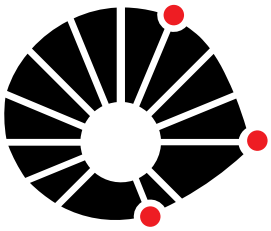


UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ARLYSON ALVES DO NASCIMENTO

Caracterização e Estatísticas de Operadores Morfológicos Baseados em Distância Usando Diagrama de Voronoi com Aplicação em Detecção de Bordas em Imagens Coloridas

Campinas

2018

Arlyson Alves do Nascimento

Caracterização e Estatísticas de Operadores Morfológicos Baseados em Distância Usando Diagrama de Voronoi com Aplicação em Detecção de Bordas em Imagens Coloridas

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Arlyson Alves do Nascimento e orientada pelo Prof. Dr. Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

N17c

Nascimento, Arlyson Alves, 1983-
Caracterização e estatísticas de operadores morfológicos baseados em distância usando diagrama de Voronoi com aplicação em detecção de bordas em imagens coloridas / Arlyson Alves do Nascimento. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos reticulados. 2. Voronoi, Diagramas de. 3. Morfologia matemática. 4. Estatística descritiva. 5. Detecção de bordas. I. Mesquita, Marcos Eduardo Ribeiro do Valle, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Characterization and statistics of distance-based morphological operators using Voronoi diagram with application for edge detection in color images
Palavras-chave em inglês:
Lattice theory
Voronoi diagrams
Mathematical morphology
Descriptive statistics
Edge detection
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutor em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Marcos Eduardo Ribeiro do Valle Mesquita [Orientador]
Peter Sussner
Roberto de Alencar Lotufo
Junior Barrera
Roberto Hirata Junior
Data de defesa: 28-03-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 28 de março de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARCOS EDUARDO RIBEIRO DO VALLE MESQUITA

Prof(a). Dr(a). PETER SUSSNER

Prof(a). Dr(a). ROBERTO DE ALENCAR LOTUFO

Prof(a). Dr(a). JUNIOR BARRERA

Prof(a). Dr(a). ROBERTO HIRATA JUNIOR

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Aos meus pais, irmãos, minha esposa Zaira,
minha filha Lis e a toda minha família que,
com muito carinho e apoio, não mediram esforços
para que eu chegasse até essa etapa da minha vida.

Agradecimentos

Agradeço imensamente à Deus, por ter me concedido saúde, força e disposição para superar as dificuldades.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada da Unicamp, pela oportunidade de realização do Doutorado.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcos Eduardo Valle Ribeiro de Mesquita, pela sua disponibilidade e pelo acompanhamento exercido durante a elaboração deste trabalho.

À minha esposa Zaira Acioly dos Anjos Lima do Nascimento por todo apoio, pelo carinho e pela compreensão durante a realização deste doutorado.

À minha filha Lis dos Anjos Nascimento.

A toda minha família, que mesmo à distância, esteve presente em todos os momentos.

Aos professores do IMECC-Unicamp pela minha formação durante o Doutorado.

Aos amigos do IMECC, Alex, Aline, Douglas, Eleonesio, Fidelis, Isaac, Majid, Nilson, Tatiana e, tantos outros, pela ajuda atribuída sempre que necessário e pelos momentos de descontração.

Aos amigos do distrito de Barão Geraldo, Campinas-SP, pela amizade e os momentos de diversão.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas (IFAL) que permitiu a realização do doutoramento por meio do seu programa de capacitação docente.

Aos meus colegas do curso de Licenciatura em Matemática do IFAL, que apoiaram o meu afastamento para qualificação e, em particular, a realização deste trabalho.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Queira! (Queira!)
Basta ser sincero
E desejar profundo
Você será capaz
De sacudir o mundo
Vai!
Tente outra vez!
Humrum!

Tente! (Tente!)
E não diga
Que a vitória está perdida
Se é de batalhas
Que se vive a vida
Han!
Tente outra vez!
(Raul Seixas)

Resumo

A morfologia matemática (MM) é uma teoria que utiliza conceitos geométricos e topológicos para processamento e análise de imagens. Aplicações da MM incluem, por exemplo, detecção de bordas, segmentação e reconstrução automática de imagens, reconhecimento de padrões e decomposição de sinais e imagens. Nesta tese, estudamos os operadores morfológicos para imagens em tons de cinza e coloridas segundo a abordagem baseada em distância proposta por Angulo. Este tipo de abordagem geralmente se depara com a difícil tarefa de escolher uma referência apropriada. Nesta tese, estabelecemos uma relação direta entre a escolha da referência e o diagrama de Voronoi. Além disso, utilizamos conceitos de estatística descritiva para superar a dificuldade de escolher uma referência. Assim, definimos novos operadores pseudo-morfológicos como, por exemplo, a média de dilatações, a média de erosões, o desvio padrão do gradiente, entre outros. Experimentos computacionais mostraram que alguns dos novos operadores pseudo-morfológicos, por exemplo o desvio padrão do gradiente, apresentaram um bom desempenho quando aplicados em problemas de detecção de bordas em imagens coloridas.

Palavras-chave: Teoria dos Reticulados, Diagrama de Voronoi, Morfologia Matemática, Estatística Descritiva, Detecção de Bordas.

Abstract

Mathematical morphology (MM) is a theory that uses geometric and topological concepts for image processing and analysis. Applications MM include boundary detection, automatic image segmentation and reconstruction, pattern recognition, and signal and image decomposition. In this thesis, we study morphological operators for grayscale and color images defined according to the distance-based approach proposed by Angulo. This type of approach usually involves the difficult task of choosing an appropriate reference. In this thesis, we establish a direct relationship between the choice of reference and the Voronoi diagram. In addition, we use descriptive statistic concepts to overcome the hard task of choosing a reference. Thus we define new pseudo-morphological operators, such as the average of dilations, the average of erosions, the standard deviation of the gradient, among others. Computational experiments show that some of the new pseudo-morphological operators, for example the standard deviation of the gradient, are suitable for edge detection of color images.

Keywords: Lattice Theory, Voronoi Diagram, Mathematical Morphology, Descriptive Statistics, Edge Detection.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Imagem em tons de cinza f. 30
Figura 2 – Erosão, dilatação e complementar do gradiente normalizado da imagem f pelo elemento estruturante B. 31
Figura 3 – Imagem sintética colorida $\boldsymbol{f}$. 36
Figura 4 – A erosão e a dilatação marginal. 37
Figura 5 – A erosão e a dilatação lexicográfica. 37
Figura 6 – Os operadores erosão e dilatação para as abordagens Witte e Angulo com $\boldsymbol{r} = (1, 1, 1)$. 39
Figura 7 – Imagem em tons de cinza f, elemento estruturante *flat* B e vizinhança do pixel $x = (3, 3)$ determinada por B. 42
Figura 8 – Interpretação geométrica dos operadores $\varepsilon_B^{0.5}(f)(3,3)$ e $\delta_B^{0.5}(f)(3,3)$. 42
Figura 9 – Erosão e dilatação da imagem f com valor de referência $r = 0.5$. 43
Figura 10 – Imagem da Lena em tons de cinza. 44
Figura 11 – Operadores dilatação, erosão e o complementar do gradiente normalizado para alguns valores de r. 45
Figura 12 – Interpretação geométrica de $\varepsilon_B^r(f)(x)$ e $\delta_B^r(f)(x)$. 47
Figura 13 – Gráfico dos operadores $\varepsilon_B^r(f)(3,3)$, $\delta_B^r(f)(3,3)$ e $\varrho_B^r(f)(3,3)$ para $r \in [0, 1]$. 48
Figura 14 – Imagem natural colorida $\boldsymbol{f}_{124084}$. 50
Figura 15 – Operadores dilatação, erosão e o complementar do gradiente normalizado para alguns valores de $\boldsymbol{r}$. 52
Figura 16 – Diagrama de Voronoi e o diagrama do vizinho mais distante de $\mathcal{H}$. 54
Figura 17 – Estatística descritiva dos operadores morfológicos dilatação, erosão e gradiente. 61
Figura 18 – Imagem original colorida, os operadores pseudo-morfológicos e o complementar dos operadores pseudo-morfológicos normalizados aplicados em $\boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f})$. 66
Figura 19 – Imagem original colorida, os operadores pseudo-morfológicos e o complementar dos operadores pseudo-morfológicos normalizados aplicados em $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})$. 67
Figura 20 – Imagem original colorida e o complementar dos operadores pseudo-morfológicos normalizados aplicados em $\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f})$. 68
Figura 21 – Imagem complementar dos operadores pseudo-morfológicos normalizados. 69
Figura 22 – *Boxplot* dos valores FoM para os operadores pseudo-morfológicos. 72
Figura 23 – Diagrama dos operadores pseudo-morfológicos. 73
Figura 24 – Imagem natural colorida, o complementar do SdG normalizado, o complementar do *Ground Truth* e o complementar da imagem binarizada. 75
Figura 25 – *Boxplot* dos valores de FoM para os detectores de bordas. 76

Figura 26 – Diagrama dos detectores de bordas. 77
Figura 27 – Imagem natural $\boldsymbol{f}_{124084}$, o complementar do *Ground Truth* τ_{124084} e o complementar das imagens binarizadas. 78
Figura 28 – Imagem natural $\boldsymbol{f}_{3096}$, o complementar do *Ground Truth* τ_{3096} e o complementar das imagens binarizadas. 79
Figura 29 – Imagem natural $\boldsymbol{f}_{138032}$, o complementar do *Ground Truth* τ_{138032} e o complementar das imagens binarizadas. 80
Figura 30 – Região de Voronoi e o diagrama de Voronoi. 91

Lista de símbolos

$\mathcal{D}$	Conjunto domínio
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbb{L}, \mathbb{M}$	Reticulados completos
$\|\cdot\|_2$	Norma Euclidiana
r, $\boldsymbol{r}$	Valor de referência, Cor de referência
$\leqslant$	Relação de ordem natural
$\bigvee$	Supremo com relação à ordem natural $\leqslant$
$\bigwedge$	Ínfimo com relação à ordem natural $\leqslant$
$\preccurlyeq_r$	Relação de ordem parcial com referência r
$\overset{r}{\bigvee}$	Supremo relativo à $\preccurlyeq_r$
$\overset{r}{\bigwedge}$	Ínfimo relativo à $\preccurlyeq_r$
ε	Erosão
δ	Dilatação
ϱ	Gradiente
$\overline{\varrho}$	Gradiente normalizado
ε^r	Erosão baseada em distância
δ^r	Dilatação baseada em distância
ϱ^r	Gradiente baseado em distância
$\overline{\varrho}^r$	Gradiente baseado em distância normalizado
f, $\boldsymbol{f}$	imagem em tons de cinza, imagem colorida
B	Elemento estruturante

Fun $(\mathcal{D}, \mathbb{L})$	Conjunto das funções $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$
RV	Região de Voronoi
$\overline{RV}$	Região de Voronoi do vizinho mais distante
DV	Diagrama de Voronoi
$\overline{DV}$	Diagrama de Voronoi do vizinho mais distante
R	Variável aleatória
$P(R)$	Probabilidade de ocorrer um evento R
$\mathcal{S}_R$	Estatística descritiva da variável aleatória R
E	Esperança
M_o	Moda
M_d	Mediana
Var	Variância
σ	Desvio padrão
Σ	Matriz de dispersão
V_g	Variância generalizada
V_t	Variância total
RV_g	Raiz quadrada da variância generalizada
RV_t	Raiz quadrada da variância total
Gmd	Gini's Mean Difference
$\boldsymbol{\varrho}_B^{\boldsymbol{E}}$	Norma da diferença entre a média da dilatação e a média da erosão
$\boldsymbol{\varrho}_B^{\boldsymbol{Mo}}$	Norma da diferença entre a moda da dilatação e a moda da erosão
C	Detector de Canny
S	Detector de Sobel
G	Detector de bordas baseado no gradiente morfológico em tons de cinza
M	Detector de bordas baseado no gradiente da abordagem marginal
L	Detector de bordas baseado no gradiente da abordagem lexicográfica

W	Detector de bordas baseado no gradiente da abordagem de De Witte
Ab	Detector de bordas baseado no gradiente da abordagem de Angulo baseada na referência preto
Aw	Detector de bordas baseado no gradiente da abordagem de Angulo baseada na referência branco
MeanG	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$
DMean	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{\varrho}_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f})$
ModG	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{M_o}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$
DMod	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{\varrho}_B^{M_o}(\boldsymbol{f})$
SdG	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$
RVgD	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{RV_g}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$
RVgE	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{RV_g}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$
RVtD	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{RV_t}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$
RVtE	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{RV_t}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$
GmdD	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{Gmd}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$
GmdE	Detector de bordas baseado no operador $\boldsymbol{Gmd}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$

