

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA

E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Órbitas Periódicas em
Sistemas Mecânicos**

Luci Any Francisco Roberto

Doutorado em Matemática

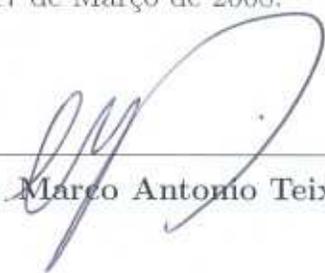
Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Campinas - Março de 2008

Órbitas Periódicas em Sistemas Mecânicos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luci Any Francisco Roberto** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 17 de Março de 2008.



Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Prof. Dr. Fábio Armando Tal
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Roberto, Luci Any Francisco

R54o Órbitas periódicas em sistemas mecânicos / Luci Any Francisco

Roberto -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2008.

Orientador : Marco Antonio Teixeira

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Órbitas periódicas. 2. Sistemas hamiltonianos. 3. Formas normais (Matemática). 4. Campos vetoriais. I. Teixeira, Marco Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Periodic orbits in dynamical systems.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Periodic orbits. 2. Hamiltonian systems. 3. Normal forms (Mathematics). 4. Vector fields.

Área de concentração: Topologia e Geometria

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora:

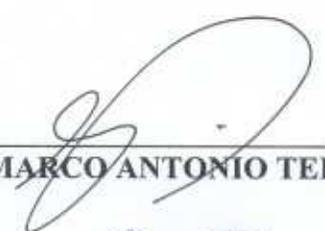
Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi (IBILCE-UNESP)
Prof. Dr. Fábio Armando Tal (IME-USP)
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia (UFG)
Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 17/03/2008

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 17 de março de 2008 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof(a). Dr(a). CLAUDIO AGUINALDO BUZZI



Prof(a). Dr(a). FÁBIO ARMANDO TAL



Prof(a). Dr(a). RONALDO ALVES GARCIA



Prof(a). Dr(a). ALBERTO VAZQUEZ SAA

*Ao meu Pai Di-
rando, por ensinar-me
a aprender sempre, à
minha mãe Helena,
pelo exemplo de de-
dicação, e à minha
irmã Ligia pelo amor e
carinho.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por minha existência pois, através dela, pude realizar este trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira pelos ensinamentos e fundamental orientação no desenvolvimento deste trabalho. Obrigada pela confiança transmitida e principalmente, por acreditar em mim!

Aos professores Dr. Cláudio Buzzi e Dr. Jaume Llibre pela dedicação, orientação e paciência.

Aos meus Pais pelo grande apoio, compreensão, por torcerem por mim e mais do que tudo, pelo infinito amor, quero compartilhar com vocês minha extrema alegria.

À minha querida irmã, Ligia e minha sobrinha Ana Luiza por estarem sempre me apoiando, torcendo por mim.

A todos os amigos da Espanha, em especial Judit, Maica, Maria e Noèlia pelo carinho e companherismo durante e depois do meu estágio em Barcelona.

Aos meus amigos da UNICAMP, em especial Ana Cristina, Cristiane, Daniela, Du Marafon, Fábio, Hérica, Igor, Kaline, Lu Elias, Mariana, Maurício, Olivâine, Ricardo por tudo que eles me proporcionaram com suas atenções, amizades e carinhos. Valeu pessoal!!!

A todos os professores e funcionários do Instituto Matemática, Estatística e Computação Científica pela gentileza e atenção diariamente prestados.

À Capes e à Unicamp pelas bolsas de estudo concedidas.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

Resumo

Neste trabalho estudamos sistemas dinâmicos possuindo estruturas Hamiltonianas e reversíveis (“time-reversible”). O conceito de reversibilidade está associado a uma involução. Inicialmente discutimos a dinâmica de campos vetoriais Hamiltonianos com 2 e 3 graus de liberdade em torno de um ponto de equilíbrio elíptico na presença de involuções que preservam a estrutura simplética. Os principais resultados discutem a existência de famílias a 1-parâmetro de soluções periódicas terminando em um ponto de equilíbrio. As ferramentas utilizadas foram formas normais de Belitskii e Birkhoff e Redução de Liapunov-Schmidt. Em seguida consideramos um caso do problema de 3-corpos restrito em coordenadas de rotação. Neste caso as primárias estão movendo em uma órbita elíptica de colisão. Através do Método da Continuação de Poincaré caracterizamos as órbitas periódicas circulares e as simétricas elípticas do problema de Kepler que podem ser continuadas a órbitas pseudo periódicas de tal problema.

Abstract

In this work we study dynamical systems possessing Hamiltonian and time-reversible structures. The reversibility concept is defined in terms of an involution. Initially we discuss the dynamics of Hamiltonian vector fields with 2 and 3 degrees of freedom around an elliptic equilibrium in the presence of an involution which preserves the symplectic structure. The main results discuss the existence of one-parameter families of reversible periodic solutions terminating at the equilibrium. The main techniques that are used in the proofs are Belitskii and Birkhoff normal forms and the Liapunov-Schmidt Reduction. Next we consider a case of the 3-body restricted problem in rotating coordinates. In this case the two primaries are moving in an elliptic collision orbit. By the continuation method of Poincaré we characterize that the periodic circular orbits and the symmetric periodic elliptic orbits from the Kepler problem which can be prolonged to pseudo periodic orbits of the planar restricted 3-body problem in rotating coordinates with the two primaries moving in an elliptic collision orbit.

Sumário

Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Espaço linear simplético	1
1.2 Campos vetoriais Hamiltonianos	3
1.3 Campos vetoriais reversíveis	4
1.4 Forma normal para involuções em \mathbb{R}^6	7
1.5 Parte linear dos campos vetoriais R_j -reversíveis no \mathbb{R}^6	11
1.5.1 Caso 6 : 2	12
1.5.2 Caso 6 : 4	14
1.6 Método da Continuação de Poincaré	16
1.7 Problema de n -Corpos	18
1.8 O problema de 2-corpos	22
1.8.1 Soluções do Problema de Kepler	24
1.8.2 Órbitas elípticas do problema de Kepler	28
1.8.3 Órbitas Baricêntricas	31
2 Formas Normais	33
2.1 Forma Normal de Belitskii	33
2.1.1 Caso 6 : 2	36
2.1.2 Caso 6 : 4	39

2.2	Forma Normal de Birkhoff	40
2.2.1	Caso 6 : 2	42
2.2.2	Caso 6 : 4	43
3	Redução de Liapunov-Schmidt	44
3.1	Introdução	44
3.2	Desenvolvimento do método	45
3.2.1	Caso 6 : 2	50
3.2.2	Caso 6 : 4	50
4	Resultados	52
4.1	Dois graus de liberdade	52
4.2	Três graus de liberdade	58
4.2.1	Caso 6:2	59
4.2.2	Caso 6:4	60
4.2.3	Caso degenerado	61
5	Problema de 3–corpos restrito no plano	63
5.1	Equações do movimento	63
5.2	Órbitas periódicas simétricas	69
5.2.1	Continuação de órbitas elípticas simétricas	70
5.3	Continuação das órbitas circulares	73
	Referências Bibliográficas	78

Introdução

O estudo geométrico-qualitativo de fluxos em sistemas dinâmicos (discretos ou contínuos) tem sido durante décadas objeto de grande interesse em vários setores da matemática pura e aplicada. Hoje em dia esta teoria é acessível a uma enorme e heterogênea audiência em muitos ramos da ciência. Uma área de concentração de grande interesse situa-se na classificação de sistemas através do seu retrato de fase por equivalência orbital ou conjugação. Dentro desta linha de pesquisa os seguintes termos se solidificaram dentro do abecedário matemático: estabilidade estrutural, genericidade, famílias genéricas a k -parâmetros, bifurcação, ponto de equilíbrio ressonante, singularidade de codimensão k , órbita periódica, órbita homoclínica, caos. Tais termos são estudados, em geral, em famílias de campos vetoriais que podem ou não preservar alguma estrutura. Em particular, algumas destas estruturas são Hamiltoniana, simetrias e simetrias reversíveis (“time-reversible symmetry”).

Neste trabalho discutiremos sistemas dinâmicos com estrutura Hamiltoniana e com simetria do tipo “time-reversible”, que nos referiremos por simetria reversível. Consideramos dois problemas: (i) sistemas dinâmicos com 2 e 3 graus de liberdade e (ii) um caso particular do problema de 3-corpos restrito.

A simetria do tipo reversível é uma das fundamentais simetrias discutidas na ciência natural. Conseqüentemente, ela surge em muitos sistemas dinâmicos físicos, em particular na mecânica clássica, como no problema de n -corpos, e na mecânica quântica. O conceito de reversibilidade está relacionada com uma involução R , isto é, uma aplicação $R : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $R \circ R = Id$. Seja X um campo vetorial suave em \mathbb{R}^N . O campo vetorial X é dito *R -reversível* se a seguinte

relação está satisfeita:

$$X(R(x)) = -DR(x)X(x).$$

Reversibilidade significa que $\phi(t)$ é uma solução de X se, e somente se, $R\phi(-t)$ também é solução de X .

Muitos sistemas dinâmicos que surgem no contexto das aplicações possuem propriedades estruturais robustas, como por exemplo simetria ou estrutura Hamiltoniana. Sendo assim, para entender a dinâmica de tais sistemas, suas estruturas têm que ser levadas em conta, focalizando os estudos de fenômenos que são genéricos dentro do conjunto dos sistemas dinâmicos com a mesma estrutura. Nas últimas décadas destacou-se um grande interesse nos estudos de sistemas dinâmicos com simetria reversível (veja [14] e [28]). Recentemente, tem-se dado uma maior atenção para entender e usar a ação mútua entre as dinâmicas e as propriedades de simetria. Vale a pena mencionar que uma das propriedades características de sistemas Hamiltonianos e reversíveis é que os conjuntos minimais surgem em famílias a um parâmetro. Assim um número natural de perguntas podem ser formuladas: (i) como que ramos de conjuntos minimais iniciam ou terminam?, (ii) um ramo de conjuntos minimais pode bifurcar de um outro ramo?, (iii) quão persistentes são tais ramos quando o sistema original é levemente perturbado? Recentemente, tem surgido um grande interesse em estudar sistemas dinâmicos com simetria reversível e nos referimos a [17] para um “survey” em sistemas reversíveis e problemas relacionados.

Em 1895 Liapunov publicou seu celebrado Teorema do Centro, veja [1] página 498. Este teorema, para sistemas Hamiltonianos analíticos com n graus de liberdade, afirma que se as autofreqüências do sistema Hamiltoniano linearizado são independentes em \mathbb{Z} , próximo de um ponto de equilíbrio estável, então existem n famílias de soluções periódicas que preenchem uma variedade bidimensional suave e tendem ao ponto de equilíbrio com períodos limitados. Devaney em [10] provou uma versão do Teorema de Centro de Liapunov para sistemas reversíveis. Recentemente este resultado tem sido generalizado por Golubitsky, Krupa e Lim [11] no caso reversível e por Montaldi, Robert and Stewart [22] no caso Hamiltoniano. Lembramos que em [11] o Teorema de Devaney foi estendido e algumas simetrias extras foram consideradas. Con-

trastando o método geométrico de Devaney, eles utilizaram a redução de Liapunov–Schmidt adaptando uma prova alternativa do Teorema do Centro de Liapunov reversível dada por Vanderbauwhede [30]. Em [22] a existência de famílias de órbitas periódicas em torno de um ponto equilíbrio semi–simples é analisada. Sistemas com simetrias, incluindo simetrias reversíveis, que são anti–simpléticas são estudadas. Seus métodos são continuações do trabalho de Vanderbauwhede, em [30], onde as famílias de soluções periódicas estão em correspondência bijetiva com as soluções de um problema variacional.

Na primeira parte deste trabalho consideramos sistemas Hamiltonianos com 2 e 3 graus de liberdade reversíveis por uma involução simplética. Para estudar a existência de soluções periódicas para tais sistemas utilizamos a combinação da Redução de Liapunov–Schmidt com Teoria das Formas Normais. Ressaltamos que nossos resultados focalizam a generalização das famílias de Liapunov que surgem em [4].

A Redução de Liapunov–Schmidt focaliza o estudo local sobre a existência de soluções periódicas em torno do ponto de equilíbrio. Tal método consiste em reduzir o problema de encontrar soluções periódicas de um sistema em um espaço de dimensão infinita à resolver um conjunto de equações algébricas em um espaço de dimensão finita. Para isso a ferramenta principal utilizada é o Teorema da Função Implícita.

A Teoria das Formas Normais consiste em encontrar mudanças de coordenadas próximas à identidade que levam um campo vetorial a uma forma mais “simples”.

Esta combinação da Redução de Liapunov–Schmidt com Teoria de Formas Normais para encontrar soluções periódicas para sistemas Hamiltonianos também é utilizada por Knobloch e Vanderbauwhede em [16], Lima em [18], Shih em [25] e Wagenknecht em [31].

Sistemas Hamiltonianos com simetria reversível surgem com frequência em sistemas da Mecânica Celeste. O principal objetivo da Mecânica Celeste clássica é o estudo do problema de n –corpos, que consiste em descrever o movimento de n pontos (corpos) de massa movendo no espaço Euclidiano 3–dimensional sob a ação mútua de suas forças gravitacionais. A formulação do problema de n –corpos surge pela primeira vez em *Philosophiae Naturalis Principia*

Mathematica de Newton (1687). É neste trabalho onde as leis da mecânica e as leis de atração gravitacional universal permitiu a formulação do problema de n -corpos como um sistema de equações diferenciais.

Até a publicação do livro *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* de Poincaré (1899) as equações diferenciais que apareciam nos problemas de Mecânica Celeste eram tratadas do ponto de vista quantitativo. Poincaré deixou os métodos clássicos de integração e quadratura de lado e começou a trabalhar com o método qualitativo para dar uma descrição qualitativa completa das órbitas em um espaço de fase (o espaço onde as equações diferenciais estão definidas). Podemos dizer que Poincaré iniciou a teoria qualitativa moderna das equações diferenciais. Uma das ferramentas da teoria qualitativa é conhecida como Método da Continuação de Poincaré. Poincaré utilizou este método para provar a existência de órbitas periódicas para o “problema de 3-corpos restrito circular no plano”, veja [27]. Este método foi usado também por outros autores em diferentes problemas como problema de 3-corpos isósceles no espaço (veja [9] e [5]), problema de Sitnikov circular e elíptico (veja [6] e [7]), problema 3-corpos restrito colinear (veja [8]). Em [21] encontramos uma boa discussão da aplicabilidade do Método de Continuação de Poincaré para diferentes problemas de n -corpos.

O problema de 2-corpos é integrável no sentido clássico. Utilizando as integrais primeiras da energia h e do momento angular c , podemos classificar todas as órbitas do problema de 2-corpos da seguinte maneira. Se $c \neq 0$, então o movimento se restringe a um plano e temos: órbitas circulares ou elípticas quando $h < 0$; órbitas parabólicas quando $h = 0$; e órbitas hiperbólicas quando $h > 0$. Se $c = 0$, então o movimento se restringe a uma reta e temos: órbitas elípticas de colisão quando $h < 0$, órbitas parabólicas de colisão quando $h = 0$ e órbitas hiperbólicas de colisão quando $h > 0$.

O problema de n -corpos tem resistido todas as tentativas de ser resolvido; na verdade acredita-se que o problema não pode ser integrável no sentido clássico, de fato existem resultados parciais nesta direção. Muitos tipos especiais de soluções têm sido encontradas utilizando distintas técnicas matemáticas, mas não se pode dizer muita coisa com relação ao comporta-

mento das soluções. O problema de 3–corpos é o mais estudado do problema de n –corpos e, em particular, casos especiais do problema de 3–corpos, o problema de 3–corpos restrito (isto é, quando um dos corpos possui massa suficientemente pequena e que sua influência sobre os outros corpos é desprezível). O estudo dos problemas de 3–corpos restrito é um primeiro passo para entender as dinâmicas do problema de 3–corpos geral.

O problema de 3–corpos restrito consiste em descrever o movimento de uma massa infinitesimal que se move sob a influência da atração gravitacional de dois corpos, chamados *primários*, que descrevem uma solução de um problema de 2–corpos. Podemos classificar os problemas de 3–corpos dependendo do tipo do movimento das primárias e da dimensão do espaço onde a massa infinitesimal se move. Os dois tipos mais estudados são o problema de 3–corpos restrito circular no plano seguido do problema de 3–corpos restrito elíptico no plano. Estes dois tipos de problema de 3–corpos restrito é de grande interesse na Mecânica Celeste já que têm muitas aplicações em diferentes tipos de movimentos no sistema solar, no sistema de estrelas binárias, etc.

Neste trabalho consideramos um caso especial do problema de 3–corpos restrito no plano. Tal problema consiste de duas primárias com diferentes massas, que satisfazem uma órbita de colisão elíptica do problema de 2–corpos e a terceira partícula com massa infinitesimal movendo-se no plano que contém a reta de movimento das primárias. Nos referimos a tal problema como *problema de 3–corpos restrito com colisão no plano*.

Como usual uma *órbita periódica* do problema de 3–corpos restrito é uma órbita deste sistema tal que depois de um tempo T (o período da órbita) os três corpos estão na mesma posição com a mesma velocidade. Aqui estudaremos somente a periodicidade com respeito ao movimento do corpo infinitesimal. Tais tipos de órbitas serão chamadas *órbitas pseudo periódicas* do problema de 3–corpos restrito com colisão no plano.

A principal ferramenta utilizada é o Método de Continuação de Poincaré para continuar uma órbita periódica já conhecida de um sistema de equações diferenciais a um parâmetro.

Agora apresentaremos os conteúdos de cada capítulo e seus principais teoremas.

Iniciamos o Capítulo 1 introduzindo a terminologia e conceitos básicos para a formulação dos nossos resultados. Uma síntese sobre campos vetoriais Hamiltonianos e Reversíveis é apresentada. Além disso, verificamos que quando estamos trabalhando com uma estrutura simplética fixada é possível encontrar “formas normais” para as involuções simpléticas. Verificamos que em \mathbb{R}^6 as involuções simpléticas possuem duas classes que nos interessa, aquelas cujo conjunto dos pontos fixos tem dimensão 2 (caso 6 : 2) e aquelas cujo conjunto dos pontos fixos tem dimensão 4 (caso 6:4). Em seguida, encontramos a parte linear dos campos vetoriais reversíveis para o caso 6 : 2 e para o caso 6 : 4. Com relação ao problema de n -corpos apresentamos as integrais primeiras de tal problema e as soluções explícitas do problema de 2-corpos. Discutimos o Método de Continuação de Poincaré que será utilizado para o estudo do problema de 3-corpos restrito com colisão no plano.

No Capítulo 2, estabelecemos a forma normal de Belitskii e a forma normal de Birkhoff para os campos vetoriais estudados no Capítulo 4.

No capítulo 3, apresentamos o método Redução de Liapunov–Schmidt seguindo [31] com as necessárias adaptações para os casos tratados nesta tese.

No capítulo 4, estudamos os campos vetoriais Hamiltonianos Reversíveis com dois graus de liberdade e generalizamos alguns resultados apresentados em [4] provando o Teorema:

Teorema A: Existe um conjunto aberto $\mathcal{U}^0 \subset \mathfrak{X}^0$ não vazio tal que

- a) Cada elemento X em \mathcal{U}^0 é determinado pelo seu 3-jato;
- b) cada $X \in \mathcal{U}^0$ possui 0, 2 ou 4 famílias a um parâmetro de soluções periódicas convergindo para origem quando o parâmetro σ converge para zero com período convergindo para $2\pi/\alpha$ onde $\pm\alpha i$ são autovalores da matriz $DX(0)$.

Em seguida, estudamos os campos vetoriais Hamiltonianos Reversíveis com 3 graus de liberdade e provamos os seguintes teoremas:

Teorema B: *Existe um aberto $\mathcal{U}^1 \subset \mathfrak{X}^1$ não vazio tal que*

- a) *Cada elemento X em \mathcal{U}^1 é determinado pelo seu 2-jato,*

b) para $X \in \mathcal{U}^1$ não existem famílias a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para o ponto de equilíbrio com períodos tendendo a $2\pi/\alpha$, onde α é tal que $\pm\alpha i$ são os autovalores da parte linear do campo vetorial X em \mathcal{U}^1 com multiplicidade algébrica 2.

Teorema C: *Existe um conjunto aberto $\mathcal{U}^2 \subset \mathfrak{X}^2$ não vazio tal que*

- a) *Cada elemento X em \mathcal{U}^2 é determinado pelo seu 2-jato,*
- b) *cada $X \in \mathcal{U}^2$ possui uma família a 2-parâmetros de soluções periódicas simétricas convergindo para um ponto de equilíbrio com períodos convergindo para $2\pi/\alpha$ onde α é tal que $\pm\alpha i$ são os autovalores da parte linear do campo vetorial X em \mathcal{U}^2 com multiplicidade algébrica 2.*

Para demonstração de tais Teoremas utilizamos a combinação, já comentada, da Redução de Liapunov–Schmidt com a Teoria das formas normais.

