e as transformar em conjuntos fuzzy em domínios apropriados (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017). O método mais usado para adequar uma entrada *crisp* a um conjunto fuzzy é a inclusão canônica, na qual o valor *crisp* é representado por sua função característica.

1.7.2 Módulo de inferência

O módulo de inferência pode ser visto como o “cérebro” de um SBRF que é composto por uma base de regras fuzzy e um método de inferência fuzzy. Começaremos a discussão sobre a base de regras fuzzy.

1.7.2.1 Base de regras fuzzy

Uma regra fuzzy é uma declaração condicional do tipo “*Se (antecedente) então (consequente)*” cujos antecedentes e consequentes são proposições fuzzy (JAGER, 1995), conforme foram definidas na Seção 1.6. Regras fuzzy são usadas para modelar

conhecimentos imprecisos, advindos de conhecimentos de especialistas ou de um conjunto de dados (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007; BEDE, 2012).

As proposições induzem relações nos antecedentes e consequentes. Os antecedentes, bem como os consequentes, podem ser constituídos por proposições compostas, conectadas disjuntiva ou conjuntivamente (t-normas e s-normas, respectivamente). Assim, uma regra fuzzy pode ser representada de maneira geral como:

$$\begin{aligned} &\text{Se } x_1 \text{ is } A_1 \text{ e (ou) } x_2 \text{ is } A_2 \text{ e (ou) } \dots \text{ e (ou) } x_n \text{ is } A_n, \\ &\text{então } y_1 \text{ is } B_1 \text{ e (ou) } y_2 \text{ is } B_2 \text{ e (ou) } \dots \text{ e (ou) } y_m \text{ is } B_m, \end{aligned}$$

sendo que $A_i, i = 1, \dots, n$ e $B_j, j = 1, \dots, m$ são os antecedentes e consequentes, respectivamente, e $x_i \in U_i$ e $y_j \in V_j$ são variáveis de entrada e saída, respectivamente. É importante ressaltar que uma expressão desse tipo pode ser representada simplesmente como

$$\text{Se } x \text{ is } A, \text{ então } y \text{ is } B,$$

como foi apresentado na Seção 1.6, sendo que $x \in U_1 \times \dots \times U_n$ e $y \in V_1 \times \dots \times V_m$. Embora não tenha sido explicitado acima, uma regra fuzzy também pode conter também negações.

Consideremos o problema de ajuste de som de um evento. Um exemplo de regra fuzzy poderia ser:

$$\text{Se o barulho externo is alto, então o volume do som is alto.}$$

sendo que *barulho externo* é uma variável linguística que pode assumir o conjunto fuzzy *alto*, e *volume do som* é outra variável linguística que pode assumir o valor *alto* modelado por um conjunto fuzzy.

Representar as regras através de relações é um processo intuitivo, visto que as relações expressam associações entre as variáveis de entrada e saída (BEDE, 2012).

Consideremos os conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(U)$ e $B \in \mathcal{F}(V)$ e uma regra do tipo “Se x is A , então y is B ”. Esta regra pode ser representada por uma relação fuzzy $R \in \mathcal{F}(U \times V)$. No presente trabalho, consideraremos R dada da seguinte forma:

$$\mu_R(x, y) = f[\mu_A(x), \mu_B(y)], \quad \forall (x, y) \in U \times V,$$

sendo que $\mu_A(x)$ e $\mu_B(y)$ são as funções de pertinência de A e B , respectivamente, e f pode ser uma implicação ou conjunção (JAGER, 1995; BEDE, 2012).

As regras fuzzy podem ser classificadas em tipos dependendo da escolha de f (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997). A saber, se $f \equiv \Delta$, então dizemos que a regra fuzzy (R) é conjuntiva e, neste caso, temos que

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \Delta \mu_B(y), \quad \forall (x, y) \in U \times V. \quad (1.1)$$

Note que a regra conjuntiva (1.1) corresponde ao produto cartesiano entre os antecedentes e consequentes com respeito à t-norma Δ . Isso nos motiva a representar uma regra desse tipo na forma $A \times_{\Delta} B$. Por outro lado, quando $f \equiv \longrightarrow$, nomeamos a regra fuzzy (R) de implicativa e a função de pertinência que a representa é dada por

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \longrightarrow \mu_B(y), \quad \forall (x, y) \in U \times V. \quad (1.2)$$

Doravante, usaremos a notação $A \longrightarrow B$ para representar uma regra implicativa “Se x is A , então y is B ”.

Segundo (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997), as regras conjuntivas podem ser vistas como pedaços de informação, de tal forma que se torna intuitivo agregá-las disjuntivamente. Dessa mesma forma, (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997) argumentam que uma interpretação plausível para regras implicativas é que as mesmas sejam consideradas como restrições nos possíveis valores de entrada. Isso faz com que a agregação conjuntiva seja a maneira mais natural de representar a agregação dessas regras em uma relação. Essas observações, em geral, direcionam a escolha do método de inferência adotado de acordo com o tipo de regras fuzzy que compõem a base de regras.

Uma base de regras é composta por uma coleção de regras fuzzy (conjuntivas ou implicativas) que expressam alguma relação entre as variáveis de entrada e saída do sistema. Essa base de regras fuzzy pode ser apresentada conforme a Tabela 6. A base de regras fuzzy juntamente com o método de inferência fuzzy constituem o cerne de um SBRF (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017).

Tabela 6 – Base de regras fuzzy

Se x is A_1 , então y is B_1 ,
Se x is A_2 , então y is B_2 ,
⋮
Se x is A_n , então y is B_n .

Fonte: próprio autor.

É na base de regras fuzzy que se definem as variáveis linguísticas, bem como seus valores, que serão utilizados como antecedentes e consequentes das regras (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017). É importante lembrar que os valores de uma variável linguística são conjuntos fuzzy, como foi apresentado na Seção 1.6.

O processo de se unir as relações induzidas por cada regra em uma única relação fuzzy é chamada de agregação (JAGER, 1995). Seja uma base de regras com n regras do tipo “Se x is A_i , então y is B_i ”, $i = 1, \dots, n$. A relação R que representa a base de regras em questão é definida para dois casos gerais. Caso as regras sejam conjuntivas, então a

relação que representa a base de regras é definida por $R = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times_{\Delta} B_i)$, ou seja,

$$\mu_R(x, y) = \bigvee_{i=1}^n (\mu_{A_i}(x) \Delta \mu_{B_i}(y)), \quad \forall (x, y) \in U \times V,$$

sendo Δ uma t-norma.

Definição 1.22. (Base de regras (MAMDANI; ASSILIAN, 1975)) Uma base de regras fuzzy conjuntivas do tipo

$$\text{Se } x \text{ is } A_i, \text{ então } y \text{ is } B_i, \quad i = 1, \dots, n$$

pode ser representada por uma relação fuzzy de $U \times V$ como se segue:

a) Base de regras de Mamdani:

$$\mu_{R_M}(x, y) = \bigvee_{i=1}^n \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y), \quad \forall (x, y) \in U \times V; \quad (1.3)$$

b) Base de regras de Larsen:

$$\mu_{R_L}(x, y) = \bigvee_{i=1}^n \mu_{A_i}(x) \cdot \mu_{B_i}(y), \quad \forall (x, y) \in U \times V, \quad (1.4)$$

sendo que \cdot representa a t-norma do produto;

c) Base de regras de sup-t:

$$\mu_{R_T}(x, y) = \bigvee_{i=1}^n \mu_{A_i}(x) \Delta \mu_{B_i}(y), \quad \forall (x, y) \in U \times V, \quad (1.5)$$

sendo que Δ é uma t-norma arbitrária.

Em contrapartida, no caso em que as regras são implicativas, temos que $R = \bigcap_{i=1}^n (A_i \longrightarrow B_i)$, ou seja,

$$\mu_R(x, y) = \bigwedge_{i=1}^n (\mu_{A_i}(x) \longrightarrow \mu_{B_i}(y)), \quad \forall (x, y) \in U \times V,$$

sendo \longrightarrow uma implicação fuzzy.

Definição 1.23. (Base de regras (BEDE, 2012)) Uma base de regras fuzzy implicativas do tipo

$$\text{Se } x \text{ is } A_i, \text{ então } y \text{ is } B_i, \quad i = 1, \dots, n$$

pode ser representada como uma relação fuzzy de $U \times V$ como se segue:

a) Base de regras de Gödel:

$$\mu_{R_G}(x, y) = \bigwedge_{i=1}^n \mu_{A_i}(x) \longrightarrow_G \mu_{B_i}(y), \quad \forall (x, y) \in U \times V, \quad (1.6)$$

sendo que \longrightarrow_G é a implicação de Gödel;

b) Base de regras residual de Gödel:

$$\mu_{R_R}(x, y) = \bigwedge_{i=1}^n \mu_{A_i}(x) \longrightarrow_{\Delta} \mu_{B_i}(y), \quad \forall (x, y) \in U \times V, \quad (1.7)$$

sendo que \longrightarrow_{Δ} é uma implicação residual com respeito a uma t -norma Δ .

Existem diversas maneiras de se definirem antecedentes, consequentes e regras de uma base de regras fuzzy. Dentre eles, destacam-se: conhecimento de especialistas, interpolações e redes neurais (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007; BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017).

1.7.2.2 Método de inferência fuzzy

O objetivo do processo de inferência é obter uma resposta para uma determinada entrada (BEDE, 2012). Dessa forma, (ZADEH, 1973) introduziu uma **regra composicional de inferência** (RCI). Seja R a relação induzida por uma base de regras do tipo “Se x is A_i , então y is B_i ”, $i = 1, \dots, n$. Essa RCI assume que um resultado B' pode ser obtido através da composição de A' e R , ou seja,

$$B' = A' \bullet R, \quad (1.8)$$

em que \bullet denota uma composição relacional.

Note que o método de inferência pode ser visto como um funcional $I : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, tal que $B' = I(A')$, $\forall A' \in \mathcal{F}(U)$.

Dessa forma, é possível definir diferentes métodos de inferência, conforme o tipo de composição envolvida:

Definição 1.24 (Inferência Fuzzy (MAMDANI; ASSILIAN, 1975; BEDE, 2012)). *Seja $R \in \mathcal{F}(U \times V)$ uma relação fuzzy que representa a base de regras fuzzy. Dado $A' \in \mathcal{F}(U)$, uma inferência fuzzy baseada em uma composição relacional é definida conforme segue:*

a) Inferência de Mamdani:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A'}(x) \circ \mu_R(x, y) = \sup_{x \in U} \{\mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y)\}, \quad \forall y \in V; \quad (1.9)$$

b) Inferência de Larsen:

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A'}(x) \circ_L \mu_R(x, y) = \sup_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \cdot \mu_R(x, y)), \quad \forall y \in V, \quad (1.10)$$

sendo que \cdot denota a t -norma do produto;

c) *Modus Ponens Generalizado:*

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A'}(x) \circ_{\Delta} \mu_R(x, y) = \sup_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \Delta \mu_R(x, y)), \quad \forall y \in V, \quad (1.11)$$

sendo que Δ é uma *t-norma*;

d) *Inferência de Gödel:*

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A'}(x) \triangleleft \mu_R(x, y) = \inf_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \longrightarrow_G \mu_R(x, y)), \quad \forall y \in V, \quad (1.12)$$

sendo que \longrightarrow_G é a *inferência de Gödel*;

e) *Inferência residual de Gödel:*

$$\mu_{B'}(y) = \mu_{A'}(x) \triangleleft_t \mu_R(x, y) = \inf_{x \in U} (\mu_{A'}(x) \longrightarrow_{\Delta} \mu_R(x, y)), \quad \forall y \in V, \quad (1.13)$$

sendo que \longrightarrow_{Δ} é uma *inferência residual com respeito a uma t-norma Δ*

A seguir, é apresentado o método mais usado em aplicações práticas, o Método de Mamdani.

1.7.2.3 Método de Mamdani

O Método proposto por Mamdani e Assilian em (MAMDANI; ASSILIAN, 1975) trata de uma base de regras de Mamdani, e a inferência é a de Mamdani. Isso quer dizer que, sendo R a relação que representa a base de regras com n regras fuzzy, temos

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \max_{x \in U} \{ \mu_{A'}(x) \wedge \mu_R(x, y) \}, \\ \mu_R(x, y) &= \max_{i=1, \dots, n} \{ \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y) \}, \quad \forall y \in V, \end{aligned}$$

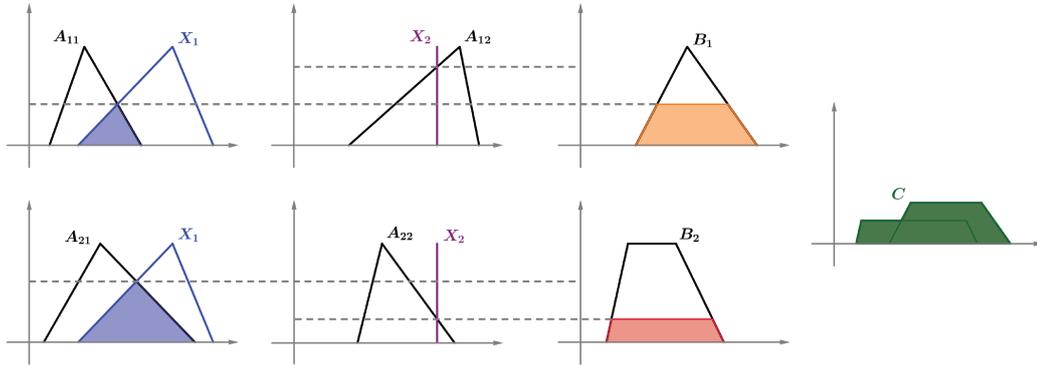
sendo que “ x is A_i ” é o antecedente e “ y is B_i ” o consequente de cada regra R_i .

O operador máximo é utilizado para a agregação de regras conjuntivas, conforme discutido na Seção 1.7.2.2. Esse operador também é usado para representar o conectivo lógico “OU”, conforme foi apresentado na Seção 1.4. Isso quer dizer que cada regra pode ser vista como uma parte de informação (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997) e, assim, intuitivamente, as regras são agregadas através de uma disjunção, nesse caso o máximo.

No caso de entradas multidimensionais, os antecedentes são conectados através da *t-norma do mínimo*, que representa o conectivo “E”. Isto é, considerando antecedentes com j dimensões, digamos, $A_i = A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{ij}$, temos

$$\mu_{A_i}(x) = \mu_{A_{i1}}(x_1) \times \mu_{A_{i2}}(x_2) \times \dots \times \mu_{A_{ij}}(x_j), \quad \forall x_k \in U_k, k = 1, \dots, j.$$

Figura 10 – Método de Mamdani



Fonte: colaboração de Pinto, N. J. B.

Exemplo 1.12. *Sejam $U = U_1 \times U_2$ e V os espaços de entrada e saída de um SBRF, respectivamente. Seja uma base de regras conjuntivas composta por duas regras $A_1 \times B_1$ e $A_2 \times B_2$, tais que $A_i = A_{i1} \times A_{i2}, i = 1, 2$. Uma aplicação do método de Mamdani é apresentada na Figura 10. Neste exemplo, X_1 e X_2 são as entradas do sistema e C é a saída.*

1.7.3 Módulo de defuzzificação

Esse módulo também é conhecido por outros autores como *decodificação* ou *interface de saída* (PEDRYCZ; GOMIDE, 2007; SILVEIRA, 2007). Essa etapa é responsável por representar o valor fuzzy de saída da inferência através de um valor *crisp* (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017). Nem todo SBRF necessita de um módulo de defuzzificação. Um exemplo é o Método de Takagi-Sugeno-Kang (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017), que não será explorado nesse trabalho.

Para encontrar um número crisp que represente a saída fuzzy do módulo de inferência de maneira satisfatória, alguns métodos são empregados. Dentre eles, destacam-se o centro de gravidade (também conhecido por centroide e centro de massa) e o centro dos máximos (BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017).