Sumário

Introdução **16**

1 MORFOLOGIA MATEMÁTICA **19**
1.1 Reticulados Completos **19**
1.2 Morfologia Matemática em Reticulados Completos **21**

2 MORFOLOGIA MATEMÁTICA $\mathbb{L}-$VALORADA **24**
2.1 Morfologia Matemática em Tons de Cinza **29**
2.2 Morfologia Matemática Colorida **32**
2.2.1 Esquemas de Ordenação Vetorial 33

3 OPERADORES MORFOLÓGICOS BASEADOS EM DISTÂNCIA . . **40**
3.1 Abordagem para Imagens em Tons de Cinza **40**
3.1.1 Caracterização dos operadores ε_B^r, δ_B^r e ϱ_B^r. 43
3.2 Abordagem para Imagens Coloridas **49**
3.2.1 Caracterização dos operadores $\boldsymbol{\varepsilon}_B^r$, $\boldsymbol{\delta}_B^r$ e $\boldsymbol{\varrho}_B^r$. 51

4 ESTATÍSTICA DESCRITIVA DE OPERADORES MORFOLÓGICOS BASEADOS EM DISTÂNCIA **56**
4.1 Abordagem para Imagens em Tons de Cinza **56**
4.1.1 Operadores Pseudo-Morfológicos 59
4.2 Abordagem para Imagens Coloridas **62**

5 APLICAÇÃO EM DETECÇÃO DE BORDAS EM IMAGENS COLORIDAS **70**

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS **81**

Referências **83**

APÊNDICES **89**

APÊNDICE A – DIAGRAMA DE VORONOI **90**

Introdução

A morfologia matemática (MM) teve origem na década de 60 a partir dos trabalhos de George Matheron e Jean Serra na *École Nationale Superiéure des Mines de Paris*, em Fontainebleau, França (Serra, 1982; Banon and Barrera, 1994). O termo "Morfologia" vem do fato de que a teoria tem como objetivo a análise de formas de objetos. Enquanto que o termo "Matemática" vem do fato de que a análise é baseada na teoria de conjuntos, topologia, geometria, álgebra (teoria dos reticulados), entre outras. A MM é uma teoria que utiliza conceitos geométricos e topológicos para processamento e análise de imagens (Heijmans, 1995; Soille, 1999). A ideia principal da morfologia matemática consiste em testar uma imagem com um elemento estruturante, qualificando e quantificando a maneira com que este elemento estruturante se encaixa ou não na imagem. Aplicações da MM incluem, por exemplo, detecção de borda, segmentação e reconstrução automática de imagem, reconhecimento de padrões e decomposição de sinais e imagens (Braga-Neto and Goutsias, 2004; Serra, 2006; Rittner et al., 2013; Gonzalez-Hidalgo et al., 2015).

Os primeiros operadores morfológicos foram desenvolvidos por Matheron e Serra para análise de imagens binárias. Precisamente, eles desenvolveram a morfologia matemática para estudos de geometria de meios porosos e análise de texturas em imagens binárias utilizando teoria de conjuntos como ferramenta matemática (Matheron, 1967; Serra, 1969). Matheron e Serra definiram os operadores elementares da MM, erosão e dilatação, em termos da adição e subtração de Minkowski usando conceitos básicos da teoria de conjuntos tais como inclusão de conjuntos, união, interseção e translação. Posteriormente, muitas abordagens – incluindo umbra, conjuntos de níveis (*level-sets*), e abordagem de cortes (*threshold*) – foram desenvolvidas com sucesso para generalizar os operadores binários da MM para lidar com imagens em tons de cinza (Sternberg, 1986; Sussner and Valle, 2008). Alguns operadores morfológicos em tons de cinza também foram desenvolvidos usando a lógica *fuzzy* e conceitos da teoria dos conjuntos *fuzzy*, dando origem à morfologia matemática *fuzzy* (FMM) (De Baets, 1997; Nachtegael and Kerre, 2001; Deng and Heijmans, 2002; Sussner and Valle, 2008; Bloch, 2011; Sussner et al., 2012).

Do ponto de vista teórico, a teoria dos reticulados completos representam uma estrutura algébrica apropriada para MM (Serra, 1988; Ronse, 1990; Birkhoff, 1993; Heijmans, 1995). Com efeito, tanto as abordagens binárias como as abordagens em tons de cinza, incluindo a FMM, podem ser muito bem descritas em reticulados completos(Sussner and Valle, 2008). Formalmente, um reticulado completo é um conjunto não-vazio parcialmente ordenado em que qualquer subconjunto admite um supremo e um ínfimo. Resultados recentes, porém, estenderam este quadro para inf-semirreticulados completos (Heijmans and Keshet, 2002).

A partir da estrutura algébrica dos reticulados completos, Sussner et al. (2012)

definiram uma morfologia matemática conduzida nos conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy* ($\mathbb{L}$-FMM). O conceito de conjunto $\mathbb{L}$-*fuzzy* generaliza não só a MM clássica e o conceito de conjunto *fuzzy*, mas também os conceitos de conjuntos *fuzzy* intervalar, intuicionista, entre muitos outros (Sussner et al., 2012). Além disso, a classe de conjunto $\mathbb{L}$-*fuzzy* forma um reticulado completo sempre que o conjunto subjacente $\mathbb{L}$ constitui um reticulado completo.

Uma vez que o requisito é uma ordem parcial com operadores de supremo e ínfimo bem definidos, reticulados completos permitiram o desenvolvimento de operadores morfológicos para dados multivariados, tais como imagens coloridas (Aptoula and Lefèvre, 2007; Lezoray, 2016). Contudo, a extensão dos operadores morfológicos para dados multivariados não é direta porque não há uma relação de ordem parcial natural entre vetores. Apesar disso, a MM multivariada atraiu a atenção de muitos pesquisadores desde 1990 (Goutsias et al., 1995; Talbot et al., 1998; Comer and Delp, 1999). Grande parte dessas pesquisas estão focadas em determinar esquemas apropriados de ordenação vetorial. Uma discussão completa sobre várias abordagens para MM multivariada, incluindo a MM colorida, pode ser encontrada em Aptoula and Lefèvre (2007).

Uma extensão direta da MM em tons de cinza para a MM colorida é dada pelo esquema de ordenação marginal. A ordem marginal é uma ordem parcial obtida processando individualmente cada canal de cor (Comer and Delp, 1999; Aptoula and Lefèvre, 2007). Uma desvantagem dessa abordagem é que ela não leva em consideração a correlação entre os canais de cores, fazendo com que apareçam cores falsas após o processamento. A abordagem lexicográfica impede a aparição de cores falsas, por isso, tem sido amplamente utilizada na MM colorida. Uma desvantagem dessa abordagem é que ela prioriza excessivamente a primeira condição na cascata lexicográfica. Em contraste com a ordem marginal e a ordem lexicográfica, uma ordem reduzida classifica as cores de acordo com uma função de valor real. Por exemplo, nas ordens baseadas em distância, foco dessa tese, a função é definida em termos de uma métrica.

Formalmente, uma ordem baseada em distância é um esquema de ordenação reduzida em que as cores são classificadas comparando a distância com uma certa cor de referência. Sartor and Weeks (2001) propuseram um esquema de ordenação total baseada na distância de uma cor de referência seguidos por uma cascata lexicográfica utilizada para resolver ambiguidades. Os esquemas de ordenação baseados em distância foram também propostos por pesquisadores proeminentes, como Angulo (2007), Aptoula and Lefèvre (2009), De Witte et al. (2005a), Ledoux et al. (2014, 2015), Deborah et al. (2015), Al-Otum (2015) e Valle and Valente (2017). Apesar das aplicações bem sucedidas (Angulo, 2007; Ledoux et al., 2014, 2015), as diferentes abordagens para a morfologia matemática colorida baseadas em distância geralmente se deparam com a difícil tarefa de escolher uma referência apropriada para cada aplicação. E essa escolha depende de forma direta, na maioria dos casos, das cores que aparecem na imagem a ser processada.

Nesta tese, apresentamos um estudo detalhado acerca da abordagem baseada em distância proposta por Angulo (2007), para imagens em tons de cinza e coloridas. Investigamos a

influência da referência na abordagem baseada em distância. Apresentamos uma caracterização dos operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente em função da referência. Estabelecemos uma relação direta entre a escolha da referência e o diagrama de Voronoi. Além disso, utilizamos os conceitos de estatística descritiva para definir novos operadores, denominados operadores pseudo-morfológicos, com intuito de contornar o problema da escolha de uma referência apropriada. Os novos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância não dependem da referência. Por exemplo, a média da dilatação, a média de erosão, o desvio padrão do gradiente, entre outros. Experimentos computacionais mostraram que alguns dos novos operadores pseudo-morfológicos, por exemplo, o desvio padrão do gradiente, apresentaram um bom desempenho quando aplicados em problemas de detecção de bordas em imagens coloridas.

O conteúdo da tese está organizado da seguinte forma: No primeiro capítulo apresentamos uma introdução dos conceitos matemáticos necessários para o desenvolvimento desta tese. Em particular, os conceitos de conjunto parcialmente ordenado e reticulado completo. Apresentamos também no Capítulo 1 os operadores morfológicos em reticulados completos. No segundo capítulo, utilizamos o conceito de conjunto $\mathbb{L}$-*fuzzy* e apresentamos os conceitos básicos da morfologia matemática (MM) para imagens $\mathbb{L}$-valoradas, incluindo imagens em tons de cinza e coloridas. Além disso, discutimos alguns esquemas de ordenação vetorial para MM colorida. No terceiro capítulo, discutimos a abordagem baseada em distância proposta por Angulo (2007) para imagens em tons de cinza e coloridas. Em seguida, apresentamos uma caracterização para os operadores de erosão, dilatação e gradiente em função da referência para imagens em tons de cinza e coloridas. Por fim, relacionamos os operadores baseados em distância com os diagramas de Voronoi. No quarto capítulo, utilizamos os conceitos de estatística descritiva para introduzir os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância para imagens em tons de cinza e coloridas. Precisamente, utilizamos as medidas de tendencia central, como esperança, moda, mediana e as medidas de dispersão, como variância e desvio padrão para definir novos operadores e contornar o problema da escolha de uma referência apropriada. Por exemplo, definimos a esperança da erosão, a moda da dilatação, o desvio padrão do gradiente. No quinto capítulo, apresentamos experimentos computacionais em problemas de detecção de bordas em imagens coloridas. Apresentamos, ao final, uma conclusão abordando os principais resultados encontrados durante a pesquisa.

1 Morfologia Matemática

A morfologia matemática foi desenvolvida inicialmente para o processamento de imagens binárias e posteriormente estendida para imagens em tons de cinza, mas desde o início do desenvolvimento da MM, sentia-se a necessidade de uma teoria mais geral. Serra (1988) foi o primeiro a observar que a teoria da morfologia matemática requisitava essencialmente que o espaço onde as imagens são definidas tivesse uma estrutura de reticulado completo. Posteriormente, pesquisadores como Heijamns e Ronse defenderam que reticulados completos fornecem a estrutura matemática apropriada para a MM (Heijmans and Ronse, 1990). Nesse capítulo, apresentaremos os conceitos de conjunto parcialmente ordenado e reticulado completo. Em seguida, apresentaremos os operadores morfológicos em reticulados completos.

1.1 Reticulados Completos

Nesta seção faremos uma breve revisão teórica sobre reticulados completos. Para uma exposição geral da teoria dos reticulados completos, ver (Birkhoff, 1993; Davey and Priestley).

Definição 1.1. *Uma relação binária $\leqslant$ definida em um conjunto não vazio X é uma ordem parcial no conjunto X se para cada $x, y, z \in X$ as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $x \leqslant x$; *(reflexividade)*

(ii) $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant x \Rightarrow x = y$; *(antissimetria)*

(iii) $x \leqslant y$ *e* $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$. *(transitividade)*

Se, além disso,

(iv) $x \leqslant y$ *ou* $y \leqslant x$,

então dizemos que $\leqslant$ é uma ordem total em X.

Se $\leqslant$ é uma ordem parcial em um conjunto não vazio X, então dizemos que o par $(X, \leqslant)$ é um conjunto parcialmente ordenado ou poset (*partially ordered set*). Se $\leqslant$ é uma ordem total em X, então dizemos que o par $(X, \leqslant)$ é um conjunto totalmente ordenado ou uma cadeia. Em uma cadeia, quaisquer dois elementos são comparáveis. Uma relação binária $\leqslant$ em um conjunto X que satisfaz as propriedades (i) e (iii), mas não necessariamente (ii), é chamada de pré-ordem e dizemos que o par $(X, \leqslant)$ é um conjunto pré-ordenado ou proset (*pre-ordered set*).