O Capítulo 5 iniciamos descrevendo as equações do movimento do nosso problema. Encontramos a simetria deste problema e analisamos as órbitas simétrica periódicas elípticas do problema de Kepler em coordenadas de rotação que podem ser continuadas a órbitas simétrica pseudo periódicas do nosso problema em coordenadas de rotação. O principal resultado é afirmado utilizando as coordenadas de Delaunay que serão apresentadas no Capítulo 4:

Teorema D: *Sejam p e q números inteiros primos entre si e $T = 2\pi p/q$. Então a órbita elíptica T -periódica simétrica do problema de Kepler em coordenadas de rotação que satisfaz*

$$l(0) = n_1\pi, \quad g(0) = n_2\pi, \quad L^3(0) = p/q, \quad G(0) = \text{constante}, \quad (0.0.1)$$

pode ser continuada para pequenos valores de $\mu = \mu(T) > 0$ em uma órbita pseudo periódica S_1 -simétrica de período próximo de $2\pi p$ do problema de 3-corpos restrito no plano com colisão em coordenadas de rotação.

Em seguida caracterizamos as órbitas periódicas circulares do problema de Kepler em coordenadas de rotação que podem ser continuadas a órbitas pseudo periódicas do nosso problema. O principal resultado:

Teorema E: *Seja T_0 o período de uma órbita circular periódica do problema de Kepler em coordenadas de rotação. Se $2\pi/T_0 \in (1 - 1/\sqrt{8}, 1 + \sqrt{8}) \setminus \{1\}$, então para $\mu = \mu(T_0)$ suficientemente pequeno existe uma solução pseudo periódica do problema de 3-corpos restrito no plano com colisão em coordenadas de rotação com período $T(\mu)$ que tende a uma órbita periódica circular do problema de Kepler em coordenadas de rotação com período T_0 quando μ tende a 0.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos algumas definições e alguns resultados já conhecidos com relação a sistemas Hamiltonianos e Reversíveis. Além disso, apresentamos algumas notações e noções necessárias para o estudo do problema de 3-corpos.

Iniciamos introduzindo a noção de espaço linear simplético. Sendo assim fixamos uma estrutura simplética para o espaço em que vamos trabalhar e apresentamos a definição de campo vetorial com estrutura Hamiltoniana.

1.1 Espaço linear simplético

Nesta seção queremos apresentar o Teorema de Darboux. Iniciamos com algumas definições utilizando como referências os livros [1] e [13].

Seja \mathbb{V} um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{F} onde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Uma forma *bilinear* é uma aplicação $B : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$ que é linear em ambas coordenadas.

Uma forma bilinear é *anti-simétrica* ou *alternada* se $B(u, v) = -B(v, u)$ para todo $u, v \in \mathbb{V}$.

Uma forma bilinear é *não-degenerada* se $B(u, v) = 0$ para todo $u \in \mathbb{V}$ implica $v = 0$.

Um exemplo de uma forma bilinear alternada em \mathbb{F}^m é $B(u, v) = u^T S v$ onde S é uma matriz $m \times m$ anti-simétrica, ou seja, $S^T = -S$ e $u, v \in \mathbb{F}^m$.

Um *espaço linear simplético* é um par (\mathbb{V}, ω) onde \mathbb{V} é um espaço vetorial $2n$ -dimensional sobre o corpo \mathbb{F} e ω é uma forma bilinear alternada não-degenerada em \mathbb{V} .

Uma *base simplética* para o espaço linear simplético (\mathbb{V}, ω) é uma base $C = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$ para \mathbb{V} tal que $\omega(v_i, v_j) = J_{i,j}$ e $J = (J_{i,j})$, $i, j = 1, \dots, n$. Ou seja, J é a matriz dos coeficientes de ω na base C .

Seja \mathbb{O} um aberto do espaço vetorial de dimensão finita \mathbb{V} . Seja $p \in \mathbb{O}$ e considere F uma forma bilinear alternada no espaço tangente $T_p(\mathbb{O})$, ou seja, uma *2-forma*. Tomamos $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2n}$. Dizemos que F é *não-degenerada* se $F^n = F \wedge \dots \wedge F$ (n vezes) é diferente de zero. Além disso, F é *fechada* se $dF = 0$. Uma *estrutura simplética* em \mathbb{O} é uma 2-forma não-degenerada fechada. A *estrutura simplética padrão* em \mathbb{R}^{2n} é dada por

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dz^{2i-1} \wedge dz^{2i},$$

onde $z = (z^1, \dots, z^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. A matriz dos coeficientes de Ω é dado pela matriz cuja diagonal possui n matrizes 2×2 da forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Para o caso em que $n = 3$ a matriz J é dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

O Teorema a seguir garante que é sempre possível considerar a estrutura simplética padrão Ω na vizinhança da origem.

Teorema 1.1.1 (*Teorema de Darboux*) *Se F é uma estrutura simplética em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^{2n} , então existe um sistema de coordenadas z tal que F neste sistema é a estrutura simplética padrão Ω .*

Dem: Ver [1].

1.2 Campos vetoriais Hamiltonianos

Consideramos o germe da função suave

$$H : \mathbb{R}^{2n}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0.$$

Consideramos o sistema de coordenadas $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ em \mathbb{R}^{2n} . Tomamos a 2-forma não degenerada $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \dots + dx_n \wedge dy_n$, ou seja, a 2-forma padrão do \mathbb{R}^{2n} . Assim, a matriz associada a essa forma é a matriz J cuja diagonal possui n matrizes 2×2 da forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

O campo vetorial dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = J\nabla H(\mathbf{x}), \text{ onde, } \mathbf{x} = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \quad (1.2.2)$$

ou em coordenadas,

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

é um campo vetorial *Hamiltoniano*, denotado por

$$X_H(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right),$$

associado à *função Hamiltoniana* H . Dizemos que o sistema (1.2.2) é um sistema Hamiltoniano com n *graus de liberdade*.

Neste trabalho estudamos sistemas Hamiltoniano com 2 ou 3 graus de liberdade.

Por exemplo, para $n = 3$ o sistema (1.2.2) é dado por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_3 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x_3} \\ \frac{\partial H}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

com $H : \mathbb{R}^6, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função suave.

Os sistemas Hamiltonianos que trabalharemos satisfazem a estrutura de reversibilidade também. O conceito de reversibilidade está ligada à noção de involução.

1.3 Campos vetoriais reversíveis

Seja

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \tag{1.3.3}$$

um campo vetorial C^∞ .

Definição 1.3.1 *Um germe de difeomorfismo de classe C^k , $k > 1$, $R : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m, 0$, é chamado uma involução se satisfaz $R \circ R = Id$, onde Id é a matriz identidade do \mathbb{R}^m .*

No que segue, consideramos ω uma estrutura simplética fixada em \mathbb{R}^m , então $m = 2n$ (veja [1]). Pelo Teorema de Darboux podemos considerar ω a estrutura simplética padrão do \mathbb{R}^{2n} .

Definição 1.3.2 *Uma involução R é dita simplética se satisfaz*

$$\omega(dR_p(v_p), dR_p(w_p)) = \omega(v_p, w_p).$$

Dada uma involução R linear, pela Definição 1.3.2, $\omega(Rv, Rw) = \omega(v, w) \Leftrightarrow (Rv)^T J R w = v^T J w \Leftrightarrow v^T R^T J R w = v^T J w \Leftrightarrow R^T J R = J$, onde J é a matriz associada a 2-forma padrão ω do \mathbb{R}^{2n} e R^T é a matriz transposta de R .

Neste trabalho, consideramos as involuções $R \in C^\infty$.

Definição 1.3.3 Dada uma involução $R : \mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m, 0$, dizemos que o campo vetorial (1.3.3) sobre o \mathbb{R}^m é R -reversível (ou simplesmente reversível) se

$$X(R(x)) = -DR(x)X(x).$$

Definições 1.3.4 • Uma órbita γ por $x_0 \in \mathbb{R}^m$ é dada por

$$\gamma = \gamma(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m; x = \varphi_t(x_0), t \in \mathbb{R}\},$$

onde φ_t é o fluxo de X .

- Um ponto de equilíbrio $x_0 \in \mathbb{R}^m$ de X é dito simétrico se ele pertence ao conjunto $\text{Fix}(R) = \{x \in \mathbb{R}^m; R(x) = x\}$.
- Uma órbita γ de um campo vetorial X é dita R -simétrica se R aplica γ nela mesma, ou seja, $R(\gamma) = \gamma$.

Consideramos o conjunto de campos vetoriais

$$\mathfrak{X}^R(m) = \{X : X \in C^\infty \text{ e } R\text{-reversível sobre } \mathbb{R}^m\}$$

gerado pela topologia C^∞ (veja [3]).

A seguir apresentamos algumas propriedades de campos vetoriais reversíveis. Seja $X \in \mathfrak{X}^R(m)$:

- Propriedades 1.3.5**
1. A involução R aplica órbitas do fluxo ϕ_t em órbitas do mesmo fluxo invertendo a direção do tempo;
 2. Se ϕ_t denota um fluxo associado a X então temos que: $\phi_t \circ R = R \circ \phi_{-t}$;
 3. Uma órbita periódica simétrica intercepta $\text{Fix}(R)$ em precisamente dois pontos, digamos, $x_0 = x(0)$ e $x_1 := \phi_{T/2}(x_0)$. De fato, tomando $x(t)$ uma órbita T -periódica simétrica do sistema $\dot{x} = X(x)$,

$$Rx_0 = x_0 = \phi_T(x_0) \Rightarrow \phi_{-\frac{T}{2}} \circ R(x_0) = \phi_{-\frac{T}{2}} \circ \phi_T(x_0) \Rightarrow$$

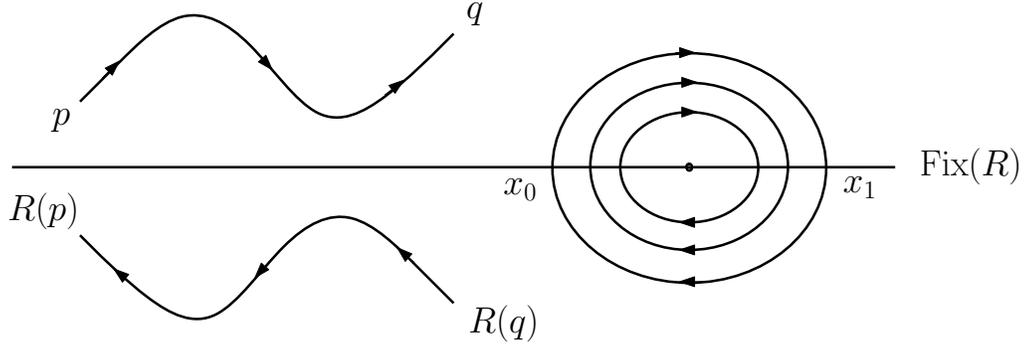


Figura 1.1: Retrato de fase de um campo reversível

$$R \circ \phi_{\frac{T}{2}}(x_0) \stackrel{*}{=} \phi_{-\frac{T}{2}} \circ \phi_T(x_0) = \phi_{\frac{T}{2}}(x_0);$$

* propriedade anterior. Além disso, suponha que existe $y = \phi_{\tau}(x_0) \in \text{Fix}R$, então

$$R\phi_{\tau}(x_0) = \phi_{\tau}(x_0) \Rightarrow \phi_{-\tau}(Rx_0) = \phi_{\tau}(x_0) \Rightarrow$$

$$\phi_{nT}(x_0) = x_0 = \phi_{2\tau}(x_0) \Rightarrow \tau = \frac{nT}{2}.$$

Exemplo 1.3.6 Um exemplo de reversibilidade é dado pelos sistemas de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

$$\ddot{u} + g(u, \dot{u}) = 0 \in \mathbb{R}^{n/2}$$

com $g(u, p)$ par na variável p . Reescrevendo este sistema como um sistema de primeira ordem para $x = (u, v) \in \mathbb{R}^n$ com $X(u, v) := (v, -g(u, v))$, temos um sistema reversível pela involução $R(u, v) := (u, -v)$. Em particular, o eixo u é o $\text{Fix}(R)$ e o eixo v é o $\text{Fix}(-R)$.

1.4 Forma normal para involuções em \mathbb{R}^6

Seja R um difeomorfismo involutivo de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^m . Consideramos a seguinte mudança de coordenadas $\phi = I + DR(0)R$. Note que

$$\begin{aligned} (\phi R)(x) &= \phi(R(x)) = (I + DR(0)R)(R(x)) \\ &= R(x) + DR(0)RR(x) = R(x) + DR(0)x \\ &= DR(0)(x + DR(0)Rx) = DR(0)\phi x \\ &= (DR(0)\phi)(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\phi R \phi^{-1} = DR(0)$$

e portanto R é conjugada por ϕ a sua parte linear $DR(0)$. Com isso, a menos de conjugação, podemos assumir R como uma involução linear.

A proposição a seguir nos apresenta uma forma normal para involuções simpléticas.

Proposição 1.4.1 *Fixada uma estrutura simplética ω em \mathbb{R}^6 e dada uma involução simplética R , por uma mudança de coordenadas simplética, R é simplecticamente conjugada a uma das seguintes formas:*

1. $R_0(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = (x_1, y_1, x_2, y_2, -x_3, -y_3)$;
2. $R_0(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = (x_1, y_1, -x_2, -y_2, -x_3, -y_3)$;
3. $R_0 = Id$;
4. $R_0 = -Id$; .

Observação 1.4.2 *Pelo Lema 1.4.5, apresentado a seguir, temos que os subespaços $\text{Fix}(R)$ e $\text{Fix}(-R)$ são subespaços simpléticos, logo, suas dimensões são pares. (Veja [1] ou [13])*

Os dois lemas a seguir serão utilizados na demonstração da Proposição 1.4.1.

Lema 1.4.3 *Se R é uma involução simplética linear, então temos que $\mathbb{R}^{2n} = \text{Fix}(R) \oplus \text{Fix}(-R)$ e $\omega(\text{Fix}(R), \text{Fix}(-R)) = 0$.*

Dem: Para todo $u \in \mathbb{R}^{2n}$, podemos escrever $u = ((u + R(u))/2) + ((u - R(u))/2)$, onde $(u + R(u))/2 \in \text{Fix}(R)$, $(u - R(u))/2 \in \text{Fix}(-R)$. Além disso, se $u \in \text{Fix}(R) \cap \text{Fix}(-R)$, então $u + u = R(u) + (-R(u)) = 0$, ou seja $\text{Fix}(R) \cap \text{Fix}(-R) = \{0\}$. Logo, $\mathbb{R}^{2n} = \text{Fix}(R) \oplus \text{Fix}(-R)$. Agora, tomamos $u \in \text{Fix}(R)$ e $v \in \text{Fix}(-R)$ e temos que $\omega(u, v) = \omega(R(u), -R(v))$. Usamos o fato de que R é simplética e linear. Assim $\omega(R(u), R(v)) = \omega(u, v)$. Com isso, $-\omega(u, v) = \omega(u, v)$ e $\omega(\text{Fix}(R), \text{Fix}(-R)) = 0$. ■

Definição 1.4.4 *Dizemos que um subespaço $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ é simplético se ω é não-degenerada em U .*

Lema 1.4.5 *Se R é uma involução simplética linear, então os conjuntos $\text{Fix}(R)$ e $\text{Fix}(-R)$ são subespaços simpléticos.*

Dem: Tomamos $u \in \text{Fix}(R)$, $u \neq 0$, tal que $\omega(u, \text{Fix}(R)) = 0$. Pelo lema anterior temos que $\omega(u, \text{Fix}(-R)) = 0$. Ainda pelo lema anterior, $(\mathbb{R}^6 = \text{Fix}(R) \oplus \text{Fix}(-R))$ temos que $\omega(u, \mathbb{R}^6) = 0$ e assim ω é degenerada em \mathbb{R}^6 , que é falso. Assim $\text{Fix}(R)$ é um subespaço simplético do \mathbb{R}^6 . A demonstração é análoga para $\text{Fix}(-R)$. ■

Dem: (Proposição 1.4.1) Seja $R : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ uma involução linear e ω uma estrutura simplética fixada. Pelo Lema 1.4.3, $\mathbb{R}^6 = \text{Fix}(R) \oplus \text{Fix}(-R)$. Além disso, $\text{Fix}(R)$ é um subespaço simplético, logo $\dim(\text{Fix}(R)) = 0, 2, 4$ ou 6 .

- se $\dim \text{Fix}(R) = 0$, então $\dim \text{Fix}(-R) = 6$ e como $(\text{Fix}(-R), \omega)$ é um subespaço simplético temos pelo teorema de Darboux existe uma base simplética $\{v_1, \dots, v_6\}$ para $\text{Fix}(-R)$ e assim para \mathbb{R}^6 tal que a matriz dos coeficientes de ω em \mathbb{R}^6 é J e R_0 será $-Id$;
- se $\dim \text{Fix}(R) = 6$, analogamente ao item anterior podemos encontrar um sistema de coordenadas tal que $R_0 = Id$;

- Suponhamos que $\dim \text{Fix}(R) = 4$, então $\dim \text{Fix}(-R) = 2$. Pelo Lema 1.4.5 temos que os subespaços $\text{Fix}(R)$ e $\text{Fix}(-R)$ são simpléticos. Pelo Teorema de Darboux temos que existe uma base simplética $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ para $\text{Fix}(R)$ tal que a matriz dos coeficientes de ω restrito ao $\text{Fix}(R)$ é dado pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente pelo Teorema de Darboux, temos que existe uma base simplética $\{f_1, f_2\}$ para $\text{Fix}(-R)$ e matriz dos coeficientes de ω restrito ao $\text{Fix}(-R)$ é dado pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Além disso, temos pelo Lema 1.4.3 que $\omega(\text{Fix}(R), \text{Fix}(-R)) = 0$ e então a matriz dos coeficientes de ω na base $\beta = \{e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2\}$ é J em \mathbb{R}^6 e

$$[R]_{\beta} = R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Analogamente ao item anterior, se $\dim \text{Fix}(R) = 2$, temos que existe uma base simplética para \mathbb{R}^6 tal que a matriz dos coeficientes de ω é J e a involução R nesta base é dada por

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

■

Ressaltamos que um resultado análogo à Proposição 1.4.1 vale para o \mathbb{R}^{2n} .

Lema 1.4.6 *Seja X um campo vetorial R -reversível, isto é, $X(R(\mathbf{x})) = -DR_{\mathbf{x}}X(\mathbf{x})$. Seja ainda, Φ uma mudança de coordenadas diferenciável. Então o campo $\tilde{X} = D\Phi \circ X \circ \Phi^{-1}$ é S -reversível onde $S = \Phi \circ R \circ \Phi^{-1}$.*

Dem:

$$\begin{aligned}
 DS \circ \tilde{X} &= D(\Phi \circ R \circ \Phi^{-1}) \circ D\Phi \circ X \circ \Phi^{-1} \\
 &= D\Phi \circ DR \circ D\Phi^{-1} \circ D\Phi \circ X \circ \Phi^{-1} \\
 &= D\Phi \circ DR \circ X \circ \Phi^{-1} \\
 &= -D\Phi \circ X \circ R \circ \Phi^{-1} \\
 &= -D\Phi \circ X \circ \Phi \circ \Phi^{-1} \circ R \circ \Phi^{-1} = -\tilde{X} \circ S
 \end{aligned}$$

■

Estamos interessados em estudar o *comportamento qualitativo* dos sistemas Hamiltonianos R -reversíveis no \mathbb{R}^6 . Pela Proposição 1.4.1 e pelo Lema 1.4.6 é suficiente estudar os sistemas reversíveis pelas involuções dadas na Proposição 1.4.1.

Denotamos as involuções 1) e 2) da Proposição 1.4.1 por:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.4.4}$$

e

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.5)$$

Como a $\dim \text{Fix}(R_1) = 2$, distinguiremos este caso como o *caso* $6 : 2$ e como $\dim \text{Fix}(R_2) = 4$, o *caso* $6 : 4$.

O caso em que $\dim \text{Fix}(R) = 0$ é muito degenerado e apenas faremos um breve comentário acompanhado de um exemplo em \mathbb{R}^4 .

Notamos que as involuções R_1 e R_2 são simpléticas, ou seja, $J.R_j - R_j^T.J = 0$ para $j = 1, 2$.

1.5 Parte linear dos campos vetoriais R_j -reversíveis no \mathbb{R}^6

Denotamos o espaço de todos os campos vetoriais Hamiltonianos, X_{H_j} , R_j -reversíveis em \mathbb{R}^6 , $j = 1, 2$, com 3 graus de liberdade por $\mathfrak{X}^j := \mathfrak{X}^{R_j}(6)$, onde R_1 é dada por (1.4.4) e R_2 por (1.4.5).