Seja $A \in \mathcal{F}(U)$, o caso contínuo do centro de gravidade é calculado através de

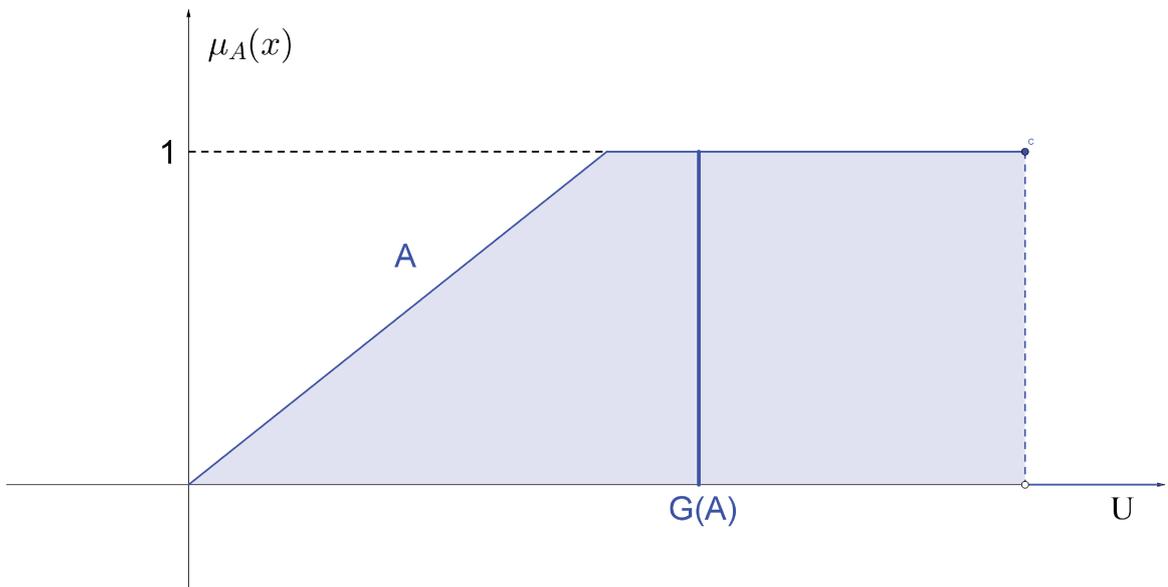
$$G(A) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x \mu_A(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} \mu_A(x) dx}$$

e um exemplo pode ser visto na Figura 11. O caso discreto do centro de gravidade é calculado da seguinte forma

$$G(A) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i)}$$

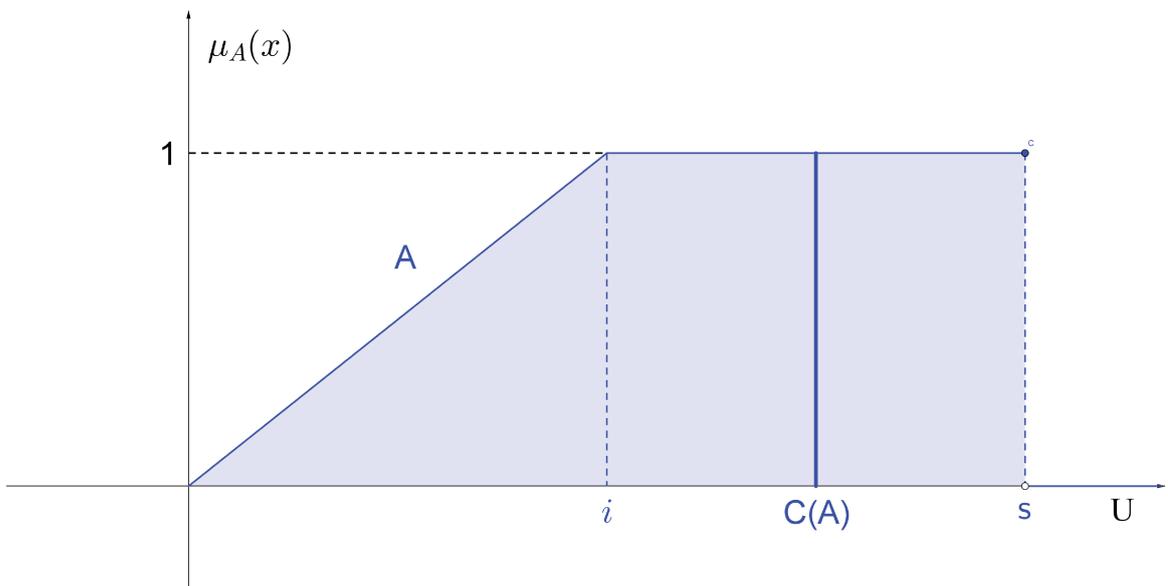
Já o centro dos máximos considera apenas os valores de máxima pertinência da saída, o que pode ser útil em determinadas aplicações. O valor de saída através do centro de

Figura 11 – Centro de gravidade, caso contínuo



Fonte: próprio autor.

Figura 12 – Centro de máximos.



Fonte: próprio autor.

máximos é calculado por

$$C(A) = \frac{i + s}{2},$$

sendo que $i = \inf\{y | \mu_A(x) = \max_x \mu_A(x)\}$ e $s = \sup\{x | \mu_A(x) = \max_x \mu_A(x)\}$. Um exemplo pode ser visto na Figura 12.

No capítulo a seguir, serão apresentados métodos de detecção de potenciais inconsistências em uma base de regras fuzzy. parte

2 Verificação de integridade de uma base de regras fuzzy

A verificação de integridade de um sistema baseado em regras é fundamental para que tal base de regras expresse corretamente o conhecimento por ela codificado, seja esse conhecimento obtido através de um especialista ou de forma automática. Essa importância da verificação de integridade se estende, também, a um sistema de base de regras fuzzy.

Vários autores já abordaram o problema de diferentes maneiras (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994; YAGER; LARSEN, 1991; DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997), sendo comum a todos os trabalhos citados a detecção de inconsistências na base de regras como principal mote. Entretanto, diferentes definições de consistência de uma regra frente a outra ou a uma base de regras são dadas por cada trabalho.

O método proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994) é denominado *estáticos* por (VIAENE; WETS; VAN THIENEN, 2000). Ele é aplicável tanto a regras implicativas quanto conjuntivas, por tratar apenas de medidas de correspondência dos antecedentes e dos consequentes, sem que a modelagem da condicional “*Se... então*” represente algum papel para o método.

Em contrapartida, os métodos apresentados por (YAGER; LARSEN, 1991) e (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997) consideram o operador utilizado na condicional para detectar anomalias e por isso são classificados como métodos dinâmicos por (VIAENE; WETS; VAN THIENEN, 2000). Estes dois métodos consideram bases de regras implicativas. Dubois et. al (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997) introduziram o conceito de coerência de uma base de regras a partir do método de detecção de inconsistência proposto por (YAGER; LARSEN, 1991). Assim, neste mesmo trabalho, eles conseguem extrair condições necessárias e/ou suficientes para uma base de regras ser coerente.

As técnicas supramencionadas são usadas para encontrar *anomalias* em uma base de regras fuzzy. Segundo (VIAENE; WETS; VAN THIENEN, 2000), as anomalias são sintomas de que erros *podem* surgir do processo de inferência, e não que necessariamente surgirão. Desse modo, uma vez que as anomalias na base de regras são detectadas, cabe a um especialista avaliar se as mesmas conduzirão, ou não, a erros. Assim, se fazem úteis os métodos de detecção de anomalias, para evitar que potenciais problemas ocorram em uma base de regras fuzzy.

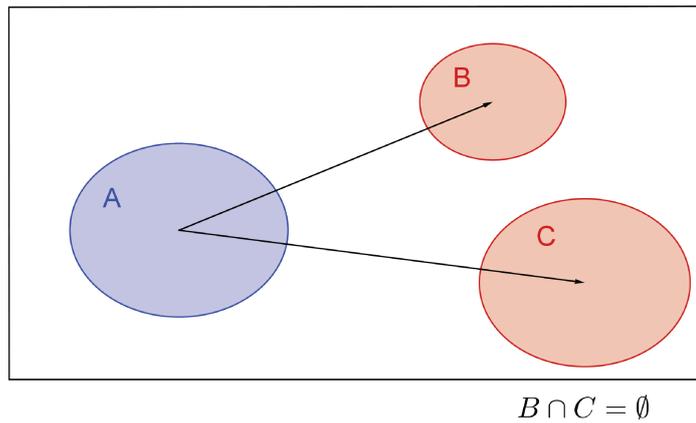
A seguir, são apresentados os métodos de detecção de anomalias estudados. O primeiro deles, proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994), é baseado

em uma medida de similaridade. O segundo método, proposto por (YAGER; LARSEN, 1991), é um método dinâmico por considerar uma base de regras implicativas, sendo que os resultados do método proposto por (YAGER; LARSEN, 1991) são apresentados em termos de condições necessárias e suficientes por (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997) e integra a Seção 2.2.

2.1 Método baseado em uma medida de similaridade

A contradição em uma base de regras pode ocorrer em situações como a ilustrada na Figura 13. Podemos perceber que os conjuntos B e C têm interseção vazia. Analisaremos este caso considerando regras implicativas e conjuntivas.

Figura 13 – Contradição em uma base de regras.



Fonte: próprio autor.

Quando as regras são implicativas, sua agregação é feita através da interseção, conforme mostrado na Seção 1.7.2.1. Dessa forma, não existe $x \in A$, tal que x implica em $y \in B \cap C$, pois $B \cap C = \emptyset$. Logo, a situação ilustrada pela Figura 13 pode representar contradição, pois $B \subseteq C^C$.

Para discutirmos sobre a contradição em bases de regras conjuntivas, é necessária a introdução do conceito de ordem de Kulish-Miranker definida sobre a classe dos números fuzzy dada pelo conjunto

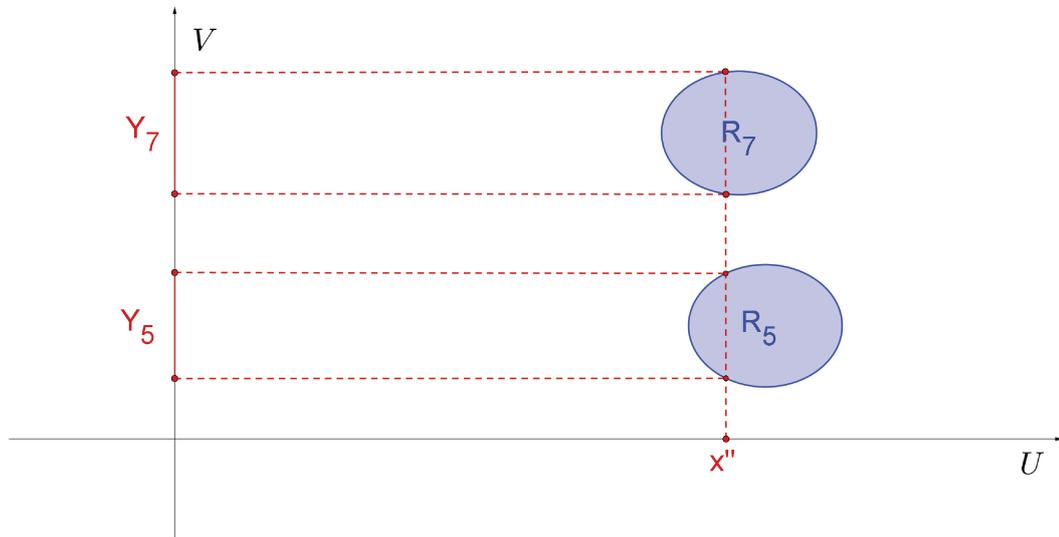
$$\mathbb{R}_{\mathcal{F}} = \{A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid [A]^{\alpha} = [a_L^{\alpha}, a_R^{\alpha}]e[B]^{\alpha} = [b_L^{\alpha}, b_R^{\alpha}], \forall \alpha \in [0, 1]\}.$$

Note que os conjuntos fuzzy triangulares/trapezoidais, frequentemente utilizados como antecedentes e consequentes de regras fuzzy em SBRF, pertencem ao conjunto $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Definição 2.1 (ordem de Kulish-Miranker (BUCKLEY, 2005)). *Sejam $A, B \in \mathbb{F}(\mathcal{R})$. Dizemos que $A \leq_K B$ se, e somente se, $a_L^\alpha \leq b_L^\alpha$ e $a_R^\alpha \leq b_R^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

A agregação de regras conjuntivas é feita através da união, conforme mostrado na Seção 1.7.2.1. Neste caso, um elemento $x \in A$ está associado a um elemento $y \in B \cup C$. Dessa forma, a identificação de contradição em base de regras conjuntivas é um caso que requer mais atenção. A literatura carece de fontes sobre uma definição formal de contradição em bases de regras conjuntivas. Entretanto, consideremos o caso ilustrado na Figura 14 que apresenta regras que podem ser contraditórias se os consequentes Y_5 e Y_7 sejam ordenados segundo alguma ordenação tal como a de Kulish Miranker.

Figura 14 – Regras que podem gerar contradição.



Representação de duas regras R_5 e R_7 , cujos espaços de entrada e saída são U e V , respectivamente. Para um valor x'' são mostrados os possíveis valores de saída Y_5 e Y_7 . Fonte: próprio autor.

Na Figura 14, podemos perceber que, no caso de regras implicativas, a contradição sempre ocorre, pois $Y_5 \cap Y_7 = \emptyset$. No caso de regras conjuntivas, a contradição pode ocorrer se houver um ordenamento dos consequentes.

Suponhamos que os consequentes da Figura 14 representem o tamanho de algum objeto, de forma que os conjuntos Y_5 e Y_7 poderiam representar, por exemplo, os valores *pequeno* e *grande*, respectivamente. Neste caso, teríamos, por exemplo $Y_5 < Y_7$ segundo um ordenamento como o de Kulish-Miranker. Assim, se as regras R_5 e R_7 são ativadas para uma entrada x e o método de defuzzificação utilizado é o do centroide, o valor defuzzificado na saída do SBRF estaria entre os conjuntos *pequeno* e *grande*, mas não pertenceria a nenhum dos dois conjuntos. Este é um caso de regras que representam informações contraditórias. Ademais, a ativação das regras indica que o tamanho do objeto

é *pequeno* e *grande* ao mesmo tempo. Isso pode indicar algum tipo de descontinuidade no fenômeno modelado ou um erro na elaboração das regras.

Outra questão importante acerca de contradição em uma base de regras conjuntiva é a escolha do defuzzificador. Quando, na situação mostrada na Figura 14, o defuzzificador utilizado é o centroide, a contradição acontece, porque o número *crisp* na saída do defuzzificador não pertence nem a Y_5 nem a Y_7 . Entretanto, a literatura não contempla tais observações sobre o defuzzificador.

O método proposto por Scarpelli et al. (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994) consiste na comparação de regras duas-a-duas e avaliação da consistência de tais regras para identificar potenciais contradições. Isso é feito a partir de um índice de consistência, que leva em consideração uma medida de similaridade. Dessa forma, se define *a priori* uma medida de similaridade para que o índice de consistência possa, então, ser propriamente definido.

Definição 2.2 (Similaridade (BUSTINCE; PAGOLA; BARRENECHEA, 2007)). *Uma função $S : \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ é chamada medida de similaridade se satisfaz as seguintes propriedades:*

- S1) *Comutatividade, ou seja, $S(A, B) = S(B, A)$ para todo $A, B \in \mathcal{F}(U)$;*
- S2) *$S(U, \emptyset) = 0$;*
- S3) *$S(A, A) = 1$ para todo $A \in \mathcal{F}(U)$;*
- S4) *Se $A \subseteq B \subseteq C$, então $S(A, C) \leq S(A, B)$ e $S(A, C) \leq S(B, C)$.*

O conceito apresentado no trabalho de (BUSTINCE; PAGOLA; BARRENECHEA, 2007) é o de equivalência fuzzy, não de similaridade. Entretanto, estes termos são profundamente relacionados e são usados alternadamente ou suas definições diferem com respeito a pequenas modificações da Definição 2.2 (ESMI; SUSSNER; SANDRI, 2016).

Exemplo 2.1. *Um exemplo de medida de similaridade bem conhecido:*

$$S(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}, \quad (2.1)$$

onde $|A| = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$ é a cardinalidade do conjunto fuzzy A (DUBOIS, 1980).

Na sequência, define-se o índice de consistência entre duas regras fuzzy.

Definição 2.3 (Índice de consistência entre duas regras fuzzy (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994)). *Sejam duas regras R_i do tipo “Se x_i is A_i , então y_i is B_i ”, $i = 1, 2$. O índice de consistência C entre as regras R_1 e R_2 é dado por*

$$C(R_1, R_2) = S(A_1, A_2) \longrightarrow_R S(B_1, B_2), \quad (2.2)$$

onde S é uma medida de similaridade e \longrightarrow_R é uma R -implicação.

Dessa forma, é possível perceber que o valor do índice de consistência é baixo quando a correspondência entre os antecedentes é alta e entre os consequentes é baixa, o que pode ser interpretado como uma potencial contradição entre as regras.

No caso de entradas multidimensionais, deve-se simplesmente usar o produto cartesiano dos antecedentes para cada entrada, ou seja, considerando duas regras do tipo $R_i = \text{“Se } x_1 \text{ is } A_{i1} \text{ e } x_2 \text{ is } A_{i2} \text{ e } \dots \text{ } x_n \text{ is } A_{in}, \text{ então } y \text{ is } B_i\text{”}$, $i = 1, 2$, o índice de consistência se torna

$$C(R_1, R_2) = S(A_{11} \times A_{12} \times \dots \times A_{1n}, A_{21} \times A_{22} \times \dots \times A_{2n}) \longrightarrow_R S(B_1, B_2).$$

A partir do índice de consistência é possível determinar se duas regras são potencialmente contraditórias ou não.

Definição 2.4 (Regras potencialmente contraditórias (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994)). *Sejam R_1 e R_2 duas regras do tipo “Se x_1 is A_{i1} e x_2 is A_{i2} e \dots x_n is A_{in} , então y is B_i ”, $i = 1, 2$. Então, R_1 e R_2 são ditas potencialmente contraditórias com respeito a $\beta \in [0, 1]$ se*

$$C(R_1, R_2) < \beta,$$

onde β é um valor limite dado de acordo com o contexto.

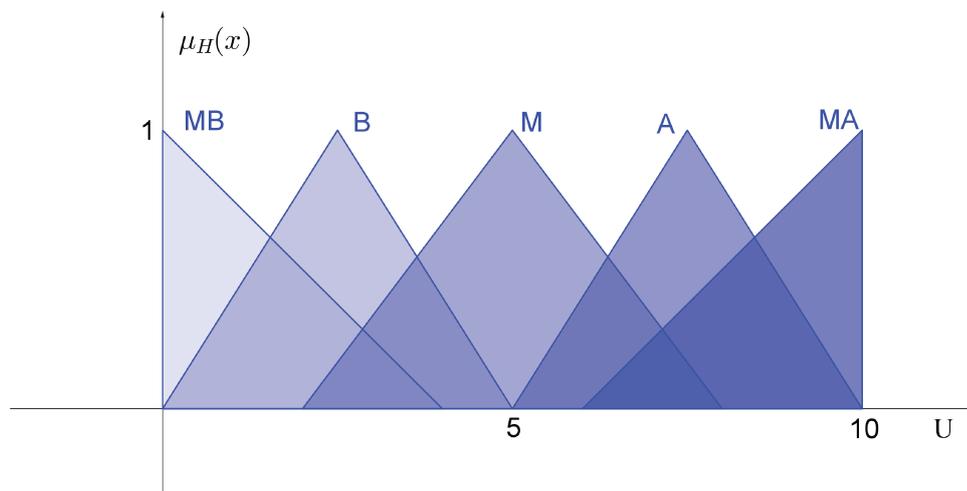
Para o caso de n regras, o número de comparações dois a dois é $c = n * (n - 1) / 2$.

