UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

TULIO SOUSA CARDOSO

Curvas Paramétricas: compreensão do movimento na perspectiva da geometria dinâmica

Campinas

2020

Tulio Sousa Cardoso

Curvas Paramétricas: compreensão do movimento na perspectiva da geometria dinâmica

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Tulio Sousa Cardoso e orientada pelo Prof. Dr. Samuel Rocha de Oliveira.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C179c

Cardoso, Tulio Sousa, 1990-
Curvas paramétricas : compreensão do movimento na perspectiva da geometria dinâmica / Tulio Sousa Cardoso. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria dinâmica. 2. Curvas planas. 3. GeoGebra (Programa de computador). 4. Representações de álgebras. 5. Situações didáticas. 6. Sequências (Matemática). I. Oliveira, Samuel Rocha de, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Parametric curves : understanding movement from the perspective of dynamic geometry
Palavras-chave em inglês:
Dynamical geometry
Plane curves
GeoGebra (Computer program)
Representations of algebras
Didactic situations
Sequences (Mathematics)
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
Samuel Rocha de Oliveira [Orientador]
Ricardo Miranda Martins
Wladimir Seixas
Data de defesa: 07-10-2020
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-5470-6533
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/5969313054143852

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 07 de outubro de 2020 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). WLADIMIR SEIXAS

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Resumo

Esta dissertação propõe uma sequência didática sobre o ambiente da geometria dinâmica, favorecendo a compreensão dos conceitos envolvendo curvas planas, tomando como referência a teoria das situações didáticas. A metodologia adotada é a da engenharia didática. A concepção da sequência perpassa por três níveis: o primeiro é feito dos saberes prévios dos alunos e relaciona-se às funções do substrato para construção dos conceitos envolvendo curvas planas. Ainda nesse nível, há apropriação das ferramentas do meio, por intermédio de atividades que buscam motivar e introduzir os alunos de forma autônoma ao ambiente online do software Geogebra. No segundo nível é construído o conceito de curvas e suas representações por meio de exemplos e construções geométricas aliadas a suas representações algébricas. Este modelo é possibilitado pelo meio onde ocorre a interação entre aluno e saberes, chamado de *milieu* caracterizado, um ambiente autônomo e antagônico ao sujeito. No terceiro nível os alunos são mais exigidos, passam pelas situações a-didáticas e é proposto um conjunto de atividades planejadas em níveis de dificuldades espiral, com as devidas análises *a priori*, concebidas via Teoria das Situações Didática. São feitas análises *a posteriori* obtidas na fase de experimentação, essas contrastada as variáveis de comandos *a priori* sugerem que o objetivo de construção do conceito de curvas planas via ambiente digital colaborativo foi alcançado. Evidência em sua tipologia uma troca de informação que valoriza o desenvolvimento dos constructos em perspectiva histórica, o sujeito inserido no milieu e contexto social, estabelecendo uma relação entre o saber, o professor e aluno.

Palavras-chave: Geogebra. Educação. Sequência. Didática.

Abstract

This dissertation proposes a didactic sequence with the environment of dynamic geometry, favoring the understanding of concepts involving plane curves, taking as a reference to the theory of didactic situations, following as methodology the didactic engineering. The conception of the sequence goes through three levels: in the first, it's based on the students' prior knowledge regarding functions that is the base for the construction of concepts involving flat curves, and also at this level, occurs the appropriation of the tools of the environment, through activities that seek to motivate and introduce students autonomously to the online environment of the software Geogebra; in the second the concept of curves and their representations is constructed through examples and geometric constructions combined with their algebraic representations, made possible by the environment where the interaction between student and knowledge occurs, this environment is called *milieu*, and is characterized as being an environment autonomous and antagonistic to the subject; in the third the students are more requested, because they go through a-didactic situations, it's proposed a set of activities with levels of difficulties in spiral with an appropriate prior analysis, conceived through the Didactic Situations Theory. We do a *posteriori* analyze of what was obtained in the experimentation phase, these analyzes contrast the commands variables a *priori* suggest that the objective of building the concept of plane curves via a collaborative digital environment was achieved and there is still evidence in its typology an exchange of pieces of information that highlight the story of the characters who organized such constructs, valorize the subject who using the *milieu* and its context, seeks to decode this language, establishing a relationship between knowledge, teacher and student.

Keywords: Geogebra. Education. Didactics. Sequence.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Vemos com frequência alunos de Ensino Médio e início de graduação, de vários cursos, com dificuldades no entendimento dos conceitos envolvendo curvas planas e suas representações, na forma algébrica ou geométrica e sua inter-relação. As abordagens envolvendo curvas se limitam apenas a funções na forma explícita e ainda assim com grande defasagem (MAGARINUS, 2013), mesmo as curvas mais simples.

Além das dificuldades operacionais provenientes de uma formação básica deficitária, o estudante apreende, quando muito, aspectos mecânicos das equações e suas fórmulas, e raramente resolvem situações problemas, bem como apresentam dificuldades no reconhecimento das curvas no contexto dinâmico. Os livros didáticos cumprem seus papéis ao exibirem o tema das curvas planas, com variados graus de sofisticação e profundidade, definições apropriadas, exemplos e exercícios resolvidos, desafios, gráficos, dentre outros. Entretanto a má formação dos alunos e a falta de habilidade para a compreensão do tema, comprometem seriamente o entendimento de conceitos mais avançados tratados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (COSTA, 2004), Geometria Analítica e outras.

A escolha do software GeoGebra foi motivada pelos seguintes fatores: 1º) Trata se de um software livre, isto é, não precisa adquirir uma licença para ser utilizado. 2º) As possibilidades de acesso ao software são variadas, pois pode ser instalado em computadores, celulares ou até mesmo utilizado sem a instalação prévia em ambiente online. 3º) O site do Geogebra possui um ambiente didático que permite criar páginas de trabalho, facilitando o acesso e a distribuição dos materiais. 4º) Existe uma vontade comum aos usuários de softwares livre em compartilhar o saber e contribuir para o desenvolvimento do tema de interesse.

O sistema computacional supracitado proporciona ao docente um ambiente que favorece a dimensão diagnóstica da aprendizagem do aluno, verificando se os conceitos básicos de funções estão bem solidificados, pois o software demanda muito explicitamente os intervalos de domínio e a representação gráfica que indica os subconjuntos do conjunto imagem da função. O apelo intuitivo de uma curva parametrizada na descrição de uma função é outro importante atrativo a ser considerado, pois possibilita transpor a ideia das relações entre variáveis para curvas que não são funções.

Considerando o exposto, esta dissertação tem por objetivo construir o conceito de equações paramétricas envolvendo curvas planas, via meio tecnológico. Especificamente, buscamos analisar os conceitos de funções básicas no Ensino Médio (E.M.), construir os conceitos envolvendo curvas planas no software dinâmico, explorar as características e elementos das curvas planas, em especial as representações paramétricas através de software educacional, dando dinamismo e significado, propiciar um ambiente digital que facilite a comunicação entre os sujeitos envolvidos no processo de aquisição dos saberes matemáticos, despertar o interesse pela história da matemática e compreender a sua importância como uma construção humana e aplicar a sequência no ensino médio.

A partir desses objetivos adotamos a abordagem metodológica da sequência didática, concebida a partir da engenharia didática.

Com vistas a alcançar os objetivos propostos e descrever os resultados alcançados no desenvolvimento da pesquisa, esta dissertação foi desenvolvida em 3 partes. As duas primeiras consistem no referencial teórico dos conteúdos e métodos necessários para o desenvolvimento do produto didático, prezando a dimensão histórica e contextualizando o desenvolvimento de determinada ideia matemática dentro da sociedade, evidenciando como a matemática foi construída e as dinâmicas ao longo deste processo. Já na última parte do trabalho, são apresentados os resultados e as sequências elaboradas com as devidas análises *a posteriori* e, por fim, as considerações finais.

A primeira parte foi dividida em 3 capítulos, os quais trazem os conceitos matemáticos e a devida contextualização histórica utilizadas na construção da sequência didática. O capítulo 1 apresenta os conceitos relativos às curvas planas e as suas formas de representação, bem como há uma adequação das representações as situações, isto é, as representações estão diretamente ligadas a certos contextos e, para isso, são apresentados 3 exemplos. Ademais, é versado sobre o estudo geral sobre tangentes às curvas na forma paramétrica, vetores usados na compreensão geométrica do movimento, apresentação das formas de calcular o comprimento das curvas planas e a discussão da reparametrização das curvas planas. No capítulo 2, são abordadas as coordenadas polares afim de apresentar uma forma de parametrização muito utilizada. No capítulo 3, são apresentadas as cônicas, assim como, o seu contexto e riqueza histórica, dando ênfase à construção dinâmica e relacionando as equações gerais com as paramétricas.

A segunda parte é dividida em 4 capítulos que discorrem sobre os referenciais didático-metodológicos, o software GeoGebra, os *Applets* construídos e a metodologia. O capítulo 4 apresenta os aportes utilizados para referenciar as escolhas didático/metodológicas e, para isso, buscou-se subsídios teóricos relativos ao uso da tecnologia no processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido, os autores (BORBA, M. C.; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015) nos contextualizam sobre o desenvolvimento das ferramentas tecnológicas até chegar nos ambientes de aprendizagens online e no software GeoGebra.

Posteriormente, buscamos ferramentas didático-metodológicas da engenharia didática concebida na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de (BROUSSEAU, 2008). O capítulo 5 apresenta o ambiente do software GeoGebra e traz o seu contexto histórico e suas principais ferramentas. No capítulo 6 são listados todos os applets desenvolvidos e suas respectivas descrições. No capítulo 7 é descrita os passos seguidos para elaboração do produto didático, tendo como fases preliminares a análise dos conhecimentos matemáticos e o levantamento do perfil dos sujeitos envolvidos. Em seguida, foram idealizadas as situações didáticas com as devidas análises *a priori*, com o objetivo de antever possíveis acontecimentos e privilegiando os momentos de contextualização, da devolutiva, das situações a-didáticas, de institucionalização e a experimentação, constituindo assim as 3 primeiras fases da engenharia didática, conforme (ARTIGUE, M., 1995).

A terceira parte é constituída pelos 2 últimos capítulos, nos quais são apresentados os resultados, o produto didático, e as considerações finais, respectivamente. O capítulo 8 apresenta os produtos obtidos que são as duas Sequências Didáticas, a primeira voltada para o ensino médio com as devidas atividades e análises *a posteriori* da experimentação descrita após apresentação da sequência. Para encerrar o capítulo 8 temos a segunda sequência, uma proposta de sequência didática para alunos de graduação, com a devida análise *a priori*. E, por fim, no capítulo 9, são feitas as considerações finais.

As figuras apresentadas nessa dissertação que não possuem fonte especificada, pois, foram produzidas pelo autor.

Parte I

Revisão e Discussão Teórica

Antes de apresentar a revisão dos conceitos pretendidos, é preciso fazer uma pequena viagem ao longo da história e perceber como a construção da matemática está intimamente ligada ao desenvolvimento da própria sociedade. Observa-se que a ideia de curvas e as três formas de representa-las, bem como o desenvolvimento de suas concepções, está intimamente associada à função.

O início da matemática axiomática foi atribuído a Euclides, tendo em vista a publicação de seu livro intitulado "Os elementos"que foi escrito por volta de 300 a.C. na cidade portuária de Alexandria, no Egito. Em seu trabalho, Euclides sistematizou a geometria com construções lógicas formais dedutivas usando apenas régua e compasso, mesmo ciente de que tais instrumentos traçavam apenas retas e círculos. Antes de Euclides, os matemáticos utilizavam sua criatividade para estudar outras curvas que eram descritas como o lugar geométrico de pontos que satisfaziam condições pré-estabelecidas. Tem-se como exemplo as cônicas e os aclamados 3 problemas clássicos (quadratura do círculo, duplicação do cubo, trissecção do ângulo) que fascinavam a todos pela dificuldade em resolver utilizando apenas régua e compasso. De fato, a complexidade envolvendo a resolução das curvas ficou evidente, pois foram demandados mais de dois milênios para que esses matemáticos pudessem admitir que a solução por meio do uso exclusivo desses instrumentos era impossível. Não obstante, os conceitos primitivos de curvas estão coadunados a relação entre grandezas variáveis e a ideia de funções. Na pré-história, alguns problemas do cotidiano exigiam que as duas variáveis fossem relacionadas, tal como fazer a correspondência entre quantidade de ovelhas do rebanho e a quantidade de pedras, conforme ilustram (ALKIMIM, E.; PAIVA, 2012):

> Na Pré-história, as pessoas viviam em pequenos grupos, alimentavam-se de caças e, para protegerem-se do tempo e dos inimigos, abrigavam-se em cavernas. Com o passar do tempo, os modos de vida foram se alterando e o homem deixou de ser apenas caçador e coletor, passando a ser agricultor, capturando e domesticando animais para tê-los como reserva de alimentos. Para controlar rebanhos e ter certeza de que nenhum animal havia fugido ou fosse morto por predadores, os homens faziam uma relação unívoca entre o conjunto de pedras e a quantidade de animais do rebanho. A cada animal que se queria contar correspondia uma pedra. E assim, relacionando uns objetos com outros o homem começa a desenvolver a noção de função. (ALKIMIM, E.; PAIVA, 2012, p.44)

Estes autores trouxeram significativas contribuições teóricas ao campo da matemática por meio das discussões estabelecidas acerca das concepções primitivas (passando pela idade média) ligadas à noção de função. Contudo, nos concentraremos nas concepções modernas, como (ROSSINI, 2006) sintetiza na Figura 1:

Ano	Matemático	Concepção
1637	Descartes	Equação em x e y que mostra dependência.
1670	Newton	Quantidades relacionadas; fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto da curva, máquina.
1718	Jean Bernoulli	Relação entre grandezas variáveis.
1748	Euler	Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência arbitrária.
1778	Condorcet	Dependência arbitrária.
1797	Lacroix	Dependência arbitrária.
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica.
1821	Cauchy	Resultado de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes e variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; seqüência de valores; ordenadas não sujeitas a uma lei comum.
1834	Lobatchevsky	Expressão analítica; condição para testar os números, dependência arbitrária.
1837	Dirichelet	Correspondência: para cada valor de x (abscissa), um único valor de y (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de x em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y; não é necessária uma mesma lei para todo o intervalo; y não precisa ser definido por uma expressão matemática explicita em x.
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a uma determinada lei.
	Cantor	Subconjunto de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.
1939	Bourbaki	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a duas condições.

Figura 1 – Síntese das concepções de função. Fonte: Rossini, 2006, p. 54.

Essas concepções contribuíram e determinaram a forma como os estudos são realizados na atualidade e Leibniz possivelmente foi o primeiro a alcunhar a palavra função para expressar quantidade associada a uma curva. Contudo, se Descartes não houvesse idealizado uma forma simples de inter-relacionar a álgebra e a geometria com seu plano bidimensional, muitos avanços seriam impensados e inalcançáveis, assim como: a descrição geométrica das equações matemáticas, as construções geométricas euclidianas estabelecidas por axiomas e escritas por equações, além de tantos outros ganhos advindos do sistema de coordenadas cartesiano.

Dentre as concepções modernas que mais se aproximam da concepção apresentada, em 1837, por Peter Gustav Lejeune Dirichlet:

> '[...]' se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo, que sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função

> da variável independente x. (BOYER, 1986, p. 405)

A essa definição foram acrescidos os conceitos de conjunto e de números desenvolvido por Julius Dedekind (1831-1916) e George Cantor (1845-1918) que contribuíram para a atual definição de função. Esta iniciativa foi tomada por um grupo de matemáticos franceses que se denominavam Bourbaki (século XX), cuja ocupação consistia em estudar e desenvolver teorias matemáticas (EVES, 2002). Dessa forma, chegamos na definição 1, proposta em 1939:

Definição 1 (Função)**.** *Sejam A e B dois conjuntos, uma relação entre um elemento $x \epsilon A$, e um elemento $y \in B$ é dita relação funcional, se qualquer que seja $x \in A$, existe um único elemento y de B, que esteja na relação considerada.*

De igual modo, a função pode ser definida como sendo a forma explícita de representar uma curva plana, onde a variável dependente y é dada explicitamente em relação a variável independente x. Esta definição é imprescindível, pois ela permite estabelecer a maioria das curvas de cálculo e de geometria.

Nota-se que o caminho percorrido pelos matemáticos foi complexo em relação ao desenvolvimento histórico dos conceitos de função, como destaca (ZUFFI, E.M., 2001) ao enfatizar que os problemas surgiram com a finalidade de descrever e compreender os fenômenos naturais, identificar as relações entre variáveis de maneira qualitativa e, posteriormente, estabelecer as formas de representar graficamente as expressões analíticas além de, finalmente, instituir a relação entre conjuntos.

Outra definição interessante de função é a do matemático francês Jean-Louis Lagrange (1736-1813), que já incorpora ao conceito a possibilidade de termos diferentes variáveis:

> Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras, que se veem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções pondera-se somente as quantidades que se são variáveis, sem consideração às constantes que podem estar misturadas. (ZUFFI, E.M., 2001, p.4)

Esta definição traz em seu corpo o que denominamos de representação implícita de uma função ($F(x, y) = k$), mas deve-se observar que na citação, o autor destaca que nem sempre é possível representar uma relação entre duas variáveis x,y na forma explícita $f(x) = y$ (essa notação foi dada por Euler, a partir da publicação de seu trabalho intitulado *Introductio in analysin infinitorum* em 1748).

Partindo dessa premissa, a forma implícita é a única maneira de fazê-la, mas há de se considerar que existem curvas que não são representações geométrica de uma função (como consta na Definição 1). Um exemplo é a Cissóide de Diócles. Apesar de não poder ser escrita na forma explícita, ela é obtida na sua forma implícita. Esta curva é, portanto, definida como o lugar geométrico descrito pela interseção da tangente a uma parábola com a normal a esta, passando pelo vértice da mesma. Assim como a característica assinalada existem outras curvas que não são funções que, no entanto, não podem ser descritas na forma explícita.

A forma explícita $y = f(x)$ é a representação mais comum e, por vezes, é a única apresentada aos alunos do ensino básico, pois é relativamente fácil e equivale basicamente em traçar os gráficos das funções dada pelo conjunto de pontos $(x, f(x))$, onde o conjunto dos valores de x é o domínio da função f e, $f(x)$ é a imagem de x pela regra f.

A forma implícita, ainda que descreva curvas que a forma explícita não consegue, denota que ambas representações são estáticas e, por esse motivo, pode se conhecer apenas um conjunto de pontos desenhados conforme o padrão determinado por cada representação. Todavia, não fica claro que este conjunto de pontos é capaz de representar o caminho por onde as partículas podem se mover e, deste modo, adquirir um aspecto mais dinâmico às representações das curvas.

Desse modo, esse dinamismo é obtido quando as curvas estão representadas na forma paramétrica, que basicamente se encarregam de exprimir as variáveis x e y em função de outra variável, chamada de parâmetro. Um exemplo de parâmetro bastante conhecido é o tempo, usado para descrever o movimento no plano cartesiano, para ilustrar e dar significado é preciso imaginar um corredor em uma pista circular (descrita pela equação implícita $P(x, y) = k$), isso implica em escrever as variáveis x e y em função de t (tempo), tomando $x = f(t)$ e $y = g(t)$ e assim a forma implícita é dada por $P(f(t), g(t))$ e representa a posição do corredor a cada instante t. Outro exemplo é escrever a Cissóide de Diocles representada na forma implícita por $x^3 - 2ay^2 + xy^2 = 0$ como o lugar geométrico das retas normais traçada do vértice de uma parábola às suas tangentes, dando assim uma descrição dinâmica que facilita e dá significado no traçado da cissóide. Essa curva foi empregada para resolver o problema da duplicação do cubo.

Isto posto, constata-se que a representação paramétrica está ligada ao movimento. No livro do (EVES, 2002), ele mostra como Newton pensava o cálculo, embora não usasse os termos de hoje, as curvas eram parametrizadas pelo tempo. Na geometria, possivelmente essa representação aparece na tentativa de resolver os problemas envolvendo curvas mecânicas e a noção de lugar geométrico, que ao desenvolver a linguagem funcional, permite chegarmos a ideia de representação paramétrica moderna.

Em (DIAS, 2014) traz nas raízes do desenvolvimento da geometria diferencial, na qual emprega a parametrização de curvas:

É correto dizer que essa matéria, pelo menos da forma que encontramos hoje, começou por volta do século XVIII, com o surgimento do cálculo e da geometria analítica. Entretanto, a gênesis dessa disciplina é atribuida a Gaspard Monge, que pode ser considerado como o pai da geometria diferencial de curvas e superfícies do espaço. Mais tarde, surgiram os estudos de Carl Friedrich Gauus (1777-1855) com a geometria diferencial de curvas e superfícies por meio de parametrização e Bernhard Riemann com sua famosa geometria riemanniana.(DIAS, 2014, p.12)

1 Revisão Conceitual

Este capítulo tem o intuito de trazer as definições e conceitos necessários para desenvolver o produto (Sequência Didática/Applets) a cerca de curvas planas na forma paramétrica.

1.1 Curvas planas e equações paramétricas

As curvas planas podem ser representadas nas formas explícita, implícita e paramétrica, mas enfatizamos a noção paramétrica e por conveniência, quando escrevemos curvas, estamos referindo às curvas planas, definidas por:

Definição 2 (Curvas Planas:)**.** *Uma curva plana é um conjunto C de pares ordenados da forma $(f(t), g(t))$ onde as funções f e g são contínuas em um domínio dado por um intervalo I. Por conveniência, o gráfico da curva C é o conjunto de todos os pontos $P(t) = (f(t), g(t))$ para $t \in I$[1] de um sistema de coordenadas retangulares que correspondem aos pares ordenados, isto é, à medida que t varia em I, o $P(t)$ descreve a curva C.*

Escrevendo em linguagem matemática definimos curva como:

$$\begin{array}{lcl} P : I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & P(f(t), g(t)) \end{array} \tag{1.1}$$

Lê-se: A curva está definida com domínio em I subconjunto dos números reais e imagem no Plano R dois, que para cada t do domínio associa o ponto $P(f(t), g(t))$ do plano.

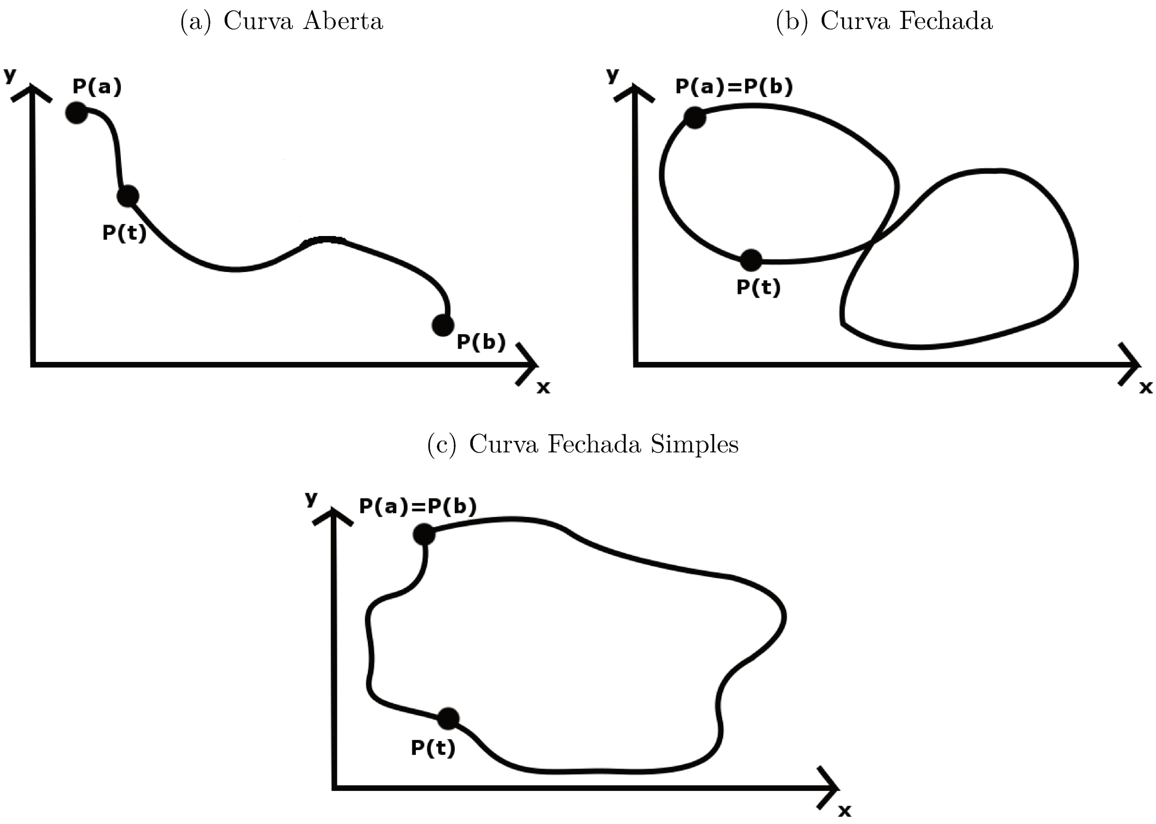
Seguindo essa definição, imaginemos uma partícula que se desloca sobre uma curva C do plano, de um ponto $A = (x_0, y_0)$ até um ponto $B = (x_1, y_1)$, a sua posição é determinada em cada instante $t \,\epsilon\, I = [x_0, x_1]$ por funções do tempo $f(t)$ e $g(t)$, ditas funções paramétricas ou funções coordenadas. Esta função a cada t associa o vetor posição[2] $r(t) = f(t)i + g(t)j =< f(t), g(t) >$, é denominada uma parametrização da curva C, o t é o parâmetro, e não representa, necessariamente, o tempo, podendo ser usado qualquer letra para representá-lo. É usual em aplicações de física envolvendo curvas parametrizadas, o parâmetro denotar o tempo, e assim a posição do Ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ é dado no instante de tempo t. Assim, é conveniente imaginar o ponto $P(t)$ traçando, ou descrevendo

[1] Por vezes, denotamos $P(t) = (x(t), y(t))$, ou quando não houver ambiguidade de sentido $P(t) = (x, y)$, como mostra a equação 1.2.

[2] Este é o vetor posição definido em 5

a curva C quando t varia no intervalo I, e assim a cada instante t temos a posição $P(t)$ da partícula móvel. Dessa forma, usaremos indistintamente as expressões curva, traço e gráfico de uma curva para representar o caminho percorrido por $P(t)$.

As curvas podem ser classificadas como sendo aberta (a), fechada (b) e fechada simples (c)



(a) Curva Aberta

(b) Curva Fechada

(c) Curva Fechada Simples

Figura 2 – Classificação das curvas planas

A Figura 2 exemplifica várias curvas definidas em um intervalo $I = [a, b]$ fechado. Na Figura 2(a), $P(a) \neq P(b)$, então $P(a)$ e $P(b)$ são chamados pontos extremos de C. Podemos notar ainda, que a curva se intercepta, isto é, para dois valores distintos de t resultam o mesmo ponto. Na Figura 2(b) temos $P(a) = P(b)$, então C é uma curva fechada. Perceba que ela se intercepta em um ponto e, caso a curva seja fechada e não se intercepte em nenhum ponto como ilustrado na Figura 2(c), então C é uma curva fechada simples. São as curvas simples que evidenciaremos neste trabalho.

Se C é a curva da Figura 2, então as equações:

$$x = f(t), \; y = g(t) \tag{1.2}$$

Onde t pertence a I, são as equações paramétricas de C.

Equações das curvas na forma explícita $y = f(x)$, amplamente conhecidas como funções, podem ser facilmente parametrizadas por 1.2, basta tomar x como parâmetro

$t\,(x = t)$ e assim $y = f(t)$, mas é importante salientar que essa parametrização está longe de ser única, e ainda a recíproca pode não ser verdadeira, ou seja, pode haver curvas representadas por equações paramétricas que podem não ser expressas na forma $y = f(x)$. Isto é, em outras palavras, existem curvas que não são funções, pois para cada x do domínio não teremos um único valor no contradomínio. A figura 2 ilustra bem que nenhuma das curvas são funções.

No primeiro exemplo vamos parametrizar a reta, usando conceitos da geometria elementar.