Em um poset $(X, \leqslant)$, também escrevemos $y \geqslant x$ em vez de $x \leqslant y$. Assim, a relação binária $\leqslant'$ dada por $x \leqslant' y \Leftrightarrow x \geqslant y$ também define uma ordem parcial, chamada ordem parcial

dual e $(X, \leqslant')$ chama-se poset dual. Essa relação de dualidade é conhecida como o princípio da dualidade.

Exemplo 1.1. *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ com a relação de ordem usual $\leqslant$ é um conjunto totalmente ordenado. Em particular, o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com a relação de ordem usual $\leqslant$ também é um conjunto totalmente ordenado.*

Exemplo 1.2. *Sejam E um conjunto não vazio e $\mathcal{P}(E)$ o conjuntos das partes de E. Além disso, seja $\subseteq$ a relação de inclusão de conjuntos. A relação de ordem em $\mathcal{P}(E)$ é definida da seguinte forma: Dados $A, B \in \mathcal{P}(E)$*

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B. \tag{1.1}$$

A relação de inclusão de conjuntos $\subseteq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{P}(E)$ e o par $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Em geral, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ não é um conjunto totalmente ordenado.

Sejam $(X, \leqslant)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Um elemento $l_s \in X$ é um limitante superior de Y se $y \leqslant l_s$ para todo $y \in Y$. Similarmente, $l_i \in X$ é um limitante inferior de Y se $l_i \leqslant y$ para todo $y \in Y$. O menor limitante superior de Y, quando existir, é chamado de supremo de Y, ou seja, $l \in X$ é o supremo de Y se l é um limitante superior de Y e, dado qualquer outro limitante superior l_s de Y, tem-se $l \leqslant l_s$. Decorre da condição (ii) na Definição 1.1 que o supremo de Y, quando existir, é único. De forma análoga, quando existir, o maior limitante inferior é chamado ínfimo de Y. Denotamos o supremo de Y por $\sup Y$ ou $\bigvee Y$ e o ínfimo de Y por $\inf Y$ ou $\bigwedge Y$. Quando $Y = \{y_i; i \in I\}$ para algum conjunto de índices I, denotamos o supremo e o ínfimo de Y por $\bigvee_{i \in I} y_i$ e $\bigwedge_{i \in I} y_i$, respectivamente. No caso $Y = \{x, y\}$, o supremo e o ínfimo de Y são denotados por $x \vee y$ e $x \wedge y$, respectivamente.

Definição 1.2 (Reticulado e Reticulado Completo)**.** *Um conjunto parcialmente ordenado X é um reticulado se todo subconjunto finito de X possui um ínfimo e um supremo em X. Um reticulado X é completo se todo subconjunto (finito ou infinito) de X admite um ínfimo e um supremo em X.*

Definição 1.3. *Um conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{L}$ é chamado inf-semirreticulado se todo subconjunto finito não vazio de $\mathbb{L}$ possui ínfimo. Um inf-semirreticulado $\mathbb{L}$ é completo (cisl, complete inf-semilattice) se todo subconjunto (finito ou infinito) não vazio de $\mathbb{L}$ admite um ínfimo em $\mathbb{L}$.*

Um reticulado $\mathbb{L}$ que possui elementos $\bot, \top \in \mathbb{L}$ tais que $\bot \leqslant x \leqslant \top$, para cada $x \in \mathbb{L}$ é dito limitado, e os elementos $\bot$ e $\top$ são chamados limites universais. Todo reticulado completo é limitado. Além disso, $\bot = \bigwedge \mathbb{L} = \bigvee \varnothing$ e $\top = \bigvee \mathbb{L} = \bigwedge \varnothing$.

Exemplo 1.3. *O conjunto dos números reais extendido $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ com a relação de ordem usual $\leqslant$ é um reticulado completo. Note que $\mathbb{R}$ com a relação de ordem usual $\leqslant$ é um*

reticulado, mas não é um reticulado completo. O intervalo unitário $[0,1]$ *com a ordem usual* $\leqslant$ *é também um reticulado completo.*

Exemplo 1.4. *O conjunto* $\mathcal{P}(E)$ *com a relação de inclusão* $\subseteq$ *é um reticulado completo. O ínfimo é dado pela interseção de conjuntos e o supremo pela união de conjuntos.*

Exemplo 1.5. *Sejam* $(\mathbb{L}_1, \leqslant_1), \ldots, (\mathbb{L}_n, \leqslant_n)$ *reticulados completos e* $\mathbb{M} = \mathbb{L}_1 \times \cdots \times \mathbb{L}_n$ *o produto cartesiano. Dados* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{M}$*, em que* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *temos que*

$$\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; x_k \leqslant_k y_k,\ \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.2}$$

define uma ordem parcial em $\mathbb{M}$*, chamada de ordem marginal. O conjunto* $\mathbb{M}$ *com a relação de ordem* $\leqslant$ *é um reticulado completo. Note que o conjunto* $\mathbb{M}$ *herda a estrutura de reticulado completo de* $\mathbb{L}_k$ *para cada* k*. Além disso, se* $\mathbb{L}_k = \mathbb{L}$*, para todo* k*, então escreve-se* $\mathbb{M} = \mathbb{L}^n$*.*

Exemplo 1.6. *Dados um reticulado completo* $(\mathbb{L}, \leqslant)$ *e um conjunto não vazio* $\mathcal{D}$ *qualquer. O conjunto de todas as funções* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$*, denotado por Fun* $(\mathcal{D}, \mathbb{L})$*, é um reticulado completo com a ordem parcial*

$$f \leqslant g \iff f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} g(x),\ \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{1.3}$$

Dados dois reticulados completos $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$, o conjunto de todos os operadores de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{M}$ é denotado por $\mathcal{O}(\mathbb{L}, \mathbb{M})$. O conjunto $\mathcal{O}(\mathbb{L}, \mathbb{M})$ herda a ordem parcial de $\mathbb{M}$. Dados os operadores $\phi, \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{L}, \mathbb{M})$, temos

$$\phi \leqslant \psi \iff \phi(x) \leqslant_{\mathbb{M}} \psi(x),\ \forall\, x \in \mathbb{L}. \tag{1.4}$$

O conjunto $\mathcal{O}(\mathbb{L}, \mathbb{M})$ com a relação de ordem $\leqslant$ é um reticulado completo. Além disso, o ínfimo e o supremo são dados por

$$\left(\bigwedge_{i \in I} \psi_i\right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \psi_i(x) \quad \text{e} \quad \left(\bigvee_{i \in I} \psi_i\right)(x) = \bigvee_{i \in I} \psi_i(x),\ \forall\, x \in X, \tag{1.5}$$

respectivamente, para cada família de operadores $\{\psi_i; i \in I\}$ em $\mathcal{O}(\mathbb{L}, \mathbb{M})$.

1.2 Morfologia Matemática em Reticulados Completos

Nesta seção apresentaremos uma breve revisão teórica sobre morfologia matemática em reticulados completos. Lembre-se que reticulados completos fornecem um contexto apropriado onde a morfologia matemática pode ser conduzida (Ronse, 1990; Serra, 1988).

Definição 1.4. *Sejam* $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ *e* $(\mathbb{M}, \leqslant_{\mathbb{M}})$ *reticulados completos. O operador* $\varepsilon : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ *é uma erosão (algébrica) se para todo* $X \subset \mathbb{L}$*,*

$$\varepsilon\left(\bigwedge_{x \in X} x\right) = \bigwedge_{x \in X} \varepsilon(x). \tag{1.6}$$

Analogamente, o operador $\delta : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$ é uma dilatação (algébrica) se para todo $Y \subset \mathbb{M}$,

$$\delta\left(\bigvee_{y\in Y} y\right) = \bigvee_{y\in Y} \delta\left(y\right). \tag{1.7}$$

Definição 1.5. *Sejam $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leqslant_{\mathbb{M}})$ reticulados completos, ε um operador de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{M}$ e δ um operador de $\mathbb{M}$ em $\mathbb{L}$. O par (ε, δ) é uma adjunção entre $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ se*

$$\delta(y) \leqslant_{\mathbb{L}} x \iff y \leqslant_{\mathbb{M}} \varepsilon(x), \tag{1.8}$$

para todo $x \in \mathbb{L}$ e $y \in \mathbb{M}$. Se $\mathbb{L} = \mathbb{M}$, então (ε, δ) é uma adjunção em $\mathbb{L}$.

Em outras palavras, temos que a erosão é um operador que comuta com o ínfimo e a dilatação é um operador que comuta com o supremo.

Proposição 1.1. *Sejam $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leqslant_{\mathbb{M}})$ reticulados completos. Considere os operadores $\varepsilon : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ e $\delta : \mathbb{M} \to \mathbb{L}$.*

a) Se (ε, δ) é uma adjunção entre $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leqslant_{\mathbb{M}})$, então ε é uma erosão e δ é uma dilatação.

b) Para cada erosão ε existe uma única dilatação δ tal que (ε, δ) é uma adjunção. A dilatação adjunta é dada por

$$\delta\left(y\right) = \bigwedge \left\{x \in \mathbb{L}; y \leqslant_{\mathbb{M}} \varepsilon\left(x\right)\right\}, \tag{1.9}$$

para todo $y \in \mathbb{M}$.

c) Para cada dilatação δ existe uma única erosão ε tal que (ε, δ) é uma adjunção. A erosão adjunta é dada por

$$\varepsilon\left(x\right) = \bigvee \left\{y \in \mathbb{M}; \delta\left(y\right) \leqslant_{\mathbb{L}} x\right\}, \tag{1.10}$$

para todo $x \in \mathbb{L}$.

Definição 1.6. *Sejam $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leqslant_{\mathbb{M}})$ reticulados completos. Um operador $\psi : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ é chamado crescente se preserva a ordem, isto é, $x \leqslant_{\mathbb{L}} y \implies \psi(x) \leqslant_{\mathbb{M}} \psi(y)$ e decrescente se inverte a ordem, isto é, $x \leqslant_{\mathbb{L}} y \implies \psi(y) \leqslant_{\mathbb{M}} \psi(x)$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$. Um operador $\psi : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ é chamado extensivo se $x \leqslant_{\mathbb{L}} \psi(x)$ e antiextensivo se $\psi(x) \leqslant_{\mathbb{L}} x$, para todo $x \in \mathbb{L}$. Se para todo $x \in \mathbb{L}$, $\psi^2(x) = \psi(x)$, então ψ é chamado idempotente.*

Proposição 1.2. *Sejam $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leqslant_{\mathbb{M}})$ reticulados completos. Se (ε, δ) é uma adjunção entre $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$, então ε e δ são operadores crescentes.*

Proposição 1.3. *Sejam $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ e $(\mathbb{M}, \leqslant_{\mathbb{M}})$ reticulados completos e id o operador identidade. Se (ε, δ) é uma adjunção entre $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$, então*

a) $\delta\varepsilon \leqslant_{\mathbb{L}} id$.

b) $\varepsilon\delta \geqslant_{\mathbb{M}} id$.

c) $\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon$.

d) $\delta\varepsilon\delta = \delta$.

Definição 1.7. *Dado um reticulado completo* $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$*, um operador* $\gamma : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ *que é crescente, idempotente e antiextensivo é chamado abertura. Dualmente, um operador* ϕ *que é crescente, idempotente e extensivo é chamado fechamento.*

Proposição 1.4. *Se* (ε, δ) *forma uma adjunção entre* $\mathbb{L}$ *e* $\mathbb{M}$*, então* $\gamma = \delta\varepsilon$ *é uma abertura em* $\mathbb{L}$ *e* $\phi = \varepsilon\delta$ *é um fechamento em* $\mathbb{M}$*.*

Em virtude da Proposição 1.4, temos que a composição de pares adjuntos de erosão e dilatação, (ε, δ), dão origem a aberturas e fechamentos, os quais são importantes filtros da morfologia matemática (Heijmans, 1995).

Apesar da definição geral dos operadores da MM em reticulados completos introduzidos pela Definição , os principais abordagens de MM são definidas considerando o reticulado completo das funções de $\mathcal{D}$ em um reticulado completo $\mathbb{L}$, isto é, Fun $(\mathcal{D}, \mathbb{L})$. Em vista dessa observação, no próximo capítulo focaremos nossa atenção na morfologia matemática em Fun $(\mathcal{D}, \mathbb{L})$.

2 Morfologia Matemática $\mathbb{L}-$Valorada

Neste capítulo, vamos abordar alguns conceitos da morfologia matemática $\mathbb{L}-$valorada e apresentar algumas propriedades. Em particular, vamos apresentar os conceitos básicos da MM para imagens em tons de cinza e coloridas. Além disso, estudaremos alguns esquemas de ordenação vetorial para MM colorida.