2.1.1 Exemplo

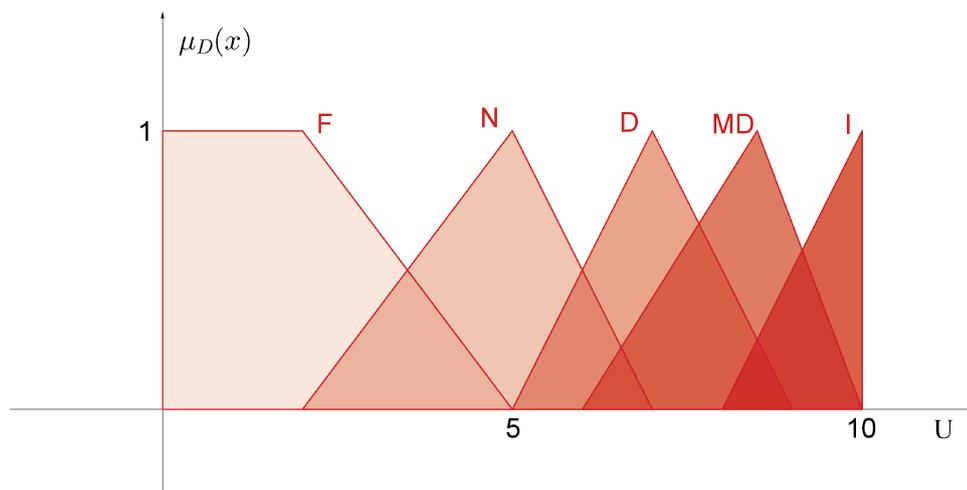
No mundo dos videogames de sucesso, um jogo é bem avaliado quando o nível de dificuldade é proporcional à habilidade do jogador. Suponhamos um sistema baseado em regras fuzzy incorporado a um jogo com a finalidade de manter o jogador desafiado. Para tal, a habilidade do jogador é medida através de uma fase teste para que, então, o SBRF seja capaz de selecionar um nível de dificuldade adequado.

Nesse SBRF, a variável linguística de entrada H é o *nível de habilidade do jogador* e a variável linguística de saída DJ é a *dificuldade do jogo*. Os valores de H são dados pelos conjuntos fuzzy *muito baixo (MB)*, *baixo (B)*, *médio (M)*, *alto (A)*, *muito alto (MA)*, definidos no espaço de entrada $U = [0, 10]$. Os valores de DJ são as dificuldades *fácil (F)*, *normal (N)*, *difícil (D)*, *muito difícil (MD)*, *insana (I)*, definidos no espaço de saída $V = [0, 10]$.

Os conjuntos fuzzy ilustrados pelas Figuras 15 e 16 são descritos abaixo. Para a variável H , tem-se:

Figura 15 – Antecedente H 

Representação gráfica das funções de pertinência do antecedente nível de habilidade do jogador H . Fonte: próprio autor.

Figura 16 – Consequente DJ 

Representação gráfica das funções de pertinência do consequente dificuldade do jogo DJ . Fonte: próprio autor.

- $MB = (0; 0; 4)$;
- $B = (0; 2, 5; 5)$;
- $M = (2; 5; 8)$;
- $A = (5; 7, 5; 10)$;
- $MA = (6; 10; 10)$.

Para a variável DJ , temos:

- $F = (0; 0; 2; 5);$
- $N = (2; 5; 7);$
- $D = (5; 7; 9);$
- $MD = (6; 8, 5; 10);$
- $I = (8; 10; 10).$

Assim sendo, consideremos as regras:

- R_1 : Se *nível de habilidade do jogador* é **muito baixo**, então *dificuldade do jogo* é **fácil**;
 R_2 : Se *nível de habilidade do jogador* é **baixo**, então *dificuldade do jogo* é **normal**;
 R_3 : Se *nível de habilidade do jogador* é **médio**, então *dificuldade do jogo* é **normal**;
 R_4 : Se *nível de habilidade do jogador* é **médio**, então *dificuldade do jogo* é **difícil**;
 R_5 : Se *nível de habilidade do jogador* é **alto**, então *dificuldade do jogo* é **muito difícil**;
 R_6 : Se *nível de habilidade do jogador* é **muito alto**, então *dificuldade do jogo* é **insana**;
 R_7 : Se *nível de habilidade do jogador* é **muito alto**, então *dificuldade do jogo* é **normal**.

Neste exemplo, usamos a medida de similaridade (2.1) e a implicação de Łukasiewicz (Exemplo 1.8) para avaliar o índice de consistência entre duas regras fuzzy 2.3. Dessa forma, podemos identificar regras potencialmente contraditórias para um dado β na Definição 2.4. Os resultados foram obtidos através de uma simulação no MATLAB[®] para três valores distintos de β , a saber, $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.7$ e $\beta_3 = 0.8$.

Para $\beta_1 = 0.5$ os pares de regras potencialmente contraditórias encontradas foram: (R_3, R_4) , (R_5, R_7) e (R_6, R_7) .

Em um segundo caso, em que $\beta_2 = 0.7$, as regras identificadas como potencialmente contraditórias foram: (R_3, R_4) , (R_5, R_6) , (R_5, R_7) e (R_6, R_7) .

Finalmente, para $\beta_3 = 0.8$, temos as seguintes regras potencialmente contraditórias: (R_1, R_2) , (R_3, R_4) , (R_5, R_6) , (R_5, R_7) e (R_6, R_7) .

Neste exemplo, podemos perceber que o valor $\beta_1 = 0.5$ é o suficiente para se identificar as regras que podem realmente causar erros de inferência, pois as regras R_3 e R_4 têm exatamente o mesmo antecedente e consequentes distintos, ao passo que a regra R_7 foi propositalmente elaborada de forma a estar em contradição com as últimas regras. Os pares (R_1, R_2) e (R_5, R_6) , que foram identificados pelo método como potencialmente contraditórios não apresentam contradição.

A seguir, serão abordados os resultados propostos por (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997) para uma base de regras implicativa.

2.2 Resultados para uma base de regras implicativa através do método de “refletindo sobre as entradas”

Conforme argumentado anteriormente, uma regra implicativa pode ser vista como uma restrição nos valores de entrada (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997). Dessa forma, Yager e Larsen (YAGER; LARSEN, 1991) argumentam que, através da projeção da relação que representa a base de regras, é possível encontrar restrições nos possíveis valores de entrada e, assim, anomalias podem ser identificadas. Essa estratégia de análise foi nomeada por eles como “refletindo sobre as entradas”, uma vez que a análise é feita a partir da projeção da relação no espaço de entrada do SBRF. Com efeito, Dubois et al. listam resultados em termos de condições necessárias e suficientes baseados nesse método.

Essa seção está dividida em duas partes: a primeira contempla resultados em termos de condições necessárias e suficientes para garantir a coerência de uma base de regras implicativas. Dessa forma, o método para a detecção de incoerência é classificado como dinâmico por (VIAENE; WETS; VANTHIENEN, 2000). A segunda trata de condições necessárias e/ou suficientes para a detecção de redundância de uma base de regras implicativa.

2.2.1 Coerência

Segundo (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997), uma base de regras ser coerente significa que não há restrições nos possíveis valores de entrada dessa base de regras. Em outras palavras, significa que a base de regras é consistente com qualquer entrada possível. Abaixo, é apresentada a definição formal de coerência.

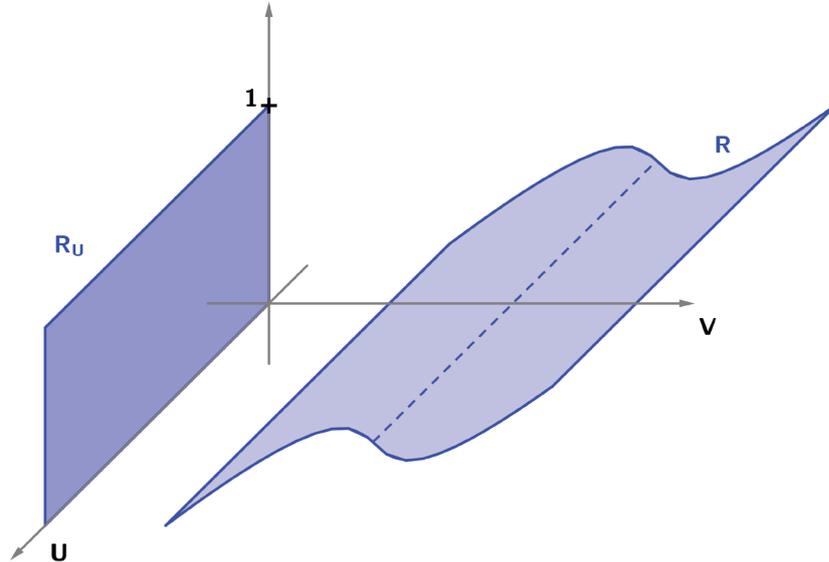
Definição 2.5 (Coerência (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *Sejam $U = U_1 \times \dots \times U_k$ e $V = V_1 \times \dots \times V_m$ os espaços de entrada e saída, respectivamente. Seja $\mu_R(x, y), x \in U, y \in V$ a relação que representa a base de regras R . A base de regras R é dita coerente com respeito aos dados de entrada se a projeção da base sobre U não produzir nenhuma restrição sobre o valor de entrada, ou seja, R é dita ser coerente se*

$$\text{proj}_U R(x) = \sup_{y \in V} \mu_R(x, y) = 1, \quad \forall x \in U. \quad (2.3)$$

Essa definição é baseada no método apresentado por (YAGER; LARSEN, 1991), chamado *refletindo sobre as entradas*, que propõe uma projeção da relação induzida pela base de regras sobre o espaço de entrada. Caso existam potenciais inconsistências, elas se manifestarão na forma de restrições sobre os possíveis valores de entrada do sistema. A partir daí, Dubois et al. (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997) apresentam resultados para regras considerando a implicação de Kleene-Dienes e implicações residuais. Uma representação gráfica de uma base de regras coerente pode ser vista na Figura 17, visto

que a projeção da função de pertinência μ_R sobre o espaço de entrada U é 1 em todo U , satisfazendo a Definição 2.5.

Figura 17 – Representação gráfica de uma base de regras coerente.



Observamos que a projeção R_U da base de regras R sobre o espaço de entrada U é 1 em todo U . Fonte: próprio autor.

Ademais, os seguintes resultados consideram que os conjuntos dos antecedentes e consequentes (A_i 's e B_i 's) são normalizados para que se garanta a coerência intrínseca de cada regra, definida a seguir.

Definição 2.6 (Coerência intrínseca de uma regra (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *Uma regra R_i é intrinsecamente coerente se*

$$\forall x \in U, \exists y \in V : \mu_{R_i}(x, y) = 1.$$

Utilizando o exemplo dos videogames da seção 2.1.1, temos que a regra

R_5 : Se *nível de habilidade do jogador* é **alto**, então *dificuldade do jogo* é **muito difícil**, modelada através da implicação de Kleene-Dienes (Exemplo 1.7), é uma regra intrinsecamente coerente. Isso ocorre porque o conjunto que modela o estado *difícil* do consequente *dificuldade do jogo* é normalizado, o que garante que existe pelo menos um y tal que $\mu_B(y) = 1$, implicando em $\mu_R(x, y) = 1$, para todo $x \in U$.

O seguinte resultado é uma condição necessária e suficiente para coerência de uma base de regras implicativas em que as regras são modeladas pela implicação de Kleene-Dienes.

Proposição 2.1 (Condição necessária e suficiente (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *Seja a base de regras implicativas $\{\text{Se } x \text{ is } A_i, \text{ então } y \text{ is } B_i | i = 1, \dots, n\}$. Se a implicação*

usada é a de Kleene-Dienes, então a relação R que representa a base de regras, isto é, $\mu_R(x, y) = \bigcap_i \mu_{A_i}(x) \rightarrow_{KD} \mu_{B_i}(y)$, é coerente se, e somente se, $\forall I \subseteq \{1, \dots, n\}$, tem-se

$$\bigcap_{i \in I} \text{supp}(A_i) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C(B_i) \neq \emptyset,$$

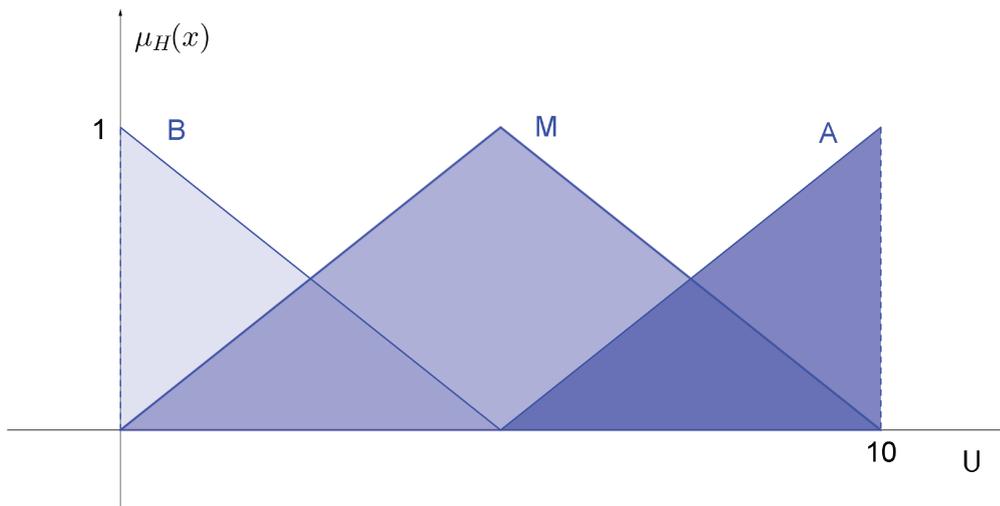
sendo $\text{supp}(A_i), i \in I$ o suporte do conjunto fuzzy A_i e $C(B_i), i \in I$ é o núcleo do conjunto fuzzy B_i .

Consideremos o exemplo da Subseção 2.1.1. Consideremos, também, que as regras são modeladas através da implicação de Kleene-Dienes. Essa base de regras não é coerente, uma vez que os núcleos dos consequentes não se intersectam.

Exemplo 2.2. *Apresentamos, agora, um exemplo mais simples do que o da seção 2.1.1, porém no mesmo contexto. Consideremos que os valores possíveis para o antecedente nível de habilidade do jogador H são baixo (B), médio (M) e alto (A), conforme mostra a Figura 18. Para o consequente dificuldade do jogo (DJ), os rótulos mostrados pela Figura 19 são fácil (F), normal (N) e difícil (D). Consideremos as regras implicativas modeladas pela implicação de Kleene-Dienes:*

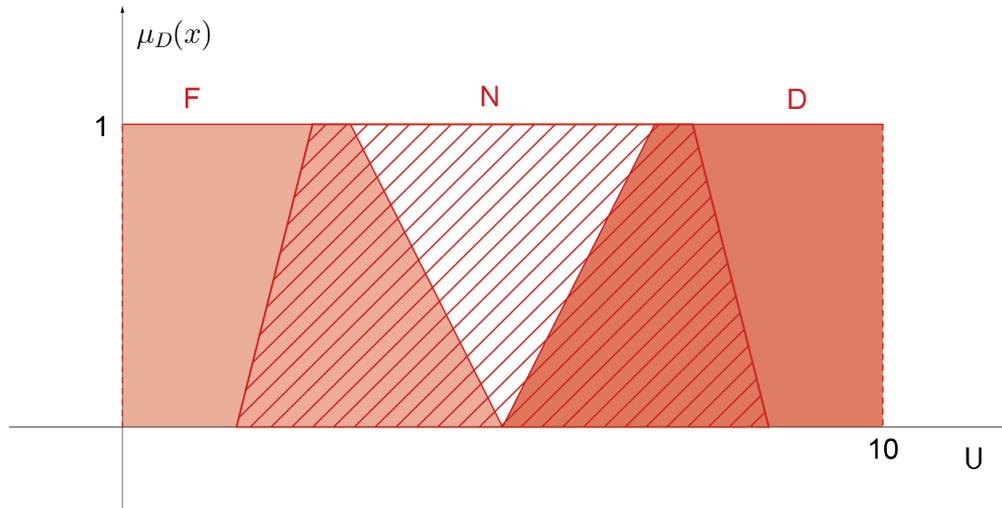
- R_1 : Se nível de habilidade do jogador é **baixo**, então dificuldade do jogo é **fácil**;
- R_2 : Se nível de habilidade do jogador é **médio**, então dificuldade do jogo é **normal**;
- R_3 : Se nível de habilidade do jogador é **alto**, então dificuldade do jogo é **difícil**.

Figura 18 – Antecedente H



Representação gráfica das funções de pertinência do antecedente nível de habilidade do jogador H . Fonte: próprio autor.

Nessa base de regras, os pares de regras (R_1, R_2) e (R_2, R_3) tem antecedentes cujo suporte se intersectam (B e M para o primeiro par de regras e M e A para o segundo

Figura 19 – Consequente D


Representação gráfica das funções de pertinência do consequente dificuldade do jogo D .
 Fonte: próprio autor.

par). Para os dois pares de regras, os núcleos dos consequentes também se intersectam (F, N e N, D , respectivamente). Os suportes dos antecedentes do par de regras (R_1, R_3) B e A não se intersectam. Logo, essa base de regras é coerente.

O segundo resultado, apresentado a seguir, considera regras implicativas modeladas através de quaisquer implicações residuais. Entretanto, a condição necessária e suficiente é apresentada se considerando a t-norma do mínimo e a implicação de Rescher-Gaines, uma vez que a coerência diz respeito ao núcleo da relação R que representa a base de regras (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997).