Fixamos o sistema de coordenadas $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^6$. Consideramos \mathfrak{X}^j munido da topologia C^∞ .

Para encontrar a forma da parte linear do campo vetorial X_{H_j} , focalizamos o jato de ordem 2 $J^2 H_j(0)$ da função Hamiltoniana H_j . Sendo assim definimos

$$\begin{aligned} H_j(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) &= a_{01}x_1^2 + a_{02}x_1y_1 + a_{03}x_1x_2 + a_{04}x_1y_2 + a_{05}x_1x_3 + a_{06}x_1y_3 + a_{07}y_1^2 + \\ & a_{08}y_1x_2 + a_{09}y_1y_2 + a_{10}y_1x_3 + a_{11}y_1y_3 + a_{12}x_2^2 + a_{13}x_2y_2 + a_{14}x_2x_3 + \\ & a_{15}x_2y_3 + a_{16}y_2^2 + a_{17}y_2x_3 + a_{18}y_2y_3 + a_{19}x_3^2 + a_{20}x_3y_3 + a_{21}y_3^2 + t.o.a., \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

onde *t.o.a* significa termos de ordem alta.

A relação entre um campo vetorial R -reversível e uma função Hamiltoniana é dada pelo Lema 1.5.1.

Lema 1.5.1 *Seja R uma involução linear simplética em \mathbb{R}^{2n} . Um campo de vetores Hamiltoniano de classe C^k X_H é R -reversível se, e somente se, a função Hamiltoniana H é R -anti-invariante, ou seja, $H \circ R = -H$.*

Dem: X_H é R -reversível se, e somente se, $X_H(R(x)) = -R(X_H(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Logo, $\omega(X_H(R(x)), R(y)) = -\omega(R(X_H(x)), R(y))$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$. Por hipótese, R é simplética. Assim, $\omega(X_H(R(x)), R(y)) = -\omega(X_H(x), y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$, isto é, $-dH_x(y) = dH_{R(x)}(R(y)) = d(H \circ R)_x(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$. Isto é equivalente a $H \circ R = -H$. ■

Encontraremos a seguir a parte linear dos campos vetoriais Hamiltonianos R_j -reversíveis; $j = 1, 2$.

1.5.1 Caso 6 : 2

Pela Proposição 1.4.1, a involução para este caso é:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pelo Lema 1.5.1, a função Hamiltoniana geral (1.5.6) é dada por

$$H_1 = a_{03}x_1x_2 + a_{04}x_1y_2 + a_{05}x_1x_3 + a_{06}x_1y_3 + a_{08}y_1x_2 + a_{09}y_1y_2 + a_{10}x_3y_1 + a_{11}y_1y_3 + t.o.a., \quad (1.5.7)$$

com $a_{03}, a_{04}, a_{05}, a_{06}, a_{08}, a_{09}, a_{10}, a_{11} \in \mathbb{R}$. Para simplificar a notação vamos trocar $a_{03}, a_{04}, a_{05}, a_{06}, a_{08}, a_{09}, a_{10}, a_{11}$ por $a, b, c, d, -e, -f, -g, -h$ respectivamente. Com isso, a parte linear do campo vetorial associado à função Hamiltoniana H_1, X_{H_1} , é dada pela matriz

$$A_1 = DX_{H_1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f & g & h \\ -f & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h & d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A_1 são $\{0, 0, \pm\sqrt{be - af + dg - ch}, \pm\sqrt{be - af + dg - ch}\}$.

Vamos nos restringir ao caso

$$be - af + dg - ch < 0. \quad (1.5.8)$$

Quando $be - af + dg - ch > 0$, observamos que os autovalores da parte linear de X_{H_1} são reais e a origem é um ponto de equilíbrio do tipo hiperbólico. Estamos interessados em pontos de equilíbrio do tipo elíptico.

Usaremos a forma canônica de Jordan de A_1 . Assim estamos, por enquanto, fora da estrutura simplética original.

Chamando $\alpha = \sqrt{-be + af - dg + ch}$, a matriz que transforma A_1 na sua forma canônica de Jordan é

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-d}{dg-ch}\alpha & 0 & \frac{-c}{dg-ch}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f}{dg-ch}\alpha & 0 & \frac{-g}{dg-ch}\alpha & 0 \\ \frac{df-bh}{be-af} & \frac{cf-bg}{be-af} & 0 & \frac{-df+bh}{dg-ch} & 0 & \frac{-cf+bg}{dg-ch} \\ \frac{-de+ah}{be-af} & \frac{-ce+ag}{be-af} & 0 & \frac{de-ah}{dg-ch} & 0 & \frac{ce-ag}{dg-ch} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5.9)$$

onde supomos que $dg - ch \neq 0$ e $be - af \neq 0$. Assim,

$$\widehat{A}_1 = P_1^{-1}.A_1.P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

onde P_1^{-1} é a matriz inversa de P_1 .

Como aplicamos uma transformação junto ao campo, o mesmo faremos para a involução que estamos considerando:

$$\widehat{R}_1 = P_1^{-1}.R_1.P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, no caso 6 : 2, trabalharemos com a parte linear do campo dada pela forma canônica real de Jordan \widehat{A}_1 e com a involução \widehat{R}_1 .

1.5.2 Caso 6 : 4

Procedemos de maneira análoga ao caso anterior. A involução é

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e a função Hamiltoniana neste caso é da forma:

$$H_2 = a_{05}x_1x_3 + a_{14}x_2x_3 + a_{10}x_3y_1 + a_{17}x_3y_2 + a_{06}x_1y_3 + a_{15}x_2y_3 + a_{11}y_1y_3 + a_{18}y_2y_3 + t.o.a. \quad (1.5.10)$$

Então, a parte linear do campo vetorial Hamiltoniano X_{H_2} é dado por:

$$A_2 = DX_{H_2}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g & h \\ -d & b & -h & f & 0 & 0 \\ c & -a & g & -e & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente, mudamos a notação e os autovalores de A_2 são $\{0, 0, \pm\sqrt{bc - ad + fg - eh}, \pm\sqrt{bc - ad + fg - eh}\}$.

Consideramos o caso em que

$$bc - ad + fg - eh < 0. \quad (1.5.11)$$

Tomando $\alpha = \sqrt{-bc + ad - fg + eh}$ com $bc - ad \neq 0$ e considerando a matriz transformação

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{be-af}{bc-ad} & \frac{-bg+ah}{bc-ad} & 0 & \frac{-b}{\alpha} & 0 & \frac{-a}{\alpha} \\ \frac{de-cf}{bc-ad} & \frac{-dg+ch}{bc-ad} & 0 & \frac{-d}{\alpha} & 0 & \frac{-c}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-f}{\alpha} & 0 & \frac{-e}{\alpha} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-h}{\alpha} & 0 & \frac{-g}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a forma canônica de Jordan real de A_2 é dada por:

$$\widehat{A}_2 = P_2^{-1} \cdot A_2 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso, a involução R_2 fica da forma:

$$\widehat{R}_2 = P_2^{-1} \cdot R_2 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.6 Método da Continuação de Poincaré

O método de continuação, devido a Poincaré [23], é uma das técnicas utilizada com maior frequência para provar a existência de órbitas periódicas. A idéia geral do método da continuação de Poincaré é usar uma solução periódica conhecida e, por pequenas variações nos parâmetros e nas condições iniciais, continuar esta solução a uma outra solução periódica.

Usualmente o método de continuação é aplicado em sistemas analíticos de equações diferenciais. Iniciamos apresentando algumas propriedades deste tipo de sistema.

Consideramos o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{x}_k = f_k(t, \mathbf{x}, \mu), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.6.12)$$

com $(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, \dots, x_n) \in D$ onde D é um aberto conexo do \mathbb{R}^{n+1} , $\mu \in G \subset \mathbb{R}$ onde G é um intervalo de \mathbb{R} e $f_k : D \times G \rightarrow \mathbb{R}$ para $k = 1, \dots, n$. As variáveis t , \mathbf{x} e μ denotam o tempo, as coordenadas do espaço de fase e o parâmetro do sistema diferencial, respectivamente.

Se as funções f_k são contínuas e satisfazem a condição de Lipschitz em D independente de t , então o Teorema da Existência e Unicidade de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias e o Teorema da Dependência Contínua de soluções com respeito ao parâmetro garantem que para cada $(t_0, \mathbf{x}_0) = (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ e $\mu \in G$, existe uma única solução $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0, \mu)$ do sistema (1.6.12) tal que $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0, \mu) = \mathbf{x}_0$, isto é, existe uma única solução do sistema (1.6.12) passando pelo ponto (t_0, \mathbf{x}_0) . Mais ainda, esta solução é uma função contínua de $(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mu)$ no seu domínio de definição.

Assumimos que o lado direito das equações diferenciais de (1.6.12) são funções periódicas em t . Se tais funções são periódicas com período minimal T , então as soluções periódicas deste sistema devem ter um período múltiplo de T .

Denotamos por $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mu)$ a solução de (1.6.12) satisfazendo as condições iniciais $\mathbf{x}(0; 0, \mathbf{x}_0, \mu) = \mathbf{x}_0$, isto é, $t_0 = 0$.

A solução $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mu)$ é uma solução periódica de (1.6.12) com período (minimal) $\tau > 0$ se $\mathbf{x}(t + \tau; \mathbf{x}_0, \mu) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mu)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, a condição necessária e suficiente para que uma solução $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mu)$ de (1.6.12) seja uma solução periódica com período τ é

$$\mathbf{x}(0; \mathbf{x}_0, \mu) = \mathbf{x}(\tau; \mathbf{x}_0, \mu). \quad (1.6.13)$$

Seja $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*, \mu^*)$ uma solução periódica de (1.6.12) conhecida com período $\tau^* > 0$, que não é um ponto de equilíbrio. O método de continuação consiste em encontrar valores τ , \mathbf{x}_0 e μ próximos de τ^* , \mathbf{x}_0^* e μ^* tal que $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mu)$ é uma solução periódica de (1.6.12) com período $\tau > 0$. Se estes valores podem ser encontrados, então dizemos que a solução $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*, \mu^*)$ pode ser *continuada*.

Definimos

$$\psi_k(\tau, \mathbf{x}_0, \mu) = x_k(\tau; \mathbf{x}_0, \mu) - x_k^0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Pela condição necessária e suficiente (1.6.13), temos que $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mu)$ é uma solução τ -periódica do sistema (1.6.12) se, e somente se, τ , \mathbf{x}_0 e μ satisfazem as n equações

$$\psi_k(\tau, \mathbf{x}_0, \mu) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.6.14)$$

Logo, para continuar uma solução periódica $\mathbf{x}^*(t; \mathbf{x}_0^*, \mu^*)$ é suficiente encontrar solução do sistema (1.6.14) próxima da solução conhecida τ^* , \mathbf{x}_0^* e μ^* .

Proposição 1.6.1 *Assumimos que (1.6.12) é um sistema periódico. Seja $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0^*, \mu^*)$ uma solução periódica conhecida de (1.6.12) com período $\tau^* > 0$. Se*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1(\tau^*, \mathbf{x}_0, \mu)}{\partial x_1^0} & \cdots & \frac{\partial \psi_1(\tau^*, \mathbf{x}_0, \mu)}{\partial x_n^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n(\tau^*, \mathbf{x}_0, \mu)}{\partial x_1^0} & \cdots & \frac{\partial \psi_n(\tau^*, \mathbf{x}_0, \mu)}{\partial x_n^0} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{\mu = \mu^* \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^*}} \neq 0, \quad (1.6.15)$$

então para cada μ em uma vizinhança suficientemente pequena de μ^* existe uma única função $\mathbf{x}_0(\mu)$ tal que $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0(\mu), \mu)$ é uma solução τ^* -periódica de (1.6.12).

Dem: Segue diretamente do Teorema da Função Implícita. ■

1.7 Problema de n -Corpos

O problema de n -corpos foi primeiramente formulado por Newton. Este consiste em descrever o movimento de n -massas puntuais que movem no espaço Euclidiano tridimensional sob suas atrações gravitacionais Newtonianas mútuas.

Relembramos as três Leis de Newton da Dinâmica:

- **1ª Lei ou Lei da Inércia:** Um corpo permanece em estado de movimento retilíneo e uniforme a menos que sofra a ação de uma força;

- **2ª Lei:** A ação de uma força sobre um corpo é a taxa de variação de seu momento linear

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

no caso em que a partícula tem massa $m > 0$ e velocidade \mathbf{v} , tem-se $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e a 2ª Lei fica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, onde \mathbf{a} é a aceleração;

- **3ª Lei ou Lei da ação e reação:** Se um corpo exerce uma força sobre um outro, este também exerce uma força sobre o primeiro, de mesma intensidade mas com sentido contrário.

Uma outra Lei da Física Newtoniana é:

- **Lei da gravitação universal:** a força de atração gravitacional entre quaisquer duas partículas de massas m e M , a uma distância $r > 0$ entre si, tem intensidade

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

onde G é a constante de gravitação universal.

Seja $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^3$ o vetor posição da partícula i com respeito a um sistema de coordenadas inercial, e seja $m_i > 0$ a sua massa. Pela lei da gravitação universal, a força de atração de m_j em m_i , \mathbf{F}_{ij} , é dada por:

$$\mathbf{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i),$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma Euclidiana em \mathbb{R}^3 .

Pela 2ª Lei de Newton, as equações do movimento do problema de N -corpos são:

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = G \sum_{j=1}^n{}^* m_i m_j \frac{\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3} \quad i = 1, \dots, n; \quad (1.7.16)$$

onde os pontos significam derivadas com relação ao tempo t e $*$ no sinal de somatório indica que o termo $i = j$ é omitido.

É conveniente reformular o problema introduzindo a chamada função *energia potencial* (gravitacional) do sistema:

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta &\rightarrow (0, \infty) \\ \mathbf{q} &\mapsto U(\mathbf{q}) \equiv -G \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|} \end{aligned}$$

onde $\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}$ com

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j\}.$$

O sistema (1.7.16) pode ser reescrito da forma

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = -\nabla_{\mathbf{q}_i} U(\mathbf{q}) = -U_{\mathbf{q}_i} = -\left(\frac{\partial U}{\partial q_{i1}}(\mathbf{q}), \frac{\partial U}{\partial q_{i2}}(\mathbf{q}), \frac{\partial U}{\partial q_{i3}}(\mathbf{q})\right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.7.17)$$

Reduzimos o sistema (1.7.16) a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem no espaço $\mathbb{R}^{6n} \setminus \Delta$. Uma solução completa deste sistema exige $6n - 1$ integrais primeiras independentes do tempo. É razoável que para $n > 2$ não exista todas estas integrais. Contudo, conhecemos dez integrais para o sistema, as *integrais clássicas* detalhadas a seguir.

As 6 integrais primeiras do centro de massa

O centro de massa dos n corpos no sistema (1.7.16) é dado por

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i, \quad (1.7.18)$$

onde $M = \sum_{i=1}^n m_i$.

Somando as n equações de (1.7.16) obtemos

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = 0.$$

Integrando duas vezes temos

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{a} \quad (1.7.19)$$

e

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (1.7.20)$$

onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são vetores constantes.

Pelas equações (1.7.18), (1.7.19) e (1.7.20) temos

$$\mathbf{R} = (\mathbf{a}t + \mathbf{b})/M \quad (1.7.21)$$

e

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}/M. \quad (1.7.22)$$

As equações (1.7.21) e (1.7.22) afirmam que o centro de massa move, com relação ao sistema de coordenadas inercial, em uma reta e com velocidade constante. Uma vez que o centro de massa tem movimento retilíneo e uniforme, então o referencial do centro de massa é um referencial inercial, e portanto no qual valem as Leis de Newton.

Considerando as posições das partículas em *relação ao centro de massa*,

$$\mathbf{q}'_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{R},$$

segue que as equações do movimento (1.7.16) têm a mesma forma quando escrita em termos dos vetores \mathbf{q}'_i quanto em termos dos vetores \mathbf{q}_i , já que $\ddot{\mathbf{R}} = 0$. Assim, podemos supor que os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são iguais a zero, ou seja, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Então temos 6 integrais primeiras:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0},$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0},$$

que são conhecidas como as *integrais primeiras do centro de massa*.

As 3 integrais primeiras do momento angular

Considerando o produto vetorial (\times) da equação (1.7.16) por \mathbf{q}_i , $i = 1, \dots, n$, somando e integrando obtemos

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{c},$$

onde \mathbf{c} é um vetor constante. Assim temos outras 3 integrais primeiras conhecidas como *integrais primeiras do momento angular*.

A integral primeira da energia

Consideramos o produto escalar da equação (1.7.17) por $\dot{\mathbf{q}}_i$, somamos as n equações resultantes e integramos então obtemos

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_i - \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|} = h \quad (i \neq j),$$

ou seja,

$$T + U = h, \tag{1.7.23}$$

onde $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \|\dot{\mathbf{q}}_i\|^2$ é a energia cinética dos n corpos do sistema (1.7.16) e h é uma constante. A integral (1.7.23) é conhecida como *integral primeira da energia*.

1.8 O problema de 2–corpos

O problema de 2–corpos, inicialmente afirmado e resolvido por Newton, diz: “Dadas as posições e velocidades iniciais de duas partículas, cujas massas são conhecidas, que se movem segundo suas forças gravitacionais mútuas, calcular suas posições e velocidades em qualquer outro tempo”.

Um fato importante relacionado com o problema de 2–corpos é que uma grande variedade de problemas de movimento orbital podem ser tratados como aproximações do problema de 2–corpos.

Utilizando as integrais clássicas, o problema de n -corpos com $n = 2$ é integrável e suas soluções podem ser encontradas facilmente em qualquer livro de Mecânica Celeste (veja por exemplo [24] e [5]).

Inicialmente apresentamos as equações do movimento do problema de 2-corpos e sua redução ao problema de Kepler. Encontramos as soluções do problema de Kepler. Finalizaremos com uma análise de um tipo particular de soluções do problema de Kepler, as soluções elípticas, e apresentaremos a relação entre as órbitas do problema de 2-corpos e as do problema de Kepler.

Sejam P_1 e P_2 duas partículas com massas m_1 e m_2 respectivamente, que se movem no espaço tridimensional sob suas atrações gravitacionais Newtonianas mútuas. Sejam \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 seus vetores posição em um sistema de coordenadas inercial. O problema de 2-corpos consiste em descrever o movimento destas duas partículas. Pela equação (1.7.16), as equações do movimento do problema de dois corpos são

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3}.\end{aligned}$$

Subtraindo estas duas equações obtemos

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3}. \quad (1.8.24)$$

Tomamos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $r = \|\mathbf{r}\|$ e $\mu = G(m_1 + m_2)$, então (1.8.24) fica

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0. \quad (1.8.25)$$

Esta equação é conhecida como *problema de Kepler*. Suas soluções dão o movimento da partícula P_2 com relação à P_1 , ou seja, elas dão as posições de P_2 em um sistema de coordenadas com a origem em P_1 . A equação (1.8.25) também pode ser vista como a equação do movimento de um corpo com massa unitária atraída por um corpo de massa $m_1 + m_2$ fixado na origem, então o problema de Kepler descreve as órbitas deste corpo de massa unitária.

Indiretamente utilizamos as integrais primeiras do centro de massa para obter o problema de Kepler a partir de um problema de 2-corpos geral. Ainda nos resta quatro integrais primeiras, a energia e as três integrais primeiras do momento angular.

As três integrais primeiras do momento angular são obtidas fazendo o produto vetorial da equação (1.8.25) por \mathbf{r} e integrando. Estas são dadas por:

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}. \quad (1.8.26)$$

Se $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ então \mathbf{r} e $d\mathbf{r}/dt$ são ortogonais a \mathbf{c} ; e o movimento ocorre em um plano perpendicular a \mathbf{c} . Se $\mathbf{c} = 0$ o movimento ocorre em uma linha reta.

A integral primeira da energia é obtida pelo produto escalar da equação (1.8.25) com $d\mathbf{r}/dt$ e a integração da equação resultante. Esta é dada por

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h, \quad (1.8.27)$$

onde $v = \|d\mathbf{r}/dt\|$. A quantidade $\frac{1}{2}v^2$ é a energia cinética e a quantidade $-\frac{\mu}{r}$ é a energia potencial da massa unitária.

1.8.1 Soluções do Problema de Kepler

Sem perda de generalidade podemos supor que o movimento de uma massa unitária de um problema de Kepler esta contido em um plano (x, y) e $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Definimos o sistema de coordenadas polares (r, θ) neste plano por $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Logo, \mathbf{r} em coordenadas polares é dado por

$$\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} = r\mathbf{n},$$

onde $\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ é um vetor unitário na direção de \mathbf{r} . Definimos um outro vetor unitário, \mathbf{l} , ortogonal a \mathbf{n} , por $\mathbf{l} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$. Veja Figura 1.2.