Exemplo 1 (Parametrização de uma reta)**.** *Seja r a reta que passa pelos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$, vamos tomar um ponto genérico da reta $P(x, y)$ interior ao segmento $\overline{AB}$ (caso P seja exterior, a ideia é análoga).*

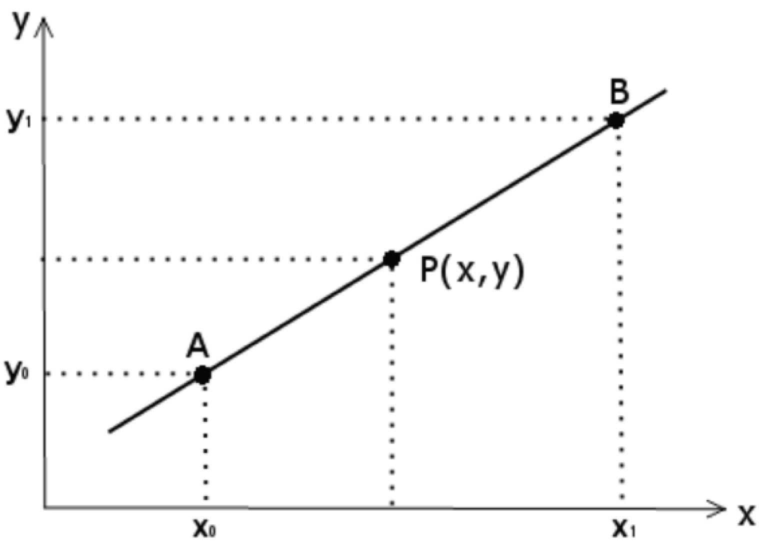


Figura 3 – Reta r, passando pelos pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x_1, y_1)$

Sabemos da geometria, que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{|AP|}{|AB|} = t$*, pelo Teorema de Tales*[3]*:*

I) $\dfrac{|AP|}{y - y_0} = \dfrac{|AB|}{y_1 - y_0} \Leftrightarrow \dfrac{|AP|}{|AB|} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$ *Assim,*

$t = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Leftrightarrow y = y_0 + (y_1 - y_0)t$

II) $\dfrac{|AP|}{x - x_0} = \dfrac{|AB|}{x_1 - x_0} \Leftrightarrow \dfrac{|AP|}{|AB|} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ *Assim,*

$t = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Leftrightarrow x = x_0 + (x_1 - x_0)t.$

Por I) e II) temos as equações paramétricas da reta r

[3] "Feixes de retas paralelas cortadas ou intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes".

$$r : \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \quad t \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

Vamos obter a equação paramétrica da reta s passando pelos pontos $A(3, -6)$ *e* $B(10, 4)$.

$$s : \begin{cases} x = 3 + (10 - 3)t \\ y = -6 + (4 - (-6))t \end{cases} \quad t \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

ou seja,

$$s : \begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -6 + 10t \end{cases} \quad t \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

Para encontrarmos a equação da reta s na forma explícita basta isolar t em uma das equações e substituir na outra. Organizando os termos, obtemos a reta na forma $y = f(x)$, *isto é,* $t = \left(\dfrac{x-3}{7}\right)$ *substituindo na segunda equação,* $y = -6 + 10\left(\dfrac{x-3}{7}\right)$, *portanto,* $f(x) = \dfrac{10}{7}x - \dfrac{72}{7}$ *é a forma explícita da reta s.*

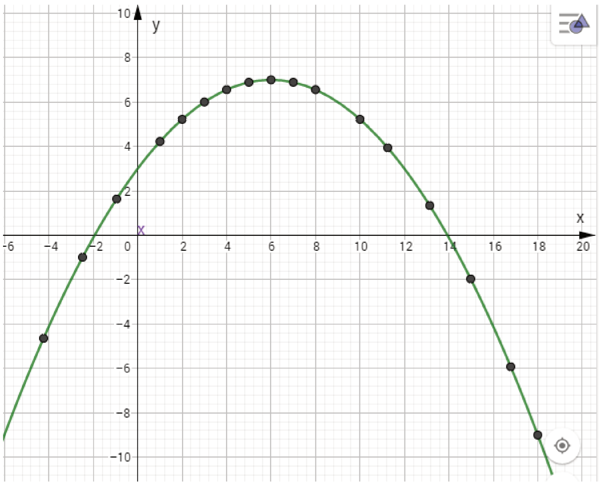
No exemplo seguinte, vamos relacionar a forma explícita e implícita com a paramétrica, trazendo conceitos de domínio e imagem e suas representações, possibilitando contrapor as formas apresentadas, analisando situações/problemas em que cada uma é melhor empregada.

Exemplo 2. *Imaginemos uma bola lançada com uma velocidade inicial* v_0, *a 2 metros abaixo do solo em uma cesta posicionada no chão, seu movimento é descrito pela função abaixo e o eixo y é dado em metros:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = -\left(\frac{x}{3} - 2\right)^2 + 7 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Essa é a forma explícita, está de acordo com a Definição 1 de função, o domínio é o conjunto dos números reais, e a imagem é o conjunto dos valores de y, resultantes da aplicação $f(x)$. Nesse caso, temos o conjunto dos reais, no qual tradicionalmente fazemos uma tabela relacionando os elementos do domínio (x) através da aplicação de f à imagem (y), descobrindo um número suficiente de pares ordenados (x, y) no plano cartesiano. Podemos esboçar o gráfico usando o software GeoGebra. Traçamos o gráfico assim como na Figura 4

Compreender a relação entre as diversas representações da função, identificar seus elementos (domínio, contradomínio, imagem) na forma algébrica da função dada pela relação 1.3 na tabela e no plano cartesiano representado na Figura 4 pode ser importante para interpretar e entender uma situação problema.



	A	B	C
1	x	$-\left(\frac{x}{3}-2\right)^2+7$	(x,y)
2	-4.24	-4.64	(-4.24, -4.64)
3	-2.48	-0.99	(-2.48, -0.99)
4	-0.95	1.63	(-0.95, 1.63)
5	1	4.22	(1, 4.22)
6	2	5.22	(2, 5.22)
7	3	6	(3, 6)
8	4	6.56	(4, 6.56)
9	5	6.89	(5, 6.89)
10	6	7	(6, 7)
11	7	6.89	(7, 6.89)
12	8	6.56	(8, 6.56)
13	10	5.22	(10, 5.22)
14	11.25	3.94	(11.25, 3.94)
15	13.14	1.34	(13.14, 1.34)
16	14.98	-1.97	(14.98, -1.97)
17	16.79	-5.93	(16.79, -5.93)
18	18	-9	(18, -9)

Figura 4 – Representações semióticas da função

Apesar de enxergar o caminho sobre essa forma, não temos muitas informações quanto ao seu movimento, porém tentaremos escrever a função de outras maneiras.

Na forma implícita a mesma função pode ser escrita como $F(x, y) = k$, perceba que o domínio é o conjunto (x, y) do plano que satisfazem a equação$-\left(\dfrac{x}{3}-2\right)^2+7-y=k$ e a imagem mostra os valores de k que a função assume. Assim escrevemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) = k \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ou seja, é uma função que associa para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ um número real $k \in \mathbb{R}$, é raro essa representação no ensino básico e a diferença com a forma explícita é grande, em 1.4 $F(x, y) = -(\dfrac{x}{3} - 2)^2 + 7 - y$ e k=0. Note que essa representação permite variar o k, determinando assim novos pontos (x, y) do domínio que satisfaz $F(x, y) = k$. Usando a planilha dinâmica do GeoGebra vamos ampliar essa ideia. Perceba que na Figura 5 para $k = 0$ temos a função anterior, e para cada k obtemos novos conjuntos de pontos no Plano:

Vemos na figura o conjunto de pontos que formam cada curva, com k indo de -5 até 10 visualizamos 15 curvas diferentes. Geometricamente essas curvas são a projeção ortogonal da superfície $z = -\left(\dfrac{x}{3} - 2\right)^2 + 7 - y$ no eixo xy, ou para melhor entendimento, podemos pensar em um plano paralelo ao formado pelo eixo x e y, cortando a superfície na altura k, onde para cada k obtemos exatamente o desenho da Figura 5 na intersecção com o plano, mas a ideia de projetar esse desenho no plano xy é o que chamamos de curva de nível da superfície 6 muito usado para o estudo topográfico:

As formas explícitas e implícitas são úteis para diversos problemas, mas essa definição deixa a desejar, pois quando pensamos no movimento de uma partícula podemos

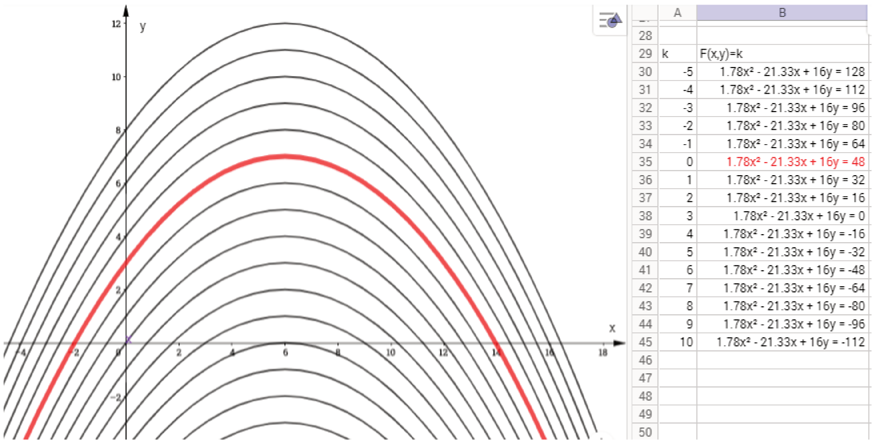


Figura 5 – Representação implícita da curva

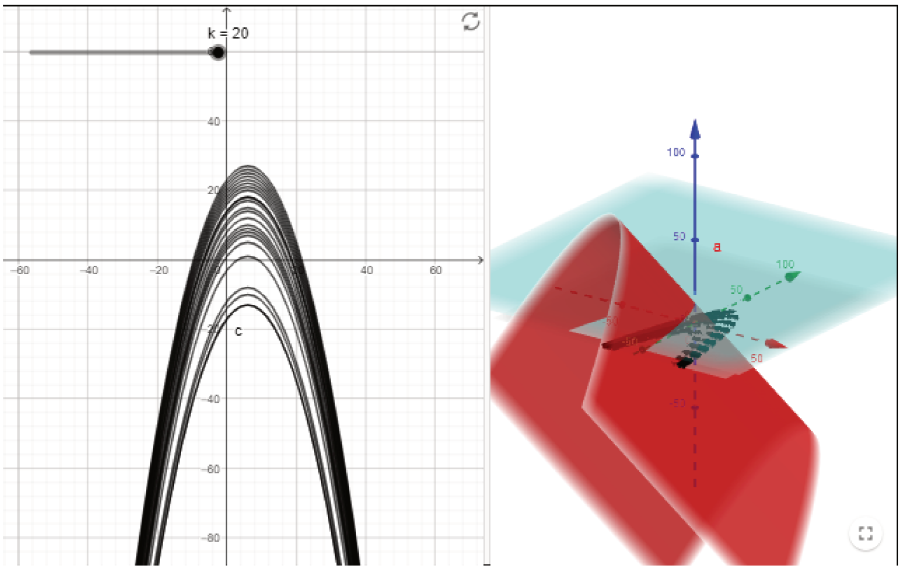


Figura 6 – Curva de níveis relacionados a superfície

reescrever na forma paramétrica 1.2 de forma bem simples, fazendo:

$x = 3(t-3)$ substituindo na $f(x)$ (1.3) obtemos:

$$y = -\left(\frac{3t-3}{3}\right)^2 + 7$$
$$y = -(t-1-2)^2 + 7$$
$$y = -(t-3)^2$$

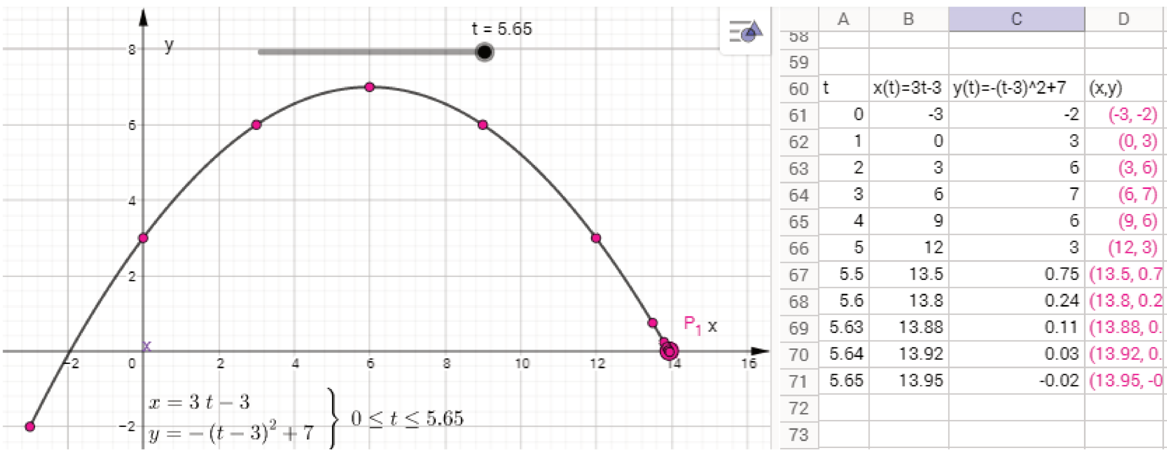
Aqui podemos ter outras parametrizações como $x = 3(t+2)$ substituindo na f(x), $y = -t^2 + 7$. Assim, se faz necessário estabelecer a diferença conceitual entre essas, ou qualquer que sejam as parametrizações de f. Para compreender esta diferença devemos levar em conta a condição inicial, isto é, a bola está sendo lançada a 2 metros abaixo do solo, no plano cartesiano, o que corresponde ao ponto $(-3, -2)$. Na primeira parametrização, pensamos em t como tempo dado em uma unidade qualquer. Diante disso, faz sentido pensar em segundos, $t = 0$ que corresponde ao início do movimento, substituindo nas equações paramétricas $x = -3$ e $y = -2$ e, na segunda parametrização, o início do movimento em $t = 0$ temos $x = 6$ e $y = 7$.

Esta discrepância se deve ao nosso referencial temporal no estudo do movimento, ou seja, cada parametrização gerou uma mudança no tempo inicial da observação, daí a importância de nos ater as condições iniciais, sabendo que o movimento inicia no ponto $(-3, -2)$, enquanto na segunda parametrização podemos descobrir para quê t satisfaz essas condições: $x = 3(t + 2) \Rightarrow \dfrac{x}{3} = t + 2 \Rightarrow t = \dfrac{x}{3} - 2$ fazendo $x = -3 \rightarrow t = -3$, podendo levar a interpretações fora do comum, pois estamos falando de tempo negativo, regressamos ao passado em 3 segundos. Portanto, ao escolhermos uma parametrização devemos tomar cuidado com o domínio da curva, satisfazendo o problema, podemos definir a curva como em Definição 2 :

$$
\begin{array}{lcl}
I = [a, b] \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\
t & \mapsto & P(f(t), g(t))
\end{array}
\tag{1.5}
$$

Escolhendo a primeira parametrização $I = [a = 0, b = 5,65]$ e $P(3(t-3), -(t-3)^2)$, e escolhendo a segunda $I = [a = -3, b = 2,65]$ e $P(3(t+2), -t^2+7)$, ambas descrevem o problema, o domínio é um intervalo fechado, o movimento inicia no $P_0 = (-3, -2)$ e termina em $P_f = (13.94, 0)$.

Constatamos que ao descrever curvas na forma implícita e explícita temos representações estáticas e ao trabalhar com a forma paramétrica ganhamos uma descrição dinâmica, o que é muito útil para entender o movimento da partícula, vejamos:



	A	B	C	D
58				
59				
60	t	x(t)=3t-3	y(t)=-(t-3)^2+7	(x,y)
61	0	-3	-2	(-3, -2)
62	1	0	3	(0, 3)
63	2	3	6	(3, 6)
64	3	6	7	(6, 7)
65	4	9	6	(9, 6)
66	5	12	3	(12, 3)
67	5.5	13.5	0.75	(13.5, 0.7
68	5.6	13.8	0.24	(13.8, 0.2
69	5.63	13.88	0.11	(13.88, 0.
70	5.64	13.92	0.03	(13.92, 0.
71	5.65	13.95	-0.02	(13.95, -0
72				
73				

Figura 7 – Representação Paramétrica - Bola sendo lançada

Na Figura 7 ao mover o controle deslizante t, a curva vai sendo desenhada e os pontos em rosa mostram a posição da bola no instante t. Veja que aproximadamente em $5,65$ segundos a bola atinge o chão (esse valor pode ser obtido algebricamente resolvendo

$-(t-3)^2 + 7 = 0)$, ainda temos a altura máxima de 7 metros após 3 segundos do lançamento.

No exemplo a seguir, vamos partir de uma situação problema para determinar a curva algebricamente e geometricamente, e se possível, escrever a curva na forma explícita.

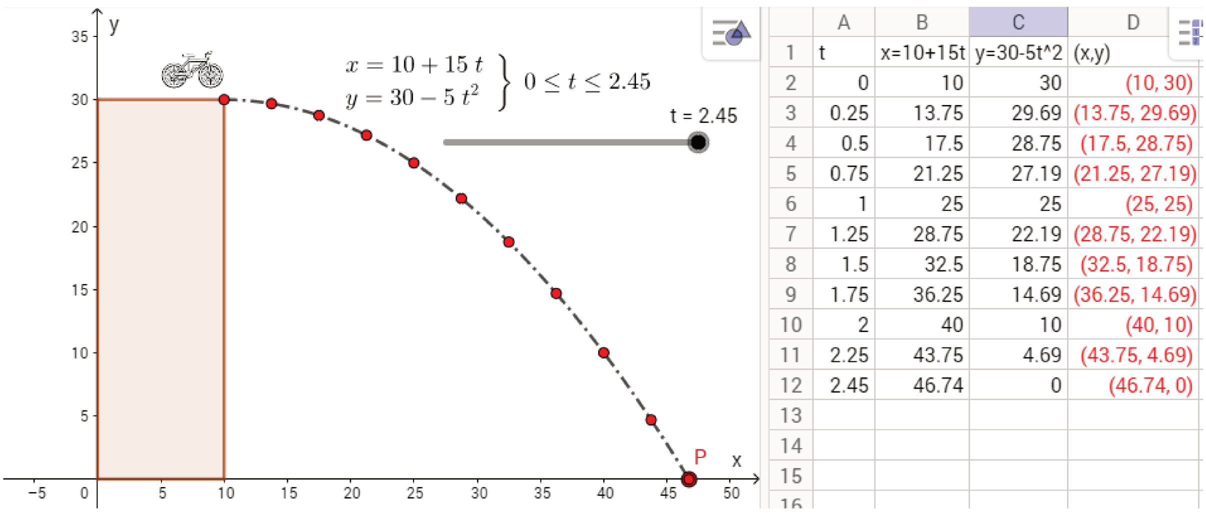
Exemplo 3. *Uma bicicleta está movendo a* $15m/s$ *em uma montanha que fica a* 30 *metros de altura, após percorrer* 10 *metros (horizontal) sem perceber, ela cai em um precipício. Qual equação matemática pode descrever o movimento? Quanto tempo dura a queda, até a bicicleta atingir o chão?*

Estabelecemos um plano coordenado que vai descrever o movimento da bicicleta. Sua queda está no ponto $A(10,30)$ até o ponto $B(x,0)$ que representa o solo.

Sabemos pela física que esse movimento está acontecendo na direção horizontal (digamos pra direita, cuja equação horária do movimento é dada por $S = S_0 + v.t$) com influência da velocidade e vertical (pra baixo, cuja equação horária do movimento é dada por $S = S_0 + v_0 \cdot t + a\dfrac{t^2}{2}$.) sofrendo influência da gravidade terrestre que aceitaremos como sendo igual a $-10m/s^2$, pois se aceleração está ocorrendo pra baixo, para descrever o movimento faz sentido tomarmos $t = 0$ quando a bicicleta está posicionada em $(10,30)$ e começa a cair da montanha, assim $x(t) = 10 + 15t$ e $y(t) = 30 + 0.t - 10\dfrac{t^2}{2}$, o movimento acaba quando $y(t) = 0$, então temos $t = 2.45$ [4], simplificando:

$$\begin{array}{lcl} I = [0, 2.45] \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & P(10 + 15t, 30 - 5t^2) \end{array} \tag{1.6}$$

Aproveitando as vantagens da forma paramétrica, vamos desenhar o gráfico:



	A	B	C	D
1	t	x=10+15t	y=30-5t^2	(x,y)
2	0	10	30	(10, 30)
3	0.25	13.75	29.69	(13.75, 29.69)
4	0.5	17.5	28.75	(17.5, 28.75)
5	0.75	21.25	27.19	(21.25, 27.19)
6	1	25	25	(25, 25)
7	1.25	28.75	22.19	(28.75, 22.19)
8	1.5	32.5	18.75	(32.5, 18.75)
9	1.75	36.25	14.69	(36.25, 14.69)
10	2	40	10	(40, 10)
11	2.25	43.75	4.69	(43.75, 4.69)
12	2.45	46.74	0	(46.74, 0)
13				
14				
15				
16				

Figura 8 – Representação Paramétrica - Bicicleta Despencando

[4] A notação padrão para decimais no Geogebra é dado pelo ponto e não por vírgula

Dessa forma, sabemos que a bicicleta chegará ao solo após 2.45 segundos. É evidente que desconsideramos, para facilitar o problema, a resistência do ar e uma aproximação forçada da gravidade, mas ainda assim o gráfico apresentado representa bem a realidade.

Após demonstrarmos isso, podemos voltar para a forma explícita. Note que mesmo perdendo informações importantes sobre o movimento, algebricamente podemos isolar t em $x = 10 + 5t \Rightarrow x - 10 = 15t \Rightarrow \dfrac{x-10}{15} = t$ e substituir em $y = 30 - 5t^2$. Obtemos assim $y = 30 - 5\left(\dfrac{x-10}{15}\right)^2$ ou, simplificando $y = \dfrac{-x^2}{45} + \dfrac{4x}{9} - \dfrac{-250}{9}$. Essa forma pode ser mais simples, mas ao eliminarmos o parâmetro t perdemos toda representação dinâmica do movimento.

O último exemplo dessa seção tem o intuito de propor discussões sobre o movimento parametrizado por diversas curvas com ponto inicial em A passando por B.

Exemplo 4. *Ao trabalhar com a forma paramétrica, ganhamos alguns entendimentos importantes e significativos. Vamos pensar em um robô se movendo do ponto $A(1,2)$ até o ponto $B(6,8)$ em 1 minuto. Neste caso, podemos usar o parâmetro t para descrever esse movimento, sabendo que x vai de 1 até 6 e y vai de 2 a 8, isto pode ser descrito na posição B como sendo $x_B = 1 + 5$ e $y_B = 2 + 6$. O desafio aqui, é escrever o movimento com o parâmetro tempo que satisfaça as condições iniciais, $t = 0 \Rightarrow P(1,2)$ e $t = 1 \Rightarrow P(6,8)$; portanto, o movimento é bem parametrizado por $x = 1 + 5t$ e $y = 2 + 6t$, pois em $t = 0$ e $t = 1$ são válidas as equações.*

Uma outra maneira seria $x = 1 + 5t^2$ e $y = 2 + 8t^3$, que novamente em $t = 0$ e $t = 1$ são válidas as equações, pois as duas parametrizações representam curvas diferentes, ou seja, um robô se movendo do ponto A ao B podem tomar caminhos diferentes.

1.2 Tangente de curvas Paramétricas

Podemos dizer que a ideia de trabalhar com retas tangentes formalmente começou na Grécia Antiga com Euclides. Ele a define na parte III do seu livro *Os Elementos*, como sendo *Uma reta que, tocando o círculo e, sendo prolongada, não o corta.* Apolônio e Arquimedes contribuíram com estudo das tangentes, que basicamente eram utilizadas como auxílio para construções de objetos geométricos. Para consultar alguma dessas composições em detalhes, temos (CARVALHO, 1919), que apresenta construções dos matemáticos citados. Pensar em tangentes a uma curva conforme Euclides, funciona bem para circunferência, mas para outras curvas como a elipse, nem tanto.

Assim surge Fermat e Descartes no século XVII, munido do plano cartesiano e os poderosos métodos algébricos que permitia desenvolver a geometria, criando métodos

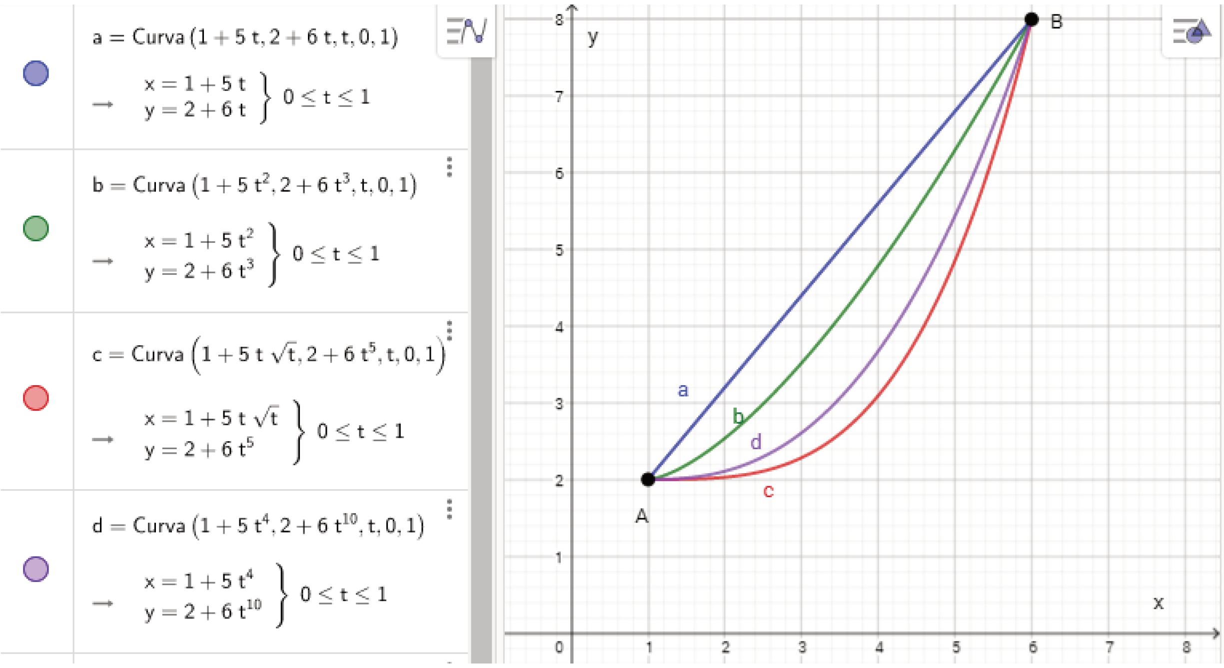


Figura 9 – Parametrizando o movimento do robô indo do ponto A à B

que transcenderam os conceitos envolvendo tangentes, desde a Grécia antiga. Ainda em (CARVALHO, 1919) podemos observar a descrição desses métodos desenvolvidos por Descartes e Fermat. Eles se correspondiam por cartas e, em uma dessas correspondências, Descartes propôs a construção de tangentes a curva denominada *folium de Descartes* e Fermat o respondeu graciosamente com um método geral pra encontrar tangentes a curva, diferente do que desenvolvera, usando o conceito primitivo de derivada. A filosofia e a ciência de Descartes deram a ele o título de pai da filosofia moderna, com uma visão científica transformada do mundo que estabeleceu um novo ramo da matemática, como exprime Boyer:

> Em seu mais célebre tratado, o *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências) de 1637, [...]. Essa abordagem da ciência levou-o a supor que tudo era explicável em termos de matéria (ou extensão) e movimento. O universo todo, ele postulou, era feito de matéria em movimento incessante em vórtices e todos os fenômenos deveriam ser explicados mecanicamente em termos de forças exercidas pela matéria contígua. (BOYER, 1986, p.237)

Devido a isso, evidencia-se o grande papel de Descartes ao conceber a geometria analítica, utilizando uma notação mais clara que suscitou estes métodos gerais para encontrar tangentes a curva. Embora o método de Fermat para traçar tangente mostra-se mais simples usando a razão entre o deslocamento vertical e horizontal, o que faz com que tomemos a variação horizontal cada vez menor, podemos dizer que Fermat também desenvolveu sua geometria analítica, exposta em *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge*, publicado postumamente em 1679. Ambas geometrias foram baseadas nos trabalhos do matemático francês François Viète (1540-1603) conhecido como pai da álgebra.

(ZAZUETA, 2001) conta que as razões da geometria de Descartes ter mais sucesso é, principalmente, pela difusão de seus trabalhos. Os biógrafos não sabem explicar o motivo de Fermat ser avesso a publicar seus trabalhos, que era reconhecido apenas por seus pares, devido as correspondências que fazia com os maiores pensadores europeus da época. Assim a maioria de seus trabalhos estavam dispersos em cartas, em notas e alguns manuscritos, que só vieram a público após sua morte. Outro fator é que, apesar de conceberem a mesma relação entre curvas geométricas e equações algébricas, a anotação e antigas formas das construções euclidianas com Descartes foi modernizada com a utilização das novas técnicas algébricas, enquanto Fermat se manteve, de certa maneira, com usual modo euclidiano. Dito isso, é válido considerar a amplitude dos seus trabalhos.

Ainda citando (ZAZUETA, 2001) enquanto Fermat se limitou as equações do primeiro e segundo grau, sobretudo, propôs-se a reconstituir obras antigas dos lugares geométricos e estudá-las por meio das equações algébricas, Descartes desenvolveu equações polinomiais de grau elevado, propondo demonstrar a aplicação à geometria dos seus métodos discutidos no seu *Discurso do Método*. Outros pensadores europeus, aproveitaram da geometria analítica, ampliando seu desenvolvimento e dando suas contribuições, entre eles estão, Roberval, Torricelli, Blaise Pascal, Jan de Witt, Girard Desargues, Wallis, Huygens, Barrow, Sluse e Hudde, com grande destaque.

Outra dupla relevante que revolucionaria na sua forma de conceber o problema de traçar tangentes a uma curva, são Sir. Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que sistematizaram e formalizaram novos métodos e conceitos em uma linguagem simples e eficaz, no que viria a ser, o que conhecemos hoje como cálculo diferencial e integral. Ao olhar para o conceito de tangente, a maioria dos autores introduzem o conceito de limite e a inclinação da reta tangente é tratada como derivada.

Para elucidar, imaginemos uma bicicleta passeando pela montanha, cheia de altos e baixos, ao pegarmos dois pontos distintos A e B da montanha e ligarmos por uma reta (secante) como na Figura 10, a razão entre a altura e o deslocamento horizontal é o que chamamos de inclinação. Claro que se os pontos estão distantes, essa inclinação será apenas uma média do trajeto, mas podemos pegar os pontos mais próximos uns dos outros, fazendo $\Delta x \to 0$ até chegarmos a inclinação no ponto que queremos, no limite desta aproximação a inclinação recebe o nome de diferencial no ponto A.

