

Universidade Estadual de Campinas

**Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica**

**Propriedades Aritméticas de Corpos com
um Anel de Valorização Compatível com o
Radical de Kaplansky**

Tese de Doutorado

Ronie Peterson Dario

ronie.dario@gmail.com

Prof. Dr. Antonio José Engler

Orientador

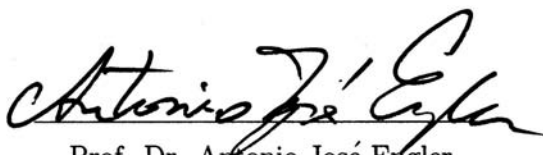
engler@ime.unicamp.br

Campinas, SP, 2008

Propriedades Aritméticas de Corpos com
um Anel de Valorização Compatível com o
Radical de Kaplansky

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado em Matemática devidamente corrigida e defendida por **Ronie Peterson Dario**, e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, SP, 25 de março de 2008.



Prof. Dr. Antonio José Engler

Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Antonio José Engler
Prof. Dr. Antonio Paques
Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov
Prof. Dr. Yves Abert Emile Lequain
Profa. Dra. Ires Dias

Esta tese foi apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Crislene Queiroz Custódio – CRB8a 162/2005

Dario, Ronie Peterson

D248p Propriedades aritméticas de corpos com um anel de valorização compatível com o Radical de Kaplansky / Ronie Peterson Dario -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2008.

Orientador : Antonio Jose Engler

Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Radical de Kaplansky. 2. Teoria de valorização. 3. Galois, Teoria de. 4. Anéis de divisão. 5. Brauer, Grupo de. 6. Grupos profinitos. I. Engler, Antonio Jose. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

(cqc/imecc)

Título em inglês: Arithimetical properties of fields with a valuation ring compatible with the Kaplansky's Radical

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Kaplansky's radical. 2. Valuation theory. 3. Galois theory. 4. Division rings. 5. Brauer group. 6. Profinite groups.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Antonio Jose Engler (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Yves Abert Emile Lequain (IMPA)
Prof. Dr. Antonio Paques (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov (IMECC/UNICAMP)
Prof. Dra. Ires Dias (ICMC/USP)

Data da defesa: 25/03/2008

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 25 de março de 2008 e aprovada

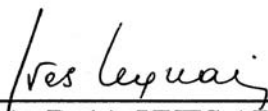
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



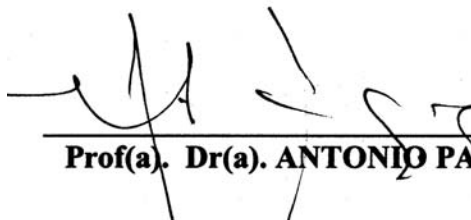
Prof(a). Dr(a). ANTONIO JOSÉ ENGLER



Prof(a). Dr(a). IRES DIAS



Prof(a). Dr(a). YVES ABERT EMILE LEQUAIN



Prof(a). Dr(a). ANTONIO PAQUES



Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Agradecimentos

Agradeço especialmente à minha esposa Leonara Dario, pelo apoio e compreensão durante os últimos dez anos, que englobam graduação, mestrado e doutorado. Aos meus pais e irmãos. Aos amigos do IMECC. À CAPES e à UNICAMP, pelo auxílio financeiro recebido.

De maneira muito especial agradeço ao Prof. Dr. Antonio José Engler, pela orientação segura e dedicada, pela amizade valorosa e pela insistência em me fazer seguir seus conselhos.

*Dedico este trabalho
à minha avó Olga Canal Dario
(in memoriam)*

Resumo (Abstract)

Esta tese é um estudo das propriedades aritméticas de corpos que possuem um anel de valorização compatível com o Radical de Kaplansky. São utilizados os métodos da teoria algébrica das formas quadráticas, teoria de Galois e principalmente, a teoria de valorizações em corpos. Apresentamos um novo método para a construção de corpos com Radical de Kaplansky não trivial. Demonstramos uma versão do Teorema 90 de Hilbert para o radical. Para uma álgebra quaterniônica D , demonstramos que um anel de valorização do centro de D possui extensão para um anel de valorização total e invariante de D se, e somente se, for compatível com o Radical de Kaplansky.

This thesis is a study of the arithmetical properties of fields with a valuation ring compatible with the Kaplansky's Radical. The methods utilized are algebraic theory of quadratic forms, Galois theory and valuation theory over fields. We present a new construction method of fields with non-trivial Kaplansky's Radical. We also prove a version of the Hilbert's 90 Theorem for the radical. Let D a quaternion algebra and F the center of D . A valuation ring of F has a extension to a total and invariant valuation ring of D iff is compatible with the Kaplansky's Radical.

Sumário

Introdução	xi
1 Valorizações e a 2-Torção do Grupo de Brauer	1
1.1 Formas Quadráticas e Álgebras de Quatérnios	2
1.2 Grupo de Brauer e Teorema de Merkurjev	8
1.3 Valorizações e o Grupo de Brauer Relativo	11
2 Valorizações e o Radical	23
2.1 Corpos Hilbertianos e Quase-Pitagóricos	25
2.2 O Caso Livre	29
2.3 Radical de Kaplansky e Valorizações	33
3 Radical de Kaplansky e o Pro-2-Grupo de Galois Maximal	39
3.1 Radical obtido via Valorizações e Pro-2-Grupo de Galois Maximal . .	40
3.2 Pro-2-Grupo de Galois Maximal obtido via Radical e Valorizações . .	50
4 As Construções Existentes	59
4.1 Extensões Não Reais de Corpos Pitagóricos	60
4.2 Exemplos Obtidos por Kula	70
4.3 O Caso Real Livre	71
5 O Teorema 90 de Hilbert	77
6 Radical de Kaplansky e Valorizações em Álgebras de Divisão	89

Introdução

Neste trabalho, um corpo é **sempre** um corpo comutativo e de característica diferente de 2. Utilizaremos as seguintes notações para o corpo F :

- $F^\times = F \setminus \{0\}$ denota o conjunto dos elementos não nulos de F .
- $\dot{F}$ é o grupo multiplicativo de F .
- $\dot{F}^2$ denota o subgrupo de $\dot{F}$ dado por $\{a^2 \mid a \in F^\times\}$.
- $\Sigma \dot{F}^2$ denota o subgrupo de $\dot{F}$ constituído por

$$\left\{ a_1^2 + \dots + a_n^2 \neq 0 \mid a_i \in F, i = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Numa generalização do símbolo de Hilbert, Irving Kaplansky ([K]) definiu o radical $R(F)$ associado ao corpo F . O radical é um subgrupo de $\dot{F}$ e pode ser caracterizado pela propriedade de que todos os seus elementos são representáveis por todas as formas quadráticas definidas sobre F e que representam 1. Mais precisamente, dada uma forma quadrática $f(X_1, \dots, X_n)$ com coeficientes em F , se denotarmos por $D(f)$ o conjunto de todos os elementos $x \in F^\times$ para os quais existem $a_1, \dots, a_n \in F$ tais que $x = f(a_1, \dots, a_n)$, então $r \in R(F)$ se, e somente se, $r \in D(f)$ para toda forma f tal que $1 \in D(f)$. Em 1975, C. Cordes [C₂] estudou as propriedades do radical. Posteriormente, $R(F)$ ficou conhecido como o Radical de Kaplansky do corpo F .

Seja A um anel de valorização de F . O Radical de Kaplansky e o anel A podem ser conjuntamente utilizados no estudo do corpo F se for válida a compatibilidade $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$, onde $\mathcal{M}_A$ é o ideal maximal de A . Valendo esta inclusão, diremos que A é compatível com $R(F)$, compatível com o radical, ou simplesmente R -compatível, quando o corpo F for claro no contexto.

Esta tese é o estudo das propriedades aritméticas de um corpo que possui um anel de valorização compatível com o radical. Em particular, é uma continuidade do estudo do próprio Radical de Kaplansky, baseado em métodos da teoria de valorizações. Entenda-se por “estudo das propriedades aritméticas” do corpo F como o estudo das formas quadráticas definidas sobre F , a descrição do grupo de Galois da 2-extensão maximal de F e o estudo das álgebras de divisão com centro F , por meio do grupo de Brauer e as valorizações de F .

Seja A um anel de valorização do corpo F , com $\text{car}(A/\mathcal{M}_A) \neq 2$ e $1 + \mathcal{M}_A \subset \dot{F}^2$. Com A nestas condições, é válido o Lema de Hensel ([EP], Teorema 4.2.3, p.95) para polinômios de grau 2. Por este motivo, A é denominado um anel de valorização 2-henseliano. Alternativamente, denotando por v_A uma valorização de F associada a A , (F, v_A) é dito um corpo valorizado 2-henseliano. Seja $\Gamma_A = v_A(F^\times)$. Se $-1 \notin \dot{F}^2$, então a menos que $\Gamma_A = 2\Gamma_A$, teremos $R(F) = \dot{F}^2$ (conforme veremos no Lema 2.12). Portanto, podemos identificar estes corpos como exemplares triviais da classe de corpos que estudaremos. Conforme será exposto neste trabalho, um corpo com um anel de valorização compatível com $R(F)$ tem propriedades semelhantes a um corpo valorizado 2-henseliano, principalmente no que se refere à Teoria de Galois e às formas quadráticas sobre F .

Veremos que uma propriedade imediata de $R(F)$ é que ele sempre contém $\dot{F}^2$ e muitas vezes ocorre mesmo a trivialidade $R(F) = \dot{F}^2$. Neste caso, diremos que F é um corpo *fracamente hilbertiano*. A outra situação de trivialidade do radical é $R(F) = \dot{F}$, que chamaremos de “caso livre”. O motivo deste nome é que a ocorrência deste caso é equivalente ao grupo de Galois $G(F(2)/F)$ ser um pro-2-grupo livre, onde $F(2)$ é a 2-extensão maximal de F , ou simplesmente *fecho quadrático* de F .

Além dos dois casos citados no parágrafo anterior, a única classe de corpos para os quais o Radical de Kaplansky é bem conhecido é a dos corpos *quase-pitagóricos*, quando $R(F) = D(f)$, onde f é a forma quadrática $X_1^2 + X_2^2$. Nos três

casos que citamos, as propriedades de F são bem descritas em muitos trabalhos. O fato é que conhecer o radical de um corpo possibilita obter resultados acerca de diversos aspectos da teoria de corpos.

Se $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$, então a menos de alguns casos excepcionais, têm-se $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. O conjunto $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ é um subgrupo de $\dot{F}$ denominado *localizador* do anel de valorização A . Portanto, vamos trabalhar com uma classe de corpos para os quais conhecemos o radical por meio da teoria de valorizações. Esta abordagem permitiu que fossem obtidos os três principais resultados originais deste trabalho. Os dois primeiros são de natureza construtiva e o terceiro garante a existência de certas valorizações sobre anéis de divisão. Iniciaremos motivando e explicando os dois primeiros resultados.

Muitos aspectos técnicos sobre o Radical de Kaplansky ainda não são bem compreendidos. Sequer os exemplos existentes de corpos com $\dot{F}^2 \neq R(F)$ aparentam possuir um argumento comum. Queremos dizer que em geral não existe uma explicação satisfatória para o fato de um corpo possuir radical não trivial.

As poucas construções de corpos com radical não trivial demandaram bastante trabalho. Aparentemente, o interesse nestes corpos surgiu em 1973, quando Cordes ([C₁]) apresentou a classificação dos possíveis anéis de Witt (veja a Definição 1.4) de um corpo F com $(\dot{F} : \dot{F}^2) = 8$, e que satisfizesse a propriedade de -1 ser expresso como $a_1^2 + \dots + a_n^2$, para certos escalares $a_1, \dots, a_n \in F^\times$. No seu trabalho, Cordes não respondeu se três dos possíveis anéis de sua lista eram de fato anel de Witt de algum corpo. Contudo, mostrou que necessariamente tais corpos não podiam ser fracamente hilbertianos. A existência de um corpo com esta propriedade era desconhecida na época. O problema apresentado por Cordes foi resolvido por Kula no trabalho [Ku₂], de 1981. Utilizando a teoria de esquemas de formas quadráticas, também foi Kula [Ku₁] quem respondeu afirmativamente a pergunta: dados os inteiros positivos n e m , existe um corpo F para o qual os índices $(\dot{F} : R(F))$ e $(R(F) : \dot{F}^2)$, sejam 2^n e 2^m , respectivamente? Dedicados a questões de existência, os trabalhos de Kula não permitem calcular $R(F)$ como explicamos anteriormente.

Construir corpos com radical não trivial também foi o objetivo de Berman no trabalho [Be], de 1979. Ele abordou um caso bastante particular: descrever o

radical de $F(\sqrt{-1})$, onde F é um corpo pitagórico (isto é, $a_1^2 + \dots + a_n^2 \in \dot{F}^2$, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in F^\times$). Através do estudo do conjunto das ordens de F , Berman respondeu a mesma questão sobre os inteiros m e n e para esta classe particular de corpos, descreveu adequadamente o radical.

O nosso primeiro resultado amplia a classe dos corpos para os quais o radical é conhecido e bem descrito, além de produzir exemplares não triviais da classe de corpos que estudaremos. Na construção resumida no Teorema 3.6, apresentamos um método simples para obter corpos com $\dot{F}^2 \neq R(F) \neq \dot{F}$. Iniciamos escolhendo um corpo L com $G(L(2)/L)$ livre e um corpo valorizado 2-henseliano (H, w) , onde o anel de valorização associado a $w : H \rightarrow \Gamma_1 \cup \{\infty\}$ é denotado por A_1 . Utilizando resultados sobre a existência de um corpo F com $G(F(2)/F) \cong G(H(2)/H) * G(L(2)/L)$, provamos que F possui um anel de valorização A , com $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. O desenvolvimento do método via Teoria de Galois, permite obter extensões algébricas de F com propriedades análogas às de H e L . Através da escolha da dimensão de $\Gamma_1/2\Gamma_1$ como $\mathbb{F}_2$ -espaço vetorial e do corpo residual $A_1/\mathcal{M}_{A_1}$, descreve-se os grupos $R(F)/\dot{F}^2$ e $\dot{F}/R(F)$. Em particular, é possível determinar os inteiros m e n como já exposto. Por estes motivos, consideramos que o método é eficiente. O procedimento que expomos pode ser visto como uma “versão galoisiana” que aperfeiçoa o método desenvolvido por Kula em [Ku₁].

A classe de corpos produzida pelo nosso método abrange a classe obtida por Berman em [Be]. Demonstraremos que a construção apresentada por Berman é um caso particular da nossa abordagem. Veremos que os principais exemplos obtidos por Kula também podem ser descritos pelo nosso método.

Concluimos que existem duas principais razões pelas quais o radical é não trivial, tanto nos corpos que construímos, quanto nos exemplos dos autores citados. A primeira é o fato de tais corpos admitirem elementos rígidos (veja a Definição 3.10) em relação ao Radical de Kaplansky. A segunda é a descrição do grupo de Galois $G = G(F(2)/F)$, de um tal corpo F . O grupo G decompõe-se como um produto livre $G_1 * G_2$, na categoria dos pro-2-grupos. O grupo G_1 é necessariamente um pro-2-grupo livre e G_2 corresponde a um corpo que admite um anel de valorização 2-henseliano.

Com todo este processo exposto, concluímos que a classe de corpos que estamos considerando é suficientemente ampla para merecer um estudo detalhado. Como vimos, alguns exemplos destes corpos já foram indiretamente estudados pelos autores citados.

Descreveremos agora o segundo resultado do nosso trabalho. Dada uma extensão quadrática de corpos $F(\sqrt{a})/F$, não se conhece a relação exata entre $R(F)$ e $R(K)$, $K = F(\sqrt{a})$. Uma das poucas tentativas bem sucedidas neste sentido é a demonstração de uma versão do Teorema 90 de Hilbert para o Radical de Kaplansky, como explicaremos. Denotando por N a aplicação norma $N : K^\times \rightarrow F^\times$, o Teorema 90 de Hilbert diz que $N^{-1}(\dot{F}^2) = \dot{F}\dot{K}^2$. Cordes conjecturou que $\dot{F}^2$ poderia ser substituído por $R(F)$, afirmando que $N^{-1}(R(F)) = \dot{F}R(K)$. Cordes e Ramsey Jr. ([CR]) provaram a validade da conjectura quando F é pré-hilbertiano (um caso particular de um corpo quase-pitagórico), sob a condição do índice $(\dot{F} : R(F))$ ser finito. Posteriormente, nos trabalhos [IKN], [Ki₁] e [Ki₂], está demonstrado que $N^{-1}(R(F)) = \dot{F}R(K)$, quando F é quase-pitagórico (e satisfaz um condição técnica extra).

Nós consideramos o caso $K = F(\sqrt{a})$ como explicado e $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$, para algum anel de valorização A de F . Se $a \notin R(F)$, verificamos que o radical de K se mantém como o localizador da única extensão de A ao corpo K . No caso em que $a \in R(F)$, provamos que o radical de K passa a ser a interseção dos localizadores das duas extensões de A . Para ambos os casos, demonstramos o Teorema 90 de Hilbert, como enunciado no parágrafo anterior. No teorema que provamos, a compatibilidade $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$ é substituída pela hipótese de existência de um elemento birígido em relação a $R(F)$. Esta substituição torna o teorema mais abrangente e traduz a existência de A para a condição de existência de apenas um elemento específico do corpo F . Concluímos assim a discussão sobre o segundo resultado da tese. Passaremos a explicar o resultado existencial, sobre valorizações em álgebras de divisão.

Sempre que assumirmos que D é uma *álgebra de divisão* sobre um corpo F , ou simplesmente uma *F -álgebra de divisão*, estaremos supondo que F é identificado com o centro de D , ou seja, $F = \{a \in D \mid ax = xa, \text{ para todo } x \in D\}$. Sobre álgebras de divisão, a teoria de valorização é baseada no conceito de anel de valorização total e invariante. Dada a álgebra de divisão D sobre F , um subanel $\mathcal{C}$

é um *anel de valorização total e invariante* se

- (a) Para todo $x \in D^\times = D \setminus \{0\}$, tivermos $x \in \mathcal{C}$ ou $x^{-1} \in \mathcal{C}$ (totalidade).
- (b) $u\mathcal{C}u^{-1} = \mathcal{C}$, para todo $u \in D^\times$ (invariância).

Se for possível deduzir que D admite um subanel como definido, então a estrutura da própria álgebra D pode ser estudada por meio da teoria de valorização. Um bom exemplo disto é quando D é uma álgebra do tipo $A_1 \otimes_F A_2$, onde A_1 e A_2 são álgebras de quatérnios sobre F . Neste caso, D é denominada uma *álgebra biquaterniônica*. Quando F é um corpo henseliano, isto é, F possui um anel de valorização satisfazendo o Lema de Hensel ([EP], Teorema 4.1.3, p.87 ou [E]), um resultado de Morandi ([Mo₂], Proposições 7.1 e 7.2) estabelece condições para que uma F -álgebra biquaterniônica possua um subcorpo maximal que é uma extensão galoisiana cíclica de F . A existência de tal subcorpo permite verificar que a álgebra é do tipo *produto cruzado cíclica*, cuja estrutura é bem conhecida (veja [Re]).

Contudo, a existência de anéis de valorização totais e invariantes não é algo comum. Que o centro da álgebra de divisão é um corpo henseliano é a única condição conhecida para que **toda** F -álgebra de divisão admita um anel de valorização total e invariante. A existência é provada estendendo o anel de valorização henseliano do centro à álgebra de divisão.

Um dos objetivos do nosso trabalho foi obter condições mais gerais sobre um corpo F , para que as F -álgebras de divisão admitam anel de valorização total e invariante. Provamos que a henselianidade de F não é necessária para que toda F -álgebra quaterniônica de divisão possua um anel de valorização total e invariante. Uma condição mais fraca é a compatibilidade de um anel de valorização A de F com o Radical de Kaplansky (lembre que o caso 2-henseliano corresponde à $R(F) = \dot{F}^2$). Especificamente, provamos que se F é um corpo munido de um anel de valorização A ($\text{car}(A/\mathcal{M}_A) \neq 2$), então a compatibilidade $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$ é uma condição necessária e suficiente para que toda F -álgebra quaterniônica de divisão admita um anel de valorização total e invariante que estende B , ou seja, $B \cap F = A$. Utilizando este resultado, foi possível concluir que sob a hipótese da compatibilidade de A com $R(F)$, todas as F -álgebras biquaterniônicas de divisão também possuem anel de valorização total e invariante estendendo A .

As conclusões que obtivemos ampliam a classe de corpos sobre os quais as álgebras (bi)quaterniônicas podem ser estudadas por meio da teoria de valorização. Conclui-se que o Radical de Kaplansky é a ligação entre a teoria de formas quadráticas e a teoria destas “valorizações não comutativas”. Na seqüência explicamos como a tese está organizada.

O primeiro capítulo é introdutório e não aborda o Radical de Kaplansky. Resumimos parte da teoria que será utilizada no trabalho, com atenção especial às relações entre formas quadráticas e valorizações. Como contribuição original e fundamental para os resultados deste trabalho, o primeiro capítulo traz um resultado sobre o grupo de Brauer $\text{Br}(F)$ de um corpo F . A grosso modo, à um elemento de $\text{Br}(F)$ corresponde um único anel de divisão sobre F . Assim, o grupo de Brauer tem grande importância na descrição das álgebras de divisão sobre o corpo em questão. De particular interesse é o subgrupo ${}_2\text{Br}(F)$ de $\text{Br}(F)$, composto pelos elementos de ordem ≤ 2 . Se F é (qualquer) corpo que possui um anel de valorização não trivial, descrevemos ${}_2\text{Br}(F)$ em função de $\text{Br}(F_h)$, onde F_h é uma 2-extensão de F admitindo um anel de valorização 2-henseliano.

O segundo capítulo é dedicado ao estudo das propriedades e tipos conhecidos de $R(F)$. Destacamos os corpos com radical trivial, pois eles são fundamentais nas construções que exibiremos no capítulo seguinte. Investigamos as relações do radical com as valorizações. Descrevemos ainda o conjunto dos anéis de valorização do corpo F que são compatíveis com $R(F)$.

O terceiro capítulo é dividido em duas seções:

- (1) *O Radical de Kaplansky obtido via valorizações e o pro-2-grupo de Galois maximal.* Nesta seção é feita a construção de corpos com radical não trivial e igual a algum localizador $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$.
- (2) *O pro-2-grupo de Galois maximal obtido via Radical de Kaplansky e valorizações.* Aqui é feito o caminho inverso à seção anterior. Admitindo que um corpo F possua elementos $R(F)$ -rígidos, construímos um anel de valorização de F compatível com $R(F)$. A partir desta compatibilidade, demonstra-se que $G(F(2)/F)$ decompõe-se como $G_1 * G_2$, onde G_1 é um pro-2-grupo livre e G_2 corresponde a um corpo que possui um anel de valorização 2-henseliano.

No quarto capítulo procedemos a análise das construções existentes na literatura. Tais construções estão contidas nos trabalhos de Berman e Kula já citados. Na primeira seção demonstramos que o processo descrito no artigo de Berman ([Be]) pode ser feito pelo nosso método, através da decomposição do pro-2-grupo de Galois maximal, como já explicamos, ou pela demonstração da existência de um anel de valorização compatível com o radical. Na segunda seção, mostramos que exemplos obtidos por Kula também podem ser enquadrados numa das condições equivalentes do capítulo anterior. Complementamos o estudo com uma seção sobre uma classe de corpos cujo radical não pode ser descrito como o localizador de um anel de valorização.

O quinto capítulo é o estudo do Radical de Kaplansky de uma extensão quadrática de um corpo F que admite um anel de valorização $R(F)$ -compatível. É demonstrada a versão do Teorema 90 de Hilbert para $R(F)$.

Finalmente, no sexto capítulo, aplicamos as valorizações compatíveis com o radical no estudo de anéis de valorização totais e invariantes em álgebras de quatérnios. O teorema principal (Teorema 6.4) estabelece - via Radical de Kaplansky - as relações destes anéis com a teoria das formas quadráticas. Demonstramos que a compatibilidade com o radical é condição suficiente para a existência de anéis de valorização totais e invariantes em todas as álgebras (bi)quaternionônicas de divisão sobre um corpo fixado F .

CAPÍTULO 1

Valorizações e a 2-Torção do Grupo de Brauer

Visando tornar mais concisa a redação dos capítulos seguintes, resumimos aqui os conceitos básicos da teoria de formas quadráticas e valorizações sobre corpos. Obviamente, nos restringiremos aos resultados que mais utilizaremos. O objetivo também é facilitar a consulta para o leitor. A referência básica sobre a teoria algébrica das formas quadráticas é o livro de Lam ([L₁]). Outra boa referência é ([S]). Na área de valorizações, o “livro texto” é o livro de Endler ([E]). Utilizaremos muitos resultados do livro de Engler e Prestel ([EP]).

Neste capítulo também apresentamos um dos resultados fundamentais da tese. Para descrevê-lo resumidamente, consideramos um corpo F munido de um anel de valorização A . Na Definição 1.17, veremos que a 2-henselização F_h é a “menor” extensão de F que admite um anel de valorização 2-henseliano estendendo A . No Teorema 1.21 e seu Corolário 1.22, apresentamos uma descrição de ${}_2\text{Br}(F)$ em função do grupo de Brauer de F_h . Nosso resultado pode ser visto como uma versão, para o grupo de Brauer, de um teorema de Knebusch ([Kn]) sobre o anel de Witt de F .

1.1 Formas Quadráticas e Álgebras de Quatérnios

Uma *forma quadrática n -dimensional* sobre o corpo F é um polinômio em n variáveis, homogêneo e de grau 2:

$$f = f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j, \text{ com } a_{ij} \in F.$$

Fazendo $a'_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$, obtêm-se a matriz simétrica $M = (a'_{ij})$. Assim, f pode ser expressa em linguagem matricial:

$$f(X) = X^t M X, \text{ onde } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ e } X^t \text{ é a transposta de } X.$$

Sempre assumiremos que f é *regular*, i.e., que a matriz M é inversível.

Sejam $f = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$ e $g = \sum_{i,j} b_{ij} X_i X_j$ duas formas quadráticas sobre F . Dizemos que f e g são *equivalentes* (ou *isométricas*), e denotamos $f \cong g$, se $m = n$ e existe uma matriz $n \times n$ inversível D tal que $f(X) = g(DX)$.

Exemplo Se $g(X_1, X_2) = X_1 X_2$ e D é a matriz simétrica $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, temos que

$$g(DX) = g(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = (X_1 + X_2)(X_1 - X_2) = X_1^2 - X_2^2.$$

Portanto, g é isométrica à $f(X_1, X_2) = X_1^2 - X_2^2$.

Definição 1.1 Seja $f = \sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$ uma forma quadrática n -dimensional sobre F e seja $a \in F$. Dizemos que f **representa** a se existem $x_1, \dots, x_n \in F$, tais que $f(x_1, \dots, x_n) = a$. Definimos o **conjunto de valores** de f como

$$D_F(f) := \{a \in F^\times, \text{ tal que } a \text{ é representado pela forma quadrática } f\}.$$

Se $f = a_1 X_1^2 + \dots + a_n X_n^2$ (f é **diagonal**) denotamos f por $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e o conjunto de valores por $D_F(f) := D_F\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

- Se $D_F(f) = F^\times$, então a forma quadrática f é chamada de **universal**.
- Se existem $x_1, \dots, x_n \in F$, não todos nulos, tais que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, então f é denominada **isotrópica**. Caso contrário, f é dita **anisotrópica**.

Exemplo Todo elemento $a \in F^\times$ pode ser escrito como $x^2 - y^2$, onde $x = (a+1)/2$ e $y = (a-1)/2$ (lembre que $\text{car}(F) \neq 2$). Segue que $D_F\langle 1, -1 \rangle = F^\times$, ou seja, $\langle 1, -1 \rangle$ é universal. A forma $\langle 1, -1 \rangle$ é denominada *plano hiperbólico*.

Lema 1.2 *Sejam $f = \sum_{i,j} a_{ij}X_iX_j$ e $g = \sum_{i,j} b_{ij}X_iX_j$ duas formas quadráticas n -dimensionais sobre F . Se f é equivalente a g , então $D_F(f) = D_F(g)$.*

Demonstração Suponha $f \cong g$ e $D = (d_{ij})$ uma matriz inversível $(n \times n)$ tal que $f(X) = g(DX)$, onde $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Seja $y = f(x) \in D_F(f)$, com $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_i \in F$. Então, $y = f(x) = g(Dx)$, com Dx tendo entradas em F . Isto implica que $y \in D_F(g)$. Com isto, $D_F(f) \subseteq D_F(g)$. A inclusão contrária demonstra-se de modo análogo. $\square$

Como no exemplo da página anterior, uma forma quadrática regular sempre é equivalente à uma forma quadrática diagonal (veja [L₁], Corolário 2.4, p.7), isto é, uma forma quadrática do tipo $a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2$, onde $a_i \in F$. Por este motivo, podemos sempre utilizar formas diagonais. Conforme a Definição 1.1, denotaremos a forma $a_1X_1^2 + \cdots + a_nX_n^2$ simplesmente por $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$. A regularidade de f agora significa simplesmente que $a_i \neq 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lema 1.3 ([L₁], Prop. 5.1, p.15) *Duas formas quadráticas binárias $f = \langle a, b \rangle$ e $g = \langle c, d \rangle$ são equivalentes se, e somente se, $D_F\langle a, b \rangle \cap D_F\langle c, d \rangle \neq \emptyset$ e $ab\dot{F}^2 = cd\dot{F}^2$. Em particular, $\langle a, -a \rangle$ é equivalente à $\langle 1, -1 \rangle$, para todo $a \in F^\times$.*

No lema 1.3, $ab\dot{F}^2$ é definido como o *determinante* da forma f . Em geral, se $f = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, então

$$\text{Determinante de } f = d(f) := (a_1 \dots a_n)\dot{F}^2. \quad (1.1)$$

O Anel de Witt

Definição 1.4 *Sejam $f = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e $g = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ duas formas quadráticas sobre F . A soma $f \perp g$ é a forma quadrática de dimensão $m + n$ definida por*

$$f \perp g = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle.$$

*Dado um inteiro positivo r , denotamos por $rf = r\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ a soma de f com f r vezes. Uma forma do tipo $r\langle 1, -1 \rangle$ é denominada **hiperbólica**. O produto de f por g é a forma quadrática de dimensão mn definida por*

$$f \otimes g = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \otimes \langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle a_1 b_1, \dots, a_i b_j, \dots, a_n b_m \rangle.$$

As duas operações acima são associativas e comutativas. O elemento neutro multiplicativo é a forma unitária $\langle 1 \rangle$.

Teorema 1.5 (Teorema da Decomposição de Witt)

Se f é uma forma quadrática regular, então existe uma única (a menos de isometria) forma quadrática anisotrópica f_1 e um único inteiro não-negativo r , tal que

$$f \cong f_1 \perp r\langle 1, -1 \rangle.$$

Demonstração ([L₁], Teorema 4.1, p.12). □

Definição 1.6 *Sejam f e g duas formas quadráticas sobre F . Dizemos que f e g são **Witt-equivalentes** se existem inteiros não-negativos r, s tais que*

$$f \perp r\langle 1, -1 \rangle \cong g \perp s\langle 1, -1 \rangle.$$

Do Teorema 1.5, toda forma quadrática regular é Witt-equivalente a uma forma quadrática anisotrópica, unicamente determinada a menos de isometria.

Claramente a relação acima é de equivalência. Seja $W(F)$ o conjunto de todas as classes de equivalência de formas quadráticas sobre F . As operações de soma e produto (Definição 1.4) induzem operações em $W(F)$ e definem uma estrutura de anel em $W(F)$. Com estas operações, $W(F)$ é um anel comutativo e é denominado o *anel de Witt* de F .

Convencionaremos que a notação f para uma forma quadrática representa também sua classe de equivalência em $W(F)$. As operações $f \perp g$ e $f \otimes g$ também serão denotadas por $f + g$ e fg , respectivamente.

Decorre da definição de produto que o conjunto IF composto pelas classes de $W(F)$ representadas pelas formas quadráticas de dimensão par é um ideal de $W(F)$ (denominado *ideal fundamental*). Dado um inteiro positivo n , a n -ésima potência $(IF)^n$ do ideal fundamental é denotada por $I^n F$. De ([L₁], Proposição 1.2, p. 316), $I^n F$ é aditivamente gerado (como grupo abeliano) pelas

$$n\text{-formas de Pfister: } = \bigotimes_{i=1}^n \langle 1, -a_i \rangle, \text{ com } a_i \in F^\times.$$

Formas de Pfister tem particular importância porque estão conectadas com normas. Por exemplo, o conjunto de valores

$$D_F \langle 1, -a \rangle = \{x^2 - ay^2 \neq 0 \mid x, y \in F\},$$

da 1-forma de Pfister $\langle 1, -a \rangle$, é a imagem da norma $N_{F(\sqrt{a})/F} : F(\sqrt{a})^\times \rightarrow F^\times$. Isto mostra que $D_F \langle 1, -a \rangle$ é um subgrupo de $\dot{F}$ (fato que pode ser facilmente demonstrado diretamente). Em geral, se f é uma forma de Pfister, então $D(f)$ é um subgrupo de $\dot{F}$ ([L₁], Teorema 1.8, p.319). Neste caso, dizemos que $D(f)$ é o *grupo de valores* de f . Ainda em relação ao grupo $D_F \langle 1, -a \rangle$, temos o lema seguinte, que será amplamente utilizado neste trabalho. Na demonstração do lema (a exemplo de outras) aboliremos o uso do subíndice F na notação do grupo $D_F \langle 1, -a \rangle$, $a \in F^\times$.

Lema 1.7 (Propriedades Básicas do grupo $D_F \langle 1, -a \rangle$) Para todos $a, b \in F^\times$,

$$(a) \quad \dot{F}^2 \subseteq D_F \langle 1, -a \rangle \subseteq \dot{F}.$$

$$(b) \quad D_F \langle 1, -a \rangle \text{ é um subgrupo de } \dot{F}.$$

$$(c) \quad b \in D_F \langle 1, -a \rangle \Leftrightarrow a \in D_F \langle 1, -b \rangle.$$

$$(d) \quad D_F \langle 1, a \rangle \cap D_F \langle 1, b \rangle = D_F \langle 1, a \rangle \cap D_F \langle 1, -ab \rangle.$$

Demonstração Os itens (a), (b) e (c) são triviais. Em (d), observe que basta verificar a validade de apenas uma das inclusões. Dado $x \in D \langle 1, a \rangle \cap D \langle 1, b \rangle$, temos do item (c) que $-a, -b \in D \langle 1, -x \rangle$. Pelo item (b), $D \langle 1, -x \rangle$ é um subgrupo de $\dot{F}$. Assim, $ab \in D \langle 1, -x \rangle$. Novamente o item (c) implica $x \in D \langle 1, -ab \rangle$.

Álgebras de Quatérnios

Uma *álgebra* $\mathcal{A}$ sobre o corpo F (ou simplesmente uma F -*álgebra*) é um espaço vetorial sobre F munido de uma operação produto associativo, distributivo e compatível com a ação de F , ou seja, $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (xy)\alpha$, para todos $x, y \in \mathcal{A}$ e para todo $\alpha \in F$. O corpo F é identificado com $F \cdot 1$, onde 1 = unidade da álgebra. Assim, F é visto como um subcorpo de $\mathcal{A}$. Uma F -álgebra $\mathcal{A}$ é *central simples de dimensão finita* (ou simplesmente *csdf*) se o centro $Z(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} : xy = yx, \forall y \in \mathcal{A}\}$ é igual a F , $\mathcal{A}$ não possui um ideal bilateral próprio e a dimensão $[\mathcal{A} : F]$ (como F -espaço vetorial) de $\mathcal{A}$ é finita.

Pelo bem conhecido Teorema de Wedderburn, se $\mathcal{A}$ é uma F -álgebra *csdf*, então existe um único inteiro não nulo n e um único (a menos de isomorfismo) anel de divisão D , tal que $\mathcal{A}$ é isomorfa à $M_n(D)$, a *álgebra de matrizes* $n \times n$ sobre D .

Por uma *álgebra de quatérnios* sobre o corpo F entendemos um F -espaço vetorial de dimensão 4, com base $\{1, i, j, k\}$ e com uma operação (associativa e distributiva) de multiplicação, compatível com a operação de espaço vetorial, e definida pelas relações básicas

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji = k,$$

onde a, b são elementos previamente fixados em $F^\times$. Assim, é conveniente utilizar a notação (F, a, b) para denotar a álgebra de quatérnios com estas operações. Toda álgebra central simples de dimensão 4 sobre seu centro é obrigatoriamente uma álgebra de quatérnios ([L₁], Teorema 5.1, p.74).

Veremos agora que as 2-formas de Pfister estão relacionadas com as álgebras de quatérnios. A *norma* de um elemento $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \in (F, a, b)$ é definida como $N(x) := x\bar{x}$, onde $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$ é o *conjugado* de x . Assim,

$$N(x) = x_0^2 - x_1^2a - x_2^2b + x_3^2ab.$$

Segue que a aplicação norma $N : (F, a, b)^\times \rightarrow F^\times$ tem imagem $D_F \langle 1, -a, -b, ab \rangle$, igual ao grupo de valores da 2-forma de Pfister $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$. Como $x\bar{x} = N(x)$, segue que x é inversível se, e somente se, $N(x) \neq 0$. Este fato e o Lema 1.7 são utilizados para demonstrar a proposição seguinte.

Proposição 1.8 ([L₁], Teorema 2.7, p.58) *Seja (F, a, b) uma álgebra de quatérnios sobre F . São equivalentes:*

- (i) (F, a, b) é uma álgebra de divisão.
- (ii) $\langle 1, -a, -b, ab \rangle \not\cong 2\langle 1, -1 \rangle$.
- (iii) $a \notin D_F\langle 1, -b \rangle$.

Outras propriedades básicas das álgebras de quatérnios são:

Lema 1.9 ([L₁], Prop. 1.1, p.52 e [L₁], Teorema 2.11, p.60) *Sejam $a, b, c \in F^\times$.*

- (a) $(F, a, b) \cong (F, b, a)$.
- (b) $(F, a, 1) \cong (F, a, -a) \cong M_2(F)$.
- (c) $(F, ac^2, b) \cong (F, a, b)$.
- (d) $(F, a, b) \otimes_F (F, a, c) \cong (F, a, bc) \otimes_F M_2(F)$.

Lema 1.10 ([L₁], Teorema 4.1, p.67) *Seja (F, a, b) uma álgebra de quatérnios e $K = F(\sqrt{c})$, com $c \in F^\times \setminus F^2$.*

- (a) *Se $(F, a, b) \otimes_F K \cong M_2(K)$, então K pode ser F -mergulhado em (F, a, b) , ou seja, existe uma aplicação injetiva $K \hookrightarrow (F, a, b)$ que fixa os elementos de F .*
- (b) *$K \subset (F, a, b)$ se, e somente se $(F, a, b) \cong (F, c, x)$, para algum $x \in F^\times$.*

Uma álgebra de quatérnios é completamente entendida através de sua 2-forma de Pfister correspondente:

Lema 1.11 ([L₁], Teorema 2.5, p.57) *Sejam (F, a, b) e (F, c, d) duas álgebras de quatérnios sobre F . As afirmações seguintes são equivalentes:*

- (i) $(F, a, b) \cong (F, c, d)$.
- (ii) $\langle 1, -a, -b, ab \rangle \cong \langle 1, -c, -d, cd \rangle$.

Se (F, a, b) não é um álgebra de divisão, então $(F, a, b) \cong M_2(F)$, a álgebra de matrizes 2×2 sobre F ([L₁], Teorema 2.7, p.58). Neste caso, dos resultados vistos, (F, a, b) corresponde à forma $2\langle 1, -1 \rangle$.

1.2 Grupo de Brauer e Teorema de Merkurjev

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras centrais simples de dimensão finita sobre o corpo F . Pelo Teorema de Wedderburn, $\mathcal{A} \cong M_n(D)$ e $\mathcal{B} \cong M_m(D')$, onde D e D' são F -álgebras de divisão com centro F . Com isto, podemos definir a relação

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Leftrightarrow D \cong D'.$$

Esta é uma relação de equivalência no conjunto de todas as F -álgebras *csdf*. Assim, cada classe de equivalência é um conjunto do tipo $[D] = \{M_n(D) : n \geq 1\}$, para algum anel de divisão D com centro F , unicamente determinado a menos de isomorfismo. Seja $\text{Br}(F)$ o conjunto de todas as classes de equivalência. Das propriedades do produto tensorial, a operação $[\mathcal{A}_1] + [\mathcal{A}_2] = [\mathcal{A}_1 \otimes_F \mathcal{A}_2]$ é bem definida, associativa e comutativa em $\text{Br}(F)$. Ainda, $[\mathcal{A}] + [F] = [\mathcal{A}]$, onde $[F] = \{M_n(F) : n \geq 1\}$ é a classe das álgebras de matrizes sobre F . Para cada $[\mathcal{A}] \in \text{Br}(F)$, a operação $(x, y) \mapsto yx$ induz uma nova operação no conjunto $\mathcal{A}$, produzindo uma nova álgebra $\mathcal{A}^o$ (álgebra oposta) que tem a propriedade de $[\mathcal{A}] + [\mathcal{A}^o] = [F]$. Portanto, $\text{Br}(F)$ é um grupo abeliano, com elemento neutro $0 = [F]$. Finalmente, $\text{Br}(F)$ é denominado o *grupo de Brauer de F* .