Lembrando que a implicação de Rescher-Gaines é definida da seguinte forma:

$$x \longrightarrow_{RG} y = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ 0, & \text{se } x > y \end{cases}$$

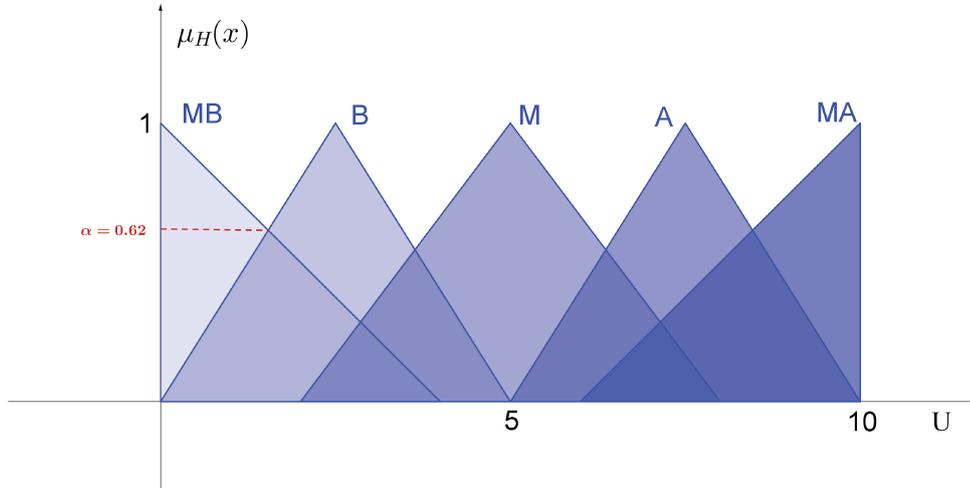
Proposição 2.2 (Condição necessária e suficiente para coerência (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *Seja a base de regras implicativas $\{\text{Se } x \text{ is } A_i, \text{ então } y \text{ is } B_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Se a implicação usada é a de Rescher-Gaines, então a relação R que representa a base de regras, isto é, $\mu_R(x, y) = \bigcap_i \mu_{A_i}(x) \longrightarrow_{RG} \mu_{B_i}(y)$, é coerente se, e somente se, $\forall I \subseteq \{1, \dots, n\}$ tem-se*

$$\bigcap_{i \in I} [A_i]^{\alpha_i} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} [B_i]^{\alpha_i} \neq \emptyset, \quad \forall \alpha_i \in (0, 1].$$

Retomemos os exemplos do videogame. Consideremos primeiramente o exemplo da seção 2.1.1 com as regras modeladas pela implicação de Rescher-Gaines. Considerando

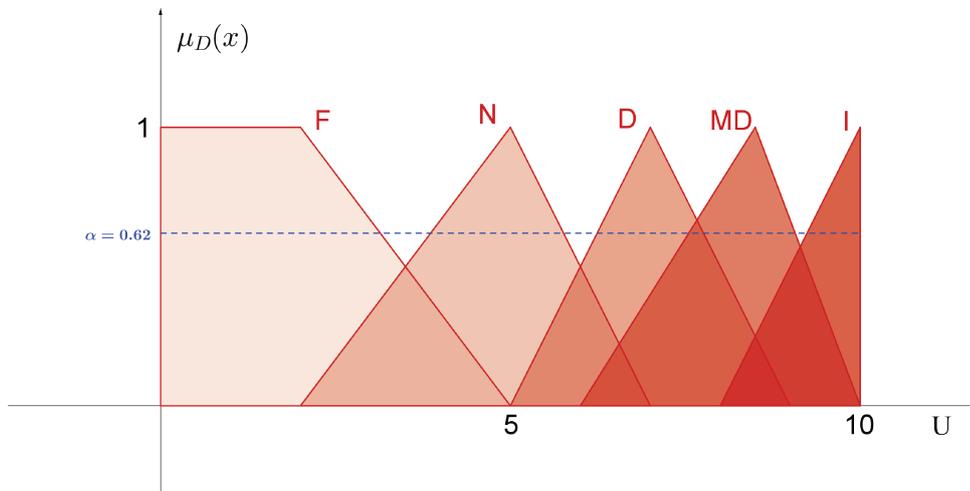
$\alpha = 0,62$ e o par de regras R_1 e R_2 , pode-se perceber que os α -níveis dos antecedentes se intersectam, ao passo que o dos consequentes não se intersectam (Figuras 20 e 21). Logo, essa base de regras é incoerente.

Figura 20 – Antecedente H



Representação gráfica do α -nível= 0,62 no antecedente H . Fonte: próprio autor.

Figura 21 – Consequente D

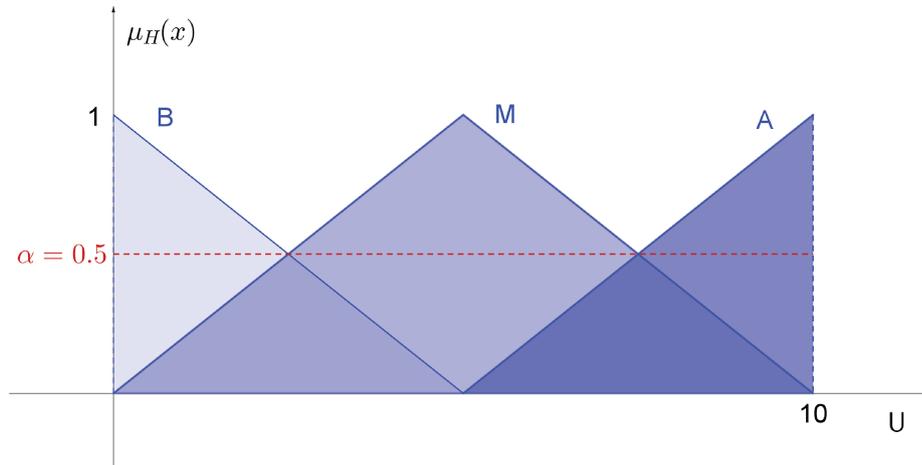


Representação gráfica do α -nível= 0,62 no consequente D . Fonte: próprio autor.

Por outro lado, no exemplo simplificado apresentado imediatamente antes da última proposição, a condição necessária e suficiente é satisfeita. A Figura 22 representa graficamente o valor mais alto de α para o qual os antecedentes se intersectam, considerando os pares de regras (R_1, R_2) e (R_2, R_3) . A Figura 23 mostra que os consequentes dessas regras (F, M) e (M, D) , respectivamente) também se intersectam neste α -nível e em todos os outros para valores de α menores. Logo, essa base de regras é coerente.

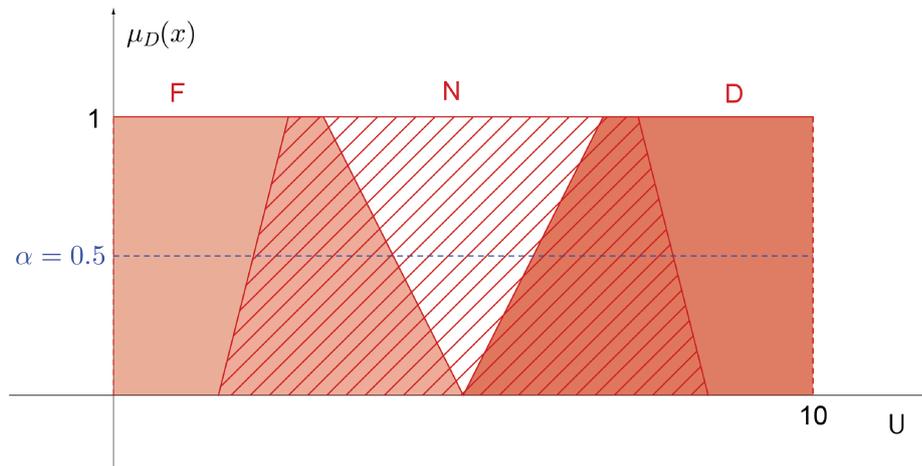
Agora, apresentamos a definição de redundância para uma base de regras implicativa, bem como os resultados que permitem identificá-la.

Figura 22 – Antecedente H



Representação gráfica do α -nível no antecedente H , com $\alpha = 0,5$. Fonte: próprio autor.

Figura 23 – Consequente D



Representação gráfica do α -nível no consequente D , com $\alpha = 0,5$. Fonte: próprio autor.

2.2.2 Redundância

Conforme apresentado por (VIAENE; WETS; VAN THIENEN, 2000), as noções de inconsistência e redundância são diferentes para cada autor. Assim, sendo, apresentamos, agora, a definição de redundância para uma base de regras implicativa, segundo o trabalho de (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997).

Definição 2.7 (Redundância). *Seja R uma base de regras composta por n regras, digamos, R_1, \dots, R_n . Uma regra R' será dita redundante com respeito a R se, e somente se*

$$\mu_R(x, y) = \min_{i=1, \dots, n} \mu_{R_i}(x, y) \leq \mu_{R'}(x, y),$$

sendo que $\mu_{R_i}, \mu_{R'} \in \mathcal{F}(U \times V)$ são as funções de pertinência, dadas pela equação (1.2), que representam as regras R_i e R' , respectivamente.

Na sequência, apresentamos três proposições que nos dão resultados básicos sobre redundância.

Proposição 2.3 (Redundância não é fonte de incoerência (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *Se uma base de regras é coerente no sentido de (2.3), então adicionar uma regra redundante não torna a base incoerente.*

Proposição 2.4 (Redundância de uma regra trivial (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *A regra trivial “Se x is A , então y is V ” (onde V é o espaço de saída inteiro) é redundante com respeito a qualquer base de regras cujo espaço de saída é V .*

Proposição 2.5 ((DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *Se uma regra R é redundante com respeito a R_1 , então ela é redundante com respeito a qualquer base de regras que contenha R_1 .*

Assim como foi feito na seção 2.2.1, serão mostrados os resultados para regras implicativas modeladas com a implicação de Kleene-Dienes e com as implicações residuais. Entretanto, é necessário introduzir mais dois conceitos para, em seguida, apresentar esses resultados. Esses conceitos são o de conjunto fuzzy incerto e que não contém incerteza. Seguem as definições.

Definição 2.8 (Conjunto fuzzy incerto e que não contém incerteza (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *Um conjunto fuzzy A é dito:*

- *incerto, se existe $\lambda > 0$ tal que $\inf_x \mu_A(x) = \lambda$;*
- *que não contém incerteza, se $\inf_x \mu_A(x) = 0$.*

Exemplo 2.3. *O conjunto fuzzy A em \mathbb{R} , tal que $\mu_A(x) = 0.4, \forall x \in \mathbb{R}$ é um conjunto fuzzy incerto. Em contrapartida, o conjunto fuzzy triangular $B = (2; 3; 4)$ em \mathbb{R} é um conjunto que não contém incerteza, pois $\mu_B(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus (2, 4)$.*

Uma vez introduzidos esses conceitos, consideremos uma base de regras implicativa em que as regras são modeladas pela implicação de Kleene-Dienes. Uma condição necessária e suficiente para redundância com respeito a uma regra é apresentada a seguir.

Proposição 2.6 (Condição necessária e suficiente para redundância (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). *Se A é normal e B não contém incerteza, então a regra $A \rightarrow_{KD} B$ é redundante com respeito a $A_1 \rightarrow_{KD} B_1$ se, e somente se,*

$$A \subseteq A_1 \quad e \quad B_1 \subseteq B.$$

Tomemos, como exemplo, o problema de manter uma sala em uma temperatura confortável, digamos, em torno de 24°C. Assim, consideremos o antecedente *temperatura*

externa e o conseqüente *estado do ar condicionado*, definidas nos universos $U = [0, 50]$ e $V = \{-1, 0, 1\}$, respectivamente. Os rótulos do antecedente são *muito frio (MF)*, *frio (F)*, *agradável (A)* e *quente (Q)*, representados pelas seguintes funções de pertinência trapezoidais: $MF = (0; 0; 10; 15)$, $F = (0; 0; 18; 23)$, $A = (20; 24; 24; 28)$ e $Q = (25; 30; 50; 50)$. Os valores do conseqüente são *esfriando (EF)*, *desligado (D)* e *esquentando (EQ)*, cujas funções de pertinência são as funções características dos valores $-1, 0$ e 1 , respectivamente.

A base de regras é composta pelas seguintes regras:

R_1 : Se *temperatura externa* é **muito fria**, então *estado do ar condicionado* é **esquentando**;

R_2 : Se *temperatura externa* é **fria**, então *estado do ar condicionado* é **esquentando**;

R_3 : Se *temperatura externa* é **agradável**, então *estado do ar condicionado* é **desligado**;

R_4 : Se *temperatura externa* é **quente**, então *estado do ar condicionado* é **esfriando**.

Consideremos que essa base de regras é modelada através da implicação de Kleene-Dienes. Levemos em conta as regras R_2 e R_1 . O conjunto fuzzy que modela o estado *muito fria* do antecedente da regra R_1 é normal (pois $\mu_{MF}(0) = 1$). No conseqüente, o conjunto fuzzy que modela o estado *esquentando* não contém incerteza (pois $\mu_{EQ}(-1) = \mu_{EQ}(0) = 0$). Dessa forma, a regra R_1 atende às condições da proposição 2.6. Nota-se, também, que $MF \subseteq F$ e os conseqüentes são iguais e $EQ \subseteq EQ$. Portanto, R_1 é redundante com respeito a R_2 . Da proposição 2.5, temos que R_1 é redundante com respeito a uma base de regras composta pelas regras R_2, R_3 e R_4 .

Agora, considerando uma base de regras cujas regras são modeladas através da implicação de Gödel e de Rescher-Gaines, temos outros dois resultados expressivos.

Proposição 2.7 (Condições necessárias e suficientes para redundância com implicação de Gödel (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). $A \rightarrow_G B$ é redundante com respeito a $A_1 \rightarrow_G B_1$ se, e somente se,

$$B_1 \subseteq B \quad e \quad \forall x \in U, \quad \mu_A(x) \leq \inf\{\mu_B(y) \mid \mu_{B_1}(y) \geq \mu_{A_1}(x)\}.$$

Proposição 2.8 (Condições necessárias e suficientes para redundância com implicação de Rescher-Gaines (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997)). $A \rightarrow_{RG} B$ é redundante com respeito a $A_1 \rightarrow_{RG} B_1$ se, e somente se,

$$B_1 \subseteq C(B) \quad e \quad \forall x \in U, \quad \mu_A(x) \leq \inf\{\mu_B(y) \mid \mu_{B_1}(y) \geq \mu_{A_1}(x)\}.$$

Os resultados aqui apresentados são os resultados mais gerais do trabalho de (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997). Entretanto, o trabalho citado apresenta outros resultados para casos mais específicos, como bases de regras contendo duas regras e antecedentes crisp, por exemplo, que não serão explorados no presente trabalho. Na seção

seguinte, que fecha o capítulo, são apresentadas considerações finais sobre os três métodos propostos.

2.3 Considerações finais sobre os métodos

O primeiro método apresentado é considerado estático por (VIAENE; WETS; VANTHIENEN, 2000) e trata da identificação de anomalias em uma base de regras fuzzy tanto conjuntivas quanto implicativas. Já os resultados da seção 2.2 consideram apenas bases de regras implicativas. Os resultados são baseados no método de *refletindo sobre as entradas* proposto por (YAGER; LARSEN, 1991). Esse método, por tratar apenas de regras implicativas é considerado dinâmico por (VIAENE; WETS; VANTHIENEN, 2000), por levar em conta o operador que modela a condicional “*Se ... então*”. Esses métodos são úteis para auxiliar na validação do sistema de base de regras fuzzy ora indicando ao especialista quais regras podem ser inconsistentes, ora estabelecendo condições para que uma base de regras seja coerente.

No próximo capítulo, será apresentada uma base de regras para o cálculo de risco de endometriose e, através dos métodos apresentados, regras potencialmente *contraditórias* serão apontadas. Nesse caso, devido ao número de regras que constituem a base de regras, a identificação de redundância é menos relevante que contradição, pois a primeira não altera o resultado da inferência mas apenas o por tempo de computação, ao passo que a segunda pode gerar erros de inferência.

3 Aplicação: SBRF estimador de risco de endometriose

O processo de diagnosticar uma patologia envolve o conhecimento e a experiência de um especialista. Em muitos casos, os sintomas relatados por pacientes são determinantes no diagnóstico de uma patologia. Sintomas são, comumente, associados a imprecisões e/ou incertezas, de forma que a teoria de conjuntos fuzzy se encaixa perfeitamente no propósito de modelar tais variáveis. Como exemplo de sintomas cujas fronteiras não são bem definidas, podemos citar níveis de dor e cansaço. Os SBRF já foram utilizados em outros trabalhos da área médica, como, por exemplo, a análise prognóstica de câncer de rim (SACILOTTO; VENDITE; SILVEIRA, 2018), o estadiamento de câncer de próstata (SILVEIRA, 2007) e a avaliação do risco de doenças cardiovasculares (BASSANI, 2016).

Apresentaremos, neste capítulo, um SBRF para estimar o risco de uma paciente ter endometriose, cuja base de regras foi desenvolvida em colaboração com o especialista Dr. Kleber Cursino de Andrade. A utilização de um SBRF é adequada ao problema em questão, uma vez que os principais sintomas da enfermidade em questão têm caráter impreciso (dores e níveis de cansaço), exceto a infertilidade, como será abordado adiante.