Aos 29 anos Leibniz já calcula a velocidade média de um objeto que se desloca no espaço digamos de um ponto A à um ponto B, em um dado intervalo de tempo, pela razão entre o deslocamento e o tempo e, diminuindo esses intervalos, conseguimos aprimorar a velocidade média até chegar a velocidade instantânea, essa é a forma física de ver o conceito da derivada.

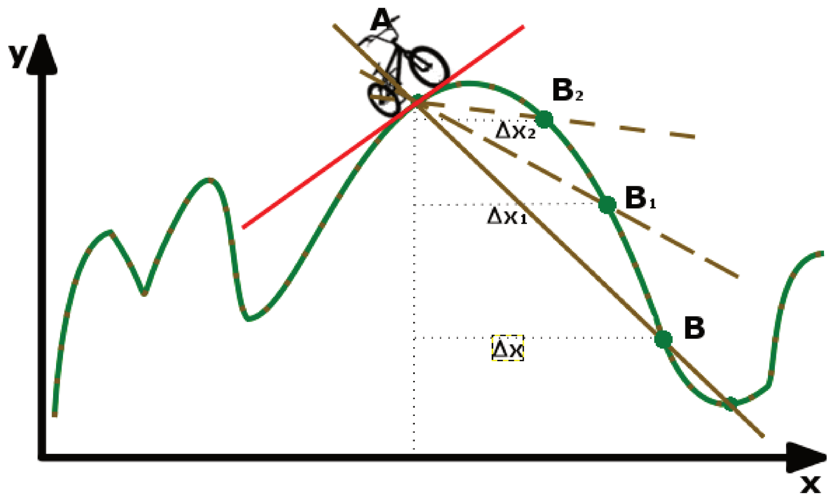


Figura 10 – Fazendo a secante tender a tangente no ponto A $(\Delta X \to 0)$

De acordo com (BARDI, 2016, p.132) foram publicadas em outubro de 1684, no *acta eroditorium* revista cientifica da época, um artigo cujo nome é *Nova Methodus Pro Maximis et Minimis*. Essa foi a primeira publicação relativa ao cálculo a sair em várias partes do mundo e nela, Leibniz estabeleceu regras para diferenciação. A partir daí entramos na era do cálculo e em uma das maiores pelejas pela paternidade do Cálculo Diferencial Integral. Leibniz foi acusado de plágio por Newton, que 10 anos antes desenvolvera o cálculo. Isaac Newton divulgou esses conhecimentos para pessoas próximas através de cartas. Leibniz e Newton nunca se conheceram pessoalmente, apenas se comunicavam por poucas cartas que enviaram um ao outro, marcadas pelos subterfúgios. Talvez essa seja uma das brigas mais ferrenhas da história da matemática, pois (BARDI, 2016) conta em seu livro os detalhes da disputa sobre quem foi o legítimo inventor do cálculo. Diante disso, o que deve ser considerado é o fato que ambos desenvolveram suas ideias de forma distinta e a linguagem proposta por Leibniz é a que mais usamos hoje.

Lembramos aqui, a equação da reta passando pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e inclinação m de uma função $f(x)$ é: $y = y_0 + m(x - x_0)$, m representa a inclinação desta reta dada pelo diferencial:

$$m = \lim_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = F'(x_0)$$

Se pudermos calcular $\dfrac{dy}{dx}$ na forma paramétrica 1.1 encontramos a inclinação da reta tangente na forma paramétrica. Usaremos o teorema:

Teorema 1 (Regra da Cadeia)**.** *Seja $f : A \to B$ uma função dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g : B \to C$ uma função dada pela lei $z = g(y)$. Existe a função composta $F : A \to C$dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$. Suponha que f, g seja diferenciável respectivamente no ponto*

(x, y) tal que $y = f(x)$, resulta que F é diferenciável em x, $F'(x) = g'(y).f'(x)$, ou seja, $F(x) = g(f(x)) \Rightarrow F'(x) = g'(f(x)).f'(x)$

Seja $x = f(t)$ e $y = g(t)$ as equações paramétricas de uma curva C, suponha que podemos eliminar o parâmetro t e escrever explicitamente por $y = F(x)$.

$$g(t) = F(f(t)) \text{ pela Regra da Cadeia derivamos} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = F'(x)\frac{dx}{dt}$$

$$\text{Isolando } F'(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Observação 1. *Suponha também que f, g e F sejam diferenciáveis em todo seu domínio. As condições impostas desde que se tenha $f'(t)$ em um intervalo fechado $I = [a, b]$, f' é contínua, assim, ou f' é positiva ou negativa em todo I, pois decorre do teorema em que f tem uma inversa f^{-1}, e como $x = f(t)$ podemos escrever $t = f^{-1}(x)$ para x em $[f(a), f(b)]$. Logo, $y = g(t) = g(f^{-1}(x)) = F(x)$ Onde F é a composta gof^-1*

Vamos usar a curva do Exemplo 3 para determinar a equação da reta tangente no ponto correspondente a $t = 1$.

$$F'(g(t)) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-10t}{15}$$

Assim no ponto P correspondente a $t = 1$ o coeficiente angular da tangente é:

$$m = \frac{-10(1)}{15} = -\frac{2}{3}$$

Fazendo $t = 1$ nas equações paramétricas 1.6 temos $P(10 + 15(1), 30 - 5(1)^2)$ obtemos as coordenadas $(25, 25)$ de P. Logo, a equação da reta tangente é:

$$y - 25 = -\frac{2}{3}(x - 25) \text{ equivalente a } y + 2x + 25 = 0$$

1.3 Vetores / Compreensão Geométrica do Movimento

Neste ponto, é necessário que conceituemos ideias básicas envolvendo vetores. Ao se falar em movimento uma das primeiras questões que vem em mente, está relacionada a direção e sentido e velocidade e aceleração. Quando ligamos essas ideias aos vetores ganhamos sua representação geométrica. A ideia de vetores surgiu no século XIX. Bernard Bolzano, em seu livro publicado em 1804 *Betracht ungen über einige Gegenstände der Elementargoemetrie*(Reflexões sobre algumas ideias relativas à Geometria Elementar) traz os conceitos primitivos ligados a vetor. Esses conceitos também podem ser encontrados em trabalhos que buscavam representar os números complexos na forma geométrica, o que é o caso de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Caspar Wessel (1745-1818). Foi essa busca pela representação geométrica dos complexos, que fez com que William Rowan Hamilton (1805-1865), acabasse transcendendo-a, desenvolvendo os números quatérnios.

Outro pensador que definiu alguns dos conceitos, tais como algumas propriedades operatórias envolvendo vetores, foi August Ferdiand Möbius (1790-1868) com sua geometria projetiva. Diante dos pensadores matemáticos, faz-se importante considerar ainda, Giusto Bellavitis (1803-1880), J. Willard Gibbs (1839-1903) e Oliver Heaviside (1850-1925) formalizando as ideias, e introduzindo novos campos de estudo da matemática, a álgebra vetorial e análise vetorial.

A álgebra usada por Descartes para representar os objetos geométricos, utilizam-se de variáveis que representam grandezas escalares, ou seja, as variáveis eram definidas precisamente com valores numéricos. Como exemplo, temos as grandezas que quantificam o tempo, a temperatura, a massa, ou qualquer outra variável associada a contagem e medida. Já as grandezas vetoriais são dotadas de direção, sentido e intensidade. Já os exemplos de grandezas vetoriais são a força, aceleração, campo elétrico e velocidade.

Definição 3 (Vetor). *Sejam os pontos no plano $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, chamamos de vetor $\overrightarrow{v}$ o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes ao segmento $\overline{AB}$. As coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$*

Quando dizemos vetor equipolente, afirmamos que todo vetor que possuí a mesma direção, sentido e tamanho são iguais.

Observação 2. *A respeito da orientação do segmento, que definimos como $\overrightarrow{v} = \overline{AB}$, a orientação do segmento está de A para B, para mudar a orientação podemos fazer $\overrightarrow{-v} = \overline{BA}$. Note que a geometria analítica não distingue $\overline{AB}$ de $\overline{BA}$, pois na vetorial a orientação é importante.*

Definição 4 (Norma). *O módulo ou a norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ é o comprimento de qualquer segmento orientado que o represente. Denotado por $\|\overrightarrow{v}\|$, no plano cartesiano, o comprimento do vetor $\overrightarrow{v} = (a, b)$ é o número real não negativo $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*

Observação 3. *Estamos usando o referencial cartesiano no plano, esse referencial é constituído por um ponto $O(0, 0)$ (origem) e um conjunto de 2 vetores denominados $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$, esses vetores têm a mesma orientação dos eixos coordenados xy e o sentido a partir da origem, ambos são ditos versores, ou unitários, isto é, tem norma igual a 1, ou seja podemos trocar o conceito de 2 eixos orientado por 2 versores que têm direção e sentido dos eixos.*

Podemos escrever qualquer vetor $\overrightarrow{v} = (a, b)$ nessa base, por uma combinação linear $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$.

Definição 5 (Vetor Posição)**.** *Como o nome indica, consiste em um vetor* $\overrightarrow{r}$ *que determina a posição de um ponto* $P(x, y)$ *no plano,* $\overrightarrow{r} = P - O = (x, y)$*, ou ainda, podemos projeta-lo ao longo dos eixos, usando o referencial cartesiano, e representar o vetor posição como sendo* $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = < x, y >$*. Como mostra a Figura 11(a)*

Definição 6 (Vetor Deslocamento)**.** *Dado uma curva C, deslocando entre dois instantes de tempo que diferem por* Δt*, a diferença entre os vetores de posição desses dois instantes é o que chamamos de vetor deslocamento, denotamos* $\overrightarrow{r}(t)$ *vetor posição no instante inicial, e* $\overrightarrow{r}(t + \Delta t)$ *vetor posição no instante seguinte* $(t + \Delta t)$*, assim podemos escrever o vetor deslocamento como sendo* $\Delta\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)$*, como representando na Figura 11(b)*

Definição 7 (Velociade Média)**.** *Definimos a velocidade média como o quociente entre o vetor deslocamento e o intervalo de tempo associado a ele:* $\overline{\overrightarrow{v}}(t) = \dfrac{\Delta\overrightarrow{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t}$

Definição 8 (Vetor Velocidade Instantânea)**.** *O vetor velocidade é definido como a taxa de variação instantânea do vetor posição, ou seja,* $\overrightarrow{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{r}(t + \Delta t) - \overrightarrow{r}(t)}{\Delta t}$*, ou ainda, usando o referencial cartesiano,*

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} = (x'(t), y'(t))$$

Assim as componentes do vetor velocidade são: $v_x = \dfrac{dx}{dt} = f'(t)$*,* $v_y = \dfrac{dy}{dt} = g'(t)$*, vide a Figura 11(c). A intensidade do vetor velocidade é determinado pela norma* ($\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$)*, a direção é a mesma do que a reta tangente no ponto desejado, seu sentido é o mesmo do movimento.*

(a) Vetor Posição (b) Vetor Deslocamento (c) Vetor Velocidade

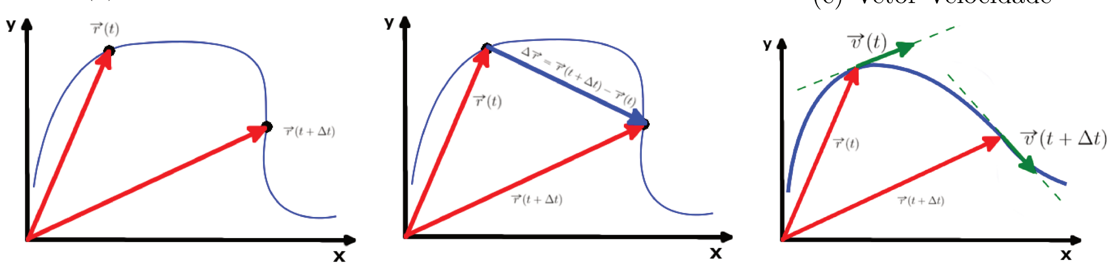


Figura 11 – Vetores Associados ao Movimento

Definição 9 (Vetor Aceleração Média)**.** *Definimos o vetor aceleração média como o quociente entre o vetor velocidade e o intervalo de tempo associado a ele:* $\overline{\overrightarrow{a}}(t) = \dfrac{\Delta\overrightarrow{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{v}(t + \Delta t) - \overrightarrow{v}(t)}{\Delta t}$.

Definição 10 (Vetor Aceleração Instantânea)**.** *O vetor velocidade $\overrightarrow{v}$ pode variar em módulo e em direção. Por isso a aceleração vetorial em cada ponto da curva pode ser decomposta em duas acelerações: (i) $\overrightarrow{a_t}$ denominado aceleração tangencial, está associado à variação do módulo da velocidade.(ii) $\overrightarrow{a_c}$ denominado aceleração centrípeta (normal ou radial), está associado à variação da direção da velocidade. Assim definimos o vetor aceleração resultante como sendo $\overrightarrow{a} = a_t^2 + a_c^2$*

($\overrightarrow{a_t}$) *É a componente da aceleração vetorial na direção do vetor velocidade indicando sua variação. Seu módulo é igual a aceleração escalar: $\|\overrightarrow{a_t}\| = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$. Em movimentos acelerados, o vetor velocidade e aceleração estão no mesmo sentido, já em movimentos retardados estão em sentidos contrários. Caso tenhamos um movimento uniforme, o módulo da velocidade é constante e assim a aceleração é nula.*

($\overrightarrow{a_c}$) *É a componente da aceleração na direção do raio da curvatura que indica a variação da direção do vetor velocidade. O módulo é $\|\overrightarrow{a_c}\| = \dfrac{\overrightarrow{v}^2}{\rho}$.*

Exemplo: Voltando para o nosso Exemplo 2, através do diferencial podemos encontrar a velocidade instantânea da bola no instante do tempo t. Como vemos na Figura 12, o traço da curva é descrito por $P(t) = (3t - 3, -(t-3)^2 + 7)$, com $0 \leqslant t \leqslant 5,65$, derivando cada componente temos, $x'(t) = 3\, e y'(t) = -2(t-3)$.

Usando a linguagem vetorial, o vetor posição é dado por $\overrightarrow{r}(t) = (3t - 3, -(t - 3)^2 + 7)$, o vetor velocidade é a derivada em relação ao tempo das componentes do vetor posição, $\overrightarrow{v}(t) = (3, -2(t-3))$. Vamos analisar o movimento no instante $t = 2$. A bola está na posição $P_1(3,2)$ (figura 12), o vetor velocidade está na mesma direção da reta tangente à curva r em P_1, a inclinação da reta é dada por $m = \dfrac{y'(2)}{x'(2)} = \dfrac{-2(2-3)}{3} = \dfrac{2}{3} = 0,667$; portanto o vetor velocidade está na mesma direção da reta $h: \ y = 0,667x + 4$; o sentido da velocidade é o mesmo sentido da bola, a intensidade da velocidade instantânea é determinado pela norma de $\overrightarrow{v}(t)$, substituindo $t = 2$ nas componentes da velocidade, temos $x'(t) = v_x = 3$ e $y'(t) = v_y = -2(2-3) = 2$, a norma será $\|\overrightarrow{v}(t)\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6$, portanto, a velocidade instantânea da bola no tempo igual a 2 segundos será $3,6 m/s$.

Podemos ainda observar na planilha dinâmica (Figura 12) a velocidade instantânea para outros valores de t, o vetor velocidade decomposto, isto é, a velocidade horizontal e vertical. Perceba que a bola ao ser lançada tem velocidade horizontal constante igual a $3m/s$, ou seja, a cada segundo a bola move $3m$ para direita. Já a sua velocidade vertical é variável, a bola vai perdendo velocidade até atingir um ponto de altura máxima, onde a velocidade é nula e volta a ganhar velocidade, sempre influenciado pela aceleração da gravidade.

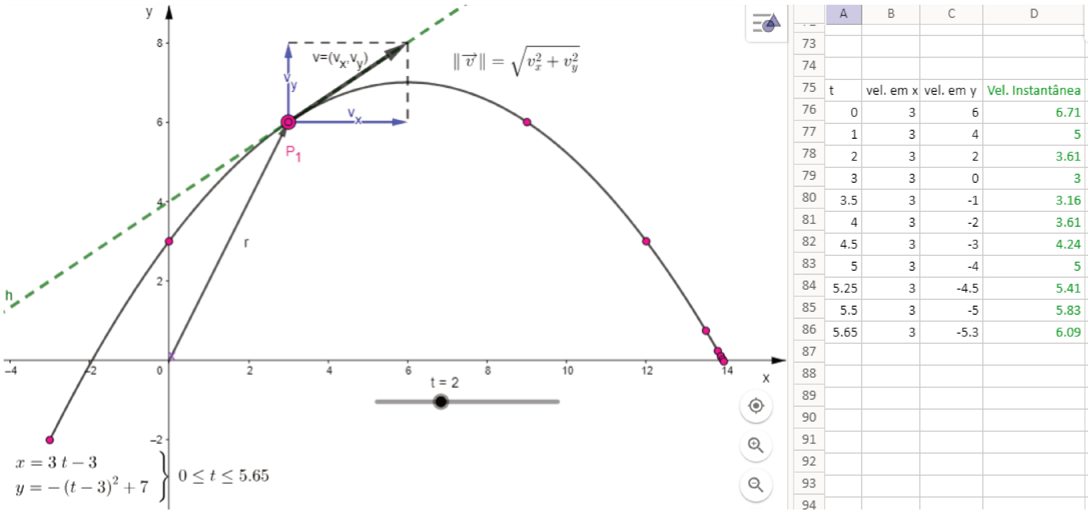


Figura 12 – Velocidade Instantânea no tempo t

1.4 Comprimento de Curvas

Escolhemos o uso de curvas paramétricas para olhar os conceitos pela lupa da geometria dinâmica, assim temos o movimento de uma partícula indo de um ponto $P_0(x_0, y_0)$ ao $P_n(x_n, y_n)$ por um caminho qualquer, uma questão natural é a distância percorrida por tal partícula.

Usando a distância entre dois pontos e a ideia de diferencial chegaremos a uma generalização para obter o comprimento de uma curva em um intervalo $\mathbb{R} \supset I = [t_0, t_n]$. Lembramos que a distância do ponto P_0 ao ponto P_n é dada por:

$$d(P_0, P_n) = ||P_0, P_n|| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2}. \tag{1.7}$$

Na forma paramétrica temos $P_0(f(t_0), g(t_0)$ e $P_n(f(t_n), g(t_n)$ então:

$$||P_0, P_n|| = \sqrt{(f(t_n) - f(t_0))^2 + (g(t_n) - g(t_0))^2} \tag{1.8}$$

Agora assumindo que f e g sejam diferenciáveis em I e que a curva C não se intercepte, concluímos que diferentes valores de t em I conduzem a pontos distintos em C. A ideia aqui é criar uma partição P dada por $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n$, tendo visto que calcular a distância de P_0 a P_n diretamente, não representa a curva. Assim fazemos um caminho poligonal formado pelos pontos $P_1, P_2, ..., P_n$, e agora o comprimento da curva é dado pela soma das distância entre dois pontos $||P_{i-1}, P_i||$ $i = 1, 2, ..., n$, ou seja:

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}, P_i) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2} \tag{1.9}$$

Se refinarmos ainda mais essa partição, assim como o raciocínio de Leibniz para calcular a velocidade instantânea, obteremos o comprimento da curva. Algebricamente vamos demonstrar esse raciocínio. Inicialmente, escrevemos L como o comprimento de C de P_0 a P_n ,$L = \lim_{||P|| \to 0} L_P$; se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, que $|L_P - L| < \epsilon$ para todas as partições P com $||P|| < \delta$.

Teorema 2. *Teorema do Valor Médio: Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) então existe c pertencente a (a, b), tal que a reta tangente ao gráfico de f traçada pelo ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Pelo Teorema do Valor Médio, existem números w_i e z_i no intervalo aberto (t_{i-1}, t_i), tais que: (Indicamos $\Delta t_i = t_{i-1} - ti$)

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(w_i)\Delta t_i,$$
$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(z_i)\Delta t_i$$

Levando na fórmula 1.9 e removendo o fator comum $(\Delta t_i)^2$ do radicando:

$$L = \lim_{||P|| \to 0} L_P = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(w_i)]^2 + [g'(z_i)]^2}\Delta t_i \tag{1.10}$$

Se $w_i = z_i$ para todo i, então esta soma é de Riemann. Se C é uma curva suave (isto nos garante que existe derivadas de todas ordens), então no limite da soma existe o comprimento de C de $P_0 a P_n$ que é dado por:

$$C = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \Leftrightarrow \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt \tag{1.11}$$

Definição 11. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável, o vetor $\overrightarrow{\alpha'}(t) = (x'(t), y'(t))$ é chamado de vetor tangente a curva α em t.*

Definição 12. *Dizemos que uma curva α é regular se o vetor tangente for não nulo para qualquer t no intervalo de definição, daí consideramos o vetor tangente unitário $\overrightarrow{T}(t)$ e o vetor normal unitário $\overrightarrow{N}(t)$:*

$$\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{\alpha}'(t)}{||\overrightarrow{\alpha}'(t)||} = \frac{x'(t), y'(t)}{\|(x'(t), y'(t))\|}$$
$$\overrightarrow{N}(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\|(-y'(t), x'(t))\|}$$

Definição 13. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular, fixando $t_0 \in I$ a função $s : I \to \mathbb{R}$ dada por $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| du$ é denominado a função comprimento de arco da curva α a partir de t_0.*

Exemplos: Vamos calcular o comprimento das 4 curvas que vão de A a B no exemplo 4;

Curva $a : P(1+5t, 2+6t)$ com $0 \leqslant t \leqslant 1$ por conseguinte,

$$C_a = \int_0^1 \sqrt{[5]^2 + [6]^2} dt = \int_0^1 \sqrt{61} dt = (\sqrt{61}.1) - (\sqrt{61}.0) \approx 7,81m$$

Curva $b : P(1+5t^2, 2+6t^3)$ com $0 \leqslant t \leqslant 1$ conseguinte,

$$C_b = \int_0^1 \sqrt{[10t]^2 + [18t^2]^2} dt \approx 7,95m$$

Curva $c : P(1+5t\sqrt{t}, 2+6t^(5))$ com $0 \leqslant t \leqslant 1$ conseguinte,

$$C_c = \int_0^1 \sqrt{[\frac{t^-0.5}{2}.5t + 5\sqrt{t}]^2 + [30t^4]^2} dt \approx 8,67m$$

Curva $d : P(1+5t^(4), 2+6t^(10))$ com $0 \leqslant t \leqslant 1$ conseguinte,

$$C_d = \int_0^1 \sqrt{[20t^3]^2 + [60t^9]^2} dt \approx 8,38m$$

Algumas dessas integrais são um pouco trabalhosas e muitos alunos cometem erros de cálculo. Por isso, é interessante usar o comando $Comprimento(< Curva >, < ValordetInicial >, < ValordetFinal >)$ no GeoGebra para conferir os resultados.

1.5 Reparametrização

Para evitar ambiguidade, devemos distinguir as propriedades geométricas das propriedades do movimento (cinemática). As propriedades geométricas de uma curva dependem exclusivamente do seu traço (entendido como o conjunto de pontos que formam o caminho percorrido pela curva C, ou ainda, a imagem de C), enquanto as propriedades envolvendo o movimento depende além do traço da parametrização escolhida.

Se considerarmos o vetor derivada em um ponto da curva, sua direção é tangente a curva, informação puramente geométrica. Enquanto seu sentido e intensidade dependem de como a curva é parametrizada, consequentemente o vetor derivada é chamado de vetor velocidade, sua norma (ou magnitude) é a velocidade escalar. Quando temos uma curva onde a sua velocidade escalar para todo ponto da imagem nunca é nulo, chamamos a curva de regular, caso contrário, para algum t, a curva possuirá velocidade escalar nula, ela é não-regular. Um exemplo seria a *cúspide*, definida como, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto P(t^2, t^3)$ essa curva tem uma singularidade na origem, e projeta uma cúbica reversa do espaço tridimensional no plano cartesiano (yz).

Se temos uma curva[5] dada por $\gamma{:}I \to \mathbb{R}^2$ e uma mudança de variável (bijeção diferenciável) $\alpha{:}J \to I$, a composição $\gamma\, o\, \alpha\ :\ J \to \mathbb{R}^2$ é uma nova curva com o mesmo traço,

[5] As curvas descritas neste trabalho são suaves e regulares

chamado de reparametrização da curva γ. A reparametrização não mudou a interpretação geométrica da curva γ, mas mudou a interpretação cinemática da curva γ, isto é, a direção do vetor tangente não se altera, enquanto a norma e sentido são afetados pela reparametrização.

Vamos voltar ao Exemplo 4. Com o auxílio do GeoGebra podemos criar uma infinidade de curvas indo de um ponto ao outro como mostrou a Figura 9, agora veremos que para cada curva, teremos uma outra infinidade de formas de reparametriza-la Figura 13, assim, seguindo o mesmo caminho, mudamos a forma do movimento. Pegamos como exemplo a curva $a(t)$. Esta é uma reta cuja forma paramétrica é dada por $x = 1 + 5t \, e \, y = 2 + 6t$, (isolando t em uma das equações e substituindo na outra obtemos assim a forma explícita). Façamos $t = 2t \Rightarrow x = 1 + 5(2t)$ e $y = 2 + 6(2t)$, agora em $t = 0 \Rightarrow P(1, 2)$, $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow P(6, 8)$, com essa mudança fizemos o robô ir mais rápido, concluindo o trajeto de A até B na metade do tempo. Da mesma forma se $t = 3t$, teríamos um terço do tempo para concluir o trajeto e, assim por diante. Com efeito, se tomarmos $t = \dfrac{t}{2}$ teríamos o dobro do tempo para concluir o mesmo trajeto e o mesmo raciocínio anterior poderia ser feito.

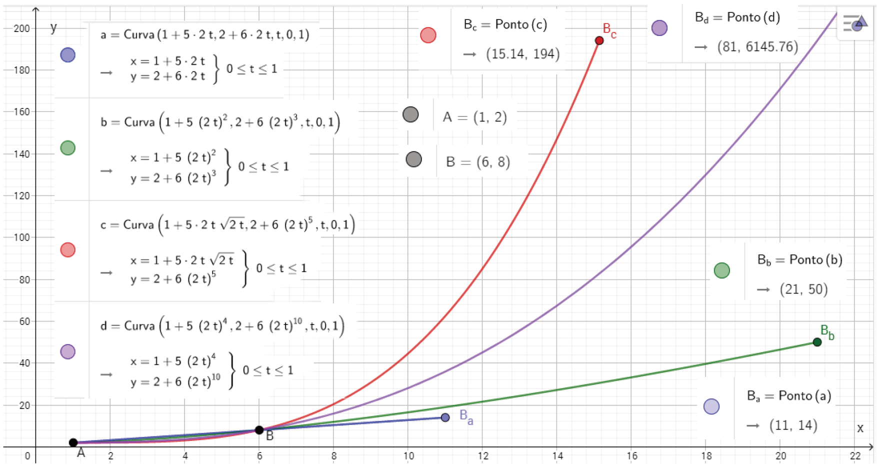


Figura 13 – Reparametrização de curvas

Na Figura 13 fizemos as mudanças $t = 2t$. Os caminhos percorridos pelo robô são os mesmos para cada curva da Figura 9, o que muda é a velocidade do robô que após 1 minuto estarão como mostra a Figura 13 nos pontos B_a, B_b, B_c, B_d respectivamente para os caminhos a, b, c, d. (na Figura 13 não vemos o ponto B_d, para não distorcer tanto o gráfico), percebemos ainda que após $0,5$ minutos eles estão no ponto B. Concluímos que por dois pontos podemos ter uma infinidade de curvas, e para cada curva podemos tomar uma infinidade de formas de parametrização. No entanto, se tomarmos a mudança de parâmetro como sendo um $t = k.t$ com k $\epsilon \, \mathbb{R}^+$ mudará a velocidade do objeto, preservando o caminho e consequentemente a distância percorrida no mesmo intervalo de tempo será alterada. Dessa forma, para $0 < k < 1$, temos um aumento na velocidade, caso contrário

$k > 1$ uma diminuição da velocidade.

1.5.1 Curvas parametrizadas pelo comprimento de arco

Como vimos, uma curva plana regular admite várias representações paramétricas diferentes. Notamos assim, como é útil usar como parâmetro o comprimento de arco, como def. 13.

