CONTROLABILIDADE E ESTABILIZAÇÃO PARA EQUAÇÕES ESTOCÁSTICAS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. EUNICE PALMA e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de agosto de 1992

Prof.Dr. Luiz A. B. San Martin

LUIZ A.B. antonio SAN MARTIN

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em CIÊNCIAS.

Agradecimentos

Ao Prof. Luiz San Martin, pelo estímulo, paciência e dedicação durante esses longos anos.

Aos amigos e colegas da Pós-Graduação, pelo carinho, ajuda e....festas.

À Fátima, pelo trabalho de datilografia.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"Eu não quero saber de que cor é.

Eu só quero saber como é."

Ao Vitezlav, pai e filho, com
amor e paixão

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O estudo das equações diferenciais estocásticas é bastante próximo ao feito para as equações diferenciais determinísticas, não só pelos resultados obtidos mas também pelos métodos utilizados. Por exemplo, o teorema de existência e unicidade de soluções para equações estocásticas requer condições lipschitzianas sobre os coeficientes da equação, o mesmo ocorrendo no caso determinístico. A demonstração desse resultado no caso estocástico segue passo a passo a demonstração feita no caso determinístico. Da mesma forma, o estudo da estabilidade para equações diferenciais estocásticas segue a mesma linha que o caso determinístico.

Motivados pela ocorrência de tais fatos, surgiram as seguintes questões:

1ª) é possível estender a teoria de controle determinístico para o caso estocástico?;

2ª) no caso afirmativo, será que tal extensão é tão próxima quanto ao estudo das equações diferenciais?

Nosso interesse recaiu sobre as questões de controlabilidade e estabilização para equações diferenciais lineares estocáticas, uma conseqüência natural de nosso trabalho desenvolvido no Mestrado.

No que segue, fazemos no Capítulo I um resumo dos principais conceitos e resultados sobre controlabilidade e estabilização para equações diferenciais ordinárias lineares deteminísticas, equações diferenciais estocásticas, estabilidade e expoentes de Lyapunov para equações diferenciais lineares estocásticas. Esses conceitos e resultados serão utilizados frequentemente nos capítulos subsequentes. Indicamos também uma maneira de substituir a equação estocástica dada por uma equação equivalente, este sendo o artifício central que nos permitiu nos capítulos subsequentes, utilizar técnicas de controle determinístico para deduzir resultados no caso estocástico.

O Capítulo II é dedicado ao estudo da controlabilidade para equações diferenciais lineares estocásticas. Quando nos restringimos à condições iniciais constantes, esse estudo é muito parecido com o caso determinístico, não só pelos resultados obtidos mas também pelas demonstrações.

No Capítulo III estudamos o problema da estabilização de uma equação diferencial linear estocástica através de controles do tipo feedback. Inicialmente, fazemos tal estudo para equações com coeficientes constantes e obtemos nesse caso particular o seguinte resultado: se a equação determinística associada à equação estocástica é controlável, existem controles feedback que estabilizam a equação estocástica, independente da equação sem controle ser ou não assintóticamente estável. Observamos que a verificação da controlabilidade para equações diferenciais lineares determinísticas com coeficientes constantes é bastante simples: basta calcular o posto de uma certa matriz.

Também demonstramos que a controlabilidade da equação determinística associada à equação estocástica implica na existência de controles feedback que tornam a equação expoencialmente estável na p-média, para todo $p \geq 2$. Esse resultado é mais geral que o anterior, porém sua demonstração é muito mais trabalhosa.

Finalmente, estudamos a questão da desestabilização, isto é, a existência de controles feedback que tornam a solução da equação não assintóticamente estável.

CAPÍTULO I

CONTROLE DETERMINÍSTICO, EQUAÇÕES ESTOCÁSTICAS

O objetivo deste capítulo é apresentarmos os resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes, resultados que envolvem aspectos da teoria de controle determinístico, expoentes de Lyapunov e estabilidade para equações diferenciais estocásticas.

1. TEORIA DE CONTROLE DETERMINÍSTICO.

Consideremos o sistema de equações diferenciais lineares determinísticas no $\mathbb{R}^n$:

$$\overset{\circ}{x}(t) = A(t)\ x(t) + C_1(t)\ v(t) \qquad \text{(D)},$$

onde

$$(H_1)\begin{cases} A,\ C_1:\ \mathbb{R} \longrightarrow M_{nxn} \text{ são funções mensuráveis localmente limitadas, } v: I \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ é uma função definida, mensurável e limitada no intervalo finito} \\ \text{e fechado } I \subset \mathbb{R}. \end{cases}$$

O parâmetro v da equação (D) chama-se controle e quando satisfaz as hipóteses (H_1) é dito *admissível*. Indicaremos por U o conjunto dos controles admissíveis para a equação (D).

Seja $x(t,\ t_0,\ x_0,\ v)$ a solução de (D) no instante t, com condição inicial x_0 no tempo t_0 e controle v.

Definição 1.1: O estado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é *controlável no tempo* t_0 se existe $t_1 > t_0$ finito, $v : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $v \in U$ tal que $x(t_1, t_0, x_0, v) = 0$.

O sistema (D) é *completamente controlável no tempo* t_0 se todos os estados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são controláveis no tempo t_0.

O sistema (D) é *completamente controlável* se todos os estados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são controláveis no tempo t_0, $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$.

Uma caracterização de controlabilidade é dada pela *matriz de Kalman*

$$K(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} D(t_0, s)\, C_1(s)[D(t_0, s)\, C_1(s)]'ds,$$

onde $D(t)$ é a matriz fundamental de solução do sistema $\mathring{x}(t) = A(t)\, x(t)$ e $[D(t_0, s)\, C_1(s)]'$ indica a transposta da matriz $D(t_0, s)\, C_1(s)$.

Teorema 1.1: O sistema (D) é completamente controlável no tempo t_0 se e somente se existe $t_1 > t_0$ finito tal que $K(t_0, t_1)$ é positiva definida ([7]).

Sejam $J = [t_0, t_1]$ e $U' = \{ v : J \longrightarrow \mathbb{R}^n : v \text{ admissível}\}$

Definição 1.2: Dizemos que o sistema (D) é controlável no intervalo J se para todo x_0, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $v \in U'$ tal que $x(t_1, t_0, x_0, v) = y_0$.

A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrada em ([2]):

Teorema 1.2: São equivalentes:

(1) (D) é controlável no intervalo J;

(2) $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists\ v \in U'$: $x(t_1, t_0, x_0, v) = 0$;

(3) $\forall\ y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists\ v \in U'$: $x(t_1, t_0, 0, v) = y_0$.

A relação entre as definições 1 e 2 é dada pelo seguinte resultado ([9]):

Teorema 1.3: São equivalentes:

(1) (D) é completamente controlável no tempo t_0;

(2) existe $t_1 > t_0$ finito tal que (D) é controlável no intervalo $[t_0, t_1]$.

Definição 1.3: Dizemos que (D) é controlável se para todo t_0 existe $t_1 > t_0$ finito tal que (D) é controlável no intervalo $[t_0, t_1]$.

Temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4: São equivalentes:

(1) (D) é controlável;

(2) (D) é completamente controlável.

Examinemos agora o que ocorre quando trabalhamos com intervalos do tipo $[t_0, \infty]$ e indiquemos por U^* o conjunto das funções mensuráveis localmente limitadas definidas em intervalos dessa forma.

Definição 1.4: Dizemos que (D) é $[\tau,\infty)$-*controlável* (a zero) se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe $v: [\tau, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $v \in U^*$, tal que $\lim\limits_{t \to \infty} x(t, \tau, x, v) = 0$.

Proposição 1.1: Se (D) é $[\tau, \infty)$-controlável então também é $[\tau',\infty)$ - controlável, $\forall\ \tau' \le \tau$.

Proposição 1.2: Se (D) é controlável no intervalo $[t_0, t_1]$ então é $[t_0, \infty)$-controlável.

Definição 1.5: Dizemos que o sistema (D) é *assintóticamente controlável* se para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ existe $v \in U^*$ tal que $\lim_{t \to \infty} x(t, \tau, x, v) = 0$, isto é, se (D) é $[\tau,\infty]$-controlável para todo $\tau \in \mathbb{R}$.

Notação: Se Q e R são matrizes simétricas, $R > 0$ ($R \geq 0$) significa que R é positiva definida (semi-definida) e $R > Q$ ($R \geq Q$) significa que $R - Q > 0$ ($R - Q \geq 0$).

Sejam:

$$K(t, s) = \int_t^s D(t, \tau)\, C_1(\tau)[D(t, \tau)\, C_1(\tau)]' d\tau \ , \ t < s$$

$$Y(s, t) = \int_s^t D(t, \tau)\, C_1(\tau)[D(t, \tau)\, C_1(\tau)]' d\tau \ , \ s < t.$$

Definição 1.6: Dizemos que (D) é *uniforme em relação a controlabilidade* se existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que:

$$0 < \alpha_0(\sigma)\ Id \leq K(t, t + \sigma) \leq \alpha_1(\sigma)\ Id,\ \forall t \qquad (r_1)$$

onde $\alpha_0(\sigma)$, $\alpha_1(\sigma)$ são constantes que dependem de σ e Id é a matriz identidade nxn.

Dizemos que (D) é *uniforme em relação a acessibilidade* se existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \beta_0(\sigma)\ Id \leq Y(t-\sigma, t) \leq \beta_1(\sigma)\ Id,\ \forall t \qquad (r_2)$$

onde $\beta_0(\sigma)$, $\beta_1(\sigma)$ são constantes que dependem de σ.

Dizemos que (D) é *uniformemente controlável* se (D) é simultâneamente uniforme em relação a acessibilidade e a controlabilidade para o mesmo valor de σ. O seguinte resultado é provado em ([6]):

Teorema 1.5: Suponhamos que as funções matriciais A e C_1 sejam limitadas. São equivalentes:

(1) (D) é uniformemente controlável;

(2) (D) é uniforme em relação a controlabilidade;

(3) (D) é uniforme em relação a acessibilidade.

As relações entre as definições 3 e 6 são dadas por ([6]):

Teorema 1.6: (1) Se (D) é uniforme em relação a controlabilidade (acessibilidade) então (D) é controlável;

(2) Se (D) é uniformemente controlável, então (D) é controlável.

Consideremos o sistema (D) restrito às hipóteses (H_1). Tal sistema é denominado *sistema aberto*.

Se $v(t) = F(t)\,x(t) + v_1(t)$, onde $F\colon I \longrightarrow M_{nxn}(\mathbb{R})$ é uma função mensurável localmente limitada no intervalo I e $v_1\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um controle nas mesmas condições, então o sistema (D) é transformado no sistema:

$$\mathring{x}(t) = (A(t) + C_1(t)\,F(t))\,x(t) + C_1(t)\,v_1(t) \qquad (D_1),$$

chamado *sistema fechado*.

A matriz F é denominada *matriz feedback* ou *matriz de realimentação*.

Estudaremos propriedades do sistema (D) através do sistema (D_1), tal fato justificando a denominação feedback para a matriz F.

Definição 1.7: Dizemos que (D) é *uniformemente estabilizável* se para todo $m > 0$, $m \in \mathbb{R}$, existe uma matriz feedback F(definida para todo t), existe um número real $a > 0$, tal que:

$$\|D_1(t_2, t_1)\| \leq a \exp[-m(t_2 - t_1)], \forall t_1, t_2 \geq t_1,$$

onde $D_1(t)$ é a matriz fundamental de solução do sistema $\mathring{x}(t) = (A(t) + C_1(t) F(t)) x(t)$.

Dizemos que (D) é *estabilizável* se existe uma matriz feedback F tal que $\lim_{t \to \infty} \|D_1(t, t_0)\| = 0$, $\forall t_0$. Equivalentemente, se existe uma matriz feedback F tal que o sistema homogêneo

$$\mathring{x}(t) = (A(t) + C_1(t) F(t)) x(t)$$

é assintóticamente estável.

Lema 1.1: Se (D) é uniformemente estabilizável, então é estabilizável.

Examinaremos a seguir a relação entre controlabilidade e estabilização. Os resultados podem ser encontrados em ([2]), ([7]) e ([9]).

Teorema 1.7: Se (D) é estabilizável então é assintóticamente controlável.

Teorema 1.8: Todo sistema uniforme em relação a controlabilidade é uniformemente estabilizável.

Teorema 1.9: O sistema (D) é estabilizável se e somente se é controlável.

Teorema 1.10: Suponhamos que as funções A e C_1 são limitadas. Então, o sistema (D) é uniformemente estabilizável por meio de uma matriz feedback limitada se e somente se é uniforme em relação a controlabilidade.

No caso particular em que o sistema (D) é constante, isto é, as matrizes A e C_1 são constantes, os conceitos e resultados apresentados podem ser bastante simplificados. O principal artigo que aborda sistemas constantes é o do Hautus ([5]), cujos resultados passaremos a apresentar agora.

Teorema 1.11: O sistema (D) é controlável se e somente se a matriz n x n^2 $[C_1, A\,C_1, \ldots, A^{n-1}C_1]$ tem posto n.

Teorema 1.12: Se (D) é controlável e $\Lambda = \{ a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto de números reais distintos tal que $A \cap \sigma(A) = \phi$ ($\sigma(A)$ denota o espectro da matriz A), então existe uma matriz real F n x n tal que $\Lambda = \sigma(A + C_1\, F)$.

Teorema 1.13: São equivalentes

(1) (D) é assintóticamente controlável;

(2) (D) é estabilizável.

Além disso, é fácil ver que para sistemas constantes, controlabilidade e controlabilidade uniforme são conceitos equivalentes.

Teorema 1.14: São equivalentes:

(1) (D) é estabilizável;

(2) existe uma matriz real F nxn tal que $Re\sigma(A + C_1F) < 0$.

2. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, $J = [t_0, T]$, $0 \leq t_0 < T < \infty$, um intervalo da reta $\mathbb{R}$ e $w : \Omega \times J \longrightarrow \mathbb{R}^d$ um processo de Wiener.

Seja $\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t \geq t_0}$ uma família crescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, independente de $U(w_s - w_t, t_0 \leq t < s \leq T)$, a σ-álgebra gerada por $w_s - w_t$, $t_0 \leq t < s \leq T$.

Consideremos a diferencial estocástica da forma:

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))\, dt + G(t, X(t))\, dw(t) \\ X(t_0) = c \end{cases} \tag{2.1}$$

ou equivalentemente, a equação integral

$$X(t) = c + \int_{t_0}^{t} f(s, X(s))\, ds + \int_{t_0}^{t} G(s, X(s))\, dw(s), \quad t \in J \tag{2.2}$$

onde $f: J \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função mensurável e $G: J \times \mathbb{R}^d \longrightarrow M_{d \times d}(\mathbb{R})$ é uma função matricial mensurável, $c: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma variável aleatória.

Uma equação do tipo (2.1) (ou (2.2)) é chamada equação diferencial estocástica (do tipo de Itô).

Um processo estocástico $X : \Omega \times J \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é dito *solução* da equação (2.1) no intervalo J se satisfaz as seguintes condições:

1) $X(t)$ é $\mathcal{F}_t$ - mensurável, $\forall t \in J$

2) as funções $\tilde{f}(t,\omega) = f(t, X(t, \omega))$ e $\tilde{G}(t, \omega) = G(t, X(t, \omega))$ são tais que, com probabilidade 1,

$$\int_I |\tilde{f}(s, \omega)|\, ds < \infty, \quad \int_I |\tilde{G}(s, \omega)|^2 ds < \infty.$$

3) a igualdade (2.2) ocorre para todo $t \in J$, com probabilidade 1.

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES PARA A EQUAÇÃO (2.1)

Sejam $f\colon J \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma função mensurável, $G\colon J \times \mathbb{R}^d \longrightarrow M_{dxd}(\mathbb{R})$ uma função matricial mensurável.

Suponhamos que existe uma constante $K > 0$ tal que:

(1) $\forall\ t \in J,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |G(t,x) - G(t,y)| \leq K|x - y|,$$

onde $|G|^2 = tr(GG')$;

(2) $\forall\ t \in J,\ \forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(t,x)|^2 + |G(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2).$$

Se $c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma variável aleatória independente de $w_t - w_{t_0}$, $t \geq t_0$, a equação (2.1) tem uma única solução $X(t)$ definida em J, contínua com probabilidade 1, que satisfaz a condição inicial $X(t_0) = c$. ; isto é, se $X(t)$ e $Y(t)$ são soluções contínuas da equação (2.1) com $X(t_0) = Y(t_0) = c$, então $P\left(\sup\limits_{t \in J} |X(t) - Y(t)| > 0 \right) = 0$.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em ([1]) e ([3]), por exemplo.

Teorema 2.1: Suponhamos que as hipóteses do teorema de existência - e -unicidade estão satisfeita.

Se $E|c|^{2n} < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, então a solução de equação (2.1) com $X(t_0) = c$ satisfaz:

$$E|X(t)|^{2n} \leq (1 + E|c|^{2n})\, e^{C(t - t_0)}$$

$$E|X(t) - c|^{2n} \leq D(1 + E|c|^{2n})\, (t - t_0)^n\, e^{C(t - t_0)},$$

onde $C = 2n(n + 1) K^2$, $D = 4(T - t_0 + 1) K^2$.

Consideremos a seguinte equação diferencial estocástica no $\mathbb{R}^d$:

$$dX(t) = \Big[A(t)\, X(t) + C_1(t)\, u_1(t, X(t))\Big]\, dt +$$

$$+ \Big[B(t)\, X(t) + C_2(t)\, u_2(t, X(t))\Big]\, dw(t), \qquad (2.3)$$

onde

$$(H_2) \begin{cases} A,\ C_1,\ B,\ C_2 \ :\ J \longrightarrow M_{d\times d}(\mathbb{R}) \text{ são funções matriciais mensuráveis limitadas por } K; \\ u_1,\ u_2 : J \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{ são funções mensuráveis que satisfazem} \\ \qquad |u_j(t,x) - u_j(t,y)| \le K|x-y|,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}^d, \\ \forall t \in J,\ j = 1,\ 2 \\ \qquad |u_j(t,x)|^2 \le K^2(1 + |x|^2),\ \forall t \in J,\ x \in \mathbb{R}^d\ j = 1,\ 2. \end{cases}$$

Então, pelo teorema de existência e unicidade, dada a condição inicial $X(t_0) = c$ constante P q.s., a equação (2.3) possui uma única solução contínua.

Os parâmetros u_1, u_2 da equação (2.3) são chamados *controles* e quando satisfazem as hipóteses (H_2) são ditos *controles admissíveis*. Indicaremos por $\mathcal{A}$ o conjunto dos controles admissíveis.

Associada à equação (2.3) está a equação diferencial linear determinística:

$$\mathring{y}(t) = A(t)\, y(t) + C_1(t)\, \tilde{u}(t) \qquad (2.4),$$

onde $\tilde{u} : J \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função mensurável integrável.

No que segue, nos referiremos à (2.4) como sendo a parte determinística de (2.3).

Seja D(t) a matriz de transição gerada por A, isto é, $\mathring{D}(t) = A(t)\, D(t)$, $t \in J$.

Dado $c \in \mathbb{R}^d$, consideremos a seguinte equação integral:

$$Y(t) = D(t,t_0)\, c + \int_{t_0}^{t} D(t,s)\, C_1(s)\, u_1(s,X(s))\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} D(t,s) \Big[B(s)\, X(s) + C_2(s)\, u_2(s,X(s))\Big]\, dw(s),\ t \in J \tag{2.5}$$

onde X(t) é solução de (2.3) com $X(t_0) = c$.

$$\text{Seja } Z(t) = \int_{t_0}^{t} D(t_0,s)\, C_1(s)\, u_1(s,X(s))\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} D(t_0,s) \Big[B(s)X(s) + C_2(s)\, u_2(s,X(s))\Big]\, dw(s)\ ,\ t \in J.$$

Logo, $Y(t) = D(t,t_0) \Big[c + Z(t)\Big]$.

A diferencial estocástica de Z é dada por:

$$dZ(t) = D(t_0,t)\, C_1(t)\, u_1(t,\ X(t))\, dt +$$

$$D(t_0,t) \Big[B(t)\, X(t) + C_2(t)\, u_2(t,\ X(t))\Big]\, dw(t).$$

Logo,

$$dY(t) = \mathring{D}(t_0,t) \Big[c + X(t)\Big]\, dt + D(t,\ t_0)\, dZ(t) =$$

$$= A(t)\, D(t,t_0) \Big[c + Z(t)\Big]\, dt + C_1(t)\, u_1(t,\ X(t))\, dt +$$

$$+ \Big[B(t)\ X(t) + C_2(t)\ u_2(t,\ X(t))\Big]\ dw(t) =$$

$$= \Big[A(t)\ Y(t) + C_1(t)\ u_1(t,\ X(t))\Big]\ dt\ +$$

$$+ \Big[B(t)\ X(t) + C_2(t)\ u_2(t,\ X(t))\Big]\ dw(t) \qquad (2.6)$$

Definindo $H(t) = Y(t) - X(t)$, $t \in J$, de (2.6) e (2.3) segue que $dH(t) = A(t)\ H(t)\ dt$. (2.7)

Fixado $\omega \in \Omega$, a solução da equação (2.7) com condição inicial $H(t_0)$ é dada por $H(t) = D(t,t_0)\ H(t_0)$, $\forall t \in J$.

Mas, $H(t_0) = Y(t_0) - X(t_0) = c - c = 0$.

Portanto, $Y(t) = X(t)$ P q.s. , $\forall t \in J$, isto é, as equações (2.3) e (2.5) tem as mesmas soluções.

Por conveniência (e abuso de notação) indicaremos por $X(t,t_0, X_0,u_1,u_2)$ a solução da equação (2.3) com condição inicial X_0 no tempo t_0 e com controles u_1,u_2.

Em alguns casos é necessário considerarmos controles que dependem da variável aleatória $\omega \in \Omega$, isto é, funções definidas em $J \times \mathbb{R}^d \times \Omega$ a valores em $\mathbb{R}^d$.

Consideraremos, então, a seguinte equação estocástica:

$$dX(t) = \Big[A(t)\ X(t) + C_1(t)\ u_1(t,\ X(t),\ \omega)\Big]\ dt\ +$$

$$+ \Big[B(t)\ X(t) + C_2(t)\ u_2(t,\ X(t),\ \omega)\Big]\ dw(t), \qquad (2.8)$$

onde

$$
(H_3)\begin{cases}
u_j : J \times \mathbb{R}^d \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{ é } \mathcal{B}(J \times \mathbb{R}^d) \times \mathcal{F} - \text{mensurável, } j = 1,2; \\
\text{para cada } (t,x) \in J \times \mathbb{R}^d,\ u_j(t,x,\circ) \text{ é } \mathcal{F}_t - \text{mensurável, } j = 1,2; \\
\text{existe constante } K > 0 \text{ tal que:} \\
\qquad |A(t)| \leq K,\ |C_j(t)| \leq K,\ |B(t)| \leq K, \\
\qquad |u_j(t,x,\omega)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \\
\qquad |u_j(t,x,\omega) - u_j(t,y,\omega)| \leq K\ |x - y| \\
\qquad j = 1,\ 2,\ \forall t \in J,\ x,y \in \mathbb{R}^d,\ \omega \in \Omega
\end{cases}
$$

Nessas condições, se $X(t_0)$ é $\mathcal{F}_{t_0}$ - mensurável, $X(t_0) \in L_2(\Omega)$, existe uma única solução da equação (2.8) com condição inicial $X(t_0)$.

Essa solução é um processo contínuo, não-antecipativo em relação à $\left\{ \mathcal{F}_t \right\}_{t \in J}$ ([3]).

Consideremos a seguinte equação integral

$$
Y(t) = D(t,t_0)\ X(t_0) + \int_{t_0}^{t} D(t,s)\ C_1(s)\ u_1(s,X(s),\ \omega)\ ds +
$$

$$
+ \int_{t_0}^{t} D(t,s) \left[B(s)\ X(s) + C_2(s)\ u_2(s,\ X(s),\ \omega) \right] dw(s) \tag{2.9}
$$

$t \in J$, onde $X(t)$ é solução de (2.8) com condição inicial $X(t_0)$.

Utilizando o teorema de Itô generalizado ([8]) e repetindo o argumento feito para a equação (2.3), podemos mostrar que a equação integral equivalente à equação (2.8) e a equação (2.9) possuem a mesma solução para $X(t_0) \in \mathcal{F}_{t_0}$ fixado.

Por abuso de notação, indicaremos por $X(t,t_0,X_0,u_1,u_2)$ a solução da equação (2.8) com condição inicial $X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$ no tempo t_0 e com os controles u_1 e u_2.

3. ESTABILIDADE ESTOCÁSTICA E EXPOENTE DE LYAPUNOV.

Consideremos a equação diferencial estocástica no $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))\,dt + G(t, X(t))\,dw(t) \\ X(t_0) = c \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.1}$$

cujos coeficientes, além de satisfazerem as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de soluções, são contínuos em relação à variável t, $\forall\, t \geq t_0$.

Suponhamos também que $f(t, 0) = G(t, 0) \equiv 0$, $\forall t \geq t_0$. Logo, a *posição de equilíbrio* $X(t) \equiv 0$ é a única solução da equação (3.1) com $X(t_0) = 0$.

Definição 3.1: A posição de equilíbrio $X(t) \equiv 0$ é dita:

(1) *estável* se $\forall\, \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{c \to 0} P\left(\sup\limits_{t_0 \leq t < \infty} |X(t,c)| \geq \varepsilon \right) = 0$

(2) *assintóticamente estável* se é estável e

$$\lim_{c \to \infty} P\left(\lim_{t \to \infty} X(t,c) = 0 \right) = 1$$

(3) *globalmente assintóticamente estável* se é assintóticamente estável e

$$P\left(\lim_{t \to \infty} X(t,c) = 0 \right) = 1\ ,\ \forall\, c \in \mathbb{R}^d .$$

(4) *exponencialmente estável na p-média* $(p > 0)$ se existem constantes positivas c_1, c_2 tais que $E|X(t;c)|^p \leq c_1 |c|^p e^{-c_2(t-t_0)}$, para todo c suficientemente pequeno, $\forall\, t \geq t_0$.

Um resultado que usaremos é dado pelo teorema abaixo, cuja demonstração encontra-se em ([4]).

Teorema 3.1: Se a posição de equilíbrio $X(t) \equiv 0$ da equação (3.1) é exponencialmente p-estável para algum $p > 0$ e as funções $f(t,x)$ e $G(t,x)$ tem derivadas contínuas e limitadas em relação à x até ordem 2 (inclusive), então $X(t) \equiv 0$ é globalmente assintóticamente estável.

Consideremos a equação diferencial estocástica linear no $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} dX(t) = AX(t)\,dt + BX(t)\,dw(t) \\ X(t_0) = c \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.2}$$

onde as matrizes (dxd) A e B são constantes.

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, tal equação possui uma única solução.

Ao invés de dizermos a *"posição de equilíbrio é estável"*, diremos que a *equação* (3.2) *é estável*, em analogia às equações diferenciais lineares com coeficientes constantes determinísticas.

Para esse tipo de equação, o estudo da estabilidade assintótica feito por Hasminskii ([4]) através do uso do expoente de Lyapunov é de aplicação mais simples. Descrevemos a seguir tal estudo.