Nesta tese vamos focar nossa atenção em imagens do tipo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$, em que $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ é um reticulado completo. Vale a pena ressaltar que $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$ pode ser vista como um conjunto $\mathbb{L}$-*fuzzy*. Introduzida por Goguen (1967) como uma extensão da teoria dos conjuntos *fuzzy*, a teoria dos conjuntos $\mathbb{L}$-*fuzzy* estende o conjunto imagem da função de pertinência de um conjunto *fuzzy*, do intervalo unitário $[0, 1]$, que é em si um reticulado completo com a ordenação usual, para um reticulado completo qualquer $\mathbb{L}$ (Deschrijver and Cornelis, 2007). O fato de que o intervalo $[0, 1]$ representa um reticulado completo tem desempenhado um papel crucial no desenvolvimento da morfologia matemática *fuzzy* (FMM), que pode ser vista como uma extensão da MM binária para a MM em tons de cinza (De Baets et al., 1995a,b). Neste contexto, note que um conjunto *fuzzy* corresponde a um conjunto $\mathbb{L}$-*fuzzy* em que $\mathbb{L} = [0, 1]$ (Goguen, 1967). Portanto, a FMM pode ser vista como um caso particular da MM $\mathbb{L}$-*fuzzy*. Um dos principais trabalhos sobre esta extensão da morfologia matemática é devido a Sussner et al. (2012). Vamos apresentar uma breve revisão dos principais conceitos da MM $\mathbb{L}$-*fuzzy*.

Uma imagem f é representada por uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$, em que $\mathcal{D}$ é o domínio da imagem f e $\mathbb{L}$ denota o conjunto de valores da imagem f. Vamos considerar $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$, onde $x \in \mathcal{D}$ representa as coordenadas de um elemento da imagem, em outras palavras, um pixel. Geralmente $\mathcal{D} = \{1, 2, \ldots, M\} \times \{1, 2, \ldots, N\}$, em que $M \times N$ corresponde a dimensão da imagem f. Denotaremos por $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbb{L})$ o conjunto de todas as funções $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$, onde $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ é um reticulado completo. Assim, a relação de ordem $\leqslant$, dada por

$$f \leqslant g \iff f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} g(x), \ \forall\, x \in \mathcal{D}, \tag{2.1}$$

define uma ordem parcial em $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbb{L})$. De fato, sejam $f, g, h \in \text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbb{L})$, temos

(i) $f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} f(x), \ \forall\, x \in \mathcal{D}$, então $f \leqslant f$.

(ii) Se $f \leqslant g$ e $g \leqslant f$, então $f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} g(x)$ e $g(x) \leqslant_{\mathbb{L}} f(x), \ \forall\, x \in \mathcal{D}$. Daí, $f(x) = g(x)\ \forall\, x \in \mathcal{D}$. Portanto, $f = g$.

(iii) Se $f \leqslant g$ e $g \leqslant h$, então $f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} g(x)$ e $g(x) \leqslant_{\mathbb{L}} h(x), \ \forall\, x \in \mathcal{D}$. Daí, $f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} h(x)\ \forall\, x \in \mathcal{D}$. Portanto, $f \leqslant h$.

A estrutura de reticulado completo em $\mathbb{L}$ induz uma estrutura de reticulado completo em $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbb{L})$. Portanto, o conjunto $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbb{L})$ é um reticulado completo com a ordem parcial

induzida de $\mathbb{L}$ e o ínfimo $\bigwedge_{i\in I} f_i$ e supremo $\bigvee_{i\in I} f_i$ de uma coleção arbitrária $\{f_i\}_{i\in I}$ em $\text{Fun}(\mathcal{D},\mathbb{L})$ são dados, respectivamente, por

$$\left(\bigwedge_{i\in I} f_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I} f_i(x) \quad \text{e} \quad \left(\bigvee_{i\in I} f_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I} f_i(x),\ \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{2.2}$$

Os operadores morfológicos geralmente estão associados a um subconjunto $B \subset \mathbb{Z}^2$, denominado elemento estruturante (SE). O elemento estruturante é usado para extrair informações relevantes sobre a forma e o tamanho dos objetos contidos na imagem (Serra, 1982; Soille, 1999). Em particular, vamos considerar B como sendo um elemento estruturante *flat*, ou seja, um elemento estruturante planar. Apresentaremos os operadores morfológicos elementares erosão e dilatação da MM $\mathbb{L}$-*fuzzy*, obtidos considerando somente elementos estruturantes *flat*. Além disso, nossa definição será consistente com a abordagem em tons de cinza apresentada por Soille (1999). O leitor interessado numa abordagem mais geral sobre MM $\mathbb{L}$-*fuzzy* pode consultar o trabalho de Sussner et al. (2012).

Definição 2.1. *Seja $(\mathbb{L},\leqslant_{\mathbb{L}})$ um reticulado completo. A erosão e a dilatação de uma imagem $f:\mathcal{D}\to\mathbb{L}$ pelo elemento estruturante B flat são dadas, respectivamente, por*

$$\varepsilon_B(f)(x) = \bigwedge_{\substack{b\in B\\ x+b\in\mathcal{D}}} f(x+b) \quad e \quad \delta_B(f)(x) = \bigvee_{\substack{b\in B\\ x+b\in\mathcal{D}}} f(x+b),\ \forall\, x\in\mathcal{D}. \tag{2.3}$$

Vale a pena ressaltar que alguns autores da literatura, por exemplo Heijmans (1994), definem a dilatação de uma maneira diferente. No entanto, se o elemento estruturante B for simétrico com relação a origem, então $B = \check{B}$, onde $\check{B}$ é o elemento estruturante refletido com relação a origem, ou seja, $\check{B} = \{-b; b\in B\}$. Portanto, $\delta_{\check{B}}(f)(x) = \delta_B(f)(x)$ e ambas as definições de dilatação coincidem.

Proposição 2.1. *O par $(\varepsilon_B,\delta_{\check{B}})$ forma uma adjunção sobre Fun$(\mathcal{D},\mathbb{L})$, em outras palavras, $\delta_{\check{B}}(f)\leqslant g \Leftrightarrow f\leqslant\varepsilon_B(g)$, para cada $f,g\in$ Fun$(\mathcal{D},\mathbb{L})$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\delta_{\check{B}}(f) \leqslant g &\Leftrightarrow \delta_{\check{B}}(f)(y) \leqslant_{\mathbb{L}} g(y),\ \forall\, y \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow \bigvee_{\substack{b\in\check{B} \\ y+b\in\mathcal{D}}} f(y+b) \leqslant_{\mathbb{L}} g(y),\ \forall\, y \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow \bigvee_{\substack{b\in B \\ y-b\in\mathcal{D}}} f(y-b) \leqslant_{\mathbb{L}} g(y),\ \forall\, y \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow f(\underbrace{y-b}_{x}) \leqslant_{\mathbb{L}} g(y),\ \forall\, b \in B \text{ e } \forall\, y \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} g(x+b),\ \forall\, b \in B \text{ e } \forall\, x \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} \bigwedge_{\substack{b\in B \\ x+b\in\mathcal{D}}} g(x+b),\ \forall\, x \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} \varepsilon_B(g)(x),\ \forall\, x \in \mathcal{D} \\
&\Leftrightarrow f \leqslant \varepsilon_B(g).
\end{aligned}$$

□

Dessa forma, pela Proposição 1.2 temos que a erosão é um operador que comuta com o ínfimo e a dilatação é um operador que comuta com o supremo. Apresentaremos algumas propriedades interessantes que os operadores morfológicos $\mathbb{L}-$valorados erosão e dilatação satisfazem.

Os operadores morfológicos erosão e dilatação preservam a relação de ordem para uma imagem $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$, ou seja, são operadores crescentes.

Proposição 2.2. *ε_B e δ_B são operadores crescentes. Dadas $f, g \in$ Fun$(\mathcal{D}, \mathbb{L})$, temos*

$$f \leqslant g \;\Rightarrow \begin{cases} \delta_B(f) \;\leqslant\; \delta_B(g) \\ \varepsilon_B(f) \;\leqslant\; \varepsilon_B(g) \end{cases}. \tag{2.4}$$

Demonstração. A demonstração segue da Proposição 1.2. □

A erosão com um elemento estruturante B é menor ou igual que a dilatação baseada em distância com o mesmo elemento estruturante B:

$$\varepsilon_B(f) \leqslant \delta_B(f). \tag{2.5}$$

Proposição 2.3. *Se o elemento estruturante B contém a origem, então ε_B é um operador antiextensivo e δ_B é um operador extensivo. Formalmente, dada $f \in$ Fun$(\mathcal{D}, \mathbb{L})$, temos*

$$0 \in B \;\Rightarrow\; \varepsilon_B(f) \leqslant f \leqslant \delta_B(f). \tag{2.6}$$

Demonstração. Note que, para cada pixel $x \in \mathcal{D}$, temos

$$\varepsilon_B(f)(x) = \bigwedge_{\substack{b\in B \\ x+b\in\mathcal{D}}} f(x+b) \leqslant_{\mathbb{L}} f(x+b), \forall\, b \in B.$$

Como B contém a origem, então para $b = 0$, temos

$$\varepsilon_B(f)(x) \leqslant_{\mathbb{L}} f(x), \tag{2.7}$$

para cada pixel $x \in \mathcal{D}$. Portanto, o operador erosão é um operador antiextensivo.

De modo análogo, para cada pixel $x \in \mathcal{D}$, temos

$$f(x+b) \leqslant_{\mathbb{L}} \bigvee_{\substack{b\in B \\ x+b\in\mathcal{D}}} f(x+b) = \delta_B(f)(x), \forall\, b \in B.$$

Como B contém a origem, então para $b = 0$, temos

$$f(x) \leqslant_{\mathbb{L}} \delta_B(f)(x), \tag{2.8}$$

para cada pixel $x \in \mathcal{D}$. Portanto, o operador dilatação é um operador extensivo. Combinando as equações (2.7) e (2.8), obtemos a relação de ordem dada pela equação (2.6). □

As duas propriedades seguintes dizem respeito à composição de operadores dilatação e de operadores erosão.

Proposição 2.4. *Sejam $f \in Fun(\mathcal{D}, \mathbb{L})$ e B_1, B_2 elementos estruturantes (flat). Então*

$$\varepsilon_{B_1}\left(\varepsilon_{B_2}(f)\right) = \varepsilon_{B_1\oplus B_2}(f) \quad e \quad \delta_{B_1}\left(\delta_{B_2}(f)\right) = \delta_{B_1\oplus B_2}(f), \tag{2.9}$$

onde $B_1 \oplus B_2 = \{b_1 + b_2; b_1 \in B_1$ e $b_2 \in B_2\}$ é a soma de Minkowski de B_1 e B_2.

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
\delta_{B_1}\left(\delta_{B_2}(f)\right)(x) &= \bigvee_{\substack{b_1\in B_1 \\ x+b_1\in\mathcal{D}}} \left[\delta_{B_2}(f)(x+b_1)\right] \\
&= \bigvee_{\substack{b_1\in B_1 \\ x+b_1\in\mathcal{D}}} \left[\bigvee_{\substack{b_2\in B_2 \\ (x+b_1)+b_2\in\mathcal{D}}} f((x+b_1)+b_2) \right] \\
&= \bigvee_{\substack{b_1\in B_1 \\ x+b_1\in\mathcal{D}}} \left[\bigvee_{\substack{b_2\in B_2 \\ x+(b_1+b_2)\in\mathcal{D}}} f\left(x + \left(\underbrace{b_1+b_2}_{b}\right)\right) \right] \\
&= \bigvee_{\substack{b\in B_1\oplus B_2 \\ x+b\in\mathcal{D}}} f\left(x+b\right) \\
&= \delta_{B_1\oplus B_2}(f)(x).
\end{aligned}$$

De modo análogo, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{B_1}\left(\varepsilon_{B_2}(f)\right)(x) &= \bigwedge_{\substack{b_1\in B_1\\ x+b_1\in\mathcal{D}}} \left[\varepsilon_{B_2}(f)(x+b_1)\right] \\
&= \bigwedge_{\substack{b_1\in B_1\\ x+b_1\in\mathcal{D}}} \left[\bigwedge_{\substack{b_2\in B_2\\ (x+b_1)+b_2\in\mathcal{D}}} f((x+b_1)+b_2)\right] \\
&= \bigwedge_{\substack{b_1\in B_1\\ x+b_1\in\mathcal{D}}} \left[\bigwedge_{\substack{b_2\in B_2\\ x+(b_1+b_2)\in\mathcal{D}}} f\left(x+\left(\underbrace{b_1+b_2}_{b}\right)\right)\right] \\
&= \bigwedge_{\substack{b\in B_1\oplus B_2\\ x+b\in\mathcal{D}}} f(x+b) \\
&= \varepsilon_{B_1\oplus B_2}(f)(x).
\end{aligned}$$

□

Essas duas propriedades são muito úteis na prática, uma vez que essas propriedades permitem decompor operadores morfológicos com um elemento estruturante grande em uma sequência de operadores morfológicos com elementos estruturantes menores. Apresentaremos, a seguir, a definição de espaço normado e espaço métrico.