Iniciamos o capítulo apresentando a patologia, seus sinais e sintomas, diagnóstico e tratamento na Seção 3.1. Na Seção 3.2, serão apresentadas as variáveis linguísticas utilizadas, seus rótulos e domínios e a base de regras implementada no sistema. A Seção 3.3 contempla os primeiros resultados considerando o método de inferência de Mamdani. A aplicação do método baseado em similaridade apresentado no Capítulo 2 à base de regras do sistema proposto neste trabalho é apresentada na Seção 3.4

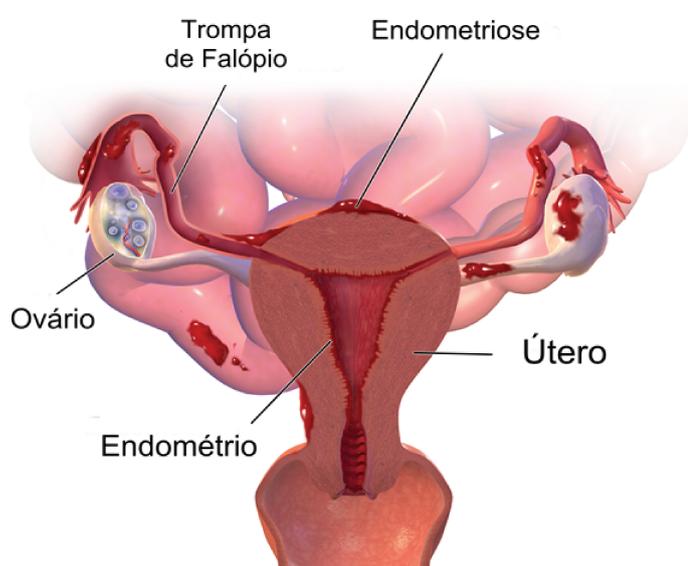
3.1 Endometriose

A endometriose é uma patologia caracterizada como a presença de tecido endometrial fora da cavidade uterina, causando uma reação inflamatória crônica (KENNEDY et al., 2005; CRAMER; MISSMER, 2002). A prevalência (taxa de indivíduos afetados pela patologia) é assumida entre 5% e 10% nas mulheres em idade reprodutiva (MISSMER et al., 2004; ESKENAZI; WARNER, 1997; VIGANÒ et al., 2004). No entanto, considerando as mulheres inférteis, a prevalência é estimada em até 50% (MEULEMAN et al., 2009).

A endometriose é uma das condições benignas mais comuns (ESKENAZI; WARNER, 1997; ULRICH; WILDE, 2016; SCHLEEDOORN et al., 2016) e a principal hipótese de patogênese é o refluxo menstrual (VIGANÒ et al., 2004; MISSMER et al., 2004). Ela pode ser encontrada em diversas partes do corpo, sendo mais comuns: ovários;

ligamentos uterinos; septo retovaginal; peritônio pelviano que cobre o útero, trompas, reto sigmoide ou bexiga; umbigo; cicatrizes de laparotomia; sacos herniários; apêndice; vagina; vulva; cotos de trompa e gânglios linfáticos (NOVAK; NOVAK, 1960). Um tipo particular de endometriose é denominado *endometriose profunda* e é definido como o envolvimento do septo retovaginal, fórnix vaginal, retroperitônio (parede lateral pélvica, paramétrio), intestino, uretra e bexiga urinária. Como exemplo, podemos observar a Figura 24, um caso onde há tecido endometrial na parede uterina, nos ovários, nas trompas e no intestino, caracterizando, assim, a endometriose.

Figura 24 – Sistema reprodutor feminino com endometriose



Podemos notar a presença da endometriose na parede uterina, nos ovários, nas trompas e no intestino. Fonte: Instituto CRISPI de Cirurgias Minimamente Invasivas. (CRISPI, Acessado em 3 de janeiro de 2018)

As mulheres sintomáticas acometidas pela enfermidade em questão têm sua qualidade de vida reduzida (NNOAHAM et al., 2011; ESKENAZI; WARNER, 1997), pois dois dos impactos pessoais mais graves acarretados pela doença são dores, por vezes incapacitantes, e infertilidade (NNOAHAM et al., 2011; ESKENAZI; WARNER, 1997; CRAMER; MISSMER, 2002). Ademais, embora seja raro, alguns tipos de câncer, como o ovariano, podem surgir a partir da endometriose (ULRICH; WILDE, 2016). Um agravante é o tempo de espera pelo diagnóstico definitivo, que é avaliado em mais de 5 anos na maior parte dos casos (SCHLEEDOORN et al., 2016; DUNSELMAN et al., 2014).

Prejuízos sociais também estão associados à endometriose: o custo total por país europeu com a patologia é estimado entre 0,8 a 12,5 bilhões de euros por ano, enquanto o custo anual por paciente nesses países é estimado em 9900 euros, onde a perda de produtividade representa cerca de 75% desse valor (SCHLEEDOORN et al., 2016). Outras fontes (NNOAHAM et al., 2011) sugerem que a perda de produtividade por cada mulher

afetada varia de US\$ 208 na Nigéria a US\$ 23.712 na Itália. A propósito, absenteísmo (ausência no trabalho) e presenteísmo (presença sem produtividade) são mais frequentes em mulheres acometidas pela patologia (NNOAHAM et al., 2011).

3.1.1 Sinais e sintomas

Embora haja casos assintomáticos, os sinais e sintomas da endometriose são responsáveis pela perda de qualidade de vida das mulheres acometidas pela enfermidade. Os principais sintomas apresentados na literatura (VIGANÒ et al., 2004; SCHLEEDOORN et al., 2016; DUNSELMAN et al., 2014; CRAMER; MISSMER, 2002; ESKENAZI; WARNER, 1997) são:

- Dismenorreia (cólica menstrual);
- Dispareunia (dor durante a relação sexual);
- Infertilidade;
- Dor pélvica crônica;
- Cansaço/fadiga;
- Dores nas costas e/ou pernas;
- Disúria (dor ao urinar);
- Síndrome do intestino irritável;
- Menor idade ao passar pela menarca;
- Maior volume menstrual;
- Ciclos menstruais menores que 27 dias.

Destes, destacam-se a dismenorreia, dor pélvica crônica, infertilidade, dispareunia e cansaço. Pode-se observar a natureza subjetiva desses sintomas, exceto a infertilidade. Tomando por exemplo a dismenorreia, é possível que uma mulher exposta a essa dor durante muito tempo desenvolva uma menor sensibilidade a ela. Em particular, os sintomas relacionados a dor podem ter imprecisões que se devem desde a fatores culturais até a descrença da paciente quanto à natureza das irregularidades e risco de estigmatização (ESKENAZI; WARNER, 1997; NNOAHAM et al., 2011).

3.1.2 Diagnóstico e tratamento

O padrão-ouro para detecção de endometriose é a combinação entre a laparoscopia e a verificação histológica do material coletado (DUNSELMAN et al., 2014; ULRICH; WILDE, 2016; ESKENAZI; WARNER, 1997; MISSMER et al., 2004). A laparoscopia é um procedimento minimamente invasivo no qual um tubo contendo uma minicâmera é introduzido pelo umbigo da paciente de forma a se observar o interior do abdômen da paciente e fazer coleta de material para biópsias (BIEBER, 2003). O exame clínico vaginal deve ser realizado em todas as mulheres com suspeita de endometriose, embora o exame retal seja mais adequado a mulheres sem intercurso prévio (DUNSELMAN et al., 2014).

Para se diagnosticar ou excluir a possibilidade de endometriose retal e endometrioma ovariano (nome dado aos cistos de tecidos endometriais encontrados no interior dos ovários) é utilizada a ultrassonografia transvaginal (DUNSELMAN et al., 2014; SCHLEEDOORN et al., 2016; ULRICH; WILDE, 2016). O caso do diagnóstico de endometriose envolvendo rins e bexiga pode exigir outros exames de imagem (DUNSELMAN et al., 2014). No caso de endometriose profunda, o diagnóstico primário é feito clinicamente por palpação retovaginal, inspeção com espéculos divididos, ultrassom transvaginal e ultrassom transabdominal dos rins (ULRICH; WILDE, 2016).

O atraso no diagnóstico ultrapassa 5 anos na maior parte dos casos (SCHLEEDOORN et al., 2016; DUNSELMAN et al., 2014). Isso se deve em partes à natureza subjetiva dos sintomas. Por outro lado, o tratamento empírico – que consiste na administração de contraceptivos orais e analgésicos para tratamento de dores como a dismenorreia – pode atrasar o diagnóstico, uma vez que este mascara os sintomas (ULRICH; WILDE, 2016). Ainda, um maior *índice de massa corpórea (IMC)* das pacientes é relacionado a um maior atraso no diagnóstico. Isso pode ocorrer devido à dificuldade de se detectar a patologia no exame pélvico clínico em pacientes com alto IMC (ULRICH; WILDE, 2016).

Uma das formas de se tratar a endometriose é utilizando-se contraceptivos hormonais, progestágenos e antiprogestágenos, que constituem uma forma de tratamento hormonal utilizada para reduzir os sintomas relacionados à dor e, por consequência, aumentar a qualidade de vida da paciente (DUNSELMAN et al., 2014). Outra forma de tratamento hormonal é a supressão hormonal (CRAMER; MISSMER, 2002; MISSMER et al., 2004). Entretanto, o padrão-ouro de tratamento é a remoção cirúrgica das lesões endometrióticas (ULRICH; WILDE, 2016). Essa abordagem aumenta as chances de fertilidade em pacientes inférteis em consequência da endometriose (NOWROOZI et al., 1987; JACOBSON et al., 2009; ULRICH; WILDE, 2016).

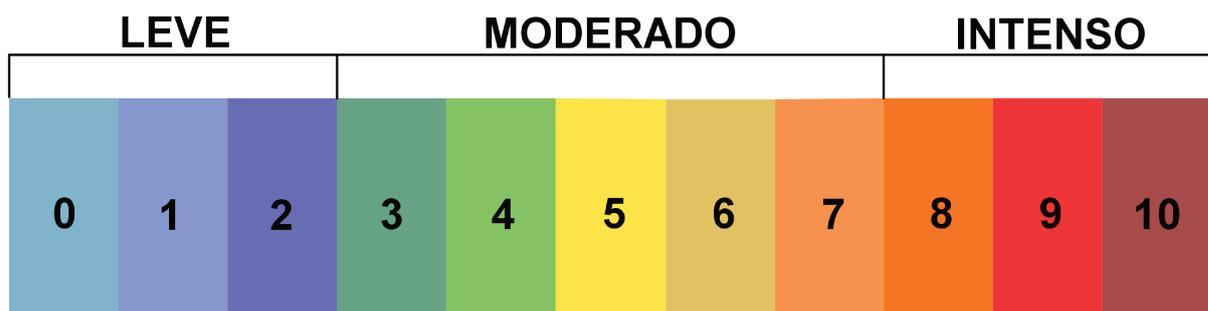
Na sequência, será apresentada a proposta de modelagem do estimador de risco de endometriose utilizando um SBRF.

3.2 Estimador de risco de endometriose

Iniciamos a discussão sobre o sistema estimador apresentando os quatro sinais/sintomas modelados pelas variáveis linguísticas do sistema. São eles: *dismenorreia* (*DM*), *dispareunia* (*DP*), *dores nas costas e/ou pernas* (*DC*) e *cansaço* (*C*). As variáveis foram determinadas como sendo as melhores representantes para o SBRF por sugestão do especialista Dr. Kleber Cursino de Andrade e também pela literatura (VIGANÒ et al., 2004; SCHLEEDOORN et al., 2016; DUNSELMAN et al., 2014; CRAMER; MISSMER, 2002; ESKENAZI; WARNER, 1997). Outro sintoma bastante relevante é a *infertilidade*. Entretanto, como nem todas as mulheres suscetíveis à enfermidade tentam engravidar (inclusive uma parte delas é adolescente), então a infertilidade não será considerada nesta modelagem. O conseqüente é o *risco* (*de uma mulher ter endometriose* – *RS*).

As entradas possíveis do sistema são as escolhas das pacientes. Os valores de entrada x_1, x_2, x_3 e x_4 , representados por $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, estão definidos no intervalo $[0, 10]$, conforme a escala visual analógica (EVA), representada na Figura 25, amplamente utilizada no ramo médico, onde x_1, x_2, x_3 e x_4 correspondem aos valores de entrada das variáveis linguísticas *dismenorreia*, *dispareunia*, *dores nas costas e/ou pernas* e *cansaço*, respectivamente. A saída do sistema é o *risco da paciente ter endometriose* (y) e é definido o intervalo $V = [0, 100]$, sendo que a unidade do espaço V é dada em porcentagem. Uma visão geral do sistema utilizado pode ser visto na Figura 26.

Figura 25 – Escala Visual Analógica – EVA

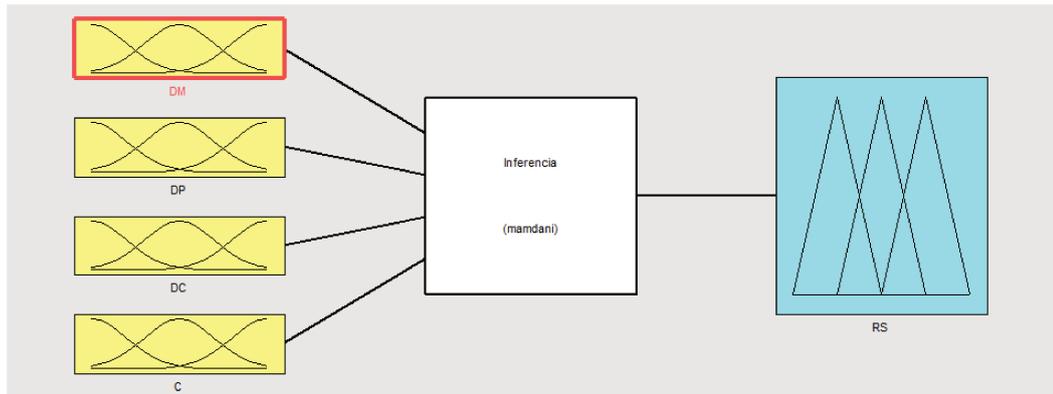


Fonte: próprio autor.

Os antecedentes *DM*, *DP*, *DC* e *C* podem assumir os conjuntos fuzzy *leve* (L), *moderado* (M) e *intenso* (I), ilustrados na Figura 27. Especificamente, consideramos os seguintes conjuntos fuzzy triangulares baseados na EVA: $L = (0; 0; 5)$, $M = (0; 5; 10)$ e $I = (5; 10; 10)$.

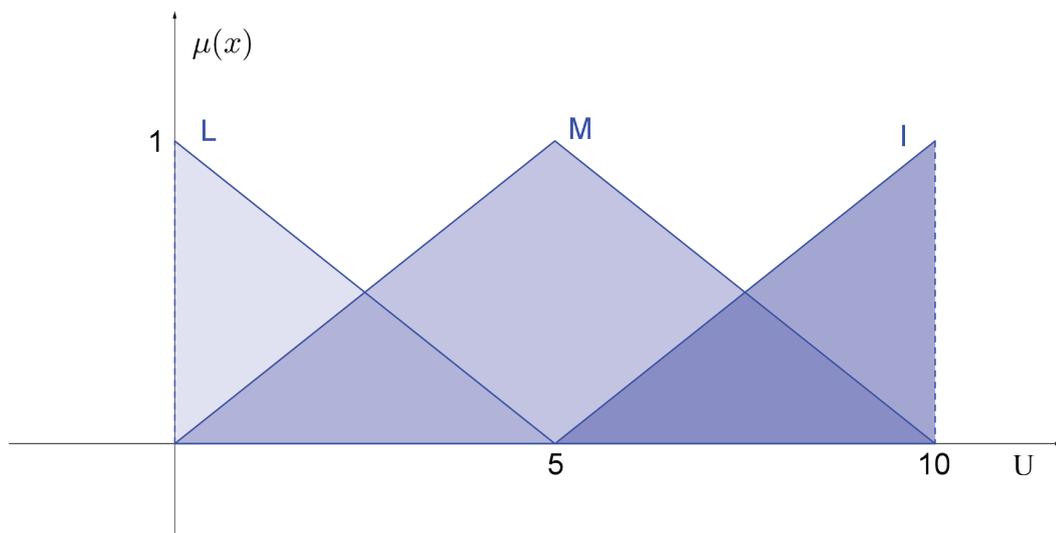
Já os rótulos do conseqüente *risco* RS são *improvável* (IP), *pouco provável* (PP), *provável* (PR), e *muito provável* (MP). Esses rótulos são modelados através dos seguintes conjuntos fuzzy triangulares: $IP = (0; 0; 33, 3)$, $PP = (0; 33, 3; 66, 7)$, $PR =$

Figura 26 – Visão geral do SBRF estimador de risco de endometriose



Em amarelo, observam-se os antecedentes DM , DP , DC e C , que são modelados por conjuntos fuzzy. Em verde, encontra-se o consequente RS . O módulo de inferência, composto pela base de regras e pelo método de inferência, pode ser visto em branco. Neste caso, o método de inferência utilizado é o de Mamdani. Fonte: próprio autor.

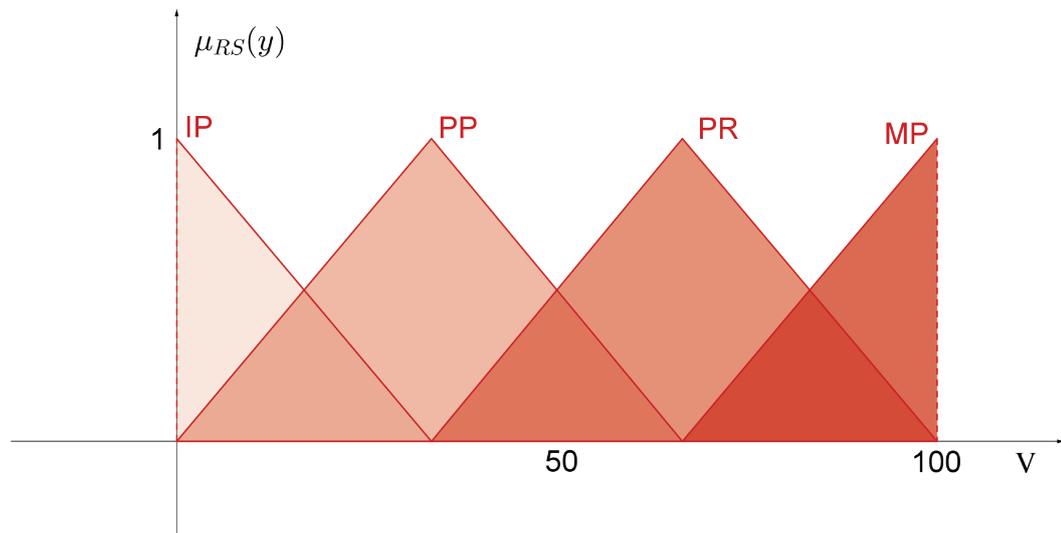
Figura 27 – Descritores dos antecedentes DM , DP , DC e C



Fonte: próprio autor.