O processo $s(t) = \frac{X(t)}{|X(t)|}$, $s(t_0) = \frac{c}{|c|}$ com valores na esfera S^{d-1} é markoviano e homogêneo.

Pondo $\rho(t) = \ln |X(t)|$ e usando a fórmula de Itô, obtemos:

$$d\rho(t) = \left[\langle As(t), s(t)\rangle + \frac{1}{2} \langle B'Bs(t), s(t)\rangle - \langle Bs(t), s(t)\rangle^2\right]dt +$$

$$+ \langle Bs(t), s(t)\rangle\, dw(t) \tag{3.3}$$

Definimos:

$$Q(s) = \langle As,\ s\rangle + \frac{1}{2}\langle B'Bs,s\rangle - \langle Bs,s\rangle^2\ ,\quad \forall s \in S^{d-1} \tag{3.4}$$

Teorema 3.2: Suponhamos que o processo s é ergódico e seja ν a única medida invariante desse processo. Se $\lambda = \int_{S^{d-1}} Q(s)d\nu(s) < 0$, então a equação (3.2) é assintóticamente estável.

Prova: Reescrevendo a equação (3.3) como

$$\frac{\rho(t) - \rho(0)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t Q(s(r))\ dr + \frac{1}{t}\int_0^t \langle Bs(r),\ s(r)\rangle\ dw(r),$$

observando que $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\int_0^t \langle Bs(r),\ s(r)\rangle\ dw(r) = 0$ e utilizando a lei dos grandes números para o processo s(t), obtemos

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\rho(t)}{t} = \lambda\ P\ q.s. \tag{3.5}$$

Segue das equações (3.3) e (3.4) que

$$|X(t)| = |c|\ \exp\ t\left\{ \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)\ d\nu(s) + \frac{1}{t}\int_0^t \langle Bs,s\rangle\ dw(s)\right\}$$

e portanto, utilizando (3.5), obtemos que

$$\lim_{c \to 0} P\left(\lim_{t \to \infty} X(t,c) = 0\right) = 1 \tag{3.6}$$

Queremos mostrar que a equação (3.2) é estável. Para tanto, basta mostrarmos que

$$\forall\ \varepsilon \le -\lambda\ ,\ \lim_{c \to \infty} P\left(\sup_{t \ge t_0} |X(t,c)| \ge \varepsilon \right) = 0 \qquad (*)$$

Com efeito, se (*) ocorre para $\varepsilon = -\lambda$, então para $-\lambda < \varepsilon_1$ temos a seguinte relação:

$$P\left(\sup_{t \ge t_0} |X(t,c)| \ge \varepsilon_1 \right) \le P\left(\sup_{t \ge t_0} |X(t,c)| \ge -\lambda \right)$$

e portanto,

$$\lim_{c \to 0} P\left(\sup_{t \ge t_0} |X(t,c)| \ge \varepsilon_1 \right) = 0.$$

Seja $\varepsilon \le -\lambda$. Por (3.5) existe $T > 0$ tal que

$$\forall t \ge T,\ \left| \frac{\ell n|X(t)|}{t} - \lambda \right| < \varepsilon,$$

isto é, $|X(t)| < e^{(\varepsilon+\lambda)t}$, e como $\varepsilon + \lambda < 0$, $|X(t)| < e^{(\varepsilon+\lambda)T}$, $\forall t \ge T$.

Podemos escolher T de modo que $P\left(\sup_{t \ge T} |X(t,c)| \ge \varepsilon \right) = 0$

Observamos que $\left\{ \sup_{t_0 \le t < \infty} |X(t,c)| \ge \varepsilon \right\} \subset$

$$\subset \left\{ \sup_{t_0 \le t \le T} |X(t,c)| \ge \varepsilon \right\} \cup \left\{ \sup_{t \ge T} |X(t,c)| \ge \varepsilon \right\},$$

Como $P\left(\sup_{t_0 \le t \le T} |X(t,c)| \ge \varepsilon \right) \le \dfrac{E|X(T)|}{\varepsilon} \le \dfrac{|c|\ e^{k(T-t_0)}}{\varepsilon}$,

para k constante real positiva, segue que

$$\lim_{c \to 0} P\left(\sup_{t_0 \le t \le T} |X(t;c)| \ge \varepsilon \right) = 0.$$

Portanto, $\displaystyle \lim_{c \to 0} P\left(\sup_{t_0 \le t < \infty} |X(t;c)| \ge \varepsilon \right) = 0,$

isto é, a equação (3.2) é estável.

A estabilidade de (3.2) junto à (3.6) nos dá a estabilidade assintótica da equação (3.2).

Proposição 3.1: Suponhamos que o processo s é ergódico. Se $\lambda > 0$, então para $c \neq 0$, $P\left(\lim_{t \to \infty} |X(t,c)| = \infty \right) = 1$. Se $\lambda = 0$, então a solução $X(t) \equiv 0$ da equação (3.2) não é assintóticamente estável nem instável.

Proposição 3.2: Suponhamos que o processo s não é ergódico. Então:

(1) existe no máximo um número finito de valores $a_i = \int_{S^{d-1}} Q(s)d\nu_i(s)$, onde ν_i é a distribuição estacionária para a componente ergódica A_i (podem existir infinitas componentes A_i para s(t));

(2) Se $a_1 < a_2 < \ldots < a_d$, então $a_d < 0$ implica que (3.2) é assintóticamente estável.

A demonstração do resultado acima encontra-se em ([4]).

Para equações com coeficientes constantes, obtemos como corolário do teorema 3.1 o seguinte resultado:

Proposição 3.3: Se a equação (3.2) é exponencialmente p-estável para algum $p > 0$, então também é globalmente assintóticamente estável; em particular, é assintóticamente estável.

CAPÍTULO II

CONTROLABILIDADE

4. CONTROLABILIDADE COM CONDIÇÃO INICIAL CONSTANTE.

Neste capítulo estudaremos vários conceitos de controlabilidade para equações diferenciais estocásticas lineares e as relações destes com os conceitos correspondentes para equações diferenciais lineares controladas determinísticas.

Consideraremos as seguintes equações no $\mathbb{R}^d$:

$$\left.\begin{aligned} dX(t) &= \Big[A(t)\, X(t) + C_1(t)\, u_1(t,X(t))\Big]dt + \\ &\quad + \Big[B(t)\, X(t) + C_2(t)\, u_2(t, X(t))\Big]\, dw(t) \\ X(t_0) &= c \in \mathbb{R}^d \end{aligned}\right\} \quad (S)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t)\, y(t) + C_1(t)\, \tilde{u}(t) \\ y(t_0) &= c \in \mathbb{R}^d \end{aligned}\right\} \quad (D)$$

cujos coeficientes satisfazem as hipóteses (H_2) e (H_1) dos parágrafos 2 e 1, respectivamente.

Utilizaremos a notação do parágrafo 2.

Seja $J = [t_0, T]$, com $0 \le t_0 < T < \infty$.

Definição 4.1: Dizemos que $X_0 \in \mathbb{R}^d$ é *controlável no intervalo J*, se existem controles u_1, $u_2 \in \mathcal{A}$ tais que $X(T,t_0,X_0,u_1,u_2) = 0$ P q.s..

Dizemos que (S) é *controlável no intervalo J* se todo $X_0 \in \mathbb{R}^d$ é controlável no intervalo J.

Notação:

$$M(t_0, T) = \int_J D(t_0,s)\ C_1(s)\ [D(t_0,s)\ C_1(s)]'ds$$

$$N(t_0,s) = D(t_0,s)\ C_2(s)[D(t_0,s)\ C_2(s)]',\ s \in J,$$

onde $[D(t_0,s)\ C_1(s)]'$ denota a transposta da matriz $D(t_0,s)\ C_1(s)$.

Teorema 4.1: (S) é controlável no intervalo J se e somente se as matrizes simétricas $M(t_0,T)$ e $N(t_0,s)$, $\forall s \in J$, são positivas definidas.

Prova: A condição é suficiente:

Consideremos os controles $u_1,\ u_2 \in \mathcal{A}$:

$u_1(s,x) = u_1(s) = -\ C_1'(s)\ D'(t_0,s)\ M^{-1}(t_0,T)\ X_0,\ s \in J$

$u_2(s,x) = -\ C_2'(s)D'(t_0,s)N(t_0,s)^{-1}D(t_0,s)B(s)x,\ \forall s \in J,\ \forall x \in \mathbb{R}^d.$

Então:

$$X(T,t_0,\ X_0,u_1,u_2) = D(T,t_0)\left[\ X_0 + \int_J D(t_0,s)\ C_1(s)\ u_1(s)\ ds\ + \right.$$

$$+ \int_J D(t_0,s)\ [B(s)\ X(s) + C_2(s)\ u_2(s,X(s))]\ dw(s) \Bigg] =$$

$$= D(T,t_0)\Bigg\{ X_0 - \left(\int_J D(t_0,s)\ C_1(s)\ [D(t_0,s)\ C_1(s)]'\ ds\right) M^{-1}(t_0,T)\ X_0 +$$

$$+\int_J D(t_0,s)\Big[B(s)X(s)-C_2(s)[D'(t_0,s)C_2(s)]'N(t_0,s)^{-1}D(t_0,s)B(s)X(s)\Big]dw(s)\Bigg\}$$

$$= D(T,t_0)\Bigg\{ X_0 - X_0 + \int_J \Big[D(t_0,s)B(s)X(s) - N(t_0,s)N(t_0,s)^{-1}D(t_0,s)\circ$$

$$\circ\ B(s)X(s)\Big]\ dw(s)\Bigg\} = 0 \qquad P\ \text{q.s.}$$

A condição é necessária:

Suponhamos que (S) é controlável no intervalo J e seja $X_0 \in \mathbb{R}^d$. Logo, existem u_1, $u_2 \in \mathcal{A}$ tais que

$$X_0 = - \int_J D(t_0,s)C_1(s)u_1(s,X(s))ds - \int_J D(t_0,s)\ [B(s)X(s) +$$

$$+ C_2(s)u_2(s,X(s))]\ dw(s).$$

Suponhamos que $X_0'\ M(t_0,T)\ X_0 = 0$ e $X_0'\ N(t_0,s)\ X_0 = 0$, $\forall s \in J$.

Seja $u_3(s) = -\ C_1'(s)\ D'(t_0,s)\ X_0$, $\forall s \in J$.

Então:

$$X_0'\ M(t_0,T)X_0 = X_0'\int_J D(t_0,s)C_1(s)[D(t_0,s)C_1(s)]'X_0\ ds$$

$$= - X_0' \int_J D(t_0,s)\ C_1(s)\ u_3(s)\ ds = \int_J \|u_3(s)\|^2\ ds \qquad (1)$$

Se $u_4(s) = - C_2'(s)\ D'(t_0,s)\ X_0$, $\forall s \in J$, segue que

$$X_0'\ N(t_0,s)\ X_0 = \|u_4(s)\|^2,\ \forall s \in J \qquad (2)$$

Portanto,

$$\|X_0\|^2 = X_0'\ X_0 = - \left[\int_J D(t_0,s)\ C_1(s)\ u_1(s,X(s))\ ds + \right.$$

$$\left. + \int_J D(t_0,s) \Big[B(s)\ X(s) + C_2(s)\ u_2(s,X(s)) \Big]\ dw(s) \right]' X_0$$

$$= \int_J u_1'(s,X(s))\ u_3(s)\ ds - \left(\int_J D(t_0,s)\ B(s)\ X(s)\ dw(s) \right)' X_0$$

$$+ \left(\int_J u_4'(s)\ u_2(s,X(s))\ dw(s) \right)' .$$

Segue da hipótese e de (1) e (2) que

$$\|X_0\|^2 = - \left(\int_J D(t_0,s)\ B(s)\ X(s)\ dw(s) \right)' X_0 .$$

Logo, $\|X_0\|^2 = E\|X_0\|^2 = - E\left\{ \left(\int_J D(t_0,s)B(s)X(s)dw(s) \right)' .X_0 \right\} =$

$$= - \left\{ E\left(\int_J D(t_0,s)B(s)X(s)dw(s) \right)' \right\} .X_0 = 0.X_0 = 0.$$

Portanto, $X_0 = 0$.

Mostramos que se $X_0'M(t_0,T)\,X_0 = 0$ e $X_0'N(t_0,s)\,X_0 = 0$, $\forall s \in J$, então $X_0 = 0$.

Portanto, as matrizes simétricas $M(t_0,T)$ e $N(t_0,s)$, $\forall s \in J$, são positiva - definidas.

Corolário 4.1: Se (S) é controlável no intervalo J, o mesmo ocorre para (D).

Prova: Se (S) é controlável no intervalo J, pelo teorema anterior, $M(t_0,T) > 0$ e pelos teoremas 1.4 e 1.1, segue que (D) é controlável no intervalo J.

Corolário 4.2: (S) é controlável no intervalo J se e somente se:

$$C_1'(s)\; D'(t_0,s)\; X = 0 \quad \text{q.s. em } J \Rightarrow X = 0 \qquad \text{e}$$

$$C_2'(s)\; D'(t_0,s)\; X = 0 \quad \text{q.s. em } J \Rightarrow X = 0 \;.$$

Prova: Dado $X \in \mathbb{R}^d$,

$$X'\; M(t_0,T)\; X = \int_J \left| C_1'(s)\; D'(t_0,s)\; X \right|^2 d_{\text{-}} \qquad \text{e}$$

$$X'\; N(t_0,s)X = \left| C_2'(s)D'(t_0,s)X \right|^2 , \quad \forall s \in J.$$

Logo,

$$X'M(t_0,T)X = 0 \Leftrightarrow \left| C_1'(s)D'(t_0,s)X \right|^2 = 0 \Leftrightarrow C_1'(s)D'(t_0,s)X = 0 \quad \text{q.s. em } J$$

$$X'N(t_0,s)X = 0 \;,\; \forall s \in J \Leftrightarrow C_2'(s)\; D'(t_0,s)X = 0 \quad \text{q.s. em } J.$$

Portanto, (S) é controlável em J se e somente se

$$C_1'(s)D'(t_0,s)X = 0 \quad \text{q.s. em } J \Rightarrow X = 0$$

e

$$C_2'(s)D'(t_0,s)X = 0 \quad \text{q.s. em } J \Rightarrow X = 0.$$

Observação 1: (D) é controlável no intervalo J se e somente se $[C_1'(s)D'(t_0,s)X = 0$ q.s. em $J \Rightarrow X = 0]$ ([2]). Novamente obtemos que se (S) é controlável no intervalo J, o mesmo ocorre para (D).