Observamos que

$$\frac{d\mathbf{n}}{d\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} = \mathbf{l}$$

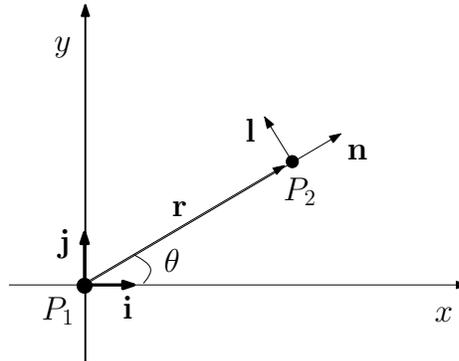


Figura 1.2: Coordenadas polares

e

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\theta} = -\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j} = -\mathbf{n}.$$

Então, considerando o ponto como sendo a derivada com relação ao tempo temos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{n} + r\dot{\theta}\mathbf{l}$$

e

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{n} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{l}.$$

Logo, o momento angular (1.8.26) com a derivada em coordenadas polares é dado por

$$r^2\dot{\theta}\mathbf{n} \times \mathbf{l} = \mathbf{c}.$$

Se $c = \|\mathbf{c}\|$, então

$$c = r^2\dot{\theta}. \quad (1.8.28)$$

A energia (1.8.27) em coordenadas polares é

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mu}{r} = h. \quad (1.8.29)$$

Finalmente as equações do movimento do problema de Kepler (1.8.25) em coordenadas polares são dadas por

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad (1.8.30)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Para calcular as soluções do problema de Kepler consideramos os dois casos, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Caso 1: $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

Substituindo $\dot{\theta}$ por c/r^2 (veja (1.8.28)) na primeira equação de (1.8.30), temos

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (1.8.31)$$

Além disso, segue de (1.8.30) que $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{c}{r^2}$. Então a equação (1.8.31) pode ser escrita em termos de r e θ como

$$\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu}{r^2}.$$

Considerando a mudança de variável $u = 1/r$, esta equação fica da forma

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{c^2},$$

que é uma equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução geral é

$$u = \frac{\mu}{c^2} + A \cos(\theta - \omega),$$

onde A e ω são constantes de integração. Então

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + Ap \cos(\theta - \omega)}{p}, \quad (1.8.32)$$

onde $p = c^2/\mu$. Esta é a equação de uma cônica em coordenadas polares com parâmetro p e excentricidade $e = Ap$. Logo, o movimento da partícula com massa m_2 com relação à partícula com massa m_1 quando $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ pode ser:

1. uma circunferência, se $e = 0$,

2. uma elipse, se $0 < e < 1$,
3. uma parábola, se $e = 1$,
4. uma hipérbole, se $e > 1$.

Podemos classificar as órbitas com relação à energia ao invés da excentricidade. Na verdade, segue de (1.8.32) que

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}, \quad (1.8.33)$$

onde $p = c^2/\mu$. Substituindo na integral primeira da energia (1.8.29) $\dot{\theta}$ por c/r^2 e r por (1.8.33) temos

$$h = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{c^2} (e^2 - 1). \quad (1.8.34)$$

Então o movimento de m_2 com relação a m_1 pode ser

1. uma circunferência, se $h = -\mu^2/2c^2$,
2. uma elipse, se $-\mu^2/2c^2 < h < 0$,
3. uma parábola, se $h = 0$,
4. uma hipérbole, se $h > 0$.

Caso 2: $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Sabemos que quando $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ o movimento de m_2 com relação a m_1 é colinear, já que $\dot{\theta} = 0$ (veja (1.8.28)). Então a equação do movimento (1.8.30) é dada por

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2}.$$

Multiplicando esta equação por \dot{r} e integrando temos a energia

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{\mu}{r} = h.$$

Então temos três tipos de órbitas dependendo do valor de h :

1. órbita elíptica de colisão, se $h < 0$,
2. órbita parabólica de colisão, se $h = 0$,
3. órbita hiperbólica de colisão, se $h > 0$.

1.8.2 Órbitas elípticas do problema de Kepler

Para $0 < e < 1$ temos que a equação (1.8.33) define uma solução elíptica do problema de Kepler, isto é, a partícula P_2 descreve uma elipse em torno da partícula P_1 , que está em um dos focos da elipse.

O parâmetro da elipse é $p = a(1 - e^2)$, onde a é o semi-eixo maior. Então (1.8.33) é dada por

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)}. \quad (1.8.35)$$

Por outro lado temos $p = c^2/\mu$, então obtemos

$$c = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (1.8.36)$$

O ângulo $\theta - \omega = f$ (1.8.35) é chamado *anomalia verdadeira* (*true anomaly*), veja Figura 1.3. Quando $\theta = \omega$, ou equivalentemente, quando $f = 0$, a partícula P_2 está no *pericentro da elipse* e $r = a(1 - e)$; isto é, P_2 está no valor mínimo de r . Quando $\theta - \omega = \pi$, ou equivalentemente quando $f = \pi$, a partícula P_2 está no *apocentro da elipse* e $r = a(1 + e)$; isto é, P_2 está no valor máximo de r .

Seja T o período de uma dada solução elíptica, e seja τ o tempo de passagem da partícula P_2 pelo pericentro. Definimos o *movimento médio* (*mean motion*) n como a taxa de variação em que o ângulo θ aumenta durante um período, isto é, $n = 2\pi/T$. Definimos por *anomalia média* (*mean anomaly*) M como sendo o ângulo em torno do foco que uma solução elíptica percorre tendo movimento médio n durante o tempo $t - \tau$, isto é,

$$M = n(t - \tau).$$

É fácil ver que c é a metade da área varrida pelo vetor raio em uma unidade de tempo. Desde que a área da elipse é dada por $ab\pi$ onde $b = a\sqrt{1 - e^2}$ é o semi-eixo menor da elipse, temos

$$c = na^2\sqrt{1 - e^2}. \quad (1.8.37)$$

Das equações (1.8.36) e (1.8.37) obtemos

$$\mu = n^2a^3. \quad (1.8.38)$$

Por outro lado, substituindo $\dot{\theta}$ por c/r^2 em (1.8.29) temos

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{c^2}{r^2}}. \quad (1.8.39)$$

Finalmente, substituindo h por (1.8.34), c por (1.8.36) (ou por (1.8.37)) e μ por (1.8.38), temos a equação (1.8.39) escrita da forma

$$\frac{r}{na} \frac{dr}{dt} = \sqrt{a^2e^2 - (r - a)^2}. \quad (1.8.40)$$

Introduzimos uma variável auxiliar E chamada *anomalia excêntrica* (*eccentric anomaly*), e consideramos a mudança de variáveis

$$r - a = -ae \cos E.$$

Depois desta mudança de variáveis a equação (1.8.40) fica da forma

$$ndt = (1 - e \cos E)dE.$$

Esta última equação é facilmente integrável dando

$$E - e \operatorname{sen} E = n(t - \tau),$$

onde τ é uma constante de integração. Tomando o tempo de passagem da partícula P_2 pelo pericentro igual a τ temos

$$E - e \operatorname{sen} E = M,$$

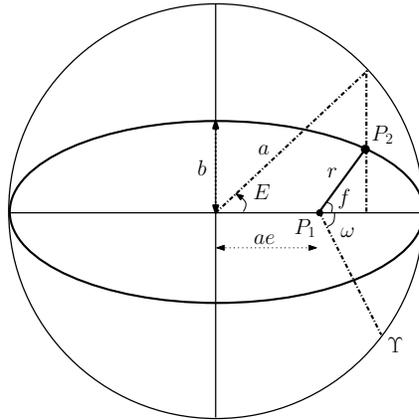


Figura 1.3: Elementos da elipse

a chamada *equação de Kepler* que relaciona a anomalia média com a anomalia verdadeira. Além disso, a expressão de r em termos da anomalia excêntrica é

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (1.8.41)$$

Agora estamos interessados na expressão da solução elíptica do problema de Kepler em função do tempo t .

Da equação (1.8.41), temos que $r(t) = a(1 - e \cos E(t))$ onde $E(t)$ é dado implicitamente pela equação de Kepler. Diferenciando a equação de Kepler temos

$$ndt = (1 - e \cos E)dE.$$

Assim $\frac{dt}{dE} > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ já que $e \in [0, 1)$, e conseqüentemente o Teorema da Função Inversa afirma que, para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos encontrar uma única $E(t)$ satisfazendo a equação de Kepler. Infelizmente $E(t)$ não pode ser expressa em termos de funções elementares. No entanto, podemos escrever E em série de funções periódicas em termos da anomalia média $M = n(t - \tau)$. Veja por exemplo [5] ou [24].

1.8.3 Órbitas Baricêntricas

Até agora estudamos as equações do movimento da partícula P_2 com relação à P_1 , ou seja, escolhemos um sistema de coordenadas tal que sua origem está em P_1 . Agora estamos interessados em estudar as equações do movimento de P_1 e de P_2 no sistema de coordenadas com a origem no centro de massas de P_1 e P_2 .

Pela equação (1.7.18) o centro de massa de P_1 e P_2 é

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)$$

onde $M = m_1 + m_2$. Se tomamos a origem do sistema no centro de massa, então

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}_1. \quad (1.8.42)$$

Substituindo \mathbf{r}_2 por (1.8.42) na equação (1.8.24) obtemos a equação do movimento para P_1 ,

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_1 = -G\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3}. \quad (1.8.43)$$

As soluções desta equação nos dá a posição da partícula P_1 com respeito ao centro de massa. Então a posição da partícula P_2 é dada por (1.8.42). Estas soluções são conhecidas como *órbitas baricêntricas*, veja [5] ou [24].

Observamos que a equação (1.8.43) define um problema de Kepler (veja a equação (1.8.25)) com parâmetro $\mu = G\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$. Então as soluções de (1.8.43) podem ser calculadas resolvendo seu correspondente problema de Kepler. Ressaltamos que usando os mesmos argumentos podemos encontrar as equações do movimento para a partícula P_2 , que define um problema de Kepler com parâmetro $\mu = G\frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$.

Por outro lado, podemos também calcular a solução de (1.8.43) a partir da solução de sua órbita relativa \mathbf{r} . O vetor posição \mathbf{r} está relacionado a \mathbf{r}_1 e a \mathbf{r}_2 por $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Assim, por (1.8.42), $\mathbf{r}_1 = (m_2/M)\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}_2 = (m_1/M)\mathbf{r}$. Isto significa que as órbitas baricêntricas são geometricamente similares umas à outras e às suas órbitas relativas, \mathbf{r} . Por exemplo, se \mathbf{r} descreve uma elipse com semi-eixo maior a , excentricidade e e período T , então \mathbf{r}_1 e

\mathbf{r}_2 descreverão uma elipse com a mesma excentricidade e período, e com semi-eixo maior $a_1 = (m_2/M)a$ e $a_2 = (m_1/M)a$ respectivamente.

Capítulo 2

Formas Normais

Neste capítulo apresentaremos dois tipos de formas normais: forma normal de Belitskii e a forma normal de Birkhoff. Verificaremos que nos casos considerados um campo vetorial na forma normal de Birkhoff em particular está na forma normal de Belitskii.

O principal resultado para forma normal de Belitskii é apresentado mas não será demonstrado. Este pode ser encontrado em [2]. Tal resultado também pode ser encontrado em [18].

2.1 Forma Normal de Belitskii

Dado um campo vetorial, nem sempre é possível linearizá-lo por conjugações formais do tipo $Id + o(2)$. Isto ocorre devido o fato de alguns monômios do campo vetorial na sua forma formal serem ressonantes, ou seja, não é possível encontrar uma transformação que leve o campo original em um campo sem tais monômios. Sendo assim, nosso objetivo é apresentar um resultado que nos fornece formalmente uma *forma normal* para os campos vetoriais Hamiltonianos em \mathbb{R}^6 que sejam \widehat{R}_1 e \widehat{R}_2 -reversíveis.

Consideramos um campo vetorial R -reversível em \mathbb{R}^{2n}

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (2.1.1)$$

onde R é uma involução do \mathbb{R}^{2n} , ou seja, $R \circ R = Id$, $X(0) = 0$ e denotamos $A = DX(0)$.

Definição 2.1.1 A $2n$ -upla de autovalores $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ é dita ressonante de ordem r se

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{2n} m_j \lambda_j \quad (2.1.2)$$

para $m_j \in \mathbb{N}$, com $\sum_{j=1}^{2n} m_j = r$ e algum $i = 1, \dots, 2n$.

Com esta definição dizemos que o monômio $x_1^{m_1} y_1^{m_2} \dots x_n^{m_{2n-1}} y_n^{m_{2n}}$ é *ressonante de ordem r* . A grosso modo, na i -ésima coordenada do campo X este monômio não pode ser “eliminado” por uma mudança de coordenadas Φ (como descrita a seguir).

Um difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ transforma um campo de vetores X em um campo vetorial

$$(\Phi_* X)(x) := (\Phi'(x))^{-1} X(\Phi(x)); \quad x \in \mathbb{R}^{2n}$$

onde $\Phi'(x)$ é a matriz Jacobiana da aplicação Φ . Se tomamos

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ y &\mapsto x = \Phi(y) = y + h(y) \end{aligned}$$

um difeomorfismo com $h(y) = o(|y|^2)$ e aplicamos a transformação $x = \Phi(y)$ em (2.1.1) obtemos que

$$\dot{y} = \Phi_* X(y) := (\Phi'(y))^{-1} X(\Phi(y)) = Y(y).$$

O princípio natural é encontrar uma transformação que leve o campo de vetores X em um outro que possua uma forma “normal” mais simples.

Se X é um campo vetorial tal que (2.1.2) nunca está satisfeita, dizemos que este campo é *não ressonante*. A transformação Φ leva formalmente o campo X no campo linear $\dot{x} = Ax$. Em outras palavras, campos vetoriais não ressonantes podem ser linearizados. Portanto, consideraremos neste trabalho uma classe de campos vetoriais ressonantes.

Uma *aplicação formal* $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é definida ser uma série formal

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{(k)}(x),$$

onde $F^{(k)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação polinomial de grau k . Denotamos por $\widehat{X}(x)$, $\widehat{Y}(x)$ e $\widehat{\Phi}(x)$ as séries formais de Taylor em torno da origem das aplicações X , Y e Φ , respectivamente.

Teorema 2.1.2 *Dado um campo vetorial formal*

$$\widehat{X}(x) = Ax + \sum_{k \geq 2} X^{(k)}(x),$$

*existe uma transformação formal $\widehat{\Phi}(x) = x + \dots$ levando \widehat{X} na forma $(\widehat{\Phi}_*X)(x) = Ax + h(x)$ onde h é um campo vetorial formal com parte linear zero que comuta com A^T , isto é,*

$$A^T h(x) = h'(x)A^T x, \quad (2.1.3)$$

onde A^T é a matriz transposta.

Dem: Veja [2].

Dizemos que um campo vetorial (2.1.1) está na *forma normal de Belitskii* se $(\widehat{\Phi}_*X)(x) = Ax + h(x)$ como no teorema.

Neste trabalho consideraremos campos vetoriais reversíveis. Sendo assim, nos interessa encontrar uma transformação $\widehat{\Phi}$ tal que a R -reversibilidade do sistema original seja preservada. Para isto temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.3 *A aplicação Φ do Teorema 2.1.2 pode ser escolhida tal que $R\Phi = \Phi R$. Assim, se $\Phi_*X(x) = Ax + h(x)$, temos que $Rh(x) = -h(Rx)$.*

Dem: Veja [15].

O Teorema 2.1.3 nos garante que no Teorema 2.1.2 a aplicação Φ pode ser escolhida tal que a forma normal de Belitskii do campo vetorial X preserva reversibilidade.

A seguir encontramos a forma normal de Belitskii para o campo de vetores (2.1.1) onde as involuções são \widehat{R}_1 e \widehat{R}_2 , respectivamente.

Para encontrar a forma normal de Belitskii do campo vetorial Hamiltoniano R_j -reversíveis, $Ax + h(x)$, prosseguimos da seguinte maneira: consideramos um campo $h : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ na forma formal até ordem 3; pelo Teorema da Forma Normal de Belitskii, h satisfaz $A^T h(x) = h'(x)A^T x$,

assim eliminamos alguns termos; impomos a condição de R_j -reversibilidade, $h(R_j(x)) = -R_j(h(x))$ e assim encontramos h que está no núcleo do operador $L_A(h)(x) := A^T h(x) - h'(x)A^T x$ e é reversível por R_j .

O operador L_A é chamado *operador homológico*.

2.1.1 Caso 6 : 2

Neste caso temos o campo vetorial $\dot{x} = X(x)$ \widehat{R}_1 -reversível em \mathbb{R}^6 , onde as coordenadas são dadas por $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^6$, $X(0) = 0$ e $DX(0) = \widehat{A}_1$ é a parte linear do campo, na forma canônica de Jordan real, dada pela matriz:

$$\widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Através de um reescalonamento do tempo podemos considerar $\alpha = 1$ e

$$\widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo podemos escrever

$$\dot{x} = \widehat{A}_1 x + h(x) + o(|x|^{m+1}),$$

onde $h(x) = (h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x), h_5(x), h_6(x))$ não possui termos lineares e é formado por monômios homogêneos de grau menor que $m + 1$. Neste trabalho as formas normais serão calculadas até ordem $m = 3$.

Para encontrar a forma normal de Belitskii do campo escrevemos h com todos os monômios até grau 3, impomos a condição de que h pertence ao núcleo do *operador homológico*

$$L_{\widehat{A}_1^T} h(x) := \widehat{A}_1^T h(x) - Dh(x) \widehat{A}_1^T x.$$

Além disso, queremos manter a reversibilidade do campo, logo impomos a condição $\widehat{R}_1 h(x) = -h(\widehat{R}_1 x)$ e obtemos que h é da forma:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned}
& (a_{01}x_1^2 + y_1(a_{02}x_1 + a_{07}y_1) + x_3(a_{20}x_2 + a_{17}x_3 + a_{65}x_1y_2 + a_{71}y_1y_2) + \\
& a_{18}(x_2^2 + y_2^2) - (a_{65}x_1x_2 + a_{71}x_2y_1 - a_{20}y_2)y_3 + a_{17}y_3^2, \\
& \\
& b_{01}x_1^2 + y_1(b_{02}x_1 + b_{07}y_1) + x_3(b_{20}x_2 + b_{17}x_3 + b_{65}x_1y_2 + b_{71}y_1y_2) + \\
& b_{18}(x_2^2 + y_2^2) - (b_{65}x_1x_2 + b_{71}x_2y_1 - b_{20}y_2)y_3 + b_{17}y_3^2, \\
& \\
& y_2 + d_{04}x_1x_2 + d_{06}x_1x_3 + d_{09}x_2y_1 + d_{11}x_3y_1 - (d_{24}x_1^2 + d_{42}x_2^2)y_2 - \\
& d_{75}x_2x_3y_2 - d_{54}x_3^2y_2 - d_{58}x_1y_1y_2 - d_{29}y_1^2y_2 - d_{42}y_2^3 - \\
& (d_{26}x_1^2 + d_{44}x_2^2 + d_{77}x_2x_3 + d_{56}x_3^2 + d_{60}x_1y_1 + d_{31}y_1^2 + (d_{44} + d_{75})y_2^2)y_3 - \\
& (d_{54} + d_{77})y_2y_3^2 - d_{56}y_3^3, \\
& \\
& -x_2 + d_{42}x_2^3 + d_{26}x_1^2x_3 + (d_{44} + d_{75})x_2^2x_3 + d_{56}x_3^3 + d_{60}x_1x_3y_1 + \\
& d_{31}x_3y_1^2 + d_{04}x_1y_2 + d_{09}y_1y_2 + d_{44}x_3y_2^2 + d_{06}x_1y_3 + \\
& d_{11}y_1y_3 + d_{77}x_3y_2y_3 + d_{56}x_3y_3^2 + x_2(d_{24}x_1^2 + (d_{54} + d_{77})x_3^2 + \\
& d_{58}x_1y_1 + d_{29}y_1^2 + d_{42}y_2^2 + d_{75}y_2y_3 + d_{54}y_3^2), \\
& \\
& y_3 + f_{04}x_1x_2 + f_{06}x_1x_3 + f_{09}x_2y_1 + f_{11}x_3y_1 - (f_{24}x_1^2 + f_{42}x_2^2)y_2 - \\
& f_{75}x_2x_3y_2 - f_{54}x_3^2y_2 - f_{58}x_1y_1y_2 - f_{29}y_1^2y_2 - f_{42}y_2^3 - \\
& (f_{26}x_1^2 + f_{44}x_2^2 + f_{77}x_2x_3 + f_{56}x_3^2 + f_{60}x_1y_1 + \\
& f_{31}y_1^2 + (f_{44} + f_{75})y_2^2)y_3 - (f_{54} + f_{77})y_2y_3^2 - f_{56}y_3^3, \\
& \\
& -x_3 + f_{24}x_1^2x_2 + f_{42}x_2^3 + f_{26}x_1^2x_3 + (f_{44} + f_{75})x_2^2x_3 + \\
& (f_{54} + f_{77})x_2x_3^2 + f_{56}x_3^3 + f_{58}x_1x_2y_1 + f_{60}x_1x_3y_1 + f_{29}x_2y_1^2 + \\
& f_{31}x_3y_1^2 + f_{04}x_1y_2 + f_{09}y_1y_2 + f_{42}x_2y_2^2 + f_{44}x_3y_2^2 + \\
& (f_{06}x_1 + f_{11}y_1 + f_{75}x_2y_2 + f_{77}x_3y_2)y_3 + (f_{54}x_2 + f_{56}x_3)y_3^2)
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

(2.1.4)

onde os coeficientes são reais.