$(33, 3; 66, 7; 100)$ e $MP = (66, 7; 100; 100)$. A representação gráfica desses conjuntos fuzzy é ilustrada na Figura 28.

A base de regras foi formulada levando em consideração todas as combinações possíveis de antecedentes. De modo geral, para uma base de regras contemplar todas as combinações possíveis, são necessárias $\prod_{i=1}^n r_i$ regras, onde n é o número de antecedentes e r_i o número de rótulos do i -ésimo antecedente, isto é, o número de conjuntos fuzzy que o i -ésimo antecedente pode assumir. Como temos 4 antecedentes e 3 descritores para cada um deles, o total de regras que compõe a base de regras é de $3^4 = 81$ regras fuzzy. Essas regras fuzzy são do tipo:

Figura 28 – Descritores do consequente RC 

Fonte: próprio autor.

Se Dismenorreia is leve e Dispareunia is leve e Dores nas pernas e/ou nas costas is leve e Cansaço is leve, então o risco de endometriose is improvável.

O SBRF empregado como estimador do risco de uma mulher ter endometriose é baseado no conhecimento e experiência do Dr. Kleber Cursino de Andrade. Sua colaboração foi fundamental para o trabalho, pois ele avaliou o risco para cada combinação possível de antecedentes e preencheu a Tabela 8 contida no Apêndice A com os valores de risco.

O método de fuzzificação utilizado foi a inclusão canônica, em que o número natural na entrada é representado por sua função característica.

Cada regra fuzzy do sistema têm caráter de parte de informação, e não de restrição nos possíveis valores de entrada. Assim, a modelagem matemática da condicional “Se . . . então” é feita através de uma conjunção (t-norma). O método de inferência escolhido foi o método de Mamdani, apresentado na Seção 1.7.2.3, devido à natureza das regras e ao êxito da aplicação desse método em problemas similares (SILVEIRA, 2007; BARROS; BASSANEZI; LODWICK, 2017; BASSANI, 2016).

O método de defuzzificação utilizado é o do centroide, que elege um representante do conjunto fuzzy da saída do método de inferência, como mostrado na seção 1.7.3. Esse valor de saída é considerado o risco porcentual de uma mulher ter endometriose.

3.3 Simulações com o método de Mamdani

Esta seção contempla os resultados da aplicação do SBRF de Mamdani para estimar risco de uma paciente ter endometriose. As simulações foram feitas no *toolbox*

fuzzy do MATLAB®.

Com a finalidade de ilustrar tal aplicação, são apresentados cinco casos: dois casos extremos e três casos intermediários. O caso extremo inferior corresponde a todas as entradas com valor mínimo, ou seja, 0. Por outro lado, o extremo superior considera todas as entradas com valor mais alto o possível para todas as variáveis de entrada, sendo, neste caso, 10.

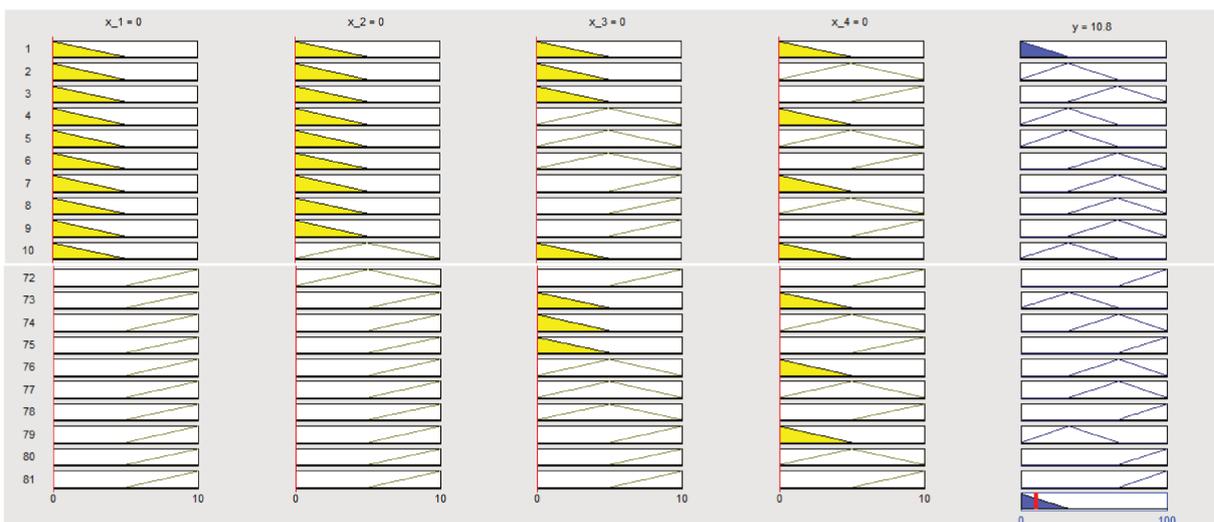
Além disso, é apresentada uma estimativa de relevância de cada sintoma. Como será apresentado na Seção 3.3.1, o comportamento desses sintomas justifica o uso das técnicas de detecção de potenciais inconsistências, introduzidas no Capítulo 2. Como as regras são conjuntivas, será usado o método baseado em similaridade (Seção 2.1) para detecção de potenciais anomalias.

Continuamos a discussão apresentando os casos.

Caso 1 - Extremo inferior: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$.

Este primeiro caso simula um cenário em que a paciente é assintomática. A Figura 29 mostra as dez primeiras e as dez últimas regras do sistema para o caso $x = (0, 0, 0, 0)$, bem como a saída do módulo de inferência e o valor da saída (defuzzificado), representado por y . Neste caso, é interessante observar que apenas a primeira regra é ativada. O valor de saída $y = 10,8\%$ representa o risco de uma mulher assintomática ter endometriose. Endometriose assintomática é definida como o encontro incidental de endometriose peritoneal, ovariana ou profunda sem dor pélvica e/ou infertilidade (DUNSELMAN et al., 2014) e constitui um cenário que pode ocorrer quando a paciente é submetida à laparoscopia por outras causas que não a endometriose.

Figura 29 – Saída do sistema para entrada $(0, 0, 0, 0)$

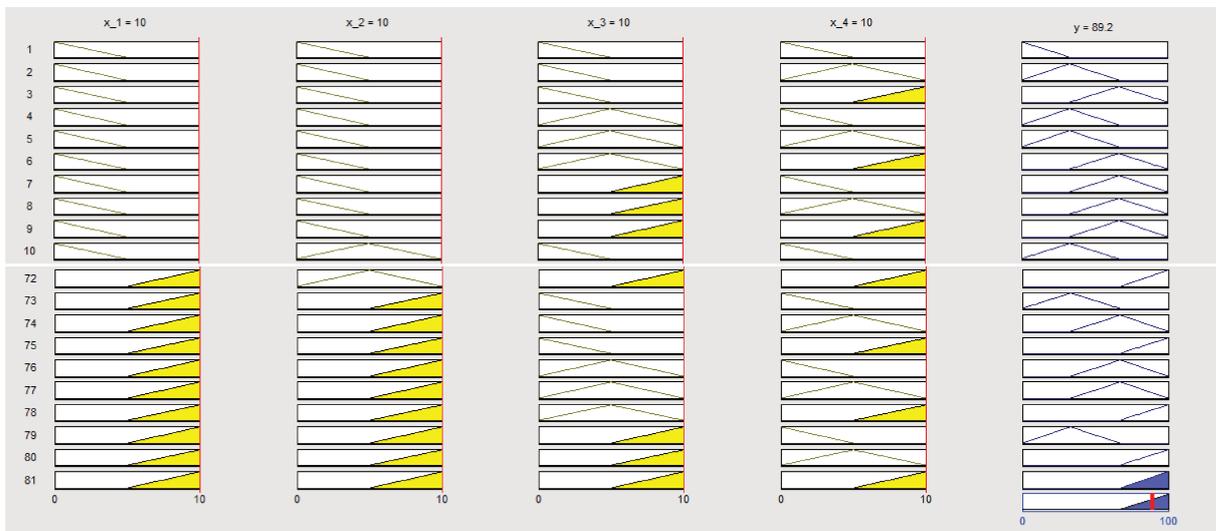


Fonte: próprio autor.

Caso 2 - Extremo superior: $x_1 = 10, x_2 = 10, x_3 = 10, x_4 = 10$.

O segundo caso representa o pior cenário possível na perspectiva da paciente, pois seus sintomas estariam no valor máximo, ou seja, $x = (10, 10, 10, 10)$. Isso implica em uma maior queda na qualidade de vida na paciente, pois dores nesses níveis podem ser incapacitantes, além das perdas de produtividade associadas a essas dores, conforme foi discutido na Seção 3.1. De forma semelhante ao primeiro caso, somente uma regra é ativada, embora neste caso a regra ativada seja a última. A Figura 30 mostra um risco $y = 89,2\%$ na saída do SBRF para esse caso extremo, bem como as dez primeiras e dez últimas regras.

Figura 30 – Saída do sistema para entrada (10, 10, 10, 10)



Fonte: próprio autor.

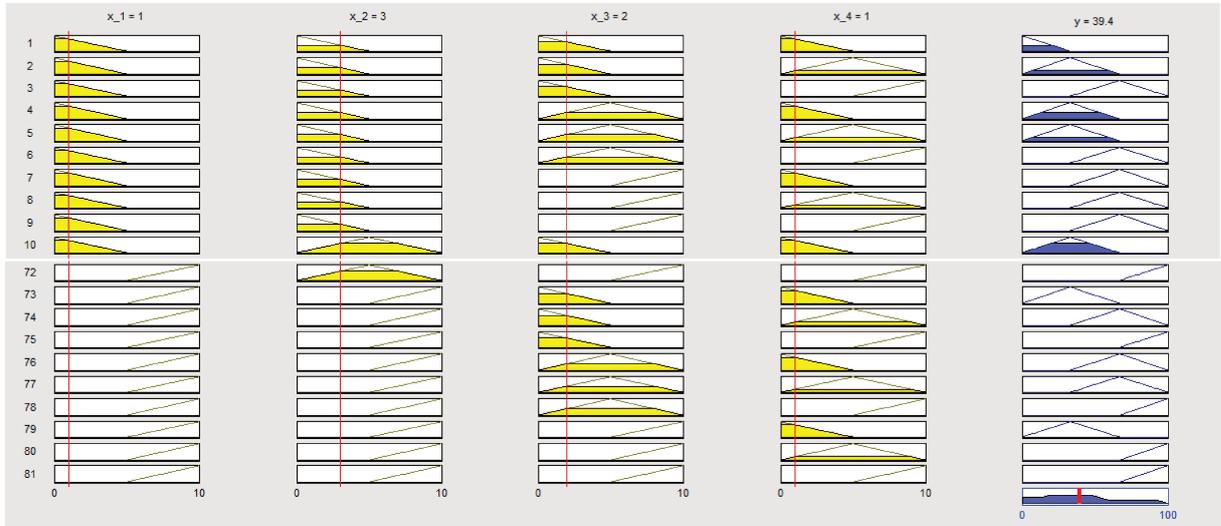
Caso 3 - Intermediário: $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 1$.

O terceiro caso representa um cenário com uma paciente pouco sintomática, visto que nenhum de seus sintomas chega ao valor 5, que é o valor intermediário da escala. A entrada é $x = (1, 3, 2, 1)$ e a saída é $y = 39,4\%$, valor que se encontra entre os riscos dos casos extremos, como era de se esperar. Podemos notar que o sintoma mais presente na paciente é a dispareunia (x_2). A Figura 31 mostra a ativação de regras entre as dez primeiras e dez últimas regras, embora outras que não são mostradas também tenham sido ativadas.

Caso 4 - Intermediário: $x_1 = 9, x_2 = 7, x_3 = 6, x_4 = 6$.

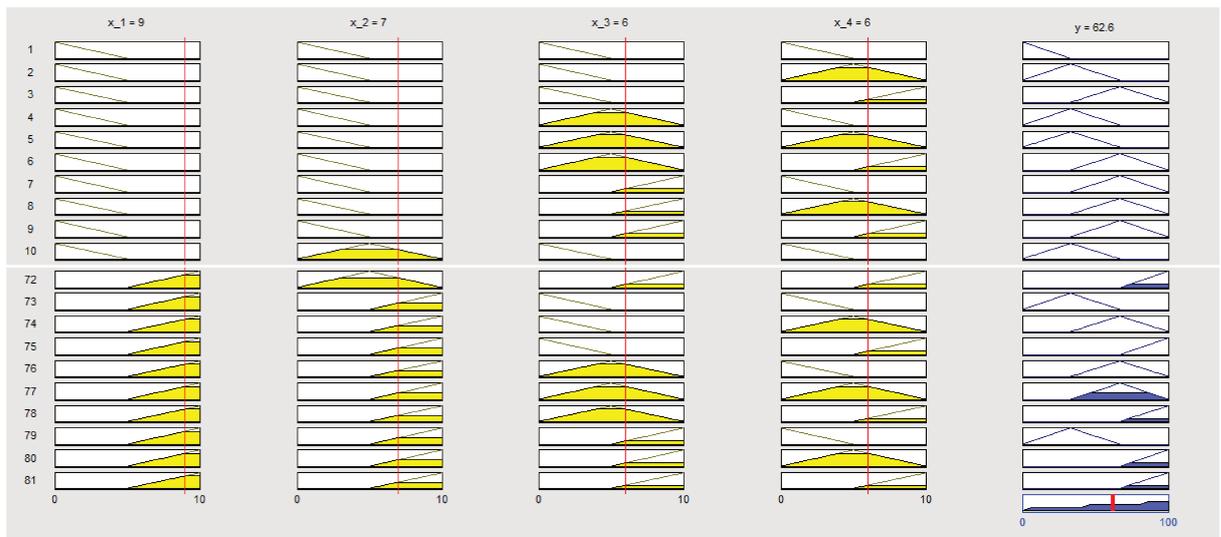
Mais pessimista que o cenário anterior, o presente ilustra o caso de uma paciente mais sintomática, especialmente quanto à dismenorrea (x_1), visto que o valor de entrada é $x = (9, 7, 6, 6)$. A Figura 32 revela a ativação das regras, em especial das últimas, visto que os valores de entrada são altos. O risco estimado pelo método é de $y = 62,6\%$, um valor entre o Caso 3 e o Caso 2 (extremo superior), o que faz sentido se conjecturarmos que quanto maior a presença de sintomas, maior o risco da paciente ter endometriose.

Figura 31 – Saída do sistema para entrada (1, 3, 2, 1)



Fonte: próprio autor.

Figura 32 – Saída do sistema para entrada (9, 7, 6, 6)



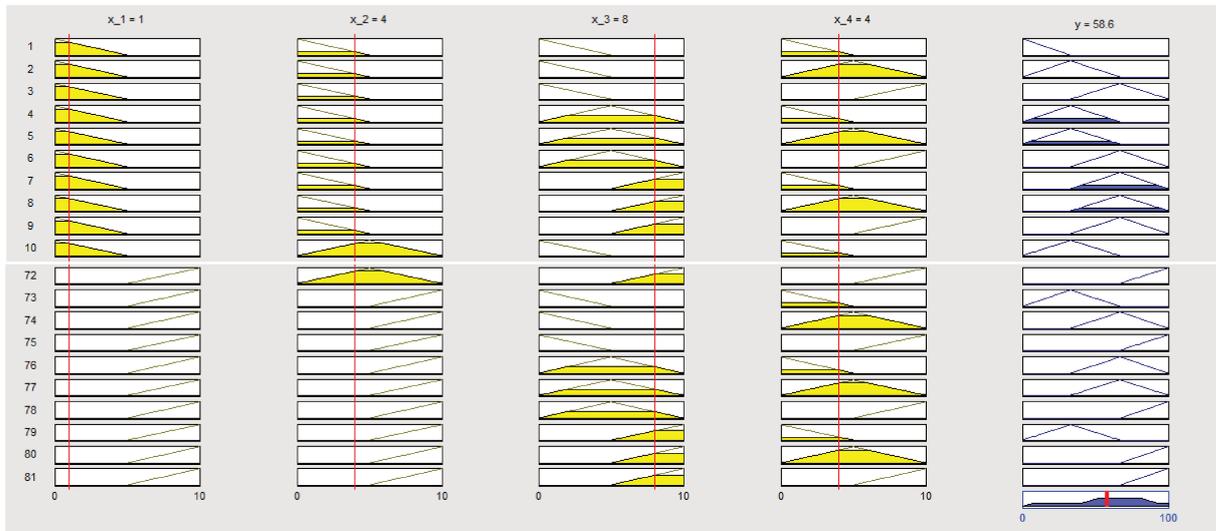
Fonte: próprio autor.

Caso 5 - Intermediário: $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 8, x_4 = 4$.

Por fim, um cenário em que as dores nas costas e/ou nas pernas (x_3) são o sintoma de maior queixa. A entrada neste caso é $x = (1, 4, 8, 4)$, o que mostra que este também é um cenário cuja menor queixa é em relação à dismenorreia (x_1). A Figura 33 mostra que o risco para o presente caso é de $y = 58,6\%$. A Figura 33 também mostra a ativação de algumas regras dentre as primeiras e as últimas regras, além do conjunto fuzzy de saída antes do defuzzificador.

Uma vez demonstrado o funcionamento do SBRF, vamos agora apresentar o

Figura 33 – Saída do sistema para entrada (1, 4, 8, 4)



Fonte: próprio autor.

comportamento de cada sintoma e sua influência no risco y (de uma mulher ter endometriose).

3.3.1 Estimando a relevância de cada sintoma

A estimativa da relevância de cada sintoma é feita através do esboço da variação de apenas um dos sintomas, enquanto os demais são fixados em 5. O valor 5 foi escolhido porque representa exatamente o valor médio da escala. Assim, é possível observar o comportamento do risco em relação a cada sintoma isoladamente. Esperamos que o risco y seja uma função monótona crescente de cada sintoma (x_1, x_2, x_3, x_4) , ou seja, se $x \leq y$, então $f(x) \leq f(y)$, pois isso indica a associação direta entre o sintoma e a enfermidade.