Proposição 4.1: Se (S) é controlável em J, então também o é para qualquer intervalo que contém J.

Prova: Sejam $[t_0,T] \subset [t_1,t_2]$ e suponhamos que (S) é controlável em $[t_0,T]$.

Seja $X \in \mathbb{R}^d$.

Se $C_1'(s)D'(t_1,s)X = 0$ q.s. em $[t_1,t_2]$., então

$$C_1'(s)D'(t_1,s)X = 0 \quad \text{q.s. em } [t_0,T].$$

Logo, $C_1'(s)D'(t_0,s)D'(t_1,t_0)X = 0$ q.s. em $[t_0,T]$.

Se $X \neq 0$, $D'(t_1,t_0)X = Y \neq 0$. Daí, $C_1'(s)D'(t_0,s)Y = 0$ q.s. em $[t_0,T]$, com $Y \neq 0$, o que contradiz a controlabilidade de (S) em $[t_0,T]$.

Análogamente, mostra-se que se $X \neq 0$,

$$C_2'(s)D'(t_0,s)\,[D'(t_1,t_0)X] = 0 \quad \text{q.s. em } [t_0,T].$$

Portanto, (S) é controlável em $[t_1,t_2]$.

Observação 2: O resultado acima também é válido para a equação (D) ([2]).

Observação 3: A controlabilidade de (D) em J não é condição suficiente para que o mesmo ocorra para (S).

$$\text{Sejam } A = C_1 = Id\ ,\ C_2 = \begin{cases} c_{11} = 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Então, $M(t_0,T) = \frac{1}{2}\left[1 - \exp(-2T + 2t_0)\right] \mathrm{Id} > 0$ e $N(t_0,s) = \exp\left[2(t_0-s)\right] C_2$, $\forall s \in J$.

Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)'$, então

$$\langle e^{2(t_0-s)} C_2 x, x\rangle = e^{2(t_0-s)} x_1^2 \ , \ \forall s \in J \quad \text{e}$$

portanto, $N(t_0,s)$ não é positiva definida.

Seja $C(J) = \left\{X_0 \in \mathbb{R}^d : X_0 \text{ é controlável no intervalo } J\right\}$.

Teorema 4.2: (S) é controlável no intervalo J se e somente se $0 \in C(J)$ e $M(t_0,T) > 0$.

Prova: Se (S) é controlável no intervalo J, então, por definição, $0 \in C(J)$.

Seja $0 \neq X_0 \in C(J)$. Então, existem $u_1,u_2 \in \mathcal{A}$ tais que

$$X_0 = -\int_J D(t_0,s)C_1(s)u_1(s,X(s))ds - \int_J D(t_0,s)\Big[B(s)X(s) +$$

$$+ C_2(s)u_2(s,X(s))\Big]dw(s).$$

Definindo $u_3(s) = -\left[D(t_0,s)C_1(s)\right]' X_0$, $\forall s \in J$, obtemos $X_0'\, M(t_0,T)\, X_0 = \int_J \|u_3(s)\|^2 ds$.

Suponhamos que $X_0'\, M(t_0,T)\, X_0 = 0$; logo, $u_3(s) = 0$ q.s. em J.

Temos:

$$\|X_0\|^2 = X_0'\, X_0 = -\left(\int_J D(t_0,s)C_1(s)u_1(s,X(s))ds +\right.$$

$$\left. + \int_J D(t_0,s)\Big[B(s)\ X(s) + C_2(s)u_2(s,X(s))\Big]dw(s)\right)' X_0 =$$

$$= \left(\int_J u_3(s)u_1(s)ds\right)' - \left(\int_J D(t_0,s)\Big[B(s)X(s) + C_2(s)u_2(s,X(s))\Big]dw(s)\right)' X_0$$

$$= - \left(\int_J D(t_0,s)\Big[B(s)X(s) + C_2(s)u_2(s,X(s))\Big]dw(s)\right)' X_0 .$$

Efetuando a esperança na expressão acima, obtemos $\|X_0\|^2 = E\|X_0\|^2 = 0$; logo, $X_0 = 0$, uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos que $0 \in C(J)$ e $M(t_0,T) > 0$.
Logo, existem $u_1,u_2 \in \mathcal{A}$: $X(T,t_0,u_1,u_2) = 0$ P q.s. .
Dado $0 \neq X_0 \in \mathbb{R}^d$, definimos:

$$\tilde{u}_1(s,x) = u_1(s,x) - \Big[D(t_0,s)C_1(s)\Big]' M^{-1}(t_0,T)X_0, \quad \forall s \in J,\ x \in \mathbb{R}^d$$

Temos:

$$X(T,t_0,X_0,\tilde{u}_1,u_2) = D(T,t_0)\Bigg[X_0 + \int_J D(t_0,s)C_1(s)u_1(s,X(s))ds -$$

$$- \left(\int_J D(t_0,s)C_1(s)\Big[D(t_0,s)C_1(s)\Big]'ds\right) M^{-1}(t_0,T)X_0 + \int_J D(t_0,s)\Big[B(s)X(s) +$$

$$+ C_2(s)u_2(s,X(s))\Big]dw(s)\Bigg]$$

$$= D(T,t_0)\Bigg[\int_J D(t_0,s)C_1(s)u_1(s,X(s))ds + \int_J D(t_0,s)\Big[B(s)X(s) +$$

$$+ C_2(s)u_2(s,X(s))\Big]dw(s)\Bigg] = X(T,t_0,0,u_1,u_2) = 0 \text{ P q.s. .}$$

Portanto, $\forall\ X_0 \in \mathbb{R}^d$ é controlável no intervalo J, isto é, (S) é controlável no intervalo J.

Proposição 4.2: Se $N(t_0,s) > 0$, $\forall s \in J$, então $0 \in C(J)$.

Prova: Com efeito, definindo $u_1(s,x) \equiv 0$ e

$$u_2(s,x) = -\, C_2'(s)D'(t_0,s)N(t_0,s)^{-1}\underline{D(t_0},s)B(s)x, \; \forall s \in J, \; x \in \mathbb{R}^d,$$

obtemos $X(T,t_0,0,u_1,u_2) = 0$ P q.s.. Logo, $0 \in C(J)$.

A recíproca do resultado acima não é verdadeira, como mostra o exemplo abaixo.

Consideremos a equação escalar $dx(t) = [ax(t) + c_1u_1(t,x(t))]\,dt$, com $a \neq 0$ e $c_1 \neq 0$.

Tomando $u_1(s,x) \equiv 0$, $\forall s \in J$, $x \in \mathbb{R}^d$, obtemos $x(T,t_0,0,u_1) = 0$ P q.s., isto é, $0 \in C(J)$. Observe que $N(t_0,s) = 0$, $\forall s \in J$.

Teorema 4.3: São equivalentes:

(1) (S) é controlável no intervalo J;

(2) $\forall X_0,\, Y_0 \in \mathbb{R}^d$, $\exists u_1,\, u_2, \in \mathcal{A}$: $X(T,t_0,X_0,u_1,u_2) = Y_0$ P q.s.

(3) $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^d$, $\exists u_5,\, u_6 \in \mathcal{A}$: $X(T,t_0,0,u_5,u_6) = Y_0$ P q.s..

Prova:

(2 $\Rightarrow$ 3) Basta tomar $X_0 = 0$

(1 $\Rightarrow$ 2) Suponhamos que para todo $X_0 \in \mathbb{R}^d$, existem $u_3,u_4 \in \mathcal{A}$: $X(T,t_0,X_0,u_3,u_4) = 0$ P q.s.

Dado $Y_0 \in \mathbb{R}^d$, seja $Z_0 = X_0 - D(t_0,T)\, Y_0$.Por hipótese, existem $u_5,u_6 \in \mathcal{A}$ tal que $X(T,t_0,Z_0,u_5,u_6) = 0$ P q.s.

Logo,

$$X(T,t_0,Z_0,u_5,u_6) = D(T,t_0)X_0 - Y_0 +$$

$$+ \int_J D(T,s)\ C_1(s)\ u_5(s,X(s))\ ds + \int_J D(T,s)B(s)X(s)\ dw(s)$$

$$+ \int_J D(T,s)\ C_2(s)\ u_6(s,X(s))\ dw(s) = 0 \quad P \text{ q.s.}$$

Portanto, $X(T,t_0,X_0,u_5,u_6) = Y_0$ P q.s.

($3 \Rightarrow 1$) Suponhamos que $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^d$, existem $u_5,u_6 \in \mathcal{A}$: $X(T,t_0,0,u_5,u_6) = Y_0$ P q.s..

Dado $X_0 \in \mathbb{R}^d$, seja $Z_0 = Y_0 - D(T,t_0)\ X_0$.

Como existem $u_5,u_6 \in \mathcal{A}$ tais que $X(T,t_0,0,u_5,u_6) = Z_0$ P q.s., obtemos $X(T,t_0,X_0,u_5,u_6) = Y_0$ P q.s. .

Observação 4: A demonstração do teorema acima é idêntica à feita para o caso determinístico ([9]).

Seja I um intervalo compacto de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{A}' = \left\{u : I \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d :\right.$ u satisfaz $\left.(H_2)\right\}$.

Definição 4.2: Dizemos que $X_0 \in \mathbb{R}^d$ é *controlável no tempo* t_0 se existe $t_1 > t_0$ finito, existem $u_1,u_2 \in \mathcal{A}'$ tais que $X(t_1,t_0,X_0,u_1,u_2) = 0$ P q.s..

Dizemos que (S) *é controlável no tempo* t_0 se $X_0 \in \mathbb{R}^d$ é controlável no tempo t_0, para todo $X_0 \in \mathbb{R}^d$.

Dizemos que (S) é *controlável* se todo $X_0 \in \mathbb{R}^d$ é controlável no tempo t_0, para $\forall t_0 \geq 0$.

Seja $C(t_0)$ o conjunto dos $X_0 \in \mathbb{R}^d$ controláveis no tempo t_0.

Se $0 \in C(t_0)$, existem $t_1^* > t_0$ finito, $u_1^*, u_2^* \in \mathcal{A}'$ tais que $X(t_1^*, t_0, 0, u_1^*, u_2^*) = 0$ P q.s. . Essa notação será usada no que segue.

Teorema 4.4: Se $0 \in C(t_0)$ e $M(t_0, t_1^*) > 0$, então $X_0 \in C(t_0)$, $\forall X_0 \in \mathbb{R}^d$.

Prova: Seja $0 \neq X_0 \in \mathbb{R}^d$ e consideremos o controle

$$u_1(s,x) = u_1^*(s,x) - C_1'(s)D'(t_0,s)\, M^{-1}(t_0,t_1^*)X_0, \quad \forall s \in [t_0,t_1^*],\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Então,

$$\int_{t_0}^{t_1^*} D(t_0,s)C_1(s)u_1(s,X(s))ds = \int_{t_0}^{t_1^*} D(t_0,s)C_1(s)u_1^*(s,X(s))ds$$

$$- \left(\int_{t_0}^{t_1^*} D(t_0,s)C_1(s)\left[D(t_0,s)C_1(s)\right]' ds\right) M^{-1}(t_0,t_1^*)\, X_0 =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1^*} D(t_0,s)C_1(s)u_1^*(s,X(s))ds - X_0.$$

Portanto,

$$X(t_1^*,t_0,X_0,u_1,u_2^*) = D(t_1^*,t_0)\left[X_0 + \int_{t_0}^{t_1^*} D(t_0,s)C_1(s)u_1(s,X(s))ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t_1^*} D(t_0,s)\left[B(s)X(s) + C_2(s)u_2^*(s,X(s))\right]dw(s)\right] =$$

$$= D(t_1^*,t_0)\left[X_0 + \int_{t_0}^{t_1^*} D(t_0,s)C_1(s)u_1^*(s,X(s))ds - X_0 + \int_{t_0}^{t_1^*} D(t_0,s)\left[B(s)X(s) + \right.\right.$$

$$+ C_2(s)u_2^*(s,X(s))\Big]dw(s) = X(t_1^*,t_0,0,u_1^*,u_2^*) = 0 \quad P \quad q.s. \; .$$

Corolário 4.3: Se $0 \in C(t_0)$ e $M(t_0,t_1^*) > 0$, então $C(t_0) = \mathbb{R}^d$.

Corolário 4.4: Se $0 \in C(t_0)$ e $M(t_0,t_1^*) > 0$, então $C(t_0) = C([t_0,t_1^*])$.

Prova: A demonstração desse resultado encontra-se na prova do teorema 4.4..

Definição 4.3: Dizemos que (S) é *completamente controlável* se para todo $t_0 \geq 0$, existe $t_1 > t_0$ finito tal que (S) é controlável no intervalo $[t_0,t_1]$.

Proposição 4.3: Se (S) é completamente controlável, então (S) é controlável.

Se $\forall t_0 \geq 0$, $0 \in C(t_0)$ e $M(t_0,t_1^*) > 0$, então (S) é completamente controlável.