2.1.2 Caso 6 : 4

De maneira análoga ao caso anterior consideramos o campo de vetores $\dot{x} = X(x)$ \widehat{R}_2 -reversível tal que $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^6$, $X(0) = 0$ e $DX(0) = \widehat{A}_2$ é a parte linear do campo, na forma canônica de Jordan real, dada pela matriz:

$$\widehat{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Novamente escrevemos

$$\dot{x} = \widehat{A}_2 x + h(x) + o(|x|^{m+1}),$$

com $m = 3$ e tomamos h no núcleo do operador homológico $L_{\widehat{A}_2^T}$ e $\widehat{R}_2 h(x) = -h(\widehat{R}_2 x)$. Logo, $\widehat{A}_2 x + h(x)$ é dado por:

$$\left[\begin{array}{l}
-(a_{21} - a_{65}x_1 - a_{71}y_1)(x_3y_2 - x_2y_3), \\
-(b_{21} - b_{65}x_1 - b_{71}y_1)(x_3y_2 - x_2y_3), \\
y_2 - d_{42}x_2^3 - (d_{44} + d_{75})y_2^2y_3 - \\
y_3(d_{05}x_1 + d_{26}x_1^2 + d_{44}x_2^2 + d_{77}x_2x_3 + d_{56}x_3^2 + y_1(d_{10} + d_{60}x_1 + d_{31}y_1) + d_{56}y_3^2) - \\
y_2(d_{03}x_1 + d_{24}x_1^2 + d_{42}x_2^2 + d_{75}x_2x_3 + d_{54}x_3^2 + y_1(d_{08} + d_{58}x_1 + d_{29}y_1) + (d_{54} + d_{77})y_3^2), \\
-x_2 + d_{42}x_2^3 + (d_{44} + d_{75})x_2^2x_3 + \\
x_2(d_{03}x_1 + d_{24}x_1^2 + (d_{54} + d_{77})x_3^2 + y_1(d_{08} + d_{58}x_1 + d_{29}y_1) + d_{42}y_2^2 + d_{75}y_2y_3 + d_{54}y_3^2) + \\
x_3(d_{05}x_1 + d_{26}x_1^2 + y_1(d_{10} + d_{60}x_1 + d_{31}y_1) + y_2(d_{44}y_2 + d_{77}y_3) + d_{56}(x_3^2 + y_3^2)), \\
y_3 - y_2(f_{03}x_1 + f_{24}x_1^2 + f_{42}x_2^2 + f_{75}x_2x_3 + f_{54}x_3^2 + y_1(f_{08} + f_{58}x_1 + f_{29}y_1) + f_{42}y_2^2) \\
-(f_{05}x_1 + f_{26}x_1^2 + f_{44}x_2^2 + f_{77}x_2x_3 + f_{56}x_3^2 + y_1(f_{10} + f_{60}x_1 + f_{31}y_1) + (f_{44} + f_{75})y_2^2)y_3 - \\
(f_{54} + f_{77})y_2y_3^2 - f_{56}y_3^3, \\
-x_3 + f_{03}x_1x_2 + f_{24}x_1^2x_2 + f_{42}x_2^3 + f_{05}x_1x_3 + f_{26}x_1^2x_3 + (f_{44} + f_{75})x_2^2x_3 + \\
(f_{54} + f_{77})x_2x_3^2 + f_{56}x_3^3 + f_{08}x_2y_1 + f_{58}x_1x_2y_1 + f_{10}x_3y_1 + f_{60}x_1x_3y_1 + f_{29}x_2y_1^2 + \\
f_{31}x_3y_1^2 + f_{42}x_2y_2^2 + f_{44}x_3y_2^2 + f_{75}x_2y_2y_3 + f_{77}x_3y_2y_3 + f_{54}x_2y_3^2 + f_{56}x_3y_3^2.
\end{array} \right], \quad (2.1.5)$$

onde os coeficientes são reais.

2.2 Forma Normal de Birkhoff

Seja \mathcal{H}_n o espaço vetorial sobre \mathbb{R} de todos os polinômios homogêneos de grau n . Consideramos o colchete de Poisson definido por $\{G, F\} := \omega(X_F, X_G)$ onde ω é a estrutura simplética padrão dada na Seção 1.1 e $G, F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. O conjunto \mathcal{H}_n com o colchete de Poisson é uma

álgebra de Lie.

A aplicação adjunta $Ad_{H_2} : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ é definida por

$$Ad_{H_2}(H) = \{H_2, H\} = \omega(X_{H_2}, X_H) = \langle -X_{H_2}, \nabla H \rangle, \quad (2.2.6)$$

onde \langle, \rangle é o produto interno padrão em \mathbb{R}^{2n} .

O Teorema da Forma Normal de Birkhoff [29] afirma que se temos uma função Hamiltoniana $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$, onde $H_i \in \mathcal{H}_i$ é a parte homogênea de grau i , e $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{H}_i$ satisfaz $\mathcal{G}_i \oplus \text{Im}(Ad_{H_2}) = \mathcal{H}_i$, então existe uma transformação simplética formal em série de potências Φ tal que $H \circ \Phi = H_2 + \widetilde{H}_3 + \widetilde{H}_4 + \dots$ onde $\widetilde{H}_i \in \mathcal{G}_i$ ($i = 3, 4, \dots$).

Notamos que na forma normal de Birkhoff o que se encontra é uma forma normal para a função Hamiltoniana e a partir desta função encontramos o campo vetorial associado que dizemos estar na forma normal de Birkhoff.

A álgebra de Lie $(\mathcal{H}_2; \{, \})$ é isomorfo à álgebra de Lie semi-simples $(sp(n, \mathbb{R}); [,])$ pelo isomorfismo $H \mapsto DX_H(0)$ (veja [29] Cap 1, Seção 3). Além disso a decomposição de Jordan-Chevalley dos elementos em $sp(n, \mathbb{R})$ vale para os elementos de \mathcal{H}_2 . Nos casos $6 : 2$ e $6 : 4$ a matriz $DX_{H_2}(0)$ é semi-simples. Portanto, H_2 é semi-simples e Ad_{H_2} também para ambos casos. Segue por [29] Lema 2.4, que $\text{Ker}(Ad_{H_2})$ completa $\text{Im}(Ad_{H_2})$ em \mathcal{H}_i , ou seja, podemos tomar $\mathcal{G}_i = \text{Ker}(Ad_{H_2})$ em \mathcal{H}_i .

Como R_j é simplética, a mudança de coordenadas Φ pode ser escolhida tal que $H \circ \Phi$ satisfaz $H \circ \Phi \circ R_j = -H \circ \Phi$, ou seja, é possível escolher uma mudança de coordenadas de tal forma que a R_j -reversibilidade do campo de vetores original é preservada. Para verificar esta afirmação decompomos $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^+ \oplus \mathcal{H}_i^-$, onde $\mathcal{H}_i^+ = \{H \in \mathcal{H}_i : H \circ R_j = H\}$ e $\mathcal{H}_i^- = \{H \in \mathcal{H}_i : H \circ R_j = -H\}$. Se R_j é simplética, então $Ad_{H_2}(\mathcal{H}_i^\pm) = \mathcal{H}_i^\mp$. Neste caso, se $\mathcal{H}_i = \mathcal{G}_i \oplus Ad_{H_2}(\mathcal{H}_i)$, então $\mathcal{H}_i^- = (\mathcal{G}_i \cap \mathcal{H}_i^-) \oplus Ad_{H_2}(\mathcal{H}_i^+)$. Temos que nossa função Hamiltoniana H original é R_j -reversível, então $H \in \mathcal{H}_i^- = (\mathcal{G}_i \cap \mathcal{H}_i^-) \oplus Ad_{H_2}(\mathcal{H}_i^+)$ e assim $H = F + G$ onde $F \in \mathcal{G}_i \cap \mathcal{H}_i^-$ e $G \in Ad_{H_2}(\mathcal{H}_i^+)$. Mas para cada grau dos polinômios homogêneos de H , pela forma normal de Birkhoff, é possível encontrar uma transformação em séries de potências formais simplética Φ

tal que $H \circ \Phi = H_2 + F_3 + F_4 + \dots$, ou seja, tal transformação elimina os monômios de cada grau que pertencem à $Ad_{H_2}(\mathcal{H}_i^+)$. Logo, podemos fazer a mudança de coordenadas restrita a \mathcal{H}_i^- .

A seguir vamos exibir a forma normal de Birkhoff para os casos 6 : 2 e 6 : 4.

2.2.1 Caso 6 : 2

No capítulo anterior, consideramos a parte linear de um campo de vetores R_1 -reversíveis na forma canônica de Jordan. Para isso aplicamos uma transformação sobre o campo. Logo, aplicamos essa mesma transformação na estrutura simplética e obtemos $\widehat{J} = P_1^T J P_1$, onde P_1 é a matriz transformação que leva a parte linear do campo vetorial na forma canônica de Jordan real.

Obtemos a forma normal de Birkhoff considerando os termos de ordem 3 de uma função Hamiltoniana geral $H : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$. Calculamos o núcleo da adjunta Ad_{H_2} , onde H_2 é dada pela equação (1.5.7), e impomos que $H \circ \widehat{R}_1 = -H$ e assim obtemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_3 = & b_{22}x_1^3 + b_{66}x_1x_2x_3 + b_{52}x_1x_3^2 + b_{23}x_1^2y_1 + b_{41}x_2^2y_1 + b_{72}x_2x_3y_1 + b_{53}x_3^2y_1 + b_{28}x_1y_1^2 + \\ & b_{33}y_1^3 + b_{41}y_1y_2^2 + b_{40}x_1(x_2^2 + y_2^2) + b_{66}x_1y_2y_3 + b_{72}y_1y_2y_3 + b_{52}x_1y_3^2 + b_{53}y_1y_3^2. \end{aligned}$$

Logo, o campo vetorial, associado à função Hamiltoniana $H = H_2 + \widetilde{H}_3$, na forma normal de Birkhoff até ordem 2 é dado por:

$$h_{b1} = \widehat{A}_1x + \widetilde{h}_{b1}(x) = \left[\begin{array}{l} (b_{23}x_1^2 + 2b_{28}y_1x_1 + b_{53}x_3^2 + 3b_{33}y_1^2 + b_{53}y_3^2 + b_{72}x_2x_3 + b_{41}(x_2^2 + y_2^2) + b_{72}y_2y_3) \frac{\gamma}{\delta} \\ (-3b_{22}x_1^2 - 2b_{23}y_1x_1 - b_{52}x_3^2 - b_{28}y_1^2 - b_{52}y_3^2 - b_{66}x_2x_3 - b_{40}(x_2^2 + y_2^2) - b_{66}y_2y_3) \frac{\gamma}{\delta} \\ (b_{66}x_1x_2 + b_{72}y_1x_2 + 2b_{52}x_1x_3 + 2b_{53}x_3y_1) \frac{\beta}{\delta} + y_2 \\ (b_{66}x_1y_2 + b_{72}y_1y_2 + 2(b_{52}x_1 + b_{53}y_1)y_3) \frac{\beta}{\delta} - x_2 \\ (-2b_{40}x_1x_2 - 2b_{41}y_1x_2 - b_{66}x_1x_3 - b_{72}x_3y_1) \frac{\beta}{\delta} + y_3 \\ (-2b_{40}x_1y_2 - 2b_{41}y_1y_2 - b_{66}x_1y_3 - b_{72}y_1y_3) \frac{\beta}{\delta} - x_3 \end{array} \right] \quad (2.2.7)$$

onde $\delta = (-a_{04}a_{08} + a_{03}a_{09} - a_{06}a_{10} + a_{05}a_{11})^{5/2}/(a_{06}a_{10} - a_{05}a_{11})^2$, $\beta = (a_{04}a_{08} - a_{03}a_{09} + a_{06}a_{10} - a_{05}a_{11})/(-a_{06}a_{10} + a_{05}a_{11})$, $\gamma = (a_{04}a_{08} - a_{03}a_{09} + a_{06}a_{10} - a_{05}a_{11})/(-a_{04}a_{08} + a_{03}a_{09})$ e os a_i 's são coeficientes de H_2 . Logo, h_{b1} é a forma normal de Birkhoff do campo vetorial original.

2.2.2 Caso 6 : 4

Analogamente ao caso anterior, temos que H_2 é dado pela equação (1.5.10) e obtemos

$$\tilde{H}_3 = (b_{65}x_1 + b_{71}y_1)(x_3y_2 - x_2y_3).$$

Logo a forma normal de Birkhoff truncada até ordem 2 para este caso é dada por:

$$h_{b2} = \hat{A}_2x + \tilde{h}_{b2} = \begin{bmatrix} \frac{b(x_3y_2 - x_2y_3)\alpha^2}{\beta} \\ \frac{a(x_3y_2 - x_2y_3)\alpha^2}{\beta} \\ (-ax_1 - by_1)y_2 + y_2 \\ (ax_1 + by_1)x_2 - x_2 \\ (-ax_1 - by_1)y_3 + y_3 \\ (ax_1 + by_1)x_3 - x_3 \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

onde $a = b_{65}/\alpha$, $b = b_{71}/\alpha$ e $\alpha = \sqrt{-a_{06}a_{10} + a_{05}a_{11} - a_{15}a_{17} + a_{14}a_{18}}$.

Observação 2.2.1 *É conveniente enfatizar que tanto para o caso 6 : 2 quanto para o caso 6 : 4 a forma normal de Birkhoff é um caso particular de forma normal de Belitskii. Em outras palavras, a forma normal de Birkhoff elimina mais termos não ressonantes do que a forma normal de Belitskii.*

Capítulo 3

Redução de Liapunov-Schmidt

Neste capítulo adaptamos a Redução de Liapunov-Schmidt dada em [31] para os casos desta tese. De um modo geral, tal método reduz o problema de encontrar soluções periódicas para um sistema de equações diferenciais a resolver um sistema de equações algébricas. O Método de Redução de Liapunov-Schmidt também é apresentado nos trabalhos [16], [25] e [31].

3.1 Introdução

Consideramos a EDO

$$\dot{x} = X(x); \quad x \in \mathbb{R}^6, \quad (3.1.1)$$

satisfazendo $X(Rx) = -RX(x)$ com R uma involução linear em \mathbb{R}^6 . Lembramos que as involuções consideradas em \mathbb{R}^6 são aquelas determinadas em 1.5.1 e 1.5.2: $R = \widehat{R}_1$ e $R = \widehat{R}_2$, respectivamente.

Assumimos que $X(0) = 0$ e denotamos

$$A = DX(0), \quad (3.1.2)$$

a matriz Jacobiana de X em 0.

Em ambos casos que consideramos aqui, as matrizes Jacobiana A na suas formas canônicas de Jordan real coincidem. Como vimos na Seção 1.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nosso objetivo é encontrar condições genéricas para a existência de famílias de órbitas periódicas com período próximo de 2π para os campos vetoriais R_j -reversíveis com a matriz da parte linear dada por A . Tais condições genéricas serão dadas com respeito aos 3-jatos dos campos vetoriais considerados e suporemos que estes já estão na forma normal de Belitskii. Para tanto, utilizamos a redução de Liapunov-Schmidt, que será descrita a seguir.

3.2 Desenvolvimento do método

Denotamos por $C_{2\pi}^0$ o espaço de Banach das aplicações $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ contínuas 2π -periódicas e $C_{2\pi}^1$ o correspondente C^1 -subespaço.

Definimos um produto interno em $C_{2\pi}^0$ por

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle x_1(t), x_2(t) \rangle dt \quad (3.2.3)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota um produto interno canônico em \mathbb{R}^6 .

O principal objetivo é encontrar soluções periódicas de pequena amplitude de (3.1.1) com período próximo de 2π .

Consideramos a aplicação $F : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow C_{2\pi}^0$ definida por

$$F(x, \sigma)(t) = (1 + \sigma)\dot{x}(t) - X(x(t)). \quad (3.2.4)$$

Notamos que se $(x_0, \sigma_0) \in C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R}$ é tal que

$$F(x_0, \sigma_0) = 0, \quad (3.2.5)$$

então $\tilde{x}(t) := x_0((1 + \sigma_0)t)$ é uma solução $2\pi/(1 + \sigma_0)$ -periódica do problema original (3.1.1).

Logo, o problema de encontrar soluções periódicas com período próximo de 2π do problema original (3.1.1), se reduz a encontrar zeros da aplicação F .

Utilizando o Teorema da Função Implícita, vamos reduzir o problema que está definido em espaços de dimensão infinita para espaços equivalentes de dimensão finita.

Notamos que $(x_0, \sigma_0) = (0, 0)$ é uma solução de $F(x_0, \sigma_0) = 0$, pois temos a hipótese de que $X(0) = 0$. Definimos $L := D_x F(0, 0) : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$, onde L é dada explicitamente por:

$$Lx(t) := \dot{x}(t) - Ax(t).$$

Consideramos a decomposição única de A em parte semi-simples S e nilpotente N ; $A = S + N$. Nos casos considerados nesta tese, a matriz A não possui parte nilpotente, logo, $A = S$. O desenvolvimento do método será feito considerando a parte linear do campo com sendo semi-simples.

Definimos o subespaço $\mathcal{N} \subset C_{2\pi}^1$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{q; \dot{q}(t) = Sq(t)\} \\ &= \{q; q(t) = \exp(St)x; x \in \mathbb{R}^6\} \\ &=^{S=A} \{q; q(t) = \exp(At)x; x \in \mathbb{R}^6\}. \end{aligned}$$

Notemos que o núcleo do operador L é exatamente o espaço \mathcal{N} . Em geral, o subespaço \mathcal{N} é construído de tal maneira que o núcleo do operador L esteja contido em \mathcal{N} .

O objetivo agora é colocar as soluções de $F(x, \sigma) = 0$ em correspondência um a um com as soluções de uma equação em \mathcal{N} . Para isto, analisamos algumas propriedades de L . Consideramos as seguintes notações e definições.

Definimos os subespaços

$$X_1 = \{x \in C_{2\pi}^1 : (x, \mathcal{N}) = 0\}$$

e

$$Y_1 = \{y \in C_{2\pi}^0 : (y, \mathcal{N}) = 0\}$$

como complemento ortogonal de \mathcal{N} em $C_{2\pi}^1$ e $C_{2\pi}^0$, respectivamente, pelo produto interno (3.2.3).

Seja $(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$ com $q_i = \exp(tS)u_i$ onde $\{u_i, i = 1, \dots, 6\}$, é uma base para \mathbb{R}^6 .

Definimos a projeção

$$\mathcal{P} : C_{2\pi}^0 \rightarrow C_{2\pi}^0$$

por

$$\mathcal{P}(\cdot) = \sum_{i=1}^6 q_i^*(\cdot)q_i, \quad (3.2.6)$$

onde $q_i^*(x) = (q_i, x)$.

Temos que $\text{Im}(\mathcal{P}) = \mathcal{N}$ e $\text{Ker}(\mathcal{P}) = Y_1$. Assim,

$$C_{2\pi}^1 = X_1 \oplus \mathcal{N}, \quad C_{2\pi}^0 = Y_1 \oplus \mathcal{N}.$$

Notemos que o subespaço \mathcal{N} é um subespaço de dimensão 6 em $C_{2\pi}^1$.

Agora, escrevemos

$$F(x, \sigma) = F(q + x_1, \sigma) =: \widehat{F}(q, x_1, \sigma); \quad q \in \mathcal{N}, \quad x_1 \in X_1.$$

Antes de estudar a equação $\widehat{F}(q, x_1, \sigma) = 0$ necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 3.2.1 (*Alternativa de Fredholm*) *Seja $A(t)$ uma matriz em C_T^0 , espaço de Banach das funções contínuas T -periódicas, e seja g em C_T , espaço das funções T -periódicas. Então a equação $\dot{x} = A(t)x + g(t)$ tem uma solução em C_T se, e somente se,*

$$\int_0^T \langle y(t), g(t) \rangle dt = 0$$

para toda solução y da equação adjunta

$$\dot{y} = -A^*(t)y$$

tal que $y^t \in C^T$.