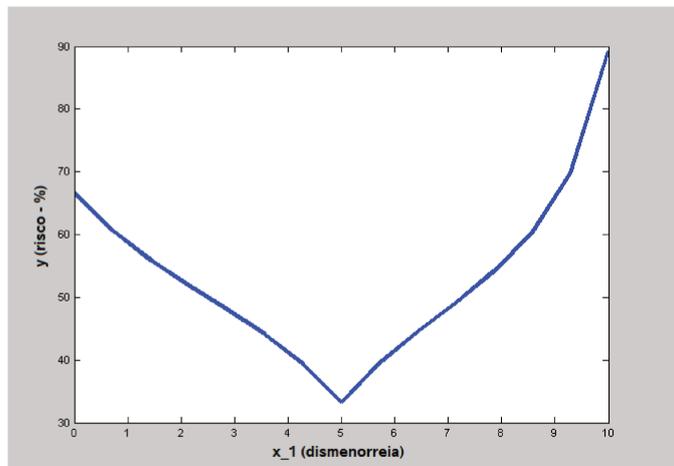
Note que é aqui que o uso de um método para detectar potenciais inconsistências em uma base de regras é justificado. Ao observarmos as Figuras 34, 35 e 37, percebemos que o risco diminui até o valor 5 dos sintomas e, depois desse valor, volta a aumentar.

Em particular, o risco y em relação a dismenorrea x_1 – que é um sintoma frequente associado à endometriose (VIGANÒ et al., 2004) – cai de 66,7% em $x_1 = 0$ para 33,3% em $x_1 = 5$. No intervalo $[5, 10]$ o risco y cresce para aproximadamente 90%. O risco em função do cansaço x_4 , ilustrado pela Figura 37 tem exatamente o mesmo comportamento que em relação à dismenorrea x_1 .

Embora os valores sejam diferentes, com a dispareunia também há redução no risco y no intervalo $[0, 5]$ e crescimento no intervalo $[5, 10]$, como pode ser visto na Figura 35.

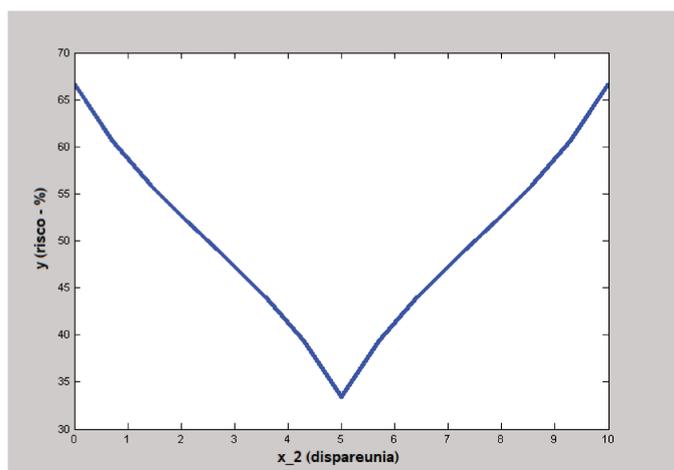
As dores nas costas e/ou nas pernas (x_3) é a única variável que não apresenta

Figura 34 – Comportamento da variável x_1 (dismenorreia) com as demais entradas fixas em 5



Fonte: próprio autor.

Figura 35 – Comportamento da variável x_2 (dispareunia) com as demais entradas fixas em 5

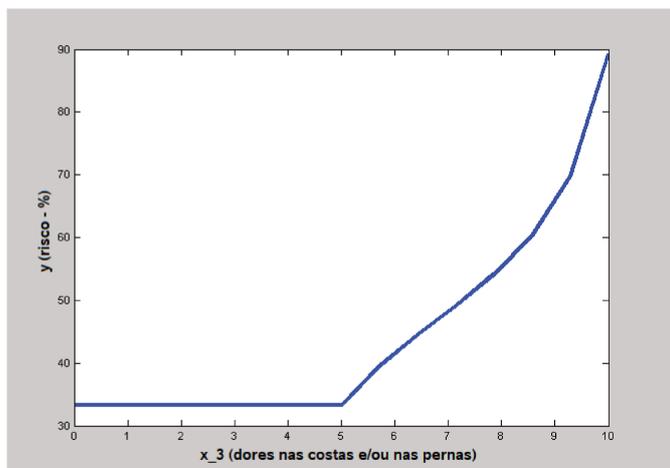


Fonte: próprio autor.

decréscimo, como mostra a Figura 36. Entretanto, no intervalo $[0, 5]$, o risco y se mantém constante em 33,3%. No intervalo $[0, 10]$, o risco y assume comportamento crescente.

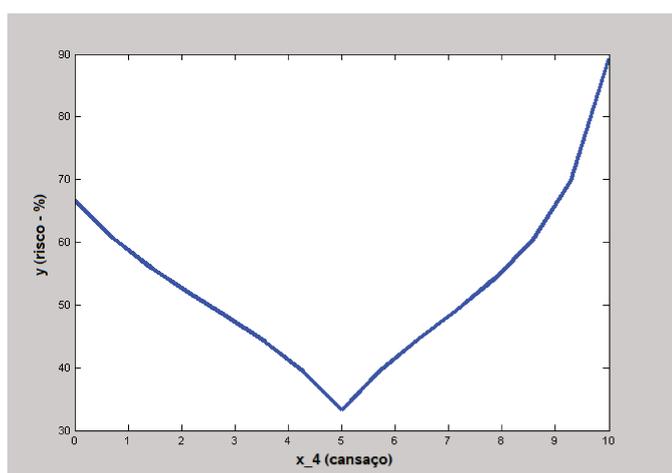
Dessa forma, as Figuras 34, 35 e 37, indicam que há alguma inconsistência na base de regras. Portanto, a próxima seção é dedicada a apontar essas regras potencialmente contraditórias através do método baseado em similaridade, proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994), descrito na Seção 2.1.

Figura 36 – Comportamento da variável x_3 (dores nas costas e/ou nas pernas) com as demais entradas fixas em 5



Fonte: próprio autor.

Figura 37 – Comportamento da variável x_4 (cansaço) com as demais entradas fixas em 5



Fonte: próprio autor.

3.4 Identificando regras potencialmente contraditórias

Na seção anterior, observamos que a base de regras utilizada no sistema estimador de risco de endometriose apresenta potenciais inconsistências. De fato, é contraintuitivo que um aumento nos sintomas resultem em uma diminuição do risco de uma mulher ter endometriose. Assim, se faz imprescindível detectar as potenciais anomalias na base de regras para que a mesma possa ser corrigida e, assim, refletir corretamente o conhecimento especialista, validando o sistema estimador.

As anomalias foram identificadas em termos de regras potencialmente contraditórias. O método utilizado para detectar tais regras é aquele baseado em uma medida de similaridade, proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994), mostrado na

Seção 2.1. Para a implementação do método, foram feitas simulações em MATLAB[®], considerando três distintos valores para β na Definição 2.4. O código implementado consta no Apêndice B.

Este método é adequado ao problema, uma vez que, segundo (VIAENE; WETS; VANTHIENEN, 2000), é um método estático, o que significa que é um método adequado a bases de regras tanto conjuntivas quanto implicativas. O método apresentado na Seção 2.2, que contempla regras implicativas, não é adequado ao problema em questão, devido às regras serem concebidas como partes de informação, o que implica que sua modelagem seja conjuntiva.

Dessa forma, são mostradas na Tabela 7 as regras potencialmente contraditórias segundo a Definição 2.4 para $\beta_1 = 0, 5$, $\beta_2 = 0, 7$ e $\beta_3 = 0, 85$.

Tabela 7 – Regras apontadas como potencialmente contraditórias pelo método baseado em uma medida de similaridade proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994).

Regras potencialmente contraditórias				
$\beta_1 = 0, 5$	$\beta_2 = 0, 7$	$\beta_3 = 0, 85$		
Nenhum par de regras potencialmente contraditórias foi detectado.	R_{15} e R_{42}	R_2 e R_3	R_{20} e R_{47}	R_{40} e R_{41}
	R_{19} e R_{46}	R_2 e R_{11}	R_{21} e R_{48}	R_{40} e R_{43}
	R_{25} e R_{52}	R_4 e R_7	R_{22} e R_{23}	R_{41} e R_{42}
	R_{41} e R_{42}	R_5 e R_6	R_{22} e R_{49}	R_{41} e R_{44}
	R_{41} e R_{44}	R_5 e R_8	R_{22} e R_{52}	R_{41} e R_{50}
	R_{41} e R_{68}	R_5 e R_{14}	R_{25} e R_{26}	R_{41} e R_{68}
	R_{43} e R_{44}	R_5 e R_{32}	R_{25} e R_{52}	R_{43} e R_{44}
	R_{43} e R_{52}	R_6 e R_{15}	R_{28} e R_{55}	R_{43} e R_{52}
	R_{48} e R_{51}	R_7 e R_{16}	R_{29} e R_{30}	R_{43} e R_{53}
	R_{48} e R_{75}	R_7 e R_{34}	R_{29} e R_{32}	R_{43} e R_{70}
	R_{52} e R_{79}	R_{10} e R_{11}	R_{29} e R_{56}	R_{43} e R_{71}
	R_{61} e R_{62}	R_{11} e R_{20}	R_{29} e R_{59}	R_{46} e R_{73}
	R_{79} e R_{80}	R_{11} e R_{38}	R_{31} e R_{32}	R_{47} e R_{48}
		R_{12} e R_{15}	R_{31} e R_{40}	R_{48} e R_{51}
		R_{13} e R_{14}	R_{31} e R_{58}	R_{48} e R_{75}
		R_{13} e R_{40}	R_{31} e R_{59}	R_{48} e R_{78}
		R_{14} e R_{15}	R_{32} e R_{41}	R_{52} e R_{79}
		R_{14} e R_{41}	R_{34} e R_{35}	R_{58} e R_{61}
		R_{15} e R_{18}	R_{34} e R_{62}	R_{61} e R_{62}
		R_{15} e R_{24}	R_{37} e R_{40}	R_{61} e R_{70}
		R_{15} e R_{42}	R_{37} e R_{46}	R_{64} e R_{73}
		R_{15} e R_{45}	R_{37} e R_{64}	R_{70} e R_{79}
		R_{15} e R_{51}	R_{38} e R_{39}	R_{73} e R_{74}
		R_{16} e R_{17}	R_{38} e R_{42}	R_{73} e R_{76}
		R_{16} e R_{52}	R_{38} e R_{47}	R_{76} e R_{79}
		R_{19} e R_{46}	R_{38} e R_{65}	R_{79} e R_{80}
		R_{20} e R_{21}	R_{38} e R_{68}	
		R_{20} e R_{23}	R_{39} e R_{48}	

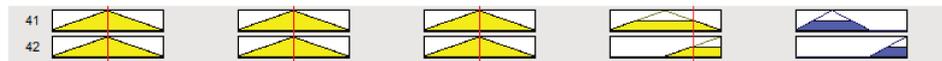
Podemos perceber que o número de pares de regras identificadas como potencialmente contraditórias varia de acordo com o valor de β . Nos casos acima, podemos perceber que não há nenhum par de regras cujo índice de coerência é menor que 0,5, ao passo que 82 pares de regras têm o índice de consistência menor que 0.85. Desses 82 pares de regras, 13 têm o índice de consistência menor que 0.7. Desse modo, esses 13 pares de regras devem ser observados com maior atenção pelo especialista que revisará a base de regras. Nesses 13 pares, as regras 41 e 52 aparecem 3 vezes cada, enquanto as regras 42, 43, 44, 48 e 79 aparecem duas vezes. Isso também pode ser levado em consideração na revisão da base de regras.

Tomemos, como exemplo, o par de regras R_{41} e R_{42} , cujo índice de consistência é menor que 0,7:

R_{41} : Se *Dismenorreia* is **moderada** e *Dispareunia* is **moderada** e *Dores nas pernas e/ou nas costas* is **moderada** e *Cansaço* is **moderado**, então o *risco de endometriose* is **pouco provável**;

R_{42} : Se *Dismenorreia* is **moderada** e *Dispareunia* is **moderada** e *Dores nas pernas e/ou nas costas* is **moderada** e *Cansaço* is **intenso**, então o *risco de endometriose* is **muito provável**.

Figura 38 – Ativação das regras R_{41} e R_{42} considerando a entrada $x = (5; 5; 5; 7, 5)$. Nota-se que, para essa entrada, somente essas duas regras são ativadas.



Fonte: próprio autor.

Figura 39 – Saída do sistema considerando a entrada $x = (5; 5; 5; 7, 5)$. Nota-se que os conjuntos fuzzy na saída são disjuntos.



Fonte: próprio autor.

Para uma entrada $x = (5; 5; 5; 7, 5)$, somente essas regras são ativadas, o que faz com que a saída seja a união dos conjuntos PP e MP , o que pode ser visto na Figura 38. Note que esses conjuntos são disjuntos. Devido ao ordenamento da saída, isso pode ser considerado uma contradição. A Figura 39 mostra o conjunto fuzzy da saída, bem como seu valor defuzzificado. A correção da base de regras pode ser feita através de correções nos consequentes das regras por um especialista. Entretanto, o objetivo do trabalho passou a ser a identificação das regras potencialmente contraditórias, conforme explicitado na

Introdução, enquanto a correção e validação da base de regras ficam como sugestões para trabalhos futuros. Isso permitirá que a base de regras seja utilizada como uma ferramenta auxiliar por especialistas em ginecologia.

Uma vez identificadas as regras potencialmente contraditórias, o especialista deve ser consultado para rever tais regras de modo a confirmar quais delas são realmente contraditórias. Identificadas tais regras, o especialista pode alterá-las e realizar novos testes para verificar se as falhas foram, ou não corrigidas.

As considerações finais são apresentadas a seguir.

Conclusões e considerações finais

Foi feita uma revisão de conceitos fundamentais da teoria de conjuntos fuzzy e da lógica fuzzy de modo a embasar a apresentação dos sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF).

Foram apresentados dois métodos de detecção de anomalias em uma base de regras fuzzy. Um deles, classificado como estático, ou seja, destinado a bases de regras que independem do tipo de regra que os compõem (implicativa ou conjuntiva) foi proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994). Os resultados do segundo método, enunciados por (DUBOIS; PRADE; UGHETTO, 1997), é adequado apenas a bases de regras implicativas, e, por isso, é classificado como dinâmico.

Foi apresentada a patologia alvo do trabalho, a endometriose, seus sinais e sintomas, seu diagnóstico e tratamentos, bem como a necessidade de se fazer um modelo matemático que diminua o tempo para o diagnóstico definitivo da enfermidade.

Foi desenvolvido, com a colaboração do especialista Dr. Kleber Cursino de Andrade, um SBRF para estimar o risco de uma mulher ter endometriose, cujas entradas são quatro sintomas. São eles: dismenorreia, dispareunia, dores nas costas e/ou nas pernas e cansaço. A saída do sistema é o risco de uma mulher ter endometriose. Após testes preliminares, foi constatada a necessidade de se detectarem potenciais inconsistências na base de regras.

Foi implementado o método de detecção de anomalias estático baseado em uma medida de similaridade proposto por (SCARPELLI; PEDRYCZ; GOMIDE, 1994). Como resultado, pares de regras foram identificados como potencialmente contraditórios. O próximo passo consiste em apresentar as regras potencialmente contraditórias ao especialista, de forma que ele possa avaliar quais regras devem ser alteradas a fim de que o sistema apresente resultados mais confiáveis.

Uma sugestão para trabalhos futuros é a alteração das regras potencialmente contraditórias e validação da base de regras proposta. Dessa forma, o SBRF poderá ser utilizado como uma ferramenta para auxiliar o especialista diminuir o atraso no diagnóstico da endometriose.

Além disso, a implementação de um sistema de base de regras implicativas e do uso e comparação dos dois métodos de detecção de anomalias apresentado no presente trabalho são outras sugestões para trabalhos futuros.

Finalmente, sugerimos a adequação do método baseado em uma medida de similaridade para o caso de bases de regras cujas regras têm pesos diferentes.

Referências

- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; LODWICK, W. A. *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017. (Studies in Fuzziness and Soft Computing).
- BASSANI, L. T. *Sistema de Base de Regras Fuzzy como Método Alternativo para Avaliar o Risco de Doenças Cardiovasculares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.
- BEDE, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. London: Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Studies in Fuzziness and Soft Computing).
- BIEBER, E. J. Laparoscopy: past, present, and future. *Clinical obstetrics and gynecology*, LWW, v. 46, n. 1, p. 3–14, 2003.
- BUCKLEY, J. J. *Fuzzy Probabilities: A New Approach and Applications*. Berlin: Springer, 2005.
- BUSTINCE, H.; PAGOLA, M.; BARRENECHEA, E. Construction of fuzzy indices from fuzzy di-subsethood measures: Application to the global comparison of images. *Information Sciences*, Elsevier, v. 177, n. 3, p. 906–929, 2007.
- CRAMER, D. W.; MISSMER, S. A. The epidemiology of endometriosis. *Annals of the new york Academy of Sciences*, Wiley Online Library, v. 955, n. 1, p. 11–22, 2002.
- CRISPI, I. d. C. M. I. *Endometriose*. Acessado em 3 de janeiro de 2018. Disponível em: <<http://www.iccmi.com.br/ginecologia-endometriose.php>>.
- DUBOIS, D.; PRADE, H.; UGHETTO, L. Checking the coherence and redundancy of fuzzy knowledge bases. *IEEE transactions on fuzzy systems*, IEEE, v. 5, n. 3, p. 398–417, 1997.
- DUBOIS, D. J. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*. New York: Academic press, 1980. v. 144.
- DUNSELMAN, G.; VERMEULEN, N.; BECKER, C.; CALHAZ-JORGE, C.; D’HOOGHE, T.; BIE, B. D.; HEIKINHEIMO, O.; HORNE, A.; KIESEL, L.; NAP, A. et al. Eshre guideline: management of women with endometriosis. *Human reproduction*, Oxford University Press, v. 29, n. 3, p. 400–412, 2014.
- ESKENAZI, B.; WARNER, M. L. Epidemiology of endometriosis. *Obstetrics and Gynecology Clinics*, v. 24, n. 2, p. 235–258, 1997.
- ESMI, E.; SUSSNER, P.; SANDRI, S. Tunable equivalence fuzzy associative memories. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 292, p. 242–260, 2016.
- ESOGBUE, A. O.; ELDER, R. C. Measurement and valuation of a fuzzy mathematical model for medical diagnosis. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 10, n. 1-3, p. 223–242, 1983.