Definição 14. *Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento do arco. Se para quaisquer $t_0, t_n \in I, t_0 \leqslant t_n$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_n é:*

$$\int_{t_0}^{t_n} \|\alpha'(t)\| dt = t_n - t_0.$$

Proposição 1. *Uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento do arco, se e somente se, para todo $t \in I$, $\|\alpha'(t)\| = 1$*

Demonstração. Suponhamos que α seja parametrizada pelo comprimento do arco a partir de t_0 fixado. Consideremos a função $s : I \to \mathbb{R}$ dada por $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_n} \|\alpha'(t)\| dt$ assim, podemos associar para cada $t \in I$ o comprimento $s(t)$. Se $t_0 \leqslant t$ temos por hipótese $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt = t - t_0$; Se $t \leqslant t_0$ então $-s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt = t_0 - t$. Dessa maneira, para todo $t \in I, s(t) = t - t_0$, derivando $s'(t) = [\displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt]'$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo, $1 = \|\alpha'(t)\|, \forall t \in I$, como queríamos. Reciprocamente, suponhamos que $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$. Temos, assim que: $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$. Portanto, concluímos que a curva α é uma curva parametrizada pelo comprimento do arco. □

Proposição 2. *Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular e a função comprimento de arco da curva α a partir de t_0 é dada por $s : I \to s(I) \subset \mathbb{R}$. Então, existe uma função inversa h de s, definida no intervalo $J = s(I)$, tal que $\beta = \alpha \circ h$ está reparametrizado pelo comprimento de arco da curva α.*

Demonstração. Se α é uma curva regular, então $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$, ou seja, é uma curva estritamente crescente. O que segue, é que existe sua inversa $h : J \to I$. Como $\forall t \in I, h(s(t)) = t$ pela regra da cadeia, $\dfrac{dh}{ds}\dfrac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \dfrac{dh}{ds} = \dfrac{1}{ds/dt} = \dfrac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0$. Concluímos que $\beta(s) = \alpha \circ h(s), s \in J$, é uma reparametrização de α, e ainda $\|\beta'(s)\| = 1$ garante que está parametrizada pelo comprimento do arco. □

Observação 4. *A aplicação β chamada de parametrização da curva pelo comprimento do arco não é única, pois depende da função comprimento de arco s, que por sua vez depende* *do ponto fixo usado de referência (s não depende da parametrização de C). A ideia por traz dessa reparametrização é obter $r(s)$, ou seja, escrever a posição dos pontos da curva em relação ao comprimento desta à um referencial fixo. Os passos para obter β:*

- *A curva α é dada por $r(t)$, para calcular a função $s(t)$ e comprimento de arco.*
- *Encontrar a inversa da função comprimento de arco, ou seja obter $h(s(t)) = t(s) = t$, $0 \leqslant s \leqslant t$.*
- *Fazer a composta $\beta = \alpha \circ h = r(s)$*

Exemplo 5. *Vamos determinar a parametrização pelo comprimento de arco da curva γ dada por $r(t) = a < t - sen(t), 1 - cos(t) >$, tomamos como referencial inicial o ponto A(0,0).*

Determinamos a função comprimento de arco $s(t)$, $r'(t) = a\langle 1 - cos(t), sen(t)\rangle$, a norma $\|r'(t)\| = a\sqrt{2 - 2cos(t)} = a\sqrt{2}\sqrt{1 - cos(t)}$

$$s(t) = \int_0^t \|r'(t)\| dt = a\sqrt{2}\int_0^t \sqrt{1 - cos(t)} = 4\,a\,[1 - cos(t/2)]$$

Encontrando a inversa de s, $\dfrac{s}{4a} = 1 - cos(t/2)$, isolando $cos(t/2)$ e aplicando o Arccos, $Arccos\left(1 - \dfrac{s}{4a}\right) = \dfrac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad t = 2Arccos\left(1 - \dfrac{s}{4a}\right)$

Fazendo a composta β, obtemos a parametrização de γ pelo comprimento de arco

$$r(s) = a\left\langle 2Arcos\left(1 - \frac{s}{4a}\right) - sen\left(2Arcos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right), 1 - cos\left(2Arcos\left(1 - \frac{s}{4a}\right)\right)\right\rangle$$

1.6 Curvatura

Tomemos uma curva C parametrizada por s (o comprimento de arco medido ao longo da curva C a contar do ponto fixo A), isto é, a cada $s \in [a, b] = I \subset \mathbb{R}$ corresponde a um único ponto $P(s) = (f(s), g(s))$ que está a s unidades do ponto fixo A.

O vetor posição é $r(s) = (f(s), g(s))$ e o vetor tangente $r'(s)$ é sempre um vetor unitário, que denominamos por $T(s)$. Estamos interessado em estudar sua variação quando $P(s)$ percorre a curva C.

Definição 15. *A curvatura K de C no ponto $P(s)$ é definida por:*

$$K(s) = \left|\frac{d\vec{T}(s)}{ds}\right| \tag{1.12}$$

Assim $K(s)$ é o valor absoluto da taxa de variação do vetor tangente unitário $\overrightarrow{T}(s)$ em relação a s, $K(s)$ é sempre positivo e pode mudar ponto a ponto da curva. Em particular, se a curva for uma reta, então a inclinação do vetor tangente é constante e a curvatura é zero, intuitivamente podemos entender a curvatura como sendo a medida da intensidade de variação de direção dela nos diversos pontos.

Exemplo 6. *Seja a curva α dada por $r(t) =< a\langle cos(t), a\, sen(t)\rangle$, determine a função curvatura $K(s)$, a partir de $t_0 = 0$.*

Inicialmente, vamos encontrar a função comprimento do arco $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt$.

$$\|r'(t)\| = \| < -a\, sen(t), a\, cos(t) > \| = \sqrt{(-a\, sen(t))^2 + (a\, cos(t))^2}\| = a$$

$$s(t) = \int_0^t a\, dt = a\, t$$

Encontrando a função h inversa de s:

$$s = a\, t \Rightarrow t(s) = \frac{s}{a}$$

Para determinar a composta $\beta = \alpha \circ h$, basta substituir t na curva α:

$$r(s) = \left\langle a\, cos\left(\frac{s}{a}\right), a\, sen\left(\frac{s}{a}\right)\right\rangle$$

Assim parametrizamos α pelo comprimento de arco.

Para determinarmos $K(s)$,

$$K(s) = \left|\frac{\overrightarrow{T}(s)}{ds}\right|, \qquad \overrightarrow{T}(s) = \frac{r'(s)}{\|r'(s)\|}$$

$$r'(s) = \left(a\, .(-\frac{1}{a})\, sen\left(\frac{s}{a}\right), a\, .(\frac{1}{a})\, cos\left(\frac{s}{a}\right)\right)$$

$$r'(s) = \left(-sen\left(\frac{s}{a}\right), cos\left(\frac{s}{a}\right)\right), \qquad \|r'(s)\| = 1$$

De fato, pela Proposição 1 temos que o módulo do vetor tangente da curva parametrizada pelo comprimento de arco é sempre unitário.

$$K(s) = \left|\frac{d(-sen(s/a), cos(s/a))}{ds}\right| = \left|\frac{1}{a}\,(-cos(s/a), -sen(s/a)\right| = \frac{1}{a}\sqrt{cos^2(s/a) + sen^2(s/a)}$$

$$\therefore\ K(s) = \frac{1}{a}$$

A curvatura de α é constante, ou seja, a variação de direção é sempre igual para todos os pontos P que se move ao longo da curva. Essa curva é chamada de circunferência.

Devemos ter em mente que nem sempre é fácil obter a parametrização pelo comprimento do arco, tornando dura a missão de obter a curvatura, assim podemos fazer uso do seguinte teorema:

Teorema 3. [6] *Se C é uma curva regular suave descrita por $r(t)$, no qual existem $T'(t)$ e $r''(t)$, então a curvatura pode ser calculada como:*

a) $k(t) = \dfrac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$

b) $k(t) = \dfrac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$

Observação 5. *O produto $r'(t) \times r''(t)$ é vetorial, e inicialmente é definido no espaço, aqui estamos interessados em trabalhar com curvas no plano. Para isso, tomamos o produto vetorial da seguinte maneira:*

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = \{0, 0, x'y'' - x''y'\}$$

Como $|T(s)|$ é uma constante, segue que $T(s)$ é ortogonal a $T'(s)$ e se $T'(s) \neq 0$

$$N(s) = \frac{1}{|T'(s)|} T'(s) \tag{1.13}$$

O vetor $N(s)$ é um vetor ortogonal a $T(s)$ e é chamado de vetor unitário da normal principal a curva no ponto $P(s)$. Dito isso, podemos escrever a equação anterior como

$$T'(s) = |T'(s)| N(s)$$

. O número $|T'(s)|$ é o mesmo que a curvatura K que definimos em 15. Assim,

$$T'(s) = KN(s), \quad onde \quad K = |T'(s)| \tag{1.14}$$

1.7 Componentes Tangencial e Normal da Aceleração

O que vimos na seção anterior pode ser aplicado ao movimento. Sejam r(t) o vetor posição dado no instante t de uma partícula que se move por uma curva C, s denotará o comprimento do arco medido ao longo de C, tomamos s crescente junto com t. O vetor tangente unitário $T(s)$ que definimos na seção 1.6

$$T(s) = \frac{r'(t)}{|r'(t)}$$

[6] A demonstração deste teorema pode ser encontrado nos livros de geometria diferencial.

e assim,

$$r'(t) = |r'(t)|T(s) = \frac{ds}{dt}T(s)$$

Derivando em t, usando a regra do produto e da cadeia, temos:

$$r''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T(s) + \frac{ds}{dt}T'(s)\frac{ds}{dt}$$

Pela equação 1.14,

$$r''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}T(s) + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 KN(s)$$

Como vimos na seção anterior, K é a curvatura da curva e N(s) é o vetor unitário normal. Podemos denotar $\frac{ds}{dt} = v$ a velocidade e ainda escrever $k = \frac{1}{\rho}$, onde ρ é o raio da curvatura de C, assim r"(t) pode ser escrita,

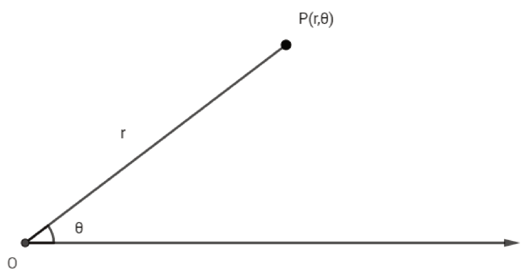
$$r''(t) = \frac{dv}{dt}T(s) + \frac{v^2}{\rho}N(s) \tag{1.15}$$

Esta equação exprime a aceleração resultante em termos da componente tangencial e da normal, assim como definido em 10.

2 Coordenadas Polares

De acordo com (COOLIDGE, 1950) as coordenas polares foi empregada em um trabalho escrito inicialmente por Cavalieri, ao buscar a área da espiral de Arquimedes, depois Pascal para calcular o comprimento de uma parábola. Todavia, foi com Jacob Bernoulli que ele aprofundou no tema e chegou a escrever uma expressão parametrizada na forma polar, definindo polo e eixo polar para assim encontrar o raio da curvatura. Seu trabalho foi publicado em 1691 no jornal *Acta Eruditorum*. Como (BOYER, 1949) expressa em seu artigo, Newton em seu trabalho *Method of Fluxions* (escrito em 1671 e publicado 1736), apresentou oito tipos diferentes de sistemas de coordenadas. Entre esses, o sistema de coordenadas polares que conhecemos hoje. Em alguns casos, as equações obtidas via coordenadas cartesianas são complicados, como a Cissóide de Dióclenes, assim surgem outros métodos para representação dos pontos e as coordenadas polares tem uma grande importância. Para introduzir esse sistema no plano, partimos de um ponto fixo O, dito origem ou pólo, e uma semirreta orientada chamada de eixo polar com extremidade em O. Assim, um ponto arbitrário P no plano distinto de O, conforme mostra a Figura 14 $r = d(O, P)$(ou seja, r é a distância entre o ponto arbitrário P e o polo O) e θ denota a medida de um ângulo determinado pelo eixo polar e OP, então r e θ são as coordenadas polares de P. Podemos usar os símbolos (r, θ) ou $P(r, \theta)$ para denotar P. Dessa forma, é tomado θ positivo para uma rotação no sentido anti-horário do eixo polar e θ negativo para uma rotação no sentido horário.

(a) Eixo Polar



(b) $P(r, \theta)$; 0º⩽ θ ⩽360º

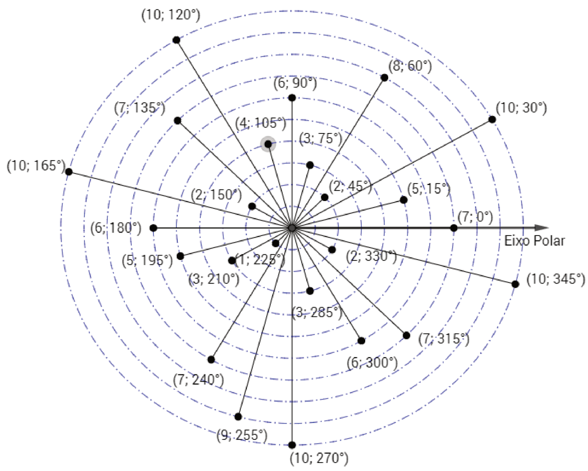


Figura 14 – Coordenadas Polares

Se o eixo polar é o lado inicial de uma abertura, então podemos escrever ângulos de diversas formas, daí um ponto em coordenadas polares não são únicos. Por exemplo, (7,15º),(7,15º+k·360º) com $k \in \mathbb{Z}^+$, isto é, podemos escrever o mesmo ponto na k volta. Admitimos ainda que r possa ser negativo, representa o sentido oposto, ou seja, $P(-r,\theta) \rightarrow P(r,\theta+180^0)$ podemos escrever (-7,15º) como (7,15º+180º).

Vamos relacionar as coordenadas polares com as coordenadas cartesianas. Para isso, precisamos de algumas relações no triângulo retângulo, $\text{sen}\theta = \dfrac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$, $\cos\theta = \dfrac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$ e $\text{tg}\theta = \dfrac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$ faz sentido, estarmos relacionando lado e ângulo que, intuitivamente parece adequado. Agora seja um ponto arbitrário $P(r,\theta)$ dado, vamos encontrar P em coordenadas cartesianas, como mostra a Figura 15, isolando x e y, respectivamente, temos:

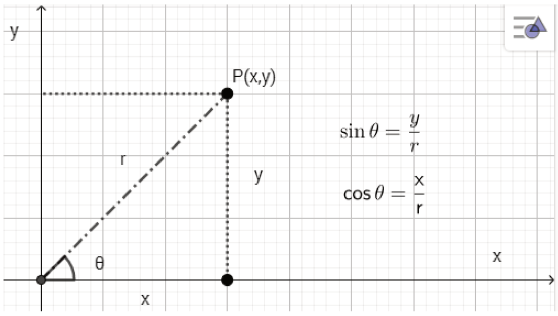


Figura 15 – Relação entre o Plano Polar e Cartesiano

$\begin{cases} x = & r\cdot\cos\theta \\ y = & r\cdot\text{sen}\theta \end{cases}$ P(x,y) é o ponto na forma cartesiana. Dado isso, podemos fazer o processo inverso, conhecendo um ponto cartesiano e fazer a mudança para coordenadas polares, elevando ao quadrado e somando as equações. Assim, obtemos: $x^2+y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\text{sen}\theta^2) = r^2(\cos\theta^2+\text{sen}\theta^2)$ usando a relação fundamental $\cos\theta^2+\text{sen}\theta^2 = 1$ temos $x^2+y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$ Para obtermos o ângulo, fazemos $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r\text{sen}\theta}{r\cos\theta}$. Aqui, utilizaremos outra razão trigonométrica $\dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\theta$ e assim $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ (o arco tangente é a operação inversa da tangente, sabendo que a $\text{tg}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \arctan 1$ =45º)

A beleza do plano cartesiano permitiu que se escrevesse o lugar geométrico dos pontos equidistantes, digamos r, de um ponto fixo C(a,b) como sendo o conjunto dos pontos P(x,y) tal que $dist(C,P) = r$. A distância entre dois pontos é dada por $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$ elevando ambos os lados ao quadrado, chegamos na chamada equação reduzida da circunferência: $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$ e empregando as coordenadas polares chegamos $\rho(\theta) = r$

3 Cônicas

As cônicas são o conjunto composto pelas seguintes curvas: Elipse (um caso especial Circunferência), Parábola e Hipérbole são conhecidas antes mesmo da época de Euclides, seu estudo na Grécia começou como parte da busca pela solução do problema da duplicação do cubo (um dos problemas clássicos), mas é com Apolônio (262 - 190 a.C) que formalizou e sistematizou os conceitos em seu tratado, cujas definições e propriedades são usadas por nós até hoje.

> Assim como os elementos de Euclides substituíram textos elementares anteriores, em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções, inclusive quanto as Cônicas de Euclides e, na antiguidade, nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoa-lo. Se sobrevivência é uma medida de qualidade, os elementos de Euclides e As Cônicas de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos. (BOYER, 1986, p.99)

Apolônio, em sua grandiosa obra *As Cônicas*, formado por oito livros, onde desenvolveu generalizações, criando novos métodos, descobriu e provou teoremas, fazendo com que fosse considerado em seu tempo "O Grande Geômetra".

Claro que existem outros grandes nomes além de Apolônio que contribuíram nos estudos de cônicas, tais como seus precursores Manaecmo, Aristeu e o próprio Euclides. Além desses, houve Arquimedes que fora o seu principal rival na época. Podemos citar ainda outros que trouxeram grandes aplicações práticas como Ptolomeu(127-151 d.C) astrônomo e geógrafo que introduziu o sistema de latitude e longitude tal como usamos hoje. Outro grande nome, foi o Kepler em 1609, que disse que: "os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos", ainda temos a lua e os satélites lançado pelos humanos, descrevendo órbitas elípticas em torno da terra, os cometas também seguem essa trajetória, como na previsão feita por Edmund Halley, ao observar um cometa em 1682, disse que o cometa levaria 72 anos pra contornar o sol, mesmo morrendo antes de provar que seu retorno seria em 1759, foi homenageado, nomeando o cometa com o seu próprio nome; temos também Galileu (1632), que escreve: "desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola", ainda foi graças ao tratado de Apolônio que Newton 1800 anos depois com seu trabalho "Principia "traz A lei da gravitação onde matematizou as descobertas empíricas de Kepler e iniciou os estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço.

Podemos atribuir ao desenvolvimento dos conceitos de cônica a possibilidade de termos receptores parabólicos, telescópios, navegação por GPS, tratamentos de cálculo renal (litotripsia), viagens espaciais e outras tantas aplicações.

Foi Pierre de Fermat (1601-1665) que descobriu as equações cartesianas da reta e da circunferência e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole.

Apolônio definiu o cone de duas folhas da seguinte maneira:

> Se fizer uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo. O ponto fixado é o vértice e o segmento de reta do vértice ao centro do círculo é o eixo... O círculo é a base do cone.(LOPES, 2011, p.40)

As curvas cônicas são obtidas pela interseção de um plano com um cone circular de duas folhas. Fazendo a interseção de um plano com um cone de duas folhas.

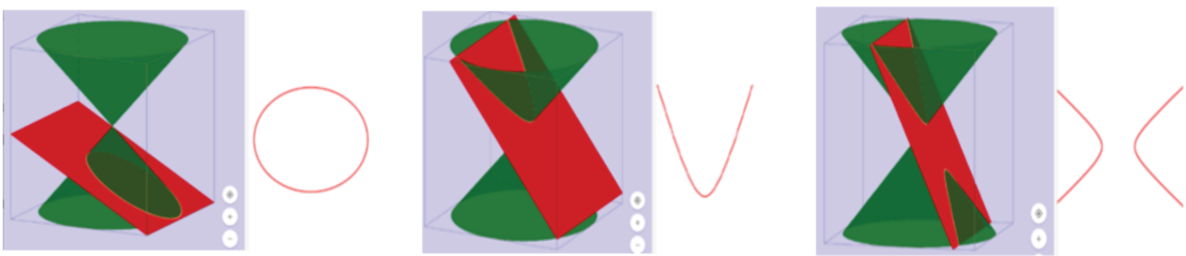


Figura 16 – Secções Cônicas

Vale fazer ainda, um referência a outro grande matemático, Pappus de Alexandria que contribuiu com grande relevância e ampliou o que fora feito por Apolônio, como Bicudo faz em sua introdução da tradução do livro de Euclides "Os elementos":

> [...],aprendemos de uma observação de Pappus no livro VII da sua *A Coleção Matemática*, ao comentar que Apolônio no transmitiu oito livros sobre as cônicas, tendo completado os quatro livros das Cônicas de Euclides e a eles ajuntado outros quatro. (BICUDO, 2009, p.43)

Temos a equação do segundo grau que descreve as cônicas na forma implícita $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, quando B (chamado de termo retângulo) é diferente de zero temos uma equação degenerada. Geometricamente, temos a cônica em um eixo de simetria inclinado, caso B seja nulo a equação geral representa uma cônica com o eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados.

Podemos identificar a cônica através da sua equação geral utilizando a seguinte classificação:

$$\begin{cases} se\ B^2 - 4AC < 0 & \Rightarrow \text{Elipse} \\ se\ B^2 - 4AC = 0 & \Rightarrow \text{Parábola} \\ se\ B^2 - 4AC > 0 & \Rightarrow \text{Hipérbole} \end{cases}$$

Vamos aprofundar o estudo de cada cônica nas seções seguintes, vendo a definição dada por Apolônio e contrapondo a construção geométrica na qual seremos capaz de encontrar a equação reduzida e a partir daí, avançamos para a forma parametrizada, dando assim o movimento da partícula no instante t.

3.1 Elipse

Na proposição 13 do Livro I As *As Cônicas* Apolônio define a elipse:

> "Se um cone é intersectado por um plano passando pelo eixo e se é intersectado por um outro plano que, intersetando nos pontos E e D cada um dos lados AB e AC do triângulo axial ABC,não é traçado paralelamente nem obliquamente à base do cone, e se, para além disso, o plano do cone e o plano secante se intersetam segundo uma reta ST perpendicular à base do triângulo axial, ou perpendicularmente ao prolongamento desta base, então o quadrado de uma reta LM^2 traçada da secção do cone até ao diâmetro da secção ED paralelamente à secção comum dos planos será equivalente a uma área aplicada sobre uma certa reta EH para a qual a razão do diâmetro da secção $\dfrac{EH}{DE}$ é a mesma que a razão do quadrado da reta $\dfrac{BK \times KC}{AK^2}$ traçada do vértice do cone para a base do triângulo paralelamente ao diâmetro da secção com o retângulo limitado pelas interseções desta reta (na base) com retas que contêm os lados do triângulo; uma área que tem como largura EM a reta que interseta o diâmetro pela primeira reta, do lado superior da secção, e subtraída por uma figura semelhante ao retângulo limitado pelo diâmetro ED e por um parâmetro EH Chamaremos a tal secção uma elipse." (ALBUQUERQUE, 2014, apud Ver, 1982, nota de rodapé, p.504)
> .

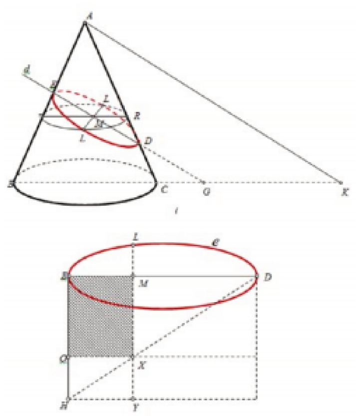


Figura 17 – Dedução algébrica Elipse. Fonte: (ALBUQUERQUE, 2014, p.14)

A elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos distintos fixados é igual a uma constante, maior que a distância entre esses pontos. Sendo P um ponto pertencente a elipse, F_1 e F_2 os pontos distintos fixados, denominados focos e k uma constante real, temos: $d(PF_1) + d(PF_2) = k$, centrando os focos no eixo x, de forma que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, a reta que passa pelos focos é chamada de eixo focal, seja $V_1 = (-a, 0)$ e $V_2 = (a, 0)$ cada ponto pertencente a elipse do eixo focal, assim $d(PV_1) + d(PV_2) = 2a$ por simetria. Aplicando a 1.7 distância entre dois pontos, elevando ao quadrado manipulando a equação, e usando a desigualdade triangular, temos $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2} \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$, logo existe $b > 0$, tal que $b^2 = a^2 - c^2$, e assim a equação reduzida da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.1}$$

3.2 Parábola

Na proposição 11 do Livro I *As Cônicas* Apolônio define a parábola da seguinte forma:

> "Se um cone é intersetado por um plano que passa pelo eixo, e se é intersetado por um outro plano que corta a base do cone círculo, na linha reta ST perpendicular a BC ou BC prolongado segundo uma reta perpendicular EG à base do triângulo axial ABC e se, para além disto, o diâmetro da secção é paralelo a um dos lados do triângulo axial,AC o quadrado de qualquer reta LM,sendo L um ponto arbitrário da curva traçada da secção do cone paralelamente à secção comum do plano secante traça por L um plano paralelo ao círculo da base e da base do cone círculo até ao diâmetro da secção PR equivale ao retângulo $LM^2 = EH \times EM$,sendo M a interseção do plano com EG delimitado pela reta que ela corta sobre o diâmetro, do lado superior da secção, e por uma certa reta cuja razão entre a reta situada entre o ângulo do cone e a secção é a mesma que a do quadrado da base do triângulo axial pelo retângulo limitado pelos outros dois lado $BC^2 = BA \times AC$.Chamaremos a tal secção uma parábola."(ALBUQUERQUE, 2014, apud VER 2, p. 27)

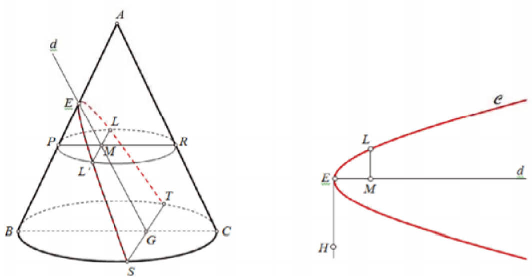


Figura 18 – Dedução algébrica parábola. Fonte: (ALBUQUERQUE, 2014, p.12)

Fixados uma reta e um ponto não pertencente a ela, denomina-se parábola o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes da reta e do ponto fixados.

3.3 Hipérbole

Na proposição 12 do Livro I *As Cônicas*, Apolônio define a hipérbole da seguinte forma:

> "Se um cone é intersetado por um plano passando pelo eixo e se é intersetado por um outro plano que interseta a base do cone segundo uma reta perpendicular à base do triângulo axial, e se, para além disto, o diâmetro da seção prolongado interseta um dos lados do triângulo para lá do vértice do cone, então o quadrado de uma reta LM^2traçada desta secção do cone até ao diâmetro da secção EG paralelamente à interseção do plano secante com a base do cone, será equivalente a uma área aplicada sobre uma certa reta EH para a qual a razão da reta que prolonga o diâmetro da secção e que subtende o ângulo exterior do triângulo $\frac{EH}{DE}$ é a mesma que a do quadrado da reta traçada até à base do triângulo paralelamente ao diâmetro da secção com o retângulo limitado pelos segmentos da base $\frac{BK \times KC}{AK^2}$ uma área que tem como largura EM a reta que intersecta o diâmetro ED pela primeira reta, do lado superior da secção, e aumentada por uma figura semelhante ao retângulo limitado pela reta que contém o ângulo exterior do triângulo, e por um parâmetro EH Chamaremos a tal secção uma hipérbole. " (ALBUQUERQUE, 2014) apud ([Ver2], nota de rodapé, pp.504-505).

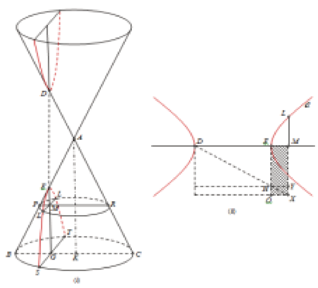


Figura 19 – Dedução algébrica hipérbole. Fonte: (ALBUQUERQUE, 2014, p.15)

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos para os quais as diferenças das distâncias a dois pontos fixados é em valor absoluto igual a uma constante menor que a distância entre estes pontos fixados.

Parte II

Desenvolvimento

4 Referenciais Didáticos/Metodológicos

4.1 Ambientes tecnológicos a Geometria Dinâmica (GD)

É perceptível os grandes avanços tecnológicos em nosso meio, cada vez mais acessíveis que mudam profundamente relações sociais. Difícil é encontrar uma instituição que não seja dependente da tecnologia. Essa revolução digital caminha a passos largos, diferentemente do que vemos no campo da educação, especificamente, na educação matemática. Mesmo quando encontramos alguns trabalhos relevantes nessa área, com grupos voltados ao estudo de tecnologias na educação, é necessário ir além com criação de produtos didáticos que trabalhem com as tecnologias de informação. Faz-se extremamente importante ir além das tendências e métodos de ensino considerados tradicionais, de forma a munir professores com o interesse de aplicar as tecnologias em sala de aula.

Buscamos em (BORBA, M. C.; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015), aporte teórico para compreendermos o papel da tecnologia na educação matemática ao longo do tempo, trazendo as principais tendências na investigação e atividades que foram exploradas.

O quadro 20(a) resume a evolução do uso das ferramentas tecnológica desde seu surgimento até os dias atuais. Nota-se que esse processo é dividido em quatro fases, trazendo os principais aspectos e elementos que caracterizam cada uma, feita no primeiro capítulo do livro - Tecnologia digitais em Educação matemática- já referenciado, vamos trazer os principais pontos. Na primeira fase, são destacados os trabalhos dos pesquisadores José Armando Valente, Janete Frant, Lulu Healy e Léa Fagundes, baseando seus trabalhos em investigações buscando o uso TI na transformação de práticas pedagógicas e didáticas. Aqui é destacado o papel do software "LOGO"oferecendo meios para que os alunos relacionem as representações algébricas com o movimento da tartaruga. O construcionismo (PAPERT, 1980) é a principal perspectiva teórica sobre o uso pedagógico do LOGO, enfatizando relações entre linguagem de programação e pensamento matemático. Nessa fase ainda é destacado o Programa EDUCOM, patrocinado pelo MEC no fim dos anos 80 e início dos anos 90, destinados ao desenvolvimento de pesquisas e metodologias com o uso de tecnologia, criando uma perspectiva de que as escolas teriam laboratórios de informática. A segunda fase é marcada pela difusão do Personal Computer, os chamados PC's, surgem diversos softwares educacionais voltados para a geometria dinâmica, representações gráficas e sistemas de computação gráfica, onde os professores poderiam vivenciar o risco de introduzir as tecnologias informáticas em ambientes educacionais. Nessa fase, temos o surgimento do termo geometria dinâmica (GD):

> Em geometria dinâmica (GD), o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação. Distinções entre desenho e construção não faziam sentido quando construíamos objetos geométricos com lápis, papel e outras

> tecnologias, como régua e compasso, mas essa distinção começou a ser significativa com o uso de softwares de GD. Uma forma de verificar a distinção entre desenho e construção, por exemplo, é por meio da realização da prova do arrastar. (BORBA, M. C.; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015)

(a) Quatro fases das tecnologias digitais em Educação Matemática

	Tecnologias	**Natureza ou base tecnológica das atividades**	**Perspectivas ou noções teóricas**	**Terminologia**
Primeira fase (1985)	Computadores; calculadoras simples e científicas.	LOGO Programação.	Construcionismo; micromundo.	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda fase (início dos anos 1990)	Computadores (popularização); calculadoras gráficas.	Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometriks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos--com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educativa.
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; forum; google.	Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da informação e comunicação (TIC).
Quarta fase (2004)	Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida.	GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.	Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital.	Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis.