Dem: Veja [12].

Com o fato de que $L(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ e a Alternativa de Fredholm temos o seguinte resultado:

Lema 3.2.2 A aplicação $\widehat{L} := L|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y_1$ é bijetiva.

Dem: Já vimos que $\text{Ker}L = \mathcal{N}$, portanto \widehat{L} é injetora.

Para verificar que \widehat{L} é sobrejetiva, tomamos $y_1 \in Y_1$. Sabemos que $(y_1, \mathcal{N}) = 0$. Agora, as soluções 2π -periódicas da equação adjunta

$$\dot{y} = -A^*y$$

estão contidas em \mathcal{N} . Pelo Lema anterior temos que existe $x_1 \in C_{2\pi}^1$ solução da equação $\dot{x} = Ax + y_1$. Como $L(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ segue que $x_1 \in X_1$ e \widehat{L} é sobrejetiva. ■

Notemos que estudar as soluções de $\widehat{F}(q, x_1, \sigma) = 0$ é equivalente a estudar as soluções da decomposição:

$$\begin{aligned} (I - \mathcal{P}) \circ \widehat{F}(q, x_1, \sigma) &= 0, \\ \mathcal{P} \circ \widehat{F}(q, x_1, \sigma) &= 0. \end{aligned}$$

Com o Lema 3.2.2 e o Teorema da Função Implícita podemos resolver a primeira equação como $x_1 = x_1^*(q, \sigma)$. Então, resolver (3.2.5) se reduz a resolver

$$\widetilde{F}(q, \sigma) := \mathcal{P} \circ \widehat{F}(q, x_1^*(q, \sigma), \sigma) = 0.$$

Por outro lado, segue de (3.2.6) que esta equação esta satisfeita se, e somente se,

$$q_i^*(\widehat{F}(q, x_1^*(q, \sigma), \sigma)) = 0, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Notamos que (u, σ) é uma solução de (3.2.5) desde que

$$B(u, \sigma) = 0, \quad (3.2.7)$$

com $B : \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$ definido por

$$B(u, \sigma) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-tS) \widehat{F}(x^*(u, \sigma), \sigma) dt$$

e

$$x^*(u, \sigma) := \exp(tS)u + x_1^*(\exp(tS)u, \sigma).$$

A expressão de B segue diretamente da definição de q^* que é dada pelo produto interno (\cdot, \cdot) .

Propriedades da redução B

Apresentamos algumas propriedades da aplicação B .

Lema 3.2.3 *i) $s_\phi B(u, \sigma) = B(s_\phi u, \sigma)$;*

ii) $RB(u, \sigma) = -B(Ru, \sigma)$, onde s_ϕ é a ação S^1 em \mathbb{R}^6 definida por $s_\phi u = \exp(-\phi S_0)u$.

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [25].

Observe que o item *i)* nos afirma que a aplicação B é S^1 -equivariante enquanto que *ii)* nos garante que B preserva a R -anti-simetria do campo X_H .

Assumimos que (3.1.1) está na forma normal de Belitskii até ordem p . Escrevemos o campo na forma $X_H(x) = Ax + h(x) + r(x)$ onde $r(x) = \mathcal{O}(\|x\|^{p+1})$ e temos o resultado:

Teorema 3.2.4 *São válidas as seguintes propriedades:*

i) $x^(u, \sigma) = \exp(tS)u + \mathcal{O}(\|u\|^{p+1})$,*

ii) $B(u, \sigma) = (1 + \sigma)Su - Au - h(u) + \mathcal{O}(\|u\|^{p+1})$ para σ próxima da origem.

Dem: A demonstração deste resultado segue com pequenas modificações das demonstrações encontradas em [25] e [31].

Se (u, σ) é uma solução de (3.2.7) então $x = x^*(u, \sigma)$ corresponde a uma solução $2\pi/(1+\sigma)$ -periódica de (3.2.5).

Lembramos que a solução de (3.2.7) é R -simétrica se, e somente se, intercepta o subespaço $\text{Fix}(R)$ em exatamente dois pontos. Assim, obtemos todas as soluções periódicas simétricas de (3.2.7) resolvendo a equação

$$G(u, \sigma) = B(u, \sigma) |_{\text{Fix}(R)} = 0. \quad (3.2.8)$$

Na próxima subseção encontramos o sistema de equação algébrica G que corresponde à Redução de Liapunov-Schmidt dos casos $6 : 2$ e $6 : 4$.

3.2.1 Caso $6 : 2$

Pela observação 2.2.1, podemos aplicar o Teorema 3.2.4 para a forma normal (2.2.7). Sendo assim, a Equação (3.2.8) é da forma:

$$\begin{aligned} G(x_2, x_3, \sigma) &= B(x, \sigma) |_{x \in \text{Fix}(\widehat{R}_1)} = \\ &= \begin{bmatrix} (b_1 x_2^2 + x_3(b_2 x_2 + b_3 x_3)) \frac{\gamma}{\delta} + \cdots \\ (b_4 x_2^2 + x_3(b_5 x_2 + b_6 x_3)) \frac{\gamma}{\delta} + \cdots \\ \sigma x_2 + \cdots \\ \sigma x_3 + \cdots \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

onde δ e γ dependem dos coeficientes do 2-jato de da função Hamiltoniana.

3.2.2 Caso $6 : 4$

Analogamente ao caso anterior, a forma normal de Birkhoff é dada por (2.2.8) e a Equação (3.2.8) é da forma:

$$G(x_1, y_1, y_2, y_3, \sigma) = B(x, \sigma)|_{x \in \text{Fix}(\widehat{R}_2)} =$$

$$\begin{bmatrix} F_\sigma(x_1, y_1, y_2, y_3) \\ K_\sigma(x_1, y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(\sigma + a_1x_1 + a_2y_1) + \cdots \\ y_3(\sigma + a_1x_1 + a_2y_1) + \cdots \end{bmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo enunciamos e demonstramos os resultados relacionados com os campos vetoriais Hamiltoniano R_j -reversíveis com 3 graus de liberdade. Além disso, utilizando a combinação da Forma Normal de Belitskii e a Redução de Liapunov-Schmidt generalizamos alguns resultados apresentados em [4] para campos vetoriais Hamiltonianos reversíveis com 2 graus de liberdade.

4.1 Dois graus de liberdade

Nesta seção consideramos um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^4$$

R_0 -reversível pela involução

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tal conjunto de campos vetoriais é denotado por $\mathfrak{X}^0 := \mathfrak{X}^{R_0}(4)$ e está dotado da topologia C^∞ .

O sistema de coordenadas fixadas é $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$.

Analogamente à Proposição 1.4.1, em \mathbb{R}^4 uma involução simplética é simpléticamente conjugada a Id_4 , ou $-Id_4$ ou R_0 (Veja [4]).

Em [4] é encontrada a forma normal de Birkhoff para cada $X \in \mathfrak{X}^0$ e o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1 *Assuma que H é um Hamiltoniano anti-simétrico com relação à involução R_0 e o campo vetorial X_H possui um ponto de equilíbrio do tipo elíptico. Então existe um outro Hamiltoniano \tilde{H} , formalmente C^k -equivalente à direita a H , tal que o campo vetorial $X_{\tilde{H}}$ possui duas famílias a um parâmetro de soluções periódicas simétricas, com período próximo de $2\pi/\sqrt{ad-bc}$, como no Teorema de Liapunov, tendendo ao ponto de equilíbrio ($\pm\sqrt{ad-bc}i$ são autovalores de $DX_{\tilde{H}}(0)$).*

Nesta seção demonstramos o seguinte resultado que generaliza o Teorema 4.1.1.

Teorema A: *Existe um conjunto aberto $\mathcal{U}^0 \subset \mathfrak{X}^0$ não vazio tal que*

- a) \mathcal{U}^0 é determinado pelo 3-jato do campo de vetores;
- b) cada $X \in \mathcal{U}^0$ possui 0, 2 ou 4 famílias a um parâmetro de soluções periódicas convergindo para origem quando o parâmetro σ converge para zero com período convergindo para $2\pi/\alpha$ onde $\pm\alpha i$ são autovalores da matriz $DX(0)$.

Dem: Considere uma estrutura simplética fixada analogamente à da Proposição 1.4.1, assim uma involução simplética é formalmente conjugada a uma das involuções: $Id_{\mathbb{R}^4}$ ou $-Id_{\mathbb{R}^4}$

$$\text{ou } R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (veja [4]).}$$

O caso em que $R_0 = -Id$ será discutido em 4.2.3. Trabalharemos agora com campo vetorial R_0 -reversíveis.

Pelo Lema 1.5.1, temos que a função Hamiltoniana do campo vetorial R_0 -reversível é:

$$H(x_1, y_1, x_2, y_2) = -cx_1x_2 + ax_2y_1 - dx_1y_2 + by_1y_2 + t.o.a.$$

Assim, a parte linear do campo vetorial X_H é dado por:

$$A = DX_H(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ -d & b & 0 & 0 \\ c & -a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1.1)$$

e seus autovalores são $\{\pm\sqrt{bc-ad}, \pm\sqrt{bc-ad}\}$.

Se $bc - ad > 0$, então os autovalores da parte linear de X_H são $\{\beta, -\beta, \beta, -\beta\}$, onde $\beta = \sqrt{bc - ad}$. Como estamos interessados em equilíbrio do tipo elíptico, este caso não será considerado aqui.

Tomamos $\alpha = \sqrt{ad - bc}$ e consideramos a transformação:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b}{\alpha} & 0 & \frac{-a}{\alpha} \\ 0 & \frac{-d}{\alpha} & 0 & \frac{-c}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\widehat{A} = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

onde P^{-1} é a matriz inversa de P .

Aplicando a mesma transformação na involução R_0 temos $\widehat{R}_0 = P^{-1}.R_0.P$ dada por

$$\widehat{R}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por um reescalonamento do tempo é possível escolher $\alpha = 1$ e assim a forma canônica de Jordan real é:

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primeiramente obtemos a forma normal de Belitskii de X_H considerando $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ até ordem 3, que é dado por $X_H(x_1, y_1, x_2, y_2) = A[x_1, y_1, x_2, y_2] + h(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Em seguida impomos a condição de que a forma normal é R_0 -reversível, isto é, $X_H \widehat{R}_0 = -\widehat{R}_0 X_H$. Assim, o sistema obtido é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 + (e_{21}y_1 + e_{23}y_2)(x_1^2 + y_1^2) + e_{30}y_2(x_2^2 + y_2^2) \\ &\quad + (e_{16}x_1 + e_{24}x_2)(y_1x_2 - x_1y_2) + e_{26}y_2(x_1x_2 + y_1y_2), \\ \dot{y}_1 &= -x_1 + (-e_{21}x_1 - e_{23}x_2)(x_1^2 + y_1^2) - e_{30}x_2(x_2^2 + y_2^2) \\ &\quad + (e_{16}y_1 + e_{24}y_2)(y_1x_2 - x_1y_2) - e_{26}x_2(x_1x_2 + y_1y_2), \\ \dot{x}_2 &= y_2 + (-d_{15}y_1 - d_{22}y_2)(x_1^2 + y_1^2) - (d_{20}y_1 + d_{29}y_2)(x_2^2 + y_2^2) \\ &\quad - (d_{17}y_1 + d_{25}y_2)(x_1x_2 + y_1y_2), \\ \dot{y}_2 &= -x_2 + (d_{15}x_1 + d_{22}x_2)(x_1^2 + y_1^2) + (d_{20}x_1 + d_{29}x_2)(x_2^2 + y_2^2) \\ &\quad + (d_{17}x_1 + d_{25}x_2)(x_1x_2 + y_1y_2). \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Agora encontraremos a forma normal de Birkhoff e veremos que esta em particular é uma forma normal de Belitskii. Logo, um teorema, para o \mathbb{R}^4 , análogo ao Teorema 3.2.4 pode ser aplicado (veja [31]).

Como aplicamos uma transformação P junto a parte linear do campo para obter a sua forma normal de Jordan real então a estrutura simplética é modificada, ou seja, aplicamos esta

mesma transformação na matriz canônica simplética

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

assim J é transformada por P na matriz

$$\hat{J} = P^t J P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inicialmente consideramos a parte homogênea de ordem 3 H_3 da função Hamiltoniana $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Calculamos a Ad_{H_2} dada por (2.2.6) e encontramos \tilde{H}_3 . Verificamos que todos os monômios de ordem 3, H_3 , são eliminados. Logo a forma normal de Birkhoff do campo vetorial X_H não possui monômios de ordem 2. Isto confirma o resultado em [4].

Em seguida tomamos a parte homogênea de ordem 4 H_4 da função Hamiltoniana H , calculamos o núcleo da adjunta Ad_{H_2} definida em (2.2.6).

Como o campo vetorial é \hat{R}_0 -reversível, temos pelo Lema 1.5.1 que H satisfaz $H \circ \hat{R}_0 = -H$.

Logo, a forma normal de H até ordem 4 é:

$$\begin{aligned} H &= H_2 + \tilde{H}_3 + \tilde{H}_4 \\ &= (-x_2 y_1 + x_1 y_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) (a_1 (x_1^2 + y_1^2) + a_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + a_3 (x_2^2 + y_2^2)). \end{aligned}$$

A forma normal de Birkhoff até ordem 3 é dada por $h_b(x) = \hat{J} \nabla H(x) = \hat{A}x + \tilde{h}_b(x)$ e sua

expressão é dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1 + a_1 y_1 (x_1^2 + y_1^2) + a_2 (2x_1 x_2 y_1 - x_1^2 y_2 + y_1^2 y_2) \\
&\quad + a_3 (3x_2^2 y_1 - 2x_1 x_2 y_2 + y_1 y_2^2), \\
\dot{y}_1 &= -x_1 + (a_2 y_1 + 2a_3 y_2)(x_2 y_1 - x_1 y_2) - x_1 (a_1 (x_1^2 + y_1^2) \\
&\quad + a_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + a_3 (x_2^2 + y_2^2)), \\
\dot{x}_2 &= y_2 + (2a_1 x_1 + a_2 x_2)(-x_2 y_1 + x_1 y_2) + y_2 (a_1 (x_1^2 + y_1^2) \\
&\quad + a_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + a_3 (x_2^2 + y_2^2)), \\
\dot{y}_2 &= -x_2 + (2a_1 y_1 + a_2 y_2)(-x_2 y_1 + x_1 y_2) - x_2 (a_1 (x_1^2 + y_1^2) \\
&\quad + a_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2) + a_3 (x_2^2 + y_2^2)).
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Observe que a forma normal de Birkhoff (4.1.3) está também na forma normal de Belitskii (4.1.2) e assim podemos aplicar o Teorema 3.2.4.

A Redução de Liapunov-Schmidt nos fornecerá todas as pequenas soluções periódicas \widehat{R}_0 -simétricas resolvendo a equação

$$B(x, \sigma)|_{x \in \text{Fix}(\widehat{R}_0)} = 0,$$

com

$$B(x, \sigma) = (1 + \sigma)Sx - \widehat{A}x - \widetilde{h}_b(x), \quad x \in \mathbb{R}^4,$$

onde S é a parte semi-simples da $S - N$ -decomposição de \widehat{A} . (Veja [31]).

Para o caso que estamos considerando a matriz \widehat{A} é semi-simples.

O subespaço $\text{Fix}(\widehat{R}_0) = \{(0, y_1, 0, y_2); y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$.

Temos que para este caso o sistema de equações algébricas $B(x, \sigma) = 0$ restrito ao conjunto $\text{Fix}(\widehat{R}_0)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
G(y_1, y_2, \sigma) &= B(x, \sigma)|_{x \in \text{Fix}(\widehat{R}_0)} = \begin{bmatrix} F(y_1, y_2, \sigma) \\ K(y_1, y_2, \sigma) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -y_1(a_1 y_1^2 + a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2 - \sigma) + \cdots \\ -y_2(a_1 y_1^2 + a_2 y_1 y_2 + a_3 y_2^2 - \sigma) + \cdots \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

graus de liberdade em \mathbb{R}^6 e sistema de coordenadas $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^6$. Tomamos \mathfrak{X}^1 e \mathfrak{X}^2 com a topologia C^∞ .

4.2.1 Caso 6:2

Teorema B: *Existe um aberto $\mathcal{U}^1 \subset \mathfrak{X}^1$ não vazio tal que*

- a) *Cada elemento X em \mathcal{U}^1 é determinado pelo seu 2-jato,*
- b) *para $X \in \mathcal{U}^1$ não existem famílias a um parâmetro de soluções periódicas simétricas convergindo para o ponto de equilíbrio com períodos tendendo a $2\pi/\alpha$, onde α é tal que $\pm\alpha i$ são os autovalores da parte linear do campo vetorial X em \mathcal{U}^1 com multiplicidade algébrica 2.*

Dem: A forma normal de Belitskii \widehat{R}_1 -reversível do caso 6 : 2 é dada por (2.1.4) e a forma normal de Birkhoff \widehat{R}_1 -reversível é dada por (2.2.7). Pela Observação 2.2.1, temos que o Teorema 3.2.4 pode ser aplicado ao campo vetorial h_{b_1} (2.2.7). Assim, obtemos que a equação reduzida, restrita ao $\text{Fix}(\widehat{R}_1)$, da Redução de Liapunov-Schmidt é dada por (3.2.9):

$$G(x_2, x_3, \sigma) = B(x, \sigma)|_{x \in \text{Fix}(\widehat{R}_1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 x_2^2 + x_3(b_2 x_2 + b_3 x_3) + \cdots \\ b_4 x_2^2 + x_3(b_5 x_2 + b_6 x_3) + \cdots \\ \sigma x_2 + \cdots \\ \sigma x_3 + \cdots \end{bmatrix}.$$

Pelas duas últimas equações temos que a única solução de $G(x_2, x_3, \sigma) = 0$ é a trivial $(x_2, x_3) = (0, 0)$.

Definimos o aberto em \mathfrak{X}_1 :

$$\mathcal{U}^1 = \left\{ X \in \Omega^1; \text{ a forma canônica de } DX(0) \text{ satisfaz (1.5.8)} \right\}.$$

Portanto, um campo vetorial $X \in \mathcal{U}^1$ determinado pelo seu 2-jato não possui famílias de órbitas periódicas *simétricas* próximas da origem.

■

4.2.2 Caso 6:4

Teorema C: *Existe um conjunto aberto $\mathcal{U}^2 \subset \mathfrak{X}^2$ não vazio tal que*

- a) *Cada elemento de \mathcal{U}^2 é determinado pelo seu 2-jato,*
- b) *cada $X \in \mathcal{U}^2$ possui uma família a 2-parâmetros de soluções periódicas simétricas convergindo para um ponto de equilíbrio com períodos convergindo para $2\pi/\alpha$ onde α é tal que $\pm\alpha i$ são os autovalores da parte linear do campo vetorial X em \mathcal{U}^2 com multiplicidade algébrica 2.*

Dem: Definimos o conjunto aberto em \mathfrak{X}^2 :

$$\mathcal{U}^2 = \{X \in \mathfrak{X}^2; \text{ a forma canônica de } DX(0) \text{ satisfaz (1.5.11)}\}$$

Seja $X \in \mathcal{U}^2$. Logo, forma normal de Birkhoff de X é dado pela expressão (2.2.8) e assim a sua equação reduzida da Redução de Liapunov-Schmidt é dada por (3.2.10):

$$G(x_1, y_1, y_2, y_3, \sigma) = B(x, \sigma)|_{x \in \text{Fix}(\widehat{R}_2)} =$$

$$\begin{bmatrix} F_\sigma(x_1, y_1, y_2, y_3) \\ K_\sigma(x_1, y_1, y_2, y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(\sigma + a_1x_1 + a_2y_1) + \cdots \\ y_3(\sigma + a_1x_1 + a_2y_1) + \cdots \end{bmatrix}.$$

O nosso objetivo agora é encontrar soluções desta equação.

Notamos que $(F_\sigma, K_\sigma)(0, 0, 0, 0) = 0$ e $\frac{\partial(F_\sigma, K_\sigma)}{\partial y_2 \partial y_3}(0, 0, 0, 0) = \sigma^2 \neq 0$. Então, existem uma vizinhança V de $(x_1, y_1) = (0, 0)$ e únicas funções $y_2 = \xi_\sigma(x_1, y_1)$, $y_3 = \delta_\sigma(x_1, y_1)$ em V tal que $(F_\sigma, K_\sigma)(x_1, y_1, \xi_\sigma(x_1, y_1), \delta_\sigma(x_1, y_1)) = (0, 0)$.