Exemplo Se F é um corpo algebricamente fechado ou um corpo finito, então $\text{Br}(F)$ é trivial. O bem conhecido Teorema de Frobenius afirma que sobre $\mathbb{R}$ as únicas álgebras de divisão são o próprio $\mathbb{R}$ e a álgebra quaterniônica $(\mathbb{R}, -1, -1)$. Assim, $\text{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Se F é um corpo p -ádico (veja o primeiro exemplo da seção seguinte), então $\text{Br}(F) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Para uma demonstração deste fato consulte ([Re], Teorema 31.8, p.266).

O grupo de Brauer de F sempre é um grupo de torção ([Re], Teorema 29.22, p.253), ou seja, se $\mathcal{A}$ é uma F -álgebra *csdf*, então existe um inteiro positivo n tal que $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}$ é isomorfo a uma álgebra de matrizes com entradas em F . O menor inteiro n com esta propriedade é denominado o *expoente* de $\mathcal{A}$ em $\text{Br}(F)$. Se D é uma álgebra de divisão com centro F e $[D : F]$ é finita, o inteiro $\sqrt{[D : F]}$ é chamado de *índice* de D . O índice de $\mathcal{A} \cong M_r(D)$ é por definição, o índice de D . O expoente sempre divide o índice de $\mathcal{A}$ (conforme [Re], Teorema 29.22, p.253). Ainda mais, o expoente e o índice de $\mathcal{A}$ possuem os mesmos fatores primos ([Re], Teorema 29.24, p.254).

Lembramos que utilizaremos a notação ${}_2\text{Br}(F)$ para o subgrupo de $\text{Br}(F)$ composto por todos os elementos de ordem ≤ 2 . Pelo Lema 1.9, partes (a), (b), (c) e (d), temos

$$(F, a, b) \otimes_F (F, a, b) \cong (F, a^2, b) \otimes_F M_2(F) \cong M_2(F) \otimes_F M_2(F) \cong M_4(F).$$

Portanto, as álgebras de quatérnios sobre F (assim como $\bigotimes_{i=1}^n (F, a_i, b_i)$) representam elementos de ${}_2\text{Br}(F)$. Como já vimos, $(F, a, b) \cong M_2(F)$, ou (F, a, b) é uma álgebra de divisão. Logo, $[(F, a, b)] = 0$, ou (F, a, b) é a álgebra de divisão que determina a classe $\{M_n((F, a, b)) : n \geq 1\}$. Evidentemente, se $(F, a, b) \cong (F, c, d)$, então $[(F, a, b)] = [(F, c, d)]$. Por outro lado, se $0 \neq [(F, a, b)] = [(F, c, d)]$, então (F, a, b) e (F, c, d) são álgebras de divisão que representam a mesma classe em ${}_2\text{Br}(F)$. Portanto, são isomorfas. Por este motivo, não faremos distinção entre uma álgebra de quatérnios e sua classe em ${}_2\text{Br}(F)$. Ambas serão denotadas por (F, a, b) , assim como diremos que $(F, a, b) = 0$, quando $(F, a, b) \cong M_2(F)$. As álgebras de quatérnios são na realidade os geradores do grupo abeliano ${}_2\text{Br}(F)$, conforme o teorema fundamental:

Teorema 1.12 (Teorema de Merkurjev) *A aplicação $\gamma : I^2F/I^3F \rightarrow {}_2\text{Br}(F)$, definida por*

$$\langle 1, -a, -b, ab \rangle + I^3F \longmapsto (F, a, b)$$

estende-se por linearidade a um isomorfismo. Em particular, a sobrejetividade de γ diz que ${}_2\text{Br}(F)$ é gerado pelas classes de F -álgebras de quatérnios.

Demonstração A demonstração é bastante longa para expormos aqui. O leitor interessado pode consultar ([Me]) ou uma boa exposição a respeito em ([L₁], Teorema 6.11, p.138). $\square$

A Restrição

Dada a extensão de corpos K/F , definimos a *aplicação restrição*:

$$\begin{aligned} \text{res}_{K/F} : {}_2\text{Br}(F) &\rightarrow {}_2\text{Br}(K) \\ [\mathcal{A}] &\mapsto [\mathcal{A} \otimes_F K]. \end{aligned}$$

O núcleo de $\text{res}_{K/F}$ é denotado por $\text{Br}(K/F)$ e em referência à extensão K/F , recebe o nome especial de *Grupo de Brauer Relativo*.

Se $[\mathcal{A}] \in {}_2\text{Br}(F)$ e $\mathcal{A} \otimes K \cong M_n(K)$, para algum $n \geq 1$, então dizemos que a extensão K *cinde* a álgebra $\mathcal{A}$. No caso em que $\mathcal{A} = (F, a, b)$, temos que $(F, a, b) \xrightarrow{\text{res}} K \otimes_F (F, a, b) \cong (K, a, b)$. No caso em que $\mathcal{A} = (F, a, b)$ e K é uma extensão quadrática de F que cinde $\mathcal{A}$, o item (a) do Lema 1.10 diz que K pode ser visto como um subcorpo de (F, a, b) . Quanto a extensões quadráticas de F , temos:

Teorema 1.13 *Seja F um corpo e $K = F(\sqrt{a})$, com $a \in F^\times \setminus \dot{F}^2$. Então,*

$$\text{Br}(K/F) = \left\{ (F, a, x) \mid x \in F^\times \right\}.$$

Demonstração Seja $[D] \neq 0$ uma classe em $\text{Br}(K/F)$. Assim, $D \otimes_F K \cong M_n(K)$, para algum inteiro $n > 1$. Como o índice $\sqrt{[D : F]}$ divide o grau de uma extensão de F que cinde D (veja [Re], Teorema 28.5, item (i), p.238), temos que $[D : F] = 4$. Neste caso, já vimos que D é isomorfa à uma F -álgebra de quatérnios. Do item (a) do Lema 1.10, podemos considerar K como um subcorpo de D . Do Lema 1.10 (agora item (b)), segue que $D \cong (F, a, x)$, para algum $x \in F^\times$. $\square$

Observação 1 O homomorfismo $\psi : \dot{F} \rightarrow {}_2\text{Br}(F)$, $x \mapsto (F, a, x)$ também serve para descrever $\text{Br}(K/F)$, quando $K = F(\sqrt{a})$. Pelo Teorema 1.13, a imagem de ψ é $\text{Br}(K/F)$. Além disto, $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in D_F \langle 1, -a \rangle$. Portanto, ψ induz um isomorfismo

$$\dot{F}/D_F \langle 1, -a \rangle \cong \text{Br}(K/F).$$

Observação 2 Lembramos que $I^n F$ é a notação para a n -ésima potência do ideal fundamental do anel de Witt. Dada a extensão de corpos K/F , a inclusão $F \hookrightarrow K$ induz uma aplicação natural $r : W(F) \rightarrow W(K)$, simplesmente considerando-se como elementos de K os coeficientes da forma $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in W(F)$. A aplicação r induz

$$\text{res}_{K/F} : I^2 F / I^3 F \rightarrow I^2 K / I^3 K$$

$$\langle 1, -a, -b, ab \rangle + I^3 F \mapsto \langle 1, -a, -b, ab \rangle + I^3 K.$$

(Lembre que $I^2 F$ é aditivamente gerado pelas 2-formas de Pfister) A aplicação acima definida também é denominada de *restrição*. No caso especial $K = F(\sqrt{a})$, com $a \in F^\times \setminus \dot{F}^2$, o Teorema 1.12, junto com o Teorema 1.13, implica que um elemento do núcleo de $\text{res}_{K/F}$ é representado por uma 2-forma de Pfister do tipo $\langle 1, -a, -x, ax \rangle$, para algum $x \in F^\times$.

1.3 Valorizações e o Grupo de Brauer Relativo

Nesta seção introduzimos a notação da teoria de valorizações e provamos o Teorema 1.21, que é o resultado principal do capítulo.

Seja F um corpo e Γ um grupo abeliano e totalmente ordenado. Uma *valorização* de F é uma aplicação sobrejetora $v : F \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ que satisfaz:

- (1) $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.
- (2) $v(xy) = v(x) + v(y)$, para todos $x, y \in F$.
- (3) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$, para todos $x, y \in F$.

A soma com o símbolo “ ∞ ” é definida da seguinte forma: $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty + \infty = \infty$, para todo $\gamma \in \Gamma$. O grupo ordenado Γ é chamado o *grupo de valores* de v e a ordem total de Γ é estendida a $\Gamma \cup \{\infty\}$ definindo $\infty > \gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Seguem da definição as propriedades básicas: $v(1) = 0$, $v(-x) = v(x)$ e $v(x^{-1}) = -v(x)$, para todo $x \in F^\times$. Com isto verifica-se que o conjunto $A = \{x \in F : v(x) \geq 0\}$ é um subanel local de F e para todo $x \in F^\times$, tem-se $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$. Um subanel de F com esta propriedade é chamado de um *anel de valorização* de F . Temos ainda:

- ◇ $\mathcal{M}_A := \{x \in F : v(x) > 0\}$ é o único *ideal maximal* de A .
- ◇ $A^\times := \{x \in F : v(x) = 0\}$ é o *grupo das unidades* de A .
- ◇ $k_A := A/\mathcal{M}_A$ é chamado o *corpo residual* de A .
- ◇ $\pi_A : A \rightarrow k_A$ denota a *projeção canônica*.

Reciprocamente, se A é um anel de valorização do corpo F , podemos sempre associar uma valorização v_A de F tal que $\{x \in F \mid v_A(x) \geq 0\} = A$. Seja $\Gamma_A := F^\times/A^\times$, com operação $aA^\times + bA^\times := abA^\times$ e relação de ordem $aA^\times \geq bA^\times \Leftrightarrow bA^\times \subseteq aA^\times$. Então Γ_A é um grupo (denotado aditivamente) abeliano e totalmente ordenado. A aplicação $v_A : F \rightarrow \Gamma_A \cup \{\infty\}$, que manda 0 em ∞ e $x \neq 0$ em $xA^\times$, define uma valorização de F , cujo anel de valorização associado é A . Definindo que duas valorizações de F são equivalentes se possuem o mesmo anel de valorização associado, obtêm-se uma correspondência bijetiva entre valorizações equivalentes e anéis de valorização de F . Portanto, é equivalente trabalharmos com anéis de valorizações ou com valorizações em F .

Notação: (F, v_A) denota um **corpo valorizado**, i.e., um corpo F munido de uma valorização v_A tal que $A = \{x \in F \mid v_A(x) \geq 0\}$.

Exemplo 1 O corpo dos números p -ádicos

Seja p um número primo e $v_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definida por $v_p(a/b) = n$, onde n é o expoente tal que $a/b = (a_1/b_1)p^n$ e $p \nmid a_1b_1$. Está associado à v_p o *anel de valorização p -ádico* $\mathbb{Z}_{(p)} = \{ab^{-1} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\}$ e o corpo residual é $\mathbb{F}_p$, o corpo com p elementos. A valorização v_p é um *valor absoluto não arquimadiano* em $\mathbb{Q}$ e o completamento de $(\mathbb{Q}, v_p)$ é $(\mathbb{Q}_p, \tilde{v}_p)$. Aqui, $\mathbb{Q}_p$ é o corpo dos números p -ádicos e $\tilde{v}_p(\sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i) = n = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$. Ainda, $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$, onde $\mathbb{Z}_p$ é o *anel dos inteiros p -ádicos*.

Exemplo 2 O corpo das séries formais generalizadas de Laurent.

Seja k um corpo ($\text{car}(k) \neq 2$) e Γ um grupo abeliano totalmente ordenado. Definimos

$$k((X))^\Gamma := \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma X^\gamma \mid a_\gamma \in k, \gamma \in \Gamma \text{ e } \text{supp}\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma X^\gamma\right) \text{ bem ordenado} \right\}$$

onde $\text{supp}\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma X^\gamma\right)$ bem ordenado significa que todo subconjunto não vazio do *suporte* $:= \{\gamma \in \Gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$, que seja limitado inferiormente, possui um menor elemento. Com a operação de soma coordenada a coordenada e multiplicação definida através da relação $X^{\gamma_1} X^{\gamma_2} = X^{\gamma_1 + \gamma_2}$, verifica-se que $k((X))^\Gamma$ é um corpo, o qual denominaremos *corpo das séries formais generalizadas de Laurent*. A aplicação

$$v_A : k((X))^\Gamma \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}, \quad v_A(f) := \min(\text{supp}(f)), \text{ para } f \neq 0$$

e $v_A(0) := \infty$ é uma valorização, com $A = k[[X]]^\Gamma$, o anel das *séries formais generalizadas de potências*. O corpo residual é $k_A \cong k$, pois o ideal maximal $\mathcal{M}_A$ é gerado por X . O grupo de valores é $\Gamma_A = \Gamma$. Indicamos ([EP], exercício 3.5.6, p.83) para os detalhes que omitimos. No caso particular $\Gamma = \mathbb{Z}$, temos o *corpo das séries formais de Laurent*, denotado simplesmente por $k((X))$. Aqui, a valorização v_A estende a valorização X -ádica de $k(X)$. De fato, $k((X))$ é o completamento de $k(X)$ em relação à valorização X -ádica.

A seguir vamos enunciar o Teorema da Conjugação e a Desigualdade Fundamental, que serão muitas vezes utilizados neste trabalho.

Seja (F, v_A) um corpo valorizado e K/F uma extensão de corpos. O Teorema de Chevalley ([EP], Teorema 3.1.1, p.57 ou [E]) garante que K sempre admite (ao menos uma) extensão de A , ou seja, existe um anel de valorização B de K tal que $B \cap F = A$. Dizemos que $(K, w_B)/(F, v_A)$ é uma *extensão de corpos valorizados*, ou ainda, que (K, w_B) é uma *extensão* de (F, v_A) .

Teorema 1.14 (Teorema da Conjugação, cfe [EP], Teorema 3.2.15, p.69)

Seja (F, v_A) um corpo valorizado e K/F extensão de corpos, algébrica e normal. Se B_1 e B_2 são dois anéis de valorização de K que estendem A , então existe um automorfismo σ de K , que restrito a F é a aplicação identidade, tal que $B_2 = \sigma(B_1)$.

Desigualdade Fundamental

Seja (K, w_B) uma extensão de (F, v_A) . A composição

$$A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/\mathcal{M}_B = k_B$$

da inclusão $A \hookrightarrow B$ com a projeção canônica $B \twoheadrightarrow k_B$ induz uma aplicação injetiva $k_A \rightarrow k_B$, pois $\mathcal{M}_B \cap A = \mathcal{M}_A$. Portanto, podemos considerar k_A como um subcorpo de k_B . O grau $[k_B : k_A]$ é chamado o *grau residual* da extensão $(K, B)/(F, A)$ e é denotado por $f = f(B/A)$. Por outro lado, as valorizações v_A e w_B induzem isomorfismos $\Gamma_A \cong \dot{F}/A^\times$ e $\Gamma_B \cong \dot{K}/B^\times$, respectivamente. A composição

$$\dot{F} \hookrightarrow \dot{K} \twoheadrightarrow \dot{K}/B^\times \cong \Gamma_B$$

também induz uma aplicação injetiva $\Gamma_A \hookrightarrow \Gamma_B$. O índice $(\Gamma_A : \Gamma_B)$ é chamado o *índice de ramificação* da extensão $(K, B)/(F, A)$, e é denotado por $e = e(B/A)$. Vamos supor que $[K : F] = n < \infty$ e denotar por $B_1, \dots, B_r$ todas as possíveis extensões de A a K . Sejam $e_i = e(B_i/A)$ o índice de ramificação e $f_i = f(B_i/A)$ o grau residual da extensão $(K, B_i)/(F, A)$, para $i \in \{1, \dots, r\}$. Então $r \leq n$ e vale a

Desigualdade Fundamental:

$$\sum_{i=1}^r e_i f_i \leq n. \quad (1.2)$$

Se K/F for galoisiana (isto é, normal e separável), então $n = erfd$, onde $e = e(B_i/A)$, $f = f(B_i/A)$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Ainda, d é uma potência de p , se $p = \text{car}(k_A)$, e $d = 1$, se $\text{car}(k_A) = 0$ (veja [EP], Teorema 3.3.4, p.75 ou [E]).

Antes de seguir com valorizações, fixemos a notação da Teoria de Galois.

Teoria de Galois

O grupo de Galois da extensão algébrica de corpos K/F será denotado por $G(K/F)$. Seja N/F uma extensão galoisiana (i.e. algébrica, normal e separável) cujo grau não precisa ser finito. Se $N = F^s = \text{fecho separável de } F$, o grupo de Galois $G(F^s/F)$ é denominado o *grupo de Galois absoluto de } F*. Seja I o conjunto de todas as extensões galoisianas finitas de F contidas em N . O grupo de Galois $G(N/F)$ é munido de uma topologia (Topologia de Krull) cujo sistema fundamental de vizinhanças da identidade é o conjunto $\{G(N/K) \mid K \in I\}$. O espaço topológico $G(N/F)$ é compacto, Hausdorff e totalmente desconexo, o que significa que $G(N/F)$ é o limite projetivo de um sistema inverso de grupos finitos. A saber,

$$G(N/F) = \varprojlim G(K/F)$$

onde K percorre o conjunto I . A correspondência de Galois se dá entre os subgrupos fechados de $G(N/F)$ e os corpos intermediários de N/F .

Dizemos que K é uma *2-extensão* de F se K/F é galoisiana e $[K : F]$ é uma potência de 2. Neste caso, $G(K/F)$ é um 2-grupo (portanto solúvel). Segue da teoria de Galois, que toda 2-extensão é *construtível*, no sentido que existe uma torre de corpos $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_{n-1} \subseteq F_n = K$, em que cada nível tem grau 2, isto é, $F_{j+1} = F_j(\sqrt{a_j})$, para algum $a_j \in F_j$.

A *2-extensão maximal* de F (ou *fecho quadrático* de F) é definida como o compósito de todas as 2-extensões de F e é denotada por $F(2)$. Da definição, $F(2)/F$ é uma extensão galoisiana e $F(2)$ é um corpo *quadraticamente fechado*, ou seja, não possui extensões quadráticas próprias. Como sempre, $\text{car}(F) \neq 2$. Assim, F quadraticamente fechado se, somente se, $\dot{F}^2 = F$. Segue que esta propriedade vale para $F(2)$. Se $F \neq F(2)$, o grau $[F(2) : F]$ só é finito se $[F(2) : F] = 2$, o que implica que F é euclidiano ($\sqrt{-1} \notin F$ e $F(2) = F(\sqrt{-1})$), conforme ([B]).

O grupo de Galois $G(F(2)/F)$ da 2-extensão maximal de F será denotado por $G_2(F)$. Se $F \subset K \subset F(2)$, denotaremos por $G_2(K)$ o grupo de Galois $G(F(2)/K)$ (note que $K(2) = F(2)$). Neste caso, o conjunto I definido anteriormente é composto pelas extensões galoisianas finitas de F , cujo grau é uma potência de 2. Então, $G_2(F) = \varprojlim G_2(K)$, onde K percorre o novo I . Prosseguiremos agora com as valorizações.

Corpos valorizados 2-henselianos

Definição 1.15 Um corpo valorizado (F, v_A) é chamado de 2-henseliano se A tem extensão única à $F(2)$.

A propriedade de A ser 2-henseliano é equivalente à validade do Lema de Hensel para polinômios de grau 2, conforme o item (iii) do teorema a seguir. O item (iii) estabelece a *compatibilidade* de A com $\dot{F}^2$. Para a demonstração indicamos ([EP], Teorema 4.2.3, Corolário 4.2.4, p.95), ou ([E]).

Teorema 1.16 Seja (F, v_A) um corpo valorizado e suponha $\text{car}(k_A) \neq 2$. Para um polinômio $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in A[X]$, denotamos por $\bar{f}(X)$ o polinômio $\bar{a}_0 + \bar{a}_1X + \dots + \bar{a}_nX^n \in k_A[X]$. São equivalentes:

- (i) (F, v_A) é 2-henseliano.
- (ii) A tem única extensão à toda extensão quadrática $F(\sqrt{a})$ de F ($a \in F^\times \setminus \dot{F}^2$).
- (iii) $1 + \mathcal{M}_A \subset \dot{F}^2$.
- (iv) Dado um polinômio $f(X) \in A[X]$, mônico de grau 2, e $u \in A^\times$ tal que $\bar{f}(\bar{u}) = \bar{0}$ e $\bar{f}'(\bar{u}) \neq \bar{0}$, existe $a \in A^\times$, tal que $\bar{a} = \bar{u}$ e $f(a) = 0$.

Exemplo 1 O corpo dos números p -ádicos é 2-henseliano. De fato, $(\mathbb{Q}_p, v_p)$ é o completamento do corpo valorizado $(\mathbb{Q}, v_p)$.

Exemplo 2 Seja $F = k((X))^\Gamma$, conforme o Exemplo 2 antes do Teorema 1.14. O anel de valorização $A = k[[X]]^\Gamma$ é 2-henseliano e isto pode verificado diretamente, mostrando que $1 + \mathcal{M}_A \subset \dot{F}^2$. O caso geral $F = k((X))^\Gamma$ pode ser visto em ([EP], exercícios 3.5.5 e 3.5.9, p.82 e 83 e Observação 4.1.8, p.92).

Observação No teorema 1.16 estamos exigindo $\text{car}(k_A) \neq 2$ porque estamos particularmente interessados na condição (iii). Note que se (F, v_A) é um corpo valorizado 2-henseliano e o corpo $K \subset F(2)$ é uma extensão de F , então qualquer anel de valorização de K que estende A é também 2-henseliano. Isto segue de A ter única extensão à $F(2)$.

As definições e resultados que expomos na seqüência (até a Definição 1.17) podem ser obtidos para uma extensão normal N/F qualquer e fazem parte da

teoria geral de valorizações. A referência para o leitor interessado nos detalhes que omitiremos é o livro ([E]) de Endler ou o capítulo 5 de ([EP]). Nos interessa o caso $N = F(2)$, ou seja, a extensão normal $F(2)/F$. Seja (F, v_A) um corpo valorizado e C uma extensão de A à $F(2)$. O conjunto

$$G^h(C) := \{\sigma \in G_2(F) \mid \sigma(C) = C\}.$$

é um subgrupo de $G_2(F)$ e é denominado o *grupo de decomposição* de C sobre F . De ([EP], Lema 5.2.1, p.121) $G^h(C)$ é um subgrupo fechado de $G_2(F)$ (na Topologia de Krull). Seja $F_h = F_h(C)$ o corpo fixo de $G^h(C)$ em $F(2)$ e seja $A_h := C \cap F_h$. Da Teoria de Galois, $G(F(2)/F_h(C)) = G^h(C)$. Se C_1 é uma extensão de A_h à $F(2)$, então o Teorema da Conjugação (Teorema 1.14) afirma que existe $\sigma \in G(F(2)/F_h(C)) = G^h(C)$ tal que $C_1 = \sigma(C)$. Segue que A_h tem única extensão à $F(2)$. Portanto, (F_h, A_h) é uma extensão 2-henseliana de (F, A) . Denotamos por v_h uma valorização associada à A_h , Γ_h o grupo de valores e $k_h = A_h/\mathcal{M}_h$ o corpo residual. Destacamos ainda as seguintes propriedades:

- (a) (F_h, v_h) é uma extensão imediata de (F, v_A) , ou seja, $k_A = k_h$ e $\Gamma_A = \Gamma_h$ (conforme [EP], Teorema 5.2.5, p.122).
- (b) Se $F \subseteq K \subseteq F(2)$, então $F_h \subseteq K$ se, e somente se, $C \cap K$ é 2-henseliano (conforme [EP], Corolário 5.2.3, p.122).

Definição 1.17 *A extensão (F_h, A_h) é denominada uma **2-henselização** de (F, A) .*

Lema 1.18 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, com $\text{car}(k_A) \neq 2$. Seja (F_h, v_h) uma 2-henselização de (F, v_A) , $\mathcal{M}_h$ o ideal maximal de A_h e $\pi_h : F_h \rightarrow A_h/\mathcal{M}_h$ a projeção canônica. Então,*

- (a) $\dot{F}_h = \dot{F} \dot{F}_h^2$.
- (b) $\dot{F}_h^2 \cap F = (1 + \mathcal{M}_A) \dot{F}^2$.

Demonstração (a) Como (F_h, v_h) é uma extensão imediata de (F, v_A) , para cada $x \in \dot{F}_h$, existe $c \in F^\times$ tal que $v_A(x) = v_h(c)$. Isto implica que $xc^{-1} \in A_h^\times$. Como $k_h = k_A$, podemos encontrar $u \in A^\times$ tal que $\pi_h(xc^{-1}) = \pi_h(u)$ e concluir que $xc^{-1}u^{-1} \in 1 + \mathcal{M}_h \subset \dot{F}_h^2$, pois A_h é 2-henseliano (veja Teorema 1.16, item (iii)). Portanto, $x \in \dot{F} \dot{F}_h^2$.

(b) Tome $z \in \dot{F}_h^2 \cap F$. Seja $x \in F_h$ tal que $z = x^2$. Como na prova do item (a), existem $c, u \in F^\times$ tais que $x \in cu(1 + \mathcal{M}_h)$. Com isto, $x^2(cu)^2 \in (1 + \mathcal{M}_h) \cap F = 1 + \mathcal{M}_A$. Assim, $z \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. A outra inclusão segue de $1 + \mathcal{M}_A \subset 1 + \mathcal{M}_h \subset \dot{F}_h^2$. $\square$

Dado o corpo valorizado (F, v_A) e uma 2-henselização (F, v_h) , a aplicação natural $r : W(F) \rightarrow W(F_h)$ é sempre sobrejetiva. De fato, seja $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in W(F_h)$. Pelo item (a) do Lema 1.18, $a_i = b_i c_i^2$, para certos $b_i \in F^\times$ e $c_i \in \dot{F}_h$. Com isto, r aplica a forma quadrática sobre F dada por $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ em $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Em geral, para uma extensão de corpos K/F , o núcleo de $r : W(F) \rightarrow W(K)$ é denotado por $W(K/F)$ e é conhecido para alguns tipos de extensões:

- Se $[K : F]$ é um número ímpar, então $W(K/F) = \{0\}$ ([L₁], Th. 2.7, p.194).
- Se $K = F(\sqrt{a})$, então $W(K/F)$ é o ideal principal de $W(F)$ gerado pela forma $\langle 1, -a \rangle$ (conforme [L₁], Teorema 3.2, p.197).

Para o caso em que estamos interessados temos o seguinte resultado.

Teorema 1.19 (Knebusch) *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, $\text{car}(k_A) \neq 2$, e seja (F_h, v_h) sua 2-henselização. O núcleo da aplicação natural $W(F) \rightarrow W(F_h)$ é gerado pelas 2-formas de Pfister $\langle 1, -t \rangle$, com $t \in 1 + \mathcal{M}_A$.*

Demonstração Seja $G_A = \Gamma_A/2\Gamma_A$. Na Proposição 2.4 de ([Kn]), Knebusch define uma aplicação $\Delta : W(F) \rightarrow W(k_A)[G_A]$, que ele demonstra ser um epimorfismo de anéis e cujo núcleo é gerado por $\{\langle 1, -t \rangle \mid t \in 1 + \mathcal{M}_A\}$. Portanto, no caso 2-henseliano, tem-se um isomorfismo: já verificamos a sobrejetividade e pelo Teorema 1.16, tem-se $1 + \mathcal{M}_A \subset \dot{F}^2$, o que prova a injetividade. Em particular, $W(F_h)$ é isomorfo a $W(k_A)[G_A]$ (lembre que $k_h = k_A$ e $\Gamma_A = \Gamma_h$).¹ Temos assim o diagrama comutativo abaixo, que em particular mostra que $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(\Delta)$. $\square$

$$\begin{array}{ccc} & W(F_h) & \\ r \nearrow & & \searrow \sim \\ W(F) & \xrightarrow{\Delta} & W(k_A)[G_A] \end{array}$$

¹Quando $\Gamma_A = \mathbb{Z}$, a valorização $v_A : F \rightarrow \Gamma_A \cup \{\infty\}$ é chamada de uma *valorização discreta* (ou *valor absoluto não arquimediano*) de F . Diz-se que (F, v_A) é *completo* se com respeito a métrica $d(x, y) = e^{-v(x-y)}$, qualquer sequência de Cauchy for convergente. Sendo (F, v_A) completo, o famoso Teorema de Springer ([L₁], Teorema 1.4, p. 146, junto com o Corolário 1.7, p.147) afirma que $W(F)$ é isomorfo à $W(k_A)[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$. O teorema de Knebusch é uma generalização deste resultado.

O objetivo principal deste capítulo é a demonstração do próximo teorema, que é uma versão do Teorema de Knebusch para ${}_2\text{Br}(F)$ e descreve o grupo de Brauer relativo $\text{Br}(F_h/F)$. Faremos isto calculando o núcleo da restrição $\text{res}_{K/F} : I^2 F/I^3 F \rightarrow I^2 F_h/I^3 F_h$ (veja Observação 2 após o teorema 1.13) e aplicando o Teorema de Merkurjev. Iniciamos com o seguinte lema técnico.

Lema 1.20 *Sejam $a_1, \dots, a_n$ elementos quaisquer em $F^\times$, com $n \geq 2$. Então:*

$$\langle 1, -a_1 a_2 \dots a_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle 1, -a_i \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -a_j \rangle + q_n \text{ em } W(F), \text{ com } q_n \in I^3 F.$$

Demonstração Procederemos por indução sobre n . Para $n = 2$, temos:

$$\langle 1, -a_1 \rangle + \langle 1, -a_2 \rangle = \langle 1, -a_1, -a_2, a_1 a_2, -a_1 a_2, 1 \rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \langle 1, -a_2 \rangle + \langle 1, -a_1 a_2 \rangle.$$

Note que no caso $n = 3$ começam a aparecer os termos em $I^3 F$, conforme segue.

$$\begin{aligned} \langle 1, -a_1 a_2 a_3 \rangle &= \langle 1, -a_1 \rangle + \langle 1, -a_2 a_3 \rangle - \langle 1, -a_1 \rangle \langle 1, -a_2 a_3 \rangle \\ &= \langle 1, -a_1 \rangle + \langle 1, -a_2 \rangle + \langle 1, -a_3 \rangle - \langle 1, -a_2 \rangle \langle 1, -a_3 \rangle \\ &\quad - \langle 1, -a_1 \rangle \left(\langle 1, -a_2 \rangle + \langle 1, -a_3 \rangle - \langle 1, -a_2 \rangle \langle 1, -a_3 \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \langle 1, -a_i \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -a_j \rangle + \langle 1, -a_1 \rangle \langle 1, -a_2 \rangle \langle 1, -a_3 \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando o caso $n = 2$ e a hipótese indutiva para $n - 1$, segue que:

$$\begin{aligned} \langle 1, -a_1 a_2 \dots a_n \rangle &= \langle 1, -a_1 a_2 \dots a_{n-1} \rangle + \langle 1, -a_n \rangle - \langle 1, -a_n \rangle \langle 1, -a_1 a_2 \dots a_{n-1} \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle 1, -a_i \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -a_j \rangle + \langle 1, -a_n \rangle \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle 1, -a_i \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -a_j \rangle \right) + \\ &\quad + \langle 1, -a_n \rangle + q_{n-1} + \langle 1, -a_n \rangle q_{n-1}, \text{ com } q_{n-1} \in I^3 F. \\ &= \sum_{i=1}^n \langle 1, -a_i \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -a_j \rangle + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \langle 1, -a_n \rangle \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -a_j \rangle + q_{n-1} \langle 1, 1, -a_n \rangle \end{aligned}$$

que é o desejado com $q_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \langle 1, -a_n \rangle \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -a_j \rangle + q_{n-1} \langle 1, 1, -a_n \rangle$, concluindo a demonstração. $\square$

No teorema seguinte, lembre que o grupo de Brauer relativo $\text{Br}(F_h/F)$ é o núcleo de $\text{res}_{F_h/F} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F_h)$, $(F, a, b) \mapsto (F_h, a, b)$.

Teorema 1.21 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado e (F_h, v_h) uma 2-henselização.*

(I) *O núcleo da restrição $\text{res}_{F_h/F} : I^2 F / I^3 F \longrightarrow I^2 F_h / I^3 F_h$ é gerado pelo conjunto*

$$\left\{ \langle b \rangle \langle 1, -a \rangle \langle 1, -t \rangle + I^3 F \mid a, b \in F^\times, t \in 1 + \mathcal{M}_A \right\}.$$

(II) *O grupo de Brauer relativo $\text{Br}(F_h/F)$ é gerado pelo conjunto*

$$\left\{ (F, a, t) \mid a \in F^\times, t \in 1 + \mathcal{M}_A \right\}.$$

Demonstração (I) Para simplificar, denotaremos $\text{res}_{F_h/F}$ simplesmente por res_h . Do Teorema 1.19, o núcleo da aplicação natural r entre $W(F)$ e $W(F_h)$ é gerado por $\{\langle 1, -t \rangle : t \in 1 + \mathcal{M}_A\}$. Note que os elementos do núcleo de res_h são as classes com representantes em $\text{Ker}(r) \cap I^2 F$, ou seja, se $q_1 \in \text{Ker}(\text{res}_h)$, então $q_1 + I^3 F = q + I^3 F$, com $q = \sum_{i=1}^n \langle a_i \rangle \langle 1, -t_i \rangle$, para $a_i \in F^\times$ e $t_i \in 1 + \mathcal{M}_A$. Temos que o determinante ² $d(q)$ é $(-1)^n t_1 \dots t_n \dot{F}^2$. Por outro lado, do Corolário 2.2, p.32, de ([L₁]), o fato de q pertencer a $I^2 F$, junto com $\dim(q) = 2n$, implica em $d(q) = (-1)^{n(2n+1)} \dot{F}^2$. Segue que $t_1 t_2 \dots t_n \in \dot{F}^2$. Trocando t_n por $t_1 \dots t_{n-1}$ e aplicando o Lema 1.20, temos que

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle a_i \rangle \langle 1, -t_i \rangle + \langle 1, -t_1 t_2 \dots t_{n-1} \rangle \langle a_n \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle a_i \rangle \langle 1, -t_i \rangle + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \langle 1, -t_i \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \langle 1, -t_i \rangle \langle 1, -t_j \rangle + q_{n-1} \right) \langle a_n \rangle, \text{ com } q_{n-1} \in I^3 F \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle a_i, a_n \rangle \langle 1, -t_i \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \langle 1, -t_i \rangle \langle 1, -t_j \rangle \langle a_n \rangle + \langle a_n \rangle q_{n-1}, \text{ com } q_{n-1} \in I^3 F. \end{aligned}$$

Como cada parcela da soma acima está em $I^2 F$, temos

$$q + I^3 F = \sum_{i=1}^{n-1} \langle a_i, a_n \rangle \langle 1, -t_i \rangle - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \langle 1, -t_i \rangle \langle 1, -t_j \rangle \langle a_n \rangle + I^3 F.$$

Note que $\langle a_i, a_n \rangle = \langle 1, a_i \rangle \langle 1, a_n \rangle - \langle 1, a_i a_n \rangle$ em $W(F)$. Desta forma,

$$\langle a_i, a_n \rangle \langle 1, -t_i \rangle \equiv -\langle 1, a_i a_n \rangle \langle 1, -t_i \rangle \pmod{I^3 F}.$$

Substituindo na expressão de $q + I^3 F$ acima, temos o resultado.

²Se $f = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, lembre que o determinante de f é $d(f) = (a_1 \dots a_n) \dot{F}^2$, conforme (1.1).

(II) O Teorema de Merkurjev (Teorema 1.12) afirma que a extensão por linearidade de $\gamma : I^2F/I^3F \rightarrow {}_2\text{Br}(F)$, $\langle 1, -a, -b, ab \rangle + I^3F \mapsto (F, a, b)$, é um isomorfismo. De ([L₁], Lema 3.2, p.114), γ aplica

$$\langle a, b, c, abc \rangle + I^3F \text{ em } (F, -ab, -ac). \quad (1.3)$$

Analogamente, o mesmo vale para $\gamma_h : I^2F_h/I^3F_h \rightarrow {}_2\text{Br}(F_h)$. Considerando a restrição $\text{res}_h : I^2F/I^3F \rightarrow I^2F_h/I^3F_h$, temos um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} I^2F/I^3F & \xrightarrow{\text{res}_h} & I^2F_h/I^3F_h \\ \gamma \downarrow \wr & & \gamma_h \downarrow \wr \\ {}_2\text{Br}(F) & \xrightarrow{\text{res}_h} & {}_2\text{Br}(F_h) \end{array}$$

Do item (I), $\text{Ker}(\text{res}_h)$ é gerado por $\{\langle b \rangle \times \langle 1, -a \rangle \times \langle 1, -t \rangle + I^3F : a, b \in F^\times, t \in 1 + \mathcal{M}_A\}$. Aplicando (1.3), obtemos:

$$\gamma(\langle b \rangle \times \langle 1, -a \rangle \times \langle 1, -t \rangle + I^3F) = (F, a, t), \text{ para todo } a \in F^\times, t \in 1 + \mathcal{M}_A. \quad (1.4)$$

Para $x = \sum_{i=1}^n (F, a_i, b_i) \in \text{Ker}(\text{res}_h)$ seja $y := \sum_{i=1}^n \langle 1, -a_i, -b_i, a_i b_i \rangle \in I^2F$. Assim, $0 = \text{res}_h(x) = \text{res}_h(\gamma(y + I^3F)) = \gamma_h(\text{res}_h(y))$. Segue que $y + I^3F_h \in \text{Ker}(\gamma_h)$. Como γ_h é injetiva, temos $y \in I^3F_h$. Logo, $y + I^3F \in \text{Ker}(\text{res}_h)$. De (1.4), temos que $x = \gamma(y)$ pertence ao subgrupo gerado por $\{(F, a, t) \mid a \in F^\times, t \in 1 + \mathcal{M}_A\}$. $\square$

O corolário seguinte pode ser aplicado a um corpo F qualquer e descreve adequadamente o somando direto que permite expressar ${}_2\text{Br}(F)$ em função da parte de 2-torção do grupo de Brauer de um corpo valorizado 2-henseliano.

Corolário 1.22 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado e (F, v_h) uma 2-henselização.*

$${}_2\text{Br}(F) \cong \left\langle \{(F, a, t) : a \in F^\times, t \in 1 + \mathcal{M}_A\} \right\rangle \oplus {}_2\text{Br}(F_h)$$

Demonstração Inicialmente verificaremos que a restrição $\text{res}_h : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F_h)$ é sobrejetora. Lembramos que as álgebras de quatérnios sobre F_h são os geradores de ${}_2\text{Br}(F_h)$ (cfe Teorema 1.12). Seja $(F_h, a, b) \in {}_2\text{Br}(F_h)$. Do Lema 1.18, existem $a_1, b_1 \in F^\times$ e $c, d \in F_h$, tais que $a = a_1 c^2$ e $b = b_1 d^2$. Assim, $\text{res}(F, a_1, b_1) = (F_h, a, b)$. Temos assim uma seqüência exata $1 \rightarrow \text{Br}(F_h/F) \hookrightarrow {}_2\text{Br}(F) \xrightarrow{\text{res}_h} {}_2\text{Br}(F_h) \rightarrow 1$. Como ${}_2\text{Br}(F_h)$ é um $\mathbb{F}_2$ -espaço vetorial, a seqüência cinde. $\square$

Seja (F, v_A) um corpo valorizado e $R(F)$ o Radical de Kaplansky de F . No Lema 2.2 do próximo capítulo veremos que $a \in R(F) \Leftrightarrow (F, a, x) = 0$, para todo $x \in F^\times$. Assim, se $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$, segue imediatamente do corolário 1.22 que ${}_2\text{Br}(F) \cong {}_2\text{Br}(F_h)$. Desta forma, um corpo valorizado 2-henseliano não se distingue de um corpo com um anel de valorização R -compatível ($1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$) quando nos referimos à parte de 2-torção do grupo de Brauer. A grosso modo, podemos dizer que corpos R -compatíveis e corpos 2-henselianos possuem “as mesmas” álgebras de divisão de índice 2 no grupo de Brauer, embora possam diferir pela não trivialidade do radical (!), como veremos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 2

Valorizações e o Radical

Neste capítulo iniciamos o estudo de corpos que admitem um anel de valorização compatível com o Radical de Kaplansky. Começamos com as principais propriedades do radical. A seguir, faremos duas seções de exemplos de corpos para os quais o radical é conhecido, com atenção especial aos casos $R(F) = \dot{F}^2$ (corpos fracamente hilbertianos) e $R(F) = \dot{F}$ (“caso livre”). Veremos que ocorre $R(F) = \dot{F}^2$ num corpo que possui um anel de valorização 2-henseliano, o que permitirá concluir que radical e elementos rígidos “não convivem” num corpo. Quando $R(F) = \dot{F}$, veremos que F tem propriedades aritméticas muito simples. Na terceira seção, continuamos nosso estudo descrevendo as relações entre o radical e as valorizações do corpo. Concluimos este capítulo com a descrição do conjunto de todos os anéis de valorização R -compatíveis no corpo F . A grosso modo, esta descrição permite concluir que basta considerar **um** anel de valorização R -compatível de F .