Prova: A primeira parte decorre diretamente das definições.

Se $\forall t_0 \geq 0$, $0 \in C(t_0)$ e $M(t_0,t_1^*) > 0$, pelo corolário 4.4, $\forall t_0$, $C(t_0) = \mathbb{R}^d$. Logo, (S) é completamente controlável.

5. CONTROLABILIDADE COM CONDIÇÃO INICIAL NÃO DETERMINÍSTICA

Consideremos a equação

$$dX(t) = [A(t)\, X(t) + C_1(t)\, u_1(t,\, X(t),\, \omega)]\, dt +$$

$$[B(t)\, X(t) + C_2(t)\, u_2(t,\, X(t),\, \omega)]\, dw(t) \qquad (\mathcal{S})$$

sujeita às hipóteses (H_3) do Capítulo I.

Nosso objetivo é controlar $(\mathscr{S})$ quando partimos de condições iniciais não constantes. Indiquemos por A o conjunto dos controles (admissíveis) para a equação $(\mathscr{S})$.

Definição 5.1: Seja $g \in L_2(\Omega)$. Dada $X_0 \in \mathscr{F}_{t_0}$, $X_0 \in L_2(\Omega)$, dizemos que X_0 *é controlável à* g *no intervalo* J se existem $u_1, u_2 \in A$ tais que $X(T,t_0, X_0, u_1,u_2) = g$. P q.s. .

Seja $C_g(J) = \left\{ X_0 \in \mathscr{F}_{t_0}, X_0 \in L_2(\Omega) : X_0 \right.$ é controlável à g no intervalo J $\left. \right\}$, onde $g \in L_2(\Omega)$.

Teorema 5.1: Seja $g \in L_2(\Omega)$ e suponhamos que $M(t_0,T) > 0$. Se existe $X_0 \in C_g(J)$, $X_0 \in \mathscr{F}_{t_0}$, $X_0 \in L_2(\Omega)$, então todo elemento $Y_0 \in \mathscr{F}_{t_0}$, $Y_0 \in L_2(\Omega)$ pertence à $C_g(J)$.

Prova: Suponhamos que $X_0 \in C_g(J)$. Logo, existem $u_1,u_2 \in A$ tais que $X(T,t_0,X_0,u_1,u_2) = g$ P q.s.

Dado $Y_0 \in \mathscr{F}_{t_0}$, $Y_0 \in L_2(\Omega)$, definimos:

$$\tilde{u}_1(s,x,\omega) = u_1(s,x,\omega) - [D(t_0,s)\ C_1(s)]'\ M^{-1}(t_0,T)\ (Y_0 - X_0),$$

$\forall s \in J,\ x \in \mathbb{R}^d,\ \omega \in \Omega.$

É claro que $\tilde{u}_1 \in A$. Além disso temos:

$$\int_J D(T,s)\ C_1(s)\ \tilde{u}_1(s,X(s),\ \omega)\ ds = \int_J D(T,s)\ C_1(s)\ u_1(s,X(s),\ \omega)\ ds -$$

$$- D(T,t_0)\int_J D(t_0,s)\ C_1(s)\ [D(t_0,s)\ C_1(s)]'\ ds\ M^{-1}(t_0,T)\ (Y_0 - X_0) =$$

$$= \int_J D(T,s)\ C_1(s)\ u_1(s,X(s),\ \omega)\ ds - D(T,t_0)\ Y_0 + D(T,t_0)\ X_0\ .$$

Logo:

$$X(T,t_0,Y_0,\tilde{u}_1,u_2) = D(T,t_0)\ Y_0 + \int_J D(T,s)\ C_1(s)\ \tilde{u}_1(s,X(s),\ \omega)\ ds +$$

$$+ \int_J D(T,s)\ [B(s)X(s) + C_2(s)\ u_2(s,X(s),\ \omega)]\ dw(s) =$$

$$= D(T,t_0)\ Y_0 + \int_J D(T,s)\ C_1(s)\ u_1(s,X(s),\ \omega)\ ds - D(T,t_0)\ Y_0 +$$

$$+ D(T,t_0)\ X_0 + \int_J D(T,s)\ [B(s)X(s) + C_2(s)\ u_2(s,X(s),\ \omega)]\ dw(s) =$$

$$= X(T,t_0,X_0,u_1,u_2) = g \quad P\ \text{q.s.}\ .$$

Corolário 5.1: Suponhamos que $M(t_0,T) > 0$ e seja $g \in L_2(\Omega)$. Se $C_g(J) \neq \phi$ então $C_g(J) = \mathcal{F}_{t_0} \cap L_2(\Omega)$.

Proposição 5.1: Suponhamos que $M(t_0,T) > 0$ e $N(t_0,s) > 0$, $\forall s \in J$. Se $g \in \mathcal{F}_{t_0}$, então $C_g(J) \neq \phi$.

Prova: Considerando os controles

$$u_1(s,x,\omega) = [D(t_0,s)\ C_1(s)]'\ M^{-1}(t_0,T)\ [D(t_0,T)\ g - g]$$

$$u_2(s,x,\omega) = -\,[D(t_0,s)\ C_2(s)]'\ N^{-1}(t_0,s)\ B(s)\ x,$$

obtemos $X(T,t_0,g,u_1,u_2) = g$ P q.s.; logo, $g \in C_g(J)$.

Definição 5.2: Seja $X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$, $X_0 \in L_2(\Omega)$.

$R(X_0,J) = \left\{ X(T,t_0,X_0,u_1,u_2) : u_1,u_2 \in A \right\}$ é chamado de *conjunto dos pontos atingíveis no tempo* T *a partir de* X_0.

$R(X_0,J)$ é o conjunto de todos os possíveis valores da solução de $(\mathcal{S})$ no instante T, com condição inicial X_0 no tempo t_0, utilizando todos os possíveis controles admissíveis.

É claro que $R(X_0,J) \subset \mathcal{F}_T$.

Lema 5.1: Dados $g \in L_2(\Omega)$, $X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$ então:

$$g \in R(X_0,J) \text{ se e somente se } X_0 \in C_g(J).$$

Prova: Se $g \in R(X_0,J)$, existem $u_1,u_2 \in A$ tais que $X(T,t_0,X_0,u_1,u_2) = g$ P q.s.; logo, $X_0 \in C_g(J)$.

Reciprocamente, se $X_0 \in C_g(J)$ existem $u_1,u_2 \in A$ tais que $X(T,t_0,X_0,u_1,u_2) = g$ P q.s.; portanto, $g \in R(X_0,J)$.

Teorema 5.2: Suponhamos que $M(t_0,T) > 0$. Então,

$$R(X_0,J) = R(Y_0,J)\ ,\ \forall X_0,\ Y_0 \in \mathcal{F}_{t_0},\ X_0,Y_0 \in L_2(\Omega).$$

Prova: Seja $g \in R(X_0,J)$; logo $X_0 \in C_g(J)$ e então $C_g(J) = \mathcal{F}_{t_0}$, o que implica que $Y_0 \in C_g(J)$; daí segue que $g \in R(Y_0,J)$.

Portanto, $R(X_0;J) \subset R(Y_0,J)$

Análogamente, $R(Y_0;J) \subset R(X_0,J)$ e portanto,$R(X_0;J) = R(Y_0,J)$, $\forall X_0,Y_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$, $X_0,Y_0 \in L_2(\Omega)$.

Corolário 5.3: Se $M(t_0,T) > 0$, então $R(0,J) = R(X_0;J)$, $\forall X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$.

Proposição 5.2: Suponhamos que $N(t_0,s) > 0$, $\forall s \in J$, e $M(t_0,T) > 0$. Então, $\mathcal{F}_{t_0} \subset R(0;J)$.

Prova: Com efeito, consideremos o controle admissível:

$$u_2(s,x) = - (D(t_0,s)C_2(s))' N^{-1}(t_0,s)D(t_0,s)B(s)\ x.$$

Então:

$$\int_J D(t_0,s)C_2(s)u_2(s,X(s))dw(s) = - \int_J D(t_0,s)B(s)X(s)dw(s)$$

e portanto,

$$X(T,t_0,0,u_1,u_2) = \int_J D(T,s)\ C_1(s)\ u_1(s,X(s),\ \omega)\ ds$$

Tomando $u_1(s,x,\omega) = (D(t_0,s)C_1(s))'\ M^{-1}(t_0,T)\ X_0$, onde $X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$, $X_0 \in L_2(\Omega)$, obtemos:

$$X(T,t_0,0,u_1,u_2) = D(T,t_0) \int_J D(t_0,s)C_1(s)[D(t_0,s)C_1(s)]'\ ds\ \circ$$

$$\circ\ M^{-1}(t_0,T)X_0 = D(T,t_0)\ M(t_0,T)\ M^{-1}(t_0,T)\ X_0 = D(T,t_0)\ X_0\ .$$

Como $D(T,t_0)$ é uma matriz determinística constante e $X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$, segue que $D(T,t_0)\ X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$.

Portanto, $\mathcal{F}_{t_0} \subset R(0;J)$.

Corolário 5.4: Se $N(t_0,s) > 0$, $\forall s \in J$ e $M(t_0,T) > 0$, então $C_g(J) \subset R(0;J)$, $\forall g \in L_2(\Omega)$.

Prova: Se $C_g(J) = \phi$, então $C_g(J) \subset R(0;J)$.

Se $C_g(J) \neq \phi$, pelo corolário 5.1, $C_g(J) = \mathcal{F}_{t_0} \cap L_2(\Omega)$ e pela proposição anterior, $\mathcal{F}_{t_0} \subset R(0;J)$. Portanto, $C_g(J) \subset R(0;J)$.

Lema 5.3: Se $N(t_0,s) > 0$, $\forall s \in J$, então $0 \in R(0,J)$.

Prova: Considerando $u_1(s,x,\omega) \equiv 0$ e

$$u_2(s,x,\omega) = -\,[D(t_0,s)C_2(s)]'\; N^{-1}(t_0,s)D(t_0,s)B(s)\; x,$$

obtemos $X(T,t_0,0,u_1,u_2) = 0$ P q.s. ; logo, $0 \in R(0;J)$.

Proposição 5.2: Suponhamos que $M(t_0,T) > 0$ e $N(t_0,s) > 0$, $\forall s \in J$. Se $g \in \mathcal{F}_{t_0}$ então $C_g(J) = R(g;J)$.

Prova: Com efeito, como $X_0 \in C_g(J)$ se e somente se $g \in R(X_0;J)$, segue que $g \in C_g(J) \Leftrightarrow g \in R(g;J)$.

Logo, $C_g(J) = R(g;J)$ se $g \in \mathcal{F}_{t_0}$.

Observando que a equação (S) é caso particular da equação ($\mathcal{S}$) podemos reescrever alguns resultados obtidos neste parágrafo para a equação (S). São eles:

(1) Se (D) é completamente controlável, então se $C_g(J) \neq \phi$, $C_g(J) = \mathcal{F}_{t_0}$;

(2) Se (D) é completamente controlável, então $R(X_0,J) = R(Y_0,J)$,

$\forall X_0, Y_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$;

(3) Se (S) é controlável no intervalo J, então $C_g(J) \subset R(0;J)$, $\forall g \in L_2(\Omega)$.

CAPÍTULO III

ESTABILIZAÇÃO

6. CONTROLABILIDADE ASSINTÓTICA

Neste parágrafo vamos estudar a controlabilidade da equação (S) num intervalo do tipo $[t_0,\infty)$, $t_0 \geq 0$.

O conjunto dos controles admissíveis é dado por:

$$A^* = \left\{ u : [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d : u \text{ satisfaz } (H_2) \right\}.$$

Para a equação determinística (D) associada à (S), os controles admissíveis são aqueles pertencentes ao conjunto $A_d^* = \left\{ \tilde{u} : [t_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^d : \tilde{u}\right.$ é (Lebesgue) integrável em todo intervalo finito contido em $\left.[t_0,\infty) \right\}$.

Definição 6.1: Dizemos que (S) é $[t_0,\infty)$ - *controlável* (a zero) se existem controles $u_1,u_2 \in A^*$ tais que

$$P\left(\lim_{t \to \infty} X(t,t_0,X_0,u_1,u_2) = 0 \right) = 1, \quad \forall\ X_0 \in \mathbb{R}^d .$$

Sabemos que a contrabilidade de (S) implica a da equação (D). Esperávamos que a $[t_0,\infty)$-contrabilidade de (S) nos desse a $[t_0,\infty)$-controlabilidade para (D); porém, esse fato não é verdade, como mostra o exemplo abaixo.

Dado $a > \frac{1}{2}$, $c_2 \neq 0$, consideremos a equação escalar:

$$dx(t) = ax(t)\,dt + [3ax(t) + c_2u_2(t,x(t))]\,dw(t) \tag{1}$$

Seja $u_2(s,x) = -\,c_2^{-1}ax$, $\forall s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Então, a solução da equação (1) com controle u_2 é dada por $x(t,0,x_0,u_2) = x_0 \exp\left\{a(1-2a)t + 2a\, w(t)\right\}$.

Como $a(1-2a) < 0$, segue que a solução da equação (1) com controle u_2 é globalmente assintóticamente estável, isto é, $P\left(\lim_{t \to \infty} x(t,0,x_0,u_2) = 0\right) = 1,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Portanto, (S) é $[0,\infty)$-controlável.

Porém, o sistema determinístico associado à (1) é $\mathring{y}(t) = ay(t)$ e como $a > 0$, tal equação não é $[0,\infty)$-controlável.

Proposição 6.1: Se (S) é controlável no intervalo $[t_0,t_1]$, então (S) é $[t_0,\infty)$ - controlável.