Para cada σ consideramos $\gamma_\sigma : (x_1, y_1) \mapsto (x_1, y_1, \xi_\sigma(x_1, y_1), \delta_\sigma(x_1, y_1))$. Agora tomamos a parametrização $(x_1, y_1) \mapsto (a\sigma, b\sigma)$ e $\gamma_{\sigma\lambda_0} : (a\sigma, b\sigma) \mapsto (a\sigma, b\sigma, \xi_\sigma(a\sigma, b\sigma), \delta_\sigma(a\sigma, b\sigma))$ onde $\lambda_0 = a/b$. Então, existe uma família a 2-parâmetros de órbitas periódicas $\gamma_{\sigma\lambda}$ tal que para cada $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, a família de órbitas periódicas $\gamma_{\lambda_0\sigma}$ é uma família de Liapunov, isto é, $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \gamma_{\sigma\lambda_0} = 0$ e o período da solução do problema original converge para $2\pi/\alpha$. ■

Observação 4.2.1 *Para cada \mathfrak{X}^j com $j = 0, 1, 2$ seja $\mathfrak{X}_e^j \subset \mathfrak{X}^j$ o conjunto dos campos vetoriais tal que a origem é um ponto de equilíbrio do tipo elíptico. Então \mathcal{U}^j é aberto denso em \mathfrak{X}_e^j .*

4.2.3 Caso degenerado

A título de ilustração consideraremos um exemplo do caso $4 : 0$ para apresentar algumas dificuldades que surgem quando a involução considerada é tal que a dimensão do seu conjunto dos pontos fixos é zero. Este caso é muito degenerado mesmo quando considerado dentro do universo Hamiltoniano. No entanto, pode-se construir na mecânica modelos de sistemas Hamiltonianos que são reversíveis por $-Id$.

Considerando campos vetoriais com um grau de liberdade (em \mathbb{R}^2) reversível com respeito a $-Id$, Buzzi e Teixeira em [4] mostram que não existem soluções periódicas em torno da origem. Isto ocorre devido um problema de orientação.

A seguir apresentamos um modelo que envolve duas cargas (uma delas sendo positiva e a outra negativa). A função Hamiltoniana com dois graus de liberdade é

$$H(x, u, y, v) = \frac{-q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}},$$

e o campo vetorial Hamiltoniano associado a H é:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0; \\ \dot{u} &= \frac{-q(x-a)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{3/2}} + \frac{q(x+a)}{[(x+a)^2 + (y+b)^2]^{3/2}}; \\ \dot{y} &= 0; \\ \dot{v} &= \frac{-q(y-b)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^{3/2}} + \frac{q(y+b)}{[(x+a)^2 + (y+b)^2]^{3/2}}; \end{aligned}$$

onde $a, b, q \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ e $q \neq 0$. Notemos que tal campo vetorial é $-Id$ -reversível.

Para simplificar, tomamos $a = b$. A primeira dificuldade que surge é que o sistema não possui pontos críticos reais. Sendo assim, não é possível utilizar os métodos apresentados anteriormente para analisar tal caso. Este é um problema que pode servir para uma futura direção de pesquisa.

Capítulo 5

Problema de 3–corpos restrito no plano

Nesta seção consideramos um problema de 3–corpos restrito no plano onde dois dos três corpos possuem diferentes massas e descrevem uma órbita elíptica de colisão do problema de 2–corpos (veja Seção 1.8.1). O terceiro corpo é tal que sua massa é infinitesimal, ou seja, muito pequena. Tal corpo se move no plano que contém a reta de movimento dos outros dois corpos. *O problema restrito de três corpos consiste em descrever o movimento deste terceiro corpo que possui massa infinitesimal.*

5.1 Equações do movimento

Consideramos 3 corpos com massas m_1 , m_2 e m_3 . Nos referimos ao corpo com a massa m_i simplesmente como a massa m_i .

As massas m_1 e m_2 são chamadas de *primárias* e no nosso caso descrevem uma órbita elíptica de colisão do problema de 2–corpos. A terceira massa é infinitesimal, ou seja, m_3 é desprezível. Nos referimos a este corpo como massa *infinitesimal*. Esta massa não perturba o movimento das duas primárias, mas seu movimento é fortemente perturbado pela força gravitacional das primárias.

Escolhemos adequadamente as unidades de massa, comprimento e tempo tal que $m_1 = 1 - \mu$,

$m_2 = \mu$, $\mu \in [0, \mu_0)$ com $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno, e a constante gravitacional $G = 1$.

O movimento das massas está contido no espaço Euclidiano bidimensional, plano XY . Pelas integrais primeira do centro de massa, vimos que podemos considerar o centro de massa na origem. As primárias se movimentam no eixo X e (X, Y) são as coordenadas da massa infinitesimal. O sistema nestas coordenadas (coordenadas fixas) é chamado sistema inercial. (Veja Figura 5.1)

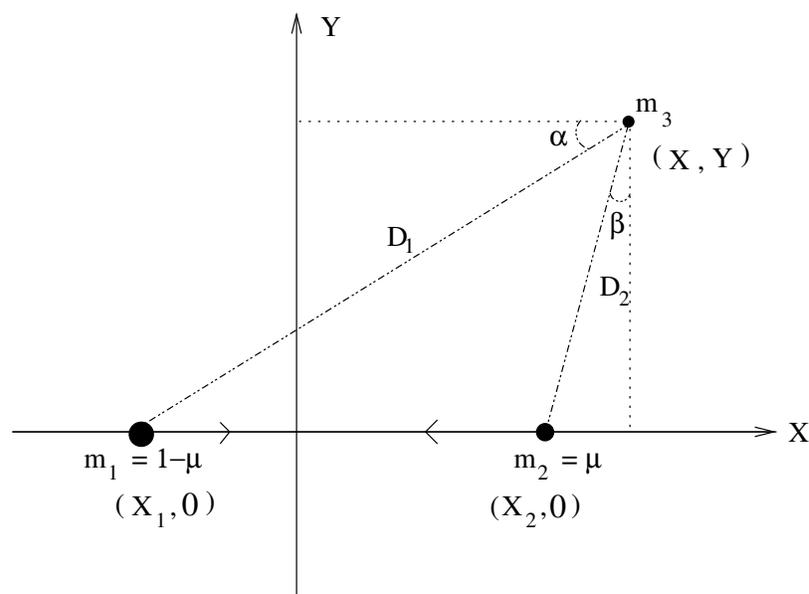


Figura 5.1: Plano de movimento dos 3-corpos

Se o movimento da massa infinitesimal m_3 está restrita à reta onde as primárias se movimentam com a massa m_1 na origem e a orientação da reta de movimento tal que, a massa m_2 do lado esquerdo da massa m_1 e m_3 à direita de m_1 então estamos no caso do problema de 3-corpos colineares restrito [20].

Denotamos por D_1 a distância entre as massas m_1 e m_3 e D_2 a distância entre as massas m_2 e m_3 , ou seja,

$$D_1 = \sqrt{(X - X_1(t))^2 + Y^2}, \quad D_2 = \sqrt{(X - X_2(t))^2 + Y^2}.$$

Denotamos por \mathbf{F}_{13} e por \mathbf{F}_{23} as forças gravitacionais das massas m_1 e m_2 sobre a massa infinitesimal m_3 , respectivamente. Sendo F_{13} e F_{23} a intensidade de tais forças, α e β os ângulos definidos na Figura 5.1 e os vetores unitários $\mathbf{X} = (1, 0)$ e $\mathbf{Y} = (0, 1)$ temos que

$$\mathbf{F}_{13} = F_{13X}\mathbf{X} + F_{13Y}\mathbf{Y} = -F_{13} \cos \alpha \mathbf{X} - F_{13} \sin \alpha \mathbf{Y};$$

$$\mathbf{F}_{23} = F_{23X}\mathbf{X} + F_{23Y}\mathbf{Y} = -F_{23} \sin \beta \mathbf{X} - F_{23} \cos \beta \mathbf{Y};$$

tal que

$$F_{13} = \frac{Gm_1m_3}{D_1^2} = \frac{(1-\mu)m_3}{(X - X_1(t))^2 + Y^2},$$

e

$$F_{23} = \frac{Gm_2m_3}{D_2^2} = \frac{\mu m_3}{(X - X_2(t))^2 + Y^2}.$$

Segue da 2ª Lei de Newton que:

$$m_3 \mathbf{a} = \mathbf{F} = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23},$$

onde $\mathbf{a} = (\ddot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{Y}})$ denota o vetor aceleração da massa infinitesimal m_3 . Em coordenadas temos que as equações do movimento da massa infinitesimal m_3 são:

$$\ddot{X} = -\frac{(1-\mu)(X - X_1(t))}{((X - X_1(t))^2 + Y^2)^{3/2}} - \frac{\mu(X - X_2(t))}{((X - X_2(t))^2 + Y^2)^{3/2}}, \quad (5.1.1)$$

$$\ddot{Y} = -\frac{(1-\mu)Y}{((X - X_1(t))^2 + Y^2)^{3/2}} - \frac{\mu Y}{((X - X_2(t))^2 + Y^2)^{3/2}},$$

onde $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções do problema de 2-corpos de colisão elíptica dadas por

$$X_1(t) = -\mu(1 - \cos E(t)), \quad X_2(t) = (1 - \mu)(1 - \cos E(t))$$

com $\mu \geq 0$ um pequeno parâmetro e E a anomalia excêntrica que é uma função do tempo via equação de Kepler

$$E - \sin E = t.$$

Desde que E é 2π -periódica, X_1 e X_2 são funções 2π -periódicas. Para mais detalhes com relação ao movimento das primárias veja [24].

Como usual uma *órbita periódica* do problema de 3–corpos restrito é uma órbita deste sistema tal que depois de um tempo T (o período da órbita) os três corpos estão na mesma posição com a mesma velocidade. Aqui estudaremos somente a periodicidade com respeito ao movimento do corpo infinitesimal. Tais tipos de órbitas serão chamadas de *órbitas pseudo periódicas* do problema de 3– corpos restrito com colisão no plano.

Queremos analisar a continuação de órbitas periódicas para este problema de $\mu = 0$ a famílias de órbitas pseudo periódicas para μ no intervalo $[0, \mu_0)$ com $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno. Assim como no caso clássico do problema de 3–corpos restrito no plano, não analisaremos a continuação de soluções periódicas nas coordenadas fixas, (X, Y) , pois o sistema nestas coordenadas é muito degenerado. Consideramos o sistema de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) relacionadas com as coordenadas fixas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

O sistema em tais coordenadas é chamado *sistema em coordenadas de rotação*.

Para facilitar, consideramos (5.1.1) nas novas variáveis (\bar{x}, \bar{y}) e em notação complexa, isto é,

$$Z = ze^{it},$$

onde $z = \bar{x} + i\bar{y}$, $Z = X + iY$. Então, as distâncias D_1 e D_2 nas coordenadas de rotação são dadas por:

$$D_1 = |Z - Z_1|, \quad D_2 = |Z - Z_2|,$$

com $Z_1 = z_1e^{it}$ e $Z_2 = z_2e^{it}$. Notamos que de fato temos $z_1 = X_1e^{-it}$ e $z_2 = X_2e^{-it}$.

O lado esquerdo de (5.1.1) sob a notação complexa é

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{d^2(z e^{it})}{dt^2} = \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + 2i \frac{dz}{dt} - z \right) e^{it}.$$

Então (5.1.1) fica

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2i \frac{dz}{dt} - z = -(1 - \mu) \frac{z - z_1}{d_1^3} - \mu \frac{z - z_2}{d_2^3},$$

onde $d_1 = |z - z_1|$ e $d_2 = |z - z_2|$.

Considerando a parte real e a parte imaginária temos

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} - 2\frac{d\bar{y}}{dt} = \frac{\partial\tilde{G}}{\partial\bar{x}}, \quad \frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + 2\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\partial\tilde{G}}{\partial\bar{y}},$$

onde

$$\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\bar{x}} = \bar{x} - (1 - \mu)\frac{\bar{x} - X_1(t)\cos t}{d_1^3} - \mu\frac{\bar{x} - X_2(t)\cos t}{d_2^3},$$

$$\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\bar{y}} = \bar{y} - (1 - \mu)\frac{\bar{y} + X_1(t)\sin t}{d_1^3} - \mu\frac{\bar{y} + X_2(t)\sin t}{d_2^3},$$

com $d_1 = \sqrt{(\bar{x} - X_1(t)\cos t)^2 + (\bar{y} + X_1(t)\sin t)^2}$, $d_2 = \sqrt{(\bar{x} - X_2(t)\cos t)^2 + (\bar{y} + X_2(t)\sin t)^2}$.

Considerando a mudança de coordenadas

$$x_1 = \bar{x}, \quad x_2 = \bar{y}, \quad y_1 = \dot{\bar{x}} - \bar{y}, \quad y_2 = \dot{\bar{y}} + \bar{x}$$

temos que o movimento da massa infinitesimal deste problema de 3-corpos restrito com colisão pode ser escrito como um sistema Hamiltoniano, tal que a função Hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_1y_2 - x_2y_1 - \frac{1 - \mu}{d_1} - \frac{\mu}{d_2}.$$

Na forma vetorial H é dada por

$$H = \frac{\|y\|^2}{2} - x^T K y - \frac{1 - \mu}{d_1} - \frac{\mu}{d_2}, \quad (5.1.2)$$

onde $x = (x_1, x_2)$ é um vetor descrevendo a posição do sistema, $y = (y_1, y_2)$ é um vetor descrevendo o seu momento e $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

O sistema Hamiltoniano é dado por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1 - x_2, \\
\dot{x}_2 &= y_2 + x_1, \\
\dot{y}_1 &= y_2 - (1 - \mu) \frac{(x_1 - X_1(t) \cos t)}{d_1^3} - \mu \frac{(x_1 - X_2(t) \cos t)}{d_2^3}, \\
\dot{y}_2 &= y_1 - (1 - \mu) \frac{(x_2 + X_1(t) \sin t)}{d_1^3} - \mu \frac{(x_2 + X_2(t) \sin t)}{d_2^3},
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

$$\begin{aligned}
\text{com } d_1 &= \sqrt{(x_1 + \mu(1 - \cos E(t)) \cos t)^2 + (x_2 - \mu(1 - \cos E(t)) \sin t)^2}, \\
d_2 &= \sqrt{(x_1 - (1 - \mu)(1 - \cos E(t)) \cos t)^2 + (x_2 + (1 - \mu)(1 - \cos E(t)) \sin t)^2}.
\end{aligned}$$

Temos que μ é um parâmetro suficientemente pequeno e assim a função Hamiltoniana pode ser escrita na forma

$$H = \frac{\|y\|^2}{2} - x^T K y - \frac{1}{\|x\|} + O(\mu). \tag{5.1.4}$$

Observamos que a dependência de μ no nosso caso é como no problema de 3-corpos restrito circular planar, e μ está relacionado com a massa das primárias (veja [13]), enquanto que em [19] o parâmetro μ está relacionado com a distância entre as primárias.

Quando $\mu = 0$, a equação (5.1.4) é dada por

$$H = \frac{\|y\|^2}{2} - x^T K y - \frac{1}{\|x\|},$$

que é a função Hamiltoniana do problema de 2-corpos nas coordenadas de rotação.

A seguir utilizaremos o método de continuação de Poincaré para continuar órbitas periódicas do problema de Kepler, quando $\mu = 0$, a órbitas pseudo periódicas do problema de 3-corpos restrito com colisão elíptica no plano, quando $\mu > 0$ suficientemente pequeno.

As órbitas do problema de Kepler que continuaremos serão as órbitas elípticas simétricas e as órbitas circulares (incluindo neste caso as órbitas cometárias, ou seja, aquelas em que

a massa infinitesimal está muito longe do centro de massa das primárias). Para cada caso é conveniente trabalhar com variáveis específicas. Tais como as variáveis de Delaunay para as órbitas elípticas simétricas e as variáveis de Poincaré para as órbitas circulares.

Primeiramente, escrevemos a função Hamiltoniana (5.1.2), que está em coordenadas cartesianas, em coordenadas polares (r, θ, R, Θ) . Esta mudança de coordenadas é dada por

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad y_1 = R \cos \theta - \frac{\Theta}{r} \sin \theta, \quad y_2 = R \sin \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta.$$

Em coordenadas polares (5.1.2) é dado por:

$$\begin{aligned} H(r, \theta, R, \Theta) &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \Theta - \frac{1-\mu}{d_1} - \frac{\mu}{d_2} \\ &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) - \Theta - \frac{1}{r} + O(\mu), \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

onde

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(r \cos \theta + \mu(1 - \cos E(t)) \cos t)^2 + (r \sin \theta - \mu(1 - \cos E(t)) \sin t)^2}, \\ d_2 &= \sqrt{(r \cos \theta - (1 - \mu)(1 - \cos E(t)) \cos t)^2 + (r \sin \theta + (1 - \mu)(1 - \cos E(t)) \sin t)^2}. \end{aligned}$$

5.2 Órbitas periódicas simétricas

As equações do movimento da massa infinitesimal nas coordenadas de rotação são dadas por (5.1.3). Verificamos que estas equações são invariantes pela simetria

$$(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \longrightarrow (-t, x_1, -x_2, -y_1, y_2).$$

Isto significa que se $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ é uma solução do sistema (5.1.3), então $\psi(t) = (x_1(-t), -x_2(-t), -y_1(-t), y_2(-t))$ também será. Notamos que esta simetria é com relação ao eixo x_1 e denotamos por S_1 . Segue o seguinte resultado:

Proposição 5.2.1 *Seja $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ uma solução do sistema (5.1.3). Se $x_2(t)$ e $y_1(t)$ são zero em $t = t_0$ e em $t = t_0 + T/2$ mas não são simultaneamente nulos em qualquer valor de $t \in (t_0, t_0 + T/2)$, então $\phi(t)$ é uma solução periódica S_1 -simétrica com período T .*

Dem: Segue da Propriedade 1.3.5(3).

Observação 5.2.2 S_1 é a única simetria do sistema (5.1.3), pois

- i) as distâncias d_1 e d_2 são invariantes por uma simetria somente quando a variável x_1 é fixada e a variável x_2 é levada em $-x_2$;*
- ii) pelo item acima, a primeira equação de (5.1.3) é invariante somente se y_1 é levado em $-y_1$;*
- iii) analogamente, a segunda equação de (5.1.3) é invariante somente se y_2 é fixado.*

5.2.1 Continuação de órbitas elípticas simétricas

Para mostrar a continuação das órbitas elípticas simétricas consideramos a mudança das coordenadas polares (r, θ, R, Θ) para as coordenadas de Delaunay (l, g, L, G) (veja [27]):

- l é a *anomalia média* e é medida desde o pericentro;
- g é o *argumento do pericentro* e determina a orientação do semi-eixo maior da elipse no plano de movimento;
- L está relacionada com o semi-eixo maior, a , por $L = a^{1/2}$;
- G está relacionada com o semi-eixo maior, a , e com a excentricidade e , por $G = [a(1 - e^2)]^{1/2}$.

Nas coordenadas de Delaunay, o Hamiltoniano (5.1.5) é da forma:

$$H = -\frac{1}{2L^2} - G + O(\mu). \quad (5.2.6)$$

Agora, em termos das coordenadas de Delaunay, supomos que no tempo t_0 temos

$$g(t_0) = m\pi \text{ e } l(t_0) = n\pi, \text{ } m, n \text{ inteiros,} \quad (5.2.7)$$

tal que a primeira condição diz que o semi-eixo maior da elipse coincide com o eixo x_1 e a segunda condição diz que a partícula está neste eixo (no pericentro ou no apocentro). Assim a velocidade instantânea da partícula no sistema de rotação é a soma da velocidade da partícula ao longo da elipse e a velocidade de rotação da elipse. Desde que estes termos são perpendiculares ao eixo x_1 , então (5.2.7) nos garante que a partícula cruza o eixo x_1 perpendicularmente. Assim, procuramos curvas soluções que satisfazem (5.2.7) para dois valores distintos de t_0 .

Continuação das órbitas periódicas S_1 -simétricas

Seguindo [26], podemos provar de maneira similar ao problema de 3-corpos restrito circular no plano, a continuação de órbitas periódicas elípticas do problema de Kepler em coordenadas de rotação para $\mu = 0$ a famílias de órbitas pseudo periódicas do problema de 3-corpos restrito com colisão no plano para $\mu \in [0, \mu_0)$ com $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno.

Iniciamos observando que o problema de Kepler em coordenadas de rotação possui oito diferentes órbitas periódicas S_1 -simétricas que podem ser continuadas em órbitas periódicas do problema de 3-corpos restrito de colisão quando $\mu \in [0, \mu_0)$ com $\mu_0 > 0$ pequeno.