O Radical de Kaplansky de um corpo F foi primeiramente definido em ([K]) como o radical do *símbolo de Hilbert*: $F^\times \times F^\times \rightarrow \{\pm 1\}$, que associa $(a, b) \mapsto 1$ se, e somente se, a álgebra de quatérnios (F, a, b) é isomorfa a $M_2(F)$, a álgebra de matrizes 2×2 sobre F . Assim,

$$a \in R(F) \Leftrightarrow (F, a, b) \cong M_2(F), \text{ para todo } b \in F^\times.$$

Com isto, já se pode ver que $\dot{F}^2 \subseteq R(F)$. Dizemos que o símbolo é *perfeito* se os quadrados forem mesmo os únicos elementos em $R(F)$, isto é, F é fracamente

hilbertiano. No outro extremo, dizemos que o símbolo de Hilbert é *degenerado* se $R(F) = \dot{F}$.

Considerados os $\mathbb{F}_2$ -espaços vetoriais $\dot{F}/\dot{F}^2$ e ${}_2\text{Br}(F)$, o radical do corpo F também pode ser visto como o radical da aplicação bilinear $\dot{F}/\dot{F}^2 \times \dot{F}/\dot{F}^2 \longrightarrow {}_2\text{Br}(F)$, dada por $(a\dot{F}^2, b\dot{F}^2) \mapsto (F, a, b)$.

A definição abaixo tem a vantagem de facilitar a verificação das propriedades do radical, conforme veremos na seqüência.

Definição 2.1 *Seja F um corpo. Definimos o Radical de Kaplansky de F por:*

$$R(F) := \bigcap_{x \in F^\times} D_F \langle 1, x \rangle.$$

Lema 2.2 *Seja F um corpo e $R(F)$ seu Radical de Kaplansky.*

- (a) $R(F)$ é um subgrupo de $\dot{F}$.
- (b) $\dot{F}^2 \subseteq R(F) \subseteq \dot{F}$.
- (c) As afirmações seguintes são equivalentes:

- (i) $a \in R(F)$.
- (ii) A 1-forma de Pfister $\langle 1, -a \rangle$ é universal, ou seja, $D_F \langle 1, -a \rangle = F^\times$.
- (iii) $(F, a, b) = 0$, para todo $b \in F^\times$.
- (iv) A 2-forma de Pfister $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$ é hiperbólica, para todo $b \in F^\times$.

Demonstração O item (a) é trivial, pois $D_F \langle 1, x \rangle$ é um subgrupo de $\dot{F}$, conforme o item (b) do Lema 1.7. O item (b) segue da definição. Pelo item (c) do Lema 1.7,

$$a \in D_F \langle 1, -b \rangle, \text{ para todo } b \in F^\times \Leftrightarrow b \in D_F \langle 1, -a \rangle, \text{ para todo } a \in F^\times.$$

Com isto temos provado a equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Lembrando que $(F, a, b) = 0 \Leftrightarrow b \in D_F \langle 1, -a \rangle$ (Lema 1.8), a equivalência (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) também segue adicionando-se o “para todo.”

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Da observação seguinte ao Lema 1.11, temos $(F, a, b) = 0 \Leftrightarrow (F, a, b) \cong (F, 1, -1)$. Do Lema 1.11, isto é equivalente à $\langle 1, -a, -b, ab \rangle \cong \langle 1, -1, 1, -1 \rangle$. $\square$

Observação Do Teorema 1.13, temos que o núcleo da restrição $\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F(\sqrt{a}))$ é dado por $\text{Br}(F(\sqrt{a})/F) = \{(F, a, b) \mid b \in F^\times\}$. Portanto, se $a \in R(F)$, segue do item (iii) do Lema 2.2, que $\text{res}_{K/F} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(K)$, $(F, a, b) \rightarrow (K, a, b)$ é um monomorfismo.

2.1 Corpos Hilbertianos e Quase-Pitagóricos

Nesta seção faremos uma pequena classificação de corpos segundo o Radical de Kaplansky. Estudaremos algumas propriedades elementares de cada classe. A nomenclatura resumida na definição abaixo está de acordo com os nomes habitualmente utilizados na literatura, exceto os itens (a) e (e), que são introduzidos neste trabalho.

Definição 2.3 *Seja F um corpo.*

- (1) *Dizemos que o radical de F é **trivial** se $R(F) = \dot{F}^2$ ou $R(F) = \dot{F}$.*
- (2) *Por definição, o corpo F é:*
 - (a) **fracamente hilbertiano**, se $R(F) = \dot{F}^2$.
 - (b) **pré-hilbertiano**, se ${}_2\text{Br}(F)$ é o grupo com dois elementos (i.e. sobre F só existe uma única álgebra de quatérnios não trivial).
 - (c) **hilbertiano**, se F é pré-hilbertiano e fracamente hilbertiano.
 - (d) **quase-pitagórico**, se $R(F) = D_F\langle 1, 1 \rangle$.
 - (e) **“caso livre”**, se $R(F) = \dot{F}$.

A seguir faremos um lema técnico, que será utilizado em exemplos deste capítulo. O lema fornece duas formas alternativas de verificar que um corpo é quase-pitagórico.

Lema 2.4 *Seja F um corpo e $R := R(F)$ seu Radical de Kaplansky.*

- (a) $R + R \subset D_F\langle 1, 1 \rangle \cup \{0\}$.
- (b) *As seguintes afirmações são equivalentes:*
 - (i) F é quase-pitagórico.
 - (ii) $R = \sum \dot{F}^2$.
 - (iii) $R + R \subset R$.

Demonstração A afirmação inicial é trivial se $-1 \in R$. De fato, neste caso o item (ii) do Lema 2.2 diz que $D\langle 1, 1 \rangle = \dot{F}$. Suponha $-1 \notin R$. Sejam $x, y \in R$ e denotemos $x + y = yz$, onde $z = 1 + xy^{-1}$. Temos $-xy^{-1} = 1 - z \in D\langle 1, -z \rangle$.

Também, $xy^{-1} \in R \subset D\langle 1, -z \rangle$. Como $D\langle 1, -z \rangle$ é subgrupo de $\dot{F}$, segue que $-1 = -xy^{-1}(xy^{-1})^{-1} \in D\langle 1, -z \rangle$. Isto implica que $z \in D\langle 1, 1 \rangle$. Portanto, $x + y \in D\langle 1, 1 \rangle$.
 (i) $\Rightarrow$ (ii) Note que basta provar $\sum \dot{F}^2 \subset R$. Sejam $x_1, \dots, x_n \in F^\times$, com $n \geq 2$. Procedendo por indução sobre n , vamos assumir que $y := x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \in R$. Então $y + x_n^2 \in R + R \subset D\langle 1, 1 \rangle \cup \{0\} = R \cup \{0\}$, pela afirmação inicial do lema e por (b).
 (ii) $\Rightarrow$ (iii) É trivial.
 (iii) $\Rightarrow$ (i) Suponha $R + R \subset R$. Então $x^2 + y^2 \in R$, para todos $x, y \in F^\times$. Logo, $D\langle 1, 1 \rangle \subset R$. A inclusão contrária é trivial. $\square$

O primeiro caso de trivialidade do radical é um corpo que denominamos anteriormente de *fracamente hilbertiano*. Dentre os inúmeros exemplos, destacaremos duas classes (não disjuntas) de corpos fracamente hilbertianos:

(1) *Corpos pitagóricos*. Lembre que F é pitagórico se toda soma (finita) de quadrados é novamente um quadrado (ou seja, $\sum \dot{F}^2 \subset \dot{F}^2$). Sendo F pitagórico, temos que F é fracamente hilbertiano, pois $R(F) \subseteq D_F\langle 1, 1 \rangle \subseteq \sum F^2 \subseteq \dot{F}^2$.

(2) *Corpos com um elemento birígido e com -1 não sendo um quadrado*. Isto é, um corpo F , para o qual $-1 \notin \dot{F}^2$ e existe um elemento $a \in F^\times \setminus \pm \dot{F}^2$ tal que

$$D_F\langle 1, a \rangle = \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2 \quad \text{e} \quad D_F\langle 1, -a \rangle = \dot{F}^2 \cup -a\dot{F}^2.$$

Da Definição 2.1, $R(F) \subseteq D_F\langle 1, a \rangle \cap D_F\langle 1, -a \rangle$. Note que esta interseção é necessariamente igual a $\dot{F}^2$. Portanto, F é fracamente hilbertiano. Um caso particular desta classe é uma extensão finita do corpo dos números p -ádicos $\mathbb{Q}_p$. Em geral, veremos que se (F, v_A) é um corpo valorizado 2-henseliano para o qual o grupo de valores Γ_A não é 2-divisível, isto é, $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$, então F admite pelo menos um elemento birígido. Portanto, se ocorrer que $-1 \notin \dot{F}^2$, então F é fracamente hilbertiano. Caso $-1 \in \dot{F}^2$, a situação não é tão simples e vamos postergá-la para o final da segunda seção.

Definição 2.5 *Seja F um corpo. Uma ordem de F é um subconjunto $P \subset F$, tal que $-1 \notin P$, $PP \subset P$, $P + P \subset P$ e $F = P \cup -P$.*

Definindo $x \leq_P y \Leftrightarrow y - x \in P$ temos uma relação de ordem (total) em F para a qual $P = \{x \in F : 0 \leq_P x\}$. Note que $\sum \dot{F}^2 \subseteq P$, para toda ordem P de F . O corpo F é chamado de *formalmente real* se $-1 \notin \sum \dot{F}^2$. Se F admite uma

ordem P , então F é formalmente real, pois $-1 \notin P$. O Teorema de Artin-Schreier ([L₁], Teorema 1.12, p.236) estabelece a validade da recíproca.

Escolhendo um corpo pitagórico formalmente real F , com $n + 2$ ordens e $(F^\times : \dot{F}^2) = 2^{n+1}$, Berman ([Be], Teorema 2.3) mostrou que $F(\sqrt{-1})$ é um corpo pré-hilbertiano, que não é hilbertiano, e tem 2^n classes de quadrados. Para o caso formalmente real temos:

Teorema 2.6 *São equivalentes:*

- (i) F é um corpo pré-hilbertiano formalmente real.
- (ii) $(\dot{F} : R(F)) = 2$.
- (iii) F é formalmente real e $R(F) = \sum \dot{F}^2$ é a única ordem de F .

Demonstração (i) $\Rightarrow$ (ii) Como F é formalmente real, $-1 \notin D\langle 1, 1 \rangle$ e portanto, $(F, -1, -1)$ é a única álgebra de quatérnios não trivial. Vamos verificar que $D\langle 1, 1 \rangle \subset R(F)$. Suponha por contradição, que $x \in D\langle 1, 1 \rangle \setminus R(F)$. Então existe $y \in F^\times$ tal que $(F, x, y) \cong (F, -1, -1)$. Do Lema 1.11, temos $\langle 1, -x, -y, xy \rangle \cong \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$. Segue que $-x \in \sum \dot{F}^2$. Como $\sum \dot{F}^2$ é subgrupo de $\dot{F}$, temos $-1 = -xx^{-1} \in \sum \dot{F}^2$, contradizendo o fato de F ser formalmente real. Portanto, $D\langle 1, 1 \rangle \subset R(F)$. Lembre que $R(F)$ está sempre contido em $D\langle 1, 1 \rangle$ e assim, $R(F) = D\langle 1, 1 \rangle$. Agora podemos verificar que $(\dot{F} : R(F)) = 2$. Se $a \notin R(F) = D\langle 1, 1 \rangle$, então $(F, a, a) \cong (F, -1, -1)$. Segue que $\langle -a, -a \rangle \cong \langle 1, 1 \rangle$. Logo, $-a \in D\langle 1, 1 \rangle$, o que conclui a demonstração.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Verificaremos que $R(F) = D\langle 1, 1 \rangle$. Pela Definição 2.1, temos $R(F) \subset D\langle 1, 1 \rangle$. A condição $(\dot{F} : R(F)) = 2$ implica $D\langle 1, 1 \rangle = R(F)$ ou $D\langle 1, 1 \rangle = \dot{F}$. Supondo que ocorre a última igualdade, chegaremos numa contradição. Pelo item (ii) do Lema 2.2, temos $-1 \in R(F)$. Seja $a \in \dot{F} \setminus R(F)$. Novamente, $R(F) \subset D\langle 1, a \rangle$ implica $D\langle 1, a \rangle = R(F)$ ou $D\langle 1, a \rangle = \dot{F}$. Contudo, nenhum destes casos pode ocorrer. De fato, se $D\langle 1, a \rangle = R(F)$, então $a \in R(F)$, contradizendo a escolha de a . Por outro lado, se $D\langle 1, a \rangle = \dot{F}$, então $-a \in R(F)$ e como $-1 \in R(F)$ e $R(F)$ é grupo, temos novamente que $a \in R(F)$. Temos portanto $R(F) = D\langle 1, 1 \rangle$. Segue do Lema 2.4 que $R(F) = \sum \dot{F}^2$. Verificamos acima que $-1 \notin R(F)$. Segue que F é formalmente real. Observe que a única álgebra de quatérnios não trivial é $(F, -1, -1)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Segue dos argumentos utilizados em (2) $\Rightarrow$ (1).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) É trivial. □

Definição 2.7 *Um corpo F satisfazendo umas das condições equivalentes do item (b) do Lema 2.4 é denominado um corpo **quase-pitagórico**.*

O nome vem do fato evidente que F é pitagórico se, e somente se, é quase-pitagórico e fracamente hilbertiano.

Além dos corpos pré-hilbertianos formalmente reais, exemplos de quase-pitagóricos são os corpos SAP, como veremos nas seções 2 e 3 do capítulo 4.

O resultado básico sobre corpos quase-pitagóricos é o teorema seguinte. Assumiremos que uma forma quadrática de torção é um elemento de torção de $W(F)$, o anel de Witt do corpo F . Por ([L₁], Teorema 4.2, p. 388), a forma quadrática $q = \sum \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -b_i \rangle$ é de torção se, e somente se, $b_i \in \sum \dot{F}^2$.

Teorema 2.8 *Dado o corpo F , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $R(F) = D_F \langle 1, 1 \rangle (= \sum \dot{F}^2, \text{ pelo Lema 2.4}).$
- (ii) $I^2 F$ é livre de torção.
- (iii) Toda 2-forma de Pfister de torção é universal.

Demonstração (i) $\Rightarrow$ (ii) Lembre que $I^2 F$ é gerado pelas 2-formas de Pfister. Seja $q = \sum \langle 1, -a_i \rangle \langle 1, -b_i \rangle \in I^2 F$ de torção. Pelo teorema citado acima, temos $b_i \in \sum \dot{F}^2$. Por hipótese, $b_i \in R(F)$. Portanto, $q = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) É claro.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $x \in D_F \langle 1, 1 \rangle$ e $a \in F^\times$. Do teorema citado acima, $f = \langle 1, -a \rangle \langle 1, -x \rangle$ é de torção. Segue da hipótese (iii) que f é universal. Como isto vale para todo $a \in F^\times$, temos que $x \in R(F)$. □

Note que se F é quase-pitagórico não formalmente real, então $R(F) = \dot{F}$, que é o exemplo da próxima seção.

2.2 O Caso Livre

O segundo caso de trivialidade do radical é $R(F) = \dot{F}$, ou “caso livre”, como ficará evidente. Esta situação só pode ocorrer em corpos não formalmente reais, pois $-1 \in R(F) \subset D_F\langle 1, 1 \rangle$. Como exemplos, temos os corpos finitos e os corpos de funções racionais sobre um corpo algebricamente fechado conforme ([L₁], Proposição 3.8, p.38) e ([L₁], Proposição 3.4, p.36).

Se $R(F) = \dot{F}$, então muitas das propriedades aritméticas do corpo F são mais simples que na maioria dos casos. Isto ocorre especialmente no contexto de formas quadráticas. Veremos na seção 3 do capítulo 4 que o u -invariante (veja comentários anteriores ao Lema 4.13) de um corpo no caso livre é menor ou igual a 2. Se $R(F) = \dot{F}$, as formas quadráticas sobre F são classificadas pela dimensão e pelo determinante. Em outras palavras, duas formas quadráticas sobre F são isométricas se, e somente se, elas tem a mesma dimensão e o mesmo determinante. De fato, seja $f = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ uma forma quadrática sobre F . Como $\langle 1, a_1 a_2 \rangle$ é universal, ela é equivalente à $\langle a_1, a_2 \rangle$, conforme o exemplo seguinte à Proposição 1.3. Indutivamente, f equivale à $\langle 1, \dots, 1, d(f) \rangle$.

O nome da classe de corpos estudados nesta seção deve-se ao fato de que a hipótese $R(F) = \dot{F}$ implica que $G_2(F)$ é um pro-2-grupo livre.

O pro-2-grupo livre $\mathcal{G}$ gerado por um conjunto J é obtido introduzindo uma topologia no grupo livre abstrato G_1 gerado por J . Uma base de vizinhanças de 1 para esta topologia é tomada como o conjunto de todos os subgrupos normais $\mathcal{N}$ de G_1 tais que

- (1) $G_1/\mathcal{N}$ é um pro-2-grupo.
- (2) $\mathcal{N}$ contém quase todos (todos exceto um número finito) os elementos de J .

Com isto, $\mathcal{G}$ é definido como o limite projetivo $\varprojlim G_1/\mathcal{N}$, com $\mathcal{N}$ percorrendo o conjunto de todos os subgrupos normais de G_1 satisfazendo (1) e (2).

Seja N/F uma extensão galoisiana de corpos. Vamos denotar por μ o grupo das raízes da unidade contidas em N . Seguindo a notação de ([Ri], Definição 1.1, p.91), ou ([KMMT], p.384), μ é um caso particular de um G -módulo discreto,

onde o grupo $G = G(N/F)$ age continuamente em μ através da aplicação $(\sigma, \xi) \mapsto \sigma(\xi)$, $\sigma \in G$, $\xi \in \mu$.

Um *1-cociclo* é uma aplicação contínua $\varphi : G \rightarrow \mu$, tal que:

$$\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\sigma(\varphi(\tau)), \text{ para todos } \sigma, \tau \in G.$$

Denotamos por $Z^1(G) = Z^1(G, \mu)$ o conjunto dos 1-cociclos. Dado $\sigma \in G$, a multiplicação dos 1-cociclos $\psi, \varphi \in Z^1(G)$ é definida por $\varphi\psi(\sigma) = \varphi(\sigma)\psi(\sigma)$. Esta operação faz de $Z^1(G)$ um grupo abeliano. Dizemos que dois 1-cociclos $\varphi, \psi \in Z^1(G, \mu)$ são *cohomólogos* (ou *equivalentes*) se existe $a \in \mu$ tal que $\psi(\sigma) = a\varphi(\sigma)\sigma(a)^{-1}$. Seja $H^1(G) = H^1(G, \mu)$ o conjunto das classes de equivalência de 1-cociclos. A operação acima induz uma estrutura de grupo abeliano em $H^1(G)$, que é denominado o *primeiro grupo de cohomologia de G com valores em μ* .

Um *2-cociclo* é uma aplicação contínua $\varphi : G \times G \rightarrow \mu$, que satisfaz:

$$\sigma(\varphi(\sigma\tau))\varphi(\sigma, \tau\rho) = \varphi(\sigma\tau, \rho)\varphi(\sigma, \tau), \text{ para todos } \sigma, \tau, \rho \in G.$$

Denotamos por $Z^2(G) = Z^2(G, \mu)$ o conjunto dos 2-cociclos. Dizemos que $\varphi, \psi \in Z^2(G)$ são *cohomólogos* (ou *equivalentes*) se existe uma aplicação contínua $\delta : G \rightarrow \mu$,

$$\text{tal que } \psi(\sigma, \tau) = \sigma(\delta(\tau))\delta(\sigma\tau)^{-1}\varphi(\sigma, \tau), \text{ para todos } \sigma, \tau \in G.$$

As classes de equivalência de 2-cociclos formam um grupo abeliano denotado por $H^2(G) = H^2(G, \mu)$, e que é denominado o *segundo grupo de cohomologia de G com valores em μ* .

Proposição 2.9 *Seja F um corpo. São equivalentes:*

- (i) $R(F) = \dot{F}$.
- (ii) $I^2F = \{0\}$, ou seja, toda 2-forma de Pfister é hiperbólica.
- (iii) ${}_2\text{Br}(F) = \{0\}$ (i.e., toda F -álgebra central simples de índice 2 é uma álgebra de matrizes sobre F).
- (iv) O pro-2-grupo de Galois $G_2(F)$ é livre.

Demonstração Na seção sobre formas quadráticas vimos que I^2F é o ideal de $W(F)$ gerado pelas 2-formas de Pfister $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$, $a, b \in F^\times$. Com isto, a equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii) é imediata do Lema 2.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Lembre que o Teorema de Merkurjev (Teorema 1.12) afirma que I^2F/I^3F é isomorfo à ${}_2\text{Br}(F)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Seja $H^2(G, \mu)$ o segundo grupo de cohomologia de $G = G_2(F)$ com valores em $\mu \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pelo Teorema 6.3.4, p.300 de ([N]), $H^2(G, \mu)$ e ${}_2\text{Br}(F)$ são canonicamente isomorfos (veja a observação seguinte à esta demonstração). Assim, segue da hipótese (iii) que $H^2(G, \mu) = \{0\}$. Por ([Ri], Teorema 6.5, p.235), $H^2(G, \mu) = \{0\}$ se, e somente se, $G_2(F)$ é livre.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Suponha $G_2(F)$ livre. Dos argumentos acima, $\{0\} = H^2(G, \mu) \cong {}_2\text{Br}(F)$. Portanto, $(F, a, b) = 0$, para quaisquer $a, b \in F^\times$. Aplicando o Lema 2.2, temos $R(F) = \dot{F}$. □

Observação No teorema que citamos, o isomorfismo entre $H^2(G, \mu)$ e ${}_2\text{Br}(F)$ não é obtido diretamente. Para descrevê-lo, é necessário considerar o *produto cup*: $\cup : H^1(G) \times H^1(G) \rightarrow H^2(G)$, $(a, b) \mapsto (a) \cup (b)$ (veja [Ri], Definição 6.1, p.179). O isomorfismo desejado é dado pela extensão por linearidade da aplicação ${}_2\text{Br}(F) \rightarrow H^2(G)$, dada por $(F, a, b) \mapsto (a) \cup (b)$. Definindo $I^2F/I^3F \rightarrow H^2(G)$, $\langle 1, -a, -b, ab \rangle + I^3F \mapsto (a) \cup (b)$, fecha-se o triângulo comutativo

$$\begin{array}{ccc} & H^2(G) & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ I^2F/I^3F & \xrightarrow{\gamma} & {}_2\text{Br}(F) \end{array}$$

onde a aplicação γ é o “isomorfismo de Merkurjev”, visto no capítulo 1.

Elementos Rígidos $\times$ Radical

Vamos retomar brevemente a discussão sobre elementos (bi)rígidos e radical, iniciada após o Lema 2.4. Vimos que se F é um corpo com $-1 \notin \dot{F}^2$ e admitindo um elemento $a \in F^\times \setminus \pm \dot{F}^2$ que é birígido, isto é, $D_F\langle 1, a \rangle = \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$ e $D_F\langle 1, -a \rangle = \dot{F}^2 \cup -a\dot{F}^2$, então F é fracamente hilbertiano ($R(F) = \dot{F}^2$).

Definição 2.10 *Seja F um corpo. Se $a \in F^\times \setminus \pm \dot{F}^2$ e $D_F\langle 1, a \rangle = \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$, então dizemos que a é **rígido**.*

Da Definição 2.10 e comentários precedentes, a é birígido se, e somente se, a e $-a$ são rígidoss.

Proposição 2.11 *Se o corpo F possui um elemento $a \in F^\times \setminus \pm \dot{F}^2$ que é rígido, então ocorre uma, e somente uma, das seguintes alternativas:*

- (1) F é fracamente hilbertiano, isto é, $R(F) = \dot{F}^2$.
- (2) F é quase-pitagórico formalmente real, com $R(F) = \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$.
- (3) $-1 \in \dot{F}^2$ e neste caso, $\dot{F} = \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$ e $R(F) = \dot{F}$ (caso livre).

Demonstração Seja $a \in F^\times$ um elemento rígido. Temos que $R(F) \subseteq D_F\langle 1, a \rangle = \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$. Se $a \notin R(F)$, então ocorre a possibilidade (1). Vamos assumir que $a \in R(F)$. Caso $R(F) = \dot{F}$, então $-1 \in \dot{F}^2$ e ocorre (3). Podemos então supor que $R(F) = D_F\langle 1, a \rangle = \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$ e $R(F) \neq \dot{F}$. Pelo item (d) do Lema 1.7, temos $D_F\langle 1, 1 \rangle \cap D_F\langle 1, a \rangle = D_F\langle 1, 1 \rangle \cap D_F\langle 1, -a \rangle$. Mas $D_F\langle 1, -a \rangle = \dot{F}$, pois $a \in R(F)$. Assim, $D_F\langle 1, 1 \rangle \subset D_F\langle 1, a \rangle = R(F)$. Portanto $R(F) = D_F\langle 1, 1 \rangle$, mostrando (2). $\square$

Como conclusão, elementos rígidoss praticamente excluem a existência de radical não trivial. Apenas um elemento birígido já faz com que o radical seja o grupo dos quadrados, caso -1 não seja um quadrado.

No exemplo seguinte ao Lema 2.4, citamos que se (F, v_A) é corpo valorizado 2-henseliano e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$, então F admite um elemento birígido e caso $-1 \notin \dot{F}^2$, então F é fracamente hilbertiano.

Observação Se $-1 \in \dot{F}^2$ e $a \in F^\times$ é birígido, temos simplesmente que $D_F\langle 1, a \rangle = D_F\langle 1, -a \rangle = \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$. Aqui, a definição de rigidêss e birigidêss coincidem. Neste caso, pode-se produzir um exemplo de um corpo valorizado (F, v_A) 2-henseliano que não é fracamente hilbertiano, mesmo quando o grupo de valores Γ_A não é 2-divisível. A saber, o corpo das séries formais $F = \mathbb{C}((t))$ (veja o Exemplo 2, anterior ao Teorema 1.14) possui um anel de valorização 2-henseliano dado por $A = \mathbb{C}[[t]]$. O grupo de valores é $\Gamma_A = \mathbb{Z}$ e $-1 \in \dot{F}^2$. Utilizando um resultado do capítulo seguinte (Lema 3.8), vamos obter que $\dot{F} = \dot{F}^2 \cup t\dot{F}^2$. Como $D_F\langle 1, -t \rangle = \dot{F}^2 \cup t\dot{F}^2 = \dot{F}$, temos que $t \in R(F)$. Segue que $R(F) = \dot{F} \neq \dot{F}^2$ e portanto F não é fracamente hilbertiano. Em particular, este exemplo mostra que não podemos dispensar a condição $-1 \notin \dot{F}^2$ para afirmar que corpos valorizados 2-henselianos sejam fracamente hilbertianos.

Estudadas as principais propriedades do radical, passaremos agora a examinar as relações entre valorizações e radical.

2.3 Radical de Kaplansky e Valorizações

Os exemplos das duas últimas seções deixam bem claro que o conhecimento do Radical de Kaplansky de um corpo F é fundamental para o entendimento das propriedades aritméticas de F , principalmente no que se refere às formas quadráticas. Ficou evidente a importância de podermos “calcular” o radical, isto é, obter $R(F)$ igual a um subgrupo de $\dot{F}$, com o qual se possa trabalhar com mais facilidade. Os exemplos estudamos abrangem praticamente todos os tipos de corpos para os quais o radical pode ser descrito de forma simples. Contudo, o caso livre é bastante restritivo e o caso fracamente hilbertiano, apesar de freqüente, não pode ser esperado na maioria das aplicações. De fato, a trivialidade $R(F) = \dot{F}^2$ não se mantém sequer para extensões quadráticas de F . Por exemplo, já citamos um resultado de Berman ([Be]) que afirma que se F é um corpo pitagórico e formalmente real, escolhendo $K = F(\sqrt{-1})$, então o índice $(R(K) : \dot{K}^2)$ pode ser prescrito como qualquer número natural, desde que se escolha F com número suficiente de ordens. Portanto, é importante que se amplie o conjunto dos corpos para os quais o radical possa ser bem descrito.

Veremos nesta seção que se F admite um anel de valorização A que é $R(F)$ -compatível, então o radical pode ser descrito como $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 = \text{localizador de } A$, a menos de poucas exceções. Portanto, a teoria de valorizações contribui para a solução do problema descrito no parágrafo anterior. Mostraremos a “viabilidade técnica” do caso $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Isto é, verificaremos que em geral este caso produz um radical não trivial, e diferente de $D_F\langle 1, 1 \rangle$. Para evitar repetições desnecessárias nos resultados seguintes, lembramos que dizer que (F, v_A) é um corpo valorizado subentende-se as notações:

Grupo de valores de v_A :	Γ_A
Valorização :	$v_A : F \rightarrow \Gamma_A \cup \{\infty\}$
Ideal maximal de A :	$\mathcal{M}_A$
Corpo de resíduos :	$k_A := A/\mathcal{M}_A$
Projeção canônica :	$\pi_A : A \rightarrow k_A$

Iniciaremos verificando que “quase” todo corpo valorizado 2-henseliano é fracamente hilbertiano, isto é, $R(F) = \dot{F}^2$.

Lema 2.12 *Se (F, v_A) é um corpo valorizado 2-henseliano, com $\text{car}(k_A) \neq 2$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$. Se $-1 \notin \dot{F}^2$, então F é fracamente hilbertiano.*

Demonstração Conforme o item 2 seguinte ao Lema 2.2, basta verificar que F possui um elemento birígido. Provaremos que todo $a \in F^\times$, com $v_A(a) \notin 2\Gamma_A$, é birígido. Isto ocorre se para todo $x, y \in \dot{F}^2$, tivermos $x + ay \in \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$ e $x - ay \in \dot{F}^2 \cup -a\dot{F}^2$. Como $v_A(a) = v_A(-a)$, é suficiente verificar que $x + ay \in \dot{F}^2 \cup a\dot{F}^2$. Primeiro note que $v_A(a) \notin 2\Gamma_A \Leftrightarrow a \in F^\times \setminus A^\times \dot{F}^2$. Segue que $v_A(x) \neq v_A(ay)$. Se $v_A(ay) > v_A(x)$, então $ayx^{-1} \in \mathcal{M}_A$ e $x + ay = (1 + ayx^{-1})x \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subset \dot{F}^2$. Analogamente, se $v_A(ax) < v_A(y)$, temos que $x + ay \in a\dot{F}^2$. $\square$

No contexto do Lema 2.12, já observamos no final da seção anterior que a hipótese $-1 \notin \dot{F}^2$ não pode ser retirada. Também a hipótese $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$ é necessária, conforme veremos após a Proposição 3.1.

Seja (F, v_A) um corpo valorizado. Na maioria dos casos, a compatibilidade $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$ implica na igualdade $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. De fato, a inclusão $R(F) \subset (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ não ocorre somente em alguns corpos com propriedades bastante restritivas. Mais especificamente, a hipótese

$$(F, v_A) \text{ é um corpo valorizado com } k_A \neq k_A(2) \text{ e } \Gamma_A \neq 2\Gamma_A \quad (2.1)$$

implica $R(F) \subset (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, conforme o lema seguinte.

Lema 2.13 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado. Suponha que $R(F)$ não está contido em $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Então*

- (a) $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) \leq 2$.
- (b) *Caso $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) = 2$, então $\dot{k}_A = \dot{k}_A^2$. Consequentemente, se $\text{car}(k_A) \neq 2$, então k_A é quadraticamente fechado.*

Demonstração Seja $r \in R(F) \setminus (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. De $r \notin (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, segue que $0 = v(a - rb) = \min\{v(a), v(rb)\}$, para todos $a, b \in \dot{F}^2$, com $a - br \neq 0$. De fato, se o mínimo for $v(a)$ e $v(a - rb) > v(a)$, então $r \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Análogo, se o mínimo for $v(rb)$ e $v(a - rb) > v(rb)$, temos $r \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Na seqüência, $\Gamma := \Gamma_A$.

(a) Como $r \in R(F)$, temos $\dot{F} = D_F\langle 1, -r \rangle$. Pelo observado acima, $v(x) \in 2\Gamma \cup (v(r) + 2\Gamma)$, para todo $x \in F^\times$. Segue que $(\Gamma : 2\Gamma) \leq 2$.

(b) Supondo $(\Gamma : 2\Gamma) = 2$, provemos que $\dot{k} = \dot{k}^2$. Seja $y \in A^\times$ e sejam $a, b \in \dot{F}^2$

tais que $y = a - rb$. Novamente $0 = v(y) = \min\{v(a), v(rb)\}$. Não é possível termos $v(rb) = 0$, pois nesse caso, o item (a) implicaria $\Gamma = 2\Gamma$. Assim, $v(a) = 0$. Portanto, $a \in A^\times \cap F^2 = (A^\times)^2$. Como $v(rb) > 0$, temos $\pi(rb) = 0$ e com isto, $\pi(y) = \pi(a - rb) = \pi(a) \in \dot{k}^2$. $\square$

Lema 2.14 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, com $\text{car}(k_A) \neq 2$. São equivalentes:*

$$(a) \quad \Gamma_A = 2\Gamma_A \text{ e } k_A = k_A(2).$$

$$(b) \quad (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 = \dot{F}$$

Demonstração $(a) \Rightarrow (b)$ Das seqüências exatas canônicas

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \rightarrow & 1 + \mathcal{M}_A & \hookrightarrow & A^\times & \xrightarrow{\pi} & \dot{k}_A & \rightarrow & 1 \\ 1 & \rightarrow & A^\times & \hookrightarrow & \dot{F} & \xrightarrow{v} & \Gamma_A & \rightarrow & 0 \end{array}$$

e dos decorrentes isomorfismos

$$A^\times / (1 + \mathcal{M}_A)(A^\times)^2 \cong \dot{k}_A / \dot{k}_A^2 \quad \text{e} \quad \dot{F} / A^\times \dot{F}^2 \cong \Gamma_A / 2\Gamma_A$$

conclui-se que a hipótese (a) implica $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 = \dot{F}$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Suponha $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 = \dot{F}$. É evidente que Γ_A é 2-divisível. Diretamente verifica-se que $A^\times = (1 + \mathcal{M}_A)(A^\times)^2$. Segue que $k_A = k_A(2)$. $\square$

Observações

(a) Seja (F, v_A) corpo valorizado, com A sendo $R(F)$ -compatível. Do Lema 2.13, pode ocorrer $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subsetneq R(F)$ se o grupo de valores Γ_A é 2-divisível.

(b) Novamente do Lema 2.13, a inclusão própria $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subsetneq R(F)$ ainda pode ocorrer quando $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) = 2$ e o corpo residual k_A é quadraticamente fechado. Utilizando um do capítulo 3 (veja Corolário 3.19), podemos concluir que $G_2(F)$ é livre. Logo, $R(F) = \dot{F}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Se } 1 + \mathcal{M}_A \subset R(F) \text{ e } (\Gamma_A : 2\Gamma_A) = 2, \text{ então } R(F) &= (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2, \\ &\text{a menos que } R(F) = \dot{F}. \end{aligned}$$

- (c) Embora raramente, pode ocorrer que mesmo o Radical de Kaplansky de F sendo igual ao localizador $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, ele possa ainda ser trivial. Mas o localizador só é igual a $\dot{F}^2$ no caso em que A é um anel de valorização 2-henseliano. Por outro lado, pelo Lema 3.19, o localizador só é igual a $F^\times$ quando $\Gamma_A = 2\Gamma_A$ e $k_A = k_A(2)$.

Como aplicação imediata do Lema 2.13 e para utilização futura, vamos calcular o radical de um corpo F com $(\dot{F} : R(F)) = 4$. Neste caso, o radical é conhecido apenas no caso em que F é não formalmente real. Sob esta hipótese, F é pré-hilbertiano, conforme ([L₁], Teorema 6.9, p.453). O próximo lema se aplica ao caso formalmente real ou não.

Lema 2.15 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado com $(F^\times : R(F)) = 4$. Se $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$ e $k_A \neq k_A(2)$, então $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$.*

Demonstração Sabemos que $R(F) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Observe que se não valer a inclusão contrária, a hipótese $(\dot{F} : R(F)) = 4$, junto com $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$, implicam $(\dot{F} : (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2) = 2$. Temos dois casos: $\dot{F} = A^\times \dot{F}^2$ ou $A^\times \dot{F}^2 = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, que implicam respectivamente em $\Gamma_A = 2\Gamma_A$ ou $k_A = k_A^2$. Assim, qualquer caso leva a uma contradição com as hipóteses do lema. $\square$

Para concluir este estudo inicial sobre Radical de Kaplansky e as valorizações de um corpo, descreveremos o conjunto dos anéis de valorização do corpo F que são compatíveis com $R(F)$. Este conjunto tem forma análoga ao caso 2-henseliano (conforme [EN]).

Lema 2.16 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado e $\pi = \pi_A$ a projeção canônica.*

- (a) $\pi(x) \in R(k_A) \setminus \dot{k}_A^2$, para todo $x \in (R(F) \cap A^\times) \setminus (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$.
- (b) $\pi(R(F) \cap A^\times) \subseteq R(k_A)$.

Demonstração (a) Seja $x \in (R(F) \cap A^\times) \setminus (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Dado $y \in A^\times$, é suficiente provar que $\pi(y) \in D_k \langle 1, -\pi(x) \rangle$ (onde $k = k_A$). Como $x \in R(F)$, existem $a, b \in \dot{F}^2$ tais que $y = a - xb$. Assim como na demonstração do Lema 2.13, $x \notin (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ implica em $0 = v(y) = \min\{v(a), v(xb)\}$. Analisando os possíveis valores de a e b , concluímos a igualdade desejada: $\pi(y) \in D_k \langle 1, -\pi(x) \rangle$. Portanto, $\pi(x) \in R(k)$. Finalmente, $x \in A^\times \setminus (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ implica $\pi(x) \notin k^2$.

(b) Segue de (a). $\square$

Lema 2.17 *Seja (F, v_A) corpo valorizado. Se $\Gamma_A = 2\Gamma_A$, $R(k_A) = \dot{k}_A$ e $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$, então $R(F) = \dot{F}$.*

Demonstração Por simplicidade omitiremos o subíndice A . Como a igualdade $\Gamma = 2\Gamma$ implica $\dot{F} = A^\times \dot{F}^2$, basta provarmos que $A^\times \subseteq R(F)$. Tome $z \in A^\times$ e $y \in \dot{F} = A^\times \dot{F}^2$. Escrevendo $y = ua$, com $u \in A^\times$ e $a \in \dot{F}^2$, só precisamos mostrar que $u \in D_F\langle 1, -z \rangle$. Mas $R(k) = \dot{k}$ implica em $\bar{u} = \bar{w}$, para algum $w \in D_F\langle 1, -z \rangle$. Assim, $uw^{-1} \in 1 + \mathcal{M} \subseteq R(F) \subset D_F\langle 1, -z \rangle$, e portanto $u \in D_F\langle 1, -z \rangle$. $\square$

Sejam A_1, A_2 dois anéis de valorização do corpo F e $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ seus respectivos ideais maximais. Dizemos que A_1 e A_2 são *comparáveis* se $A_1 \subset A_2$ ou $A_2 \subset A_1$. Caso contrário, dizemos que A_1 e A_2 são *incomparáveis*. Se $A_1 A_2 = F$, dizemos que A_1 e A_2 são dois anéis de valorização *independentes* em F , e são chamados de *dependentes*, caso contrário.