Prova: Dado $X_0 \in \mathbb{R}^d$, existem $u_1,u_2 \in A$ tais que

$$P\left(X(t_1,t_0,X_0,u_1,u_2) = 0\right) = 1.$$

Definimos:

$$u_3(s,x) = \begin{cases} u_1(s,x) & , t_0 \le s \le t_1 \\ 0 & , s \ge t_1 \end{cases}$$

$$u_4(s,x) = \begin{cases} u_2(s,x) & , t_0 \le s \le t_1 \\ -[D(t_1,s)C_2(s)]'\, N(t_1,s)^{-1}\, D(t_1,s)B(s)\, x, & s > t_1 \end{cases}$$

Logo,

$$X(t,t_0,X_0,u_3,u_4) = D(t,t_0)\, X_0 + \int_{t_0}^{t_1} D(t,s)C_1(s)u_1(s,X(s))\, ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} D(t,s)\, [B(s)\, X(s) + C_2(s)u_2(s,X(s))]\, dw(s) +$$

$$+\int_{t_1}^{t} D(t,s)\ B(s)\ X(s)\ dw(s)\ -$$

$$-\int_{t_1}^{t} D(t,s)C_2(s)[D(t_1,s)C_2(s)]'\ N(t_1,s)^{-1}D(t_1,s)B(s)X(s)\ dw(s)$$

$$= D(t,t_1)\Bigg[D(t_1,t_0)X_0 + \int_{t_0}^{t_1} D(t_1,s)C_1(s)u_1(s,X(s))\ ds\ +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} D(t_1,s)\ [B(s)\ X(s) + C_2(s)u_2(s,X(s))]\ dw(s)\ +$$

$$+\int_{t_1}^{t} D(t_1,s)B(s)X(s)dw(s) - \int_{t_1}^{t} N(t_1,s)N(t_1,s)^{-1}D(t_1,s)B(s)X(s)dw(s)\Bigg]$$

$$= D(t,t_1)X(t_1,t_0,X_0,u_1,u_2) = 0.$$

$$\text{Logo, } P\left(\lim_{t\to\infty} X(t,t_0,X_0,u_3,u_4) = 0\right) = 1, \qquad \forall X_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Proposição 6.2: Se (S) é controlável no intervalo $[t_0,t_1]$, então (S) é $[\tau,\infty)$ - controlável, $\forall\ 0 \le \tau \le t_0$.

Prova: Se (S) é controlável no intervalo $[t_0,t_1]$, pela proposição 4.1, (S) é controlável em todo intervalo do tipo $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$, com $t_0 - \varepsilon \ge 0$.

Logo, (S) é $[t_0 - \varepsilon, \infty)$ - controlável, isto é, (S) é $[\tau, \infty)$ - controlável, $\forall\ 0 \le \tau \le t_0$.

Definição 6.2: Dizemos que (S) é *assintóticamente controlável* (a zero) se (S) é $[0, \infty)$ - controlável.

Decorre da proposição acima que:

Corolário 6.1: Se (S) é controlável no intervalo $[t_0, t_1]$, então (S) é assintóticamente controlável.

7. ESTABILIZAÇÃO - PARTE I

Neste parágrafo consideraremos as equações (S) e (D) com coeficientes constantes.

Nosso objetivo é determinar a existência de controles feedback de tal modo que (S) com esses controles seja assintóticamente estável.

Definição 7.1: Seja M uma matriz quadrada. A inversa generalizada de Penrose é a matriz M^{g} que satisfaz as seguintes relações:

$$MM^{g}M = M \; ; \; M^{g}\, MM^{g} = M^{g}; \; (M^{g}M)' = M^{g}M \; ; \; (MM^{g})' = MM^{g}.$$

Consideremos a equação:

$$dX(t) = \left[AX(t) + C_1u_1(t,X(t))\right]dt + BX(t)\, dw(t) \qquad (S^{*})$$

Lema 7.1: Suponhamos que existe u_1 controle feedback tal que (S^{*}) com esse controle é assintóticamente estável. Então, existe u_2 controle feedback tal que (S) com os controles u_1 e u_2 é assintóticamente estável.

Prova: Seja $u_2(s,x) = (C_2^{g}C_2 - Id)\, x$, $\forall s \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^d$.
Então, $C_2u_2(s,x) = C_2(C_2^{g}C_2 - Id)\, x = 0$, $\forall s \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Logo, a equação (S) com os controles u_1 e u_2 é transformada na equação (S^*).

Portanto, se existe u_1 controle feedback que torna (S^*) assintóticamente estável, então u_1 e u_2 fazem o mesmo com (S).

Portanto, pelo lema 7.1, nosso problema se reduz à procura de um controle feedback que estabilize a equação (S^*).

Definição 7.2: Dizemos que a equação (S^*) é *estabilizável* se existe uma matriz D_1 real dxd tal que a equação (S^*) com controle $u_1(s,x) = D_1 x$ é assintóticamente estável.

No que segue faremos uso constante do fato de que se o maior expoente de Lyapunov λ associado à equação (S^*) com controle $u_1(s,x) = D_1 x$ é negativo, então tal equação é assintóticamente estável.

Relembramos que

$$\lambda = \int_{S^{d-1}} Q(s)\, d\nu(s),$$

onde ν é uma medida invariante do processo $\dfrac{X(t)}{|X(t)|}$ em S^{d-1} e

$$Q(s) = \langle As,s \rangle + \frac{1}{2} \|Bs\|^2 - \langle Bs,s \rangle^2, \quad \forall s \in S^{d-1}.$$

Observando que $L(z) = \dfrac{1}{2} \|Bz\|^2 - \langle Bz,z \rangle^2$ $(L : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R})$ é uma função contínua e S^{d-1} é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^d$, sabemos que essa função assumirá máximo M e mínimo m em S^{d-1}. Seja $\gamma = \max \{ |m|, |M| \}$. Podemos , então, sempre supor que

$$-\gamma \le L(s) \le \gamma \quad , \quad \forall s \in S^{d-1}.$$

Além disso, como toda matriz real A pode ser escrita como $A = \left(\dfrac{A+A'}{2}\right) + \left(\dfrac{A-A'}{2}\right)$, segue que $\langle As,s \rangle = \left\langle \left(\dfrac{A+A'}{2}\right)s,s \right\rangle$, isto é, podemos sempre supor, sem perda de generalidade, ao utilizarmos a expressão para Q, que a matriz A é simétrica.

Um resultado que usaremos com frequência é o:

Lema 7.2: Seja A uma matriz simétrica real. Então, $\max_{s \in S^{d-1}} \langle As,s \rangle =$ maior autovalor de A e $\min_{s \in S^{d-1}} \langle As,s \rangle =$ menor autovalor de A.

Prova: Seja $F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(z) = \langle Az,z \rangle$, $\forall z \in \mathbb{R}^d$.

Pelo teorema de Lagrange, os pontos críticos de F restrita à S^{d-1} são dados pela equação Grad $F(s) = 2rs$, $r \in \mathbb{R}$.

Como Grad $F(s) = (A + A')s = 2As$, segue que $As = rs$, isto é, os pontos críticos de $F\big|_{S^{d-1}}$ são os autovalores da matriz A.

Em particular, o máximo e o mínimo de $\langle As,s \rangle$, $s \in S^{d-1}$, são autovalores de A.

Teorema 7.1: Se (D) é controlável então (S^*) é estabilizável.

Prova: Se para todo $\varepsilon > 0$, $-(\gamma + \varepsilon)$ é autovalor da matriz A, essa matriz possuiria infinitos autovalores, um absurdo.

Portanto, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $-(\gamma + \varepsilon_0)$ não é autovalor da matriz A.

Se $\sigma(A) = \left\{ a_1, \ldots, a_d \right\}$, definimos $\Lambda = \left\{ -(\gamma + \varepsilon_0) = -b_1 > -b_2 > \ldots > -b_d \right\}$, onde todos os b_j são distintos, $b_j > 0$ e $\Lambda \cap \sigma(A) = \emptyset$.

Como (D) é controlável, segue do teorema 1.12 que existe uma matriz real dxd constante D_1 tal que $\sigma(A + C_1 D_1) = \Lambda$.

Consideremos a fun o

$$Q(s) = < (A + C_1 D_1)s, s > + L(s) , \quad s \in S^{d-1} .$$

Pelo lema 7.2,

$$- b_d \le < (A + C_1 D_1)s, s > \le - (\gamma + \varepsilon_0), \ \forall s \in S^{d-1}$$

e como $- \gamma \le L(s) \le \gamma$, $\forall s \in S^{d-1}$, segue que $- (b_d + \gamma) \le Q(s) \le - \varepsilon_0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Logo, o maior expoente de Lyapunov para a equa o (S^*) com controle $u_1(x) = D_1x$ negativo e portanto, (S^*) estabiliz vel.

Corol rio 7.1: Toda equa o (S) control vel estabiliz vel.

Prova: Se (S) control vel, o mesmo ocorre para (D); logo, o resultado segue do teorema anterior.

Teorema 7.2: Se (D) control vel, ent o existe controle u_1 tal que (S^*) com esse controle exponencialmente est vel na m dia quadr tica.

Prova:

Se D_1 uma matriz constante dxd, a solu o da equa o (S^*) com controle $u_1(t,x) = u_1(x) = D_1x$ e condi o inicial $X(0) = X_0$ dada por:

$$X(t) = X(t,0,X_0,u_1) = e^{t(A+C_1D_1)} X_0 + \int_0^t e^{(t-s)(A+C_1D_1)} BX(s)\, dw(s)$$

$$= e^{t(A+C_1D_1)} \left\{ X_0 + \int_0^t e^{-s(A+C_1D_1)} BX(s)\, dw(s) \right\} .$$

Logo,

$$E|X(t)|^2 \le 2|e^{t(A+C_1D_1)}|^2 \left\{ |X_0|^2 + |B|^2 \int_0^t |e^{-s(A+C_1D_1)}|^2 E|X(s)|^2 ds \right\}$$

Portanto,

$$|e^{t(A+C_1D_1)}|^{-2} E|X(t)|^2 \le 2\left\{ |X_0|^2 + |B|^2 \int_0^t |e^{-s(A+C_1D_1)}|^{-2} E|X(s)|^2 ds \right\}.$$

Pela desigualdade de Gronwall-Bellman segue que

$$|e^{t(A+C_1D_1)}|^{-2} E|X(t)|^2 \le 2|X_0|^2\, e^{2|B|^2 t},\ \forall t \in [0,T].$$

Logo, $E|X(t)|^2 \le 2|X_0|^2\, e^{+2|B|^2 t}\, |e^{t(A+C_1D_1)}|^2,\ \forall t \in [0,T].$

Sendo (D) controlável, dado $m > |B|^2$, existe $\ell > 0$, F matriz real constante dxd tal que

$$|e^{t(A+C_1F)}| \le \ell\, e^{-mt},\ \forall t \ge o.$$

Portanto, tomando $D_1 = F$, obtemos:

$$E|X(t)|^2 \le 2\ell^2 |X_0|^2\, e^{-2(m-|B|^2)t},\ \forall t \in [0,T].$$

Observando que a desigualdade acima é válida para todo T real, segue que $E|X(t)|^2 \le 2\ell^2|X_0|^2\, e^{-2(m-|B|^2)t}$, $\forall t \ge 0$, e portanto, a solução da equação (S^*) com controle $u_1(x) = Fx$ é exponencialmente estável na média quadrática.

Corolário 7.2: Se (D) é controlável, então existe controle u_1 tal que (S^*) com esse controle é assintóticamente estável globalmente.

Prova: Com efeito, a controlabilidade de (D) garante a existência de um controle que estabiliza (S^*), isto é, a solução de (S^*) com esse controle é assintóticamente estável; como os coeficientes da equação são independentes do tempo, isso acarreta a estabilidade assintótica global.

Na realidade, o teorema anterior é válido para $p > 2$, mas a demonstração é muito mais trabalhosa.

Teorema 7.2.a: Se (D) é controlável, então existe controle u_1 tal que (S^*) com esse controle é exponencialmente estável na p-média, $\forall\, p > 2$.

Prova: Se (D_1) é uma matriz real constante dxd, a solução da equação (S^*) com controle $u_1(x) = D_1x$ e condição inicial $X(0) = X_0$ é dada por:

$$X(t,0,X_0,u_1) = X(t) = e^{t(A+C_1D_1)}X_0 + \int_0^t e^{(t-s)(A+C_1D_1)}B\ X(s)\ dw(s) =$$

$$= e^{t(A+C_1D_1)}\left\{ X_0 + \int_0^t e^{(-s)(A+C_1D_1)}B\ X(s)\ dw(s) \right\}.$$

Dado $p > 2$, se $k = 2^p$, então:

$$|X(t)|^p \le k\left| e^{t(A+C_1D_1)}\right|^p \left\{ |X_0|^p + \left| \int_0^t e^{-s(A+C_1D_1)}B\ X(s)\ dw(s)\right|^p \right\}$$

e portanto,

$$E|X(t)|^p \le k\left| e^{t(A+C_1D_1)}\right|^p \left\{ |X_0|^p + E\left| \int_0^t e^{-s(A+C_1D_1)}B\ X(s)\ dw(s)\right|^p \right\}.$$

Seja $g(s) = e^{-s(A+C_1D_1)}B\ X(s),\ 0 \le s \le T.$

Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^t E|g(s)|^{2k}\ ds = \int_0^t \left|e^{-s(A+C_1D_1)}\right|^2\ |B|^2\ E|X(s)|^2 ds < \infty.$$

Portanto, $E\left|\int_0^t g(s)\, dw(s)\right|^{2k} < \infty$. ([1], pag. 81).

Logo, $E\left|\int_0^t g(s)\, dw(s)\right|^p < \infty$, $\forall p > 2$, $t \in [0,T]$.