(b) Diagrama relacionando as fases

Figura 20 – Fonte: (BORBA, M. C.; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015)

A prova de arrastar, consiste em mover uma figura e manter as propriedades fundamentais da mesma. Ainda nessa fase, temos o surgimento dos softwares gráficos, possibilitando a elaboração de novos tipos de problemas em diversos níveis voltada a representação gráfica de funções. A terceira fase, além do termo TI, surge o TIC. Nesse contexto, diversas questões já foram e ainda são investigadas por autores como Gracias (2003), Borba e Villarreal (2005), Pastre (2007), Zulatto (2007) e Bairral (2009). As pesquisas voltam-se para a mudança na comunicação e interação entre professores e alunos e a criação de ambientes online de aprendizagem. Por fim, a quarta fase é esta que estamos vivenciando, com uma diversificação dos equipamentos tecnológicos e redes de comunicações online. Nesta fase, usamos o termo tecnologia digitais (TD), que é caracterizada por diversos aspectos, entre eles, os autores destacam o software GeoGebra, ambiente propício para integração entre geometria dinâmica e múltiplas representações de funções, cenário inovadores de investigação matemática, os applets (aplicativos online), plataformas de divulgação de conhecimento onlines, entre outros. Como destaca os autores, essas fases não estão dissociadas, podendo imaginar que cada uma vai sendo expandida na medida em que surgem novas tecnologias, ferramentas, perspectivas teóricas e terminologias, integrando uma nova fase como mostra o diagrama 20(b). Nota-se no diagrama que é feita uma aproximação e as três últimas fases têm se influenciado mutualmente. O valor de trazer este texto está justamente aí, na discussão e perspectivas sobre a relação ser-humano e tecnologia no contexto do pensar matemático, ou melhor, usando os termos do livro:

> Com a realização de pesquisas e articulações com outras teorias, essa perspectiva foi sendo refinada ao longo dos anos. A expressão seres-humanos-com-mídias foi então criada como uma metáfora (BORBA, 1999) tendo como embasamento teórico fundamental as noções de tecnologias da inteligência e coletivos pensantes (LÉVY, 1993).(BORBA, M. C.; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, c.1)

O termo "seres-humanos-com-mídias"não dissocia a tecnologia e os seres humanos, ligando a produção do conhecimento a mídia envolvida no processo. Essa noção é caracterizada no contexto de surgimento de novas tecnologias, possibilitando a exploração de novos tipos de problemas matemáticos, onde o uso de ferramentas como lápis e papel perdem o sentido, ou tornam-se obsoletos ao serem resolvidos. Outro aspecto importante dessa noção está na não domesticação das tecnologias.

Para evitar o que chamamos de domesticação, devemos buscar e criar novos problemas e atividades pautados na investigação. Com esse objetivo, vamos desenvolver uma sequência didática para o estudo do movimento, mas para lograrmos êxito, devemos entender antes o desenvolvimento da didática e os processos de ensino e aprendizagem.

4.2 Didática e Sequência Didática

São vários os estudiosos que debruçaram na complexa e árdua tarefa de compreender o processo de ensino/aprendizagem. No decorrer histórico do desenvolvimento da sociedade podemos apontar algumas fases do aparecimento do ensino. Há indícios desde a pré-história da existência de formas intuitivas e estruturadas de instrução e aprendizagem, um exemplo disso são os ritos de passagem, para a caça, ou para marcar a idade adulta, entre outros. Na antiguidade clássica e no período medieval surgem instituições encarregadas de instruir, desenvolvendo ações pedagógicas, mas é no século XVII que surge uma teoria de ensino que sistematiza o pensamento e o estudo científico das formas de ensinar, chamado didática.

No século XVII João Amós Comênio (1592-1670), pastor protestante, escreve a *Didacta Magna*, o primeiro texto a criar princípios e regras de ensino e formular a difusão do conhecimento para todos. Assim o termo Didática surge com a intencionalidade de intervir na aprendizagem de crianças e jovens, diferente das formas intervencionais de antes que eram em parte naturais e automáticos.

Mesmo Comênio criando a teoria didática, transpondo aos poucos a educação medieval, e influenciando o desenvolvimento de métodos de ensino mais rápidos e eficientes, ele não pôde abandonar certas crenças como o método de ensino único e simultâneo a todos. Ele ainda julgava que a via do conhecimento era unicamente por experiências sensoriais, o que de fato era errôneo, tendo em vista que constantemente somos enganados pelas percepções sensoriais. Sem contar que ainda existem as experiências sociais que não podem ser ignoradas.

Jean Jacques Rousseau (1712-1778) foi um pensador que procurou basear na sociedade (conturbada, com a mudança do meio de produção) e interesses individuais imediatos dos estudantes para desenvolver uma nova concepção de ensino. Seguindo as suas teorias, um pedagogo suíço chamado Henrique Pestalozzi (1746-1827), dedicou a vida para educação dos menos afortunados, aplicar a teoria de Rousseau.

As ideias pedagógicas de Comênio, Rousseau, Pestalozzi, entre outros, serviram de base para o que chamamos hoje de Pedagogia Tradicional (onde prepondera a ação de agentes externos na formação do aluno, fazendo verdadeira a premissa de que a transmissão do saber é constituída na tradição e nas grandes verdades acumuladas pela humanidade que são constatadas pela observação sensorial ou pela palavra do professor). Diante disso, a Pedagogia Renovada (prepondera as necessidades e vontade das crianças que são dotadas de liberdade, sendo o sujeito da sua aprendizagem, o processo educacional é considerado como etapas sucessivas do desenvolvimento biológico e psicológico, respeitando as capacidade e aptidões de cada indivíduo).

São vastas as correntes e concepções didáticas que frutificaram desde esses cientistas da didática, mas destacamos as que ocorreram no século XX, com o surgimento do construtivismo e sociointeracionismo, cujo estudos iniciam-se com Jean Piaget (1896-1980) e Lev Vigotsky (1896-1934). Precisamos considerar que a prática proposta por esses teóricos, fundamentaram toda estrutura educacional em vários países. O construtivismo consiste na elaboração da construção do conhecimento interno no qual a aprendizagem depende do nível de desenvolvimento do sujeito. Já o sociointeracionismo relaciona o aprendizado ao meio social, dando ênfase ao papel do contexto histórico e cultural nos processos de desenvolvimento e aprendizagem. É nesse contexto que apresentamos nosso referencial didático Guy Brousseau, que define a Didática como uma relação específica entre conteúdos de ensino, o meio onde adquirem os conhecimentos e os métodos, propondo situações que poderiam ser experimentadas e analisadas pelo próprio método científico. Sua Teoria das Situações Didáticas (TSD) quebra a visão clássica de didática, tratando a de forma inversa do que propunha Comênio, ou seja, a didática não era vista como um método único, servindo todas as matérias, o TSD baseia-se nas atividades culturais sociais que produz especificamente um conhecimento matemático, concentrando-se nas situações didáticas as relações e métodos que propiciam esses saberes, com isso muitos consideram

Brousseau como o pai da didática matemática.

Mas antes de descrever as sequências, devemos fazer uma análise envolvendo sequência didática. Buscamos em (ZABALA, 1998), seu capítulo intitulado As sequências didáticas e as sequências de conteúdo, que traz formas de analisar e discutir as sequências baseadas na engenharia didática contraposta a outras sequências amplamente divulgadas e reproduzidas por profissionais da educação. Dessa forma, devemos inicialmente, antes de qualquer método didático, nos centrarmos na sequência, isto é, na série ordenada e articulada de atividades que formam as unidades didáticas. Um exemplo de sequência didática bastante conhecida e amplamente seguida é a sequência tradicional de ensino:

> Não é tanto a complexidade da estrutura das fases que a compõe, mas a das próprias atividades, de tal forma que, esquematicamente seguindo Bini (1977), a sequência do modelo tradicional, que ele denomina circuito didático dogmático, estaria formado por quatro fases a) Comunicação da lição b) Estudo individual sobre o livro didático c) Repetição do conteúdo aprendido d) Julgamento ou sanção administrativa (nota) (ZABALA, 1998, p.54)

Talvez essa é de longe a sequência mais divulgada e reproduzida em sala de aula, e apesar de ser tão difundida é com certeza a mais criticada, e muitas são as opções de sequências que fogem desse modelo tradicional, possibilitando ao professor melhora em sua atuação em sala, como resultado de uma identificação e análise profunda de cada etapa que compõem uma sequência:

> A identificação das fases de uma sequência didática, as atividades que a conformam e as relações que se estabelecem devem nos servir para compreender o valor educacional que tem, as razões que as justificam e a necessidade de introduzir mudanças ou atividades novas que a melhorem.(ZABALA, 1998, p.54)

O autor ressalta a importância de um olhar crítico sobre qualquer sequência. Diante disso, o que vamos propor é um modelo baseado nas sequências do estudo do meio.

Modelo de sequência estudo do meio

a) Atividade motivadora relacionada com uma situação conflitante da realidade experiencial dos alunos

b) Explicação das perguntas ou problemas que esta situação coloca

c) Resposta intuitivas ou hipóteses

d) Seleção e esboço das fontes de informação e planejamento da investigação

e) Coleta, seleção e classificação dos dados

f) Generalização das conclusões tiradas

g) Expressão e comunicação

Nas próximas seções vamos apresentar a TSD para munir teoricamente o processo de pesquisa e como aporte metodológico a chamada Engenharia Didática, ambas estão em consonância, conversando entre si.

4.3 Teoria das Situações Didáticas

Brousseau fazia parte do grupo IREM (Instituto de Investigação do Ensino de Matemática), que iniciou no final da década de 1960 na França, dentro do movimento da Matemática Moderna, ele se destacou com sua dissertação de doutorado *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, de 1986, desenvolvendo a Teoria das Situações Didáticas.

(BROUSSEAU, 2008) concebe o ensino a partir das relações entre o sistema educacional o aluno e o conhecimento específico pretendido, baseando se na harmonia de dois processos, chamado de aculturação e adaptação independente. Aculturação está ligado as mudanças resultantes do contato entre dois ou mais estudantes com saberes ou culturas diferentes. A adaptação independente é a forma como os estudantes se adaptam ao meio de forma natural no decorrer das atividades propostas. Pode-se perceber ainda a influência do meio sociocultural, inspirado nesse âmbito, em Vigotski.

Na abordagem da TSD, Brousseau define *situação* como o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento , objetivada assim a propiciar a reflexão sobre as relações entre os conteúdos de ensino e os métodos educacionais, ou ainda abordar a didática pondo a comunicação e transformação dos conhecimentos matemáticos no centro da investigação. A teoria da situação didática de Brousseau está aportada na procura das condições indispensáveis à efetivação da aprendizagem, arquitetando, seja como originadora ou causadora da percepção de engenharia didática, sendo uma metodologia para criação de situações e modelos.

Ainda Brousseau estabelece um meio material (um problema, um jogo, um exercício, etc.) e as regras de interação com esse meio. Para ele, a aprendizagem ocorre na relação do sujeito com esse meio que deve ser autônomo e antagônico, assim, o estudante vai se adaptando durante o processo a esse contexto criado. Nesse sentido, Brousseau diz que o meio é autônomo e antagônico porque apesar do professor propor situações que conduzem o aluno a aprendizagem, deve-se considerar um equilíbrio para que a partir da proposta apresentada, o aluno consiga se desenvolver e avançar de forma autônoma e manter-se motivado. Em 1996 Brousseau denominou esse meio de *milieu*, que deve ser planejado e organizado pelo professor, que cede ao aluno a responsabilidade pela aprendizagem (esse ceder é denominado devolução), dessa maneira, o meio deve garantir uma interação aluno conhecimento baseada em desequilíbrios, assimilações e acomodações, de certa forma, pegando emprestado as ideias psicogenética de Piaget. Entretanto, devemos pontuar que Piaget defendia a naturalidade do processo de aprendizagem através dessa interação definidas como assimilação e acomodação, e Brousseau considerava que assim o papel do professor era diminuído.

Em seu livro, Brousseau utiliza se do jogo *quem vai dizer 20?* como meio material para ilustrar uma situação didática e através da análise das relações aluno com o meio, obtido de suas aplicações, ele estabelece as Situações de Ação (na qual o aluno toma suas decisões de forma intuitiva e natural, e durante o processo vai tomando novas decisões até que reconheça certos padrões e estabeleça técnicas). Na Situação de Formulação (deve usar da ferramenta linguística para comunicar, seja uma informação, ou a fomentação de um debate com outro estudante ou um grupo). Já na Situação de Validação (deve ser validar ou invalidar o que foi feito na ação e formulação). Nas três situações anteriores, o aluno deve seguir sem a intervenção do professor, limitando-se a orientações apenas quando necessário, fazendo assim o papel de mediador. A esse conjunto de contextos, ele denomina como situações a-didáticas, na qual outra característica necessária é deixar a intencionalidade didática implícita

Após essas três situações, ele propõe a Institucionalização daquelas que deram a determinado conteúdo a condição de saber como produto cultural, o professor retoma a frente do processo, estabelecendo os conhecimentos levantados das situações de ação, formulação e validação, confirmando-os quando relevantes ou descartando-os quando não. Podemos então, organizar o desenrolar das situações didáticas como na Figura 21.

Figura 21 – Desenrolar de uma situação didática

A situações didáticas são modeladas em 3 fases.

1º) A uma contextualização de um problema, situação, atividade, etc. a fim de motivar e provocar o aluno a investigação, e é feito a devolução, isto é, o professor passa a responsabilidade do processo de aprendizagem ao aluno, que deverá seguir as próximas fases de forma autônoma(contextualização + devolução);

2º) Nessa fase busca os processo de assimilação acomodação e desequilíbrios centrado no desenvolvimento cognitivo do indivíduo garantido pela interação com o meio desenvolvido na fase anterior, o processo pelo qual os alunos passam é representado pelas situações a-didáticas (ação, formulação e validação);

3º) O professor reconhece os conhecimentos, procedimentos válidos desenvolvidos nas fases anteriores, evidenciando e usando os de referência (institucionalização). Brousseau ainda traz a reflexão entre o conhecimento e saber e a importância da institucionalização na transposição. Sobre isso, ele escreve:

> Essa construção autônoma não pode dar aos conhecimentos desenvolvidos o status de saber. [...] A intervenção didática do professor é a que permite identificar conhecimentos canônicos no que o aluno, ou os alunos,conceberam em situações autônomas. (BROUSSEAU, 2008, p.51)

Durante a situação didática, Brousseau lança mão de conjunto de regras explícitas ou implícitas do que ele chama de contrato, inspirado no desenvolvimento do contrato social de Rousseau[1] ele desenvolve o contrato didático, são vários tipos de contrato, que podem aparecer na comunicação entre os sujeitos (Contrato sem intenção Didática); na relação do sujeito com um novo conhecimento (Contrato pouco Didático); e por fim, o Contrato Didático, onde professor e aluno tem a consciência do papel que devem exercer e qual papel o outro exerce. É esse contrato que possibilita o desenrolar das situações.

Brousseau reconhece a existência de paradoxos no contrato didático. Para ele, paira uma incerteza tendo vista que o professor não tem garantia que todos os alunos vão acertar no decorrer das situações e resolução dos problemas propostos, perdendo valor o conteúdo didático. Assim, ele nomeia alguns efeitos que podem estar presentes no contrato, usando como base um estudo de caso de fracasso (Brousseau e Péres, 1980).

Efeito Topaze (Baseado na primeira cena do filme de Marcel Pagnol, *Topaze*) o professor toma para si o processo de aprendizagem e cada vez diminuí a dificuldade das perguntas, para obter resultados máximos dos alunos, fazendo que os conhecimentos objetos desapareçam por completo. Ele destaca ainda, que a escolha de situações didáticas é deixada a cargo do "bom senso"dos professores, mas que o uso das correntes teóricas, como a engenharia didática, se ocupa desse objetivo.

Efeito Jourdain (referência à cena da peça O Burguês Fidalgo de Molière) é uma espécie de efeito Topaze, onde o professor evita debates de conhecimento com os alunos onde levaria um ruído ou falha do entendimento, ficando com as respostas que apresentam um indício de saber, mesmo que essas sejam motivadas por causas de significações banais.

Outro efeito é o das Transposições Metacognitivas e Metadidáticas (para ilustrar esse efeito traz o uso do de grafos no ensino das estruturas nos anos 60, método associado a

[1] Brousseau cita Filloux (1974)

Papy), o professor faz uso de explicações e métodos heurísticos no lugar de conhecimentos matemáticos. Essas ferramentas criadas pelo professor para buscar o ensino a qualquer custo acabam se tornando o objeto de ensino e cheio de convenções, isto é, são métodos que funcionam em casos muito específicos. Nesse processo, quanto mais comentários e convenções o ensino produz, menos os estudantes são capazes de controlar.

Dentro dessas ferramentas heurísticas usadas pelo professor estão a analogia, seu abuso se torna outro efeito e por fim, temos o efeito do envelhecimento das situações de ensino. Diante disso, os professores devem se comprometer a estar em constante renovação, tendo vista que uma mesma situação pode não se adequar a outra turma, sendo assim, será um erro reproduzi-la.

Brousseau ainda analisa os componentes e estratégias essenciais ao contrato didático, focalizando na devolução e institucionalização, sendo esses momentos centrais, pois é na devolução que o professor faz a entrega da responsabilidade de aprendizagem de uma situação adidática ao aluno, e na institucionalização essa responsabilidade volta ao professor onde deve fazer as considerações e valorização do processo de ação, formulação e validação no decorrer das situações a-didáticas. Brousseau considera nas estratégias do contrato didático, as formas com as quais adquirimos saberes novos (denominado contratos fortemente didáticos), e as transformações dos saberes antigos (denominado contrato de transformação). Na primeira, estão os contratos de reprodução formal, ostensão, condicionamento, maiêutica socrática, empirista e construtivistas. Na segunda, está ligado a memória didática, a revisão dos saberes antigos e a recuperação.

4.4 Engenharia Didática

A engenharia didática foi delineada inicialmente por Brousseau como uma proposta metodológica para sua TSD, mas foi com o trabalho de (ARTIGUE, 1988) que é estruturada, assim sua concepção está ligada a escola da didática francesa, mais especificamente nos IREM. Essa engenharia também pode ser utilizada tanto para elaborações de situações didáticas voltadas para uma aprendizagem significativa, quanto uma metodologia voltada para uma análise qualitativa da pesquisa matemática. A denominação Engenharia Didática é equiparado ao:

> “[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta” (ARTIGUE, M., 1995)

Em seu texto (ARTIGUE, M., 1995) centra os estudos a função da engenharia didática como metodologia de investigação caracterizado em primeiro lugar como um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala, que em comparação a outras metodologias usadas na pesquisa em sala de aula, são voltadas a validações externas, comparadas estatisticamente os rendimentos de um grupo experimental com um grupo de controle, diferentemente da engenharia didática, onde é feito um registro dos estudos de caso e sua validação é interna, baseada no confronto das análises a *priori* e *a posteriori*. Assim, a autora divide a metodologia da engenharia didática em 3 fases, sendo a 1º análise preliminar, 2º concepção e análise a priori das situações didáticas de engenharia e na 3º experimentação seguido da análise e avaliação *posteriori*. Vamos descrever os pontos de cada fase, como faz (ARTIGUE, M., 1995).

1ª FASE: A análise preliminar busca compreender os sujeitos da pesquisa e analisar epistemologicamente os conteúdos do ensino, as formas como é usualmente abordada, as restrições situadas na realização de uma didática efetiva, de certa forma, antever as dificuldades e obstáculos na evolução da aprendizagem, e claro, deve se ter em conta os objetivos específicos da investigação. Artigue usa da noção de 3 quadros (Douady, 1984), o algébrico (resolução por fórmulas); o numérico (resolução por aproximação) e o geométrico (estudo qualitativo das curvas, e solução das equações). Para identificar as restrições do campo matemático, a análise das restrições deve se dar nas dimensões epistemológicas (característica do saber em jogo), cognitivas (características cognitivas dos alunos) e na dimensão didática (características do funcionamento do sistema de ensino).

> O ensino tradicional centra-se no funcionamento dentro do quadro algébrico. Portanto, parece natural ter em conta o objetivo pretendido da investigação, estudar a viabilidade de um enfoque epistemológico mais satisfatório e as restrições que se opõem à extensão de ensino aos outros quadros. (ARTIGUE, M., 1995, p.40)

2ª FASE: O professor-investigador deve atuar sobre as chamadas variáveis de comando, distinguidas por Artigue como variáveis macro-didáticas (tem a ver com a organização global da engenharia) e micro-didáticas (diz respeito a organização de uma sequência ou um passo do processo). Essas variáveis são levantadas em função dos problemas apontados na fase preliminar e as escolhas são justificadas *a priori* em forma de predição. As situações aqui, são desenvolvidas conforme destacado no capítulo anterior (TSD), onde o professor faz a devolutiva e os alunos passam pelo processo das situações a-didáticas, enquanto o professor retoma seu papel na institucionalização, com todos os cuidados já citados.

> Tradicionalmente, esta análise a *priori*, inclui uma parte descritiva e uma parte preditiva que focaliza as características de uma situação a-didática que foi projetada e que será executada aos alunos: • As seleções do nível local são descritas (possivelmente relacionando-as às seleções globais) e as características das situações didáticas que delas sairão. • Analisa o que poderia estar em jogo nesta situação para um aluno dependendo das possibilidades de ação, seleção, decisão, controle e validação daqueles que ele tem, uma vez posto em prática uma operação quase isolada do professor. • Possíveis campos de comportamento estão previstos e tentam mostrar como a análise realizada permite controlar o seu significado e

> garantir, em especial, que o Comportamento esperado, se intervenha, o que será, provavelmente, o resultado de colocar em prática o conhecimento contemplado pela aprendizagem. (ARTIGUE, M., 1995, p.45)

A analise a*priori* das sequências das atividades permite ao professor formular hipóteses, para *a posteriori* ser validada.

3ª FASE: Essa fase é dividida em 3 momentos, a experimentação, analise *a posteriori* e validação das hipóteses.

A experimentação consiste em aplicar as situações desenvolvidas na fase anterior, respeitando os contratos didáticos e as fases da TSD descritas na secção anterior. A análise *a posteriori* é baseada no conjunto de dados recolhidos ao longo da experimentação, as observações feitas da sequência de ensino, as produções dos estudantes, as entrevistas individuais ou em grupo, e o confronto entre as expectativas descritas na análise *a priori*, fundamentando assim o momento de validação das hipóteses formuladas na investigação na fase preliminar.

É importante ressaltar que a validação não se encontra nos esquemas usuais estatísticos associados aos experimentos em sala, que consiste fundamentalmente nas diferenças implícitas constatadas contrapondo o experimental com uma sala de controle. Aqui, o que devemos buscar é uma validação qualitativa associada ao estado epistemológico da didática que fundamenta o processo.

Ainda vale observar possíveis ações imprevistas, ou como descrito no capítulo anterior, os chamados efeitos que podem causar falhas no processo ensino aprendizado, sendo necessários os momentos de reformulação e retomadas do processo.

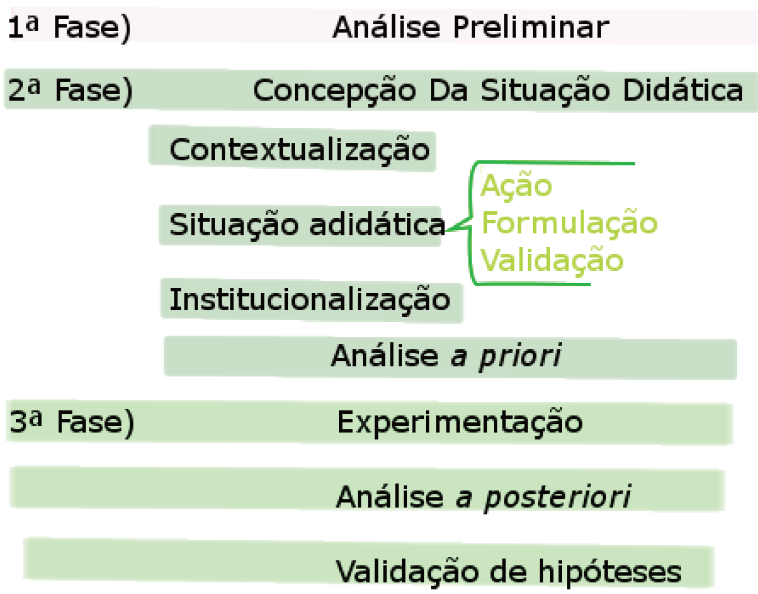


Figura 22 – Fases de implementação da Engenharia Didática

5 Geogebra

Para introduzir o software, trazemos a resposta do que é GeoGebra do site oficial:

> GeoGebra é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprendizagem e ensino da matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores. Este manual cobre a versão atual (4.0). GeoGebra é compatível com todas as versões anteriores, apesar de pequenas diferenças.(https://wiki.geogebra.org/pt/Manual)

As instalações estão disponíveis para vários equipamentos e diversos sistemas, podemos encontramos todas as versões para download em geogebra.org/download nas atividades usaremos a versão do GeoGebra Classic 6 (com mudanças na interface, mas qualquer dúvida o manual da versão 4.0 serve bem), a versão pode ser usada online e offline.

5.1 O software GeoGebra

O GeoGebra foi criado em 2001 e pode ser usado tanto no nível básico como superior de ensino. Ele tem uma interface intuitiva e sua estrutura divide-se em 6 partes como na Figura 23 :

Os números 1, 2 e 3 são respectivamente: - Janela de Álgebra, onde visualizamos as construções, as descrições e tipo de cada objeto em linguagem algébrica, ao iniciar o GeoGebra ela estará como na figura 23; - Planilha Dinâmica: ela de modo geral não aparece ao iniciar o GeoGebra, para exibi-la devemos ir ao comando Exibir planilha dinâmica (para mais informações consulte o comando barra de tarefas abaixo), permite manipulações algébricas avançadas; - Plano Cartesiano: essa janela de visualização permite a interpretação geométrica das construções algébrica. Para cada janela temos na sua parte superior uma barra de ferramenta específica, pra controlar e definir as propriedades básicas relevantes aquele grupo.

O número 4 é a barra de ferramentas avançadas, essa apresentada na figura são as de construções geométricas relativa a janela do Plano Cartesiano (número 3), ao clicar em 2, temos acesso as ferramentas avançadas da planilha dinâmica: Análise estatística, Construções de lista de pontos, matriz, tabela e caminho poligonal.

O número 5 é a barra de tarefas, para acessá-la basta clicar no canto superior direito nos três travessões, nela encontramos as opções: Arquivo é a opção apresentada na

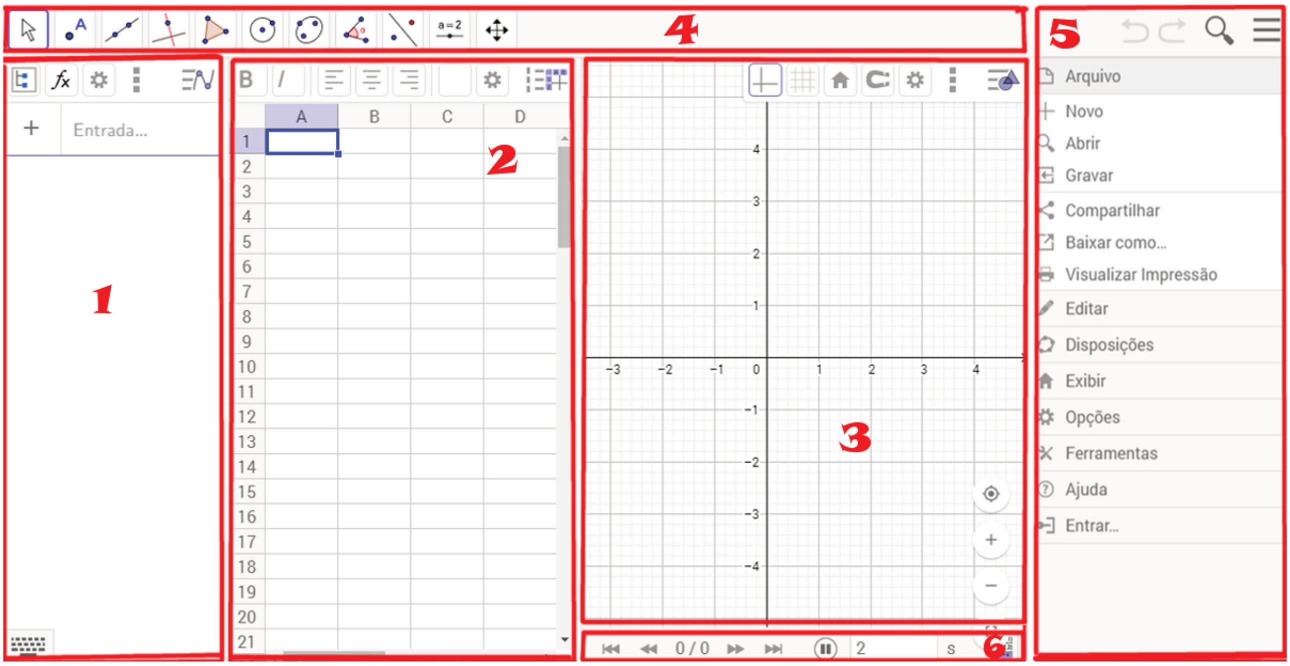


Figura 23 – Ambiente de Trabalho GeoGebra

figura, nela podemos criar uma nova folha de trabalho, abrir uma já existente (podendo estar offline ou online em uma conta do GeoGebra), gravar um novo trabalho;

Na opção Editar, podemos desfazer um passo da construção, refazer um passo desfeito (no canto superior da janela temos um atalho pra essas opções), copiar um objeto, colar um objeto que acabou de ser copiado, as propriedades de um objeto como mudar a cor, o tamanho rótulo ou legenda, e ainda programações avançadas;

Na Disposição, escolhemos a forma de apresentação do ambiente de trabalho: gráfico, janela de álgebra, geometria, janela 3d, planilha de cálculos, janela de probabilidade, e o modo exame;

Em Exibir, é possível configurar o ambiente de trabalho, escolhendo quais janelas queremos exibir, e aqui podemos ativar o protocolo de construção e exibir a planilha dinâmica, além de fornecer opções avançadas de exibições;

As Configurações, permitem ajustar qualquer objeto, ao clicar vamos para as possibilidades do objeto selecionado;

As Ferramentas, possibilitam configurações avançadas da barra de ferramentas (4), criar novas ferramentas e gerenciar;

E no campo Ajuda, obtemos suporte online através de tutoriais, manual e o fórum do GeoGebra, reportar erros e informações sobre licença;

Na opção Entrar, podemos criar uma conta no site do GeoGebra, permitindo um ambiente para salvar e criar folhas de aprendizado online.