Lema 2.18 *Seja F um corpo e T um subgrupo de $\dot{F}$. Se A_1 e A_2 são dois anéis de valorização independentes em F e $1 + \mathcal{M}_i \subset T$, então $\dot{F} = T$.*

Demonstração Sejam v_1 e v_2 as valorizações associadas a A_1 e A_2 , respectivamente. Seja $y \in F^\times$. Pelo Teorema da Aproximação ([EP], Teorema 2.4.1, p.48) existe $x \in F^\times$ tal que $v_1(x-y) > v_1(y)$ e $v_2(x-1) > v_2(1) = 0$. Segue que $(x-y)y^{-1} \in \mathcal{M}_1$ e $x-1 \in \mathcal{M}_2$. Logo, $xy^{-1} \in 1 + \mathcal{M}_1 \subset T$, $x \in 1 + \mathcal{M}_2 \subset T$ e $y = x(xy^{-1})^{-1} \in T$. $\square$

Dependendo de T , o lema pode ser lido de maneiras interessantes. Por exemplo, se F é um corpo que possui dois anéis de valorização independentes e 2-henselianos, então F é quadraticamente fechado. Se F é um corpo com dois anéis de valorização independentes e $R(F)$ -compatíveis, $R(F) = \dot{F}$.

Lema 2.19 *Seja F um corpo tal que $R(F) \neq \dot{F}$. Se A_1 e A_2 são dois anéis de valorização incomparáveis de F e $R(F)$ -compatíveis, então A_1 e A_2 tem corpos de resíduos quadraticamente fechados.*

Demonstração Seja $B = A_1 A_2$. Então B também é um anel de valorização ($R(F)$ -compatível) de F e vamos denotar por $\mathcal{M}_B$ seu ideal maximal, k_B o corpo residual e $\pi_B : B \rightarrow k_B$ a projeção canônica. Ainda, denotamos por $\mathcal{M}_i$ o ideal maximal e por k_i o corpo residual de A_i . Finalmente, $\bar{A}_i$ é o anel de valorização de k_B dado pela imagem $\pi_B(A_i)$ com ideal maximal $\mathcal{M}_{\bar{A}_i}$, $i = 1, 2$. Note que $\bar{A}_1 \bar{A}_2 = k_B$

e portanto esses dois anéis de valorização são independentes em k_B . Também são $R(k_B)$ -compatíveis, pois $1 + \mathcal{M}_{\bar{A}_i} \subseteq \pi_B(R(F) \cap B^\times) \subseteq R(k_B)$, $i = 1, 2$, onde na última inclusão utilizamos o item (c) do Lema 2.16. Aplicando o Lema 2.18, temos que $R(k_B) = \dot{k}_B$. Para provar que $k_i = k_i(2)$, analisaremos dois casos em separado. Primeiro, quando $R(F) \subset (1 + \mathcal{M}_B)\dot{F}^2$ e segundo, $R(F) \not\subset (1 + \mathcal{M}_B)\dot{F}^2$. No primeiro caso, temos $1 + \mathcal{M}_i \subseteq R(F) \subseteq (1 + \mathcal{M}_B)\dot{F}^2 \cap B^\times = (1 + \mathcal{M}_B)(B^\times)^2$, donde $1 + \mathcal{M}_{\bar{A}_i} \subseteq k_B^2$, para $i = 1, 2$. Isto diz que $\bar{A}_1$ e $\bar{A}_2$ são 2-henselianos (e independentes) em k_B e novamente pelo Lema 2.18 segue que $k_B = k_B(2)$. Temos uma inclusão própria $A_i \subset B$ de dois anéis de valorização de F . Assim, $A_i/\mathcal{M}_B$ é anel de valorização de $B/\mathcal{M}_B$ e o corpo residual de $A_i/\mathcal{M}_B$ é isomorfo a k_i . Disto e de $k_B = k_B(2)$, decorre do Teorema 3.2.11 de ([EP]) que $k_i = k_i(2)$, para $i = 1, 2$. Supomos agora $R(F) \not\subset (1 + \mathcal{M}_B)\dot{F}^2$. Pelo Lema 2.13, temos $(\Gamma_B : 2\Gamma_B) \leq 2$. Se $(\Gamma_B : 2\Gamma_B) = 2$, novamente o Lema 2.13 diz que $k_B = k_B(2)$. Vejamos que não pode ocorrer o caso $\Gamma_B = 2\Gamma_B$. Caso contrário, como $1 + \mathcal{M}_B \subset R(F)$ e $k_B = k_B(2)$, o Lema 2.17 assegura que $R(F) = \dot{F}$, contradizendo a hipótese $R(F) \neq \dot{F}$. $\square$

Definimos agora o conjunto:

$$\mathcal{H}(F) = \{A \subseteq F : A \text{ é anel de valorização de } F \text{ tal que } 1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)\}$$

num corpo F com $R(F)$ não trivial. Desmembramos $\mathcal{H}(F)$ em $\mathcal{H}(F) = \mathcal{H}_1(F) \cup \mathcal{H}_2(F)$, onde

$$\mathcal{H}_1(F) = \{A \in \mathcal{H}(F) : k_A \text{ não quadraticamente fechado}\}$$

$$\mathcal{H}_2(F) = \{A \in \mathcal{H}(F) : k_A \text{ quadraticamente fechado}\}$$

Do último lema, $\mathcal{H}_1(F)$ é totalmente ordenado por inclusão. Definimos agora

$$A_c = \bigcap_{A \in \mathcal{H}_1(F)} A \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_c = \bigcup_{A \in \mathcal{H}_1(F)} \mathcal{M}_A$$

Da definição, A_c é um anel de valorização $R(F)$ -compatível de F e com ideal maximal $\mathcal{M}_c$. Assim, $A_c \in \mathcal{H}(F)$. Portanto, se $\mathcal{H}_1(F) \neq \emptyset$, então A_c é o menor (está incluído em todo) elemento de $\mathcal{H}_1(F)$. Caso $\mathcal{H}_2(F) = \emptyset$, então $A_c \in \mathcal{H}_1(F)$ e é o menor anel de valorização $R(F)$ -compatível de F . No caso de $\mathcal{H}_2(F)$ ser não vazio, então A_c pode ou não estar em $\mathcal{H}_2(F)$, dependendo de seu corpo de resíduos ser ou não quadraticamente fechado. Chamamos

Definição 2.20 *O anel de valorização A_c é denominado o anel de valorização $R(F)$ -compatível canônico de F .*

CAPÍTULO 3

Radical de Kaplansky e o Pro-2-Grupo de Galois Maximal

Mostraremos neste capítulo dois métodos para obter corpos com anel de valorização R -compatível. Para a produção de exemplos, o primeiro método é particularmente útil. Para desenvolvê-lo serão necessários estudos preliminares sobre as condições que $G_2(F)$ deve satisfazer para que o corpo F admita um anel de valorização 2-henseliano. Também precisaremos de condições técnicas para que ocorra a decomposição de $G_2(F)$ como produto livre de dois de seus subgrupos fechados e ainda, de um resultado acerca da realização do produto livre de dois pro-2-grupos. Analisamos em detalhes as possíveis variações do método e os resultados que produzem. Tudo isto será feito na primeira seção. Na seção seguinte é descrito o segundo método. Abordamos uma construção conhecida de anéis de valorização do corpo F a partir de elementos rígidos em relação a um subgrupo de $\dot{F}$. Verificamos os casos em que podem ou não existir tais elementos.

3.1 Radical obtido via Valorizações e Pro-2-Grupo de Galois Maximal

Iniciaremos com uma “caracterização galoisiana” dos corpos 2-henselianos. Se (F, v_A) é 2-henseliano, veremos que $G_2(F)$ é o produto semi-direto de $G_2(k_A)$ com um produto direto de cópias de $\mathbb{Z}_2$, indexado pela dimensão de $\Gamma_A/2\Gamma_A$ como $\mathbb{F}_2$ -espaço vetorial.

A existência de um anel de valorização 2-henseliano num corpo pode ser detectada a partir de $G_2(F)$. Basta que este grupo admita um subgrupo não trivial, normal e abeliano. Esta “decodificação” da valorização foi estudada por Engler e Nogueira ([EN]) e mais geralmente por Engler e Koenigsmann ([EK]). No nosso caso, queremos concluir (à exceção de alguns casos bastante especiais) que um anel de valorização 2-henseliano de um corpo F “se transfere”, via o pro-2-grupo de Galois, para outro corpo com o mesmo pro-2-grupo de Galois.

Seja (F, v_A) um corpo valorizado, com $\text{car}(k_A) \neq 2$ e A_2 uma extensão de A à $F(2)$. Seja $\mathcal{M}_2$ o ideal maximal de A_2 e $k_2 = A_2/\mathcal{M}_2$. Seja $G^h(A_2) = \{\sigma \in G_2(F) \mid \sigma A_2 = A_2\}$. A aplicação $\bar{\sigma} : k_2 \rightarrow k_2$, dada por $\bar{\sigma}(x + \mathcal{M}_2) = \sigma(x) + \mathcal{M}_2$ é um k_A -automorfismo de k_2 ([EP], Teorema 3.2.16, itens (1) e (3), p.70). Por ([EP], Lema 5.2.6, p.123), temos um epimorfismo contínuo $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ de grupos $G^h(A_2) \rightarrow G(k_2/k_A)$. Decorre de $F(2)$ ser quadraticamente fechado que $(A_2^\times)^2 = A_2^\times$. Isto implica imediatamente que k_2 também é quadraticamente fechado. Pela teoria de valorização, k_2 é também uma 2-extensão de k_A . Portanto, $k_2 = k_A(2)$. Agora temos um epimorfismo $G^h \rightarrow G(k_2/k_A) = G_2(k_A)$. Seja $G^t(A_2, F)$ o núcleo deste epimorfismo. O grupo $G^t(A_2, F)$, ou simplesmente G^t , é denominado o *grupo de inércia* de A_2 sobre F . Temos assim a seguinte seqüência exata:

$$1 \rightarrow G^t \hookrightarrow G^h \twoheadrightarrow G_2(k_A) \rightarrow 1. \quad (3.1)$$

Vamos assumir que (F, v_A) é 2-henseliano. Então A tem extensão única a $F(2)$ e pelo Teorema da Conjugação (1.14), temos que $G^h(A_2) = G_2(F)$. Agora, G^t é um subgrupo normal de $G_2(F)$. De ([EH], Lema 1.1), a seqüência exata (3.1) é cindida. Portanto, $G_2(F) \cong G^t \rtimes G_2(k_A)$. Segue de ([EP], Teorema 5.3.3, p.130), que G^t é isomorfo à $\mathbb{Z}_2^\lambda$, onde $\lambda = \dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_A/2\Gamma_A$, a dimensão de $\Gamma_A/2\Gamma_A$ como $\mathbb{F}_2$ -espaço vetorial. Resumindo:

Proposição 3.1 *Se (F, v_A) é corpo valorizado 2-henseliano e $\text{car}(k_A) \neq 2$, então*

$$G_2(F) \cong \mathbb{Z}_2^{\dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_A / 2\Gamma_A} \rtimes G_2(k_A).$$

A ação de $G_2(k_A)$ sobre $\mathbb{Z}_2^{\dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_A / 2\Gamma_A}$ é bem conhecida. Não vamos descrevê-la pois não é relevante para nosso trabalho (consulte [EK]).

Para ilustrar a situação acima consideremos o exemplo do corpo das séries formais generalizadas de Laurent, estudado após o Teorema 1.16. Dado um corpo k de característica diferente de 2 e um grupo abeliano ordenado Γ , vimos que $F = k((t))^\Gamma$ é munido de um anel de valorização 2-henseliano $A = k[[t]]^\Gamma$, com grupo de valores $\Gamma_A = \Gamma$ e corpo residual $k_A = k$. Por exemplo, podemos escolher o grupo abeliano $\mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}$. Este grupo pode ser totalmente ordenado lexicograficamente:

$$(i_1, \dots, i_n) < (j_1, \dots, j_n) \Leftrightarrow \exists r : i_r < j_r \text{ e } i_s = j_s, \text{ para todo } s \in \{1, \dots, r-1\}.$$

Neste caso, a dimensão de $\Gamma_A / 2\Gamma_A$ sobre $\mathbb{F}_2$ é igual a n . Pela Proposição 3.1, temos

$$G_2(k((t))^\Gamma) \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes G_2(k).$$

Quando um corpo valorizado (F, v_A) é 2-henseliano, a Proposição 3.1 assegura que $G_2(F)$ admite o subgrupo normal abeliano $\mathbb{Z}_2^\lambda$, onde $\lambda = \dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_A / 2\Gamma_A$. Reciprocamente, no trabalho ([EN]), Engler e Nogueira demonstraram (veja exposição seguinte ao Corolário 4.2 de [EK]):

Teorema 3.2 *Seja F um corpo tal que $G_2(F)$ não é procíclico ($\not\cong \mathbb{Z}_2$) e não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Então F possui um anel de valorização 2-henseliano A , com $\text{car}(k_A) \neq 2$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$, se e somente se, $G_2(F)$ admite um subgrupo não trivial, abeliano e normal $\mathcal{U}$, que seja não trivial.*

Os casos excluídos do teorema acima correspondem a corpos que podem ou não ter anel de valorização 2-henseliano, conforme os exemplos seguintes.

Exemplos

(1) Só ocorre $G_2(F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se o corpo F é *euclidiano*, ou seja, um corpo cuja única ordem é $\dot{F}^2$. Uma ordem $\leq$ em F é *arquimediana* se para qualquer $x \in F$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq n$. Um anel de valorização A de F é *convexo* em relação a ordem $\leq$ se dado $y \in F$, com $0 < y < a \in A$, então $y \in A$. Assim, se $\leq$ for uma ordem

arquimediana de F , então $A = F$. Como um anel de valorização 2-henseliano de F é convexo com respeito a qualquer ordem de F (conforme [EP], Lema 4.3.6, p.102), se F for euclidiano e sua única ordem for arquimediana, temos que F não admite um anel de valorização 2-henseliano não trivial. Isto ocorre, por exemplo, em $\mathbb{R}$.

(2) Sabemos que $F = \mathbb{R}((X))^{\mathbb{Z}}$ admite um anel de valorização 2-henseliano, cujo corpo residual é $\mathbb{R}$ e o grupo de valores é $\mathbb{Z}$. Pela Proposição 3.1, temos $G_2(F) = \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Por outro lado, tomando o fecho algébrico relativo de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, obtemos um fecho real ¹ de $\mathbb{Q}$ que denotamos por R . Tomando um automorfismo σ de $\mathbb{C}$, diferente da conjugação real ($a + bi \mapsto a - bi$) e definindo $F = R \cap \sigma(R)$, obtêm-se um corpo com ordem arquimediana satisfazendo $G_2(F) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) Seja p um número primo. É bem conhecido que $G_2(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{F}_p$ não possui qualquer anel de valorização próprio. Contudo, $\mathbb{Z}_2$ também ocorre como $G_2(F)$ de $F = \mathbb{C}((X))^{\mathbb{Z}}$. Neste caso, sabemos que F admite um anel de valorização 2-henseliano A , com $k_A \cong \mathbb{C}$ e $\Gamma_A \cong \mathbb{Z}$.

Resumidamente, estes casos podem ocorrer quando F admite o anel de valorização 2-henseliano A , com $\Gamma_A = 2\Gamma_A$ (caso (1)) ou $(\dot{k}_A : \dot{k}_A^2) \leq 2$ (casos (2) e (3) acima). Finalizamos assim a caracterização galoisiana de corpos 2-henselianos. Veremos agora critérios aritméticos para a decomposição do pro-2-grupo de Galois maximal como produto livre de subgrupos fechados.

Seja G um pro-2-grupo. Dados G_1 e G_2 dois subgrupos fechados de G , o *pro-2-produto livre* $G_1 * G_2$ é construído introduzindo uma topologia no produto livre usual $G_1 * G_2$. Mais explicitamente,

$$G_1 * G_2 = \varprojlim ((G_1 * G_2)/N)$$

onde N percorre o conjunto de todos os subgrupos normais de $G_1 * G_2$ com a propriedade que $|(G_1 * G_2)/N|$ é uma potência de 2.

Por ([L₁], Teorema 8.6, p.283), os únicos elementos idempotentes do anel de Witt de um corpo são os triviais, ou seja, são 0 e 1. Com isto, dados dois corpos F_1 e F_2 , o produto direto $W(F_1) \times W(F_2)$ na categoria dos anéis comutativos não tem chance de ser o anel de Witt de um corpo. Para corrigir esta situação, considera-se

¹Veja ([L₁], Definição 2.7, p.242), ou a introdução da seção 3 do capítulo 4.

um subanel do produto direto, que consiste dos pares (q_1, q_2) , onde $\dim(q_1)$ e $\dim(q_2)$ tem a mesma paridade. Este subanel também será denotado por $W(F_1) \times W(F_2)$. Mais detalhes podem ser vistos em ([L₁], p.462). A conexão com a abordagem que tratamos anteriormente é obtida do teorema seguinte.

Teorema 3.3 *Seja F um corpo e $F_1, F_2 \subseteq F(2)$ extensões de F . São equivalentes:*

- (i) $W(F) \cong W(F_1) \times W(F_2)$.
- (ii) $G_2(F) \cong G_2(F_1) * G_2(F_2)$.

Demonstração A direção (ii) $\Rightarrow$ (i) segue de ([JWa], Observação 3.5). Prove-mos (i) $\Rightarrow$ (ii). Segue da definição de produto de Witt que $IF = IF_1 \oplus IF_2$. Daí, $IF/I^2F = IF_1/I^2F_1 \oplus IF_2/I^2F_2$ e $I^2F/I^3F = I^2F_1/I^3F_1 \oplus I^2F_2/I^3F_2$. Mas $IF/I^2F \cong \dot{F}/\dot{F}^2$ ([L₁], Corolário 2.3, p.32) e o mesmo vale para F_1, F_2 . Como o Teorema de Merkurjev diz que $I^2L/I^3L \cong {}_2\text{Br}(L)$, onde $L = F, F_1, F_2$, o resultado segue do Teorema 3.5 abaixo. $\square$

Teorema 3.4 ([JWa], Teorema 3.6) *Dados dois corpos F_1 e F_2 , existe um corpo F tal que $G_2(F) \cong G_2(F_1) * G_2(F_2)$.*

Demonstração (Resumo) A demonstração consiste na interpretação de um resultado obtido por Kula ([Ku₁]), onde é construído um corpo $F = L_1 \cap L_2$ e é demonstrado que $W(F) \cong W(L_1) \times W(L_2)$. Ainda, L_i/F são extensões algébricas e L_i é munido de uma valorização 2-henseliana w_i com grupo de valores $\Gamma_i := w_i(L_i^\times)$ 2-divisível e o corpo residual é igual à F_i , para $i = 1, 2$. No Teorema 3.6 de ([JWa]) é demonstrado que $G_2(F) \cong G_2(L_1) * G_2(L_2)$. Observe que sendo Γ_i 2-divisível, têm-se $G_2(L_1) \cong G_2(F_1)$, pois L_i é 2-henseliano. $\square$

Utilizaremos muitas vezes o seguinte resultado de Neukirch ([NSW], Teoremas 4.1.4 e 4.1.5, considerados na categoria dos pro-2-grupos).

Teorema 3.5 *Seja F um corpo. Sejam $F_0, H \subseteq F(2)$ duas extensões de F . Então $G_2(F) \cong G_2(F_0) * G_2(H)$ se, e somente se,*

- (1) *A aplicação natural $\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{F}_0/\dot{F}_0^2 \times \dot{H}/\dot{H}^2$, $x\dot{F}^2 \mapsto (x\dot{F}_0^2, x\dot{H}^2)$, é um isomorfismo.*
- (2) *A restrição $\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F_0) \times {}_2\text{Br}(H)$, $(F, a, b) \mapsto ((F_0, a, b), (H, a, b))$, é injetiva.*

3.1 Radical obtido via Valorizações e Pro-2-Grupo de Galois Maximal 44

MÉTODO PARA OBTEN CORPOS COM ANEL DE VALORIZAÇÃO COMPATÍVEL COM O RADICAL DE KAPLANSKY.

Seja F_1 um corpo cujo pro-2-grupo de Galois $G_2(F_1)$ é livre. Lembre que $R(F_1) = \dot{F}_1$, pela Proposição 2.9. Seja (H_1, v_1) um corpo valorizado 2-henseliano, com corpo residual $k_1 = A_1/\mathcal{M}_1$ de característica $\neq 2$, e grupo de valores $\Gamma_1 \neq 2\Gamma_1$. Conforme a Proposição 3.1,

$$G_2(H_1) \cong \mathbb{Z}_2^{\dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_1/2\Gamma_1} \rtimes G_2(k_1).$$

Observe que a hipótese $\Gamma_1 \neq 2\Gamma_1$ exclui automaticamente o caso euclidiano ($G_2(H_1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Além disso, vamos supor que $G_2(H_1)$ não é pro-cíclico ($\not\cong \mathbb{Z}_2$) e não é isomorfo à $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Estas hipóteses são necessárias porque precisaremos do Teorema 3.2. Consideramos o produto livre

$$G_2(F_1) * G_2(H_1),$$

na categoria dos pro-2-grupos. Pelo Teorema 3.4, $G(F_1) * G(H_1)$ é realizável como um pro-2-grupo de Galois, ou seja, existe um corpo F tal que

$$G_2(F) \cong G_2(F_1) * G_2(H_1).$$

Do isomorfismo acima, existem dois subgrupos fechados N_1, N_2 de $G_2(F)$ tais que $N_1 \cong G_2(F_1)$ e $N_2 \cong G_2(H_1)$. Da teoria de Galois, estes subgrupos correspondem às extensões $F_0 := \text{Fix}(N_1)$ e $H := \text{Fix}(N_2)$ de F . Aqui, $\text{Fix}(N_i)$ é o corpo fixo do subgrupo fechado N_i . Assim,

$$G_2(F) \cong G_2(F_0) * G_2(H).$$

As propriedades assumidas sobre F_1 e H_1 se transferem para F_0 e H . De fato, é claro que $R(F_0) = \dot{F}_0$, pois $G_2(F_0) \cong G_2(F_1)$, que é livre. Verificaremos que o corpo H também admite um anel de valorização 2-henseliano B , com corpo residual k_B de característica diferente de 2 e com grupo de valores $\Gamma_B \neq 2\Gamma_B$. Como vimos após a sequência exata 3.1, o grupo de inércia $G^t = G(\tilde{A}_1, H_1)$ é subgrupo abeliano e normal de $G_2(H_1)$, onde $\tilde{A}_1$ é a única extensão de A_1 à $H_1(2)$. Da Proposição 3.1, $G^t \cong \mathbb{Z}_2^\lambda$, onde λ é a dimensão de $\Gamma_1/2\Gamma_1$ como $\mathbb{F}_2$ -espaço vetorial. Ainda, $G_2(H_1) \cong \mathbb{Z}_2^\lambda \rtimes G_2(k_1)$. Do isomorfismo $G_2(H_1) \cong G_2(H)$, obtêm-se um subgrupo abeliano e normal ($\cong \mathbb{Z}_2^\lambda$) de $G_2(H)$. Como $G_2(H)$ também não é isomorfo à $\mathbb{Z}_2$,

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, segue do Teorema 3.2 que H admite um anel de valorização 2-henseliano B , com $\text{car}(k_B) \neq 2$ e $\Gamma_B \neq 2\Gamma_B$.

Vamos verificar que F admite um anel de valorização $R(F)$ -compatível. Considere o anel de valorização A de F dado por $B \cap F$. Da inclusão $k_A \hookrightarrow k_B$, é claro que $\text{car}(k_A) \neq 2$. Além disso, sabemos da teoria de valorização que Γ_B/Γ_A é de torção (conforme [EP], Teorema 3.2.4, item (i), p.62). Com isso ([EP], exercício 5.5.2, p.147), $\dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_B/2\Gamma_B \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_A/2\Gamma_A$. Portanto, $\Gamma_B \neq 2\Gamma_B$ implica $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$. Provemos agora que $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$. Do Teorema 3.5, o isomorfismo $G_2(F) \cong G_2(F_0) * G_2(H)$ implica:

- (1) A aplicação natural $\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{F}_0/\dot{F}_0^2 \times \dot{H}/\dot{H}^2$, é um isomorfismo.
- (2) A restrição $\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F_0) \times {}_2\text{Br}(H)$, é injetiva.

Como $G_2(F_0)$ é livre, o Lema 2.9 diz que ${}_2\text{Br}(F_0) = \{0\}$. Suponha, por contradição que $a \in 1 + \mathcal{M}_A$ e $a \notin R(F)$. Então existe $b \in F^\times$ tal que a F -álgebra de quatérnios (F, a, b) é de divisão (conforme item (iii) do Lema 2.2). Da injetividade de $\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(H)$, (H, a, b) também é álgebra de divisão. Note que isto não pode ocorrer, pois $a \in 1 + \mathcal{M}_A \subset 1 + \mathcal{M}_H \subset \dot{H}^2$ ((H, v_B) é 2-henseliano). Assim, $(H, a, b) \cong (H, 1, b) \cong M_2(H)$. Portanto, $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$. $\square$

Existem muitos exemplos dos corpos que foram escolhidos para o procedimento acima. De fato, corpos de séries formais e superpitagóricos (Definição 4.3) são todos 2-henselianos. Corpos F_0 com $G_2(F_0)$ livre também não são difíceis de serem obtidos, como vimos no capítulo 2. Portanto, a construção acima produz uma ampla classe de corpos R -compatíveis, cujo radical só é trivial para escolhas bastante específicas de F_1 e H_1 , conforme veremos.

No início da construção excluímos o caso $G_2(H_1) = \mathbb{Z}_2$, por não podermos garantir que $G_2(H)$ tenha um subgrupo não trivial, normal e abeliano. A exclusão deste caso não é relevante em termos de radical e impõe grandes restrições a escolha de H_1 . De fato, admitindo $G_2(H_1) = \mathbb{Z}_2$, teríamos que $G_2(F) \cong G_2(F_1) * \mathbb{Z}_2$ seria um pro-2-grupo livre, uma vez que é o produto livre de dois subgrupos fechados e livres. Assim, $R(F) = \dot{F}$. Além disto, $R(H_1) = \dot{H}_1$, pois $G_2(H_1)$ é livre. Por outro lado, $\Gamma_1 \neq 2\Gamma_1$ implica que H_1 possui elementos rígidos, conforme a demonstração do Lema 2.12. Como H_1 é não formalmente real, a Proposição 2.11 implica que $R(H_1) = \dot{H}_1^2$ ou $-1 \in \dot{H}_1^2$ e $\dot{H}_1 = \dot{H}_1^2 \cup a\dot{H}_1^2$, para algum elemento rígido $a \in \dot{H}_1$.

Portanto, ou H_1 é quadraticamente fechado, ou $H_1(\sqrt{a})$ é quadraticamente fechado. Pelo mesmo motivo foi excluído o caso $G_2(H_1) = \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ele corresponde à $(\Gamma_1 : 2\Gamma_1) = 2$ e k_1 um corpo euclidiano. Contudo, se $G_2(F) = G_2(F_1) * G_2(H_1)$, com $F_1, H_1 \subseteq F(2)$, então os mesmos argumentos da construção produzem um anel de valorização R -compatível de F .

Mostraremos na seqüência que as poucas restrições que fizemos sobre $G_2(H_1)$ podem ser substituídas por alguns refinamentos sobre a escolha do grupo de valores Γ_1 , ou do corpo residual $k_1 = A_1/\mathcal{M}_1$. Desta forma, podemos garantir a inclusão $R(F) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, concluindo assim que o Radical de Kaplansky de F fica descrito como o localizador de A , isto é, $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$.

Observação 1 Suponha que na construção admitimos que $(\Gamma_1 : 2\Gamma_1) > 2$. Como $G_2(H_1) \cong \mathbb{Z}_2^{\dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_1/2\Gamma_1} \rtimes G_2(k_1)$, os casos $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ficam automaticamente excluídos. Seguindo com a construção, teremos $\mathcal{U} \cong \mathbb{Z}_2^\lambda$, com $\lambda \geq 2$ e novamente temos o anel de valorização 2-henseliano B de H , com $\text{car}(k_B) \neq 2$ e $\Gamma_B \neq 2\Gamma_B$. Do Teorema 4.6 de ([EN]), o anel de valorização B pode ser escolhido o anel de valorização de H tal que o grupo de inércia $G^t(\tilde{B}, H)$, (onde $\tilde{B}$ é a única extensão de B à $F(2)$) contém qualquer outro subgrupo abeliano e normal de $G_2(H)$. Conseqüentemente, como $\mathcal{U} \subseteq G^t(\tilde{B}, H) \cong \mathbb{Z}_2^\alpha$ ($\alpha = \dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_B/2\Gamma_B$), segue que $(\Gamma_B : 2\Gamma_B) > 2$. Esta propriedade se transfere para A , pois $\Gamma_A \subseteq \Gamma_B$ e sabemos que $\dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_B/2\Gamma_B \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_A/2\Gamma_A$. Assim, $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) > 2$ e aplicamos o Lema 2.13 para garantir que $R(F) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$.

Observação 2 Agora vamos assumir que $(\Gamma_1 : 2\Gamma_1) = 2$. Como sabemos, isto implica que $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) \geq 2$. O caso > 2 implica diretamente que $R(F) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Suponha que $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) = 2$. Sabemos que $\mathcal{U} \cong G^t(\tilde{A}_1, H_1) \cong \mathbb{Z}_2$ e $G_2(H_1) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes G_2(k_1)$. Se não ocorrer a inclusão $R(F) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, o Lema 2.13 implica que k_1 é quadraticamente fechado. Conseqüentemente, $G_2(H_1) \cong \mathbb{Z}_2$. Conforme já observamos, isto implica que $R(F) = \dot{F}$. Portanto, no caso $(\Gamma_1 : 2\Gamma_1) = 2$, basta que tenhamos $k_1 \neq k_1(2)$ para que $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Também é necessário supor que k_1 não é euclidiano, para que o caso $G_2(H_1) \cong \mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ seja evitado.

O método e observações serão sintetizados no próximo teorema. Adicionalmente, observamos que os corpos F_1 e H_1 também determinam os grupos $\dot{F}/R(F)$ e $R(F)/\dot{F}^2$. Cabe ressaltar que não assumimos F_1 ou H_1 contido em $F(2)$.

Teorema 3.6 *Seja F_1 um corpo com $G_2(F_1)$ livre e (H_1, v_1) um corpo valorizado, 2-henseliano, com corpo residual k_1 de característica diferente de 2 e o grupo de valores $\Gamma_1 \neq 2\Gamma_1$. Seja F um corpo tal que $G_2(F) \cong G_2(F_1) * G_2(H_1)$. Existe um anel de valorização A de F , que é $R(F)$ -compatível, $\text{car}(k_A) \neq 2$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$. No caso $(\Gamma_1 : 2\Gamma_1) = 2$, suponha que $k_1 \neq k_1(2)$ e que k_1 não é euclidiano. Então:*

$$(1) \quad R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2,$$

$$(2) \quad \dot{F}/R(F) \cong \dot{H}_1/\dot{H}_1^2,$$

$$(3) \quad R(F)/\dot{F}^2 \cong \dot{F}_1/\dot{F}_1^2.$$

Demonstração Usaremos a notação utilizada na construção que expomos. Segundo tal construção, podemos obter o corpo valorizado (H, v_B) e o corpo F_0 , contidos em $F(2)$, e definimos $A = B \cap F$. Com isso, temos $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$. Consideradas as observações anteriores a este teorema, temos demonstrado até o item (1). Para a prova dos itens (2) e (3), lembramos que $G_2(H) \cong G_2(H_1)$. Evidentemente, $H^1(G_2(H), \mu) \cong H^1(G_2(H_1), \mu)$, onde $\mu = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Segue que $\dot{H}_1/\dot{H}_1^2 \cong \dot{H}/\dot{H}^2$ (veja [Ne], p.293, para a demonstração). O mesmo vale para F_1 e F_0 . Portanto, basta mostarmos que $\dot{F}/R(F) \cong \dot{H}/\dot{H}^2$ e $R(F)/\dot{F}^2 \cong \dot{F}_0/\dot{F}_0^2$.

Afirmção: $R(F) = \dot{H}^2 \cap \dot{F}$.

Demonstração: Como B é 2-henseliano, temos $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subseteq (1 + \mathcal{M}_B)\dot{H}^2 \subseteq \dot{H}^2$. Portanto, $R(F) \subseteq \dot{H}^2 \cap \dot{F}$. Para a inclusão contrária, seja $a \in \dot{H}^2 \cap \dot{F}$. Para qualquer $b \in \dot{F}$, a álgebra de quatérnios (H, a, b) não é de divisão, pois $a \in \dot{H}^2$. Como $R(F_0) = \dot{F}_0$, temos ${}_2\text{Br}(F_0) = \{0\}$. Portanto, (F_0, a, b) também não é de divisão. Da injetividade de res (item (2) do Teorema 3.5), $(F, a, b) = 0$, para todo $b \in F^\times$. Portanto, do Lema 2.2, temos que $a \in R(F)$. Segue a inclusão $\dot{H}^2 \cap \dot{F} \subseteq R(F)$, concluindo a demonstração da afirmação.

Definimos $E = E(F) = \dot{F}_0^2 \cap \dot{F}$. Devido a (1) do Teorema 3.5, temos $ER = \dot{F}$ e $E \cap R = \dot{F}^2$, onde $R = R(F) = \dot{H}^2 \cap \dot{F}$. Particularmente, o item (1) do Teorema 3.5 implica que a aplicação natural $\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{F}_0/\dot{F}_0^2$ é sobrejetiva. Portanto, $\dot{F}_0/\dot{F}_0^2$. Assim, $\dot{F}_0/\dot{F}_0^2 \cong \dot{F}/(\dot{F}_0^2 \cap \dot{F}) = ER/E$. Por outro lado, ER/E é isomorfo à $R/(R \cap E) = R/\dot{F}^2$. Portanto, $\dot{F}_0/\dot{F}_0^2 \cong R(F)/\dot{F}^2$, concluindo a demonstração de (3). Novamente o item (1) do Teorema 3.5 implica que aplicação natural $\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{H}/\dot{H}^2$ é sobrejetora. Segue que $\dot{H} = \dot{F}\dot{H}^2$. Com isto, $\dot{H}/\dot{H}^2 \cong \dot{F}/(\dot{H}^2 \cap \dot{F}) = \dot{F}/R(F)$, provando (2). $\square$

Podemos enunciar uma forma mais geral do teorema acima, que é o melhor que conseguimos no sentido de “decodificar” a valorização compatível com o radical a partir do grupo de Galois $G(F(2)/F)$.

Teorema 3.7 *Seja F um corpo. Suponha $G_2(F) \cong \mathcal{F} * \mathcal{H}$, onde $\mathcal{F}$ é um pro-2-grupo livre e $\mathcal{H}$ é um pro-2-grupo, não procíclico e não isomorfo à $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e que contém um subgrupo abeliano normal $\mathcal{U}$. Então existe um anel de valorização A de F , com $\text{car}(k_A) \neq 2$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$, tal que $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$.*

Sem o “fator livre” $\mathcal{F}$, ou seja, se $G_2(F) = \mathcal{H}$ conforme acima, temos do Teorema 3.2 que F admite um anel de valorização 2-henseliano A , com $\text{car}(k_A) \neq 2$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$. Nesta situação recaímos no caso 2-henseliano, onde $(R(H) : \dot{H}^2) \leq 2$. Portanto, o resultado acima generaliza o Teorema 3.2, que essencialmente é o caso particular $R(F) = \dot{F}^2$.

Os itens (2) e (3) do Teorema 3.6 permitem prescrever os índices $(\dot{F} : R(F))$ e $(R(F) : \dot{F}^2)$. Para isto será necessário o lema seguinte, que é usual na teoria de valorizações.

Lema 3.8 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado 2-henseliano e com $\text{car}(k_A) \neq 2$. Então*

$$\dot{F}/\dot{F}^2 \cong \left(\dot{k}_A/\dot{k}_A^2 \right) \oplus \left(\Gamma_A/2\Gamma_A \right)$$

Demonstração Já vimos que para todo corpo valorizado (F, v_A) , temos a seqüência exata de grupos abelianos:

$$\{1\} \hookrightarrow A^\times/(A^\times)^2 \xrightarrow{\bar{i}} \dot{F}/\dot{F}^2 \xrightarrow{\bar{v}_A} \Gamma_A/2\Gamma_A \rightarrow \{1\}$$

onde $\bar{i}$ é induzida pela inclusão $A^\times \hookrightarrow \dot{F}$ e $\bar{v}_A$ é induzida pela valorização $v_A : F^\times \rightarrow \Gamma_A$. Decorre da seqüência o isomorfismo

$$A^\times/(1 + \mathcal{M}_A)(A^\times)^2 \cong \dot{k}_A/\dot{k}_A^2.$$

Supondo que (F, v_A) é 2-henseliano e $\text{car}(k_A) \neq 2$, temos $1 + \mathcal{M}_A \subset \dot{F}^2$. Segue que $A^\times/(A^\times)^2 \cong \dot{k}_A/\dot{k}_A^2$. Finalmente, olhando a seqüência como uma seqüência de $\mathbb{F}_2$ -espaços vetoriais e trocando $A^\times/(A^\times)^2$ por $\dot{k}_A/\dot{k}_A^2$, obtemos o resultado. $\square$

Corolário 3.9 *Dados dois inteiros $i, j > 1$, existe um corpo F_{ij} , que possui um anel de valorização A_{ij} , tal que:*

$$(a) \quad (\dot{F}_{ij} : R(F_{ij})) = 2^i.$$

$$(b) \quad (R(F_{ij}) : \dot{F}_{ij}^2) = 2^j.$$

$$(c) \quad R(F_{ij}) = (1 + \mathcal{M}_{ij})\dot{F}_{ij}^2, \text{ onde } \mathcal{M}_{ij} \text{ é o ideal maximal de } A_{ij}.$$

Além disso, $\Gamma_{ij} \neq 2\Gamma_{ij}$ e $\text{car}(k_{ij}) \neq 2$, onde Γ_{ij} é o grupo de valores de A_{ij} e $k_{ij} = A_{ij}/\mathcal{M}_{ij}$ é o corpo residual.

Demonstração Basta aplicar a construção anterior ao Teorema 3.6 com os corpos F_1 e H_1 adequados:

(1) Seja F_1 como em ([C₁], p.407), ou seja, $G_2(F_1)$ é livre e $|\dot{F}_1/\dot{F}_1^2| = 2^j$.

(2) Seja $H_1 = k((X))^\Gamma$ o corpo das séries formais generalizadas de Laurent, sobre um corpo k com $(\dot{k} : \dot{k}^2) = 2^m$, $m \geq 0$ e com $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Sabemos que que $A_1 = k[[X]]^\Gamma$ é um anel de valorização 2-henseliano de H_1 , cuja valorização associada tem grupo de valores $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ e o corpo residual é k . Ainda, $n = \dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma/2\Gamma$ e $G_2(H_1) \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes G_2(k)$. Do Lema 3.8, temos $\dot{H}_1/\dot{H}_1^2 \cong \dot{k}/\dot{k}^2 \oplus \Gamma/2\Gamma$. Portanto, $(\dot{H}_1 : \dot{H}_1^2) = 2^i$, com $i = m + n$ e $n = \dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma/2\Gamma$.

Aplicando agora a construção (anterior ao Teorema 3.6), obtemos F_{ij} satisfazendo as condições requeridas e os índices $(\dot{F}_{ij} : R(F_{ij})) = 2^i$ e $(R(F_{ij}) : \dot{F}_{ij}^2) = 2^j$ seguem do Teorema 3.6. Observe que como $i \geq 2$, podemos escolher $m, n \geq 1$, excluindo os casos excepcionais. □

3.2 Pro-2-Grupo de Galois Maximal obtido via Radical e Valorizações

Agora faremos o processo inverso ao realizado na última seção. Veremos que se F é um corpo que possui um anel de valorização compatível com $R(F)$, então $G_2(F)$ admite uma decomposição semelhante à que estudamos. A finalidade principal deste resultado é utilizá-lo no capítulo seguinte, quando trataremos das construções que aparecem no trabalho de Berman ([Be]). Mostraremos que os corpos para os quais Berman provou terem radical não trivial, na realidade admitem anel de valorização R -compatível. Pelo resultado desta seção, saberemos que o pro-2-grupo de Galois maximal destes corpos é do tipo que utilizamos na construção resumida no Teorema 3.6. Assim, ficará determinado que nosso método engloba a construção realizada por Berman.

O problema de se obter $G_2(F)$ através das operações de produto livre e produto semi-direto de certos “grupos elementares” é conhecido como Conjectura de Tipo Elementar. Uma versão modificada deste problema foi abordada em ([E₂]), que trata um caso mais geral do qual é possível deduzir que sob a hipótese $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$, vale a decomposição de $G_2(F)$ como $G_2(F_0) * G_2(F_h)$, com $R(F_0) = \dot{F}_0$ e (F_h, v_h) uma 2-henselização de (F, v_A) . Este é o caso que nos interessa. A dificuldade na demonstração deste resultado é verificar a injetividade da restrição $\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F_0) \times {}_2\text{Br}(F_h)$, conforme o Teorema 3.5. Como $G_2(F_0)$ é livre, temos ${}_2\text{Br}(F_0) = \{0\}$. Agora, o resultado principal do capítulo 1 (Teorema 1.21) afirma justamente que o núcleo de $\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F_h)$ é gerado por $\{(F, a, b) \mid a \in F^\times, b \in 1 + \mathcal{M}_A\}$. Assim, sob a compatibilidade $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$, temos a injetividade de res . Portanto, o Teorema 1.21 permite obtermos uma nova demonstração para o resultado de ([E₂]), conforme vamos expor de maneira completa no Teorema 3.18.