Definição 2.2. *Um espaço métrico é um conjunto $X \neq \varnothing$ munido de uma função $d : X\times X \to \mathbb{R}$, chamada de métrica sobre X, com as seguintes propriedades, para cada $x, y, z \in X$:*

(i) $d(x,y) \geqslant 0$ *e* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Definição 2.3. *Seja X um espaço vetorial real. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X\times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades, para cada $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:*

(i) $\|x\| \geqslant 0$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Um espaço vetorial real X munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado um espaço vetorial normado.

Observação 2.1. *Um espaço vetorial normado X torna-se naturalmente um espaço métrico, com a métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = \|x - y\|$. Esta métrica diz-se proveniente da*

norma $\|\cdot\|$, para mais detalhes ver (Lima, 2009; Munkres, 1984). Uma norma bastante utilizada é a norma Euclidiana, definida por $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, para cada $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Novos operadores morfológicos são definidos combinando os operadores morfológicos elementares erosão e dilatação. Por exemplo, a abertura, o fechamento e o gradiente (Soille, 1999; Dougherty and Lotufo, 2003). Em particular, focaremos nossa atenção no gradiente morfológico. Vamos supor que $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$, além de ser um reticulado completo, é também um espaço métrico.

Definição 2.4. *Sejam $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ um reticulado completo e $(\mathbb{L}, d)$ um espaço métrico. O gradiente morfológico de uma imagem $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$ pelo elemento estruturante B, é dado por:*

$$\varrho_B(f)(x) = d\left(\delta_B(f)(x), \varepsilon_B(f)(x)\right), \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{2.10}$$

Além disso, o gradiente morfológico normalizado, $\overline{\varrho}_B$, é dado por

$$\overline{\varrho}_B(f)(x) = \frac{\varrho_B(f)(x)}{\bigvee \{\varrho_B(f)(y) : y \in \mathcal{D}\}}. \tag{2.11}$$

Os gradientes morfológicos são operadores que intensificam as variações dos valores da imagem em uma vizinhança determinada pelo elemento estruturante B (Soille et al., 1993).

2.1 Morfologia Matemática em Tons de Cinza

Nesta seção, apresentaremos uma abordagem da morfologia matemática para imagens em tons de cinza, para mais detalhes ver (Heijmans, 1995; Soille, 1999).

Uma imagem f em tons de cinza é representada por uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$, onde $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^2$ é o domínio da imagem f e $\mathbb{L} = [0, 1]$ denota o conjunto dos valores de tons de cinza. Observe que f mapeia cada pixel $x \in \mathcal{D}$ em um valor de tons de cinza $f(x) \in [0, 1]$. Lembre-se que $[0, 1]$ com a ordem usual $\leqslant$ é um reticulado completo. Assim, a ordem natural $\leqslant$, dada por (2.1) define uma ordem parcial em $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0, 1])$. De acordo com a Definição 2.1, apresentamos os operadores morfológicos erosão e dilatação para imagens em tons de cinza.

Definição 2.5. *A erosão e a dilatação de uma imagem em tons de cinza $f : \mathcal{D} \to [0, 1]$ pelo elemento estruturante B, respectivamente, são dadas por*

$$\varepsilon_B(f)(x) = \bigwedge_{\substack{b \in B \\ x+b \in \mathcal{D}}} f(x+b) \quad e \quad \delta_B(f)(x) = \bigvee_{\substack{b \in B \\ x+b \in \mathcal{D}}} f(x+b), \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{2.12}$$

Segue da Proposição **??** que o par $(\varepsilon_B, \delta_{\check{B}})$ forma uma adjunção sobre $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0, 1])$. Em outras palavras, $\delta_{\check{B}}(f) \leqslant g \Leftrightarrow f \leqslant \varepsilon_B(g)$, para cada $f, g \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0, 1])$. Dessa forma, a Definição 2.5 é consistente com a Definição 1.5. Além disso, as Proposições 2.2, 2.3 e 2.4 são válidas. De acordo com a Definição 2.10, apresentamos o gradiente morfológico para imagens em tons de cinza.

Definição 2.6. *O gradiente morfológico é definido como sendo o valor absoluto da diferença aritmética entre a dilatação e a erosão da imagem em tons de cinza $f : \mathcal{D} \to [0,1]$ pelo elemento estruturante B. Formalmente, o gradiente morfológico é dado por:*

$$\varrho_B(f)(x) = |\delta_B(f)(x) - \varepsilon_B(f)(x)|\,, \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{2.13}$$

Além disso, o gradiente morfológico normalizado, $\overline{\varrho}_B : \mathcal{D} \to [0,1]$, é dado por

$$\overline{\varrho}_B(f)(x) = \frac{\varrho_B(f)(x)}{\bigvee \{\varrho_B(f)(y) : y \in \mathcal{D}\}}. \tag{2.14}$$

O gradiente $\varrho_B(f)$ representa a variação máxima das intensidades de tons de cinza para cada $x \in \mathcal{D}$. Como $\delta_B(f) \geqslant \varepsilon_B(f)$, o gradiente morfológico (2.13) corresponde ao gradiente de Beucher (1990), que é dado pela diferença aritmética entre a dilatação e a erosão da imagem em tons de cinza f pelo elemento estruturante B sem o valor absoluto.

A Figura 1 representa uma imagem em tons de cinza $f : \mathcal{D} \to [0,1]$ de dimensão 481×321. A imagem f foi retirada do *dataset* de Berkeley (Martin et al., 2001) e convertida em tons de cinza através do comando `rgb2gray` implementado no `GNU Octave`. Fonte:(`https://www2.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/grouping/`).

Figura 1 – Imagem em tons de cinza f.

Exemplo 2.1. *Neste exemplo, vamos considerar B como sendo um elemento estruturante quadrado 3×3 e a imagem em tons de cinza f, apresentada na Figura 1. As imagens da Figura 2 ilustram os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente aplicados na imagem f.*

(a) $\varepsilon_B(f)$

(b) $\delta_B(f)$

(c) $1 - \overline{\varrho}_B(f)$

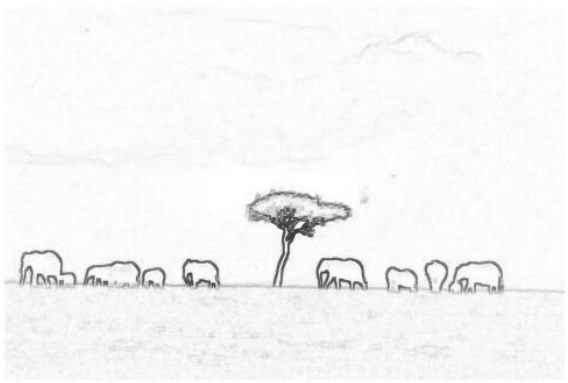


Figura 2 – Erosão, dilatação e complementar do gradiente normalizado da imagem f pelo elemento estruturante B.

2.2 Morfologia Matemática Colorida

Nesta seção, apresentaremos um breve resumo sobre MM colorida e os principais esquemas de ordenação vetorial utilizados para definir os operadores morfológicos. Uma discussão mais abrangente sobre diferentes abordagens para MM multivariada, incluindo a MM colorida, pode ser encontrada em (Goutsias et al., 1995; Talbot et al., 1998; Aptoula and Lefèvre, 2007; Angulo, 2007).

Uma imagem colorida $\boldsymbol{f}$ é representada por uma função $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{L}$, onde $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2$ é o domínio da imagem $\boldsymbol{f}$ e $\mathbb{L}$ é o espaço de cor. Note que $\boldsymbol{f}$ mapeia cada pixel $x \in \mathcal{D}$ em um valor de cor $\boldsymbol{f}(x) \in \mathbb{L}$. Nesta tese, vamos considerar o espaço de cor RGB. O espaço de cor RGB é baseado na teoria tristimulus da visão em que uma cor é decomposta nas cores primitivas: vermelha (R), verde (G) e azul (B) (Acharya and Ray, 2005). Geometricamente, esse espaço de cor RGB é representado pelo cubo RGB, ou seja, $\mathbb{L} = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] = [0,1]^3$. Vamos considerar $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$, o conjunto de todas as funções $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to [0,1]^3$. No cubo RGB, uma cor $\boldsymbol{u} \in [0,1]^3$ é representada por $\boldsymbol{u} = (u_R, u_G, u_B)$, onde $u_R, u_G, u_B \in [0,1]$. Usando esta representação, o valor de $\boldsymbol{f}$ em um pixel $x \in \mathcal{D}$, que se encontra em $[0,1]^3$, é denotado por $\boldsymbol{f}(x) = (f_R(x), f_G(x), f_B(x))$.

Um requisito essencial para extender os operadores morfológicos para imagens coloridas é equipar o espaço das cores $\mathbb{L}$ com uma ordem parcial $\leqslant$ que resulte em uma estrutura de reticulado completo. Nesse caso, a tarefa é muito mais desafiadora para imagens coloridas, uma vez que não existe uma relação de ordem natural no cubo RGB. Vamos considerar $\leqslant$ uma ordem parcial em $[0,1]^3$ de modo que $\left([0,1]^3, \leqslant\right)$ seja um reticulado completo. Assim, o conjunto $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$ herda a ordem parcial do conjunto $[0,1]^3$ e com isso, dadas $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$, temos

$$\boldsymbol{f} \leqslant \boldsymbol{g} \iff \boldsymbol{f}(x) \leqslant \boldsymbol{g}(x), \ \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{2.15}$$

Esta relação de ordem fornece ao conjunto $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$ uma estrutura de reticulado completo.

Uma vez que uma estrutura de reticulado completo é definida em $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$, os operadores morfológicos fundamentais da MM, erosão $\boldsymbol{\varepsilon}$ e dilatação $\boldsymbol{\delta}$ são definidos para uma imagem colorida $\boldsymbol{f} \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$, de acordo com a Definição 2.1.

Definição 2.7. *A erosão e a dilatação de uma imagem colorida $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to [0,1]^3$ pelo elemento estruturante B, são dadas respectivamente, por*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B(\boldsymbol{f})(x) = \bigwedge_{\substack{b \in B \\ x+b \in \mathcal{D}}} \boldsymbol{f}(x+b) \quad e \quad \boldsymbol{\delta}_B(\boldsymbol{f})(x) = \bigvee_{\substack{b \in B \\ x+b \in \mathcal{D}}} \boldsymbol{f}(x+b), \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{2.16}$$

Note que para qualquer imagem colorida $\boldsymbol{f} \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$, a erosão $\boldsymbol{\varepsilon}_B(\boldsymbol{f})$ e a dilatação $\boldsymbol{\delta}_B(\boldsymbol{f})$ formam novas imagens coloridas. As imagens obtidas pelos operadores erosão e dilatação dependem fortemente da ordem estabelecida no espaço de cor. Com isso, a maior dificuldade para extender os operadores morfológicos para imagens coloridas consiste em definir

uma relação de ordem parcial $\leqslant$ no espaço de cor $[0,1]^3$ que induzirá uma estrutura de reticulado completo em Fun$(\mathcal{D},[0,1]^3)$ com boas propriedades para processamento ou análise de imagens coloridas.

É fácil verificar que o par $(\boldsymbol{\varepsilon}_B, \boldsymbol{\delta}_{\check{B}})$ forma uma adjunção sobre Fun$(\mathcal{D},[0,1]^3)$. Logo, a Definição 2.7 é consistente com a Definição 1.5. Além disso, as Proposições 2.2, 2.3 e 2.4 também são válidas. O gradiente morfológico para imagens coloridas possui diferentes formulações (Angulo and Serra, 2003). Neste trabalho utilizaremos a seguinte definição de Angulo (2007), que é consistente com a Definição 2.4.

Definição 2.8. *O gradiente morfológico de uma imagem colorida $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to [0,1]^3$ pelo elemento estruturante B, é dado por*

$$\boldsymbol{\varrho}_B(\boldsymbol{f})(x) = \left\|\boldsymbol{\delta}_B(\boldsymbol{f})(x) - \boldsymbol{\varepsilon}_B(\boldsymbol{f})(x)\right\|_2, \ \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{2.17}$$

Além disso, o gradiente morfológico normalizado, $\overline{\varrho}_B : \mathcal{D} \to [0,1]$, é dado por

$$\overline{\boldsymbol{\varrho}}_B(\boldsymbol{f})(x) = \frac{\boldsymbol{\varrho}_B(\boldsymbol{f})(x)}{\bigvee\{\boldsymbol{\varrho}_B(\boldsymbol{f})(y) : y \in \mathcal{D}\}}. \tag{2.18}$$

2.2.1 Esquemas de Ordenação Vetorial

Nas últimas décadas, as pesquisas sobre MM multivariada concentraram-se na busca de esquemas de ordenação vetorial e inúmeras soluções foram propostas nesses últimos anos. Embora muitas técnicas para ordenação multivariada possam ser encontradas na literatura (Goutsias et al., 1995; Talbot et al., 1998; Angulo, 2007; Aptoula and Lefèvre, 2007). De acordo com Barnett (1976), as principais ordenações vetoriais podem ser classificadas em um dos seguintes grupos: marginal (M-ordenação), condicional (C-ordenação) e reduzida (R-ordenação). Apresentaremos alguns esquemas de ordenação vetorial, onde utilizaremos como espaço de cor o cubo RGB, em outras palavras, $[0,1]^3$.