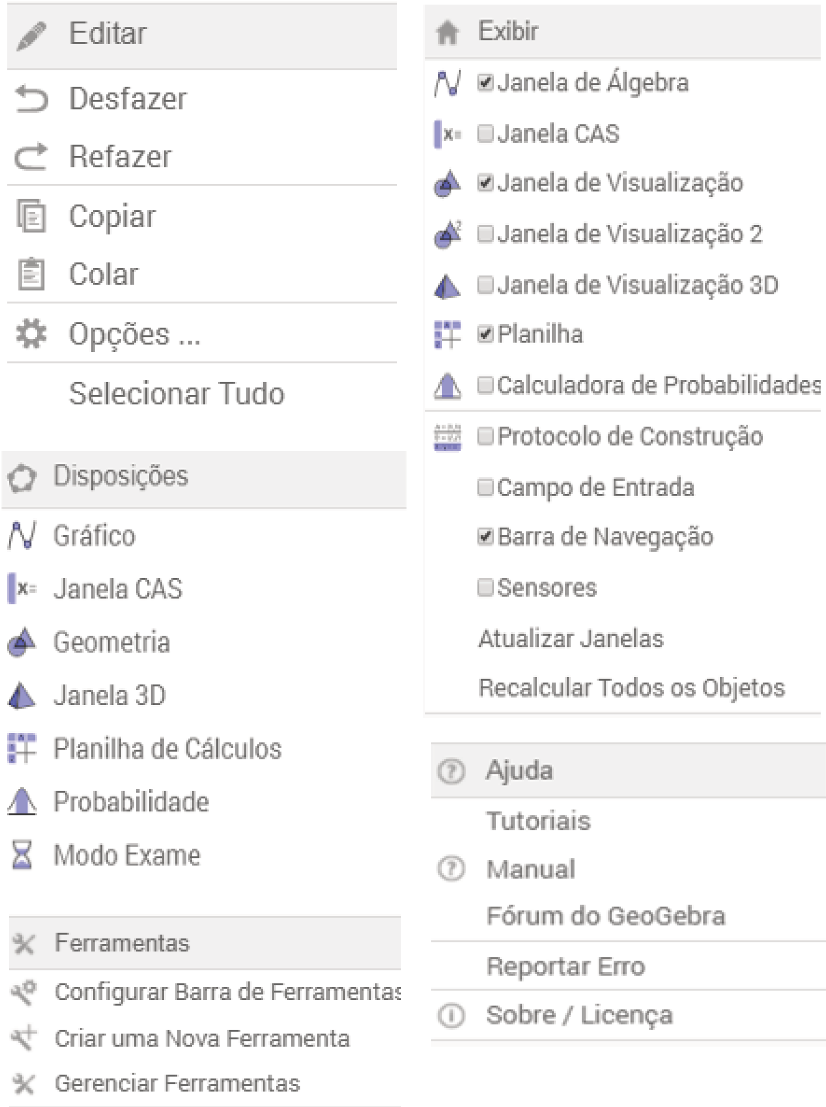


Figura 24 – Barra de Tarefas

Por fim, temos o número 6, na barra de navegação que permite refazer o passo-a-passo de todas as construções feitas no ambiente de trabalho.

6 Applets

> Applet é um software aplicativo que é executado no contexto de outro programa. Os applets geralmente tem algum tipo de interface de usuário, ou fazem parte de uma destas, dentro de uma página da web. O termo foi introduzido pelo Apple Script em 1993. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Applet).

Usaremos o software GeoGebra, e os Applets serão hospedados nas páginas: GeoGebra para compreensão do movimento via Curvas Paramétricas no EM, e no Atividades Envolvendo Curvas Paramétricas, na área de usuário denominada GeoGebraBooks, o acesso é livre, pode ainda liberar visualização pública, ou liberar apenas para usuários que possuam o link de acesso. Esse ambiente tem a forma de um livro digital. A característica fundamental do applet é a interação com os conteúdos, os alunos passam de meros observadores para agentes ativos no processo de aprendizagem, essa dinâmica é motivadora, e as possibilidades experimentais são grandiosas, por exemplo, ao mudar os parâmetros na forma algébrica, já tem a resposta na forma geométrica, possibilitando criar e testar conjecturas e hipóteses de forma autônoma, e comparar com as representações algébricas relacionando com a tabela, identificando padrões.

1. Conceitos envolvendo Funções
   - Elemento das funções Básica

     Animação voltada para o estudo dos coeficientes da função linear e função quadrática; função exponencial e logarítmica
2. Animação dos Exemplos
   - Exemplo 1 Bola lançada
   - Exemplo 2 Bicicleta Despencando do Penhasco
   - Exemplo 3 Parametrização do Caminho do Robô

     Dados dois pontos, digamos um ponto inicial e um final, parametrizar o movimento do robô por
   - Tangente por Euclides
   - Exemplo Vetores associados ao Movimento
   - Exemplo Reparametrização do Caminho do Robô
   - Eixo Polar
3. Cônicas
   - Secções Cônicas

- Equação Geral das Cônicas
- Elipse
- Parábola
- Hipérbole

4. Outras Curvas

- Cissóide de Diócles
- Espiral de Arquimedes
- Folium de Descartes
- Curvas de nível Folium de Descartes
- Cicloide
- Cicloide 2
- Epiciclóides
- Hipocicloides

7 Metodologia

A metodologia foi mencionada e amplamente discutida no capítulo 4. A engenharia didática será usada de forma experimental e esquemática, a fim de implementar as investigações das realizações didáticas em sala de aula.

Seguindo o esquema da engenharia didática, foram propostas duas sequências didáticas, voltadas respectivamente para o ensino médio e graduação. Cada sequência tem um conjunto de atividades em nível espiral de dificuldades respeitando as diretrizes construtivistas sócio-genética (vigotskiana - piagetiana), isto é, foram respeitados os funcionamentos cognitivos dos alunos, em especial os momentos das situações a-didáticas, onde há conflitos cognitivo-social (adaptação, assimilação e equilibração) tão importantes para a construção do conhecimento.

A primeira Sequência passa por todas as fases da engenharia didática e relata os resultados da investigação. A segunda sequência contempla as análises *a priori* das atividades e a deixa como proposta de experiência didática para as disciplinas da graduação.

Antes de iniciar a implementação da engenharia didática, vale ressaltar que o processo não é linear como aparenta a Figura 22, pois dentro de uma sequência didática podemos ter o processo sendo repetido em partes ou em sua totalidade para cada atividade. Ainda que tenha sido feito a análise de um grupo de sujeitos específicos é possível observar generalidades que possibilitam sua reprodução, mesmo que parcial, contribuindo assim com outras práticas docente.

7.1 Concepção e análise *a priori*

Na primeira fase de implementação da engenharia didática, foi realizada uma análise preliminar dos conteúdos (objetos de estudo), do perfil dos alunos (sujeitos da investigação) e do nível de familiaridade com as ferramentas e ambientes tecnológicos. Essa etapa abarca as revisões dos livros didáticos, acrescido de conversas e debates com professores em exercício, bem como a minha experiência adquirida ao longo do tempo, como professor de ensino médio e de cursinho pré-vestibular.

Deste modo, foi constatado que o estudo de curvas nesse nível está centrado nas representações explícitas das funções básicas presentes no currículo, sendo limitados a obtenção de pontos notáveis (raízes, pontos extremos, pontos de intersecção seja com o eixo ou outras curvas) através de métodos mecanizados e com pouco apelo geométrico e descontextualizados, apresentados na lousa e quando muito, em slides estáticos. Outra evidência é o desconhecimento relacionado a história da matemática, onde ignoram curvas tão importantes que revolucionaram a visão da sociedade em sua época.

O perfil dos sujeitos da investigação é heterogêneo, sendo aplicado para alunos na faixa etária dos 15 aos 18 anos, de classe média e baixa, de duas escolas localizadas respectivamente no centro e na periferia, em horários contrários ao que cursam o ensino médio. As escolas foram escolhidas por possuírem o laboratório de informática conectado à internet, elemento indispensável para realização da pesquisa.

Em relação as ferramentas e os ambientes tecnológicos, observou-se que esses, são pouco usados e quando o fazem, não há interação construtivista dos conteúdos, sendo apenas fontes de exibição e amostragem.

Por conseguinte, houve a delimitação das indagações que norteiam a investigação e para isso, foram formuladas da seguinte forma:

- De que forma os ambientes tecnológicos contribuem para o debate, comunicação e divulgação da história da matemática e seus conteúdos?

- Qual a importância do ambiente de geometria dinâmica na compreensão ou significação dos elementos das funções básicas, em particular os pensamentos de natureza óptica vindas das construções em movimento?

- Como o uso de softwares de geometria dinâmica facilita a compreensão dos conceitos de curvas, suas classificações e diversas representações?

- O uso das teorias das Situações Didáticas proporciona ao processo de aprendizagem espaços de construção de conhecimentos significativos? Como as situações a-didáticas colocam os alunos em relação ao protagonismo na aquisição de saberes matemáticos?

Para respondê-las foi utilizada a sequência didática concebida via teoria das Situações Didáticas, cujas atividades privilegiaram o quadro geométrico, limitado ao estudo qualitativo das curvas, e a analise dentro das três dimensões:

1º) Dimensão epistemológica: situações voltadas para a compreensão dos elementos e representações das curvas através do movimento, contextualizadas no meio da geometria dinâmica essa característica do saber acaba sendo intuitiva e explícita.

2º) Dimensão cognitiva: atividades em níveis crescentes de dificuldades foram elaboradas e possibilitaram aos alunos, com certa autonomia, usarem os conhecimentos prévios para construírem novos saberes.

3º) Dimensão didática: concebeu situações dentro de um sistema de ensino que propiciou a composição de conhecimentos significativos, com ambientes de socialização de ideias, seja em sala ou em grupos digitais, funcionando de certa forma autônoma e oportunizando ao indivíduo caminhos que vão além dos conceitos pretendidos.

Com o delineamento dos conteúdos passou-se para a segunda fase. Mas antes, é imprescindível ressalvar que apesar de priorizar o quadro geométrico isso não ocorre necessariamente em detrimento dos quadros algébricos e numéricos. Para aclarar e aprofundar esses quadros, empreendeu-se uma vasta pesquisa que foi discutida e exposta na primeira parte dessa dissertação.

Na segunda fase da engenharia didática, concebeu-se as Situações Didáticas que atuaram dentro das variáveis de comando relacionadas aos objetivos e organização globais, denominada de variáveis macro-didáticas, que caracterizam a sequência didática envolvendo curvas planas e suas equações paramétricas, temos assim, as variáveis:

- Organização de ambientes de aprendizagem online;
- Meios de socialização em grupo (pessoal ou digital);
- Utilização de situações-problema como recurso didático e contextualizadas no ambiente de geometria dinâmica;
- Proporcionar um ambiente que permita avançar para os conceitos gerais de curvas usando, de certa forma, os conflitos com os conhecimentos prévios de curvas explícitas (funções);
- Oferecer fontes de pesquisas que possibilitem o sujeito aprender a aprender;
- Criar atividades onde seja aplicado as fases da Teoria das Situações Didática .

Além das variáveis macro-didáticas têm-se as micro-didáticas, que são responsáveis pelas organizações presentes dentro de cada atividade da sequência proposta no capítulo 8.1. As escolhas *a priori* são justificadas dentro dessas variáveis globais e locais, que permitiram formular hipóteses preditivas que depois da experimentação foram validadas na análise *a posteriori*. Desta forma, a sequência didática foi organizada da seguinte maneira:

1. Apresentação do software GeoGebra

   Ao adentrar no ambiente do software GeoGebra online, os alunos foram orientados a criar uma conta e ingressar em um grupo específico que oportunizou a comunicação, o debate e o desenvolvimento das atividades propostas.

2. Apresentação dos applets

   - Atividade 1:

     As possibilidades do software são diversificadas e, por isso, é apresentado um panorama geral que contempla o desenvolvimento do GeoGebra de forma cronológica e as motivações iniciais de sua concepção. Alguns applets foram apresentados aos alunos que nunca tiveram contato com o software, dentre estes poucos o conheciam apenas pelo nome, tal ação permitiu que esses o manuseassem pela primeira vez.

Análise *a priori*: Essa atividade teve como objetivo motivar os alunos a descobrirem as diversas possibilidades que o software proporciona e as transformações que ocorrem com o ambiente a partir da definição dos objetivos. Dependendo das situações propostas o ambiente pode ser usado de forma dissociada ou não, como geometria dinâmica, ferramenta algébrica ou a calculadora gráfica.

No decorrer das atividades, os alunos são direcionados aos conceitos de curvas planas, isso se deve pela sequência em que os applets foram apresentados. No primeiro, trabalhou-se o jogo de lógica, denominado jogo das cores, com a finalidade de mostrar uma das possibilidades do software. O segundo trouxe os elementos básicos de funções já conhecidos pelos alunos. O terceiro, quarto e quinto applets são relativos às históricas curvas Ciclóide, Folium de Descartes e Espiral de Arquimedes, que são desenvolvidos de forma dinâmica, ou seja, é o traço descrito pelo movimento de um ponto P. Além do mais, são expostas as curvas de nível associadas a cada curva.

O sexto applet mostra um ponto se deslocando no ciclo trigonométrico ao mesmo tempo em que desenha a função trigonométrica (seno, cosseno e tangente) correspondente no plano cartesiano. O sétimo e oitavo trazem atividades referentes ao espaço tridimensional, exibindo um sólido obtido da revolução de um polígono no plano e as secções cônicas, respectivamente.

É importante registrar por meio de uma pauta de observação, as primeiras considerações dos alunos, seus estímulos, os conceitos e os níveis de linguagens que eles já detêm. No tocante as curvas especiais (Ciclóide, Folium de Descartes, Espiral de Arquimedes e as secções cônicas) a história da matemática é usada para alimentar a curiosidade e a motivação dos alunos, mostrando como os conceitos foram desenvolvidos na evolução da sociedade.

3. Lugar geométrico das cônicas

   - Atividade 2:

     Da visualização geométrica decorrente do corte do cone (8º applet) realizado na atividade anterior, foi proposto aos alunos o desafio de construir os lugares geométricos das secções cônicas, com o auxílio do docente acerca dos procedimentos a serem utilizados.

     Análise *a priori*: Não é passado nenhuma informação sobre o ambiente tecnológico e suas ferramentas de desenho geométrico. Desta maneira, os alunos devem se organizar em dupla ou em grupo e executar os procedimentos de construção geométrica informados pelo professor, usando seus conhecimentos e a linguagem matemática que possuem relacionados: a ponto, a segmentos, a retas e suas posições relativas (concorrentes e paralelas) e a mediatriz.

O professor assume a posição de observador atento as possíveis defasagens e as atitudes adotadas pelos alunos para saná-las, incentivando-os a busca autônoma da teoria necessária para estabelecer bases conceituais e validar as fontes de pesquisa, intervindo no processo quando necessário discutir possíveis contrassensos advindos de fontes inexatas.

Ao observar as ações dos alunos frente ao desafio, fica evidente o uso do método empírico, favorecido pelo software Geogebra, onde a tentativa e erro conduz, de forma natural, a formulação de hipóteses e sua validação imediata, contrapondo suas construções com a meta-aprendizagem que vão adquirindo. Tais procedimentos viabilizam a identificação das regularidades presentes no movimento dos objetos e, consequentemente, levam ao sucesso da construção dos lugares geométricos das secções cônicas.

O objetivo da atividade é a familiarização dos alunos com os meios tecnológicos, aprendendo a usar as ferramentas de manipulação e construções geométricas, identificando os referenciais e o processo de pesquisa, bem como estabelecendo fontes seguras na busca dos conceitos matemáticos e desenvolvendo autonomia no processo de aprendizagem.

Após as construções dos alunos, o professor verifica quais as maiores dificuldades (é esperado a falta de intimidade com o software e o desconhecimento da linguagem matemática), confronta as soluções apresentadas e, de forma coletiva, refaz a atividade, usando de suas anotações para destacar e questionar os processos que levaram ao sucesso ou fracasso.

Por fim, apresenta o applet que relaciona a equação geral das cônicas e formaliza as diferenças nas suas representações, contextualizando o trabalho em direção as equações paramétricas.

4. GeoGebra para compreensão do movimento

   - Atividade 3:

     Nessa atividade são formalizados os termos referentes ao ambiente do Geogebra que, por questões didáticas, dividiu-se a área de trabalho em 6 partes. Professor e alunos atuam em conjunto na retomada das ferramentas utilizadas nas atividades anteriores e, por meio destas, é feita a institucionalização, adequação da linguagem e a transição intencional das fases preliminares para o momento da meta-aprendizagem, advindas de debates e reconhecimento dos padrões.

- Atividade 4:

  Traz a construção das funções básicas afim, quadrática, exponencial e logarítmica, empregando o controle deslizante para representar os coeficientes das respectivas funções, favorecendo de imediato a percepção geométrica dos alunos quando se varia os coeficientes. Após a construção os alunos devem responder às perguntas conceituais.

- Atividade 5:

  O objetivo dessa atividade é conceituar curvas planas. Para tanto, o professor mune os alunos com alguns procedimentos, permitindo que eles executem a proposta de forma autônoma e sua intervenção ocorre apenas quando necessário.

  Fase Preliminar: Essa fase é constituída de perguntas que são elaboradas com o intuito diagnóstico, tornando-se um levantamento prévio da profundidade dos conhecimentos dos alunos referentes aos elementos básicos de funções. Isto posto, o educador deve dispor de estratégias que possibilite a participação de todos os alunos que oportunamente emitiram suas opiniões sem receio de errar. Caso necessário, os conceitos falhos serão retomados e a sequência deve ser reformulada com o propósito de corrigi-los, senão, prossegue em direção ao estudo do movimento via curvas paramétricas.

  Análise *a priori*: Espera-se que os alunos consigam trazer os conhecimentos adquiridos da meta-aprendizagem analisados na fase preliminar e sejam fluentes em suas argumentações relacionando os conceitos de domínio, imagem e contradomínio, pontos especiais e os coeficientes da função com as construções geométricas.

  Diferente das atividades anteriores, esta busca uma relação imediata com a animação dos applets e seus significados, caso haja dificuldades na realização da atividade o professor poderá fazer a construção da função afim em conjunto com os alunos. Contudo, a proposta inicial é que os alunos façam a atividade de forma autônoma percebendo que a construção geométrica provinda dos procedimentos serve de premissa para responder as perguntas.

  Após a execução dos procedimentos, o professor verifica quais as principais dificuldades e juntamente com os alunos refaz e debate os procedimentos usados para realizar a atividade com sucesso.

5. Situações-Problema envolvendo o movimento

- Atividade 6:

  Os alunos devem parametrizar uma reta construída via equação geral em que os coeficientes são representados por controles deslizantes.

- Atividade 7:

Essa atividade tem como objetivo relacionar e evidenciar as diferentes formas de representar curvas planas (explícita, implícita e paramétrica), bem como destacar em qual contexto e situação cada forma é melhor aplicada. Os alunos são desafiados a parametrizar o lançamento de uma bola e, com isso, ser capaz de concluir que o movimento descrito pelo ponto B, que representa a bola, é uma parte da parábola descrita algébricamente pela função quadrática.

- Atividade 8:

  Usando as equações horárias do movimento retilíneo uniforme e o movimento uniformemente variado, os alunos devem modelar a trajetória de um objeto em queda livre, representando-o através das equações paramétricas. Consequentemente, obtem-se a interpretação geométrica desse movimento.

- Atividade 9:

  Dado dois pontos A e B no plano cartesiano, os alunos devem criar caminhos com início e fim nos respectivos pontos por intermédio das equações paramétricas.

  Análise *a priori*: Ao desenvolver as atividades os alunos adquirem experiência e significação geométrica dos conceitos algébricos e, desta forma, espera-se que desenvolvam a habilidade necessária para relacionar as formas de representações das curvas com as situações que são úteis. De igual modo, devem compreender que o movimento fica bem determinado com o uso das equações paramétricas. Deve também reescrever com facilidade as equações nas representações implícita, explícita e paramétrica, demonstrando entendimento desta dinâmica e fugindo de procedimentos mecânicos.

As próximas etapas da sequência didática serão direcionadas aos estudantes de graduação dos cursos na área de exatas, que tenham em sua grade curricular disciplinas como cálculo diferencial integral e geometria analítica. Tendo por objetivo relacionar o conceito de curvas paramétricas apresentados até aqui com a ideia de vetor, parametrização (reparametrização) e curvatura.

6. Introdução à vetores

   - Atividade 10:

     O objetivo dessa atividade é conceituar os vetores: posição, deslocamento, velocidade e aceleração.

     Fase Preliminar: Essa fase é constituída de uma pesquisa envolvendo números complexos e números quatérnios e como se relacionam com a rotação de figuras bidimensionais e tridimensionais e como os seus estudos durante a história foram importantes para iniciar as primeiras ideias envolvendo vetores.

     Análise *a priori*: Espera-se que os alunos consigam trazer os conhecimentos adquiridos na pesquisa analisados na fase preliminar e sejam capazes de representar os vetores posição deslocamento e velocidade na situação já apresentada na atividade 7 (Lançamento de uma bola).

7. Parametrizações e reparametrizações

   O objetivo é discutir os efeitos no traço de uma curva plana parametrizada, fomentando de forma geométrica que a cada nova parametrização tomada o que temos é uma reinterpretação cinemática dessa curva.

8. Parametrização pelo comprimento do arco

   Através da forma vetorial das curvas paramétricas o objetivo é introduzir o vetor aceleração como sendo a derivada do vetor velocidade e esse como sendo a derivada do vetor posição. Discute-se o uso da função integral na obtenção do comprimento do arco, e o processo matemático de obter uma parametrização que é denominada parametrização pelo comprimento do arco.

Parte III

Resultados

8 Sequência didática

Tendo observado alguns pressupostos da sequência didática, somado as considerações da TSD, desenvolvemos as duas sequências que seguem, respeitando as fases metodológicas da engenharia didática expressos no cap.7.

8.1 Sequência Ensino Médio

Pré-requisitos: Elementos das funções básicas (funções linear e quadrática, função exponencial e função logarítmica).

Objetivos Gerais: Apresentar o software GeoGebra, seu ambiente, estrutura e principais ferramentas; Significar geometricamente os elementos básicos das funções; Introdução do conceito de curvas planas identificando suas representações (explícita, implícita e paramétrica) e classificações; Uso de equações paramétricas para compreensão do movimento na perspectiva da geometria dinâmica; Compreender a utilização da pesquisa como meio para adquirir e ampliar os conhecimentos; Resolução de situações problema usando de pensamentos criativos, analisando-os de forma crítica identificando procedimentos adequados e validando-os.

Número de atividades: 9

Análise *a priori*:Ver capítulo 7 Metodologia.

Assim concebemos a sequência didática:

8.1.1 Apresentação do software GeoGebra.

Objetivos específicos: Conhecer o ambiente online do GeoGebra; Criar ambiente de discussão e divulgação dos conhecimentos matemáticos.

Acessar o site do GeoGebra no link https://www.geogebra.org, logar ou criar uma conta.

Construir um grupo para que os professores e alunos tenham um canal de comunicação.

8.1.2 Apresentação dos Applets.

Objetivos específicos: Conhecer as ferramentas básicas, e as possibilidades do software GeoGebra; Apresentar a história da matemática através de curvas famosas apresentadas no software.

8.1.2.1 ATV.1

https://ggbm.at/B5MFKC3J

Interagir com os Applets selecionados.

8.1.3 Lugar geométrico das cônicas.

Objetivos específicos: Conhecer as ferramentas básicas, e usa-las para construir as cônicas; Relacionar o corte das cônicas a sua concepção de lugar geométrico. Fazer a transposição de lugar geométrico para a concepção algébrica, reconhecendo os diferentes ambientes, geometria dinâmica e interpretação geométrica da equação geral das cônicas; Apresentar a história das cônicas contextualizando suas diversas concepções e aplicações.

8.1.3.1 ATV.2

https://ggbm.at/FWSttYk7

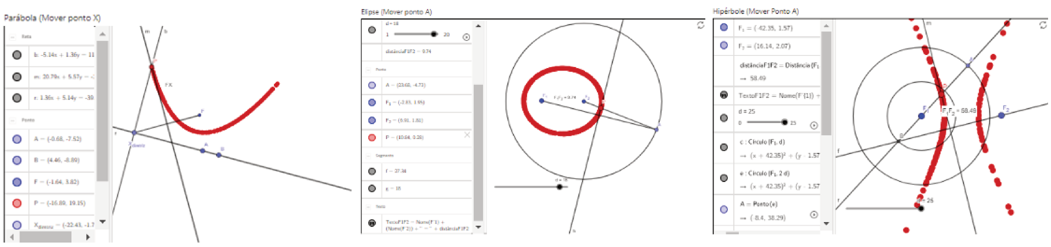


Figura 25 – Lugar geométrico das cônicas

Construa as cônicas:

Construção da Parábola Passo a Passo.

Uma parábola é o lugar geométrico de um ponto que se move em um plano de maneira que sua distância a uma reta fixa no plano é sempre igual à sua distância a um ponto fixo no plano e não situado sobre a reta. O ponto fixo é denominado foco e a reta fixa é denominada diretriz da parábola.

1º) Construa uma reta r que será a diretriz da parábola, fora da reta marque um ponto F que será o foco.

2º) Marque um ponto X pertencente a reta r

3º) Construa o segmento de reta $\overline{FX}$

4º) Construa a mediatriz do segmento $\overline{FX}$, chame a reta mediatriz de m

5º) Construa uma reta b passando pelo ponto X e perpendicular à reta r

6º) Marque P o ponto de interseção de m com b

7º) Libere o rastro do ponto P e mova o ponto X, observe que assim construímos o lugar geométricos dos pontos que formam a parábola.

Construção Elipse Passo a Passo.

Uma elipse é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de maneira que a soma de suas distâncias à dois pontos fixos no referido plano é sempre igual a uma constante maior do que a distância entre os sois pontos fixos. Os pontos fixos são chamados de focos da elipse. A reta que contém os focos é chamada eixo focal. A reta que passa pelo ponto médio do segmento que liga os focos e é perpendicular ao eixo focal é chamada eixo normal.

1º) Marque no plano dois pontos F_1 e F_2.

2º) Usando a régua meça a distância entre F_1 e F_2, seja d_1 essa distância.

3º) Construa um controle deslizante d.

3º) Escolha um tamanho $d > d_1$ e construa uma circunferência de centro em F_2 e raio d.

4º) Tome um ponto A sobre a circunferência construída.

5º) Construa os segmentos $\overline{F_1A}$ e $\overline{F_2A}$.

6º) Construa a mediatriz m de $\overline{F_1A}$.

7º) Marque o ponto P na interseção entre a mediatriz m com o segmento $\overline{F_2A}$.

8º) Libere o rastro do ponto P, e perceba que ao mover o ponto A o ponto P descreve a Elipse.

Construção da Hipérbole Passo a Passo.

1º) Marque os dois focos F_1 e F_2.

2º) Usando a régua meça a distância entre F_1 e F_2, seja d_1 essa distância.

3º) Construa um controle deslizante d.

4º) Construa uma circunferência de centro em F_1 e raio d.

5º) Construa uma circunferência de centro em F_1 e raio $2d$. Observe se o ponto F_2 está no exterior do círculo menor, caso não, modifique d para que isso ocorra, isso impõe que o tamanho d_1.

6º) Marque um ponto A sobre o círculo maior.

7º) Construa a reta r, passando pelos pontos F_1 e A.

8º) Marque o ponto B interseção entre a reta r e o círculo menor.

9º) Construa a reta s, passando pelos pontos F_2 e B.

10º) Construa a mediatriz m do segmento $\overline{F_2B}$.

11º) Marque o ponto P interseção de m com r.

12º) Libere o rastro do ponto P, e perceba que ao mover o ponto A ele descreve a hipérbole.