O início desta seção é dedicado à investigação de uma condição aritmética que um corpo F deve satisfazer para admitir um anel de valorização compatível com $R(F)$. Se o anel de valorização A é $R(F)$ -compatível, então todo elemento $a \in F^\times$, que não está em $A^\times R(F)$, satisfaz a condição: $D_F\langle 1, a \rangle = R(F) \cup aR(F)$ (conforme o Lema 3.11). Neste caso, dizemos que a é rígido em relação ao Radical de Kaplansky, ou simplesmente, R -rígido. Veremos que a existência de apenas um

elemento $a \in F^\times \setminus R(F)$, tal que a e $-a$ sejam R -rígidos, é uma condição suficiente para que se construa um anel de valorização R -compatível. Este tipo de construção já foi utilizada com sucesso com outros subgrupos de $\dot{F}$ no lugar de $R(F)$. No trabalho ([AEJ]), os autores estudaram de forma mais geral os elementos T -rígidos, conforme a próxima definição. Contudo, para que possamos utilizar esta construção, bem como garantir que o anel de valorização obtido é não trivial, é indispensável garantir que o conjunto dos elementos $a \in F^\times$, tais que a ou $-a$ não é R -rígido, forma um subgrupo de $\dot{F}$, o que está longe de ser trivial. Este é o conteúdo da Proposição 3.13.

Definição 3.10 *Seja T um subgrupo de $\dot{F}$ e $T + aT = \{t_1 + at_2 \neq 0 \mid t_1, t_2 \in T \cup \{0\}\}$. Um elemento $a \in F^\times \setminus \pm T$ para o qual $T + aT = T \cup aT$ é denominado T -rígido. Se a e $-a$ tiverem esta propriedade, então a é chamado T -birígido.*

Dado um corpo valorizado (F, v_A) e T um subgrupo de $\dot{F}$, lembramos que A é chamado de T -compatível se $1 + \mathcal{M}_A \subset T$. Conforme o lema abaixo, a existência de um anel de valorização T -compatível implica quase que automaticamente na existência de elementos T -rígidos.

Lema 3.11 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado e T um subgrupo de $\dot{F}$. Suponha que A é T -compatível. Então todo elemento $a \in F^\times \setminus TA^\times$ é T -rígido.*

Demonstração Sejam $x, y \in T$. Não pode ocorrer $v_A(x) = v_A(ay)$, pois $a \notin TA^\times$. Assim, $v_A(x + ay) = \min\{v_A(x), v_A(ay)\}$. Se $\min\{v_A(x), v_A(ay)\} = v_A(x)$, então $v_A(ay) > v_A(x)$ implica $ayx^{-1} \in \mathcal{M}_A$. Logo, $x + ay = x(1 + ayx^{-1}) \in T$. Por outro lado, se $\min\{v_A(x), v_A(ay)\} = v_A(ay)$, então $xa^{-1}y^{-1} \in \mathcal{M}_A$ e $x + ay = ay(1 + xa^{-1}y^{-1}) \in aT$. Portanto, a é T -rígido. $\square$

Em particular, se (F, v_A) é 2-henseliano (e $\text{car}(k_A) \neq 2$), então $v(a) \notin 2\Gamma_A$ implica que a é $\dot{F}^2$ -rígido, conforme vimos no Lema 2.12. Um elemento $\dot{F}^2$ -(bi)rígido é simplesmente denominado (bi)rígido. A notação que utilizávamos para $\dot{F}^2 + a\dot{F}^2$ era $D_F\langle 1, a \rangle = D\langle 1, a \rangle$. Para o grupo T , denotaremos $T + aT$ por $D_T\langle 1, a \rangle$. Não é para todo T que $D_T\langle 1, a \rangle$ é um subgrupo de $\dot{F}$. Veremos a frente que esta propriedade é crucial para a construção da valorização T -compatível. Felizmente, para o caso $T = R = R(F)$, em que estamos particularmente interessados, $R + aR = D_R\langle 1, a \rangle$ é sempre um subgrupo de $\dot{F}$. De fato,

Lema 3.12 *Para todo $a \in F^\times$, $D_F\langle 1, a \rangle = D_R\langle 1, a \rangle$.*

Demonstração Como $\dot{F}^2 \subseteq R$, a inclusão $D\langle 1, a \rangle \subseteq D_R\langle 1, a \rangle$ é trivial. Por outro lado, sejam $x, y \in R$. Como R é grupo, escrevendo $x + ay = x(1 + ayx^{-1})$, basta provar que $1 + ar \in D\langle 1, a \rangle$, para todo $r \in R$. Pelo item (d) do Lema 1.7, temos $D\langle 1, ar \rangle \cap D\langle 1, a \rangle = D\langle 1, ar \rangle \cap D\langle 1, -r \rangle = D\langle 1, ar \rangle \cap \dot{F}$, pois $r \in R$. Isto diz que $D\langle 1, ar \rangle \subseteq D\langle 1, a \rangle$. Em particular, $1 + ar \in D\langle 1, a \rangle$. $\square$

Seja $B(R) = \{a \in F^\times : a \text{ não é } R\text{-birígido}\}$. Por definição, $\pm R \subseteq B(R)$. Como já dissemos, precisamos da proposição seguinte para a construção de valorizações R -compatíveis. A seguinte demonstração segue ([W₁], Proposição 2.4).

Proposição 3.13 *Mantida a notação acima, $B(R)$ é um subgrupo de $\dot{F}$.*

Demonstração Como $xR = xx^{-2}R = x^{-1}R$, temos que x é R -rígido $\Leftrightarrow x^{-1}$ é R -rígido. Assim, $x \in B(R) \Leftrightarrow x^{-1} \in B(R)$. Para demonstrar que $B(R)$ é fechado para o produto, provaremos que

Se $a, b \in F^\times$ e ab é R -birígido, então a ou b é R -birígido.

Por hipótese, $D_R\langle 1, ab \rangle = R \cup abR$, $D_R\langle 1, -ab \rangle = R \cup -abR$ e $ab \notin \pm R$. Ainda mais, pelo Lema 3.12, é claro que para todo $r \in R$, $(\pm r)ab$ é R -birígido. Assim, se $a \in \pm R$ ou $b \in \pm R$, então $a(ab)$ ou $b(ab)$ é birígido, ou seja, a ou b é birígido e neste caso está resolvido. Assumiremos então que $a, b \notin \pm R$. Por contradição, vamos supor que a e b não sejam R -birígidos. Portanto sempre temos um par que não é R -rígido, ou seja, dos quatro pares $\{(a, b), (-a, b), (a, -b), (-a, -b)\}$, um deles é composto por dois elementos não R -rígidos. Podemos supor, sem perda de generalidade, que a e b não são R -rígidos. Quando convier, denotaremos por $R + yR$ o conjunto $D_R\langle 1, y \rangle$. Temos

$$\begin{aligned} D_R\langle 1, a \rangle \cdot D_R\langle 1, b \rangle &= (R + bR)(R + aR) = \{r_1 + br_2 + ar_3 + abr_4 \neq 0 : r_i \in R \cup \{0\}\} \\ &= \{(r_1 + abr_4) + a(r_3 + ab(a^{-2}r_2)) \neq 0 : r_i \in R \cup \{0\}\} \\ &= (R + abR) + a(R + abR) = (R \cup abR) + a(R \cup abR) \\ &= D_R\langle 1, a \rangle \cdot (R \cup bR) \cup D_R\langle 1, b \rangle \cdot (R \cup aR) \end{aligned}$$

Dos cálculos acima, o grupo $D_R\langle 1, a \rangle \cdot D_R\langle 1, b \rangle$ foi obtido como união de dois subgrupos próprios (a e b não-rígidos.) Portanto, tem que ocorrer uma das inclusões:

$$D_R\langle 1, a \rangle(R \cup bR) \subseteq D_R\langle 1, b \rangle(R \cup aR) \quad \text{ou} \quad D_R\langle 1, b \rangle(R \cup aR) \subseteq D_R\langle 1, a \rangle(R \cup bR).$$

Podemos supor que ocorre a primeira. Assim,

$$D_R\langle 1, a \rangle = D_R\langle 1, a \rangle \cap (D_R\langle 1, b \rangle \cup aD_R\langle 1, b \rangle)$$

$$\begin{aligned}
 &= (D_R\langle 1, a \rangle \cap D_R\langle 1, b \rangle) \cup (D_R\langle 1, a \rangle \cap aD_R\langle 1, b \rangle) \\
 &= (D_R\langle 1, a \rangle \cap D_R\langle 1, b \rangle) \cup a(D_R\langle 1, a \rangle \cap D_R\langle 1, b \rangle) \\
 &= (D_R\langle 1, a \rangle \cap D_R\langle 1, -ab \rangle) \cup a(D_R\langle 1, a \rangle \cap D_R\langle 1, -ab \rangle) \\
 &= (D_R\langle 1, a \rangle \cap (R \cup -abR)) \cup a(D_R\langle 1, a \rangle \cap (R \cup -abR)) \\
 &= (R \cup (D_R\langle 1, a \rangle \cap -abR)) \cup (aR \cup a(D_R\langle 1, a \rangle \cap -abR))
 \end{aligned}$$

Para concluir, basta verificar que $D_R\langle 1, a \rangle \cap -abR = \emptyset$, pois nesse caso concluímos que a é R -rígido, o que é uma contradição. Suponha $r, r_1, r_2 \in R$ com $-abr = r_1 + ar_2 \in R + aR$. Então $-a(r_2) = r_1 + abr \in R + abR = R \cup abR$, contradizendo a hipótese $a, b \notin -R$. $\square$

Cabe observar que na demonstração acima só utilizou-se as definições, o fato que $\dot{F}^2 \subseteq R$ e que $D_R\langle 1, y \rangle$ é subgrupo de $\dot{F}$. Portanto, o mesmo vale para um subgrupo T de $\dot{F}$ com estas propriedades. As vezes tal subgrupo é denominado *nórmico*, em alusão à “imagem da norma” $D_T\langle 1, y \rangle$.

Todo o trabalho em mostrar que $B(R)$ é grupo é justificável, pois apoiados neste fato podemos utilizar o Teorema 2.16 de ([AEJ]), que garante a existência do anel de valorização que desejamos. Antes, precisamos tratar de um caso em separado.

Definição 3.14 Dizemos que o corpo F é **excepcional** se $B(R) = \pm R$ e ocorre uma das possibilidades: $-1 \in R$ ou $R + R \subseteq R$.

Podemos dividir o caso excepcional em dois subcasos:

- (1) *Subcaso não real*: $-1 \in R$ e $B(R) = R$. Como $-1 \in R$, temos $D_F\langle 1, 1 \rangle = \dot{F}$. Logo, F é não formalmente real, isto é, -1 é uma soma de quadrados de F .
- (2) *Subcaso quase-pitagórico*: $B(R) = \pm R$ e $R + R \subseteq R$. Sendo o radical aditivamente fechado, temos $R(F) = D_F\langle 1, 1 \rangle$, pelo Lema 2.4. Trata-se portanto de um corpo formalmente real e quase pitagórico.

Teorema 3.15 Seja F corpo e $R = R(F) \neq \dot{F}$. A menos que $B(R) = \dot{F}$ ou que F seja quase-pitagórico, com $(\dot{F} : R(F)) \leq 4$ e com ordens arquimedianas, existe um anel de valorização não trivial A do corpo F , com $\text{car}(k_A) \neq 2$, que é compatível com R .

Demonstração A demonstração é dividida em três partes. A primeira é o subcaso (excepcional) não real, depois o subcaso (excepcional) quase-pitagórico. Por último, veremos o caso não excepcinal.

Subcaso não real. Escolhendo $T = R$ no Corolário 2.17 de ([AEJ]), existe um anel de valorização A do corpo F , que é R -compatível, e $\langle B(R) \rangle = \text{subgrupo de } \dot{F} \text{ gerado por } B(R)$, é um subgrupo de ordem ≤ 2 de $RA^\times$. Como no subcaso não real temos $B(R) = R$, segue que $(RA^\times : R) \leq 2$. Vejamos que não pode ocorrer $A = F$. De fato, nesse caso teríamos $(\dot{F} : R) = 2$. Segue do Teorema 2.6 que F é pré-hilbertiano formalmente real, contradição. Em particular temos que o subcaso não real não pode ocorrer se $(\dot{F} : R) = 2$. Com isto, aplicando o Lema 4.4 de ([AEJ]) para $T = R$, temos que $\text{car}(k_A) \neq 2$.

Subcaso quase-pitagórico. Precisamos da observação seguinte.

Observação: *O subconjunto $T \subsetneq F$ é chamado de uma **pré-ordem** de F se $\dot{F}^2 \subseteq T$, $TT \subseteq T$ e $T + T \subseteq T$. Por exemplo, $T = \sum \dot{F}^2$ é sempre uma pré-ordem de F , denominada de **pré-ordem fraca**. Dada a pré-ordem T de F , se todo $a \in F^\times \setminus \pm T$ é T -birígido, então T é chamada de um **fan**.*

Voltemos à demonstração. Se F é quase-pitagórico, temos do Lema 2.4 que $R(F) = D_F \langle 1, 1 \rangle = \sum \dot{F}^2$. Portanto, como estamos no caso excepcional, $R(F)$ é um fan. Pelo Teorema da Trivialização do Fan ([L₂], Teorema 5.13, p.44), existe um anel de valorização A de F , com $\text{car}(k_A) \neq 2$, que é compatível com $R(F)$. Ainda mais, a imagem $\bar{R}$ de $R \cap A^\times$ pela projeção canônica $\pi_A : A \twoheadrightarrow A/\mathcal{M}_A$ produz um fan em k_A , com a propriedade que $(k_A^\times : \bar{R}) \leq 4$ ⁽²⁾. Portanto, sendo A trivial, teremos $(\dot{F} : R) \leq 4$. Neste caso, se uma ordem de F for arquimediana, F não possuirá um anel de valorização R -compatível não trivial.

Caso não excepcional. Da Proposição 3.13, $B(R)$ é um subgrupo de $\dot{F}$. Assim, podemos escolher $H = B(R)$ e $T = R$ no Teorema 2.16 de ([AEJ]). Este teorema garante que o conjunto $A = O_1 \cup O_2$, onde $O_1 = \{x \in F \mid x \notin B(R) \text{ e } 1 + x \in R\}$ e $O_2 = \{x \in F^\times : x \in B(R) \text{ e } xO_1 \subseteq O_1\}$, é um anel de valorização R -compatível de F . Ainda mais, $A^\times R \subseteq B(R)$. Assumindo $B(R) \neq \dot{F}$, podemos garantir que A é não trivial, conforme o próximo lema. Finalmente, fazendo $T = R$ no Lema 4.4 de ([AEJ]), temos $\text{car}(k_A) \neq 2$. □

²Um fan de ordem ≤ 4 no grupo multiplicativo é denominado um *fan trivial*.

Lema 3.16 *Se F é não excepcional e A é o anel de valorização $R(F)$ -compatível obtido no Teorema 3.15, então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $A = F$.
- (b) $\Gamma_A = 2\Gamma_A$.
- (c) $B(R) = \dot{F}$.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b) é imediato.

(b) $\Rightarrow$ (c) A hipótese $\Gamma_A = 2\Gamma_A$ implica $\dot{F} = A^\times \dot{F}^2$. Logo, $\dot{F} \subseteq RA^\times \subseteq B(R)$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Por construção, $A = O_1 \cup O_2$, onde $O_1 = \{x \in F \mid x \notin B(R) \text{ e } 1+x \in R\}$ e $O_2 = \{x \in F^\times : x \in B(R) \text{ e } xO_1 \subseteq O_1\}$. Assumindo $B(R) = \dot{F}$, temos $O_1 = \{0\}$ e $O_2 = \dot{F}$. Portanto, $A = F$. □

Encerramos aqui a discussão sobre os elementos rígidos. O Teorema 3.15 só será utilizado diretamente no capítulo 5. Contudo, este resultado serve de suporte para assumir a existência de valorizações R -compatíveis. Passaremos agora à demonstração da decomposição do pro-2-grupo de Galois maximal de um corpo que admite um anel de valorização R -compatível. Iniciamos com um resultado preliminar.

Proposição 3.17 *Seja F um corpo, M um subgrupo de $R(F)$ e K um corpo intermediário $F \subseteq K \subseteq F(2)$.*

- (a) $R(F) \subseteq R(K)$.
- (b) Se $\dot{K} = M\dot{K}^2$, então $R(K) = \dot{K}$.
- (c) Existe uma extensão E do corpo F , com $F \subseteq E \subseteq F(2)$, tal que a inclusão induz um isomorfismo $M/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{E}/\dot{E}^2$. Conseqüentemente, $\dot{E} = M\dot{E}^2$ e $R(E) = \dot{E}$.

Demonstração (a) O caso $K = F(\sqrt{a})$, para algum $a \in F^\times \setminus \dot{F}^2$, foi demonstrado em ([C₂], Proposição 3, Corolário). A seguir vamos tratar do caso $[K : F]$ finito. Como $G_2(F)$ é um pro-2 grupo, temos uma cadeia de subcorpos intermediários $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_t = K$, tais que $[F_i : F_{i-1}] = 2$. Pelo caso anterior, $R(F_{i-1}) \subseteq R(F_i)$, para todo $1 \leq i \leq t$. Logo $R(F) \subseteq R(K)$. Finalmente, para o caso geral tomamos $x \in \dot{K}$ e uma sub-extensão finita $F \subseteq K' \subseteq K$ tal que $x \in K'$.

Dado $r \in R(F)$, pelo caso do grau finito temos $r \in R(K')$. Assim, $x \in D_{K'}\langle 1, -r \rangle \subseteq D_K\langle 1, -r \rangle$. Portanto $\dot{K} \subseteq D_K\langle 1, -r \rangle$ para cada $r \in R(F)$. Logo $R(F) \subseteq R(K)$, concluindo a demonstração.

(b) É imediato, pois temos $M \subseteq R(F) \subseteq R(K)$, pelo item anterior.

(c) Pelo Lema de Zorn, a família de corpos intermediários $L: F \subseteq L \subseteq F(2)$, tais que a inclusão $\dot{F} \hookrightarrow \dot{L}$ induz uma aplicação injetiva $M/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{L}/\dot{L}^2$, tem um elemento maximal E . Vamos verificar que a maximalidade de E implica na sobrejetividade de $M/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{E}/\dot{E}^2$. Por contradição, suponha que $x \in \dot{E} \setminus M\dot{E}^2$ e seja $K = E(\sqrt{x})$. Seja $y \in \dot{K}^2 \cap M$. Temos que $\dot{K}^2 \cap M \subseteq \dot{K}^2 \cap \dot{E} = \dot{E}^2 \cup x\dot{E}^2$. Não ocorre $y \in x\dot{E}^2$, pois $x \notin M\dot{E}^2$. Assim, $y \in \dot{E}^2 \cap M = \dot{F}^2$, pois $M/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{E}/\dot{E}^2$ é injetiva. Logo, $\dot{K}^2 \cap M = \dot{F}^2$. Portanto, $M/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{K}/\dot{K}^2$ é injetiva, contradizendo a maximalidade de E . $\square$

Teorema 3.18 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, $\text{car}(k_A) \neq 2$ e (F_h, v_h) uma 2-henselização de (F, v_A) . Suponha $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$. Então existe um corpo F_0 , com $F \subseteq F_0 \subseteq F(2)$, tal que $G_2(F_0)$ é livre e $G_2(F) \cong G_2(F_0) * G_2(F_h)$.*

Demonstração Da Proposição 3.17 obtemos a extensão F_0 com $R(F_0) = \dot{F}_0$. Para usar o Teorema 3.5, temos que demonstrar que:

- (a) A aplicação natural $\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{F}_0/\dot{F}_0^2 \times \dot{F}_h/\dot{F}_h^2$, $x\dot{F}^2 \mapsto (x\dot{F}_0^2, x\dot{F}_h^2)$, é um isomorfismo.
- (b) A restrição $\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F_0) \times {}_2\text{Br}(F_h)$, $(F, a, b) \mapsto ((F_0, a, b), (F_h, a, b))$, é injetiva.

Sabemos que $R(F_0) = \dot{F}_0$ implica ${}_2\text{Br}(F_0) = \{0\}$. Do Teorema 1.21, temos que o núcleo da restrição $\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(F_h)$ é gerado por $\{(F, a, b) \mid a \in F^\times, b \in 1 + \mathcal{M}_A\}$. Como $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$, temos a injetividade desejada em (b). Provemos (a). Escolhendo $M = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ no item (c) da Proposição 3.17, o corpo intermediário F_0 pode ser escolhido de forma que $\dot{F}_0/\dot{F}_0^2 \cong (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2/\dot{F}^2$, que é justamente o núcleo da aplicação $\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{F}_h/\dot{F}_h^2$, induzida pela inclusão (item (b) do Lema 1.18). Assim, $x \in \dot{F}_0^2 \cap \dot{F}_h^2 \cap \dot{F} \Leftrightarrow x \in \dot{F}^2 \cap \dot{F}_h^2 \cap \dot{F} \subseteq \dot{F}^2 \cap (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 = \dot{F}^2$, e segue a injetividade. Provemos agora a sobrejetividade. Sejam $a \in F_0$ e $b \in \dot{F}_h$. A aplicação $\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{F}_h/\dot{F}_h^2$, induzida pela inclusão é sobrejetora pois $\dot{F}_h = \dot{F}\dot{F}_h^2$ (item (a) do Lema 1.18). Assim, existe $x \in \dot{F}$ tal que $x\dot{F}_h^2 = b\dot{F}_h^2$. Do isomorfismo $\dot{F}_0/\dot{F}_0^2 \cong (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2/\dot{F}^2$, existe $y \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ tal que $y\dot{F}_0^2 = x^{-1}a\dot{F}_0^2$. Com isto,

3.2 Pro-2-Grupo de Galois Maximal obtido via Radical e Valorizações 57

para $w = xy \in \dot{F}$, temos $w\dot{F}_0^2 = a\dot{F}_0^2$ e $w\dot{F}_h = x\dot{F}_h$, pois $y \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subseteq \dot{F}_h^2$. Isto conclui a prova da sobrejetividade. Portanto temos o isomorfismo desejado (a), concluindo assim a prova do teorema. $\square$

Corolário 3.19 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado. Suponha que A é compatível com $R(F)$. Se $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) = 2$ e $k_A = k_A(2)$, então $R(F) = \dot{F}$.*

Demonstração Seja (F, v_h) uma 2-henselização de (F, v_A) . Pelo Teorema 3.18, existe $F_0 \subseteq F(2)$ tal que $G_2(F_0)$ é um pro-2-grupo livre e $G_2(F) \cong G_2(F_0) * G_2(F_h)$. Pela caracterização galoisiana de corpos 2-henselianos (Proposição 3.1), $G_2(F_h) \cong \mathbb{Z}_2^{\dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_A / 2\Gamma_A} \rtimes G_2(k_A)$. Segue das hipóteses que $G_2(F_h) \cong \mathbb{Z}_2$. Assim, $G_2(F) \cong G_2(F_0) * \mathbb{Z}_2$ que é um pro-2-grupo livre, pois $G_2(F_0)$ e $\mathbb{Z}_2$ o são. Segue que $R(F) = \dot{F}$. $\square$

Corolário 3.20 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado com $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$. Se $R(F) \neq \dot{F}$, então $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$.*

Demonstração Segue do Lema 2.13 e do corolário anterior. $\square$

Juntando os Teoremas 3.15 e 3.18, temos a conclusão final deste capítulo:

Teorema 3.21 *Seja F um corpo e suponha $R(F) \neq \dot{F}$. Se existe um elemento R -birígido $a \in F^\times$, então $G_2(F)$ decompõe-se como o produto livre $G_2(F_0) * G_2(F_h)$, onde $G_2(F_0)$ é um pro-2-grupo livre e F_h é um corpo que admite um anel de valorização 2-henseliano.*

CAPÍTULO 4

As Construções Existentes

Neste capítulo estudamos as construções de corpos com radical não trivial existentes na literatura. Essencialmente, existem duas construções diferentes. A primeira foi apresentada por Berman em ([Be]). A segunda construção utiliza a teoria de esquemas de formas quadráticas e foi apresentada por Kula em ([Ku₁]).

A primeira seção deste capítulo é dedicada ao estudo do radical do corpo $K = F(\sqrt{-1})$, onde F é um corpo pitagórico. Berman ([Be]) descreveu $R(K)$ através do espaço das ordens de F , denotado por $X(F)$. Neste caso, o radical pode “variar” desde $\dot{K}^2$, no caso em que F é superpitagórico (veja Definição 4.3), até $\dot{K}$ no caso em que F é um corpo SAP pitagórico (Definição 4.5). Estes nomes se referem a $|X(F)|$ ser máximo ou mínimo possível, como explicaremos a frente. Demonstramos que os dois principais resultados de Berman se enquadram numa das construções que expomos, ou seja, o Radical de Kaplansky é descrito a partir de um anel de valorização R -compatível. Este anel é obtido

- (A) a partir do pro-2-grupo de Galois maximal (primeira seção do capítulo 3) ou,
- (B) diretamente, por meio de propriedades de F , como a existência de um elemento R -birígido (conforme a segunda seção do capítulo 3).

No primeiro teorema ([Be], Teorema 2.3), Berman escolhe um corpo F com $|X(F)| = n + 1$ e $|\dot{F}/\dot{F}^2| = 2^n$. Depois, prova que o corpo $K = F(\sqrt{-1})$ é pré-

hilbertiano com $|\dot{K}/R(K)| = 4$. No Teorema 4.11 demonstramos que K admite um anel de valorização R -compatível e que $R(K)$ pode ser descrito através do localizador deste anel de valorização. Este resultado se enquadra na abordagem (B). Num segundo resultado ([Be], Teorema 3.12), é obtido um corpo $K = F(\sqrt{-1})$, com F uma interseção de dois corpos pitagóricos, sendo um deles superpitagórico e o outro SAP pitagórico. Verificamos que $G_2(K)$ admite uma decomposição como um produto livre do tipo que já estudamos. Isto vai permitir que o segundo resultado de Berman possa ser visto na abordagem (A). Na segunda seção verificaremos que os principais exemplos que Kula ([Ku₁]) obteve pelo método de esquemas de formas quadráticas podem ser vistos na abordagem (A).

Dedicamos a terceira seção a investigação de corpos que não admitem um “bom” anel de valorização para estudar o radical. Exibimos exemplos onde o radical está sempre contido propriamente no localizador de qualquer anel de valorização do corpo. Este é um caso em que não podemos aplicar os teoremas que demonstramos.

4.1 Extensões Não Reais de Corpos Pitagóricos

Seja F um corpo pitagórico, formalmente real, com $|\dot{F}/\dot{F}^2| < \infty$, e seja $X(F)$ o conjunto de todas as ordens de F . Para cada ordem $P_i \in X(F)$ está naturalmente associada uma única aplicação $\chi_i : \dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \{\pm 1\}$, com

$$\chi_i(a) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \in P \\ -1, & \text{se } a \in -P. \end{cases}$$

Assim, cada ordem de F é identificada com um elemento do espaço vetorial dual

$$\left(\dot{F}/\dot{F}^2\right)^* = \text{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\dot{F}/\dot{F}^2, \{\pm 1\}).$$

Por este motivo, nos permitiremos denotar uma ordem de F tanto por P_i , quanto por χ_i . O conjunto $X(F)$ é também um espaço topológico. Uma subbase para a sua topologia é formada pelos *abertos de Harrison* $H(a)$, com $a \in F$, onde

$$H(a) := \{P \in X(F) \mid a \in P\}.$$

Com esta topologia, $X(F)$ é Hausdorff, compacto e totalmente desconexo (conforme [L₁], Teorema 6.3, p.271).

Os corpos pitagóricos são particularmente bem descritos por suas ordens, conforme segue.

Lema 4.1 *Seja F um corpo formalmente real. São equivalentes:*

- (a) *O corpo F é pitagórico.*
- (b) *Se a e b não representam a mesma classe em $\dot{F}/\dot{F}^2$, então existe uma ordem de F para a qual a e b possuem sinais distintos. Dito de outro modo, existe $P \in X(F)$ tal que $a \in P$ e $b \in -P$ ou $a \in -P$ e $b \in P$.*
- (c) *Se $a \notin -\dot{F}^2$, então a é positivo ($a \in P$) em alguma ordem P de F .*

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b) Por contradição, vamos supor que a e b tem o mesmo sinal em todas as ordens de F . Segue que ab é positivo para qualquer ordem. O Teorema de Artin-Schreier ([L₁], Teorema 1.12, p.236) afirma que $\bigcap_{P \in X(F)} P = \sum F^2$.

Logo, $ab \in \sum \dot{F}^2 = \dot{F}^2$, pois F é pitagórico. Daí, $a\dot{F}^2 = b\dot{F}^2$, contradizendo a hipótese.

(b) $\Rightarrow$ (c) É imediato.

(c) $\Rightarrow$ (a) Seja $0 \neq x \in \sum \dot{F}^2$. Se $x \notin \dot{F}^2$, então (c) implica que existe uma ordem $P \in X(F)$, para a qual $-x \in P$. Por outro lado, o Teorema de Artin-Schreier assegura que $x \in P$. Portanto, $x \in P \cap -P = \{0\}$, contradizendo a escolha de x . $\square$

Lema 4.2 *Seja F um corpo formalmente real e pitagórico. Então, $b \in D_F\langle 1, a \rangle$ se, e somente se, $H(a) \subseteq H(b)$.*

Demonstração A implicação é imediata, pois $D_F\langle 1, a \rangle \subseteq P$, para toda ordem $P \in H(a)$. A recíproca segue do fato que F pitagórico implica $D_F\langle 1, a \rangle = \bigcap_{P \in H(a)} P$ e da equivalência $D_F\langle 1, b \rangle \subseteq D_F\langle 1, a \rangle \Leftrightarrow H(a) \subseteq H(b)$. $\square$

Se $|\dot{F}/\dot{F}^2| = 2^n$, então $n \leq |X(F)| \leq 2^{n-1}$ (veja [L₁], exercícios 15 e 16, p.294). Um corpo pitagórico F com número mínimo (n) ou com número máximo de ordens (2^{n-1}) é muito bem conhecido. Algumas de suas propriedades serão destacadas na sequência.

Corpos superpitagóricos e corpos SAP pitagóricos

Definição 4.3 *Um corpo formalmente real e pitagórico F com $|\dot{F}/\dot{F}^2| = 2^n$ e $|X(F)| = 2^{n-1}$ é chamado de **superpitagórico**.*

A propriedade de ser superpitagórico se traduz na teoria de valorização e na teoria de Galois pelo teorema seguinte.

Teorema 4.4 *Seja F um corpo pitagórico formalmente real. São equivalentes:*

- (i) F é superpitagórico.
- (ii) F admite um anel de valorização 2-henseliano A , com k_A formalmente real e $|X(k_A)| \leq 2$.
- (iii) $G_2(F(\sqrt{-1}))$ é abeliano.

A equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (iii) é um Teorema de Bröcker e Brown, conforme ([J]). Em ([B]), Becker demonstrou (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

Certamente o exemplo mais conhecido de um corpo superpitagórico é $F = \mathbb{R}((t_1)) \dots ((t_n))$, o *corpo das séries formais iteradas* sobre $\mathbb{R}$. A construção deste corpo inicia-se com o corpo de séries formais $F_1 = \mathbb{R}((t_1))$. Depois toma-se $F_2 = F_1((t_2))$ e assim sucessivamente, até obter $F = F_n = F_{n-1}((t_n))$. Na sequência verificamos que F é pitagórico e tem o máximo número possível de ordens.

(a) $|\dot{F}/\dot{F}^2| = 2^{n+1}$ Pelo exemplo seguinte à Proposição 3.1, $F = F_{n-1}((t_n))$ possui um anel de valorização 2-henseliano cujo corpo de resíduos é F_{n-1} e o grupo de valores é $\mathbb{Z}$. Pelo Lema 3.8, $|\dot{F}/\dot{F}^2| = 2|\dot{F}_{n-1}/\dot{F}_{n-1}^2|$. Pelo mesmo argumento, $|\dot{F}_{n-1}/\dot{F}_{n-1}^2| = 2|\dot{F}_{n-2}/\dot{F}_{n-2}^2|$. Seguindo o processo até F_1 , temos o resultado.

(b) F é pitagórico Indutivamente, basta provar que $F_1 = \mathbb{R}((t_1))$ é pitagórico. Seja $t = t_1$ e sejam $f = a_n t^n + \dots$ e $g = b_m t^m + \dots$ em $\mathbb{R}((t))$, onde $a_n, b_m \in \mathbb{R}^\times$. Suponha $n < m$. Então, $f^2 + g^2 = (a_n t^n)^2(1 + \dots) \in \dot{F}^2(1 + \mathcal{M}_A) \subseteq \dot{F}^2$, pois (F_1, v_A) é 2-henseliano, onde $A = \mathbb{R}[[t]]$ e $\mathcal{M}_A$ é o ideal principal gerado por t . Se $n = m$, então $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$, para algum $c_n \in \mathbb{R}^\times$ e $f^2 + g^2 = (c_n t^n)^2(1 + \dots) \in \dot{F}^2$.

(c) $|X(F)| = 2^n$ Seja $f = a_n t^n + \dots \in \mathbb{R}((t))$, com $a_n \in \mathbb{R}^\times$. Definimos $f >$

$0 \Leftrightarrow a_n > 0$ (na ordem usual de $\mathbb{R}$). Esta relação satisfaz as condições exigidas para ser uma ordem de F e estende a ordem de $\mathbb{R}$. Também, é a única ordem possível em $X(F)$ para a qual t é positivo. Para verificar isto, suponha que $\leq_1$ é outra ordem para a qual t é positivo e seja $f = a_n t^n + \dots$, com $f > 0$ (ou seja, $a_n > 0$). Então $f = a_n t^n + \dots = a_n t^n (1 + \dots) >_1 0$, pois $1 + \dots \in \dot{F}_1^2$, que é positivo em qualquer ordem. Como a aplicação $t \mapsto -t$ define um automorfismo de $\mathbb{R}((t))$ (que fixa $\mathbb{R}$), a relação $f > 0 \Leftrightarrow a_n < 0$ define a outra possível ordem de $\mathbb{R}((t))$. Seguindo o processo, cada ordem de $F_1 = \mathbb{R}((t))$ se estende para outras duas ordens em F_2 . Indutivamente, F tem 2^n ordens.

O corpo $F = F_n$ é naturalmente munido de uma valorização. Já vimos que $\mathbb{Z}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}$ é grupo abeliano totalmente ordenado lexicograficamente. Podemos representar uma série formal $0 \neq f \in F$ na seguinte maneira

$$f = f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} a_{(i_1, \dots, i_n)} t_1^{i_1} \dots t_n^{i_n}.$$

Definimos $v : F \rightarrow \mathbb{Z}^n \cup \{\infty\}$, por $v(f) = \min\{(i_1, \dots, i_n) \mid a_{(i_1, \dots, i_n)} \neq 0\}$ e $v(0) = \infty$. Uma demonstração de que o anel de valorização associado à v é 2-henseliano pode ser encontrada em ([Wa₂]). Pelo Teorema 4.4, somente a existência desta valorização já nos permite concluir que F é superpitagórico, pois o corpo residual é $\mathbb{R}$. Em relação ao pro-2-grupo de Galois maximal, a Proposição 3.1 garante que $G_2(F) \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Portanto, $G_2(F(\sqrt{-1})) \cong \mathbb{Z}_2^n$, que é abeliano, o que está de acordo com o Teorema 4.4.

Definição 4.5 *Se F é formalmente real e pitagórico com $|\dot{F}/\dot{F}^2| = 2^n$ e $|X(F)| = n$, então F é chamado de **SAP pitagórico**.*

Neste caso, F tem o menor número de ordens possível. A sigla SAP vem do inglês Strong Approximation Property, o que significa

Propriedade de Aproximação Forte: *Dados dois subconjuntos disjuntos $A, B \subseteq X(F)$, fechados na topologia de Harrison, existe um elemento $a \in F^\times$, que é positivo em todas as ordens em A e negativo em todas as ordens de B , ou seja, $A \subseteq H(a)$ e $B \subseteq H(-a)$.*

Existem muitas outras caracterizações de um corpo deste tipo. Abordaremos este aspecto mais a frente. Aqui precisaremos apenas do fato que o pro-2-grupo

de Galois maximal de um corpo SAP pitagórico é isomorfo ao produto semi-direto $\mathcal{F} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, onde $\mathcal{F}$ é um pro-2-grupo livre (conforme [W₂], Proposição 3.2, junto com a última observação do artigo). Conseqüentemente, se F é SAP pitagórico, então $G_2(F(\sqrt{-1}))$ é um pro-2-grupo livre.

Estudaremos agora os exemplos construídos por Berman em ([Be]).

Teorema 4.6 ([Be], Teoremas 3.9 e 3.12) *Sejam F_1 e F_2 dois corpos pitagóricos, com F_1 superpitagórico, $8 \leq |\dot{F}_1/\dot{F}_1^2|$ e F_2 SAP. Então existe um corpo F , formalmente real e pitagórico, admitindo extensões $K_1, K_2 \subset F(2)$, tais que:*

- (1) K_i é pitagórico, $\dot{K}_i/\dot{K}_i^2 \cong \dot{F}_i/\dot{F}_i^2$ e os espaços $X(F_i)$ e $X(K_i)$ são homeomorfos, para $i = 1, 2$.
- (2) $F = K_1 \cap K_2$ e as inclusões $F \hookrightarrow K_i$ induzem um isomorfismo $\dot{F}/\dot{F}^2 \cong \dot{K}_1/\dot{K}_1^2 \times \dot{K}_2/\dot{K}_2^2$ (e portanto, $\dot{F}/\dot{F}^2 \cong \dot{F}_1/\dot{F}_1^2 \times \dot{F}_2/\dot{F}_2^2$).
- (3) As inclusões também induzem um homeomorfismo de $X(F)$ na união disjunta $X(K_1) \cup X(K_2)$, isto é, cada ordem P de F é dada pela contração de uma única ordem $Q \in X(K_i)$. Assim, $P = Q \cap F$, para um único $i \in \{1, 2\}$.
- (4) $W(F_i) \cong W(K_i)$, para $i = 1, 2$.
- (5) Para $K = F(\sqrt{-1})$, temos que $R(K)/\dot{K}^2 \cong \dot{K}_2/\dot{K}_2^2 \cong \dot{F}_2/\dot{F}_2^2$ e $\dot{K}/R(K) \cong \dot{K}_1/(\{\pm 1\}.\dot{K}_1^2) \cong \dot{F}_1/(\{\pm 1\}.\dot{F}_1^2)$.

Nosso objetivo é demonstrar que $G_2(F) \cong G_2(K_1) * G_2(K_2)$ e também que $G_2(K) \cong G_2(K_1(\sqrt{-1})) * \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é um pro-2-grupo livre. Com isto, demonstraremos que $R(K)$ pode ser obtido pelo Teorema 3.6 (abordagem (A) da introdução). Assim, os corpos obtidos pelo Teorema 3.6 incluem os corpos construídos por Berman através do Teorema 4.6.