Estas diferentes órbitas podem ser descritas em termos das condições iniciais nas coordenadas de Delaunay g e l . Para o movimento no sentido anti-horário da massa infinitesimal temos as seguintes condições iniciais:

- a) $g(0) = 0, l(0) = 0$, ou seja, o pericentro está na no semi-eixo x_1 positivo e que a massa infinitesimal está no pericentro;
- b) $g(0) = \pi, l(0) = 0$, ou seja, o pericentro está no semi-eixo x_1 negativo e a massa infinitesimal está no pericentro;
- c) $g(0) = 0, l(0) = \pi$, ou seja, o pericentro está no semi-eixo x_1 positivo e a massa infinitesimal está no apocentro;
- d) $g(0) = \pi, l(0) = \pi$, ou seja, o pericentro está no semi-eixo x_1 negativo e a massa infinitesimal está no apocentro;

Existem outras quatro diferentes órbitas periódicas elípticas S_1 –simétricas para o movimento no sentido horário da massa infinitesimal.

Analisamos a situação quando a massa infinitesimal se move no sentido anti-horário. Nas coordenadas de Delaunay, tal órbita intercepta o eixo x_1 ortogonalmente em um tempo t_0 quando (5.2.7) está satisfeita. Com o objetivo de ter uma órbita S_1 –simétrica precisamos que tal órbita intercepte ortogonalmente o eixo x_1 em dois diferentes pontos. Podemos provar que, para o tempo mod 2π , as 4 órbitas elípticas S_1 –simétricas podem ser continuadas em 16 possíveis diferentes órbitas pseudo periódicas elípticas S_1 –simétricas do problema de 3–corpos restrito de colisão quando μ é pequeno. Estas 16 possibilidades vêm do fato que temos a primeira intersecção ortogonal com o eixo x_1 em qualquer das situações (a), (b), (c) ou (d) e a segunda intersecção ortogonal como eixo x_1 também pode ser qualquer uma destas 4 diferentes situações.

No caso em que a massa infinitesimal está movendo no sentido horário obtemos outras 16 diferentes órbitas periódicas S_1 –simétricas do problema de 3–corpos restrito de colisão.

Teorema D: *Sejam p e q números inteiros primos entre si e $T = 2\pi p/q$. Então a órbita elíptica T –periódica do problema de Kepler em coordenadas de rotação que satisfaz*

$$l(0) = n_1\pi, \quad g(0) = n_2\pi, \quad L^3(0) = p/q, \quad G(0) = \text{constante}, \quad (5.2.8)$$

pode ser continuada para pequenos valores de $\mu = \mu(T) > 0$ em uma órbita pseudo periódica S_1 –simétrica de período próximo de $2\pi p$ do problema de 3–corpos restrito planar com colisão em coordenadas de rotação.

Dem: O Hamiltoniano do problema de 3–corpos restrito de colisão em coordenadas de Delaunay para μ pequeno é dado por (5.2.6) e as equações do movimento são:

$$\dot{l} = \frac{1}{L^3} + O(\mu), \quad \dot{L} = 0 + O(\mu), \quad \dot{g} = -1 + O(\mu), \quad \dot{G} = 0 + O(\mu). \quad (5.2.9)$$

Para $\mu = 0$ consideramos a órbita elíptica satisfazendo as condições iniciais (5.2.8). O movimento nesta elipse é:

$$l = tq/p + n_1\pi, \quad L = (p/q)^{1/3}, \quad g = -t + n_2\pi, \quad G = \text{constante}.$$

O período da massa infinitesimal nesta elipse é $T = 2\pi L^3 = 2\pi p/q$. Assim, o período do movimento dos três corpos juntos é $T' = 2\pi p$, assim $g(T'/2) = (-p+n_2)\pi$ e $l(T'/2) = (q+n_1)\pi$. Logo, esta órbita satisfaz (5.2.7) e é S_1 -simétrica.

Para $\mu > 0$ pequeno, consideramos soluções satisfazendo (5.2.7) e as condições iniciais

$$l(0) = n_1\pi, \quad g(0) = n_2\pi, \quad L(0) = L_0, \quad G(0) = G_0.$$

Queremos resolver

$$\psi_1(L_0, G_0, t, \mu) = 0, \quad \psi_2(L_0, G_0, t, \mu) = 0,$$

para L_0 próximo de $(p/q)^{1/3}$ e t próximo de $T'/2$ quando

$$\psi_1(L_0, G_0, t, \mu) = g(t) + (p - n_2)\pi, \quad \psi_2(L_0, G_0, t, \mu) = l(t) - (q + n_1)\pi.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, é suficiente mostrar que

$$\det \begin{pmatrix} \partial\psi_1/\partial t & \partial\psi_2/\partial t \\ \partial\psi_1/\partial L_0 & \partial\psi_2/\partial L_0 \end{pmatrix} \neq 0$$

sobre a órbita elíptica. Mas para $\mu = 0$ temos

$$\det \begin{pmatrix} \partial g/\partial t & \partial l/\partial t \\ \partial g/\partial L_0 & \partial l/\partial L_0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & q/p \\ 0 & -3t(q/p)^{4/3} \end{pmatrix} \neq 0,$$

para qualquer $t > 0$. Portanto, segue o teorema. ■

5.3 Continuação das órbitas circulares

Nesta seção adaptamos para o nosso caso do problema de 3-corpos restrito a prova original de Poincaré para a continuação de órbitas circulares do problema de Kepler em coordenadas de rotação para o problema restrito plano circular. Seguimos a versão de Sternberg [26].

O argumento do pericentro é claramente indefinido para as órbitas circulares por que as coordenadas de Delaunay não estão bem definidas em uma vizinhança da órbitas circulares.

Para superar este problema consideramos as coordenadas de Poincaré fazendo a mudança de variável simplética das variáveis de Delaunay (l, g, L, G) para as coordenadas de Poincaré $(\lambda, \eta, \Lambda, \xi)$ dadas por:

$$\lambda = l + g, \quad \eta = [2(L - G)]^{1/2} \cos g, \quad \Lambda = L, \quad \xi = -[2(L - G)]^{1/2} \sin g.$$

A função Hamiltoniana (5.2.6) nas coordenadas de Poincaré é:

$$H = -\frac{1}{2\Lambda^2} - \Lambda + \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2) + O(\mu). \quad (5.3.10)$$

Novamente, para maiores detalhes sobre tal mudança de coordenadas veja [27].

Teorema E: *Seja T_0 o período de uma órbita circular periódica do problema de Kepler em coordenadas de rotação. Se $2\pi/T_0 \in (1 - 1/\sqrt{8}, 1 + 1/\sqrt{8}) \setminus \{1\}$, então para $\mu = \mu(T_0)$ suficientemente pequeno existe uma órbita pseudo periódica do problema de 3-corpos restrito no plano com colisão em coordenadas de rotação com período $T(\mu)$ que tende a uma órbita periódica circular do problema de Kepler em coordenadas de rotação com período T_0 quando μ tende a 0.*

Dem: Quando $\mu = 0$ a função Hamiltoniana (5.3.10) é dada por

$$H(\lambda, \eta, \Lambda, \xi) = -\frac{1}{2\Lambda^2} - \Lambda + \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2)$$

e as equações do movimento são:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\Lambda^3} - 1, \quad \frac{d\Lambda}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = \xi, \quad \frac{d\xi}{dt} = -\eta,$$

tal que a solução circular para $\mu = 0$ é dada por:

$$\lambda = \left(\frac{1}{\Lambda_0^3} - 1\right)t + \lambda_0, \quad \Lambda = \Lambda_0, \quad \eta = \xi_0 \sin t + \eta_0 \cos t, \quad \xi = \xi_0 \cos t - \eta_0 \sin t,$$

onde $\lambda_0, \Lambda_0, \xi_0$ e η_0 são constantes.

Pelo método de continuação devido a Poincaré concluímos que existem soluções periódicas para $\mu > 0$. Na verdade estamos interessados em encontrar soluções periódicas de período T .

Isto é, queremos encontrar condições iniciais $\lambda_0(\mu)$, $\eta_0(\mu)$, $\Lambda_0(\mu)$ e $\xi_0(\mu)$ tais que as soluções $\lambda_t(\mu)$, $\eta_t(\mu)$, $\Lambda_t(\mu)$ e $\xi_t(\mu)$ do sistema Hamiltoniano cuja função Hamiltoniana (5.3.10) satisfazem

$$\lambda_T(\mu) = \lambda_0(\mu) + 2\pi, \quad \eta_T(\mu) = \eta_0(\mu), \quad \xi_T(\mu) = \xi_0(\mu), \quad \Lambda_T(\mu) = \Lambda_0(\mu). \quad (5.3.11)$$

Queremos encontrar $(\lambda_0, \eta_0, \Lambda_0, \xi_0)$ como funções de μ que para $\mu = 0$ são dadas por

$$\xi_0(0) = \eta_0(0) = 0 \quad \text{and} \quad \left(\frac{1}{\Lambda_0^3} - 1\right)T_0 = 2\pi$$

assim

$$\frac{1}{\Lambda_0^3} = \frac{2\pi + T_0}{T_0} \quad \text{or} \quad \Lambda_0 = \left(\frac{T_0}{2\pi + T_0}\right)^{1/3}$$

com λ_0 arbitrária.

Temos que a função Hamiltoniana é constante ao longo das trajetórias. Se λ_0 , η_0 , Λ_0 e ξ_0 são tais que (5.3.11) está satisfeita, então

$$H(\lambda_T, \eta_T, \Lambda_T, \xi_T; \mu) = H(\lambda_0, \eta_0, \Lambda_T, \xi_0; \mu) = H(\lambda_0, \eta_0, \Lambda_0, \xi_0; \mu),$$

e $\Lambda_T(\mu) = \Lambda_0(\mu)$ é uma consequência.

Para μ suficientemente pequeno sabemos que Λ_T está próximo de Λ_0 e (5.3.10) mostra que $\partial H/\partial \Lambda \neq 0$ se $\Lambda_0 \neq 1$. Assim o Teorema da Função Implícita afirma que existe uma vizinhança de $(\lambda_0, \eta_0, \xi_0)$ tal que $\Lambda = \alpha(\lambda, \eta, \xi)$. Então $\Lambda_0 = \alpha(\lambda_0, \eta_0, \xi_0) = \alpha(\lambda_T, \eta_T, \xi_T) = \Lambda_T$.

Para resolver (5.3.11) escrevemos $T = T_0 + \tau$ e tentamos resolver as equações

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda_0, \eta_0, \Lambda_0, \xi_0, \tau, \mu) &= \lambda_{T_0+\tau} - \lambda_0 - 2\pi = 0, \\ \psi_2(\lambda_0, \eta_0, \Lambda_0, \xi_0, \tau, \mu) &= \eta_{T_0+\tau} - \eta_0 = 0, \\ \psi_3(\lambda_0, \eta_0, \Lambda_0, \xi_0, \tau, \mu) &= \xi_{T_0+\tau} - \xi_0 = 0. \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Em $\mu = \tau = \xi_0 = \eta_0 = 0$ temos que $\frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = \frac{1}{\Lambda_0^3} - 1 = \frac{2\pi}{T_0}$, $\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = 0$. Assim a matriz

Jacobiana de ψ_1, ψ_2 e ψ_3 com respeito a η, ξ, τ é dado por

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial(\eta, \xi, \tau)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2\pi}{T_0} \\ \cos T_0 - 1 & -\sin T_0 & \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau} \\ \sin T_0 & \cos T_0 - 1 & \frac{\partial\psi_3}{\partial\tau} \end{pmatrix},$$

que é não-singular se

$$\det \left(\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial(\eta, \xi, \tau)} \right) = (\cos T_0 - 1)^2 + \sin^2 T_0 \neq 0,$$

ou seja, $T_0 \neq 2k\pi$.

O Teorema da Função Implícita garante que existem únicas funções $\tau = f(\lambda_0, \Lambda_0, \mu)$, $\eta_0 = h(\lambda_0, \Lambda_0, \mu)$ and $\xi_0 = g(\lambda_0, \Lambda_0, \mu)$ tais que o sistema (5.3.12) está satisfeito para μ suficientemente pequeno. Em $\mu = 0$ o valor de Λ_0 está próximo do valor que é determinado por $\Lambda_0^{-3} = \frac{2\pi}{T} + 1$ com $T = T_0$.

Notamos que em $\mu = 0$ temos $\xi_0 = \eta_0 = 0$ e τ será uma função de Λ_0 satisfazendo $\Lambda_0^{-3} = \frac{2\pi}{T_0 + \tau} + 1$. Em particular $\frac{\partial\tau}{\partial\Lambda_0} \neq 0$, assim podemos resolver Λ_0 como uma função de τ para μ pequeno. Portanto, podemos encontrar soluções de (5.3.11) desde que $T_0 \neq 2k\pi$ sendo k um inteiro positivo.

Até aqui, não tínhamos levado em conta a possibilidade de colisão entre a massa infinitesimal e as primárias. Agora queremos evitar que a continuação de uma órbita circular periódica no intervalo $\mu \in [0, \mu_0)$ com $\mu_0 > 0$ suficientemente pequeno colida com uma das primárias.

No nosso caso quando $\mu = 0$ a primária de massa 1 está fixada na origem e a outra massa infinitesimal está movendo no eixo X entre a origem e o ponto $(2, 0)$.

De acordo com a Terceira Lei de Kepler, para uma órbita periódica circular do problema de Kepler de raio r e movimento médio n temos que $r^3 n^2 = 1$ em um sistema inercial e com as

unidades de comprimento, massa e tempo escolhidas inicialmente (para maiores detalhes veja [24]).

No sistema inercial uma órbita periódica circular é *direta*, ou seja, gira no sentido anti-horário, se seu movimento médio é positivo, e é *retrógrada*, ou seja, gira no sentido horário, se seu movimento médio é negativo. O movimento médio em um sistema de rotação de uma órbita periódica circular tendo movimento médio n no sistema inercial é $n - 1$. Portanto, todas as órbitas circulares retrógradas no sistema inercial são órbitas periódicas circulares retrógradas no sistema em rotação. Mas as órbitas periódicas circulares diretas no sistema inercial podem ser diretas ou retrógradas no sistema em rotação dependendo se $n > 1$ ou $0 < n < 1$, respectivamente.

Seja T_0 o período de uma órbita circular no sistema em rotação. Então o movimento médio no sistema em rotação é $2\pi/T_0$ se é uma órbita direta no sistema em rotação, ou $-2\pi/T_0$ se é uma órbita retrógrada no sistema em rotação.

Agora consideramos uma órbita circular periódica que possui movimento médio n no sistema inercial e período T_0 no sistema em rotação. Portanto, temos que $n - 1 = -2\pi/T_0$ se $n < 1$, e $n - 1 = 2\pi/T_0$ se $n > 1$.

Sendo assim, para evitar colisões entre a massa infinitesimal e as duas primárias devemos evitar todas as órbitas periódicas circulares de raio $r < 2$, ou equivalentemente toda as órbitas periódicas circulares com movimento médio n no sistema inercial tal que $|n| > 1/\sqrt{8}$. Em outras palavras, usando a relação $r^3 n^2 = 1$, as órbitas circulares tendo raio $r > 2$ possuem movimento médio $n \in (-1/\sqrt{8}, 0) \cup (0, 1/\sqrt{8})$. Logo, todas estas órbitas são retrógradas no sistema de rotação e se seu período é T_0 em tal sistema, ele satisfaz $n - 1 = -2\pi/T_0$, e portanto $2\pi/T_0 \in (1 - 1/\sqrt{8}, 1 + 1/\sqrt{8}) \setminus \{1\}$.

Vimos anteriormente que $T_0 \neq 2\pi k$ com k inteiro positivo. Como $1/k \notin (1 - 1/\sqrt{8}, 1 + 1/\sqrt{8})$ para $k = 2, 3, \dots$, segue que podemos prolongar todas as órbitas periódicas circulares do problema de Kepler nas coordenadas de rotação tendo período T_0 tal que $2\pi/T_0 \in (1 - 1/\sqrt{8}, 1 + 1/\sqrt{8}) \setminus \{1\}$. Assim provamos o Teorema. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. ABRAHAM AND J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, Benjamin Cummings, London, 1978.
- [2] G. BELITSKII, C^∞ -normal forms of local vector fields. Symmetry and perturbation theory. *Acta Appl. Math.* 70 2002, 23–41.
- [3] C. A. BUZZI, Formas Normais de Campos Vetoriais Reversíveis, Tese de Doutorado, Unicamp, (1999).
- [4] C. A. BUZZI AND M. A. TEIXEIRA, Time-reversible Hamiltonian Vector Fields with Symplectic Symmetries, *Journal of Dynamics and Differential Equations* **2** (2005), 559–574.
- [5] M. CORBERA, *Periodic and quasi-periodic motions for the spatial isocetes 3-body problem*, Ph.D., Univ. Autònoma de Barcelona, June, 1999.
- [6] M. CORBERA AND J. LLIBRE, *Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincaré map*, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **77** (2000), 273–303.
- [7] M. CORBERA AND J. LLIBRE, *On symmetric periodic orbits of the elliptic Sitnikov problem via the analytic continuation method*, *Contemp. Math.* **292** (2002), 91–127.
- [8] M. CORBERA AND J. LLIBRE, *Periodic orbits of a collinear restricted three body problem*, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **86** (2003), 163–183.

- [9] M. CORBERA AND J. LLIBRE, Families of periodic orbits for the spatial isosceles 3–body, *SIAM J. Math. Anal.* **35**, no.5, (2004) 1311–1346.
- [10] R. DEVANEY, Reversible Diffeomorphism and Flows, *Transactions of the American Mathematical Society* **218** (1976), 89–113.
- [11] M. GOLUBITSKY, M. KRUPA AND C. LIM, Time-reversibility and particle sedimentation, *SIAM J. Appl. Math.* **51** (1991), no. 1, 49–72.
- [12] M. GOLUBITSKY, I. STWEART AND D. G. SCHAEFFER, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 1, Applied Mathematical Sciences 51, Springer–Verlag, New York, 1984.
- [13] G.R. HALL AND K.R. MEYER, *Introduction to Hamiltonian Dynamical System and the N-Body Problem*, Springer–Verlag, 1992.
- [14] H. HANßMANN, The reversible umbilic bifurcation. In: Time-reversal symmetry in dynamical systems (Coventry, 1996). *Phys. D* **112** (1998), no. 1-2, 81–94.
- [15] G. IOOSS AND M. ADELMEYER, *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, Adv. Ser. Nonlinear Dynamics **3**, World Scientific, Singapore, 1992.
- [16] J. KNOBLOCH AND A. VANDERBAUWHEDE, A General Reduction Method for Periodic Soluitons in Conservative and Revesible Systems, *J. Dyn. Diff. Equations* **8** (1996), 71–102.
- [17] J. S. W. LAMB AND J. A. G. ROBERTS, Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey. *Phys. D*, **112**(1-2):1–39, 1998. Time-reversal symmetry in dynamical systems (Coventry, 1996).
- [18] M. F. S. LIMA, Famílias de conjuntos minimais em sistemas reversíveis, Tese de Doutorado, Unicamp, (2006).
- [19] J. LLIBRE AND D. PAŞCA, *Periodic Orbits of the Planar Collision Restricted 3–Body Problem*, to appear in *Celestial Mechanics*.

- [20] J. LLIBRE AND E. PEREZ-CHAVELA, *Transversal homoclinic orbits in the collinear restricted three-body problem*, J. Nonlinear Sci. **15** (2005), 1–10.
- [21] K. R. MEYER, *Periodic Solutions of the N-Body Problem*, Lecture Notes in Math. **1719**, Springer-Verlag, 1999.
- [22] J. MONTALDI, M. ROBERTS AND I. STEWART, Existence of nonlinear normal modes of symmetric Hamiltonian systems, *Nonlinearity* **3** (1990), 695–730.
- [23] H. POINCARÉ, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, 3 Vols., Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899, reprinted by Dover, New York, 1957.
- [24] A. ROY, *Orbital Motion*, Adam Hilger Ltd, Bristol, England, 1978.
- [25] C.W. SHIH, Bifurcations of Symmetric Periodic Orbits near Equilibrium in Reversible Systems, *Int. Journal Bifurcation & Chaos* **7** (1997), 569–584
- [26] S. STERNBERG, *Celestial Mechanics*, W.A. Benjamin, INC., New York, Amsterdam, 1969.
- [27] V. SZEBEHELY, *Theory of orbits*, Academic Press, New York, 1967.
- [28] M. A. TEIXEIRA, Singularities of reversible vector fields. *Phys. D* **100** (1997), no. 1-2, 101–118.
- [29] J. C. VAN DER MEER, *The Hamiltonian Hopf bifurcation*, Lecture Notes in Math. **1160**, Springer, Berlin, 1985.
- [30] A. VANDERBAUWHEDE, Local bifurcation and symmetry, *Res. Notes in Math.* **75**, Pitman, Boston, 1982.
- [31] T. WAGENKNECHT, *An analytical study of a two degrees of freedom Hamiltonian System associated the Reversible Hyperbolic Umbilic*, Thesis, University Ilmenau, Germany, 1999.