GUPTA, M. M.; YAMAKAWA, T. *Fuzzy Logic in Knowledge-Based Systems, Decision and Control*. New York: Elsevier Science Inc., 1988.

JACOBSON, T.; DUFFY, J.; BARLOW, D.; KONINCKX, P.; GARRY, R. Laparoscopic surgery for pelvic pain associated with en-dometriosis. *Status and date: Edited (no change to conclusions), published in*, Wiley Online Library, v. 11, 2009.

JAGER, R. *Fuzzy logic in control*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, Delft, Holanda, 1995.

JAYAWARDENA, A.; PERERA, E.; ZHU, B.; AMARASEKARA, J.; VEREIVALU, V. A comparative study of fuzzy logic systems approach for river discharge prediction. *Journal of hydrology*, Elsevier, v. 514, p. 85–101, 2014.

KENNEDY, S.; BERGQVIST, A.; CHAPRON, C.; D’HOOGHE, T.; DUNSELMAN, G.; GREB, R.; HUMMELSHOJ, L.; PRENTICE, A.; SARIDOGAN, E. Eshre guideline for the diagnosis and treatment of endometriosis. *Human reproduction*, Oxford University Press, v. 20, n. 10, p. 2698–2704, 2005.

KLIR, G.; YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.

LEUNG, K. S.; SO, Y. T. Consistency checking for fuzzy expert systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 9, n. 3, p. 263–282, 1993.

MAMDANI, M.; ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *J. Man-Machine Studies*, v. 7, p. 1–13, 1975.

MEULEMAN, C.; VANDENABEELE, B.; FIEUWS, S.; SPIESSENS, C.; TIMMERMAN, D.; D’HOOGHE, T. High prevalence of endometriosis in infertile women with normal ovulation and normospermic partners. *Fertility and sterility*, Elsevier, v. 92, n. 1, p. 68–74, 2009.

MISSMER, S. A.; HANKINSON, S. E.; SPIEGELMAN, D.; BARBIERI, R. L.; MARSHALL, L. M.; HUNTER, D. J. Incidence of laparoscopically confirmed endometriosis by demographic, anthropometric, and lifestyle factors. *American journal of epidemiology*, Oxford University Press, v. 160, n. 8, p. 784–796, 2004.

NEGOITA, C.; RALESCU, D. Representation theorems for fuzzy concepts. *Kybernetes*, MCB UP Ltd, v. 4, n. 3, p. 169–174, 1975.

NNOAHAM, K. E.; HUMMELSHOJ, L.; WEBSTER, P.; D’HOOGHE, T.; NARDONE, F. de C.; NARDONE, C. de C.; JENKINSON, C.; KENNEDY, S. H.; ZONDERVAN, K. T. Impact of endometriosis on quality of life and work productivity: a multicenter study across ten countries. *Fertility and sterility*, Elsevier, v. 96, n. 2, p. 366–373, 2011.

NOVAK, E.; NOVAK, E. *Tratado de Ginecologia*. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1960.

NOWROOZI, K.; CHASE, J.; CHECK, J.; WU, C. The importance of laparoscopic coagulation of mild endometriosis in infertile women. *International journal of fertility*, v. 32, n. 6, p. 442–444, 1987.

- PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2007.
- SACILOTTO, C.; VENDITE, L. L.; SILVEIRA, G. P. Análise prognóstica do câncer de rim através da teoria de conjuntos fuzzy. In: *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*. São José dos Campos: [s.n.], 2018. v. 6, n. 1.
- SCARPELLI, H.; GOMIDE, F. A high level net approach for discovering potential inconsistencies in fuzzy knowledge bases. *Fuzzy sets and systems*, Elsevier, v. 64, n. 2, p. 175–193, 1994.
- SCARPELLI, H.; PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. Quantification of inconsistencies in fuzzy knowledge bases. *Proceedings of the Second European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, EUFIT'94*, Zimmermann, v. 3, p. 1456–1460, 1994.
- SCHLEEDOORN, M.; NELEN, W.; DUNSELMAN, G.; VERMEULEN, N.; GROUP, E.; ANDERSSON, E.; MAASBACH, C.; HAM, M. Van de Ven-van; HOLLANDER, M.; PAREDES, D. et al. Selection of key recommendations for the management of women with endometriosis by an international panel of patients and professionals. *Human Reproduction*, Oxford University Press, v. 31, n. 6, p. 1208–1218, 2016.
- SILVA, F. N. d. *Modelagem fuzzy aplicada a políticas públicas: proposta de um índice municipal de qualidade ambiental*. Dissertação (Mestrado), 2015.
- SILVEIRA, G. P. *Aplicação da teoria de conjuntos fuzzy na predição do estadiamento patológico do cancer de próstata*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.
- ULRICH, U.; WILDE, R. L. D. New guidelines on diagnosis and treatment of endometriosis in german-speaking countries. *Gynecology and Minimally Invasive Therapy*, v. 1, n. 5, p. 41–43, 2016.
- UNIÃO, D. O. da; ALTERADA, R. E.; DA, P. A. D. D. I.; ALTERADA, V. E. Agência nacional de vigilância sanitária diretoria colegiada resolução anvisa/dc nº 3, de 4 de fevereiro de 2011. *Links*, v. 601, p. 10, 2011.
- VIAENE, S.; WETS, G.; VANTHIENEN, J. A synthesis of fuzzy rule-based system verification. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 113, n. 2, p. 253–265, 2000.
- VIGANÒ, P.; PARAZZINI, F.; SOMIGLIANA, E.; VERCELLINI, P. Endometriosis: epidemiology and aetiological factors. *Best practice and research Clinical obstetrics and gynaecology*, Elsevier, v. 18, n. 2, p. 177–200, 2004.
- WASQUES, V. F. *Lógica Fuzzy aplicada à geologia*. Dissertação (Mestrado), 2015.
- YAGER, R. R.; LARSEN, H. L. Fuzzy differential equations with interactive derivative. *IEEE transactions on systems, man and cybernetics*, IEEE, v. 21, n. 4, p. 790–801, 1991.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and control*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.
- _____. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, IEEE, SMC-3, n. 1, p. 28–44, 1973.

Apêndices

APÊNDICE A – Base de regras fuzzy usada no estimador de risco de endometriose

A Tabela 8 mostra os antecedentes e consequentes de cada regra fuzzy da base de regras do sistema estimador de risco de endometriose.

Para cada sintoma, dismenorreia, dispareunia, dores nas costas e/ou pernas, e cansaço, é atribuído um valor “leve”, “moderado(a)” e “intenso(a)”, conforme a Figura 25. O consequente risco é avaliado para cada regra, e seus possíveis valores são “improvável (IP)”, “pouco provável (PP)”, “provável (PR)” e “muito provável (MP)”, segundo a Figura 28.

Esta base de regras representa o conhecimento de um especialista, a saber, o Dr. Kleber Cursino de Andrade, ginecologista e obstetra no Centro de Atenção Integral à Saúde da Mulher (CAISM), Unicamp.

Como exemplo, uma regra do tipo

*Se Dismenorreia is leve e Dispareunia is leve e Dores nas pernas e/ou nas costas is leve e Cansaço is leve, então o risco de endometriose is **improvável**,*

é escrita na tabela da seguinte forma:

Dismenorréia	Dispareunia	Dor nas costas e nas pernas	Cansaço	Risco
Leve	Leve	Leve	Leve	Improvável

Assim sendo, segue a tabela que representa a base de regras fuzzy utilizada no sistema estimador de risco de endometriose.

Tabela 8 – Base de regras fuzzy usada no estimador de risco de endometriose

Regra	Dismenorréia	Dispareunia	Dores nas costas e/ou nas pernas	Cansaço	Risco
1	Leve	Leve	Leve	Leve	I
2	Leve	Leve	Leve	Moderado	PP
3	Leve	Leve	Leve	Intenso	PR
4	Leve	Leve	Moderado	Leve	PP
5	Leve	Leve	Moderado	Moderado	PP
6	Leve	Leve	Moderado	Intenso	PR
7	Leve	Leve	Intenso	Leve	PR

Regra	Dismenorréia	Dispareunia	Dores nas costas e/ou nas pernas	Cansaço	Risco
8	Leve	Leve	Intenso	Moderado	PR
9	Leve	Leve	Intenso	Intenso	PR
10	Leve	Moderado	Leve	Leve	PP
11	Leve	Moderado	Leve	Moderado	PR
12	Leve	Moderado	Leve	Intenso	PR
13	Leve	Moderado	Moderado	Leve	PP
14	Leve	Moderado	Moderado	Moderado	PR
15	Leve	Moderado	Moderado	Intenso	PP
16	Leve	Moderado	Intenso	Leve	PP
17	Leve	Moderado	Intenso	Moderado	PR
18	Leve	Moderado	Intenso	Intenso	PR
19	Leve	Intenso	Leve	Leve	I
20	Leve	Intenso	Leve	Moderado	PP
21	Leve	Intenso	Leve	Intenso	PR
22	Leve	Intenso	Moderado	Leve	PP
23	Leve	Intenso	Moderado	Moderado	PR
24	Leve	Intenso	Moderado	Intenso	PR
25	Leve	Intenso	Intenso	Leve	PP
26	Leve	Intenso	Intenso	Moderado	PR
27	Leve	Intenso	Intenso	Intenso	PR
28	Moderado	Leve	Leve	Leve	PP
29	Moderado	Leve	Leve	Moderado	PP
30	Moderado	Leve	Leve	Intenso	PR
31	Moderado	Leve	Moderado	Leve	PP
32	Moderado	Leve	Moderado	Moderado	PR
33	Moderado	Leve	Moderado	Intenso	PR
34	Moderado	Leve	Intenso	Leve	PP
35	Moderado	Leve	Intenso	Moderado	PR
36	Moderado	Leve	Intenso	Intenso	PR
37	Moderado	Moderado	Leve	Leve	PP
38	Moderado	Moderado	Leve	Moderado	PP
39	Moderado	Moderado	Leve	Intenso	PR
40	Moderado	Moderado	Moderado	Leve	PR
41	Moderado	Moderado	Moderado	Moderado	PP
42	Moderado	Moderado	Moderado	Intenso	MP
43	Moderado	Moderado	Intenso	Leve	PP
44	Moderado	Moderado	Intenso	Moderado	MP

Regra	Dismenorréia	Dispareunia	Dores nas costas e/ou nas pernas	Cansaço	Risco
45	Moderado	Moderado	Intenso	Intenso	MP
46	Moderado	Intenso	Leve	Leve	PR
47	Moderado	Intenso	Leve	Moderado	PR
48	Moderado	Intenso	Leve	Intenso	PP
49	Moderado	Intenso	Moderado	Leve	PR
50	Moderado	Intenso	Moderado	Moderado	PR
51	Moderado	Intenso	Moderado	Intenso	MP
52	Moderado	Intenso	Intenso	Leve	MP
53	Moderado	Intenso	Intenso	Moderado	MP
54	Moderado	Intenso	Intenso	Intenso	MP
55	Intenso	Leve	Leve	Leve	PR
56	Intenso	Leve	Leve	Moderado	PR
57	Intenso	Leve	Leve	Intenso	MP
58	Intenso	Leve	Moderado	Leve	PR
59	Intenso	Leve	Moderado	Moderado	MP
60	Intenso	Leve	Moderado	Intenso	MP
61	Intenso	Leve	Intenso	Leve	PP
62	Intenso	Leve	Intenso	Moderado	MP
63	Intenso	Leve	Intenso	Intenso	MP
64	Intenso	Moderado	Leve	Leve	PR
65	Intenso	Moderado	Leve	Moderado	PR
66	Intenso	Moderado	Leve	Intenso	PR
67	Intenso	Moderado	Moderado	Leve	PR
68	Intenso	Moderado	Moderado	Moderado	MP
69	Intenso	Moderado	Moderado	Intenso	MP
70	Intenso	Moderado	Intenso	Leve	PR
71	Intenso	Moderado	Intenso	Moderado	MP
72	Intenso	Moderado	Intenso	Intenso	MP
73	Intenso	Intenso	Leve	Leve	PP
74	Intenso	Intenso	Leve	Moderado	PR
75	Intenso	Intenso	Leve	Intenso	MP
76	Intenso	Intenso	Moderado	Leve	PR
77	Intenso	Intenso	Moderado	Moderado	PR
78	Intenso	Intenso	Moderado	Intenso	MP
79	Intenso	Intenso	Intenso	Leve	PP
80	Intenso	Intenso	Intenso	Moderado	MP
81	Intenso	Intenso	Intenso	Intenso	MP

APÊNDICE B – Código utilizado na base de regras do sistema estimador de risco de endometriose

```

1  clc
2  clear all
3  close all
4
5  tic %inicio da contagem da simulacao
   =====
6  domA = linspace(0,10,11);%dominio ant
7  domC = linspace(0,100,101);%dominio cons
8  r = 1;
9
10 d = length(domA)^(4);
11 e = length(domC);
12
13 %Ante=====
14
15 L = membershipfunction(domA,0,0,5);%Leve
16
17 M = membershipfunction(domA,0,5,10);%Moderado
18
19 I = membershipfunction(domA,5,10,10);%Intenso
20
21 %Cons=====
22
23 IP = membershipfunction(domC,0,0,33.3);%Improvavel
24
25 PP = membershipfunction(domC,0,33.33,66.7);%Pouco provavel
26
27 PR = membershipfunction(domC,33.3,66.7,100);%Provavel
28
29 MP = membershipfunction(domC,66.7,100,100);%Muito provavel
30

```

```

31 %Matriz ant=====
32 A = [L(:,2) M(:,2) I(:,2)];
33
34 %Matriz cons=====
35 ip = [1 19];
36 pp = [2 4 5 10 13 15 16 20 22 25 28 29 31 34 37 38 41 43 48
        61 73 79];
37 pr = [3 6 7 8 9 11 12 14 17 18 21 23 24 26 27 30 32 33 35 36
        39 40 46 47
38 49 50 55 56 58 64 65 66 67 70 74 76 77];
39 mp = [42 44 45 51 52 53 54 57 59 60 62 63 68 69 71 72 75 78
        80 81];
40
41 %Regras ant=====
42 RA = zeros(length(d),81);
43
44 %Regras cons=====
45 RC = zeros(e,81);
46
47 for j = 1:length(ip)
48     RC(:,ip(j)) = IP(:,2);
49 end
50 for j = 1:length(pp)
51     RC(:,pp(j)) = PP(:,2);
52 end
53 for j = 1:length(pr)
54     RC(:,pr(j)) = PR(:,2);
55 end
56 for j = 1:length(mp)
57     RC(:,mp(j)) = MP(:,2);
58 end
59
60     for i1 = 1:3
61         for i2 = 1:3
62             for i3 = 1:3
63                 for i4 = 1:3
64                     l = i4 + (i3-1)*3 + (i2-1)*9 + (i1-1)*27
65                     for i = 1:length(domA)
66                         for j = 1:length(domA)

```

```

67         for k = 1:length(domA)
68             for m = 1:length(domA)
69                 u = [A(i,i1) A(j,i2) A(k,
70 i3)
71                     A(m,i4)];
72                 RA(r,1) = min(u);
73                 r = r+1;
74             end
75         end
76     end
77     r = 1;
78 end
79 end
80 end
81 end
82
83 u = 0;
84 for i = 1:80
85     for j = i+1:81
86         s=0;
87         t=0;
88         for k = 1:d
89             s1 = min(RA(k,i),RA(k,j));
90             t1 = max(RA(k,i),RA(k,j));
91             s = s + s1;
92             t = t + t1;
93         end
94         a = s/t;
95         s=0;
96         t=0;
97         for k = 1:e
98             s1 = min(RC(k,i),RC(k,j));
99             t1 = max(RC(k,i),RC(k,j));
100            s = s + s1;
101            t = t + t1;
102        end
103        b = s/t;
104        c = min(1-a+b,1);

```

```

105     if (c<0.7)
106         name = i;
107         age = j;
108         fprintf('As regras %d e %d sao potencialmente
109         contraditorias.\n',name,age);
110         u = u +1;
111         end
112     end
113 end
114
115 u %contador de pares de regras contraditorias
116
117 toc %fim da contagem da simulacao
      =====

```

Função “membershipfunction”:

```

1  function[A] = membershipfunction(dom,a,b,c)
2
3  A = zeros(length(dom),2);
4  A(:,1) = dom';
5
6  if (b==a)
7      A(1,2) = 1;
8      for i = 2:length(dom)
9          if (dom(i)>b && dom(i)<=c)
10             A(i,2) = (dom(i)-c)/(b-c);
11         else
12             A(i,2) = 0;
13         end
14     end
15 end
16
17 if (b ==c )
18     A(length(dom),2) = 1;
19     for i = 2:length(dom)
20         if (dom(i)>a && dom(i)<=b)
21             A(i,2) = (dom(i)-a)/(b-a);
22         else
23             A(i,2) = 0;

```

```
24     end
25   end
26 end
27
28 if ((b~=a) && (b~=c))
29   for i = 1:length(dom)
30     if (dom(i)>=a && dom(i)<=b)
31       A(i,2) = (dom(i)-a)/(b-a);
32     elseif (dom(i)>=b && dom(i)<=c)
33       A(i,2) = (dom(i)-c)/(b-c);
34     else
35       A(i,2) = 0;
36     end
37   end
38 end
39 end
```