Demonstração (do Teorema 4.6) Todas as afirmações do teorema fazem parte dos Teoremas 3.9 e 3.12 de ([Be]), exceto as inclusões $K_i \subseteq F(2)$. Em ([Be], Teorema 3.9) Berman constrói primeiro dois corpos pitagóricos $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ dentro do fecho algébrico de um mesmo corpo de característica zero. Define então $F = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ e trata das afirmações de (1) a (5) do teorema para $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$. Veremos que tomando-se $K_i = \mathcal{K}_i \cap F(2)$ as mesmas afirmações permanecem válidas. Temos que $F = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ e as inclusões $F \hookrightarrow \mathcal{K}_i$ induzem um isomorfismo

$\dot{F}/\dot{F}^2 \cong \dot{K}_1/\dot{K}_1^2 \times \dot{K}_2/\dot{K}_2^2$. Afirmamos primeiro que as inclusões $F \hookrightarrow K_i$ induzem um isomorfismo $\dot{F}/\dot{F}^2 \cong \dot{K}_1/\dot{K}_1^2 \times \dot{K}_2/\dot{K}_2^2$. Dado $x \in F^\times$, se $x \in \dot{K}_i^2$ para $i = 1, 2$, então claramente $x \in \dot{K}_i^2$, para $i = 1, 2$. Segue que $x \in \dot{F}^2$. Logo, o homomorfismo induzido pelas inclusões é injetivo. Por outro lado, dados $x_1 \in \dot{K}_1$, $x_2 \in \dot{K}_2$, existe $x \in F^\times$ tal que $(x\dot{K}_1^2, x\dot{K}_2^2) = (x_1\dot{K}_1^2, x_2\dot{K}_2^2)$. Sejam $y_i \in \dot{K}_i$ tais que $x^{-1}x_i = y_i^2$ e sejam $L_i = F(x^{-1}x_i) \subseteq K_i$. Como $F \subseteq L_i \subseteq F(2)$, temos $L_i(2) = F(2)$. Como $x^{-1}x_i \in L_i$ e $y_i^2 = x^{-1}x_i$, temos que $y_i \in L_i(2) = F(2)$. Assim, $y_i \in \dot{K}_i \cap F(2)$ e como $x_i = xy_i^2$, temos que $(x\dot{K}_1^2, x\dot{K}_2^2) = (x_1\dot{K}_1^2, x_2\dot{K}_2^2)$, demonstrando a sobrejetividade. Agora vamos explicitar melhor o significado do homeomorfismo do item (3), para depois provar que $X(F_i) \cong X(K_i)$ e $X(F) \cong X(K_1) \cup X(K_2)$. Sejam $E_i = (\dot{K}_i^2) \cap F$, para $i = 1, 2$. Claramente, $E_1 \cap E_2 = \dot{F}^2$. Vamos mostrar inicialmente que $\dot{F} = E_1 E_2$. Seja $\mathcal{E}_2 = \{x \in F^\times \mid x\dot{F}^2 \mapsto (x\dot{K}_1^2, \dot{K}_2^2)\}$ em $\dot{K}_1/\dot{K}_1^2 \times \dot{K}_2/\dot{K}_2^2$. Assim, $\mathcal{E}_2$ é o subgrupo de $\dot{F}$ que contém $\dot{F}^2$ e tal que $\mathcal{E}_2/\dot{F}^2$ corresponde à $\dot{K}_1/\dot{K}_1^2 \times \{1\}$. Logo, $\mathcal{E}_2 \subseteq \dot{K}_2^2 \cap F = E_2$. Igualmente, temos um subgrupo $\mathcal{E}_1 \subseteq F$, contendo $\dot{F}^2$, tal que $\mathcal{E}_1/\dot{F}^2$ é levado pelo isomorfismo em $\{1\} \times \dot{K}_2/\dot{K}_2^2$ e $\mathcal{E}_1 \subseteq E_1$. Portanto, $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \subseteq E_1 \cap E_2 = \dot{F}^2$ e veremos que o isomorfismo leva $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2$ em $\dot{K}_1 \dot{K}_1^2 \times \dot{K}_2 \dot{K}_2^2$. Portanto, $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 = \dot{F}$. Seja $\theta : \dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{K}_1/\dot{K}_1^2 \times \dot{K}_2/\dot{K}_2^2$ o isomorfismo. Dado $\alpha = (x_1\dot{K}_1^2, x_2\dot{K}_2^2)$ temos que $\alpha = (x_1\dot{K}_1^2, \dot{K}_2^2)(\dot{K}_1^2, x_2\dot{K}_2^2) = \theta(y_1\dot{F}^2)\theta(y_2\dot{F}^2)$, onde $y_i \in \mathcal{E}_i$, $\theta(y_1\dot{F}^2) = (x_1\dot{K}_1^2, \dot{K}_2^2)$ e $\theta(y_2\dot{F}^2) = (\dot{K}_1^2, x_2\dot{K}_2^2)$. Isto é, $\alpha = \theta(y_1 y_2 \dot{F}^2)$. Assim, $\theta(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 / \dot{F}^2) = \theta(\dot{F} / \dot{F}^2)$, o que implica em $\dot{F} = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2$, como queríamos. Finalmente, como $\mathcal{E}_i \subseteq E_i$ e $E_1 \cap E_2 = \dot{F}^2$, resulta que $\mathcal{E}_i = E_i$. Temos que $E_i = (\dot{K}_i^2 \cap F)$ é uma pré-ordem ¹ de F e denotando-se por X/E_i o conjunto $\{P \in X(F) \mid E_i \subseteq P \cap F\}$ temos que toda ordem $Q \in X(K_i)$ satisfaz a condição $Q \cap F \in X/E_i$. Desta forma, a condição (3) implica (e é equivalente a) que $X(F) = X/E_1 \cup X/E_2$, que é reunião disjunta. Voltando às extensões $K_i = \mathcal{K}_i \cap F(2)$, temos as contrações $X(K_i) \rightarrow X/E_i$ e $X(\mathcal{K}_i) \rightarrow X/E_i$, $Q \mapsto Q \cap F$. Estas duas funções são contínuas. A segunda delas é a composição da primeira com a função contração $X(\mathcal{K}_i) \rightarrow X(K_i)$, $Q \mapsto Q \cap K_i$, que também é contínua. Temos então uma composição $X(\mathcal{K}_i) \rightarrow X(K_i) \rightarrow X/E_i$, que é um homeomorfismo e a decomposição $X(F) = X/E_1 \cup X/E_2$, $X/E_1 \cap X/E_2 = \emptyset$. Juntando tudo vamos obter que $X(K_i) \rightarrow X/E_i$ também é um homeomorfismo e podemos completar o quadro $X(K_i) \cong X(F_i)$ e $X(F) \cong X(K_1) \cup X(K_2)$, com $K_1, K_2 \in F(2)$. Concluímos assim a validade dos itens (1), (2), (3) e (5). Para demonstrar (4), basta aplicar o Teorema de Harrison-Cordes ([L₁], Teorema de Harrison-Cordes 1.8, p.429 e Definição 1.1, p.426).

□

¹Veja observação na demonstração do Teorema 3.15 para a definição.

Teorema 4.7 *Sejam F, F_1, F_2, K_1 e K_2 como no Teorema 4.6. Então $G_2(F) \cong G_2(K_1) * G_2(K_2)$.*

Demonstração Conforme o Teorema 3.5, para provarmos o isomorfismo $G_2(F) \cong G_2(K_1) * G_2(K_2)$ precisamos verificar duas coisas. Primeiro, que a inclusão $\dot{F} \hookrightarrow \dot{K}_i$ induz um isomorfismo

$$\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{K}_1/\dot{K}_1^2 \times \dot{K}_2/\dot{K}_2^2. \quad (4.1)$$

Segundo, que a aplicação restrição

$$\text{res} : {}_2\text{Br}(F) \rightarrow {}_2\text{Br}(K_1) \times {}_2\text{Br}(K_2) \quad (4.2)$$

é injetiva. O item (4.1) já nos é dado pelo item (2) do Teorema 4.6. Resta provar (4.2). Inicialmente observamos que (4.2) é equivalente à:

$$D_{K_1}\langle 1, -x \rangle \cap D_{K_2}\langle 1, -x \rangle \cap \dot{F} \subseteq D_F\langle 1, -x \rangle, \text{ para todo } x \in F^\times. \quad (4.3)$$

(4.2) $\Rightarrow$ (4.3) Seja $x \in F^\times$. Se $a \in D_{K_1}\langle 1, -x \rangle \cap D_{K_2}\langle 1, -x \rangle \cap \dot{F}$, então $(K_1, a, x) = 0$ e $(K_2, a, x) = 0$. De (4.2), temos $(F, a, x) = 0$. Portanto $a \in D_F\langle 1, -x \rangle$.

(4.3) $\Rightarrow$ (4.2) (veja [J], Lema 7).

Portanto, para demonstrarmos o teorema basta provar que (4.3) vale para K_1, K_2 . Por conveniência de notação, provaremos que $D_{K_1}\langle 1, x \rangle \cap D_{K_2}\langle 1, x \rangle \cap \dot{F} \subseteq D_F\langle 1, x \rangle$, para todo $x \in F^\times$. Seja $a \in D_{K_1}\langle 1, x \rangle \cap D_{K_2}\langle 1, x \rangle \cap \dot{F}$. Do Lema 4.2, $a \in D_F\langle 1, x \rangle$ se e somente se, $a >_P 0$ sempre que $x >_P 0$, para toda ordem $P \in X(F)$.

1º) Pode ocorrer que o sinal de x seja negativo em todas as ordens de F . Neste caso, $-x \in \bigcap_{P \in X(F)} P = \dot{F}^2$. Assim, $D_{K_1}\langle 1, x \rangle \cap D_{K_2}\langle 1, x \rangle \cap \dot{F} = D_{K_1}\langle 1, -1 \rangle \cap D_{K_2}\langle 1, -1 \rangle \cap \dot{F} = \dot{K}_1 \cap \dot{K}_2 \cap \dot{F} = \dot{F} = D_F\langle 1, x \rangle$. Note que aqui estamos utilizando que a forma $\langle 1, -1 \rangle$ é universal.

2º) Agora podemos supor que existe uma ordem $P \in X(F)$ tal que $x >_P 0$. Do item (3) do Teorema 4.6, existe uma ordem $Q \in X(K_i)$ (para exatamente um $i \in \{1, 2\}$) que contrai para P , isto é, $Q \cap F = P$. Como $a \in D_{K_i}\langle 1, x \rangle$, temos $a >_Q 0$. Assim, $a >_P 0$, que é exatamente o que precisamos. $\square$

Podemos agora demonstrar o teorema principal desta seção.

Teorema 4.8 *Seja $K = F(\sqrt{-1})$, onde $F = K_1 \cap K_2$ e K_1, K_2 são como no Teorema 4.6. Então $G_2(K) \cong G_2(E_1) * G_2(E_2)$, onde E_1 é um corpo com $G_2(E_1)$*

livre e (E_2, v_2) é um corpo valorizado 2-henseliano. Ainda, K possui um anel de valorização A , com $k_A \neq k_A(2)$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$, tal que $R(K) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{K}^2$.

Demonstração Lembramos que K_1 e K_2 são formalmente reais. Com isto, $\sqrt{-1} \notin K_1 \cup K_2$ e $G_2(K) \not\subset G_2(K_i)$, para $i = 1, 2$. Assim, $(G_2(F) : G_2(K)) = 2$ implica $G_2(F) = G_2(K)G_2(K_i)$, para $i = 1, 2$. Utilizaremos agora o Teorema de Kurosh para pro-2-grupos. O leitor pode consultar ([N], Teorema 4.2.1, p.208), ou ([BNW]). Alternativamente, fizemos uma exposição em detalhes deste teorema no capítulo 5, após o Lema 5.3, e o enunciamos no Teorema 5.4. Pelo Teorema de Kurosh, $G_2(K) \cong \left(G_2(K) \cap G_2(K_1)\right) * \left(G_2(K) \cap G_2(K_2)\right) * \mathbb{Z}_2 \cong G_2(K_1(\sqrt{-1})) * G_2(L_2)$, onde L_2 é o corpo fixo de $G_2(K_2(\sqrt{-1})) * \mathbb{Z}_2$. Do item (4) do Teorema 4.6 temos $W(F_i) \cong W(K_i)$. Segue de ([W₂], Observação na página 232), que $G(F_i(\sqrt{-1})) \cong G_2(K_i(\sqrt{-1}))$, para $i = 1, 2$. Resumindo, temos

$$G_2(K) \cong G_2(E_1) * G_2(E_2),$$

onde $E_1 = F_1(\sqrt{-1})$ e E_2 é o corpo fixo do grupo $G_2(F_2(\sqrt{-1})) * \mathbb{Z}_2$. Lembre que F_1 é superpitagórico e F_2 é SAP pitagórico. Segue da observação anterior ao Teorema 4.6 que $G_2(F_2(\sqrt{-1}))$ é livre. Portanto, $G_2(E_2)$ é também livre, pois é o produto livre de dois pro-2-grupos livres. Sendo F_1 superpitagórico, segue do Teorema 4.4 que F_1 possui um anel de valorização 2-henseliano A_1 , cujo corpo de resíduos k_1 é formalmente real e $|X(k_1)| \leq 2$. Seja A'_1 a única extensão de A_1 à E_1 . Como a propriedade de ser 2-henseliano é hereditária, temos que A'_1 é um anel de valorização 2-henseliano de E_1 . Reunidas estas informações, estamos em condições de aplicar o Teorema 3.6. Obtemos assim um anel de valorização A do corpo K , que satisfaz a compatibilidade $1 + \mathcal{M}_A \subset R(K)$. Para concluir, temos que verificar que $R(K) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{K}^2$. Seja $(\Gamma_1, k_1, \mathcal{M}_1, v_1, \dots)$ e $(\Gamma'_1, k'_1, \mathcal{M}'_1, v'_1, \dots)$ a notação para os corpos valorizados (F_1, A_1) e (E_1, A'_1) , respectivamente. Note que $k'_1 = k_1(\bar{\alpha})$, onde $\alpha = \sqrt{-1}$. Ainda, $\bar{\alpha} \notin k_1$, pois k_1 é formalmente real. Segue da Desigualdade Fundamental (1.2) que

$$\Gamma'_1 = \Gamma_1. \quad (4.4)$$

Afirmção: k_1 é pitagórico. Sejam $a, b \in A_1^\times$. Como F_1 é pitagórico, existe $c \in F^\times$ tal que $a^2 + b^2 = c^2$. Tudo que precisamos provar é que $c \in A_1^\times$, ou seja, $v_1(c) = 0$. De fato, se $v_1(c) > 0$, então $a^2 + b^2 \in \mathcal{M}_1$ e $(\overline{ab^{-1}})^2 = -\bar{1}$, contradizendo o fato de k_1 ser formalmente real.

Temos ainda

$$8 \leq |\dot{F}_1/\dot{F}_1^2| = |\dot{k}_1/(\dot{k}_1)^2| |\Gamma_1/2\Gamma_1|, \quad (4.5)$$

pois A_1 é 2-henseliano e a hipótese do Teorema 4.6 que diz que $8 \leq |\dot{F}_1/\dot{F}_1^2|$. Temos que $|X(k_1)| \leq 2$. Como k_1 é pitagórico, da observação que antecede a Definição 4.3 segue que $|X(k_1)| \geq n$, onde $2^n = |\dot{k}_1/(\dot{k}_1)^2|$. Logo, $2 \leq |\dot{k}_1/(\dot{k}_1)^2| \leq 4$.

Primeiro caso: $|\dot{k}_1/(\dot{k}_1)^2| = 2$ (k_1 é euclidiano). Segue de (4.4) e (4.5) que $(\Gamma'_1 : 2\Gamma'_1) = (\Gamma_1 : 2\Gamma_1) \geq 4$. Sabemos que isto implica $R(K) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{K}^2$.

Segundo caso: $|\dot{k}_1/(\dot{k}_1)^2| = 4$. Segue de (4.4) e (4.5) que $(\Gamma'_1 : 2\Gamma'_1) \geq 2$. Se $(\Gamma'_1 : 2\Gamma'_1) > 2$, temos que $R(K) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{K}^2$. Para obter a mesma conclusão para o caso $(\Gamma'_1 : 2\Gamma'_1) = 2$, precisamos concluir que $\dot{k}'_1 \neq (\dot{k}'_1)^2$. De (4.5) temos $|\dot{k}_1/(\dot{k}_1)^2| \geq 4$. Assim, $|\dot{k}'_1/(\dot{k}'_1)^2| \stackrel{(*)}{\geq} \frac{1}{2} |\dot{k}_1/(\dot{k}_1)^2| \geq 2$, onde $(*)$ é um lema básico para extensões quadráticas (veja [L₁], Corolário 3.10, p.200). $\square$

Na sequência veremos o outro resultado de Berman.

Teorema 4.9 ([Be], Teorema 2.3) *Seja n um inteiro ≥ 2 . Seja $F = F_n$ um corpo pitagórico com $|X(F)| = 2^n$ e $|\dot{F}/\dot{F}^2| = 2^{n+1}$. Se $K = F(\sqrt{-1})$, então K é um corpo pré-hilbertiano, $|\dot{K}/\dot{K}^2| = 2^n$ e $(\dot{K} : R(K)) = 4$.*

No caso deste teorema faremos o processo inverso à análise anterior. Provaremos diretamente que K admite um anel de valorização A compatível com $R(K)$. Incluiremos o resultado de Berman na abordagem (B) descrita na introdução. Portanto, além da descrição do radical como $R(K) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{K}^2$, poderemos concluir que $G_2(K)$ admite uma decomposição do mesmo tipo já estudado. No Teorema 4.9, a existência do corpo pitagórico F , com as propriedades desejadas, é provada no trabalho de Bröcker ([Br]).

Iniciamos com mais algumas equivalências da Propriedade da Aproximação Forte.

Proposição 4.10 *Seja F um corpo pitagórico com $|\dot{F}/\dot{F}^2| = 2^n$. São equivalentes:*

- (1) F é SAP.
- (2) $|X(F)| = n$ ($= \dim_{\mathbb{F}_2} \dot{F}/\dot{F}^2$).
- (3) $\{\chi_P \mid P \in X(F)\}$ é uma $\mathbb{F}_2$ -base para o dual $\left(\dot{F}/\dot{F}^2\right)^*$.

- (4) Para todo anel de valorização A de F , com corpo de resíduos k_A formalmente real, tem-se $(\Gamma : 2\Gamma_A) \leq 2$ e se $(\Gamma : 2\Gamma_A) = 2$, então k_A possui uma única ordem.

Demonstração Como $\{\chi_P \mid P \in X(F)\}$ gera o dual $\left(\dot{F}/\dot{F}^2\right)^*$ (veja [L₁], ex. 15 e 16, p.294), a equivalência $(2) \Leftrightarrow (3)$ é imediata.

(1) $\Rightarrow$ (3) Basta provar que $\{\chi_P\}$ é linearmente independente. Por contradição, vamos supor que existe uma relação de dependência $\chi_1 \dots \chi_m = 1$, onde χ_i corresponde à ordem $P_i \in X(F)$ e $P_i \neq P_j$, para todos $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Como F é SAP, P_1 pode ser separada de $\{P_2, \dots, P_m\}$. Assim, existe $a \in (-P_1) \cap P_2 \dots P_m$. Daí, $(\chi_1 \dots \chi_m)(a) = -1$, contradição.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sejam $A = \{P_1, \dots, P_r\}$ e $B = \{P_{r+1}, \dots, P_s\}$ disjuntos em $X(F)$. Por hipótese, $\{\chi_1, \dots, \chi_s\}$ são linearmente independentes (aqui, $\chi_i = \chi_{P_i}$). Assim, existe um funcional linear (chamado caracter) $f : \left(\dot{F}/\dot{F}^2\right)^* \rightarrow \{\pm 1\}$, tal

que $f(\chi_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq r \\ -1, & r < i \leq s \end{cases}$. Lembramos que a aplicação $x\dot{F}^2 \mapsto g_x$, onde

$g_x(h) := h(x)$, é um isomorfismo entre $\dot{F}/\dot{F}^2$ e o bidual $\left(\dot{F}/\dot{F}^2\right)^{**}$. Portanto, f

corresponde à $a \in F^\times$ tal que $\chi_i(a) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq r \\ -1, & r < i \leq s \end{cases}$. Assim, $A \subseteq H(a)$ e

$B \subseteq H(-a)$.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) ver ([P], Teorema 9.1, p.140). □

Teorema 4.11 *Seja $K = F(\sqrt{-1})$ como no Teorema 4.9. Então K possui um anel de valorização A , tal que $R(K) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{K}^2$. Ainda mais, $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$ e $k_A \neq k_A(2)$.*

Demonstração Como $2^n = |X(F)| \neq |\dot{F}/\dot{F}^2| = 2^{n+1}$, a Proposição 4.10 implica que F não é SAP. Ainda a Proposição 4.10 garante que F admite um anel de valorização B , com corpo residual formalmente real, tal que $\Gamma_B \neq 2\Gamma_B$ e caso $(\Gamma_B : 2\Gamma_B) = 2$, então k_B tem mais que única ordem. Seja A uma extensão de B à K . Observe que $k_A = k_B(\bar{\alpha})$, onde $\alpha = \sqrt{-1}$. Segue da Desigualdade Fundamental (1.2), que $\Gamma_A = \Gamma_B$. Logo, $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$. Segue do Lema 3.20 que $R(K) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{K}^2$. □

4.2 Exemplos Obtidos por Kula

Deduziremos nesta seção a existência de anel de valorização compatível com o Radical de Kaplansky nos principais exemplos construídos por Kula no trabalho ([Ku₁]). Não vamos expor o método dos esquemas de formas quadráticas, que o referido autor utiliza. O leitor interessado pode consultar ([L₁], p.463).

No trabalho ([Ku₁]), Kula obteve os principais exemplos de seus trabalhos envolvendo Radical de Kaplansky. Ele prova que existe um corpo F cujo anel de Witt é isomorfo ao produto $W(F_1) \times W(F_2)$, com $F_2 = L((X_1)) \dots ((X_n))$ e F_1 um corpo com m classes de quadrados e radical $R(F_1) = \dot{F}_1$. Kula produz dois exemplos e utiliza três corpos diferentes para L , sempre com $\dot{L}/\dot{L}^2$ finito. Para nossos interesses isto não é relevante. Finalmente, os índices são $(R(F) : \dot{F}^2) = 2^m$ e $(\dot{F} : R(F)) = 2^n |\dot{L}/\dot{L}^2|$.

Escolhendo F_1 e F_2 acima descritos, o Teorema 3.4 garante que existe um corpo F tal que $G_2(F) \cong G_2(F_1) * G_2(F_2)$. Sabemos que $F_2 = L((X_1)) \dots ((X_n))$ é naturalmente munido de um anel de valorização 2-henseliano. Ainda mais, o grupo de valores é o grupo aditivo dos inteiros $\mathbb{Z}$. Segue do Teorema 3.6 que F admite um anel de valorização $R(F)$ -compatível A , com $\text{car}(k_A) \neq 2$, grupo de valores não 2-divisível. Assim, como $R(F) \neq \dot{F}$, temos que também vale a inclusão $R(F) \subseteq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Portanto vale mesmo a igualdade $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Segue do Teorema 3.6 que $R(F)/\dot{F}^2 \cong \dot{F}_1/\dot{F}_1^2$ e portanto, $(R(F) : \dot{F}^2) = 2^m$. Também, $(\dot{F} : R(F)) = 2^n |\dot{L}/\dot{L}^2|$, que é o número de classes de quadrados de $F_2 = L((X_1)) \dots ((X_n))$, conforme vimos no exemplo seguinte ao Teorema 4.4.

Como a construção resumida no Teorema 3.6 utiliza o resultado do Teorema 3.4, que por sua vez utiliza o resultado de Kula (sobre o produto dos anéis de Witt), o corpo F obtido nos dois parágrafos anteriores coincide.

4.3 O Caso Real Livre

Nesta seção vamos retomar o estudo dos corpos quase-pitagóricos, iniciado na parte final da primeira seção do capítulo 2. Conforme a Definição 2.7, o corpo F é quase-pitagórico se $R(F) = D_F\langle 1, 1 \rangle = \Sigma \dot{F}^2$. Tipicamente estaremos interessados no caso formalmente real, pois já observamos que corpos quase-pitagóricos não formalmente reais são classificados pelo “caso livre”, ou seja, o radical é todo o grupo multiplicativo do corpo.

Nosso objetivo é mostrar que ao menos uma parte dos corpos quase-pitagóricos simplesmente não admite um anel de valorização R -compatível.

A Propriedade da Aproximação Forte (SAP) estudada no capítulo 4 se refere aos abertos da topologia de Harrison no espaço de ordens de um corpo. Assim, corpos SAP não necessariamente pitagóricos são definidos de forma análoga à que fizemos na Definição 4.5. Além disto, para este caso geral, vale a Proposição 4.10 com $\Sigma \dot{F}^2$ no lugar de $\dot{F}^2$. Os corpos formalmente reais, que são simultaneamente quase-pitagóricos e SAP aparentemente não possuem um anel de valorização compatível com o Radical de Kaplansky. Conseguimos verificar que se um corpo deste tipo for pseudo real fechado (veja Definição 4.16), então definitivamente ele não possui um anel de valorização compatível com o radical. Cabe ressaltar que o radical é não trivial, o que neste caso significa que o corpo não é pitagórico.

Por outro lado, se no contexto da construção resumida no Teorema 3.6, escolhermos o corpo valorizado 2-henseliano H_1 sendo pitagórico não euclidiano, o método do Teorema 3.6 produz um corpo quase-pitagórico que admite um anel de valorização compatível com o radical (veja a observação final desta seção).

Conseguimos assim delimitar um pouco a abrangência da nossa abordagem no estudo do radical. Contudo, fica claro que não sabemos ainda a exata relação entre corpos quase-pitagóricos e corpos com um anel de valorização compatível com o radical.

A leitura do capítulo 6 é independente desta seção. Para o capítulo 5, utilizaremos desta seção apenas a caracterização do caso real livre através do invariante de Hasse, apresentada no Teorema 4.14.

Para a conveniência do leitor, incluímos nos próximos parágrafos mais algumas definições da teoria de corpos e formas quadráticas, a maior parte delas ainda não utilizadas neste trabalho.

Por definição, o corpo formalmente real $\mathcal{R}$ é *real-fechado* se qualquer extensão algébrica própria de $\mathcal{R}$ não é formalmente real. Em particular, um corpo real-fechado é euclidiano ([L₁], Corolário 1.8, p.236). Assim, $\mathcal{R}^2 = (\mathcal{R}^\times)^2 \cup \{0\}$ é a única ordem de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}(\sqrt{-1})$ é quadraticamente fechado.

Seja F um corpo formalmente real e $\tilde{F}$ seu fecho algébrico. Para uma ordem qualquer $P \in X(F)$ é possível associar um corpo real-fechado $\mathcal{R}_P \subset \tilde{F}$, cuja única ordem contrai para a ordem P de F , ou seja, $(\mathcal{R}_P)^2 \cap F = P$. O corpo $\mathcal{R}_P$ é denominado o *fecho real* de F com relação à P . Um fecho real é obtido, via Lema de Zorn, como o elemento maximal da família dos subcorpos formalmente reais de $\tilde{F}$ que contenham o corpo $F(\{\sqrt{a} \mid a \in \dot{P}\})$ (veja [L₁], Teorema 2.8, p.242).

Seja $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in W(F)$ e P um ordem de F . A *assinatura* da forma f com respeito a ordem P é definida como a diferença

$$\text{sgn}_P(q) = (\text{número de } a_i' \text{'s em } \dot{P}) - (\text{número de } a_i' \text{'s em } -\dot{P}).$$

Se $\text{sgn}_P(q) \neq \dim(q)$, então q é dita *indefinida* em relação à ordem P . Se q é indefinida para toda $P \in X(F)$, então q é dita *totalmente indefinida*.

Lembrando que $(\mathcal{R}_P)^2$ é a ordem de $\mathcal{R}_P$, deixamos a cargo do leitor verificar que a aplicação $\text{sgn}: W(\mathcal{R}_P) \rightarrow \mathbb{Z}$, $f \mapsto \text{sgn}_P(f)$ é um isomorfismo de anéis (veja Proposição 3.6 de [L₁], p.34). Com isto, para um corpo F qualquer, obtêm-se o homomorfismo *assinatura total*:

$$\text{sgn}: W(F) \rightarrow \prod_{P \in X(F)} W(\mathcal{R}_P) \cong \prod_{P \in X(F)} \mathbb{Z}$$

dada por $q \mapsto (\text{sgn}_P(q))_P$. Seja $W_t(F)$ o subgrupo de torção de $W(F)$. O **Princípio Local-Global de Pfister** ([L₁], Teorema 3.2, p.253) afirma que $\text{Ker}(\text{sgn}) = W_t(F)$. Provemos que $W_t(F) \subseteq \text{Ker}(\text{sgn})$. Se q é forma quadrática de torção (isto é, $q \in W_t(F)$), então existe $n \geq 1$ tal que $nq = \bigoplus_{i=1}^n \langle 1, -1 \rangle$. Claro que a assinatura (para toda ordem) de uma forma hiperbólica é sempre zero. Como sgn é homomorfismo, temos $n(\text{sgn}_P(q)) = 0$ em $W(\mathcal{R}_P) \cong \mathbb{Z}$, para toda $P \in X(F)$. Portanto, $\text{sgn}(q) = 0$.

Definição 4.12

(1) O **u-invariante** de um corpo F é definido como

$$u(F) = \sup\{\dim(q) \mid q \in W(F) \text{ é uma forma anisotrópica de torção}\}.$$

(2) O **invariante de Hasse** de um corpo F é definido como

$$u(F) = \sup\{\dim(q) \mid q \in W(F) \text{ é forma anisotrópica totalmente indefinida}\}.$$

Observações

(1) Se F é não formalmente real, então qualquer forma quadrática é de torção (veja [L₁], p.254). Assim, no caso não real, o u -invariante é simplesmente o supremo das dimensões de formas anisotrópicas sobre F .

(2) Como as formas de torção necessariamente tem assinatura igual a zero em qualquer ordem de F , sendo F formalmente real, tem-se que $u(F)$ é par ou ∞ .

(3) Pelo Princípio Local-Global de Pfister, $u(F) = \sup\{\dim q\}$, onde q percorre o conjunto de todas as formas quadráticas anisotrópicas que tornam-se hiperbólicas em todo fecho real de F . O invariante de Hasse é o $\sup\{\dim q\}$, onde q percorre o conjunto de todas as formas quadráticas anisotrópicas que tornam-se isotrópicas em todo fecho real de F .

O “caso livre” que estudamos no capítulo 2, corresponde a $u(F) \leq 2$, conforme o lema seguinte.

Lema 4.13 *Seja F um corpo. São equivalentes:*

(a) $R(F) = \dot{F}$ (isto é, $G_2(F)$ é livre).

(b) F é não formalmente real e $u(F) \leq 2$.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b) Pelo Lema 2.2, a hipótese $R(F) = \dot{F}$ implica que toda 1-forma de Pfister é universal. Assim, toda forma quadrática de dimensão maior ou igual a 3 é necessariamente isotrópica. Portanto, $u(F) \leq 2$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $\langle 1, -a \rangle$ uma 1-forma de Pfister e $x \in F^\times$. Por hipótese, $\langle 1, -a, -x \rangle$ é isotrópica e portanto, $x \in D_F \langle 1, -a \rangle$. Segue que $\langle 1, -a \rangle$ é universal. Pelo Lema 2.2, $R(F) = \dot{F}$. □

Dizemos que o pro-2-grupo G é *real livre* se G é um produto semidireto de um pro-2-grupo livre com um grupo de ordem no máximo igual a 2. Por exemplo, para o corpo $F = \mathbb{R}(X)$ das funções racionais sobre os reais, D. Haran e M. Jarden ([HJ]) mostraram que $G_2(F)$ é real livre. Na Teoria de Galois, o principal resultado sobre um grupo real livre é o teorema seguinte, cuja demonstração pode ser vista em ([W₂], Corolário 3.3).

Teorema 4.14 *Seja F um corpo formalmente real. São equivalentes:*

- (a) $G_2(F)$ é real livre. (b) $\tilde{u}(F) \leq 2$.

Agora estudaremos como é o conjunto dos anéis de valorização de um corpo F , sob a hipótese de $G_2(F)$ ser real livre. Em particular, concluímos da proposição seguinte que um corpo deste tipo necessariamente é um corpo *SAP*, conforme ([L₂], Corolário 16.8, p.123) ou Proposição 4.10.

Proposição 4.15 *Seja F um corpo e suponha que $G_2(F)$ é real livre. Se A é um anel de valorização de F , então Γ_A é 2-divisível ou $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) = 2$ e k_A euclidiano.*

Demonstração Seja $K = F(\sqrt{-1})$. Um subgrupo de um grupo real livre continua sendo real livre. Assim, $G_2(K)$ é também real livre. Como K não é formalmente real, $G_2(K)$ não pode conter involuções. Portanto, $G_2(K)$ é um pro-2-grupo livre e $R(K) = \dot{K}$ (apesar de que $R(F) \subseteq D_F\langle 1, 1 \rangle \neq \dot{F}$, pois F é formalmente real). Pelo Lema 4.13, temos que $u(K) \leq 2$. Seja B um anel de valorização de K , com característica de k_B diferente de 2. Caso $(1 + \mathcal{M}_B)\dot{K}^2 = \dot{K}$, então segue do Lema 2.14 que $\Gamma_B = 2\Gamma_B$ e $k_B = k_B(2)$. Se $(1 + \mathcal{M}_B)\dot{K}^2 \neq \dot{K}$, então $\dot{K} = R(K) \not\subseteq (1 + \mathcal{M}_B)\dot{K}^2$. Como consequência temos que $\Gamma_B = 2\Gamma_B$, ou $(\Gamma_B : 2\Gamma_B) = 2$ e $k_B = k_B(2)$. Seja $A = B \cap F$. Como $[K : F] = 2$, não é possível ter $(\Gamma_B : \Gamma_A) = 2$ com Γ_B 2-divisível. De fato, sendo $(\Gamma_B : \Gamma_A) = 2$, a Desigualdade Fundamental (1.2) implica que B é a única extensão de A ao corpo K . Assim, $\sigma(B) = B$, onde σ é o gerador de $G(K/F)$. Segue que $v_A(N(x)) = v_B(x) + v_B(\sigma(x)) = 2v_B(x)$, para todo $x \in K$. Com isto, $2\Gamma_B \subseteq \Gamma_A$. Logo, se $\Gamma_B = 2\Gamma_B$, então $\Gamma_B \subseteq \Gamma_A$ implicaria $\Gamma_A = \Gamma_B$, contradição. Da Desigualdade Fundamental (1.2), as únicas possibilidades são: (K, B) é uma extensão imediata de (F, A) , ou $\Gamma_B = \Gamma_A$ e $[k_B : k_A] = 2$. Note que isto implica $k_B = k_A(\sqrt{-1})$. Este é o único caso de A ter extensão única a K . Portanto, para todo A de F , $\Gamma_A = 2\Gamma_A$ ou $(\Gamma_A : 2\Gamma_A) = 2$ e k_A é euclidiano. $\square$

Veremos agora um caso particular de um corpo nas condições da Proposição 4.15. Concluiremos que este corpo é quase-pitagórico e não admite um anel de valorização R -comatível.

Definição 4.16

(1) Um corpo K é chamado de **pseudo algebricamente fechado**, ou simplesmente um **corpo PAC**, se toda variedade absolutamente irredutível definida sobre K possui um ponto K -racional simples, ou seja, quando a variedade possui um ponto cujas coordenadas estão em K .

(2) Um corpo F é chamado de **pseudo real fechado**, se qualquer variedade absolutamente irredutível definida sobre F , que tem um ponto $\mathcal{R}$ -racional em qualquer corpo real fechado $\mathcal{R}$ contendo F , tem um ponto F -racional.

Passando para formas quadráticas, temos que toda forma quadrática $f = f(X_1, \dots, X_n)$ em $n > 2$ variáveis é irredutível tanto em F como em seu fecho algébrico, isto é, é absolutamente irredutível. Assim, se F for pseudo real fechado, toda forma quadrática f com dimensão > 2 que seja isotrópica em todo fecho real será também isotrópica em F . Portanto, $\tilde{u}(F) \leq 2$. Segue do teorema 4.14 que $G_2(F)$ é real livre, sempre que F for um corpo pseudo real fechado. Ainda mais, para $K = F(\sqrt{-1})$, teremos que K será PAC. Resulta de ([FJ], Teorema 10.14, pg. 136) que todo anel de valorização de K é anti-henseliano, ou seja, admite extensão não única a toda extensão algébrica. Logo, $\Gamma_B = 2\Gamma_A$ e k_B é quadraticamente fechado. Conseqüentemente, para um anel de valorização A de F temos $\Gamma_A = 2\Gamma_A$ e k_A é euclidiano. Vejamos como isso vai intereferir nas ordens e no radical de F .

Continuamos supondo F pseudo real fechado. Por um resultado de Prestel ([L2], Teorema 3.10, p.24) temos que para um anel de valorização A com $\Gamma_A = 2\Gamma_A$ e k_A com uma única ordem, que $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ será a única ordem de F em relação a qual A é comatível. Dessa forma qualquer que seja $R(F)$, temos sempre $R(F) \subsetneq (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, a menos que ocorra o caso pré-hilbertiano $(\dot{F} : R(F)) = 2$. Fora desse caso, isto é, com F admitindo pelo menos duas ordens, não haverá anel de valorização comatível com $R(F)$ e a inclusão em $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ será sempre própria. Pelo Teorema E de ([ELP]), para um corpo F com $\tilde{u}(F) \leq 2$ temos que I^2F é livre de torção. Segue que $R(F) = D_F\langle 1, 1 \rangle$, conforme o Teorema 2.8. Assim, F é quase-pitagórico. Portanto, corpos pseudo reais fechados são exemplos de corpos quase-pitagóricos que não admitem um anel de valorização R -comatível.

Observação 1 Seja $F = \mathbb{R}(X)$ o corpo de funções racionais com coeficientes reais. Por ([HJ]), $G_2(F)$ é um pro-2 grupo real livre. Mas esse corpo não é pseudo real fechado pois admite valorização discretas. Como $F(\sqrt{-1})$ será pseudo algebricamente fechado, isso vai contrariar o já citado Teorema 10.14 (pg. 136) do livro de Fried e Jarden. Para esse corpo temos que para todo anel de valorização com corpo de resíduos formalmente real ($k_A = \mathbb{R}$, neste caso) que $(1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ é igual a interseção de duas ordens, não podendo ser igual ao conjunto das somas de quadrados. Acontece que também aqui I^2F é livre de torção e portanto vale $R(F) = D_F\langle 1, 1 \rangle$. Temos assim outro exemplo de corpo com radical conhecido que não admite anel compatível com o radical e que não é pseudo real fechado.

Observação 2 Um corpo quase-pitagórico pode admitir um anel de valorização compatível com o radical. Seja H_1 um corpo 2-henseliano pitagórico formalmente real. $H_1 = k((X))$, onde k é um corpo pitagórico não euclidiano. É bem conhecido que $G_2(H_1)$ é gerado por involuções e $W(F)$ é livre de torção. Seja F_1 corpo com $G_2(F_1)$ livre. Pelo método do Teorema 3.6, existe um corpo F tal que $G_2(F) \cong G_2(F_0) * G_2(H)$, onde $F_0, H \subset F(2)$, com $G_2(F_0)$ sendo pro-2-livre e H pitagórico, pois $G_2(H) \cong G_2(H_1)$ é gerado por involuções. Pelo método, $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Por outro lado, $W(F) \cong W(F_0) \times W(H)$, com $W(H)$ livre de torção. Isto implica $I^2F \cong I^2F_0 \oplus I^2H$. Como $G_2(F_0)$ é livre, segue da Proposição 2.9 que $I^2F = \{0\}$. Assim, $I^2F \cong I^2H$, que é livre de torção. Pelo Teorema 2.8, F é quase-pitagórico.

CAPÍTULO 5

O Teorema 90 de Hilbert

Como já citamos na introdução da tese, não existe uma boa descrição de $R(F(\sqrt{a}))$ a partir do Radical de Kaplansky de F . Por exemplo, sabemos que mesmo com a trivialidade $R(F) = \dot{F}^2$ (F é fracamente hilbertiano), não há motivos para que $F(\sqrt{a})$ também seja fracamente hilbertiano. Neste capítulo resolvemos este problema sob a condição de F admitir um elemento que é R -birígido ($R = R(F)$). Utilizaremos a construção exposta na segunda seção do capítulo 3, onde um anel de valorização R -compatível de F foi obtido a partir da existência de um elemento R -birígido pertencente a F .

Se K/F é uma extensão galoisiana cíclica e $N : K^\times \rightarrow F^\times$ é a aplicação norma, o Teorema 90 de Hilbert afirma que se $x \in K^\times$ e $N(x) = 1$, então existe $z \in K^\times$, tal que $x = z/\sigma(z)$, onde $\langle \sigma \rangle = G(K/F)$. Para o caso particular de uma extensão quadrática $K = F(\sqrt{a})$, a demonstração é simples. De fato, suponha $x\sigma(x) = 1$, onde $\{1, \sigma\} = G(K/F)$. Para $x = -1$, basta escolher $z = \sqrt{a}$. Assumindo $x \neq -1$, definimos $z = 1 + x$. Assim, $\sigma(z) = 1 + \sigma(x) = (x + 1)\sigma(x) = z\sigma(x)$. Portanto, $z(\sigma(z))^{-1} = \sigma(x)^{-1} = x$.

Ainda para uma extensão quadrática K/F , uma outra formulação para o Teorema 90 de Hilbert é $N^{-1}(\dot{F}^2) = \dot{F}\dot{K}^2$. No trabalho ([Ki₁]), Kijima conjecturou uma versão do Teorema 90 de Hilbert para o Radical de Kaplansky, ou

seja, se $K = F(\sqrt{a})$ (com $a \in F^\times \setminus \dot{F}^2$), então $N^{-1}(R(F)) = \dot{F}R(K)$. A inclusão $\dot{F}R(K) \subseteq N^{-1}(R(F))$ vale sempre. De fato, se $r \in R(K)$, então $r \in D_K\langle 1, -x \rangle$, para todo $x \in K^\times$. Pelo Princípio da Norma de Knebusch ([L₁], Teorema 5.1, p.206) $N(r) \in D_F\langle 1, -x \rangle$, para todo $x \in F^\times$. Portanto, $N(r) \in R(F)$. Cordes e Ramsey J. ([CR]) resolveram o problema sob a hipótese de F ser pré-hilbertiano e $|\dot{F}/R(F)| < \infty$. Posteriormente ([Ki₁], [Ki₂], [IKN]) a conjectura foi provada para o caso $R(F) = D_F\langle 1, 1 \rangle$ (F é quase-pitagórico) e F satisfaz uma condição técnica extra sobre $X(F)$. Nosso principal resultado neste capítulo é o Teorema 5.8, que estabelece que $N^{-1}(R(F)) = \dot{F}R(K)$, sempre que F possui pelo menos um elemento $R(F)$ -birígido.