A ordem marginal ou ordem induzida é um esquema de ordenação que consiste em ordenar os vetores em cada canal ou banda de forma independente (Soille, 1999). Precisamente, dadas duas cores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in [0,1]^3$, temos

$$\boldsymbol{u} \leqslant_M \boldsymbol{v} \iff u_R \leqslant v_R, u_G \leqslant v_G \text{ e } u_B \leqslant v_B, \tag{2.19}$$

onde $\leqslant$ representa a ordenação usual no intervalo $[0,1]$ e u_R, u_G, u_B são os canais de cor de $\boldsymbol{u}$. O esquema de ordenação marginal não leva em consideração a correlação entre os canais de cores. Além disso, a abordagem utilizando a ordem marginal introduz "cores falsas", isto é, cores que não pertencem a imagem original (Serra, 2009).

Um outro exemplo de ordenação vetorial é a ordem lexicográfica. Na ordem lexicográfica, as cores no cubo RGB são ordenadas sequencialmente priorizando os canais vermelho

(Red), verde (Green) e azul (Blue). Formalmente, a ordem lexicográfica é definida como segue: Dadas duas cores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in [0,1]^3$, temos

$$\boldsymbol{u} \leqslant_L \boldsymbol{v} \iff \begin{cases} u_R < v_R, & \text{ou} \\ u_R = v_R \quad \text{e} \quad u_G < v_G, & \text{ou} \\ u_R = v_R, u_G = v_G \quad \text{e} \quad u_B \leqslant v_B, \end{cases} \tag{2.20}$$

em que $\leqslant$ representa a ordem usual de cada canal de cor e u_R, u_G, u_B são os canais de cor de $\boldsymbol{u}$. O esquema de ordenação baseado na ordem lexicográfica é uma ordem total, isto é, duas cores quaisquer no cubo RGB sempre são comparavéis. Assim, tanto o supremo quanto o ínfimo de um conjunto finito de cores são elementos do conjunto. A ordenação lexicográfica tem sido amplamente utilizada na MM colorida, em parte porque é um esquema de ordenação total (Aptoula and Lefèvre, 2007, 2008). Uma fato interessante sobre a ordem lexicográfica é que ela não introduz cores falsas. Em todo caso, a ordem lexicográfica prioriza muito o primeiro canal de cor. Destacamos que podemos estabelecer diferentes prioridades entre os canais de cor, modificando a ordem de comparação entre os canais de cor em (2.20).

A ordenação reduzida é um esquema de ordenação no qual os vetores são reduzidos a valores escalares e então ordenados de acordo com sua ordem escalar usual. A redução é usualmente realizada através de uma transformação $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, usada para ordenar os vetores. Matematicamente, a ordem reduzida ou h-ordem é dada pela seguinte relação em $\mathbb{R}^3$, dados $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{u} \leqslant_h \boldsymbol{v} \iff h(\boldsymbol{u}) \leqslant h(\boldsymbol{v}). \tag{2.21}$$

Note que $\leqslant_h$ satisfaz as propriedades (i) e (iii) da Definição 1.1. Em geral, a transformação h não é injetiva e com isso dois vetores distintos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ são levados atráves da transformação h no mesmo valor escalar, ou seja, $h(\boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{v})$, com $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$. Consequentemente, a propriedade (ii) da Definição 1.1 não é obedecida e, com isso, $\leqslant_h$ não é uma ordem parcial. Geralmente, a h-ordem, dada por (2.21), é uma pré-ordem em $\mathbb{R}^3$. Ainda assim, é possível definir os operadores da morfologia matemática erosão e dilatação (Goutsias et al., 1995). Nesse trabalho, porém, acrescentamos simplesmente uma condição adicional para resolver os casos de ambiguidades. Especificamente, consideraremos o seguinte esquema de ordenação em que $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua: Dados $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\boldsymbol{u} \leqslant_h \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \begin{cases} h(\boldsymbol{u}) < h(\boldsymbol{v}) & \text{ou} \\ h(\boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{v}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} \leqslant_L \boldsymbol{v}, \end{cases} \tag{2.22}$$

onde $\leqslant_L$ representa a ordem lexicográfica (2.20). Um exemplo típico de h-ordem é a ordem baseada em distância, em que a distância é uma função contínua. Nesta tese, vamos estudar de forma mais detalhada o esquema de ordenação baseado em distância no espaço de cor RGB.

Exemplo 2.2. *Na abordagem proposta por De Witte et al. (2005b)* [1] *utiliza-se de esquemas*

[1] Nesta tese adaptamos os esquemas de ordenação baseados em distância proposto por De Witte et al. (2005b) para obter os valores de máximo e mínimo, facilitando a escrita e tornando a definição dos operadores erosão e dilatação mais consistente com as demais abordagens.

de ordenação baseados em distância com respeito a duas cores de referência no cubo RGB, a cor preta $Bl = (0,0,0)$ e a cor branca $Wh = (1,1,1)$. Nesta abordagem, um esquema de ordenação é definido para obter o mínimo entre duas cores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in [0,1]^3$. A ordem $\preccurlyeq_{W_e}$ é dada por

$$\boldsymbol{u} \preccurlyeq_{W_e} \boldsymbol{v} \iff \begin{cases} d(\boldsymbol{u}, Bl) < d(\boldsymbol{v}, Bl) & ou \\ d(\boldsymbol{u}, Bl) = d(\boldsymbol{v}, Bl) & e \quad d(\boldsymbol{u}, Wh) > d(\boldsymbol{v}, Wh) \quad ou \\ d(\boldsymbol{u}, Bl) = d(\boldsymbol{v}, Bl) & e \quad d(\boldsymbol{u}, Wh) = d(\boldsymbol{v}, Wh) \quad e \quad \boldsymbol{u} \preccurlyeq_L \boldsymbol{v}, \end{cases} \tag{2.23}$$

onde $\preccurlyeq_L$ é a ordem lexicográfica (2.20) e $d(\cdot,\cdot)$ é a distância Euclidiana entre duas cores no cubo RGB. O esquema de ordenação dado em (2.23), é uma ordem total em $[0,1]^3$. Além disso, $[0,1]^3$ com a ordem $\preccurlyeq_{W_e}$ é um reticulado completo. Nesse reticulado completo, $\boldsymbol{u} \preccurlyeq_{W_e} \boldsymbol{v}$ se $\boldsymbol{u}$ está mais próximo do preto do que $\boldsymbol{v}$.

Analogamente, um esquema de ordenação também é definido para obter o máximo entre duas cores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in [0,1]^3$. A ordem $\succcurlyeq_{W_d}$ é dada por

$$\boldsymbol{u} \succcurlyeq_{W_d} \boldsymbol{v} \iff \begin{cases} d(\boldsymbol{u}, Wh) < d(\boldsymbol{v}, Wh) & ou \\ d(\boldsymbol{u}, Wh) = d(\boldsymbol{v}, Wh) & e \quad d(\boldsymbol{u}, Bl) > d(\boldsymbol{v}, Bl) \quad ou \\ d(\boldsymbol{u}, Wh) = d(\boldsymbol{v}, Wh) & e \quad d(\boldsymbol{u}, Bl) = d(\boldsymbol{v}, Bl) \quad e \quad \boldsymbol{u} \succcurlyeq_L \boldsymbol{v}, \end{cases} \tag{2.24}$$

onde $\succcurlyeq_L$ é o dual da ordem lexicográfica (2.20) e $d(\cdot,\cdot)$ é a distância Euclidiana entre duas cores no cubo RGB. O esquema de ordenação dado em (2.24), também é uma ordem total em $[0,1]^3$. Além disso, $[0,1]^3$ com a ordem $\succcurlyeq_{W_d}$ também é um reticulado completo. Nesse reticulado completo, $\boldsymbol{u} \succcurlyeq_{W_d} \boldsymbol{v}$ se $\boldsymbol{u}$ está mais próximo do branco do que $\boldsymbol{v}$.

Baseado nesses esquemas de ordenação para obter o mínimo e o máximo, definem-se os operadores erosão e dilatação, denotado por $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{W_e}$ e $\boldsymbol{\delta}_B^{W_d}$, respectivamente. Conforme a Definição 2.7 observe que o operador $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{W_e}$ é definido em termos da ordem $\preccurlyeq_{W_e}$ e o operador $\boldsymbol{\delta}_B^{W_d}$ é definido em termos da ordem $\succcurlyeq_{W_d}$. Note que, a ordem $\succcurlyeq_{W_d}$ não é a ordem dual de $\preccurlyeq_{W_e}$. Os operadores $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{W_e}$ e $\boldsymbol{\delta}_B^{W_d}$ não formam uma adjunção, pois são definidos em reticulados diferentes. Com efeito, os esquemas de ordenação baseados em distância utilizam-se de duas cores de referência, preta e branca. Nesta abordagem, a relação de ordem $\preccurlyeq_{W_e}$ prioriza a cor preta enquanto que relação de ordem $\succcurlyeq_{W_d}$ prioriza a cor branca.

Exemplo 2.3. *Nesse exemplo, vamos apresentar a abordagem proposta por Angulo (2007), onde utiliza-se um esquema de ordenação baseado em distância com relação a uma certa cor de referência. Em outras palavras, essa abordagem baseia-se em um esquema de ordenação onde primeiro compara-se a distância com relação a uma determinada cor de referência $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$. No caso de ambiguidades, ou seja, cores que possuem a mesma distância quando comparada com a cor de referência $\boldsymbol{r}$, utiliza-se a ordem lexicográfica para resolver as ambiguidades. Matematicamente, dadas duas cores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in [0,1]^3$, a ordem $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$, é dada por*

$$\boldsymbol{u} \preccurlyeq_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \begin{cases} d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) > d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) & ou \\ d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) = d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) & e \quad \boldsymbol{u} \preccurlyeq_L \boldsymbol{v}, \end{cases} \tag{2.25}$$

onde $\leqslant_L$ é a ordem lexicográfica (2.20), $d(\cdot,\cdot)$ é a distância Euclidiana entre duas cores no cubo RGB e $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ é uma cor de referência. A relação de ordem $\preccurlyeq_r$ é uma ordem total, em que duas cores quaisquer sempre são comparavéis e $\left([0,1]^3, \preccurlyeq_r\right)$ é um reticulado completo. De acordo com a Definição 2.7, os operadores morfológicos erosão e dilatação, denotados por $\boldsymbol{\varepsilon}_B^r$ e $\boldsymbol{\delta}_B^r$, respectivamente, são ambos definidos em termos da ordem $\preccurlyeq_r$. Nesta abordagem, para cada $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ fixo, os operadores morfológicos $\boldsymbol{\varepsilon}_B^r$ e $\boldsymbol{\delta}_B^r$ formam uma adjunção. Um fato interessante é que as cores mais próximas da cor de referência $\boldsymbol{r}$ são priorizadas pela dilatação enquanto que as cores mais distantes de $\boldsymbol{r}$ são priorizadas pela erosão.

A Figura 3 representa uma imagem colorida sintética $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to [0,1]^3$ de dimensão 9×9. A imagem $\boldsymbol{f}$ é composta por nove quadrados de dimensão 3×3 com as seguintes cores no cubo RGB: cinza $(0.5, 0.5, 0.5)$, preta $(0,0,0)$, azul $(0,0,1)$, magenta $(1,0,1)$, vermelha $(1,0,0)$, verde $(0,1,0)$, ciano $(0,1,1)$, branca $(1,1,1)$ e amarela $(1,1,0)$.