As Cônicas na História, apenas uma pitada: O primeiro aparecimento formal das cônicas estão no livro *Os Elementos* de Euclides, mas foi com Apolônio, em sua grandiosa obra *As Cônicas*, formado por oito livros, onde desenvolveu generalizações, criando novos métodos, descobriu e provou teoremas, fazendo com que fosse considerado em seu tempo "O Grande Geômetra". Claro que existem outros além de Apolônio que contribuíram nos estudos de cônicas, seus precursores Manaecmo, Aristeu e o próprio Euclides, Arquimedes seu principal rival na época, e os que foram influenciados pelo seu trabalho e trouxeram grandes aplicações práticas como Ptolomeu(127-151 d.C) astrônomo e geógrafo que introduziu o sistema de latitude e longitude tal como usamos hoje; outro foi o Kepler em 1609 diz que: "os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, com o Sol ocupando um dos focos". Temos também Galileu (1632), que escreve: "desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola". No entanto, foi graças ao tratado de Apolônio que Newton 1800 anos depois, com seu trabalho "*Principia* "trouxe A lei da gravitação onde matematizou as descobertas empíricas de Kepler e iniciou os estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço. Podemos atribuir ao desenvolvimento dos conceitos de cônica a possibilidade de termos receptores parabólicos, telescópios, navegação por GPS e até viagens espaciais. Foi Pierre de Fermat (1601-1665) que descobriu as equações cartesianas da reta e da circunferência, e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole.

As cônicas podem ser escritas pela equação geral do 2º grau, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que é a forma implícita das cônicas, onde podemos fazer o estudo do discriminante para classificá-las.

Se $B^2 - 4AC < 0$ Elipse; Se $B^2 - 4AC = 0$ Parábola; Se $B^2 - 4AC > 0$ Hipérbole

8.1.4 GeoGebra para compreensão do movimento.

Objetivos específicos: Introdução formal do ambiente GeoGebra; Validar os conceitos algébricos envolvendo funções com apoio visual da geometria; Definição de curvas planas; Classificação das curvas planas; representação das curvas planas; situações problemas envolvendo curvas paramétricas.

8.1.4.1 ATV.3

Apresentação do GeoGebra

Apresentação formal do ambiente tecnológico GeoGebra.

8.1.4.2 ATV.4

Elementos das funções mais conhecidas

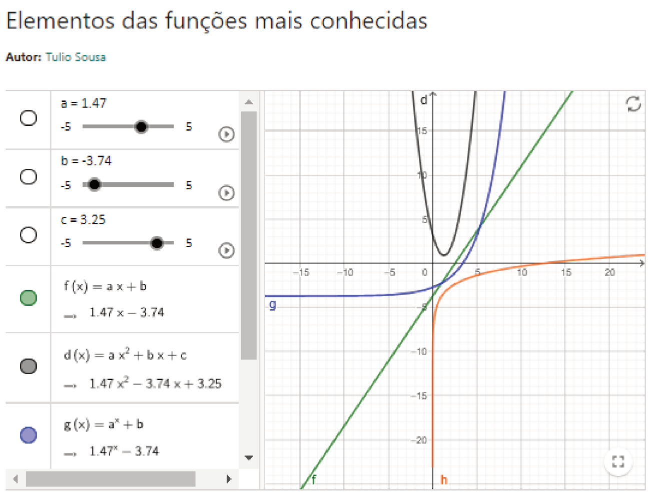


Figura 26 – Elemento das funções mais conhecidas

Construir as curvas planas, conhecida como funções, usando as equações gerais com os controles deslizantes variando os coeficientes, e responder as questões:

$f(x) = ax + b$

1) f(x) é a chamada função afim, os coeficientes a e b são respectivamente, angular e linear. Qual a raiz da f(x)? R: Onde corta o eixo X, isto é, o valor da abscissa quando a ordenada é nula, ou ainda o valor de x quando y=0.

2) Podem dar exemplos de situações reais onde aparecem esse tipo de relação? R: Todo tipo de situação proporcional, quantidade de um certo produto e o preço a pagar, distância percorrida e o tempo (quando a velocidade é constante), a velocidade e o tempo

(quando a aceleração é constante). Quando temos duas grandezas direta ou inversamente proporcionais, geometricamente é expresso por uma reta.

$d(x) = ax^2 + bx + c$

1) d(x) é a chamada função quadrática, os coeficientes são a, b e c. Quais são as raízes de d(x)? R: Onde corta o eixo X.

2) Podem dar exemplos de situações reais onde aparecem esse tipo de relação? R: Deslocamento de um objeto com aceleração constante em função do tempo, nº de apertos de mãos em função da quantidade de pessoas, nº de diagonais de um polígono, nº de partidas disputadas em turno e returno em função da quantidade de times.

$g(x) = a^x + b$

1) Você consegue encontrar alguma situação onde temos a função $g(x) = a^x + b$?

$h(x) = a * ln(x) + b$

1) Você consegue encontrar alguma situação onde temos a função $h(x) = a * ln(x) + b$?

8.1.4.3 ATV.5

Classificação das curvas, aprofundando conceito de domínio e imagem

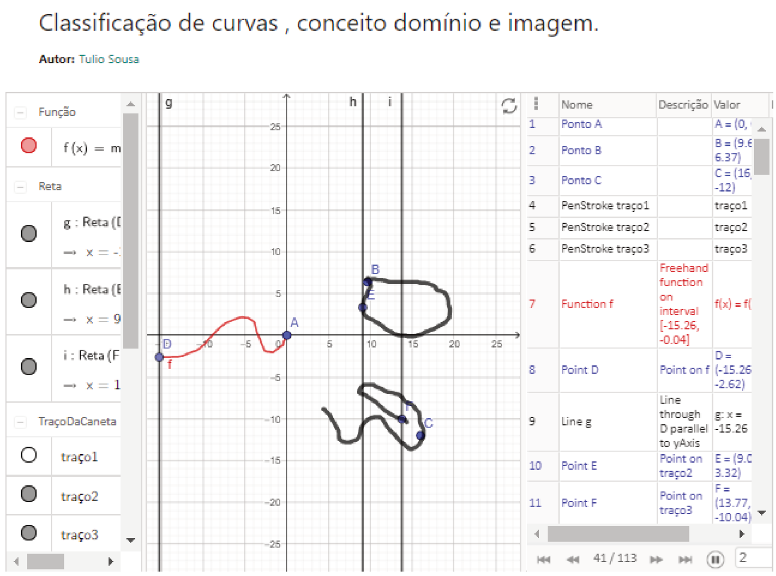


Figura 27 – Applet Classificação das Curvas

Siga os procedimentos e responda as perguntas.

OBS: Depois de movimentar os pontos, obtendo os rastros, ao realizar zoom, ou mover o plano, os rastros sumirão.

1º) Construir os 3 pontos: A(0,0); B(10,6); C(16,-12), habilitar o rastro para os três ponto;

2º) Clicar com o botão esquerdo nos pontos (mantenha pressionado) e movimente-os conforme descrito a seguir, concluído deixe de pressionar:

(a) mover o A de forma que o rastro não se intercepte, e nunca mude o sentido horizontal e tenha uma velocidade constante, não podendo ter linhas verticais (se o rastro for para a direita ela não pode ir pra esquerda e nem parar em um determinada posição x);

(b) mover B de forma que não se cruze e que termine no ponto inicial;

(c) mover C de forma livre.

3º) No modo caneta, contornar os rastros dos pontos

Questão 1) O que é possível perceber analisando os rastros de cada ponto? São curvas? É possível dar as coordenadas de cada ponto do rastro?

Questão 2) Os traços são contínuo? Como classificaria esses traços? É possível definir o Domínio e Imagem de cada traço? É possível determinar uma f(x) para cada traço? Porquê?

Compreendendo a relação entre funções e curvas.

1º) Refazemos o processo de contornar os traços, clique na função a mão livre e mude a cor, e contorne os três traços, faça uma análise do processo.

2º) Olhando para a janela de álgebra procuramos a nossa "f(x)=mãolivre(x)" que desenhamos, é esperado que apenas o rastro do ponto A seja obtido uma função, são capazes de dizer porquê?

OBS: Ainda a ferramenta não seria capaz de desenhar a função obtida do ponto B, e possivelmente o C, mas como o GeoGebra é esperto ele pode ter reconhecido uma cônica, mas olhando para a janela de álgebra mostre que o software não criou uma função e sim uma curva.

3º) Vamos marcar um ponto sobre a função f obtida do rastro do ponto A, perceba que esse ponto pode se movimentar apenas sobre a função, quais são os pontos extremos?

4º) Nas opções, no menu exibir, selecionamos planilha.

5º) Na primeira célula escrevemos o valor horizontal (corresponde ao valor da abscissa x) do ponto mais a esquerda no "f(x)=mãolivre(x)".

6º) Na célula de baixo escrevemos "=a1+1"

7º) Seleciona as duas células e arrasta até obter a abscissa de x mais a direita de f(x).

8º) Na Célula B1 escrevemos "=(a1,f(a1))". No gráfico apareceu o ponto C1.

9º) Selecionamos a célula B1 e arrastamos até corresponder ao número de linhas da coluna A. No gráfico apareceu os pontos Ci (onde i é a quantidade de linhas da coluna A) O que pode ser dito desse processo?

10º) Vamos construir uma reta paralela ao eixo y passando por cada ponto C1, na célula C1 escrevemos "=Reta(C1, EixoY)".

11º) Vamos construir uma reta paralela ao eixo y passando por cada ponto Ci, basta selecionar a célula C1 e arrastar até a linha i. Vamos voltar para os traços 2 e 3, vamos fazer o mesmo processo, construir um ponto em cada traço e reta paralela ao eixo y passando pelo ponto em cada traço. Qual a análise que pode ser feita?

OBS: Não é necessário construir várias retas paralelas, como feito anteriormente, apesar de ser possível, basta substituir, "f(x)" por "traço(x)", e aqui não temos a ideia de pontos extremos, e sim uma análise do domínio quanto a sua limitação.

8.1.5 Situações-Problema envolvendo o movimento

8.1.5.1 ATV.6

Parametrizando a reta

Usando o controle deslizante para representar os coeficientes, construa através da equação geral uma reta, depois parametrize a reta limitada pelos pontos A e B.

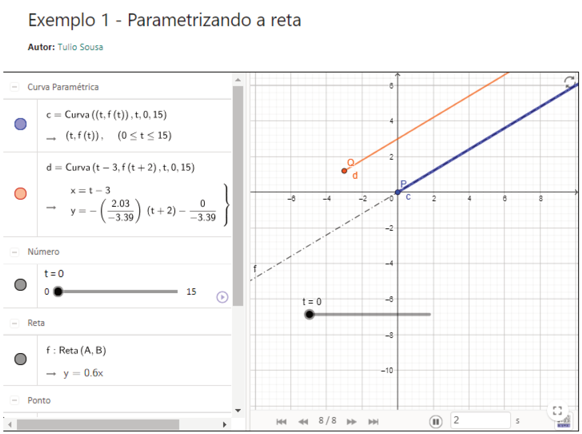


Figura 28 – Applet parametrizando a reta

8.1.5.2 ATV.7

Parametrizando o lançamento da bola

Imaginemos uma bola lançada com uma velocidade inicial, a 2 metros abaixo do solo, seu movimento é descrito pela função $f(x) = -(\frac{x}{3} - 2)^2 + 7$, o eixo y é dado em metros e t representa o tempo após o lançamento. A imagem dessa função está representada no gráfico cartesiano, cujo domínio é uma parte do intervalo dos Reais.

Questões elencadoras

1º) Qual o Domínio dessa função?

2º) Qual a representação implícita dessa função?

3º) O que está mostrando a planilha dinâmica?

4º) Tomando $x = 3(t - 3)$ e substituindo em $f(x)$ o que obtemos?

5º) Encontre 3 novas parametrizações fazendo$x = 3(t + 2)$ e tomando outros dois valores pra x em função do parâmetro t, analise essas diferentes parametrizações e comente cada uma.

6º) Qual a altura e deslocamento horizontal máximo atingido?

7º) Depois de quanto tempo após o lançamento a bola atinge o chão?

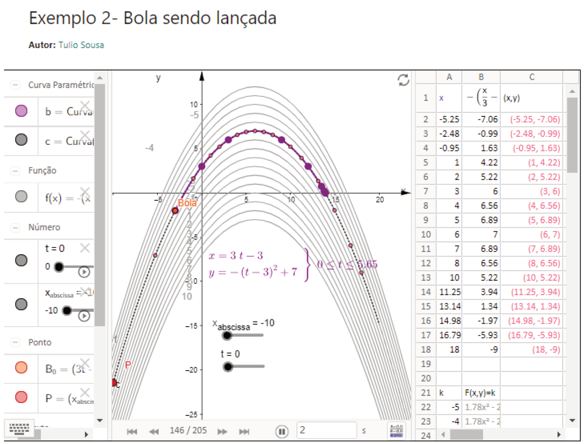


Figura 29 – Applet - parametrizando o lançamento da bola

8.1.5.3 ATV.8

Parametrizando a queda da bicicleta

Uma bicicleta está movendo a 15m/s em uma montanha que fica a 30 metros de altura, após percorrer 10 metros horizontal sem perceber ela caí em um precipício. Qual equação matemática pode descrever o movimento? Quanto tempo de queda, até a bicicleta atingir o chão?

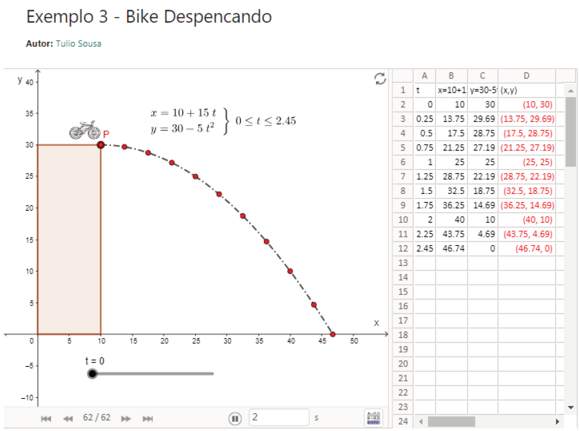


Figura 30 – Applet - parametrizando a queda da bicicleta

8.1.5.4 ATV.9

Parametrizando o caminho do robô

Dados dois pontos A(1,2) e B(6,8), criar parametrizações, ou seja traçar curvas que representa o caminho do robô de A até B.

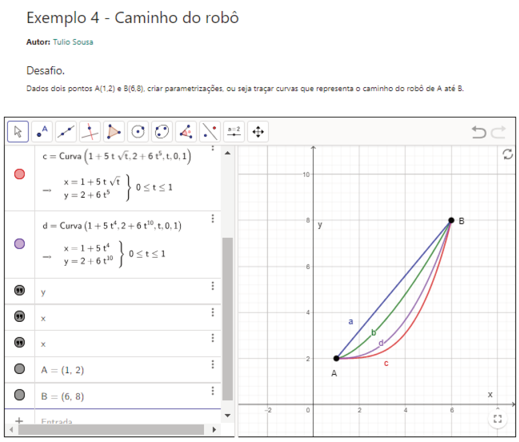


Figura 31 – Applet - parametrizando o caminho do robô

8.2 Experimentação

A fase seguinte constitui-se a experimentação, na qual foi aplicada a sequência concebida anteriormente para as turmas de ensino médio que eram compostas, em sua maioria, por alunos de terceiro ano. Todas as aplicações tiveram duração de 2h30min e desde o início foram observados os contratos didáticos e seus paradoxos e a aparição de possíveis efeitos. Desta forma, é relatada as aplicações:

1º Aplicação:

Foram aplicadas as atividades 1, 2 e 3 aos alunos que mostraram-se motivados com a atividade 1 (apresentação de applets e as possibilidades do GeoGebra), concentrando grande fascínio ao manipular os applets 1 (jogo das cores), 6 e 7(visualização em 3 dimensões).

O applet 2 (funções básicas) trouxe a ideia quanto a linguagem relacionada as formas explicitas das curvas e, com isso, ficou evidente que os alunos apresentavam dificuldades relacionadas ao reconhecimento dos elementos domínio e imagem, aos questionamentos acerca das aplicações das funções no dia-a-dia e em conhecer as funções exponenciais e logarítmicas. Contudo, conseguiam nomear as funções afim e quadrática relacionando-as com suas representações geométricas (reta e parábola).

Os applets 3, 4 e 5 (Cicloide, Folium Descartes, Espiral de Arquimedes) oportunizaram contar um pouco sobre o desenvolvimento das curvas na história da matemática, onde os elementos e propriedades relacionada a estas tiveram papel fundamental na evolução da sociedade. A Cicloide, em especial, foi proposta por Bernoulli como um desafio aos principais intelectuais da época, entre eles estavam Newton e Leibniz que guerrearam pela "paternidade"do cálculo diferencial. O conhecimento dos elementos e propriedades (braquistócrona e tautócrona) eram necessárias para a resolução do desafio proposto por Bernoulli. No âmbito da matemática, a cicloide era considerada a "Helena da geometria", pois a Helena na mitologia grega era uma mulher que, disputada por vários pretendentes, era considerada a mais bela e a precursora da guerra entre Tróia e Esparta.

Durante a realização da atividade 1, os alunos relataram que ao executar a busca dos conceitos pretendidos se depararam com o desenho da cicloide no cabeçalho do site e questionaram se havia alguma relação com o pêndulo. Na ocasião, foi respondido que sim, e sugerido que pesquisassem sobre o relógio de pêndulo de Christiann Huygens.

A Folium permitiu contar um pouco sobre o plano cartesiano de Descartes. Ao relatar como Arquimedes e Apolônio (o grande geômetra) trouxeram significativas contribuições para o estudo das curvas cônicas, os alunos interviram trazendo seus conhecimentos prévios procedentes de filmes que haviam assistidos e julgaram ter relevância com o tema, buscando desta forma a validação do professor.

A atividade 2 (construções dinâmicas das cônicas) seguiu após o applet 7, que mostrava o cone de duas folhas sendo interceptado por um plano, conforme a concepção de Apolônio. Foi proposto aos alunos que usassem as ferramentas do software Geogebra para construir a parábola, a elipse e a hipérbole. Os alunos no processo de construção dinâmica das cônicas se adaptaram naturalmente ao ambiente tecnológico e, de forma autônoma, encontram as ferramentas necessárias para realização da atividade.

As principais dificuldades percebidas referem-se a compreensão de quando os objetos são dependentes ou não, a intersecção entre objetos e seu significado e a relação do controle deslizante como variável da construção. Durante a construção da mediatriz os alunos utilizaram de dois procedimentos, o primeiro, através da ferramenta presente no software que a constrói de forma direta e o segundo, por meio de sua definição, buscando o ponto médio do segmento em questão e construindo a reta perpendicular que passa por este ponto.

Diante dessas experiências é possível afirmar, instintivamente, que os alunos conseguiram executar as construções via desenho geométrico, buscando de forma autônoma os conceitos que não detinham, como por exemplo diretriz, segmento, mediatriz, intersecção e foco. O reforço da visualização possibilitou a validação do processo empírico, um fator importante para a institucionalização.

A fase de institucionalização foi construída em forma de debate em grupo (professor e alunos). Inicialmente, os alunos que não conseguiram realizar a construção completa apontaram suas dificuldades e aproveitando-se dos processos dos alunos que obtiveram êxito foi realizado uma construção em conjunto. Os alunos relataram quais fontes de informações usaram para buscar os termos matemáticos que não compreendiam e descreveram ter usado o método empírico para seguir os passos da construção. Esse processo de tentativa e erro foi importante para os alunos conhecer as ferramentas e descobrir suas funcionalidades. Por fim, foi aplicada a atividade 3 com o intuito de formalizar esses conceitos.

2º Aplicação:

A Atividade 4 foi proposta aos alunos com o intuito de que usassem o controle deslizante para representar os coeficientes das equações gerais das funções afim e quadrática, exponencial e logarítmica. Consequentemente, responderam as questões propostas fazendo uso de pesquisas e da manipulação dos applets, demonstraram entendimento geométrico e algébrico dos elementos de função, citaram quais procedimentos algébricos foram utilizados para encontrar a solução, os pontos de máximo ou mínimos.

Do mesmo modo, conseguiram trazer aplicações práticas e mostraram, no decorrer do processo, compreender de forma significativa a relação entre domínio e imagem da função (essa compreensão foi falha na primeira aplicação). A única ressalva foi quanto as funções exponencial e logarítmica, visto que essas funções eram desconhecidas pelos alunos que, portanto, não conheciam os procedimentos algébricos para encontrar a raiz, as condições de existência e suas assíntotas. Mesmo não conhecendo essas funções, os alunos, por meio do ambiente geométrico, compreenderam a análise gráfica.

Através da atividade 5 foi conceituado curvas planas, onde os alunos eram levados a entender as funções como sendo uma família de curvas especiais. Com isso, foi realizada a classificação das curvas como aberta, fechada e fechada simples. É importante salientar que o professor como mediador faz perguntas intencionadas e através das respostas

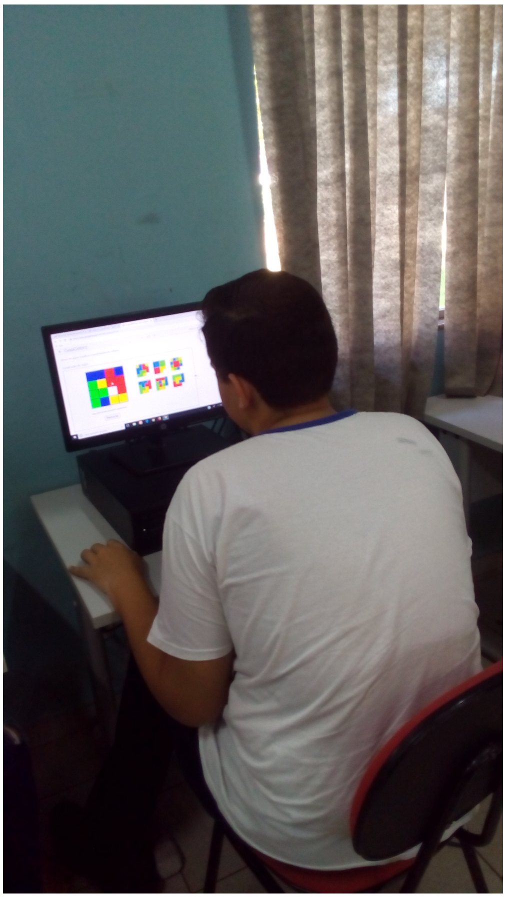


Figura 32 – Experimentação 1º Aplicação

elencadas pelos alunos vão sendo construídos os conceitos. Essa atividade consiste em criar 3 rastros iniciados do ponto A, B e C com certas condições.

O ponto A deve ser movido com velocidade constante e sem mudança na direção horizontal e nem criar linhas verticais. Ao executar esse procedimento, os alunos mostraram dificuldade de leitura e interpretação, destaca-se como exemplo a interpretação da velocidade constante como sendo apenas um movimento reto. Ficou evidente a falta de confiança dos alunos, pois a cada etapa do processo esperavam que o docente apresentasse um feedback. Foi pedido que os alunos fizessem o traço de forma autônoma.

Ao marcar o ponto B evidenciou-se novamente a falta de atenção e compreensão dos alunos que deveriam mover esse ponto de forma livre com as condições de que o traço não se interceptasse em nenhum outro ponto e que terminasse o movimento onde iniciou. Alguns alunos ignoraram a condição e fizeram uma curva aberta, outros moveram o ponto de forma a sobrepor o traço.

No ponto C foram observadas verdadeiras "obras de arte", pois os alunos eram livres pra traçar o movimento com a única condição de que este fosse fluído. Ao término dessa fase observou-se que os alunos buscavam traços que representavam desenhos como casa, animais e super-heróis.

Ao passar para a próxima etapa, os alunos foram orientados a contornar os rastros dos pontos (A, B e C) com a função caneta e, com isso, notou-se que algumas "obras de arte"foram deletadas, pois os alunos consideravam que os desenhos feitos anteriormente eram muito grandes para serem contornados e, por este motivo, refaziam os desenhos menores.

Vale destacar o descontentamento dos alunos com o software, pois ao realizar zoom ou mover o plano cartesiano os rastros desapareciam, assim a maioria teve que refazer a etapa dos rastros, o que os deixaram exaltados exigindo a intervenção do professor, que os acalmou com a leitura de uma observação que alertava que isso ocorreria.

Na oportunidade, o docente destacou a importância de uma leitura atenciosa e significativa. Contudo, os alunos que ficaram aflitos com a situação, justificaram que estavam ansiosos para finalizar os procedimentos dados e reconheciam ter executado as atividades de forma mecânica sem fazer a leitura do enunciado. Reconheceram que esta forma de agir é recorrente na maioria das atividades que realizam e se comprometeram em ser mais atenciosos e cuidadosos ao fazer as atividades futuras.

Após realizarem o contorno dos rastros com a ferramenta caneta os alunos deveriam responder à questão 1, contudo deixaram transparecer a incompreensão de que uma reta é um tipo de curva, pois todos que moveram o ponto A de forma a conseguir uma reta não a consideraram como curva (simplesmente por terem a concepção de que a palavra curva está ligado a coisas tortas). Outro problema refere-se ao sistema de coordenadas, sendo comum a troca das coordenadas abscissas pela ordenadas, ou seja, trocaram y por x.

Na questão 2 tem-se que a ideia de traço contínuo é bem intuitiva e os conceitos de conjuntos (domínio e imagem), mesmo sendo trabalhados na aplicação anterior, não foram assimiladas de forma significativa pelos alunos. A atividade segue com o intuito de relacionar os conceitos gerais de curvas às curvas representadas na forma explicita (as funções) dando significado a cada termos.

Usando a ferramenta do software "função a mão livre"os alunos deveriam contornar os traços dos pontos anteriores obtendo, com isso, uma função saindo do ponto A, já no ponto B não são todos os alunos que conseguiram obter a função, apenas um aluno obteve a elipse (que não é uma função) e foi reconhecida por ele. A maioria dos alunos não obtiveram resultados ao contornar B e C mesmo tentando diversas vezes e, por isso, procuraram o professor para verificar se o software não estava "bugado"(defeito).

Na ocasião, o docente convidou os alunos a pesquisar o conceito de função e, consequentemente, constataram que não havia nenhum problema com o software. Para elucidar a constatação deveriam tomar um ponto sobre as curvas e traçar retas paralelas ao eixo y passando por ele e dizer o que perceberam e quais diferenças e padrões podem ser evidenciados. A maioria dos alunos chegaram à conclusão correta do conceito de função por intermédio desta reta paralela ao eixo y, concluindo que para cada x do domínio existe uma e apenas uma imagem associada a ele no contradomínio.

Assim, os estudantes foram capazes de relacionar a expressão algébrica com os traços desenhados, mostrando compreender a limitação do domínio e os pontos extremos. Para confirmar a assimilação desses conceitos, foi aberta a planilha dinâmica e nela os alunos construíram uma tabela relacionando x (abscissa) com y (ordenada) e o ponto encontrado na função P (x,y). Assim, os estudantes refizeram o mesmo processo para os traços obtidos dos pontos B e C.

Após a atividade passou-se para a fase de institucionalização através de um debate, pelo qual são formalizados os conceitos, retomando as principais dificuldades (já apontadas). Além do mais, é valorizado a linguagem e entendimento correto dos alunos que, o professor vai adequando a linguagem e formalizando as definições e conceitos.

Na atividade 6 os alunos deveriam construir a função afim através da equação geral onde os coeficientes são representado por controle deslizante e são desafiados a parametrizá-la, ou seja, devem representar a reta como sendo o caminho percorrido por um ponto. Um dos alunos optou por tentar fazê-lo usando semirretas e segmentos de reta, mas não conseguiu fazer o ponto se mover, obtendo apenas o caminho na forma geométrica e sem dinamismo.

Já a ideia de limitar o domínio por um ponto inicial e final foi usado por todos que fizeram uso de retas paralelas a y. Um aluno perguntou se havia algum comando que facilitava a limitação do domínio da função e, em resposta, o docente apresentou o comando Curva do GeoGebra, mas sem explicar como funcionava. Após algumas tentativas eles conseguiram parametrizar a reta através de funções paramétricas.

Ao serem questionados como usaram o comando Curvas e o que entenderam dele, os alunos disseram que é uma forma de escrever funções por meio das coordenadas x e y, mas não mostraram compreender o que a parametrização realmente faz, tendo em vista a estrutura do comando $Curva(< Expressao >, < Expressao >, < Variavel >, < Valorinicial >, < ValorFinal >)$. Nota-se, portanto, que na primeira expressão do comando Curva os alunos colocaram x e na segunda expressão $f(x)$, sem fazer uso de uma mudança de variável, obrigando com que o software realizasse uma mudança automática da variável, onde $x = u$ e $y = f(u)$.

Ao refazer o questionamento de como usaram o comando Curva não souberam responder, assim foi proposto que brincassem experimentando modificar as duas expressões mudando os parâmetros, como por exemplo $x = u$ e $f(x) = f(u)$ ou ainda $x = v - 1$ e $f(x) = f(v-1)$. Após modificar as expressões, os alunos deveriam analisar o deslocamento da reta na direção horizontal e vertical provocados por essas mudanças e avaliar o que ocorreu comparado à curva inicial.

Da atividade proposta foram levantadas algumas indagações importantes, dentre as quais listam-se as seguintes: Ao mudar o parâmetro x digamos para $u+2$ e y para $f(u)$, houve uma mudança no caminho inicial? Neste caso o segmento foi deslocado 2 unidades pra direita? Mas se fizerem $x = t - 2$ e $y = f(t-2)$ o caminho é preservado? E agora o segmento foi deslocado 2 unidades para a esquerda? O que ocorre quando se muda apenas o ponto de partida e chegada?

A partir das respostas obtidas das indagações anteriores, o docente conseguiu identificar que os alunos não compreenderam de forma significativa a ideia da parametrização, bem como o porquê da mudança de variável, demonstrando não achar vantajoso empregar a representação paramétrica para funções.

No entanto, aos poucos foram entendendo que ao limitar o domínio da função e representá-la na forma paramétrica ganha um dinamismo, ou seja, a função torna-se um caminho limitado e facilmente pode-se realizar deslocamentos horizontais e verticais sem mudar o trajeto inicial. Ainda ficou evidente que ao usar outro parâmetro, digamos t, relaciona para cada t um único ponto no plano, dando assim a ideia de movimento.