Supondo que o corpo F admite um anel de valorização A que é $R(F)$ -compatível, utilizamos o Teorema de Kurosh para pro-2-grupos (Teorema 5.4) para obter o grupo $G_2(F(\sqrt{a}))$. Se $a \in F^\times \setminus R(F)$, então o Teorema 5.5 estabelece que $R(K) = (1 + \mathcal{M}')\dot{K}^2$, onde $\mathcal{M}'$ é o ideal maximal de A' , o único anel de valorização de K que estende A . A unicidade da extensão A' deve-se ao fato de que $a \notin (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 = R(F)$ (conforme a Proposição 5.2). Se $a \in R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, então A possui duas extensões, denotadas por A_1 e A_2 , ao corpo K (novamente pela Proposição 5.2). Neste caso, provamos no Teorema 5.6 que $R(K) = (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2 \cap (1 + \mathcal{M}_2)\dot{K}^2$, onde $\mathcal{M}_i$ é o ideal maximal de A_i .

Teorema 5.1 ([E], Teorema 17.17) *Seja (F, v_A) um corpo valorizado e (F_h, v_h) uma 2-henselização de (F, v_A) . Seja $F(z) \subset F(2)$ uma extensão finita separável de F e f o polinômio minimal de z sobre F . Suponha que $f = g_1 \dots g_m$ é a decomposição de f em fatores irredutíveis em $F_h[X]$. Então A tem exatamente m extensões distintas a $F(z)$.*

Proposição 5.2 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, com $\text{car}(k_A) \neq 2$. Então, A tem duas extensões distintas a $F(\sqrt{a})$ se, e somente se, $a \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$.*

Demonstração ($\Rightarrow$) Se A possui duas extensões distintas a $F(\sqrt{a})$, então segue da Desigualdade Fundamental (1.2) que a extensão $F(\sqrt{a})/F$ é imediata. Denotando por $w_B = w : F(\sqrt{a}) \rightarrow \Gamma_B \cup \{\infty\}$ uma extensão de $v = v_A$ à $F(\sqrt{a})$, temos $\Gamma_A = \Gamma_B$ e $k_A = k_B$. Logo, existe $x \in F$ tal que $w(x) = v(x) = w(\sqrt{a})$. Assim, $w(\sqrt{a}x^{-1}) = 0$. Como $k_B = k_A$, existe $u \in A^\times$ tal que $\sqrt{a}x^{-1} = u$. Com isto, $\pi_B(u^{-1}x^{-1}\sqrt{a}) = 1$ implica em $u^{-1}x^{-1}\sqrt{a} \in 1 + \mathcal{M}_B$. Finalmente, $u^{-2}x^{-2}a \in (1 + \mathcal{M}_B) \cap F = 1 + \mathcal{M}_A$. Portanto, $a \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$.

($\Leftarrow$) Temos $a = (1 + m)b^2$, para algum $m \in \mathcal{M}_A$ e algum $b \in F^\times$. Seja $f(X) = X^2 - ab^{-2}$. Note que $f(X) \in A[X] \subseteq A_h[X]$, onde (F_h, A_h) é a 2-henselização de (F, A) . Então $\bar{f} = X^2 - \overline{ab^{-2}} = X^2 - \bar{1} = (X - \bar{1})(X + \bar{1})$. Logo, $\bar{1}$ é raiz simples de $\bar{f}$, pois $\bar{f}' \neq 0$, uma vez que $\text{car}(k_A) \neq 2$. Segue do Lema de Hensel (Teorema 1.16, item (iv)) que f admite uma raiz $c \in F_h$. Portanto, $X - c$ divide $f(X)$ em $F_h[X]$. Do Teorema 5.1 conclui-se que existem duas extensões de A a $F(\sqrt{a})$. $\square$

O próximo lema será utilizado na demonstração do Teorema 5.5.

Lema 5.3 *Se v_B é uma valorização de $K = F(\sqrt{a})$ e A é o anel de valorização de F dado por $B \cap F$, então $\Gamma_B \neq 2\Gamma_B \Leftrightarrow \Gamma_A \neq 2\Gamma_A$.*

Demonstração Já vimos que $\dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_B / 2\Gamma_B \leq \dim_{\mathbb{F}_2} \Gamma_A / 2\Gamma_A$, conforme ([EP], ex. 5.5.2, p.147). Assim, a implicação do lema é imediata. Provemos a recíproca. Da Desigualdade Fundamental (1.2), temos que $\Gamma_A = \Gamma_B$ ou $(\Gamma_B : \Gamma_A) = 2$. Nada temos a provar no primeiro caso. Vamos assumir que $(\Gamma_B : \Gamma_A) = 2$. Novamente utilizando a Desigualdade Fundamental (1.2) temos que B é a única extensão de A ao corpo K . Logo, se σ é o único F -automorfismo não trivial de K , temos $v_B = v_B \circ \sigma$. Segue que para todo $x \in K^\times$, vale que $2v_B(x) = v_A(N(x))$, onde $N : K^\times \rightarrow F^\times$ é aplicação norma. Assim, $2\Gamma_B \subseteq \Gamma_A$. Com isto, não pode ocorrer $\Gamma_B = 2\Gamma_B$. Caso contrário, teríamos $\Gamma_B = \Gamma_A$, contradição. $\square$

Enunciaremos na seqüência uma versão para pro-2-grupos do clássico *Teorema do Subgrupo de Kurosh* da teoria de grupos. Uma demonstração (para um caso mais geral que o necessário para nossos fins) pode ser encontrada em ([N], Teorema 4.2.1, p.208), ou ([BNW]). Seja G um grupo (arbitrário) e H_1, H_2 dois subgrupos de G . Dados $x, y \in G$, definimos a relação

$$x \sim y \text{ se, e somente se, } h_1 x h_2 = y \quad (5.1)$$

para algum $h_1 \in H_1$ e $h_2 \in H_2$. Verifica-se diretamente que “ $\sim$ ” define uma relação de equivalência em G e que a classe de equivalência de $g \in G$ é

$$H_1 g H_2 = \{h_1 g h_2 \in G \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}. \quad (5.2)$$

Uma classe do tipo $H_1 g H_2$ é denominada uma *classe dupla* de G com respeito à H_1, H_2 . A união disjunta

$$G = \bigcup_g H_1 g H_2,$$

produzida pela relação de equivalência, é chamada de uma *decomposição de G em classes duplas com respeito à H_1, H_2* . No caso particular $H_1 = \{1\}$ (respectivamente $H_2 = \{1\}$) obtemos simplesmente a decomposição de G em classes laterais à esquerda (à direita) de G com respeito à H_2 (respectivamente H_1). Finalmente, o caso particular $G = H_1 H_2$ é denominado *decomposição trivial*.

Teorema 5.4 (Kurosh) *Seja G um pro-2-grupo e H um subgrupo aberto ¹ de G . Suponha que $G \cong G_1 * G_2$, com G_1, G_2 subgrupos fechados de G . Sejam*

$$G = \bigcup_{i=1}^n G_1 a_i H \quad e \quad G = \bigcup_{j=1}^m G_2 b_j H, \quad a_i, b_j \in G,$$

decomposições em classes duplas de G com respeito à H, G_1 e H, G_2 , respectivamente. Então

$$H = \left(*_{i=1}^n H \cap a_i G_1 a_i^{-1} \right) * \left(*_{j=1}^m H \cap b_j G_2 b_j^{-1} \right) * \mathcal{F}$$

onde $\mathcal{F}$ é um pro-2-grupo livre de posto $= 1 + (G : H) - (m + n)$.

Teorema 5.5 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado. Suponha que A é compatível com $R(F)$, com $\text{car}(k_A) \neq 2$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$. Seja $K = F(\sqrt{a})$, com $a \in F^\times \setminus R(F)$. Denotamos por A' a única ² extensão de A à K e por $\mathcal{M}'$ o ideal maximal de A' . Então*

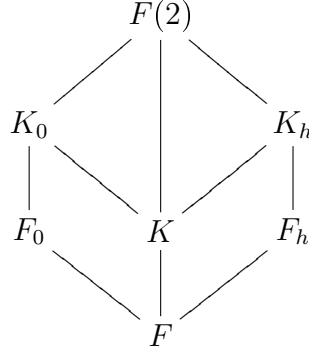
- (1) *Existe uma extensão $L_0 \subseteq F(2)$ de F , com $G_2(L_0)$ um pro-2-grupo livre, tal que $G_2(K) \cong G_2(L_0) * G_2(F_h(\sqrt{a}))$, onde (F_h, v_h) é uma 2-henselização de (F, v_A) .*
- (2) $R(K) = (1 + \mathcal{M}') \dot{K}^2 \neq \dot{K}$.
- (3) $N^{-1}(R(F)) = \dot{F} R(K)$.

Demonstração (1) Como A é $R(F)$ -compatível, o Teorema 3.18 implica que $G_2(F) \cong G_2(F_0) * G_2(F_h)$, onde $F_0 \subseteq F(2)$ e $G_2(F_0)$ é livre. Como $R(F) \neq \dot{F}$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$, segue do Corolário 3.20 que $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A) \dot{F}^2$. Sejam $K_0 = F_0(\sqrt{a})$

¹ H é aberto se é fechado e G/H é finito.

²Vejá Proposição 5.2.

e $K_h = F_h(\sqrt{a})$.



Vamos analisar primeiro o caso em que $a \notin \dot{F}_0^2 \cap \dot{F}$. Isto diz que $K \not\subset F_0$ e portanto $G_2(F_0) \not\subset G_2(K)$. Do Lema 1.18, temos que $\dot{F}_h^2 \cap \dot{F} = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Como $a \notin R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, segue que $K_h \neq F_h$ e $G_2(K_h) \subsetneq G_2(F_h)$. Assim, como $(G_2(F) : G_2(K)) = 2$, obtemos $G_2(F) = G_2(F_0)G_2(K) = G_2(F_h)G_2(K)$. Estas são decomposições triviais de G em classes duplas com respeito à $G_2(K), G_2(F_0)$ e $G_2(K), G_2(F_h)$, respectivamente. Segue do Teorema de Kurosh (Teorema 5.4) que:

$$G_2(K) = \left(G_2(F_0) \cap G_2(K) \right) * \left(G_2(F_h) \cap G_2(K) \right) * \mathcal{F},$$

onde o pro-2-grupo livre $\mathcal{F}$ tem posto igual a 1 ($\Rightarrow \mathcal{F} \cong \mathbb{Z}_2$). Ainda, $G_2(F_0) \cap G_2(K) = G_2(K_0)$ e $G_2(F_h) \cap G_2(K) = G_2(K_h)$. Logo,

$$G_2(K) = G_2(K_0) * G_2(K_h) * \mathbb{Z}_2 \cong G_2(L_0) * G_2(K_h),$$

onde $L_0 \subseteq F(2)$ é o corpo fixo do pro-2-grupo fechado $G_2(K_0) * \mathbb{Z}_2$. O grupo $G_2(K_0)$ é livre, pois é um subgrupo aberto (bastaria fechado) do pro-2-grupo livre $G_2(F_0)$. Portanto, $G_2(L_0) = G_2(K_0) * \mathbb{Z}_2$ é também um pro-2-grupo livre, pois é o produto livre de dois pro-2-grupos livres. Isto conclui a prova do item (1) para o caso em que $a \notin \dot{F}_0^2 \cap \dot{F}$. Agora vamos supor que $a \in \dot{F}_0^2 \cap \dot{F}$. Segue que $G_2(K_0) = G_2(F_0)$. As decomposições de $G_2(F)$ ficam $G_2(F) = G_2(F_h)G_2(K)$ e $G_2(F) = G_2(K) \cup \tau G_2(K) = G_2(F_0)G_2(K) \cup G_2(F_0)\tau G_2(K)$, onde τ é um automorfismo de F tal que $\tau|_K$ é o único automorfismo não trivial de K que fixa F . Por Kurosh,

$$G_2(K) = \left(G_2(F_0) \cap G_2(K) \right) * \left(\tau G_2(F_0)\tau^{-1} \cap G_2(K) \right) * \left(G_2(F_h) \cap G_2(K) \right).$$

Observe que o fator $\mathcal{F}$ é trivial, pois o posto é nulo. Como $G_2(F_h) \cap G_2(K) = G_2(K_h)$,

temos

$$G_2(K) = G_2(L_0) * G_2(K_h),$$

onde $L_0 \subseteq F(2)$ é o corpo fixo do pro-2-grupo livre fechado $(G_2(F_0) \cap G_2(K)) * (\tau G_2(F_0) \tau^{-1} \cap G_2(K))$.

(2) Primeiro vamos verificar que não pode ocorrer $R(K) = \dot{K}$. Se este fosse o caso, teríamos que $G_2(K)$ seria livre. Do item (1), $G_2(K) = G_2(L_0) * G_2(K_h)$, com $G_2(L_0)$ livre. Portanto, $G_2(K_h)$ também seria livre. Logo, $R(K_h) = \dot{K}_h$. Contudo, pelo Lema 2.12, temos que $R(K_h) = \dot{K}_h^2$. Segue que $\dot{K}_h = \dot{K}_h^2$. Assim, toda valorização de K_h teria grupo de valores 2-divisível. Como toda valorização de K_h é extensão de alguma valorização de F_h , o Lema 5.3 diz que toda valorização de F_h também teria grupo de valores 2-divisível. Mas isto não é verdade, pois v_h é valorização de F_h com grupo de valores $\Gamma_h = \Gamma_A \neq 2\Gamma_A$ (lembre que $(F, v_h)/(F, v_A)$ é imediata).

Agora vamos mostrar que $R(K) = (1 + \mathcal{M}')\dot{K}^2$. Como $G_2(K) = G_2(L_0) * G_2(K_h)$, temos $(1 + \mathcal{M}')\dot{K}^2 \subseteq R(K)$. Do Lema 5.3, $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$ implica $\Gamma' \neq 2\Gamma'$. Juntando com o fato de $R(K) \neq \dot{K}$, temos que $R(K) \subseteq (1 + \mathcal{M}')\dot{K}^2$.

(3) Como já observamos, basta provar a inclusão $N^{-1}(R(F)) \subseteq \dot{F}R(K)$, para demonstrarmos o item (3). Seja $x \in K^\times$ tal que $N(x) \in R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Claramente, podemos assumir que $N(x) \in 1 + \mathcal{M}_A$. Denotando $\{1, \sigma\} = G(K/F)$, temos que a valorização $v' \circ \sigma$ é igual a v' (pois A' é a única extensão de A ao corpo K). Note que isto implicará $v'(x) = 0$.

Da Desigualdade Fundamental (1.2), temos dois casos para analisar:

(a) $(\Gamma' : \Gamma_A) = 2$ e $k' = k_A$.

(b) $\Gamma' = \Gamma_A$ e $[k' : k_A] = 2$.

Caso ocorra (a), temos que $\bar{x} = \bar{u}$, para algum $u \in A^\times$. Assim, $xu^{-1} \in 1 + \mathcal{M}'$ e $x \in \dot{F}(1 + \mathcal{M}') \subseteq \dot{F}R(K)$. Assumindo (b), verificaremos inicialmente que $\alpha := \sqrt{a} \in (A')^\times$ e que $k' = k_A(\bar{\alpha})$. Como $\Gamma' = \Gamma_A$, temos que $v'(\alpha) = v_A(\beta)$, para algum $\beta \in F^\times$. Assim, $(\alpha\beta^{-1})^2 \in (A')^\times \cap F = A^\times$. Conseqüentemente, $a \in A^\times \dot{F}^2$. Portanto, podemos assumir que $a \in A^\times$. Segue que $v'(\alpha) = 0$. Observe que caso ocorresse $\bar{a} \in \dot{k}_A^2$, teríamos $\bar{a} = \bar{\rho}^2$, para algum $\rho \in A^\times$. Neste caso, $a\rho^{-2} \in 1 + \mathcal{M}_A$ e $a \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, contradizendo nossa hipótese. Temos portanto $k' = k_A(\bar{\alpha})$.

Voltando à demonstração de (3), lembre que $x \in (A')^\times$ e $N(x) \in 1 + \mathcal{M}_A$. Devemos provar que $x \in \dot{F}(1 + \mathcal{M}')\dot{K}^2$. Obtêm-se da teoria de valorizações e não é

difícil verificar que $\bar{\sigma} : k' \rightarrow k', \bar{\sigma}(\bar{\alpha}) := \overline{\sigma(\alpha)}$, é o automorfismo não trivial de k' que fixa k_A , ou seja, $G(k'/k_A) = \{1, \bar{\sigma}\}$. Denotando por $\bar{N} : \dot{k}' \rightarrow \dot{k}_A$ a correspondente aplicação norma, temos $\bar{1} = \overline{N(x)} = \bar{N}(\bar{x})$. Assim, o Teorema 90 de Hilbert (veja introdução deste capítulo) implica que existe $z \in A^\times$ tal que $\bar{x} = \bar{z}/\bar{\sigma}(\bar{z})$, ou então, $\bar{x} = \bar{z}^2/\bar{N}(\bar{z})$. Segue que $xz^{-2}N(z) \in 1 + \mathcal{M}'$ e $x \in \dot{F}(1 + \mathcal{M}')\dot{K}^2 = \dot{F}R(K)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Concluimos a primeira parte do trabalho. Agora seja (F, v_A) um corpo valorizado e $K = F(\sqrt{a})$, com $a \in 1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$. Sabemos que neste caso A possui duas extensões A_1, A_2 ao corpo K . Sejam $(A_1, \mathcal{M}_1, v_1, k_1, \Gamma_1), (A_2, \mathcal{M}_2, v_2, k_2, \Gamma_2)$ as respectivas notações para os corpos valorizados $(K, v_1), (K, v_2)$. Denotamos por $(K_{h_1}, v_{h_1}), (K_{h_2}, v_{h_2})$ a 2-henselização de (K, v_1) e (K, v_2) , respectivamente. Se (F_h, v_h) é uma 2-henselização de (F, v_A) , podemos escolher $K_{h_1} = F_h, v_{h_1} = v_h$ e $K_{h_2} = \sigma(F_h), v_{h_2} = v_h \circ \sigma$, para algum $\sigma \in G_2(F)$ tal que $\{1, \sigma|_K\} = G(K/F)$. Vamos verificar este fato. Lembre que a construção de (F_h, v_h) é iniciada fixando uma extensão $\mathcal{A}_2$ de A ao fecho quadrático $F(2)$. Depois, F_h é definido como o corpo fixo de $G_h(\mathcal{A}_2) = \{\tau \in G_2(F) \mid \tau\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2\}$ e v_h é a valorização corresponde à $A_h = \mathcal{A}_2 \cap F_h$. Tomando $K_{h_1} = F_h(\sqrt{a}), B_{h_1} = A_h \cap K_{h_1}$ e v_{h_1} a valorização correspondente à B_{h_1} , obtemos ([EP], observação 5.2.4, p.122) que (K_{h_1}, v_{h_1}) é uma 2-henselização de uma extensão, digamos A_1 , de A ao corpo K . Como $a \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subseteq \dot{F}_h^2$, temos que $K_{h_1} = F_h, B_{h_1} = A_h$ e $v_{h_1} = v_h$. A construção de (K_{h_2}, v_{h_2}) é feita fixando-se uma extensão $\mathcal{B}_2$ de A_2 ao fecho quadrático $F(2)$ e tomando-se K_{h_2} o corpo fixo de $G^h(\mathcal{B}_2)$. Pelo Teorema da Conjugação (Teorema 1.14), existe $\sigma \in G_2(F)$ tal que $\sigma\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2$. Observe que isto implica que $\sigma G^h(\mathcal{A}_2)\sigma^{-1} = G^h(\mathcal{B}_2)$. Com isto, $K_{h_2} = \sigma(F_h)$. No teorema a seguir, denotaremos σF_h por F_h^σ .

Teorema 5.6 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado e $K = F(\sqrt{a})$, com $a \in 1 + \mathcal{M}_A \subset R(F) \neq \dot{F}$, $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$ e $\text{car}(k_A) \neq 2$. Manteremos a notação acima para as 2-henselizações de A, A_1 e A_2 . Então*

- (1) *Existe uma extensão $L_0 \subseteq F(2)$ de F , com $G_2(L_0)$ um pro-2-grupo livre, e*

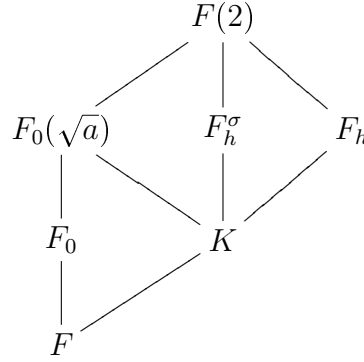
$$G_2(K) \cong G_2(L_0) * G_2(F_h) * G_2(F_h^\sigma),$$

onde (F_h, v_h) é uma 2-henselização de (F, v_A) e $F_h^\sigma = K_{h_1}$ é como acima.

- (2) $R(K) = (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2 \cap (1 + \mathcal{M}_2)\dot{K}^2$.

$$(3) \quad N^{-1}(R(F)) = \dot{F}R(K).$$

Demonstração (1) Como sempre, $G_2(F) = G_2(F_0) * G_2(F_h)$, com $G_2(F_0)$ um pro-2-grupo livre e $F \subset F_0 \subset F(2)$. Como $R(F) \neq \dot{F}$ e $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$, temos que $R(F) = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Lembramos que a decomposição $G_2(F) = G_2(F_0) * G_2(F_h)$ implica na injetividade da aplicação induzida pela inclusão $\dot{F}/\dot{F}^2 \rightarrow \dot{F}_0/\dot{F}_0^2 \times \dot{F}_h/\dot{F}_h^2$. Segue que $\dot{F}_0^2 \cap \dot{F}_h^2 \cap \dot{F} = \dot{F}^2$. Lembre que $\dot{F}_h^2 \cap \dot{F} = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Assim, se $a \in \dot{F}_0^2$, então $a \in \dot{F}^2$. Podemos então descartar este caso. Com isto, $G_2(F_0) \not\subset G_2(K)$. Neste caso temos $G_2(F) = G_2(F_0)G_2(K)$, porque $(G_2(F) : G_2(K)) = 2$. Por outro lado, $G_2(F_h) \subset G_2(K)$, pois $a \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subseteq \dot{F}_h^2$. Assim, $G_2(F) = G_2(K) \cup \sigma G_2(K) = G_2(F_h)G_2(K) \cup G_2(F_h)\sigma G_2(K)$.



Aplicando o Teorema de Kurosh mais uma vez, temos

$$G_2(K) = \left(G_2(F_0) \cap G_2(K) \right) * \left(G_2(F_h) \cap G_2(K) \right) * \left(\sigma G_2(F_h) \sigma^{-1} \cap G_2(K) \right).$$

Observe que novamente não temos o fator $\mathcal{F}$. Como $G_2(F_0) \cap G_2(K) = G_2(F_0(\sqrt{a}))$, $G_2(F_h) \cap G_2(K) = G_2(F_h)$ e $\sigma G_2(F_h) \sigma^{-1} \cap G_2(K) = G_2(F_h^\sigma)$, temos

$$G_2(K) = G_2(F_0(\sqrt{a})) * G_2(F_h) * G_2(F_h^\sigma).$$

Demonstramos assim o item (1), para $L_0 = F_0(\sqrt{a})$. Note que $G_2(L_0)$ é livre, pois é um subgrupo aberto (bastaria fechado) do pro-2-grupo livre $G_2(F_0)$.

(2) De (1) e do Teorema 3.5 segue³ que temos um isomorfismo $\text{res} : {}_2\text{Br}(K) \rightarrow {}_2\text{Br}(L_0) \times {}_2\text{Br}(F_h) \times {}_2\text{Br}(F_h^\sigma)$. Como $R(L_0) = L_0^\times$, temos que ${}_2\text{Br}(L_0) = \{0\}$. Dados $x \in F^\times$ e $y \in (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2 \cap (1 + \mathcal{M}_2)\dot{K}^2$, temos então $(F_h, x, y) = 0$ e $(F_h^\sigma, x, y) = 0$, pois $y \in \dot{F}_h^2 \cap (\dot{F}^\sigma)^2$. Como res é isomorfismo, segue que $(F, x, y) = 0$. Como isto vale

³O Teorema 3.5 vale para o produto livre de um número finito de pro-2-grupos.

para todo $x \in F^\times$, obtemos que $y \in R(F)$. Portanto, $(1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2 \cap (1 + \mathcal{M}_2)\dot{K}^2 \subseteq R(K)$. Provemos a inclusão contrária. Lembre que temos duas extensões A_1, A_2 de A ao corpo K . Segue da Desigualdade Fundamental (1.2) que $(K, v_i)/(F, v_A)$ é imediata, para $i = 1, 2$. Isto quer dizer que $k_i = k_A$ e $\Gamma_i = \Gamma_A$. Assim, $\Gamma_i \neq 2\Gamma_i$ e $k_i \neq k_i(2)$. Portanto, $R(K) \subseteq (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2 \cap (1 + \mathcal{M}_2)\dot{K}^2$.

(3) A primeira observação que verificaremos é que

$$\dot{K} = (1 + \mathcal{M}_i)\dot{F}, \text{ para } i = 1, 2. \quad (5.3)$$

Seja $x \in K^\times$. Como $\Gamma_i = \Gamma_A$, existe $c_i \in F^\times$ tal que $v_i(x) = v_A(c_i)$. Isto implica que $xc_i^{-1} \in A_i^\times$. Como $k_i = k_A$, existe $u \in A^\times$ tal que $\overline{xc_i^{-1}} = \bar{u}$. Segue que $xc_i^{-1}u^{-1} \in 1 + \mathcal{M}_i$ e $x \in (1 + \mathcal{M}_i)\dot{F}$, provando (5.3). Seja agora $x \in K^\times$ tal que $N(x) \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 = R(F)$. De (5.3), podemos escrever $x = \alpha z$, com $z \in 1 + \mathcal{M}_1$ e $\alpha \in F^\times$. Assim, $N(x) = \alpha^2 N(z)$. Daí, $N(z) \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subseteq (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2$. Logo, $z, z\sigma(z) \in (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2$, onde $\{1, \sigma|_K\} = G(K/F)$. Como $(1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2$ é subgrupo de $\dot{K}$, segue que $\sigma(z) \in (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2$. Claramente, $\sigma(\mathcal{M}_2) = \mathcal{M}_1$. Assim, $\sigma((1 + \mathcal{M}_2)\dot{K}^2) = (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2$. Logo, $z \in (1 + \mathcal{M}_2)\dot{K}^2$. Segue que $z \in (1 + \mathcal{M}_1)\dot{K}^2 \cap (1 + \mathcal{M}_2)\dot{K}^2$. Como $x = \alpha z$, temos que $x \in \dot{F}R(K)$. $\square$

Antes de demonstrarmos o teorema final, precisamos tratar de um caso em particular.

Teorema 5.7 *Seja F um corpo quase-pitagórico com $(\dot{F} : R(F)) \leq 4$. Seja $a \in F^\times \setminus \dot{F}^2$ e $N : F(\sqrt{a})^\times \rightarrow F^\times$ a aplicação norma. Então $N^{-1}(R(F)) = \dot{F}R(K)$.*

Demonstração Dividimos esta demonstração em uma série de passos.

Passo 1. Como $R(F) = D_F\langle 1, 1 \rangle$ resulta que $N^{-1}(R(F)) = \dot{F}D_K\langle 1, 1 \rangle$, pelo Princípio da Norma de Knebusch ([L1], Teorema 5.10, p.208).

Passo 2. No caso em que $X(F)$ tem uma única ordem P , ou duas ordens P_1 e P_2 , temos também que $\tilde{u}(F) \leq 2$. De fato seja $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ uma forma quadrática com $n \geq 3$. Como q é isotrópica se e somente se $\langle a_1^{-1} \rangle \times \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ é isotrópica, podemos assumir que $a_1 = 1$. No caso $X(F) = \{P\}$ e q totalmente indefinida teremos necessariamente que existe i tal que $a_i \in -\sum \dot{F}^2$. Logo $r = -a_i \in R(F)$. Fazendo as permutações que forem necessárias podemos obter $q \cong \langle 1, -r, b_3, \dots, b_n \rangle$, para convenientes $b_3, \dots, b_n$ em F . Como $\langle 1, -r \rangle$ é universal, $-b_3 \in D_F\langle 1, -r \rangle$ e assim q é isotrópica.

No caso $X(F) = \{P_1, P_2\}$ temos $R(F) = P_1 \cap P_2$. Temos que considerar duas possibilidades:

- (a) existe i tal que $a_i \in -\Sigma \dot{F}^2$;
- (b) existem $i \neq j$ tais que $a_i \in P_1 \setminus P_2$ e $a_j \in P_2 \setminus P_1$.

Se temos (a), raciocinando como no caso $X(F) = \{P\}$ obtemos que q é isotrópica. Se temos (b), então $a_i a_j^{-1} \notin P_t$, para $t \in \{1, 2\}$. Portanto $r = -a_i a_j^{-1} \in P_1 \cap P_2 = R(F)$. Rearranjando-se convenientemente os coeficientes de q podemos escrever $q \cong \langle a_i, a_j, b_3, \dots, b_n \rangle$, para convenientes $b_3, \dots, b_n$ em F . Observemos agora que $\langle a_i, a_j \rangle \cong \langle a_j \rangle \langle 1, -r \rangle$. Como $D_F \langle 1, -r \rangle = \dot{F}$ vamos obter $\langle a_j \rangle \langle 1, -r \rangle \cong \langle 1, -r \rangle$; assim $\langle a_i, a_j \rangle \cong \langle 1, -r \rangle$. Consequentemente q é “chain” equivalente a $\langle 1, -r, b_3, \dots, b_n \rangle$ (veja [L₁], após a Proposição 5.1). Aplicando-se agora o Teorema 5.2 de ([L₁]) obtemos $q \cong \langle 1, -r, b_3, \dots, b_n \rangle$. Logo q é isotrópica como queríamos.

Passo 3. Nosso último argumento preparatório na demonstração do Teorema 5.7 é que para toda extensão L de F também $\tilde{u}(L) \leq 2$. Só vamos fazer o caso $[L : F] = 2$ que nos interessa (O caso de 2-extensão finita decorre de $L|F$ ser resolúvel por radicais). No caso quadrático temos que $G_2(L(\sqrt{-1}))$ é um subgrupo de $G_2(F(\sqrt{-1}))$. Como $\tilde{u}(F) \leq 2$ obtemos pelo Teorema F de [ELP] que $u(F(\sqrt{-1})) \leq 2$. O Lema 4.13 implica que $G_2(F(\sqrt{-1}))$ é livre. Como subgrupo aberto de pro-2 grupo livre também é pro-2 grupo livre temos que $G_2(L(\sqrt{-1}))$ é livre. Novamente a combinação do Lema 4.13 com o Teorema F de [ELP] implicam $\tilde{u}(L) \leq 2$.

Passo 4. Estamos agora em condições de mostrar o resultado para o caso de K ser formalmente real. Decorre dos passos 2 e 3 que $\tilde{u}(K) \leq 2$. Logo, pelos teoremas E e F de [ELP] temos $R(K) = D_K \langle 1, 1 \rangle$. Assim, o Passo 1 garante o resultado para K formalmente real.

Passo 5. Se K não é formalmente real, então o Teorema F de [ELP] nos diz que $u(K) \leq 2$. Assim, pelo Lema 4.12 temos $R(K) = \dot{K}$. Por outro lado, para termos K não formalmente real é necessário que $K = F(\sqrt{a})$ com $a \in -\Sigma \dot{F}^2$. No nosso caso isso significa que $r = -a \in R(F)$ e para a imagem da norma temos $\text{Im} N = D_F \langle 1, r \rangle = D_F \langle 1, 1 \rangle$. A última igualdade pela Proposição 1 de [C₂]. Como $R(F) = D_F \langle 1, 1 \rangle$, concluímos então que $N^{-1}(R(F)) = \dot{K}$. Como vimos no início deste Passo 5 que $R(K) = \dot{K}$ obtemos o resultado desejado. $\square$

Juntando todos os resultados segue o teorema principal.

Teorema 5.8 (Teorema 90 de Hilbert) *Seja F um corpo e $K = F(\sqrt{a})$. Se existe um elemento $x \in F^\times$ que é $R(F)$ -birígido, então $N^{-1}(R(F)) = \dot{F}R(K)$.*

Demonstração Caso $R = R(F) = \dot{F}$, a afirmação é imediata. Vamos assumir $R(F) \neq \dot{F}$. Como F tem um elemento $R(F)$ -birígido, o Teorema 3.15 garante que F possui um anel de valorização R -compatível A , com $\text{car}(k_A) \neq 2$ e A só poderia ser trivial ($= F$) no “Subcaso quase-pitagórico” também descrito no Teorema 3.15. Vamos supor que não ocorre este caso. Sendo A não trivial, o Lema 3.16 diz que $\Gamma_A \neq 2\Gamma_A$. Agora, basta aplicarmos o item (c) dos últimos dois teoremas e temos o resultado. Novamente pelo Teorema 3.15, se ocorrer o “Subcaso quase pitagórico”, então $(\dot{F} : R(F)) \leq 4$ e $R(F) = \sum \dot{F}^2$. Para resolver este caso, basta aplicarmos o Teorema 5.7. □

CAPÍTULO 6

Radical de Kaplansky e Valorizações em Álgebras de Divisão

Neste capítulo vamos explorar outro campo onde a teoria que desenvolvemos até aqui pode ser aplicada: o estudo da existência de valorizações sobre álgebras de divisão cujo centro admite um anel de valorização compatível com o radical.

Lembramos que $\mathcal{A}$ é uma F -álgebra central simples de dimensão finita (ou simplesmente *csdf*) se o centro de $\mathcal{A}$ é o corpo F , $\mathcal{A}$ não tem ideais bilaterais próprios e a dimensão $[\mathcal{A} : F]$ é finita. Pelo Teorema de Wedderburn, existe um único inteiro positivo n e um único (salvo isomorfismo) anel de divisão D , com centro F , tal que $\mathcal{A} \cong M_n(D)$. Por um *anel de divisão* sobre F entendemos uma álgebra de divisão com centro F .

Uma definição de anel de valorização sobre uma F -álgebra *csdf* foi apresentada por Dubrovin em 1982, no trabalho ([D₁]). Um anel deste tipo ficou conhecido como um *anel de valorização de Dubrovin*. Contudo, as tentativas de desenvolver uma teoria de valorizações em anéis de divisão tiveram início a bem mais tempo. Em 1945, O. Schilling ([Sh]) propôs a definição dos *anéis de valorização totais e invariantes*, que é basicamente a definição de anel de valorização de um corpo aplicada aos anéis de divisão (veja a Definição 6.1).

Utilizando a definição apresentada por Schilling, muitos resultados em

teoria de valorizações sobre anéis de divisão são demonstrados analogamente à correspondente teoria sobre corpos. Contudo, a não validade de uma “versão não comutativa” do Teorema de Chevalley (ou Teorema da Extensão) pode ser verificada no caso de F ser o centro de uma álgebra de divisão D , com dimensão $[D : F]$ finita. O exemplo clássico para isso é $F = \mathbb{Q}$ e $D = \mathcal{H} = (\mathbb{Q}, -1, -1)$. É bem conhecido que todas as valorizações não triviais de $\mathbb{Q}$ são as p -ádicas, onde p é um número primo. Uma valorização p -ádica, com p um primo ímpar, não possui extensão à $\mathcal{H}$, como veremos.

Foi aí que a definição proposta por Dubrovin mostrou-se adequada. Para os anéis de valorização de Dubrovin é válido um análogo do Teorema de Chavalley. Mais especificamente, se $\mathcal{A} = M_n(D)$ é uma F -álgebra *csdf* e A é um anel de valorização de F , então $\mathcal{A}$ possui um anel de valorização de Dubrovin C , tal que $C \cap F = A$. Foi este resultado que fez com que os anéis de valorização de Dubrovin se tornassem úteis nos estudos das álgebras *csdf*. Com isto, uma grande literatura foi produzida sobre o assunto. Porém, esta teoria tem uma desvantagem séria: não fornece uma função valorização adequada como na teoria de valorizações de corpos.

A teoria de valorização (como funções) praticamente permanece a mesma do trabalho de Schilling. Além disto, a partir dos anos 80, utilizou-se com eficiência os anéis de valorização totais e invariantes na solução de problemas sobre álgebras de divisão. Isto pode ser comprovado em diversos artigos. Por exemplo, em ([JW]), Jacob e Wadsworth utilizaram esses anéis de valorização na construção de álgebras que não são produto cruzado. Em geral, as atuais pesquisas sobre o assunto optam por considerar a classe dos anéis de valorização totais e invariantes quando se trata de um anel de divisão. A grosso modo, podemos dizer que as valorizações de Schilling representam a “elite” da teoria de valorização não comutativa.

Neste capítulo, uma valorização sobre um anel de divisão é sempre considerada no sentido de Schilling. Um anel de valorização total e invariante será denominado simplesmente de um anel de valorização.

Seja D uma F -álgebra de divisão de dimensão finita sobre F . Wadsworth provou em ([Wa₁]) que um anel de valorização A de F tem uma extensão total e invariante a D se, e somente se, A tem única extensão a cada corpo intermediário

$K : F \subset K \subset D$. Muitas vezes este critério é útil. Podemos utilizá-lo no caso $\mathcal{H} = (\mathbb{Q}, -1, -1)$, produzindo uma extensão K de $F = \mathbb{Q}$, com $K \subset \mathcal{H}$, para a qual $\mathbb{Z}_{(p)}$ tenha duas extensões distintas quando p é um número primo ímpar. Pelo bem conhecido Teorema de Langrange da teoria elementar dos números, existem $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tais que $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Obrigatoriamente, dois destes números serão diferentes de zero. Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, obtêm-se outros números (que continuamos denotando por a, b, c, d) tais que $p^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Com uma verificação elementar conclui-se que o conjunto $\{a, b, c, d\}$ continua possuindo dois elementos diferente de zero. Assim, definindo $x = \frac{1}{p}(a + bi + cj + dk)$ é um elemento de $\mathcal{H}$ que não está em $\mathbb{Q}$. Como $N(x) = x\bar{x} = \frac{1}{p^2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 1$, temos que $\bar{x} = x^{-1} \in \mathbb{Q}(x)$. Portanto, se denotarmos por σ o automorfismo de $\mathcal{H}$ dado pela conjugação $y \mapsto \bar{y}$, teremos que a restrição de σ ao corpo $\mathbb{Q}(x)$ produz um automorfismo de $\mathbb{Q}(x)$. Denotando por $A(p)$ uma extensão de $\mathbb{Z}_{(p)}$ ao corpo $\mathbb{Q}(x)$, a imagem $\sigma(A(p))$ é também um anel de valorização de $\mathbb{Q}(x)$ que estende $\mathbb{Z}_{(p)}$. Observe que $x \notin \sigma(A(p))$. Caso contrário, $x + \bar{x} = \frac{2a}{p} \in \sigma(A(p)) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_{(p)}$, o que não pode ocorrer. Portanto, $\mathbb{Z}_{(p)}$ possui duas extensões distintas à K . Pelo critério de Wadsworth, $\mathbb{Z}_{(p)}$ não tem extensão a $\mathcal{H}$. Observe que o argumento não pode ser aplicado para $p = 2$, pois neste caso, $x + \bar{x} = 1$.

Patrick Morandi ([Mo₁]) demonstrou um teorema equivalente ao resultado de Wadsworth. Se D é uma álgebra de divisão de dimensão finita sobre F e A é um anel de valorização de F , o resultado de Morandi diz que A se estende à D se, e somente se, $D \otimes_F H$ é anel de divisão, onde H é uma henselização de F (veja Definição 6.6). Isto explica o rápido desenvolvimento da teoria de álgebras de divisão de dimensão finita sobre corpos henselianos (corpos com um anel de valorização que admite extensão única à toda extensão algébrica). Pela aplicação do resultado de Wadsworth, quando o centro é henseliano, uma álgebra de divisão com dimensão finita sempre admite um anel de valorização.