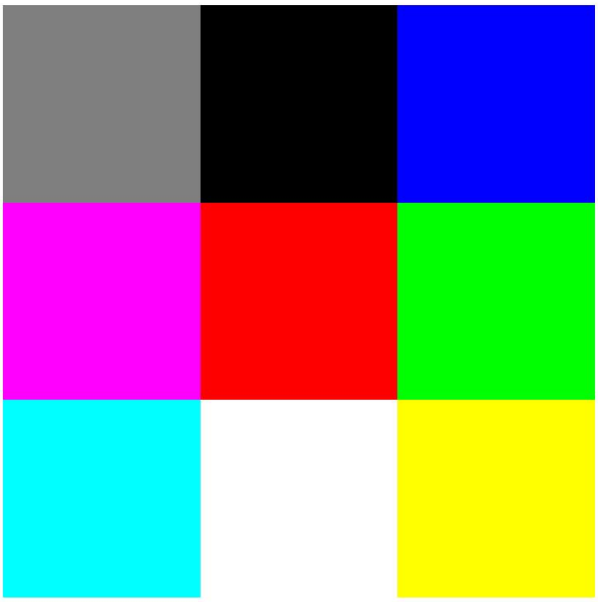


Figura 3 – Imagem sintética colorida $\boldsymbol{f}$.

Exemplo 2.4. *Neste exemplo, vamos considerar B como sendo um elemento estruturante quadrado 3×3 e a imagem colorida $\boldsymbol{f}$ apresentada na Figura 3. A Figura 4 ilustra as imagens produzidas pela erosão e dilatação para a abordagem marginal, ou seja, $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M(\boldsymbol{f})$ e $\boldsymbol{\delta}_B^M(\boldsymbol{f})$. Note que os itens (a) e (b) da Figura 4 mostram o aparecimento de cores falsas. Por exemplo, a erosão $\boldsymbol{\varepsilon}_B^M(\boldsymbol{f})$ produziu uma nova cor, $(0.5, 0, 0.5)$, localizada entre as cores cinza e magenta no lado esquerdo do item (a) da Figura 4. Da mesma forma, a dilatação $\boldsymbol{\delta}_B^M(\boldsymbol{f})$ produziu uma nova cor, $(1, 0.5, 1)$, localizada entre as cores cinza e magenta no lado esquerdo do item (b) da Figura 4. Note que as cores $(0.5, 0, 0.5)$ e $(1, 0.5, 1)$ não pertencem a imagem colorida $\boldsymbol{f}$, mostrada na Figura 3.*

(a) $\varepsilon_B^M(\boldsymbol{f})$ (b) $\boldsymbol{\delta}_B^M(\boldsymbol{f})$

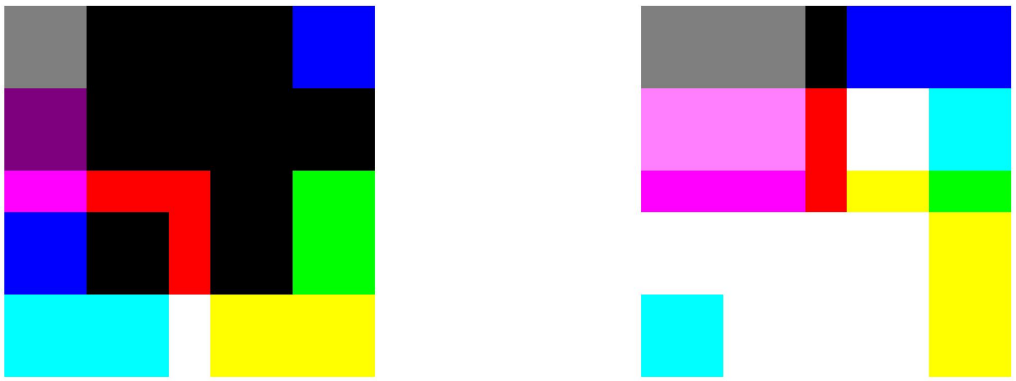


Figura 4 – A erosão e a dilatação marginal.

Exemplo 2.5. *Neste exemplo, vamos considerar B como sendo um elemento estruturante quadrado 3×3 e a imagem colorida $\boldsymbol{f}$ apresentada na Figura 3. A Figura 5 ilustra as imagens produzidas pela erosão e dilatação para a abordagem lexicográfica, ou seja, $\varepsilon_B^L(\boldsymbol{f})$ e $\boldsymbol{\delta}_B^L(\boldsymbol{f})$. De acordo com (2.20), a ordem lexicográfica prioriza os canais de cor da seguinte forma $R \rightarrow G \rightarrow B$. Em contraste com a ordem marginal, a ordem lexicográfica é uma ordem total e, com isso, as cores da imagem $\boldsymbol{f}$, estão ordenadas da seguinte forma: preta $\leqslant_L$ azul $\leqslant_L$ verde $\leqslant_L$ ciano $\leqslant_L$ cinza $\leqslant_L$ vermelha $\leqslant_L$ magenta $\leqslant_L$ amarela $\leqslant_L$ branca. Por exemplo, a erosão $\varepsilon_B^L(\boldsymbol{f})$ apresentou uma certa predominância da cor preta, localizada na parte superior do item (a) da Figura 5. Enquanto que a dilatação $\boldsymbol{\delta}_B^L(\boldsymbol{f})$ apresentou uma certa predominância da cor branca, localizada na parte inferior do item (b) da Figura 5.*

(a) $\varepsilon_B^L(\boldsymbol{f})$ (b) $\boldsymbol{\delta}_B^L(\boldsymbol{f})$

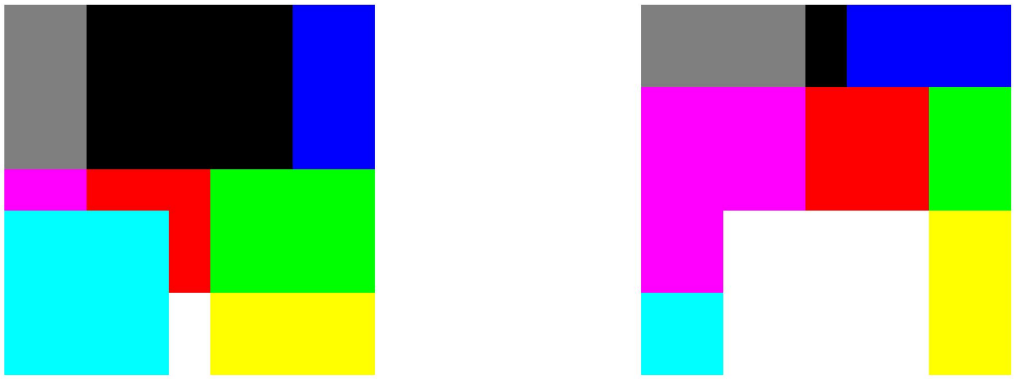


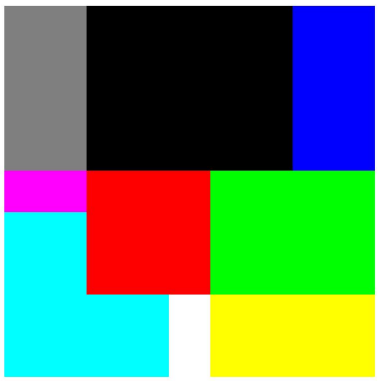
Figura 5 – A erosão e a dilatação lexicográfica.

Exemplo 2.6. *Neste exemplo, vamos considerar B como sendo um elemento estruturante*

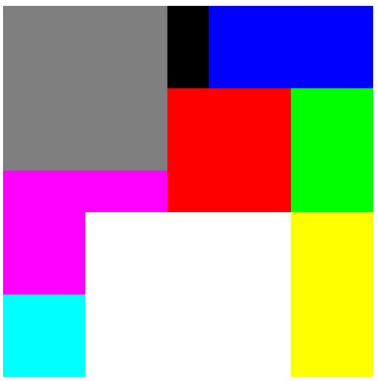
quadrado 3×3 *e a imagem colorida* $\boldsymbol{f}$ *apresentada na Figura 3. A Figura 6 ilustra as imagens produzidas pela erosão e dilatação para as abordagens De Witte et al. (2005b) e Angulo (2007) com* $\boldsymbol{r} = (1, 1, 1)$ *como referência. Um fato interessante é que os operadores* $\boldsymbol{\delta}_B^{W_d}(\boldsymbol{f})$ *e* $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$ *aplicados na imagem colorida* $\boldsymbol{f}$ *tiveram como resultado as mesmas imagens coloridas, como mostra os itens (b) e (d) da figura 6. Isso não é um fato raro de acontecer. Na prática, a probabilidade do critério de desempate ser utilizado para resolver o problema de ambiguidades é muito pequeno. Neste caso, as dilatações propostas por Angulo, com cor de referência branca, e Witte possuem o primeiro critério de ordenação igual, ou seja, as ordens dadas por (2.24) e (2.25) comparam a distância com relação a cor branca. Por exemplo, segundo o esquema de ordenação (2.25) com* $\boldsymbol{r} = (1, 1, 1)$ *as cores da imagem* $\boldsymbol{f}$*, estão ordenadas da seguinte forma: preta* $\preccurlyeq_r$ *azul* $\preccurlyeq_r$ *verde* $\preccurlyeq_r$ *vermelha* $\preccurlyeq_r$ *ciano* $\preccurlyeq_r$ *magenta* $\preccurlyeq_r$ *amarela* $\preccurlyeq_r$ *cinza* $\preccurlyeq_r$ *branca. Para o esquema de ordenação (2.24), as cores da imagem* $\boldsymbol{f}$ *são ordenadas do mesmo jeito que o esquema de ordenação (2.25). Portanto, a abordagem proposta por Angulo é, num certo sentido, mais flexível que a abordagem proposta por Witte uma vez que escolhendo* $\boldsymbol{r} = (1, 1, 1)$ *como cor de referência obtivemos* $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$ *muito semelhante a* $\boldsymbol{\delta}_B^{W_d}(\boldsymbol{f})$.

Na abordagem proposta por De Witte et al. (2005b) a dilatação $\boldsymbol{\delta}_B^{W_d}(\boldsymbol{f})$ prioriza as cores mais próximas da cor branca, enquanto a erosão $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{W_e}(\boldsymbol{f})$ prioriza as cores mais próximas da cor preta. Na abordagem proposta por Angulo (2007) se considerarmos $\boldsymbol{r} = (0, 0, 0)$ a dilatação prioriza as cores mais próximas da cor preta, enquanto a erosão prioriza as cores mais distantes da cor preta. Se considerarmos $\boldsymbol{r} = (1, 1, 1)$ a dilatação prioriza as cores mais próximas da cor branca, enquanto a erosão prioriza as cores mais distantes da cor branca. Isso serve de motivação para estudar melhor o efeito da escolha da cor de referência na abordagem proposta por Angulo (2007). Além disso, essa abordagem "generaliza", de forma simples, muitas abordagens baseadas em distância da literatura com um elemento estruturante *flat*.

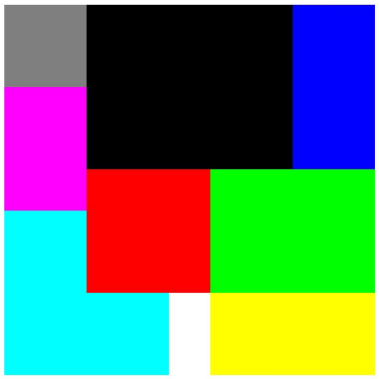
(a) $\varepsilon_B^{W_e}(\boldsymbol{f})$



(b) $\delta_B^{W_d}(\boldsymbol{f})$



(c) $\varepsilon_B^{r}(\boldsymbol{f})$



(d) $\delta_B^{r}(\boldsymbol{f})$

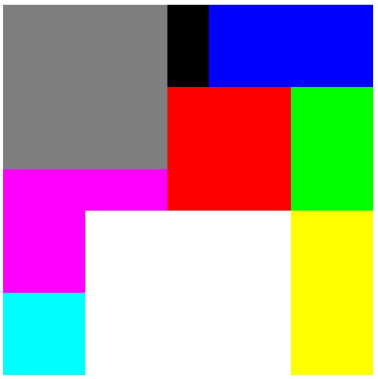


Figura 6 – Os operadores erosão e dilatação para as abordagens Witte e Angulo com $\boldsymbol{r} = (1,1,1)$.

3 Operadores Morfológicos Baseados em Distância

Neste capítulo, concentraremos nossa atenção na abordagem baseada em distância apresentada por Angulo (2007). Especificamente, suponha que $(\mathbb{L}, \leqslant_{\mathbb{L}})$ é um reticulado completo com $\leqslant_{\mathbb{L}}$ uma ordem total e $(\mathbb{L}, d)$ um espaço métrico. Definimos um novo reticulado completo $(\mathbb{L}, \preccurlyeq_{\boldsymbol{r}})$ em que $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$ é uma ordem total em $\mathbb{L}$ dada por

$$\boldsymbol{u} \preccurlyeq_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v} \;\Leftrightarrow \begin{cases} d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) > d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) & \text{ou} \\ d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{r}) = d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) & \text{e} \quad \boldsymbol{u} \leqslant_L \boldsymbol{v},\ \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{L} \end{cases}. \tag{3.1}$$

A relação de ordem $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$ é uma ordem baseada em distância em $\mathbb{L}$. Lembrando que a estrutura de reticulado completo em $\mathbb{L}$ induz uma estrutura de reticulado completo em $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbb{L})$. Em outras palavras, $\text{Fun}(\mathcal{D}, \mathbb{L})$ é um reticulado completo com a ordem total $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$ dada por (3.1). Dessa forma, estudaremos de forma detalhada os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância. Além disso, vamos caracterizar esses operadores em função da referência através do diagrama de Voronoi, para as abordagens em tons de cinza e colorida.