Pela desigualdade de Hölder-Burkhölder, obtemos:

$$E\left|\int_0^t g(s)\, dw(s)\right|^p \le C_p\, t^{\frac{p-2}{2}}\, E\int_0^t |g(s)|^p\, ds,$$

onde C_p é uma constante que depende somente de p.

Portanto,

$$E|X(t)|^p \le k|e^{t(A+C_1D_1)}|^p\left\{|X_0|^p + C_p|B|^p t^{\frac{p-2}{2}}\int_0^t |e^{-s(A+C_1D_1)}|^p E|X(s)|^p ds\right\} \le$$

$$\le k|e^{t(A+C_1D_1)}|^p\left\{|X_0|^p C_p|B|^p T^{\frac{p-2}{2}}\int_0^t |e^{-s(A+C_1D_1)}|^p E|X(s)|^p ds\right\},$$

$t \in [0,T]$.

Seja $\beta = k\, C_p|B|^p\, T^{\frac{p-2}{2}}$. Então, para $t \in [o,T]$,

$$|e^{t(A+C_1D_1)}|^{-p} E|X(t)|^p \le k|X_0|^p + \beta\int_0^t |e^{s(A+C_1D_1)}|^{-p} E|X(s)|^p\, ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall-Bellman, segue que

$$E|X(t)|^p \le k|X_0|^p\, e^{\beta t}|e^{t(A+C_1D_1)}|^p,\ t \in [0,T].$$

Seja $m > \beta/p$. Sendo (D) controlável, existe $\ell > 0$, F matriz real constante dxd tal que $|e^{t(A+C_1F)}| \le \ell\, e^{-mt}$, $\forall\, t \ge 0$.

Portanto,

$$E|X(t)|^p \le k|X_0|^p\, \ell^p\, e^{-(pm-\beta)t},\ \forall t \in [0,T].$$

Observando que a desigualdade acima é válida para todo T real, obtemos que existe $u_1(x) = Fx$ tal que a solução da equação (S^*) com esse controle é exponencialmente estável na p-média, $\forall p > 2$.

A controlabilidade de (D) é uma condição suficiente para a estabilização de (S^*), porém não é necessária, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo: Seja

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\,Id,\ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como posto $[\,C_1\ AC_1\,]$ = posto $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 1$, a equação $\mathring{y}(t) = Ay(t) + C_1\,\tilde{u}(t)$ não é controlável.

Por outro lado, tomando $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, segue que $C_1D_1 = 0$ e para a equação

$$dX(t) = (A + C_1\,D_1)\,X(t)\,dt + BX(t)\,dw(t)$$

$$= AX(t)\,dt + BX(t)\,dw(t)\,,$$

obtemos $Q(s) = \langle (A + C_1\,D_1)s,s\rangle + \frac{1}{2}\|Bs\|^2 - \langle Bs,s\rangle^2 = -\,1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, $\forall s \in S$.

Logo, $dX(t) = \Big[AX(t) + C_1\ u_1(t,X(t))\Big]dt + BX(t)dw(t)$ é estabilizável.

Teorema 7.3: Se $\det C_1 \neq 0$, então existe controle u_1 que estabiliza (S^*).

Prova: Seja $D_1 = - C_1^{-1}[A + (\gamma + \varepsilon)Id]$, onde $\varepsilon > 0$.

Então,

$$Q(s) = \langle (A + C_1 D_1)s,s\rangle + \frac{1}{2}\|Bs\|^2 - \langle Bs,s\rangle^2$$

$$= - (\gamma + \varepsilon) + L(s) \leq - \varepsilon < 0, \ \forall s \in S^{d-1}$$

e portanto, a equação (S^*) com controle $u_1(x) = D_1 x$ é estabilizável.

Denotemos por (S_0) a equação (S^*) com $u_1(s,x) \equiv 0$ e seja $Q_0(s) = \langle As,s\rangle + L(s)$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Proposição 7.2: Se $Q_0(s) < 0$, $\forall s \in S^{d-1}$, então existe controle u_1 que estabiliza (S^*).

Prova: Se $D_1 = - C_1'$, então

$$Q(s) = \langle (A + C_1 D_1)s,s\rangle + L(s) = Q_0(s) - \|C_1's\|^2 < 0$$

e portanto, $u_1(x) = - C_1'x$ é um controle que estabiliza a equação (S^*).

Observação: Se $A < 0$ e seu maior autovalor é menor que $-\gamma$, então $Q_0(s) < 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Proposição 7.3: Se (S_0) é assintóticamente estável, então existe controle que estabiliza (S^*).

Prova:

Caso I:

Se $\det C_1 \neq 0$, seja $D_1 = - \frac{1}{k} C^{-1}$, com k suficientemente grande.

Então, $C_1 u_1(x) = C_1 D_1 x = - \frac{1}{k} x$ e os coeficientes das equações (S_0) e (S^*) satisfazem:

$$\left|Ax - \left(Ax - \frac{1}{k}x\right)\right| + |Bx - Bx| = \frac{1}{k}|x| ,$$

numa vizinhança suficientemente pequena de $x = 0$.

Portanto, segue do teorema 1.1, pag. 248, em ([4]), que (S^{*}) com controle u_1 é estabilizável.

Caso II:

Suponhamos que $\det C_1 = 0$.

Se $C_1 = (c_{ij})$, seja $D_1 = (d_{ij})$ com

$$d_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(\sum_{j=1}^{d} c_{j1}^2\right) N} \quad (= k) \text{ , } i = j = 1, \\ 0, \text{ outros casos} \end{cases}$$

onde N é constante suficientemente grande.

Como

$$C_1D_1 = \begin{pmatrix} c_{11}k & 0 \dots 0 \\ c_{21}k & 0 \dots 0 \\ \vdots & \\ c_{d1}k & 0 \dots 0 \end{pmatrix} ,$$

segue que

$$\operatorname{tr}\left[C_1D_1(C_1D_1)'\right] = k^2\left(\sum_{j=1}^{d} c_{j1}^2\right) = \left[N^2\sum_{j=1}^{d} c_{j1}^2\right]^{-1} = \gamma .$$

Logo, $\|C_1D_1x\| \leq \left(\operatorname{tr}\left[C_1D_1(C_1D_1)'\right]\right)^{1/2} \|x\| = \gamma\,\|x\|$, com γ suficientemente pequeno.

Obtemos, utilizando o mesmo teorema que no caso I, que existe controle $u_1(x) = D_1x$ que estabiliza (S^{*}).

Examinaremos a seguir o caso escalar.

Consideremos as equações:

$$dx(t) = ax(t)\,dt + bx(t)\,dw(t) \qquad (1)$$

$$dx(t) = [ax(t) + c_1 u_1(t,x(t))]\,dt + bx(t)\,dw(t) \qquad (2)$$

<u>Caso I</u>: $a < \frac{b^2}{2}$.

Neste caso, (1) é assintóticamente estável.

Tomando d_1 de modo que $a + c_1 d_1 < \frac{b^2}{2}$, o controle $u_1(x) = d_1 x$ estabiliza a equação (2).

Por outro lado, se $d = c_1^{-1}\left(\frac{b^2}{2} - a + 1\right)$, então

$$a + c_1 d_1 = \frac{b^2}{2} + 1 > \frac{b^2}{2};$$

logo, o controle $u_1(x) = dx$ desestabiliza a equação (2), isto é, (2) com esse controle *não* é assintóticamente estável.

<u>Caso II</u>: $a \geq \frac{b^2}{2}$.

Neste caso, a equação (1) não é assintóticamente estável.

Tomando $d_1 = C_1$, $a + C_1 d_1 = a + C_1^2 > \frac{b^2}{2}$, logo, a equação (2) com controle $u_1(x) = C_1 x$ não é assintóticamente estável.

Por outro lado, se $d_1 = -(a + 1)\,C_1^{-1}$, então $a + C_1 d_1 = -1 < b^2/2$ e portanto, (2) com controle $u_1(x) = d_1 x$ é assintóticamente estável.

Conclusão: Podemos estabilizar ou desestabilizar a equação (2) independente do comportamento da equação (1).

Em alguns casos, tal fenômeno se repete para dimensão $d > 1$, como veremos a seguir.

Teorema 7.4: Se $\det C_1 \neq 0$, então existe controle feedback u_1 que desestabiliza (S^*).

Prova: Se $D_1 = C_1^{-1}[(\gamma + \varepsilon)Id - A]$, com $\varepsilon > 0$, então $A + C_1D_1 = (\gamma + \varepsilon)Id$ e portanto, $Q(s) = \langle (A + C_1D_1)s, s\rangle + L(s) = \gamma + \varepsilon + L(s)$; logo,

$$\varepsilon \leq Q(s) \leq 2\gamma + \varepsilon \ , \ \forall s \in S^{d-1}.$$

Daí, o controle $u_1(x) = D_1x$ desestabiliza a equação (2).

Proposição 7.4: Se $Q_0(s) > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$, existe controle que desestabiliza a equação (S^*).

Prova: Seja $D_1 = + C_1'$. Logo, $A + C_1D_1 = A + C_1C_1'$ e então,

$$Q(s) = \langle (A + C_1D_1)s, s\rangle + L(s) = Q_0(s) + \|C_1'(s)\|^2 > 0, \ \forall s \in S^{d-1}$$

e portanto, $u_1(x) = C_1C_1'\ x$ desestabiliza (S^*).

Observação: Se A e B são antisimétricas,

$$Q_0(s) = \frac{1}{2}\|Bs\|^2 > 0, \quad \forall s \in S^{d-1}.$$

Se $A > 0$ e seu menor autovalor é maior que γ, então

$$Q_0(s) > 0, \ \forall s \in S^{d-1}.$$

Teorema 7.5: Se (S_0) é assintóticamente estável, existe u_1 tal que

(S^*) com controle u_1 não é estabilizável.

Prova: Se C_1^g é a inversa generalizada de C_1, então $C_1C_1^g$ é uma matriz simétrica; logo, $c_1 = \max\limits_{s \in S^{d-1}} \langle C_1C_1^g s, s\rangle$ = maior autovalor de $C_1C_1^g$ e
$c_2 = \min\limits_{s \in S^{d-1}} \langle C_1C_1^g s, s\rangle$ = menor autovalor de $C_1C_1^g$.

Como (S_0) é assintóticamente estável, seu maior expoente de Lyapunov λ é negativo, onde

$$\lambda = \int_{S^{d-1}} Q_0(s)\, d\nu(s).$$

Temos dois casos:

(I) $Q_0(s) < 0, \ \ \forall s \in S^{d-1}$

Seja $-\ell = \min \left\{ Q_0(s): s \in S^{d-1} \right\}$. Se $D_1 = C_1^g$, então $c_2 \leq \langle C_1D_1 s, s\rangle \leq c_1$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Se $c_2 < 0$, tomando k de modo que $kc_2 > \ell$, obtemos

$$Q(s) = Q_0(s) + \langle C_1D_1 s, s\rangle > kc_2 - \ell > 0, \ \forall s \in S^{d-1}.$$

Logo, o controle $u_1(x) = kC_1^g x$ desestabiliza a equação (S^*).

(II) Q_0 muda de sinal.

Suponhamos que $-m \leq Q_0(s) \leq M$, $\forall s \in S^{d-1}$, onde $m, M > 0$.

Como no caso (I), se $c_2 < 0$, tomamos k de modo que $kc_2 > m$.

Daí,

$$Q(s) = Q_0(s) + \langle kC_1C_1^g s, s\rangle > kc_2 - m > 0, \ \forall s \in S^{d-1}$$

e portanto, o controle $u_1(x) = kC_1^g x$ desestabiliza (S^*).

Observação: Se considerarmos a equação (S), obtemos resultados análogos aos teoremas 7.2 e 7.2.a.

Como, por hipótese, as funções matriciais A e C_1 são limitadas, pelo teorema 1.10 o sistema (D) é uniformemente estabilizável se e somente se é uniforme em relação à controlabilidade.

Repetindo as demonstrações passo a passo podemos enunciar:

Teorema 7.2.b: Se o sistema (D) é uniforme em relação à controlabilidade, então existe controle feedback que torna a equação (S) exponencialmente estável na p-média, $\forall p \geq 2$.

8. ESTABILIZAÇÃO - PARTE II.

Consideremos a equação diferencial linear estocástica no $\mathbb{R}^d$:

$$\left.\begin{aligned} dX(t) &= A(t)X(t)dt + \Big[B(t)X(t) + C_2(t)u_2(t,X(t))\Big]dw(t) \\ X(t_0) &= X_0 \in \mathbb{R}^d \end{aligned}\right\} \qquad (S_1)$$

cujos coeficientes satisfazem as hipóteses (H_2) do parágrafo 2.

Consideremos também a seguinte equação determinística:

$$\left.\begin{aligned} \mathring{y}(t) &= B(t)y(t) + C_2(t)\tilde{u}_2(t) \\ y(t) &= X_0 \in \mathbb{R}^d \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

com seus coeficientes satisfazendo as hipoteses (H_1) do parágrafo 1.

Nosso objetivo é estudar a estabilização (ou desestabilização) da equação (S) através das equações (S_1) e (E), de modo análogo ao feito no parágrafo anterior.

Suponhamos que os coeficientes das equações (S), (S_1) e (E) são constantes.

Se existe um controle feedback u_2 que estabiliza a equação (S_1), então considerando $u_1(s,x) = (C_1^{*}C_1 - Id)\, x$, obtemos que a equação

(S) com controles u_1 e u_2 também é estabilizável. De fato, a equação (S) com os controles u_1 e u_2 é transformada na equação (S_1).

Logo, podemos estabilizar a equação (S) através da equação (S_1); daí, o interesse em estabilizarmos a equação (S_1).

Lema 8.1: Seja B uma matriz real constante dxd e suponhamos que $\sigma(B) = \left\{b_1, \ldots, b_d\right\}$ possui d elementos distintos, todos com o mesmo sinal.