O resultado de Morandi também pode ser aplicado para analisar o caso da álgebra $\mathcal{H} = (\mathbb{Q}, -1, -1)$. Para o corpo valorizado $(\mathbb{Q}, v_p)$, a henselização é a parte algébrica do corpo dos números p -ádicos $\mathbb{Q}_p$, cuja valorização aplica $\sum a_i p^i$ em $\min\{i \mid a_i \neq 0\}$. Se $p = 2$, $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_2$ é a única álgebra de quatérnios com divisão sobre $\mathbb{Q}_2$ (conforme [L₁], Corolário 2.24, p.163). Assim, o teorema de Morandi implica que $\mathbb{Z}_{(2)}$ se estende à $\mathcal{H}$. Se p é ímpar, então $-1 \in D_F\langle 1, 1 \rangle$. De fato,

se $p \equiv 1 \pmod{4}$ sabemos que $-1 \in (\mathbb{F}_p)^\times$. Aplicando o Lema de Hensel para o polinômio $X^2 + 1$, temos que -1 é um quadrado em $\mathbb{Q}_p$. Se $p \equiv 3 \pmod{4}$, então -1 é uma soma de dois quadrados em $\mathbb{Q}_p$, conforme ([L₁], Corolário 2.6, p.154). Portanto, para p ímpar, aplicamos a Proposição 1.8 com $a = b = -1$ e concluímos que $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong (\mathbb{Q}_p, -1, -1)$ não é anel de divisão. Assim, $\mathbb{Z}_{(p)}$ não se estende à $\mathcal{H}$.

Em geral, não se conhece os corpos intermediários de uma álgebra de divisão. Portanto, a aplicação do critério de Wadsworth não é fácil. Isto justifica o fato de continuar em aberto a questão: Um corpo valorizado (F, v_A) precisa mesmo ser henseliano para que **toda** F -álgebra de divisão admita uma extensão de A ? Qual é a condição precisa para que isto ocorra?

Neste capítulo apresentamos uma solução para este problema quando restrito à família das álgebras de quatérnios e das *álgebras biquaterniônicas*. Por definição, uma álgebra biquaterniônica é um produto tensorial $A_1 \otimes_F A_2$, onde A_1 e A_2 são F -álgebras de quatérnios. Dado um corpo valorizado (F, v_A) , demonstraremos que toda F -álgebra de quatérnios de divisão admite um anel de valorização que estende A se, e somente se, $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$. O resultado é estendido às álgebras biquaterniônicas, conforme o Teorema 6.9.

Nosso resultado produz uma condição mais fraca que a henselianidade para a extensão de anéis de valorização às álgebras de divisão citadas. Resumidamente, o caso do corpo F ser henseliano corresponde à $R(F) = \dot{F}^\times$. Isto revela aplicações inesperadas do Radical de Kaplansky, objeto até então desconsiderado completamente na teoria de valorizações sobre álgebras de divisão. Ainda mais, fica bastante ampliada a classe de corpos sobre os quais as álgebras biquaterniônicas podem ser estudadas por meio da teoria de valorização. Em relação às álgebras de quatérnios, nosso resultado permite concluir que o Radical de Kaplansky é objeto adequado para relacionarmos a “teoria não comutativa” de valorizações com a teoria de formas quadráticas.

Passemos às definições e resultados preliminares.

Definição 6.1 *Seja D um anel de divisão com dimensão finita sobre seu centro F e Γ um grupo abeliano totalmente ordenado. Uma aplicação sobrejetora $v : D \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ é chamada de uma valorização de D se:*

$$(a) \ v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(b) \ v(xy) = v(x) + v(y), \text{ para todos } x, y \in D.$$

$$(c) \ v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}, \text{ para todos } x, y \in D.$$

Analogamente ao caso comutativo, a ordem total e operação aditiva de Γ são estendidas naturalmente à $\Gamma \cup \{\infty\}$. Dos itens (a) e (b) da Definição 6.1, prova-se que o conjunto $C = \{x \in D : v(x) \geq 0\}$ forma um subanel de D e pelo uso das propriedades básicas $v(-x) = v(x)$, $v(x^{-1}) = -v(x)$, para todo $x \in D^\times := D \setminus \{0\}$, verifica-se que:

$$(1) \text{ Para todo } x \in D^\times, x \in C \text{ ou } x^{-1} \in C \text{ (totalidade).}$$

A comutatividade de Γ e novamente a propriedade $v(x^{-1}) = -v(x)$ implicam:

$$(2) \ xCx^{-1} = C, \text{ para todo } x \in D^\times \text{ (invariância).}$$

Por isso, C é denominado um *anel de valorização total e invariante* de D . Em geral, um *anel de valorização total* de D é definido como um subanel de D que satisfaz (1). Se além disso, tal subanel satisfizer (2), então ele é chamado de um *anel de valorização total e invariante* de D . Recordamos que neste trabalho suprimimos os adjetivos “total” e “invariante”, assumindo sempre que um anel de valorização de um anel de divisão sempre tem as propriedades (1) e (2).

Mais uma vez em analogia com o caso comutativo, a um anel de valorização corresponde uma valorização. Seja $C^\times$ o grupo das unidades de C e $\dot{D}$ o grupo multiplicativo de D . Considere $\Gamma_C = \dot{D}/C^\times$, com operação $aC^\times + bC^\times := abC^\times$ e munido da relação $aC^\times \geq bC^\times \Leftrightarrow bC^\times \subseteq aC^\times$. Então Γ_C é um grupo abeliano totalmente ordenado por “ $\leq$ ”. A aplicação $v_C : D \rightarrow \Gamma_C \cup \{\infty\}$, que manda $a \neq 0$ em $v_C(a) = aC$ e $v_C(0) = \infty$, é uma valorização de D cujo anel de valorização associado é C . Definindo que duas valorizações de D são equivalentes se possuem o mesmo anel de valorização associado, obtêm-se uma correspondência bijetiva entre valorizações equivalentes e anéis de valorização de D . Portanto, é equivalente trabalharmos com anéis de valorizações ou com valorizações em D .

Mais uma vez citamos o exemplo $\mathcal{H} = (\mathbb{Q}, -1, -1)$. O conjunto

$$C = \mathbb{Z}_{(2)}\alpha + \mathbb{Z}_{(2)}i + \mathbb{Z}_{(2)}j + \mathbb{Z}_{(2)}k, \text{ onde } \alpha = \frac{1}{2}(1 + i + j + k),$$

é o anel de valorização de $\mathcal{H}$ que estende $\mathbb{Z}_{(2)}$. A verificação que C é fechado para soma e multiplicação é facilitada se adotarmos uma descrição alternativa para C como os elementos de $\mathcal{H}$ que tem coeficientes em $\mathbb{Z}_{(2)}$ ou em $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{(2)}$. Embora longa demais para expormos aqui, a demonstração da totalidade de C pode ser feita diretamente, tomando $x \in \mathcal{H}^\times \setminus C$ e provando que $x^{-1} \in C$. A valorização correspondente é $v(a) = \frac{1}{2}v_2(N(a))$, para todo $a \in \mathcal{H}^\times$. Aqui, v_2 é a valorização 2-ádica de $\mathbb{Q}$. Segue da definição de v que o grupo de valores é $\Gamma = \frac{1}{2}\mathbb{Z} := \{\frac{a}{2} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$.

Inicialmente estamos interessados no caso em que a álgebra de divisão D é uma álgebra de quatérnios. A estrutura destas álgebras é bem simples: já vimos que uma F -álgebra de quatérnios (F, a, b) é um F -espaço vetorial com base $\{1, i, j, k\}$ e obedecendo as relações básicas $i^2 = a$, $j^2 = b$ e $ij = k = -ji$. Precisamos inicialmente entender como uma valorização de F se estende à (F, a, b) . Um corpo intermediário K : $F \subset K \subset (F, a, b)$ é necessariamente uma extensão quadrática de F , que podemos denotar por $K = F(\sqrt{\alpha})$, para algum $\alpha \in F^\times \setminus \dot{F}^2$. Neste caso, temos um critério exato para saber se um anel de valorização de F tem uma ou duas extensões à K , conforme $\alpha \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$ ou não (Proposição 5.2).

É indispensável para nosso estudo decidir quando o fato de (F, a, b) ser uma álgebra de divisão implica que $F_h \otimes_F (F, a, b)$ é também uma álgebra de divisão, onde (F_h, v_h) é uma 2-henselização de (F, v_A) . Lembramos que (F, a, b) é álgebra de divisão se, e somente se, $b \notin D_F\langle 1, -a \rangle$. Convenientemente, o lema abaixo relaciona os grupos $D_{F_h}\langle 1, -a \rangle$ e $D_F\langle 1, -a \rangle$. Como sempre, $D_F\langle 1, -a \rangle = D\langle 1, -a \rangle$.

Lema 6.2 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, com a notação $(k_A, \mathcal{M}_A, \Gamma_A, \pi_A, \dots)$ de sempre e $\text{car}(k_A) \neq 2$. Suponha que (L, v_B) é uma extensão imediata de (F, v_A) , com B um anel de valorização 2-henseliano¹. Seja $\mathcal{M}_B$ o ideal maximal de B e $\pi_B : B \rightarrow B/\mathcal{M}_B = k_B$ a projeção canônica. Então,*

$$(a) \quad L^\times = \dot{F}\dot{L}^2.$$

$$(b) \quad \dot{L}^2 \cap F = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2.$$

Sejam $a \in F^\times \setminus (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, $K' = L(\sqrt{a})$ e $K = F(\sqrt{a})$. Se $\dot{K}' = \dot{K}(\dot{K}')^2$, então

$$(c) \quad D_L\langle 1, -a \rangle = D_F\langle 1, -a \rangle\dot{L}^2.$$

¹Não estamos assumindo que $L \subseteq F(2)$. Caso L esteja contido em $F(2)$, então (L, v_B) é uma 2-henselização de (F, v_A) . Neste caso, os itens (a) e (b) do Lema 6.2 já foram vistos no Lema 1.18.

$$(d) D_L\langle 1, -a \rangle \cap \dot{F} = (1 + \mathcal{M}_A)D_F\langle 1, -a \rangle.$$

Demonstração (a) Como (L, v_B) é uma extensão imediata de (F, v_A) , para cada $x \in \dot{L}$, existe $c \in F^\times$ tal que $v_B(x) = v_B(c)$. Isto implica em $xc^{-1} \in B^\times$. Como $k_B = k_A$, podemos encontrar $u \in A^\times$ tal que $\pi_B(xc^{-1}) = \pi_B(u)$ e concluir que $xc^{-1}u^{-1} \in 1 + \mathcal{M}_B \subset \dot{L}^2$, pois B é 2-henseliano. Portanto, $x \in \dot{F}\dot{L}^2$.

(b) Tome $z \in \dot{L}^2 \cap F$. Seja $x \in L$ tal que $z = x^2$. Como na prova do item (a), existem $c, u \in F^\times$ tais que $x \in cu(1 + \mathcal{M}_B)$. Com isto, $x^2(cu)^2 \in (1 + \mathcal{M}_B) \cap F = 1 + \mathcal{M}_A$. Assim, $z \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. A outra inclusão segue de $1 + \mathcal{M}_A \subseteq 1 + \mathcal{M}_B \subset \dot{L}^2$.

(c) $D_L\langle 1, -a \rangle = N_{K'/L}(\dot{K}(\dot{K}')^2) \subseteq D_F\langle 1, -a \rangle \dot{L}^2$. A outra inclusão é imediata.

(d) Pelo item anterior, $D_L\langle 1, -a \rangle \cap \dot{F} = D_F\langle 1, -a \rangle \dot{L}^2 \cap \dot{F}$. Verifica-se diretamente que $D_F\langle 1, -a \rangle \dot{L}^2 \cap \dot{F} = D_F\langle 1, -a \rangle (\dot{L}^2 \cap \dot{F})$. Pelo item (b), $D_F\langle 1, -a \rangle (\dot{L}^2 \cap \dot{F}) = (1 + \mathcal{M}_A)D_F\langle 1, -a \rangle$, concluindo a prova de (d). $\square$

Exemplo. Seja $(L, v_B) = (F_h, v_h)$ a 2-henselização de (F, v_A) . Temos que valem (a) e (b). Seja $a \in \dot{F} \setminus (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Escolhemos $K_h = K' = F_h(\sqrt{a})$. Como $a \notin (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$, a Proposição 5.2 garante A possui uma única extensão A_1 a $K = F(\sqrt{a})$. De ([EP], observação 5.2.4, p.122), $K_h = K'$ é uma 2-henselização de K em relação à A_1 . Pelo item (a), temos $\dot{K}_h = \dot{K}\dot{K}_h^2$. Assim, valem (c): $D_h\langle 1, -a \rangle = D_F\langle 1, -a \rangle \dot{F}_h^2$, onde $D_h\langle 1, -a \rangle = D_{F_h}\langle 1, -a \rangle$ e (d): $D_h\langle 1, -a \rangle \cap \dot{F} = (1 + \mathcal{M}_A)D_F\langle 1, -a \rangle$.

O próximo teorema é uma versão, relativa às álgebras de quatérnios, dos resultados de Wadsworth ([Wa₁]) e Morandi ([Mo₁], Teorema 2). Exceto a implicação (2) $\Rightarrow$ (1) (que segue [Wa₁]), fizemos novas demonstrações dos resultados citados, utilizando argumentos mais simples e diretos. Ao leitor isto é conveniente, pois torna o texto um pouco mais auto suficiente.

Teorema 6.3 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, com $\text{car}(k_A) \neq 2$, e seja (F_h, v_h) uma 2-henselização de (F, v_A) . Seja (F, a, b) uma F -álgebra de quatérnios, com divisão. São equivalentes:*

- (1) (F, a, b) possui um anel de valorização que estende A .
- (2) A tem extensão única a toda extensão quadrática de F contida em (F, a, b) .
- (3) $(F, a, b) \otimes_F F_h$ é álgebra de divisão.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $D = (F, a, b)$, C o anel de valorização de D que estende A , e seja w a valorização associada à C . Seja K uma extensão quadrática de F contida em D . A totalidade de C implica que $C \cap K$ é um anel de valorização de K que estende A . Denotamos por u a restrição de w à K . Ainda, seja B outra extensão de A à K e u_B uma correspondente valorização. Pelo Teorema da Conjugação, temos que $B = \sigma(C \cap K)$ (equivalentemente, $u_B = u \circ \sigma$), onde σ é o gerador de $G(K/F)$. Pelo Teorema de Skolem-Noether ([Re], Teorema 7.21, p.103), existe um automorfismo interno $\bar{\sigma}$ de D , que restrito à K é igual a conjugação σ . Seja $d \in D^\times$, tal que $\bar{\sigma}(x) = dx d^{-1}$, para todo $x \in D$. Para todo $y \in K$, temos $u_B(y) = u(\sigma(y)) = u(dy d^{-1}) = w(dy d^{-1}) = w(y) = u(y)$, pois $y \in K$. Portanto, $u_B = u$ e $B = C \cap K$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja $D = (F, a, b)$. Com uma verificação direta conclui-se que a ordem (total) de Γ_A se estende ao grupo abeliano $\frac{1}{2}\Gamma_A$,² através da relação $\gamma_1/2 \leq \gamma_2/2 \Leftrightarrow 2\gamma_2 \leq 2\gamma_1$. Sendo $N : D^\times \rightarrow F^\times$ a aplicação norma, definimos $w : D \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_A \cup \{\infty\}$, pondo $w(0) = \infty$ e

$$w(x) = \frac{1}{2}v_A(N(x)), \text{ se } x \in D^\times.$$

Vamos verificar que w é uma valorização de D que estende v . Que w restrita a F é igual a v e que $w(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$ é imediato. Como a norma é um homomorfismo entre os grupos multiplicativos $\dot{D}$ e $\dot{F}$, temos que $w(xy) = w(x) + w(y)$, para todos os $x, y \in D^\times$. O caso em que $x = 0$ ou $y = 0$ é trivial. Resta provar que $w(x + y) \geq \min\{w(x), w(y)\}$, para todos $x, y \in D$. Seja $K \subset D$ uma extensão quadrática de F e u uma valorização de K que estende v_A . Vamos verificar que $w|_K = u$. Seja $z \in K$. Se $z \in F$, é claro que $w(z) = u(z) = v_A(z)$. Suponha que $z \notin F$. Note que a restrição de N ao corpo K é igual à norma $N_{K/F} : K^\times \rightarrow F^\times$. Segue que $N(z) = N_{K/F}(z) = z\sigma(z)$, onde $\langle \sigma \rangle = G(K/F)$. Por hipótese, v_A tem extensão única à K . Logo, $u = u \circ \sigma$. Assim,

$$w(z) = \frac{1}{2}v_A(N(z)) = \frac{1}{2}\left(u(z) + u(\sigma(z))\right) = u(z).$$

Agora podemos verificar que $w(x + y) \geq \min\{w(x), w(y)\}$. Podemos supor x, y não nulos. Seja $K \subset D$ uma extensão quadrática de F contendo $x^{-1}y$. Como w é uma valorização de K , temos $w(1 + x^{-1}y) \geq \min\{w(1), w(x^{-1}y)\}$. Assim, como vale a multiplicatividade de w , temos

²Por ser um grupo abeliano, o grupo de valores Γ_A tem uma estrutura natural de $\mathbb{Z}$ -módulo. Por definição, o fecho divisível de Γ_A é o $\mathbb{Z}$ -módulo divisível $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_A$. Assim, $\frac{1}{2}\Gamma_A$ pode ser identificado como o submódulo $\{\frac{\gamma}{2} \mid \gamma \in \Gamma\}$ de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_A$. O elemento $\frac{1}{2} \otimes \gamma$ é identificado com $\frac{\gamma}{2}$.

$$w(x + y) = w(x) + w(1 + yx^{-1}) \geq w(x) + \min\{w(1), w(x^{-1}y)\} = \min\{w(x), w(y)\}.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sabemos que $(F, a, b) \otimes_F F_h \cong (F_h, a, b)$. De (2), A tem uma única extensão à $K(\sqrt{a})$. Assim, a Proposição 5.2 implica que $a \notin (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Por contradição, vamos supor que (F_h, a, b) não é um anel de divisão. Então $a \in D_h\langle 1, -b \rangle \cap \dot{F} = (1 + \mathcal{M}_A)D_F\langle 1, -b \rangle$, onde a última igualdade é obtida do Lema 6.2, parte (d). Sejam $u \in 1 + \mathcal{M}_A$ e $c \in D_F\langle 1, -b \rangle$ tais que $a = uc$. Então, $(F, a, b) \cong (F, uc, b) \cong (F, u, b)$, pois $b \in D_F\langle 1, -c \rangle$. Assim, podemos considerar $F(\sqrt{u})$ como uma extensão quadrática de F contida em (F, a, b) e $u \in 1 + \mathcal{M}_A$. Novamente da Proposição 5.2, segue que A tem duas extensões à $F(\sqrt{u})$, contradizendo a hipótese.

(3) $\Rightarrow$ (2) Seja $K = F(\sqrt{c})$ uma extensão quadrática de F contida em (F, a, b) . Como (F_h, a, b) é uma álgebra de divisão, sua subálgebra $F(\sqrt{c}) \otimes_F F_h \cong F_h(\sqrt{c})$ é um corpo. Portanto, o polinômio minimal $\min(c, F)$ permanece irreduzível em $F_h[X]$. Do Teorema 5.1, o número de extensões de A à $K = F(\sqrt{c})$ é igual ao número de fatores irreduzíveis de $\min(c, F)$ em $F_h[X]$. Portanto, A tem única extensão à K . $\square$

O teorema seguinte estabelece a conexão entre Radical de Kaplansky, existência de valorizações sobre álgebras de quatérnios e a teoria de formas quadráticas.

Teorema 6.4 *Sejam (F, v_A) um corpo valorizado ($\text{car}(k_A) \neq 2$) e (F_h, v_h) uma 2-henselização de (F, v_A) . São equivalentes:*

- (1) $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$.
- (2) *O anel de valorização A tem extensão única para toda extensão quadrática de F contida numa álgebra quaterniônica de divisão (F, a, b) , com $a, b \in F^\times$.*
- (3) *Toda F -álgebra quaterniônica de divisão (F, a, b) possui um anel de valorização $C(a, b)$ que é uma extensão de A , ou seja, $C(a, b) \cap F = A$. A valorização associada a $C(a, b)$ é*

$$v_{a,b} : (F, a, b) \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_A \cup \{\infty\}$$

que aplica $x \neq 0$ em $\frac{1}{2}v(N(x))$ e $v_{a,b}(0) = \infty$.

- (4) *A F_h -álgebra de quatérnios $(F_h, a, b) = (F, a, b) \otimes_F F_h$ é uma álgebra de divisão, sempre que (F, a, b) é álgebra de divisão.*

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $c \in \dot{F} \setminus \dot{F}^2$ e (F, a, b) uma álgebra quaterniônica de divisão. Suponha que $F \subset F(\sqrt{c}) \subset (F, a, b)$ e que A tenha duas extensões à $F(\sqrt{c})$. Da Proposição 5.2, $c \in (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2 \subseteq R(F)$, por hipótese. Lembrando que $R(F) = \bigcap_{x \in \dot{F}} D\langle 1, -x \rangle$, temos que (F, c, x) não tem divisão, para todo $x \in F^\times$. Por outro lado, $F(\sqrt{c}) \subset (F, a, b)$ implica $(F, a, b) \cong (F, c, y)$, para algum $y \in F^\times$ (conforme o Lema 1.9). Assim, (F, a, b) não pode ser álgebra de divisão, contradição. (2) $\Rightarrow$ (1) Por contradição, vamos supor que $c \in 1 + \mathcal{M}_A$ e $c \notin R(F)$. Então existe $e \in F^\times$ tal que $e \notin D\langle 1, -c \rangle$. Segue que (F, c, e) é anel de divisão. Assim, $F(\sqrt{c}) \subset (F, c, e)$ e como $c \in 1 + \mathcal{M}_A$, temos que A tem duas extensões a $F(\sqrt{c}) \subset (F, c, e)$, contradizendo a hipótese. (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) seguem do Teorema 6.3. $\square$

Uma consequência imediata do teorema acima é o seguinte corolário.

Corolário 6.5 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, com $\text{car}(k_A) \neq 2$. Suponha $R(F) = \dot{F}^2$. Se toda F -álgebra quaterniônica de divisão admite um anel de valorização que estende A , então A é 2-henseliano.*

O restante deste capítulo é dedicado à provar que a compatilidade $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$ é também a condição necessária e suficiente para que toda F -álgebra biquaterniônica de divisão possua um anel de valorização total e invariante estendendo A . Iniciaremos com mais algumas definições da teoria de valorizações.

Seja (F, v_A) um corpo valorizado. Se A tem extensão única ao fecho quadrático $F(2)$, então sabemos que A é denominado de anel de valorização 2-henseliano. Precisaremos agora de uma noção mais geral. Seja F^s o fecho separável de F . Quando A tem extensão única a F^s , diremos que A é um anel de valorização *henseliano*, ou que (F, v_A) é um *corpo henseliano*. Se isto valer, é claro que A também é 2-henseliano.

Definição 6.6 *Uma henselização de (F, v_A) é uma extensão valorizada (H, v_H) de (F, v_A) , com $H \subseteq F^s$ e:*

- (a) *O anel de valorização A_H associado a v_H é henseliano.*
- (b) *Se (F_1, A_1) é uma extensão henseliana de (F, A) , então existe um (unicamente determinado) mergulho $i : (H, A_H) \rightarrow (F_1, A_1)$, isto é, $i(A_H) = A_1 \cap i(H)$ e a restrição i a F é a identidade.*

A construção de (H, v_H) inicia-se fixando uma extensão A^s de A ao fecho separável F^s . O grupo de decomposição de A é definido como $G^h(A^s) = \{\sigma \in G(F^s/F) : \sigma A^s = A^s\}$. Por ([EP], Lema 5.2.1, p.121), $G^h(A^s)$ é um subgrupo fechado de $G(F^s/F)$. Define-se H como o corpo fixo de $G^h(A^s)$ e $A_H := A^s \cap F^H$. Como todas as extensões de A à F são conjugadas (Teorema 1.14), segue que A_H tem extensão única à F^s e portanto é henseliano. A prova que (H, v_H) satisfaz o item (b) da Definição 6.6 pode ser vista em ([EP], Teorema 5.2.2, item (2), p.121), ou em ([E], Teorema 17.11, p.131). Assim como a 2-henselização, a extensão $(H, v_H)/(F, v_A)$ é imediata: se Γ_H e k_H são, respectivamente, o grupo de valores de v_H e corpo residual de A , então $\Gamma_H = \Gamma_A$ e $k_H = k_A$. Veja ([EP], Teorema 5.2.5, p.122), ou ([E], Teorema 17.19, p.136), para a demonstração deste fato).

Observação É usual expor primeiro a construção da henselização (H, v_H) e depois definir $F_h = H \cap F(2)$ e $v_h = v_H|_{F(2)}$. Por utilizarmos a henselização somente neste final de capítulo, optamos por modificar este processo.

Como já foi dito, nosso último objetivo é provar que a compatibilidade $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$ assegura que se D é uma F -álgebra biquaterniônica de divisão, então D possui um anel de valorização que estende A . Isto será provado indiretamente, aplicando o resultado de Morandi ([Mo₁]), citado na introdução, que garante que a extensão existe se $D \otimes_F H$ for uma álgebra de divisão, onde (H, v_H) é uma henselização de (F, v_A) . No caso de uma álgebra de quatérnios (F, a, b) vimos que era suficiente considerar a 2-henselização de (F, v_A) . A razão para agora aparecer a henselização é justamente o fato de não conhecermos satisfatoriamente os corpos intermediários K : $F \subset K \subset D$, quando D é biquaterniônica, conforme pode ser visto na introdução do trabalho ([LLT]). Na sequência, citamos alguns fatos básicos sobre as álgebras biquaterniônicas.

O clássico Teorema de Albert estabelece condições para que uma álgebra biquaterniônica seja de divisão. Estudaremos apenas uma dessas condições, que é a que interessa diretamente ao nosso trabalho. Dizemos que as álgebras de quatérnios (F, a, b) e (F, c, d) são *ligadas pela extensão* $F(\sqrt{z})$, se existe $z \in F^\times$ tal que $(F, a, b) \cong (F, a, z)$ e $(F, c, d) \cong (F, c, z)$. Caso contrário, diremos que (F, a, b) e (F, c, d) não são ligadas.

Teorema 6.7 (Albert) *Seja $\mathcal{A} = (F, a, b) \otimes_F (F, c, d)$ uma álgebra biquaterniônica. Então $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão se, e somente se, as álgebras de quaternios (F, a, b) e (F, c, d) não são ligadas.*

Demonstração Se (F, a, b) e (F, c, d) são ligadas pela extensão $F(\sqrt{z})$, então $(F, a, b) \otimes_F (F, c, d) \cong (F, a, z) \otimes_F (F, c, z) \cong (F, ac, z) \otimes_F M_2(F)$, pelo item (d) do Lema 1.10. Portanto, $\mathcal{A}$ não é álgebra de divisão. Reciprocamente, se (F, a, b) e (F, c, d) não são ligadas, a demonstração de que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão pode ser vista em ([L₁], Teorema de Albert 4.8, p.70). Esta também é a referência para outras equivalências do teorema. $\square$

Seja $\mathcal{A}$ como no Teorema 6.7. Caso $\mathcal{A}$ não seja uma álgebra de divisão, então segue do Teorema de Wedderburn que $A \cong M_4(F)$ ou existem $y, z \in F^\times$, tais que $\mathcal{A} \cong M_2(B)$, onde B é a álgebra de divisão (F, y, z) . Em ${}_2\text{Br}(F)$, temos $[\mathcal{A}] = 0$ no primeiro caso e $[\mathcal{A}] = [B]$ no segundo.

Veremos agora que o Lema 6.2 pode ser utilizado com $(L, v_B) = (H, v_H)$, a henselização de (F, v_A) . Com isto, poderemos demonstrar a Proposição 6.8 e o teorema final seguirá facilmente.

Seja (F, v_A) um corpo valorizado e (H, A_H) a sua henselização. Já vimos que A_H é também 2-henseliano. Como $(H, v_H)/(F, v_A)$ é imediata, o Lema 6.2 assegura as igualdades:

$$H^\times = \dot{F}\dot{H}^2. \quad (6.1)$$

$$\dot{H}^2 \cap \dot{F} = (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2. \quad (6.2)$$

Seja $a \notin (1 + \mathcal{M}_A)\dot{F}^2$. Pela Proposição 5.2, A tem exatamente uma extensão, digamos A_1 , a $K := F(\sqrt{a})$. Para $K_H := H(\sqrt{a})$, podemos aplicar ([EP], observação 5.2.4, p.122) e temos que K_H é uma henselização de K em relação à A_1 . Segue de (6.1), que $\dot{K}_H = \dot{K}\dot{K}_H^2$. Pelo Lema 6.2, temos

$$D_H\langle 1, -a \rangle = D_F\langle 1, -a \rangle \dot{H}^2, \text{ para todo } a \notin 1 + \mathcal{M}_A. \quad (6.3)$$

$$D_H\langle 1, -a \rangle \cap \dot{F} = D_F\langle 1, -a \rangle (1 + \mathcal{M}_A), \text{ para todo } a \notin 1 + \mathcal{M}_A. \quad (6.4)$$

Proposição 6.8 *Seja (F, v_A) corpo valorizado e (H, v_H) sua henselização. Se A é compatível com $R(F)$, então*

(a) (F, a, b) é anel de divisão $\Leftrightarrow (H, a, b)$ é anel de divisão.

(b) $(F, a, b) \cong (F, c, d) \Leftrightarrow (H, a, b) \cong (H, c, d)$.

Demonstração (a) A direção $(\Leftarrow)$ é imediata, pois $(H, a, b) \cong (F, a, b) \otimes_F H$. Provemos $(\Rightarrow)$. Por contradição, assumiremos que (H, a, b) não é álgebra de divisão. Assim, $b \in D_H\langle 1, -a \rangle$. Podemos assumir que $b \notin 1 + \mathcal{M}_A$. Caso contrário, como $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F) = \bigcap_{x \in F^\times} D\langle 1, -x \rangle$, teríamos $b \in D\langle 1, -a \rangle$, contradizendo o fato de (F, a, b) ser álgebra de divisão. De (6.4), $D_H\langle 1, -a \rangle \cap \dot{F} = D\langle 1, -a \rangle(1 + \mathcal{M}_A)$. Por hipótese, $1 + \mathcal{M}_A \subset R(F)$. Assim, $b \in D\langle 1, -a \rangle$ e portanto (F, a, b) não é álgebra de divisão, contradizendo a hipótese.

(b) A implicação $(\Rightarrow)$ é imediata quando tomamos o produto tensorial sobre F . Para a recíproca, será necessária uma propriedade elementar (válida num corpo qualquer) das álgebras de quatérnios (veja ([L₁], Common Slot Theorem 4.13, p. 73):

$$(F, a, b) \cong (F, c, d) \Leftrightarrow$$

$$(F, a, b) \text{ e } (F, c, d) \text{ são ligadas por alguma extensão } F(\sqrt{z}) \text{ e } (F, ac, z) = 0.$$

Assim, a hipótese $(H, a, b) \cong (H, c, d)$ implica que existe $z \in H^\times$ tal que $(H, a, b) \cong (H, a, z)$, $(H, c, d) \cong (H, c, z)$ e $(H, ac, z) = 0$. Por (6.1), $H^\times = \dot{F}\dot{H}^2$. Então, podemos assumir $z \in F^\times$. Como $(H, a, bz) = 0$, temos pelo item (a) que (F, a, bz) não é anel de divisão e portanto $(F, a, bz) = 0$ também. Logo, $(F, a, b) \cong (F, a, z)$. Analogamente, $(H, c, dz) = 0$ implica $(F, c, d) \cong (F, c, z)$. Ainda mais, como $(H, ac, z) = 0$, temos $(F, ac, z) = 0$, novamente por (a). Portanto, pelo “Common Slot Theorem” citado acima, temos $(F, a, b) \cong (F, c, d)$. $\square$

Teorema 6.9 *Seja (F, v_A) um corpo valorizado, com $\text{car}(k_A) \neq 2$. Se A é compatível com $R(F)$, então A tem extensão total e invariante à toda F -álgebra biquaterniônica de divisão.*

Demonstração Seja $D = (F, a, b) \otimes_F (F, c, d)$ uma álgebra biquaterniônica de divisão. Só precisamos demonstrar que a H -álgebra biquaterniônica $D \otimes_F H \cong (H, a, b) \otimes_F (H, c, d)$ é também uma álgebra de divisão. Pelo Teorema de Albert, basta provar que (H, a, b) e (H, c, d) não são ligadas, ou seja, que não existe $z \in H^\times$ tal que $(H, a, b) \cong (H, a, z)$ e $(H, c, d) \cong (H, c, z)$. Se isto ocorresse, poderíamos escolher z em $F^\times$, pois $H^\times = \dot{F}\dot{H}^2$. Pelo item (b) da Proposição 6.8, teríamos que $(F, a, b) \cong (F, a, z)$ e $(F, c, d) \cong (F, c, z)$. Pelo Teorema de Albert, D não seria uma álgebra de divisão, contrariando a hipótese. $\square$

Referências Bibliográficas

- [AEJ] J. K. Arason, R. Elman, B. Jacob, Rigid elements, valuations, and realization of Witt rings, *J. Algebra* **110** (1987) 449-467.
- [B] E. Becker, Euklidische Körper und Euklidische Hüllen von Körpern, *J. Reine Angew. Math.* **268-269** (1974) 41-52.
- [Be] L. Berman, Pythagorean fields and the Kaplansky radical, *J. Algebra* **61** (1979) 497-507.
- [Br] L. Bröcker, Über die Anzahl der Anordnungen eines kommutativen Körpers, *Arch. Math.* **24** (1977) 458-463.
- [BNW] E. Binz, J. Neukirch and G. Wenzel, A subgroup theorem for free products of profinite groups, *J. Algebra* **19** (1971) 104-109.
- [C₁] C. M. Cordes, The Witt ring and the equivalence of fields with respect to quadratic forms, *J. Algebra* **26** (1973) 400-421.
- [C₂] C. M. Cordes, Kaplansky's radical and quadratic forms over non-real fields, *Acta Arith.* **XXVII** (1975) 253-261.
- [CR] C. M. Cordes, T. R. Ramsey Jr, Quadratic forms over quadratic extensions of fields with two quaternion algebras, *Canad. J. Math* **31** (1979) 1047-1058.

- [D₁] N. I. Dubrovin, Noncommutative valuation rings, *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **45** (1982) 265-280 (Russia); English transl.: *Trans. Moscow Math. Soc.* **45** (1984) 273-287.
- [EL₁] R. Elman, T.Y. Lam, Quadratic forms over formally real fields and pythagorean fields, *Amer. J. Math.* **94** (1972) 1155-1194.
- [EL₃] R. Elman, T.Y. Lam, Quadratic forms and the u -Invariant I, *Math. Z.* **131** (1973) 283-304.
- [EL₄] R. Elman, T. Y. Lam, Quadratic forms and the u -invariant II, *Invent. Math.* **21** (1973) 125-137.
- [ELP] R. Elman, T. Y. Lam, A. Prestel, On some Hasse principles over formally real fields, *Math. Z.* **134** (1973) 291-301.
- [E] O. Endler, Valuation Theory, New York, Springer-Verlag, 1972.
- [EH] I. Efrat, D. Haran, On Galois groups over pythagorean and semi-real closed fields, *Israel J. Math.*, **74** (1994) 57-78.
- [E₁] A. J. Engler, On the cohomological characterization of real free pro-2-groups, *Manuscripta Math.* **88** (1995) 247-259.
- [E₂] A. J. Engler, Kaplansky's radical and a recursive description of pro-2 Galois groups, Relatório de Pesquisa, UNICAMP, 2003.
- [E₃] A. J. Engler, A recursive description of pro- p Galois groups, Relatório de Pesquisa, UNICAMP, 2003.
- [EP] A. J. Engler, A. Prestel, Valued Fields, Springer, Berlin, 2005.
- [EK] A. J. Engler, J. Koenigsmann, Abelian subgroups of pro- p Galois groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350** (1996) 2473-2485.
- [EN] A. J. Engler, J. B. Nogueira, Maximal abelian normal subgroups of Galois pro-2-groups, *J. Algebra* **166** (1994) 481-505.
- [Er] Y. L. Ershov, Galois groups of maximal 2-extensions, *Math. Zametki* **36** (1984) 921-923 (Rússia); *Math. Notes* **36** (1985) 956-961 (Tradução para o inglês) .

- [FJ] M. D. Fried and M. Jarden, Field Arithmetic, *Ergebnisse der Mathematik* (3)**11**, Springer, Heidelberg 1986.
- [HJ] D. Haran, M. Jarden, Real free groups and the absolute Galois group of $\mathbb{R}(t)$, *J. Pure Appl. Algebra*, **37** (1985) 155-165.
- [J] B. Jacob, On the structure of pythagoren fields, *J. Algebra* **68** (1981) 247-267.
- [JW] B. Jacob, A. R. Wadsworth, A new construction of noncrossed product algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **293** (1986) 693-721.
- [JWa] B. Jacob, R. Ware, A recursive description of the maximal pro-2 Galois group via Witt rings, *Math. Z.* **200** (1989) 379-396.
- [IKN] T. Iwakami, D. Kijima, M. Nishi, Kaplansky's radical and Hilbert Theorem 90 III, *Hiroshima Math. J.* **15** (1985) 81-88.
- [K] I. Kaplansky, Fröhlich's local quadratic forms, *J. Reine Angew. Mat.* **239** (1969) 74-77.
- [Ki₁] D. Kijima, M. Nishi, Kaplansky's radical and Hilbert Theorem 90, *Hiroshima Math. J.* **11** (1981) 443-456.
- [Ki₂] D. Kijima, M. Nishi, Kaplansky's radical and Hilbert Theorem 90 II, *Hiroshima Math. J.* **13** (1983) 29-37.
- [Kn] M. Knebusch, On the extension of real places, *Comment. Math. Helv.* **48** (1973) 354-369.
- [KMMT] M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J. P. Tignol, The Book of Involutions, Colloquium Publications **44**, AMS, Rhode Island, 1998.
- [Ku₁] M. Kula, Fields with prescribed quadratic form schemes, *Math. Z.* **167** (1979) 201-212.
- [Ku₂] M. Kula, Fields with non-trivial Kaplansky's radical and finite square class number, *Acta Arithmetica* **XXXVIII** (1981) 411-418.
- [Ku₃] M. Kula, Quadratic forms over formally real fields with eight square classes, *Manuscripta Math.* **29** (1979) 295-303.

- [L₁] T. Y. Lam, Introduction to Quadratic Forms over Fields, AMS, Rhode Island, 2004.
- [L₂] T. Y. Lam, Orderings, Valuations and Quadratic Forms, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. **57**, Queen's University, Kingston, Ontario, 1980.
- [LLT] T. Y. Lam, D. B. Leep, J. P. Tignol, Biquaternion algebras and quartic extensions, *Publications Mathématiques de L'IHÉS* **77(1)** (1993) 63-102.
- [Mo₁] P. J. Morandi, The henselization of a valued division algebra, *J. Algebra* **122** (1989) 232-243.
- [Mo₂] P. J. Morandi, Kummer subfields of tame division algebras, *J. Algebra* **172** (1995) 554-583.
- [Me] A. S. Merkurjev, On the norm residue symbol of degree 2, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **261** (1981) 542-547; *English Transl. Sov. Math. Dokl.* **24** (1981) 529-546.
- [Ne] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, Cohomology of Number Fields, Springer, Berlin, 2000.
- [Mi] J. Milnor, Introduction to Algebraic K-Theory, Annals of Math. Study **72**, Princeton, Princeton University Press, 1971.
- [N] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, Cohomology of Number Fields, Springer, Berlin, 2000.
- [NSW] J. Neukirch, Freie Produkte Pro-Endlicher Gruppen und ihre Kohomologie, *Arch. Math.* **22** (1971), 337-357.
- [P] A. Prestel, Lectures on Formally Real Fields, IMPA, Rio de Janeiro, 1975.
- [Re] I. Reiner, Maximal Orders, Londres, Academic Press, 1975.
- [Ri] L. Ribes, Introduction of Profinite Groups and Galois Cohomology, Queen's Papers in Pure and Applied Math. **24**, Queen's University, Kingston, Ontario, 1970.
- [RZ] L. Ribes, P. Zalesskii, Profinite Groups, Springer, Berlin, 2000.
- [S] W. Scharlau, Quadratic and Hermitian Forms, Berlin, Springer, 1985.

-
- [Sh] O. F. G. Schilling, The Theory of Valuations, Math. Surveys **4**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1950.
- [Wa₁] A. R. Wadsworth, Extending valuations to finite division algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986) 20-22.
- [Wa₂] A. R. Wadsworth, Valuation theory on finite dimensional division algebras, *Fields Institute Communications* **32** (2002) 385-449.
- [W₁] R. Ware, Valuations rings and rigid elements in fields, *Canad. J. Math.* **33** (1981) 1338-1355.
- [W₂] R. Ware, Quadratic forms and profinite-2-groups, *J. Algebra* **58** (1979) 227-237.