Após esclarecimentos, todos conseguiram limitar a função e mostraram através da experimentação serem hábeis em deslocá-la no plano de forma consciente, percebendo que as reparametrizações podem modificar desde o ponto de partida e chegada ao deslocamento na posição horizontal e vertical.

Na atividade 7 os alunos criam curvas de nível, dada uma função a reescreveram na forma implícita, $F(x, y) = k$, usando a planilha dinâmica foram construindo as curvas para diferentes k, logo perceberam que se tratava de uma família de curvas sendo deslocada. Buscaram o conceito de curvas de nível e trouxeram situações reais onde elas aparecem, como na agricultura.

Para apresentar a interpretação geométrica das curvas de nível foi usado o GeoGebra 3D, que possibilitou a construção da superfície $z = f(x, y)$. Os alunos tiveram dificuldade em relacionar a superfície com a curva de nível correspondente, por meio dos planos $z = k$ onde k era representado pelo controle deslizante. Esses planos mostraram-se um bom reforço visual, permitindo aos alunos identificar as curvas de nível em cada k e compreendendo-as como sendo a projeção no plano xy da superfície z cortada na altura k. Os alunos foram desafiados a construir outras funções e relacioná-las as curvas de nível vindas do corte da superfície $z = f(x, y)$.

Alguns testaram, inclusive, os polinômios de grau elevado e outros pesquisaram curvas já na forma implícita, como a circunferência e faziam a superfície relacionada a ela, mostraram grande autonomia no decorrer da atividade e a cada nova superfície analisavam o corte na altura k relacionada a curva de nível.

3º Aplicação:

Figura 33 – Experimentação 2º aplicação

Na atividade 7, os alunos foram desafiados a parametrizar a curva explícita que representava o lançamento de uma bola. Ao realizar o desafio, alguns apresentaram dificuldades durante a limitação do caminho do movimento e para superá-las decidiram abrir a atividade 6 com a finalidade de relembrar o conceito de parametrização e verificar quais comandos deveriam ser usados, tais como: $Curva(< Expressao >, < Expressao >, < Variavel >, < ValorInicial >, < Valorfinal >)$ que eram diferentes dos comandos usados na parametrização da reta e, por este motivo, tiveram que mudar a variável $x = t$ e $y = f(t)$. Ao realizar este procedimento, um grupo de alunos se dividiu visto que alguns tomaram o valor inicial -3 e outros o 0.

Notou-se que todos os estudantes tomaram como valor final a raiz que estava à direita da $f(x)$ e até alcançar este resultado, realizaram diversos debates que os fizeram chegar à conclusão de que o parâmetro t ao representar tempo deveria começar no 0. Além disso, certa parcela dos estudantes utilizou como argumento a função algébrica $x = t$ de modo que x começaria em -3.

Dessa forma, constatou-se que, ao agirem desta maneira, os alunos procuravam o docente com menos frequência a fim de obter feedbacks sobre os procedimentos realizados, pois haviam desenvolvido habilidade necessária à resolução do problema de forma autônoma e, através da tentativa e erro, reconheceram alguns padrões que foram relacionados a parametrização com o intervalo do domínio e a variável $x = t$. Obtiveram assim, o valor inicial -3 para a curva.

Ao ser inquirido sobre o fato do tempo ser negativo, o docente sugeriu que os alunos pensassem em novas parametrizações e, para isso, solicitou a construção de uma animação cujo ponto na parametrização simularia uma bola variando pelo controle deslizante, bem como que respondessem as questões elencadas. Averiguou-se que os alunos tinham dificuldades em compreender a mudança do domínio para cada nova parametrização, visto que se x pertence ao intervalo $[-3, 13.1]$ ao tomar $x = t - 3$ deve-se isolar o t e tomando $x = -3$ tem-se $t = 0$ e $x = 13.1$ tem-se $t = 16.1$ e assim t pertence ao intervalo $[0, 16.1]$. Essa dinâmica aos poucos fez fazendo sentido para os alunos.

A atividade 8 também consistiu em um desafio que descrevia o problema de uma bicicleta despencando de um morro em uma determinada velocidade inicial. Frente a situação problema, os alunos deveriam encontrar a equação matemática que descrevia o movimento e, de igual modo, deveriam informar o tempo de queda e a distância horizontal percorrida no fim da queda. Os alunos iniciaram a resolução do desafio a partir do comando curva, mas não sabiam quais expressões deveriam usar e, por isso, resolveram inicialmente apenas anotar as informações que possuíam referente ao ponto e a velocidade inicial.

Ao observar que os estudantes já haviam dedicado tempo considerável a compreensão do problema e como resolvê-lo sem êxito, o professor indagou-os sobre como acontecia o movimento e sugeriu que, para resolver o desafio, deveriam considerar que tem-se na direção horizontal um movimento retilíneo uniforme e na direção vertical um movimento retilíneo uniformemente variado, ou seja, tem-se a aceleração da gravidade sendo aplicada. Ao receber tal orientação, os alunos logo manifestaram que sabiam resolver o problema e, após a aplicação da orientação, de fato conseguiram escrever as equações paramétricas, porém manifestaram dúvidas em relação a definição do intervalo do domínio. Observa-se que todos perceberam que a variável das equações horárias do movimento era t e que, ao discutirem sobre a questão, conseguiram calcular para qual t tem-se $y = 0$, o que evidenciou o entendimento do que representava y e a obtenção dos valores de t que representava o início e fim do movimento.

Para validar o processo de aprendizagem, o docente solicitou que os alunos usassem a planilha dinâmica para construir uma tabela relacionado t aos valores de $x(t)y(t)$ e o ponto $P(x(t), y(t))$, que representa a posição da bicicleta no instante igual à t. O docente apurou que a aprendizagem foi satisfatória, pois todos os alunos conseguiram realizar os procedimentos com facilidade. Contudo, vale ressaltar que um dos alunos construiu a tabela usando retas paralelas a x e y passando por um ponto P que se moveu sobre a curva, liberando os rastros das retas e dividindo o movimento em instantes de tempo igualmente espaçados foi movendo o ponto P, mudando a cor do rastro em cada intervalo de tempo, mostrando a diferença do MRU para o $MRUV$. Este aluno, ao término da atividade, apresentou ao docente e aos demais colegas da turma os procedimentos usados para alcançar os resultados por ele obtidos.

8.2.1 Discussão e Resultados

As atividades desenvolvidas na experimentação pode ser consultada no link: https://www.geogebra.org/group/stream/id/Vxn6HYJxZ lembrando que é necessário ter uma conta Geogebra para acessar.

No decorrer da experimentação foram feitas considerações que serviram para análise *a posteriori*, assim temos:

Atividade 1: Os alunos demonstram grandes interesses e motivação ao trabalhar com software geogebra, conseguindo usar suas ferramentas de forma intuitiva, as principais dificuldades ao trabalhar a forma explicita foram sanadas de forma autônoma buscando por fontes onlines esclarecer dúvidas quanto à conteúdos e da própria linguagem matemática.

O mais interessante foi verificar como os alunos percebem o desenvolvimento da matemática como sendo algo para "seres de outro planeta", colocando a disciplina matemática como algo inalcançável, mas ao aproxima-los da história com fatos que levaram o desenvolvimento de uma ideia, como no caso da história da cicloide e seu papel na guerra do cálculo, ou ainda as curiosidades e belezas contido em comparações, como é feita com a cicloide que é chamada por alguns de Helena em referência a bela mulher pivô da guerra de Tróia, trazendo encantamento e despertando o prazer pelo aprender. A ideia é humanizar o ensino da matemática trazer para esse plano onde os alunos se identificam e reconheçam esses grandes personagens da história como construtores dessas ideias, e que apesar de ter existido uma grande rivalidade entre eles, vide Apolônio e Arquimedes, ou ainda Leibniz e Newton, uma reflexão foi oportunizada nesse momento. É evidente que diante da exposição dos fatos, os alunos sempre tomam um lado, como se torcessem para um time A e B, e aqui fica uma tarefa para casa: estudar mais sobre estes personagens e conhecê-los um pouco melhor e não julgar de forma maniqueísta e polarizada, mas sim, compreender que ambos são grandes personagens com contribuições fenomenais para a humanidade.

De fato, os alunos pesquisaram sobre os temas abordados e, posteriormente, contaram para o professor o que encontraram. Um dos alunos trouxe, inclusive, para a próxima aplicação o Pêndulo de Chistiann Huygens.

Atividade 2: Essa atividade foi trabalhada construções geométricas das cônicas usando diretrizes, segmento de reta, mediatriz, foco, intersecção etc., por meio do software Geogebra e aprofundando as habilidades no uso de suas ferramentas, construindo vocabulário matemático. A construção dinâmica das cônicas foi feita na forma procedimental e deixando os alunos executarem da forma que lhe convinha. Aqui foram desenvolvendo de forma empírica e surgiram várias formas para executar os passos, uns de forma direta outro usando as definições, esse movimento foi importante para institucionalização, pois cada aluno a discorrer sobre como fizeram, clarearam alguns colegas com dificuldades.

Atividade 3: Essa atividade evidencia como é natural o uso de software e ambiente de redes para essa geração de alunos, lembro o que o escritor e intelectual italiano Umberto Eco chegou a denominar a época que vivemos como “Idade Mídia”, uma alusão a quantidade de informação que temos acesso, ele ainda continua dizendo que o "excesso de luz" pode também nos deixar longe da compreensão de tudo que chega até nós, ele faz esse contraponto a idade medieval onde a informação era pra poucos.

Assim, este trabalho visa uma produção de mídias em âmbitos escolares, pautado em uma reflexão crítica e uma discussão quanto a fontes de pesquisa e a responsabilidade em divulgar as informações e os diversos pontos de vista dentro de um processo educativo orientado para a autonomia.

Atividade 4: É feito a transposição do estático para o dinâmico, usando o controle deslizante para representar os coeficientes de funções básicas, viabilizando a visão geométrica relacionando com a algébrica percebendo a mudança dos coeficientes com sua forma (modificando seus pontos de raízes, máximos, mínimos, etc.).

Atividade 5: Apresentado as curvas planas usando como base os conhecimentos de funções, nesse sentido as funções são uma família bem especial de curvas planas, para ampliar o conceito são apresentadas outras famílias de curvas, as abertas, fechadas e fechadas simples. Nessa atividade onde o professor deve ir mediando os passos, foi observado que os alunos possuem extrema dificuldades em interpretação, tanto de termos matemáticos, mas principalmente no que tange à Língua Portuguesa. Essa dificuldade, ao ser anunciada com colegas de profissão, foi uma das reclamações mais comuns relatadas por todos eles. Ao usar a planilha dinâmica relacionando as variáveis x, y com o respectivo ponto geométrico P(x,y), foi uma excelente ferramenta para debate e institucionalização.

Atividade 6: A atividade problematizada, os alunos usando as ferramentas já trabalhadas devem parametrizar a reta, e a dificuldade em iniciar a atividade de forma autônoma foi um grande problema, os alunos carecem de uma "confiança"para tentar, e argumentam ter medo do erro, sendo esse o grande empecilho para buscar realizar as atividades, o professor mediador com cuidado para não cometer os efeitos Topázio (reducionismo dos conteúdos) e Jourdain (confundir ingenuidade com sabedoria). O feeling não é algo simples, mas no decorrer do processo pode dar o professor sinais de que está no caminho de uma aprendizagem significativa, foi passado aos alunos uma dica, e através desta foram transpondo a função explicita da reta em uma parametrização. Os alunos trouxeram à tona o procedimento de usar retas paralelas aos eixos para verificar o conjunto domínio e imagem justificado pela técnica de projeção nos eixos, o objetivo do uso dessa técnica foi para encontrar os parâmetros que devem ser usados no controle deslizante, mostrando um aprofundamento e ainda foram surgindo indagações do tipo: Onde inicia o movimento? E onde termina? Tem como mudar o caminho? É vantajoso esse caminho? As respostas para essas perguntas estão diretamente ligadas aos conceitos de parametrização e mudança de variáveis.

Atividade 7: Chegamos ao ponto de diferenciar as formas de representar curvas planas (explícita, implícita e paramétrica), dessas formas é apresentado as formas implícitas usando uma situação problema para elucidar suas propriedades, os alunos fizeram a construção de uma superfície no Geogebra3D e através dessa foi introduzido o conceito de curvas de níveis, onde para z=F(x,y) como sendo um corte na superfície na forma implícita fixando para cada z=k, a planilha dinâmica foi usada para ver esse conjunto de curvas, e ponto importante pra debate entre essas diversas formas e institucionalização.

A forma explícita já amplamente estudada no ensino médio os alunos mostram procedimentos técnicos em detrimento do entendimento geométrico, e o uso da forma paramétrica dando movimento ao traçado dão sentido e os alunos demonstraram uma compreensão menos tecnicista, usando a forma explícita parametrizam usando o parâmetro tempo, e discutem com colegas e professores os elementos desse movimento, surgindo questões como o que significa o tempo negativo? Quais técnicas algébricas para mudar o domínio da função? O que acontece com a tomada de novas parametrizações?

Nesse ponto, os alunos já demonstram desenvoltura, tendo em mente o pouco tempo com o software pra buscar ferramentas e tentar procedimentos e ferramentas novas sem medo do erro.

Atividade 8: Os alunos devem relacionar o problema apresentado com os procedimentos de modelagem do movimento de queda livre. Os alunos usam o comando curva com bastante facilidade, determinando o domínio e imagem. Usam o conceito da física de MRU e planilha dinâmica para validar os conceitos.

Atividade 9 Esse exercício mostrou como os alunos agregaram em seu repertório cognitivo ferramentas de modelação, e compreenderam o uso das ferramentas básicas do software geogebra, esse exercício os aluno parametrizam e reparametrizam tendo apenas dois pontos, instintivamente pensaram apenas na reta, mas com o tempo foram brincando com as possibilidades de parâmetros, e logo tiveram a validação quanto ao traço percorrido, bem como o tempo para ir de A até o pontoB.

Confrontando as hipóteses advindas da análise a priori com a análise *a posteriori* obtidos da experimentação, podemos concluir que:

Os Applets podem tornar o conteúdo de curvas planas dinâmico e interativo, em que os alunos manipulam e tiram suas próprias conclusões. Daí a importância do ambiente de geometria dinâmica na significação ou compreensão dos elementos de função básica, o deslocamento das construções geométricas não altera suas relações geométricas, podendo experimentar por meio de uma intuição com verificação empírica as variações de cada um dos elementos e através dessa experimentação lógica, não necessariamente rigorosa, podem levantar hipóteses sobre o que ocorre.

Os Applets criados no software GeoGebra facilitam a conjectura de propriedades, relações entre as representações de curvas planas. Com a familiarização e uso constante dessas práticas pedagógicas, as dificuldades tende a diminuir. E o GeoGebra ganha esse papel de mediador na construção do conhecimento matemático dos alunos permitindo a validação ou desqualificação de estratégias de resolução de um problema.

O software GeoGebra tem suas limitações nas construções de certos Applets, as quais podendo levar a conclusões equivocadas, como por exemplo, ao usar a ferramenta desenho a mão livre e o de reconhecimento de função (atividade 3), mas com o auxilio do professor pode se esclarecer esses erros.

Passamos pras perguntas norteadoras:

- De que forma os ambientes tecnológicos contribuem para o debate/comunicação e divulgação da história da matemática e dos conteúdos?

Nesse trabalho pedagógico, os ambientes tecnológicos se fizeram essenciais para envolver os educandos na construção ativa do conhecimento e promover condições mais adequadas à aprendizagem, pois, através de diálogo e debates promovidos pelo ambiente, as pesquisas na internet, a relação do saber produzido historicamente às circunstâncias vividas, em sociedade, mostrando a importância de saber o conteúdo da disciplina. Com isso, houve um ganho de análise e ampliação na autonomia, possibilitando atitudes menos dependentes de outros, pois, desenvolveu a capacidade de visualizar para além do explícito.

Considerando o exposto, há alguns desafios e contradições no campo educacional, que foram observados durante a experimentação, estrutura escolar com laboratórios precários e falta de internet de qualidade, continuidade de pedagogias diferenciadas em outras disciplinas.

Ao conversar com os professores que trabalham nas escolas em que foram aplicados a experimentação eles apontaram não ter conhecimento e pedem mais formação continuada voltada para desenvolver um trabalho usando tecnologia e mais tempo no planejamento das aulas, a fim de permitir uma excelente organização de ferramentas digitais para as aulas. Houve ainda, outros professores que se consideram ultrapassados para ambientes onlines, preferindo trabalhar com métodos tradicionais, ignorando assim as modificações sociais ocorridas, ao longo do tempo, as quais interferem drasticamente as relações professor-aluno.

Por parte dos alunos, naturalmente, há os que se esforçam para aprender e outros estão voltados para outros interesses, e talvez esse seja o grande papel do professor nesse processo: saber escolher dentro de uma turma heterogênea, temas que atraiam aos valores educacionais.

- Qual a importância do ambiente de geometria dinâmica na compreensão ou significação dos elementos das funções básicas?

O trabalho foi voltado em particular os pensamentos de natureza óptica vindas das construções em movimento. As construções geométricas serviram de base para as relações algébricas, dando início ao processo, isto é, as aprendizagens envolvendo os conceitos de função são ampliadas para o conceito de curvas planas. Usando da intuição e métodos empíricos sem um rigor inicial, vamos agregando linguagens e aportes teóricos levando por fim a institucionalização.

Com a familiarização dessas práticas pedagógicas e com o decorrer do tempo, é claro que os alunos se tornam cada vez mais aptos e agregam novos saberes e ferramenta. Para isso, muito contribuiu o uso do GeoGebra como um elemento mediador na construção do conhecimento matemático dos alunos.

No ensino de geometria, a tecnologia informática é cada vez mais utilizada, especialmente os ambientes de geometria dinâmica (AGD), os quais permitem, por intermédio do arrastamento e da manipulação direta, que os estudantes possam conjecturar acerca das propriedades dos objetos matemáticos representados e, por exemplo, desqualificar construções errôneas. Permitindo aos alunos um controle do que realiza, que ao se deparar com uma situação problema, têm ferramentas e o meio para validar suas estratégias.

- Como o uso de softwares de geometria dinâmica facilita a compreensão do conceito de curvas, suas classificações e diversas representações?

Como discutimos amplamente no capítulo 4, há vantagens que possuem os ambientes de geometria dinâmica, mas ressaltamos a importância das funções de arrastamento e manipulação direita, permitindo que os alunos construam relações entre as dimensões geométricas e argumentativos. Essa dinâmica não pode ser encontrada em outros ambientes não dinâmicos. Ainda podemos juntar a essas outras potencialidades do software que são a variedade de possibilidades de exploração, construções geométricas precisas e uma infinidade de estratégias de exploração.

Assim, no processo de construção dos conceitos de curva plana, possibilitamos a construção visualização e comparação nas três formas de representa-las (explicita, implícita e paramétrica) e associar a uma situação. Nesse processo uma ferramenta denominada Protocolo de Construção, disponível no GeoGebra, permite que os alunos acompanhem passo-a-passo e verifiquem suas construções e as analisem podendo modificar em qualquer momento o que considerar necessário. E dentro desse processo, outra grande ferramenta é a planilha dinâmica, usada para formalizar e institucionalizar o processo das situações a-didática, fazendo uma relação direta entre o campo geométrico e algébrico.

Ainda podemos dizer que os softwares educativos fazem com que a Geometria se torne mais fácil e prazerosa.

8.3 Sequência Graduação

Objetivo Gerais:As próximas etapas da sequência didática serão direcionadas aos estudantes de graduação dos cursos na área de exatas, que tenham em sua grade curricular disciplinas como cálculo diferencial integral e geometria analítica. Tendo por objetivo relacionar o conceito de curvas paramétricas apresentados até aqui com a ideia de vetor, parametrização (reparametrização) e curvatura.

8.3.1 Introdução à vetores.

- Atividade 10 https://ggbm.at/DvVEPQdw: O objetivo dessa atividade é conceituar os vetores: posição, deslocamento, velocidade e aceleração.

Fase Preliminar: Essa fase é constituída de uma pesquisa envolvendo números complexos e números quatérnios, e como se relacionam com a rotação de figuras bidimensionais e tridimensionais e como os seus estudos durante a história foram importantes para iniciar as primeiras ideias envolvendo vetores.

Análise a *priori*: Espera-se que os alunos consigam trazer os conhecimentos adquiridos na pesquisa analisados na fase preliminar e sejam capazes de representar os vetores posição deslocamento e velocidade na situação já apresentada na atividade 7 (Lançamento de uma bola).

8.3.2 Parametrizações e reparametrizações

O objetivo é discutir os efeitos no traço de uma curva plana parametrizada, fomentando de forma geométrica que a cada nova parametrização tomada o que temos é uma reinterpretação cinemática dessa curva.

Discutir em especial a parametrização pelo comprimento do arco, bem como as formas vetoriais de curvas paramétricas, aprofundando os conceitos de vetor posição vetor velocidade, usando a derivada e a integral.

9 Considerações Finais

Esse trabalho propõe reflexões didáticas sobre o uso da tecnologia na educação matemática, via ambiente online, sendo um meio propício para executar as construções dinâmica, estabelecendo a comunicação entre professores, alunos e saberes, criando uma dimensão de auto-avaliação.

Voltamos nossos esforços para a busca e análise dos conceitos teóricos e transpô-los à representação da geometria dinâmica do software Geogebra. Para isso, organizamos as sequências didáticas propostas, concebidas à luz da teoria das situações didáticas, considerando que sua reprodução total talvez seja enviesada por efeitos naturais, mas acreditamos na possibilidade de caminhos que levem mais significação aos saberes matemáticos.

Nas pesquisas que resultaram na parte I e II que tratam das referências teóricas e metodológicas foram de extrema importância e subsidiaram a concepção da situação didática, em especial destaco os elementos históricos que oportunizam uma contextualização do desenvolvimento dos conceitos como parte de uma evolução social, com os típicos relacionamentos humanos com um problema aqui e ali, coisas naturais, mas para os alunos essa aproximação com os personagens encurtaram o seu vínculo com o saber matemático.

Foi apresentada uma sequência didática diferente do método clássico centrado em algoritmos pré-determinados, onde cada saber (conteúdo) tem suas especificidades e parece estar dissociados de outros saberes.

As definições e reprodução de algoritmos ganham papel secundário, e a prática voltado ao entendimento das motivações dos erros torna-se o objeto. Essa prática é o meio (milieu) onde se constroem os conceitos. Na relação entre os alunos que vão colocando seus problemas e o meio (antagônico) que os desafia para que através da interação encontre a solução.

O ensino clássico tem em seu cerne que a construção do conhecimento está ligada apenas ao jogo de conhecimentos certos, mas essa concepção pode levar a equívocos, tendo em vista que ao adaptar as condições daquele meio restringem-se as relações que vão acontecer no futuro e essas adaptações naturalmente se tornam obstáculos para novas adaptações. Existe uma concepção no imaginário de que a construção do conhecimento é ideal sem erro, um saber definitivo, que, para muitos, é uma verdadeira fixação epistemológica.

Por outro lado, nesta pesquisa, o erro é visto como parte inerente do processo, todavia salienta-se que as situações propostas não tem por objetivo provocar erro. Antes, ele é entendido como normal e se manifesta quando é exigida uma tomada de decisão, e uma tomada de decisão errônea pode ser assertiva, se entendida parte da construção do conhecimento.

Nesse sentido, o papel da situação didática apresentada é permitir provações ou efetivações que farão desaparecer as decisões erradas ou duvidosas. Ao final do processo, uma decisão só será considerada errônea se seus caminhos de solução se esgotarem.

Importante destacar o papel do professor que elege os assuntos, e julga uma ideia como errada. Em outras palavras, se promove no debate com os alunos, uma triagem e não considera o erro, descartando-o por simplesmente não progredir na discussão. Esta atitude transforma o erro em um obstáculo epistemológico, pois um erro pode ser verdade para o aluno dentro do seu aparato cognitivo.

A dinâmica social do século XXI é marcada pelo desenvolvimento das ferramentas tecnológicas, e principalmente o desenvolvimento da internet está modificando as relações de sala de aula, o uso de celulares nos propicia um contato instantâneo, não importando as distâncias e locais em que se encontram os interlocutores, fazendo parte da rotina da maioria dos alunos, esse trabalho fornece uma oportunidade de aprendizagem a ser incorporar a essa rotina, que vai além dos conteúdos aqui pretendidos, e agrega a uma cultura de aprendizagem colaborativa online.

As reflexões sobre o uso da tecnologia na educação matemática é cada vez mais necessária, objetivamos nesse trabalho explorar o potencial das novas tecnologias disponíveis ao aprendizado de matemática, e escolhemos o ambiente do GeoGebra. Com seu uso, buscamos em específico, por meio de aplicação de uma sequência didática, analisar os conceitos de funções básicas no Ensino Médio (E.M.), construir os conceitos envolvendo curvas planas no software dinâmico, explorar as características e elementos das curvas planas, em especial as representações paramétricas através de software educacional, dando dinamismo e significado, propiciar um ambiente digital que facilite a comunicação entre os sujeitos envolvidos no processo de aquisição dos saberes matemáticos, despertar o interesse pela história da matemática e compreender a sua importância como uma construção humana.

Os objetivos propostos são considerados alcançados, tendo em vista o processo de experimentação, onde os alunos analisaram os conceitos de funções básicas dando dinamismo ao animar os coeficientes e no mesmo instante ter a representação geométrica. Partindo dos conhecimentos prévios de funções, os alunos, ampliaram para definição de curvas planas explorando suas características e elementos, em especial as representações paramétricas.

Ainda pode-se dizer que os alunos desenvolveu uma linguagem geométrica baseada em pontos, retas segmentos, relações entre posições de retas e outros elementos. Apuraram a habilidade de observar diversos objetos ou situações do quotidiano onde a geometria se faz presente, entender que tais objetos estão em constante movimento, como a roda da bicicleta, objetos em queda livre, o movimento de um robô, o lançamento de uma bola e outros e que as equações paramétricas são usadas pra representá-los, e por meio da história perceber que a observação é a primeira atitude para desperta uma atenção e um olhar mais focado para identificar características do movimento e como a partir daí chegamos as conceituações e o fazer ciência. Organizamos um ambiente online que possibilite os alunos comunicar e divulgar a ciência.

Dessa maneira, entendemos que são diversas as possibilidades que permitem o professor abordar temas importantes da geometria. A sequência didática aqui proposta é apenas uma ideia, que pode ser ampliada e modificada pelos próprios alunos, dentro dos seus interesses.

Referências

ALBUQUERQUE, C. M. M. S. *Alguns Problemas Geométricos de Papo de Alexandria*. 10-16 p. Dissertação (Mestrado em Matemática para Professores) — Faculdade de Ciências Universidade do Porto, Porto, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 7, 48, 49 e 50.

ALKIMIM, E.; PAIVA, M. A. V. A. transposição didática e o conceito de função. Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica, Vitória- ES, v. 2, n. 02, p. 39–51, dez. 2012. Citado na página 14.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique, recherches. Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble France, v. 9, n. 31, 1988. Citado na página 60.

ARTIGUE, M., e. Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá. Colômbia, n. 1, p. 33–59, jul. 1995. Citado 4 vezes nas páginas 12, 60, 61 e 62.

BARDI, J. S. *A GUERRA DO CÁLCULO*. Rio de Janeiro- RJ: Editora Record, 2016. ISBN 978-85-01-07680-9. Citado na página 30.

BICUDO, I. *Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo*. São Paulo: Editora UNESP, 2009. ISBN 978-85-7139-935-8. Citado na página 47.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática : sala de aula e internet em movimento*. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática). ISBN 978-85-8217-499-9. Citado 5 vezes nas páginas 7, 11, 52, 53 e 54.

BOYER, C. *História da Matemática Tradução: Elza I. Gomide*. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 16, 28 e 46.

BOYER, C. B. Newton as an originator of polar coordinates. *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, v. 56, n. 2, p. 73–78, 1949. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2306162>. Citado na página 44.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino; Tradução Camila Bogéa*. São Paulo: Ática, 2008. ISBN 978-85-08-11966-0. Citado 3 vezes nas páginas 11, 57 e 59.

CARVALHO, A. Doutorado em Ciências Matemáticas, *A Teoria Das Tangentes Antes Da Invenção Do Cálculo Diferencial*. Coimbra: [s.n.], 1919. Disponível em: <https://www.fc.up.pt/fa/index.php?p=nav&f=books.0048.W_0048_000001>. Acesso em: 22 abr. 2018. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

COOLIDGE, J. L. *THE ORIGIN OF POLAR COORDINATES*. 1950. An International Congress of Mathematicians. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Coolidge_Polars.html>. Acesso em: 31 dez. 2017. Citado na página 44.

COSTA, A. C. *Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função.* 92 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004. Citado na página 10.

DIAS, V. G. *Quadratura: da antiguidade à atualidade.* 49 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

EVES, H. *Introdução a história da matemática.* 3. ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

LOPES, J. F. *Cônicas e aplicações.* 184 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. Citado na página 47.

MAGARINUS, R. *Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem.* 99 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013. Citado na página 10.

ROSSINI, R. *Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias.* 383 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Citado na página 14.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar.* Porto Alegre: Artmed, 1998. 53-87 p. ISBN 978-85-84-29018-5. Citado na página 56.

ZAZUETA, R. Q. *La invención de Fermat de la geometría analítica.* 2001. 43-58 p. Miscelánea Matemática. Disponível em: <http://miscelaneamatematica.org/Misc34/quintero.pdf>. Acesso em: 23 abr. 2018. Citado na página 29.

ZUFFI, E.M., e. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 9/10, p. 10–16, abr. 2001. Citado na página 16.