Então, $\sigma(B'B) = \left\{b_1^2, \ldots, b_d^2\right\}$.

Prova: Se b é autovalor de B associado ao autovalor v, temos:

$$B'Bv = B'(Bv) = B'(bv) = bB'v = b(bv) = b^2v.$$

Logo, b^2 é autovalor de B'B, isto é, o quadrado de todo autovalor de B é autovalor de B'B e como são todos distintos, segue que $\sigma(B'B) = \left\{b_1^2, \ldots, b_d^2\right\}$.

Se $u_2(s,x) = D_2x$, a expressão que define um expoente de Lyapunov para (S_1) com controle u_2 é dada por:

$$Q(s) = \langle As,s\rangle + \frac{1}{2}\|(B + C_2D_2)s\|^2 - \langle(B + C_2D_2)s,s\rangle^2, \forall s \in S^{d-1}.$$

Observamos que podemos considerar, sem perda de generalidade, que a matriz A é simétrica.

Teorema 8.1: Se (E) é controlável existe controle feedback u_2 que estabiliza (S).

Prova: Sejam a_1 o menor e a_d o maior autovalor de A.

Temos dois casos a considerar:

<u>Caso I</u>: $a_d > 0$

Seja $\varepsilon > 0$ tal que se $\Lambda = \left\{ b_1 < b_2 < \dots < b_d = \sqrt{b_1^2 + \varepsilon} \right\}$, com $\sqrt{2a_d + \varepsilon} < b_1$, então $\Lambda \cap \sigma(B) = \phi$.

Observamos que existe $\varepsilon > 0$ nas condições acima pois caso contrário, B teria infinitos autovalores.

Como (E) é controlável, pelo teorema 1.12 existe uma matriz D_2 real dxd tal que $\Lambda = \sigma(B + C_2D_2)$.

Se $B_1 = B + C_2D_2$, pelos lema 7.1 e 8.1, segue que $\min\left\{ \frac{1}{2}\langle B_1'B_1s,s\rangle;\ s \in S^{d-1} \right\} = \frac{1}{2}b_1^2$ e $\text{máx}\left\{ \frac{1}{2}\langle B_1'B_1s,s\rangle;\ s \in S^{d-1} \right\} = \frac{1}{2}b_d^2 = \frac{b_1^2 + \varepsilon}{2}$.

Logo, $a_1 + \frac{b_1^2}{2} \leq \langle As,s\rangle + \frac{1}{2}\langle B_1'B_1s,s\rangle \leq a_d + \frac{1}{2}\left(b_1^2 + \varepsilon \right)$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Por outro lado, $\min\left\{ -\langle B_1s,s\rangle^2;\ s \in S^{d-1} \right\} = -\left(b_1^2 + \varepsilon\right)$ e $\text{máx}\left\{ -\langle B_1s,s\rangle^2 : s \in S^{d-1} \right\} = -b_1^2$.

Portanto, $Q(s) \leq a_d + \frac{1}{2}\left(b_1^2 + \varepsilon\right) - b_1^2 = \frac{2a_d + \varepsilon - b_1^2}{2}$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Mas, por hipótese, $\sqrt{2a_d + \varepsilon} < b_1$, isto é, $2a_d + \varepsilon - b_1^2 < 0$.

Daí, $Q(s) < 0$, $\forall s \in S^{d-1}$. Logo (S_1) com controle $u_2(s,x) = D_2x$ é assintóticamente estável e portanto, (S) é estabilizável.

<u>Caso II</u>: $a_d < 0$

Seja $\Lambda = \left\{ b_1 < b_2 < \dots < b_d \right\}$ conjunto de d números reais positivos com $b_d^2 < -2a_d$ e tal que $\sigma(B) \cap \Lambda = \phi$.

Como (E) é controlável, existe uma matriz D_3 real dxd tal que $\Lambda = \sigma(B + C_2D_3)$.

Seja $B_2 = B + C_2D_3$.

Logo,

$$\text{máx} \left\{ \langle As,s\rangle + \frac{1}{2}\langle B_2'B_2s,s\rangle : s \in S^{d-1} \right\} \leq a_d + \frac{1}{2}b_d^2 < 0.$$

Portanto, $Q(s) < 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Daí, (S_1) com controle $u_2(s,x) = D_3x$ é assintóticamente estável e portanto, (S) é estabilizável.

A controlabilidade da equação (E) é uma condição necessária para a estabilização de (S_1), porém não é suficiente, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo: Sejam $A = B = -$ Id (2x2), $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Como posto $[\ C_2\ \ BC_2] = 1$, a equação $\mathring{y}(t) = By(t) + C_2\tilde{u}(t)$ não é controlável.

Por outro lado, como $C_2D_2 = 0$ obtemos para equação

$$dX(t) = AX(t)dt + (B + C_2D_2)\ X(t)\ dw(t)$$

$$= AX(t)dt + BX(t)\ dw(t)$$

o seguinte resultado:

$$Q(s) = \langle As,s\rangle + \frac{1}{2}\langle B'Bs,s\rangle - \langle Bs,s\rangle^2 = -1 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} < 0,\ \forall s \in S.$$

Portanto, a equação é estabilizável.

Teorema 8.2: A equação (S) pode ser estabilizada se det $C_2 \neq 0$.

Prova: Seja $D_2 = C_2^{-1}(k\mathrm{Id} - B)$, com k um número real a ser determinado.

Logo, $B + C_2D_2 = k\ Id$ e portanto,

$$Q(s) = \langle As,s\rangle + \frac{1}{2}k^2 - k^2 = \langle As,s\rangle - \frac{1}{2}k^2,\ \forall s \in S^{d-1}.$$

Seja a o maior autovalor de A.

Se $a > 0$, escolhemos k de modo a termos $a < \frac{1}{2}k^2$; se $a < 0$, k pode ser qualquer número real não nulo.

Em ambos os casos obtemos $Q(s) < 0$, $\forall s \in S^{d-1}$ e portanto, (S) pode ser estabilizada.

Examinaremos a seguir o que ocorre em dimensão 1.

Consideremos as equações na reta:

$$dx(t) = ax(t)dt + bx(t)\ dw(t) \tag{1}$$

$$dx(t) = ax(t)dt + [bx + c_2u_2(x)]\ dw(t) \tag{2}$$

<u>Caso I</u>: $a < \frac{b^2}{2}$

Neste caso, a equação (1) é assintóticamente estável.

Se $d_2 = \dfrac{2\sqrt{|a|} - b}{c_2}$, então $\dfrac{(b + c_2d_2)^2}{2} = 2|a| > a$; logo, o controle $u_2(x) = d_2x$ estabiliza a equação (2).

Se $a < 0$, não existe d_2 tal que $a > \dfrac{(b + c_2d_2)^2}{2}$; logo, não existe controle que desestabiliza (2).

Porém, se $a > 0$ considerando $d_3 = \dfrac{1}{c_2}(\sqrt{a} - b)$, obtemos $\dfrac{(b + c_2d_3)^2}{2} = \dfrac{a}{2} < a$ e portanto, o controle $u_2(x) = d_3x$ desestabiliza (2).

<u>Caso II</u>: $a \geq \frac{b^2}{2}$

Neste caso, a equação (1) não é assintóticamente estável.

Seja $d_2 = \dfrac{2\sqrt{a} - b}{c_2}$; logo, $\dfrac{(b + c_2 d_2)^2}{2} = 2a > a$ e portanto, a equação (2) com controle $u_2(x) = d_2 x$ é assintóticamente estável.

Por outro lado, seja $d_3 = \dfrac{-3b}{2c_2}$; logo, $\dfrac{(b + c_2 d_3)^2}{2} = \dfrac{b^2}{8} < \dfrac{b^2}{2} \leq a$; portanto, o controle $u_3(x) = d_3 x$ desestabiliza a equação (2).

Conclusão: A equação (2) pode ser estabilizada ou desestabilizada se a equação (1) não é assintóticamente estável.

Porém, se a equação (1) é assintóticamente estável nem sempre é possível desestabilizar a equação (2).

Veremos a seguir o que ocorre em dimensão ≥ 2.

Teorema 8.3: Suponhamos que $A > 0$. Se $\det C_2 \neq 0$, podemos desestabilizar a equação (S).

Prova: Seja a o menor autovalor da matriz A e definamos $D_2 = C_2^{-1}[k\, Id - B]$, onde k é um número real tal que $k^2 < 2a$.

Então, $B + C_2 D_2 = k\, Id$ e portanto,

$$Q(s) = \langle As,s\rangle + \frac{1}{2}k^2 - k^2 = \langle As,s\rangle - \frac{1}{2}k^2, \ \forall s \in S^{d-1}.$$

Como $k^2 < 2a$, segue que $0 < a - \frac{1}{2}k^2 \leq Q(s)$, $\forall s \in S^{d-1}$, e portanto, a equação (S_1) com controle $u_2(x) = D_2 x$ não é assintóticamente estável.

Se B é uma matriz dxd qualquer, consideremos a seguinte função:

$$L_B(s) = \frac{1}{2} \langle B'Bs,s\rangle - \langle Bs.s\rangle^2, \ \forall s \in S^{d-1}.$$

Temos os seguintes resultados:

Lema 8.2: Seja $H = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, com $a^2 + b^2 = 1$ e $a^2 < \frac{1}{2}$. Então, $L_H > 0$.

Prova: Com efeito, como $H'H = Id$ e $\langle Hs,s\rangle = a$, segue que $L_H(s) = \frac{1}{2} - a^2 > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Corolário 8.1: Consideremos as seguintes matrizes dxd:

$$B_1 = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ se } d \text{ é ímpar}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H \end{pmatrix}, \text{ se } d \text{ é par.}$$

Então, $L_{B_1} > 0$ e $L_{B_2} > 0$. Portanto, existe sempre uma matriz $\tilde{B}$ tal que $L_{\tilde{B}}(s) > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Teorema 8.4: Suponhamos que det $C_2 \neq 0$. Se $A < 0$ é sempre possível desestabilizar a equação (S).

Prova: Seja $D_2 = C_2^{-1}(\tilde{B} - B)$, onde $\tilde{B}$ é uma matriz tal que $L_{\tilde{B}}(s) > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Como $B + C_2D_2 = \tilde{B}$, obtemos $Q(s) = \langle As,s\rangle + \frac{1}{2}\langle\tilde{B}'\tilde{B}s,s\rangle - \langle\tilde{B}s,s\rangle^2 = \langle As,s\rangle + L_{\tilde{B}}(s)$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Sejam $-a_1$ o menor autovalor de A e m o mínimo de $L_{\tilde{B}}$.
Se $a_1 < m$, segue que $Q(s) \geq -a_1 + m > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.
Se $a_1 > m$, existe $k > 1$ tal que $a_1 < k^2m$.
Tomando $B_1 = k\tilde{B}$, obtemos $L_{B_1}(s) > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$, e k^2m é o

mínimo de L_{B_1}. Daí segue que $Q(s) > k^2m - a_1$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Portanto, existe controle feedback $u_2(x) = D_2x$ que desestabiliza a equação (S_1); logo, podemos desestabilizar a equação (S).

Corolário 8.2: Se det $C_2 \neq 0$, então podemos desestabilizar a equação (S).

Prova: Sejam a_1 o menor e a_d o maior autovalor da matriz A. Temos três casos a considerar:

<u>Caso I</u>: $a_1 > 0$

Nesse caso, A é positiva definida e o resultado é o teorema 8.3.

<u>Caso II</u>: $a_d < 0$

Nesse caso, A é negativa definida e o resultado é o teorema 8.4.

<u>Caso III</u>: $a_1 < 0 < a_d$

Seja $D_2 = C_2^{-1}(\tilde{B} - B)$, onde $\tilde{B}$ é uma matriz tal que $L_{\tilde{B}}(s) > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Como $B + C_2D_2 = \tilde{B}$, segue que $Q(s) = \langle As,s\rangle + L_{\tilde{B}}(s)$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Sejam m o mínimo e M o máximo da função $L_{\tilde{B}}$. Então, $a_1 + m \leq Q(s) \leq a_d + M$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Se $a_1 + m > 0$, $Q(s) > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Se $a_1 + m < 0$, seja $k > 1$ tal que $k^2m + a_1 > 0$.

Tomando $B_1 = k\tilde{B}$, o mínimo de L_{kB_1} é k^2m. Logo, $Q(s) \geq a_1 + k^2m > 0$, $\forall s \in S^{d-1}$.

Portanto, sempre existe um controle que desestabiliza a equação (S_1).

BIBLIOGRAFIA

([1]) Arnold, L. - Stochastic Differential Equations: Theory and Applications; John Wiley & Sons (1974).

([2]) Conti, R. - Linear Differential Equations and Control; Academic Press (1976).

([3]) Fleming, H.W., Rishel, R.W. - Deterministic and Stochastic Optimal Control; Springer-Verlag (1975).

([4]) Hasminskii, R.Z. - Stochastic Stability of Differential Equations; Sijthoff & Noordhoff (1980).

([5]) Hautus, M.L.J. - Stabilization, Controllability and Observability of Linear Autonomous Systems; Indagations Math., 32 (1970), 448-455.

([6]) Ikeda, M., Maeda, H., Kodama, S. - Stabilization of Linear Systems; SIAM J. Control, 10 (1972), 716-729.

([7]) Kalman, R.E., Ho, Y.C., Narenda, K.S. - Controllability of Linear Dynamical Systems; Contributions to Differential Equations, Vol. 1, nº 2, (1961), 189-213.

([8]) Liptser, R.S., Shiryayiv, A.N. - Statistic of Random Process I, General Theory; Springer-Verlag (1974).

([9]) Palma, E. - Controlabilidade e Estabilização para Sistemas Determinísticos; Tese de Mestrado, IME-USP (1986).