3.1 Abordagem para Imagens em Tons de Cinza

Nas abordagens usuais para a morfologia matemática em tons de cinza, o intervalo $[0, 1]$ é equipado com a ordem usual dos números reais. Os operadores da morfologia matemática baseada em distância utilizam uma ordem total não usual do intervalo $[0, 1]$, dada por (3.1). Especificamente, dado um valor de referência $r \in [0, 1]$, a ordem baseada em distância $\preccurlyeq_r$ é dada por

$$u \preccurlyeq_r v \;\Leftrightarrow \begin{cases} d(u, r) > d(v, r) & \text{ou} \\ d(u, r) = d(v, r) & \text{e} \quad u \leqslant v,\ \forall\, u, v \in [0, 1], \end{cases} \tag{3.2}$$

em que "$\leqslant$" é a ordem usual e $d(u, r) = |u - r|$ (Angulo, 2007). Note que $\preccurlyeq_r$ é uma ordem total no conjunto $[0, 1]$. Em particular, se $r = 1$ a relação de ordem $\preccurlyeq_1$ equivale a ordem usual $\leqslant$, ou seja, $u \preccurlyeq_1 v \;\Leftrightarrow\; u \leqslant v$. Se $r = 0$ a relação de ordem $\preccurlyeq_0$ equivale ao dual da ordem usual $\geqslant$, ou seja, $u \preccurlyeq_0 v \;\Leftrightarrow\; u \geqslant v$.

O conjunto $[0, 1]$ equipado com a ordem $\preccurlyeq_r$, $r \in [0, 1]$, é um reticulado completo. Note que no reticulado completo $([0, 1], \preccurlyeq_r)$ o maior valor em tons de cinza é a própria referência $r \in [0, 1]$, isto é, $u \preccurlyeq_r r,\ \forall\, u \in [0, 1]$. A relação de ordem $\preccurlyeq_r$ em $[0, 1]$ induz uma ordem parcial em $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0, 1])$. Assim, para cada $f, g \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0, 1])$, temos

$$f \preccurlyeq_r g \Leftrightarrow \begin{cases} d(f(x), r) > d(g(x), r) \text{ ou} \\ d(f(x), r) = d(g(x), r) \text{ e } f(x) \leqslant g(x), \end{cases} \quad \forall\, x \in \mathcal{D}, \tag{3.3}$$

em que $r \in [0,1]$ é um valor de referência fixo.

Observação 3.1. *Uma abordagem baseada em referência foi proposta por Heijmans and Keshet (2002). Nesta abordagem, dada uma função de referência $r : \mathcal{D} \to [0,1]$, define-se uma ordem $\leqslant_r$ em Fun$(\mathcal{D}, [0,1])$ como segue*

$$f \leqslant_r g \quad se \quad \begin{cases} r \wedge f & \leqslant & r \wedge g \\ r \vee f & \geqslant & r \vee g \end{cases}, \tag{3.4}$$

em que $\leqslant$ é a ordem usual das funções, isto é, definida por (2.1) e os símbolos $\wedge$ e $\vee$ representam o ínfimo e o supremo. Se $r(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{D}$, então $\leqslant_r$ coincide com a ordem parcial usual de Fun$(\mathcal{D}, [0,1])$. Por outro lado, se $r(x) = 1$, para todo $x \in \mathcal{D}$, então $\leqslant_r$ é a ordem dual $\geqslant$ em Fun$(\mathcal{D}, [0,1])$. Se $r : \mathcal{D} \to [0,1]$ é uma função de referência, então a relação binária $\leqslant_r$ é uma ordem parcial e $(\text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]), \leqslant_r)$ é um cisl cujo ínfimo é a referência r. Uma desvantagem desta abordagem é que a estrutura algébrica do espaço das imagens cisl é menos rica. Isso justifica, em parte, nossa escolha da abordagem baseada em distância proposta por Angulo (2007), uma vez que a estrutura algébrica do conjunto Fun$(\mathcal{D}, [0,1])$ com a ordem total $\leqslant_r$ é um reticulado completo.

De acordo com a Definição 2.1, apresentamos os operadores morfológicos erosão e dilatação baseados em distância para imagens em tons de cinza.

Definição 3.1. *A erosão e a dilatação baseada em distância de uma imagem em tons de cinza $f : \mathcal{D} \to [0,1]$ pelo elemento estruturante B são dadas, respectivamente, por*

$$\varepsilon_B^r(f)(x) = \bigwedge_{\substack{b \in B \\ x+b \in \mathcal{D}}}^{r} f(x+b) \quad e \quad \delta_B^r(f)(x) = \bigvee_{\substack{b \in B \\ x+b \in \mathcal{D}}}^{r} f(x+b), \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{3.5}$$

Nesta abordagem, se considerarmos o caso em que $r = 1$, os operadores morfológicos erosão e dilatação baseados em distância são equivalentes aos operadores morfológicos erosão e dilatação usuais da MM em tons de cinza, respectivamente. Em outras palavras, $\varepsilon_B^1(f) = \varepsilon_B(f)$ e $\delta_B^1(f) = \delta_B(f)$. No caso em que $r = 0$, temos que os operadores erosão e dilatação baseados em distância são equivalentes aos operadores dilatação e erosão usuais, ou seja, $\varepsilon_B^0(f) = \delta_B(f)$ e $\delta_B^0(f) = \varepsilon_B(f)$. Para valores intermediários de r, os operadores erosão e dilatação baseados em distância diferem dos operadores erosão e dilatação usuais da MM. A dilatação baseada em distância de uma imagem $f \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1])$ em um pixel $x \in \mathcal{D}$ pode ser irterpretada como sendo o valor em tons de cinza $f(x) \in [0,1]$ mais próximo da referência r, enquanto a erosão baseada em distância pode ser irterpretada como sendo o valor em tons de cinza $f(x) \in [0,1]$ mais distante da referência $r \in [0,1]$. Note que para cada $r \in [0,1]$ escolhido obtemos um par de operadores morfológicos, ε_B^r e δ_B^r, baseados em distância. Além disso, segue da Proposição 2.1 que o par $\left(\varepsilon_B^r, \delta_{\check{B}}^r\right)$ forma uma adjunção sobre Fun$(\mathcal{D}, [0,1])$.

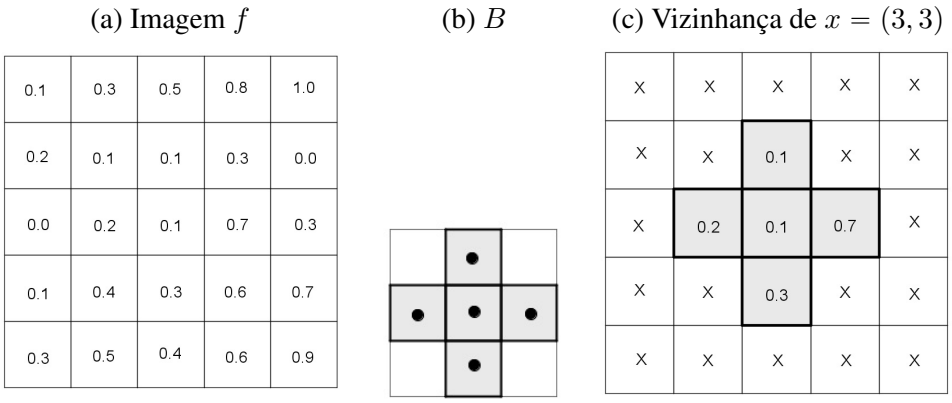


Figura 7 – Imagem em tons de cinza f, elemento estruturante *flat* B e vizinhança do pixel $x = (3, 3)$ determinada por B.

Exemplo 3.1. *Sejam* $f \in Fun(\mathcal{D}, [0, 1])$ *uma imagem em tons de cinza e* B *um elemento estruturante flat, como mostra os itens (a) e (b) da Figura 7. Por simplicidade, calcularemos a erosão e a dilatação baseadas em distância da imagem* f *no pixel* $x = (3, 3)$ *usando o valor de referência* $r = 0.5$*. O item (c) da Figura 7 mostra a vizinhança do pixel* $x = (3, 3)$ *definida pelo elemento estruturante* B*. Assim, a erosão baseada em distância usando a equação (3.5) fornece*

$$\varepsilon_B^{0.5}(f)(3, 3) = \bigwedge^{0.5} \{0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.7\} = 0.1. \tag{3.6}$$

De forma análoga, a dilatação baseada em distância usando a equação (3.5) fornece

$$\delta_B^{0.5}(f)(3, 3) = \bigvee^{0.5} \{0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.7\} = 0.7. \tag{3.7}$$

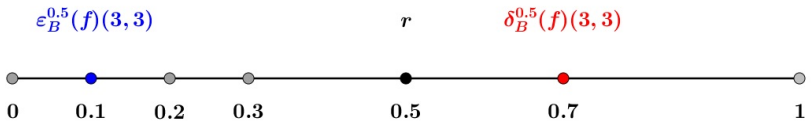


Figura 8 – Interpretação geométrica dos operadores $\varepsilon_B^{0.5}(f)(3, 3)$ e $\delta_B^{0.5}(f)(3, 3)$.

A Figura 8 representa uma interpretação geométrica dos operadores erosão e dilatação baseados em distância da imagem f *no pixel* $x = (3, 3)$ *usando como valor de referência* $r = 0.5$*. Note que a Figura 8 ilustra o fato do problema de ambiguidades no cálculo da dilatação* $\delta_B^{0.5}(f)(3, 3)$*, por exemplo,* 0.3 *e* 0.7 *possuem a mesma distância a* $r = 0.5$*. Neste caso, utilizamos a ordem* $\geqslant$ *para decidir quem é maior, ou seja,* $0.7 \geqslant 0.3$*. Dessa forma, temos que* $\delta_B^{0.5}(f)(3, 3)$ *é o valor de* $f(x + b)$ *mais próximo da referência* $r = 0.5$ *enquanto que* $\varepsilon_B^{0.5}(f)(3, 3)$ *é o valor de* $f(x + b)$ *mais distante da referência* $r = 0.5$ *para* $b \in B$ *e* $x + b \in \mathcal{D}$*. Os operadores erosão e dilatação baseados em distância aplicados na imagem* f *são exibidos na Figura 9.*

(a) $\varepsilon_B^{0.5}(f)$

0.1	0.1	0.1	1.0	0.0
0.0	0.1	0.1	0.0	0.0
0.0	0.0	0.1	0.1	0.0
0.0	0.1	0.1	0.3	0.9
0.1	0.3	0.3	0.9	0.9

(b) $\delta_B^{0.5}(f)$

0.3	0.5	0.5	0.5	0.8
0.2	0.3	0.5	0.7	0.3
0.2	0.4	0.7	0.6	0.7
0.4	0.5	0.6	0.6	0.6
0.5	0.5	0.5	0.6	0.6

Figura 9 – Erosão e dilatação da imagem f com valor de referência $r = 0.5$.

Os operadores morfológicos erosão e dilatação baseados em distância para imagens em tons de cinza são operadores crescentes com respeito à ordem. Além disso, as Proposições 2.2, 2.3 e 2.4 são válidas. De acordo com a Definição 2.10, o gradiente morfológico baseado em distância para imagens em tons de cinza é definido como segue.

Definição 3.2. *O gradiente morfológico baseado em distância é definido como sendo o valor absoluto da diferença aritmética entre a dilatação e a erosão baseada em distância da imagem em tons de cinza $f : \mathcal{D} \to [0, 1]$ pelo elemento estruturante B. Formalmente, o gradiente morfológico baseado em distância é dado por:*

$$\varrho_B^r(f)(x) = \left|\delta_B^r(f)(x) - \varepsilon_B^r(f)(x)\right|, \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{3.8}$$

Além disso, o gradiente morfológico normalizado, $\overline{\varrho}_B^r : \mathcal{D} \to [0, 1]$, é dado por

$$\overline{\varrho}_B^r(f)(x) = \frac{\varrho_B^r(f)(x)}{\bigvee \{\varrho_B^r(f)(y) : y \in \mathcal{D}\}}. \tag{3.9}$$

Exemplo 3.2. *Considere a imagem da Lena em tons de cinza de dimensão 512×512, como mostra a Figura 10, e um elemento estruturante B quadrado de dimensão 3×3. A Figura 11, ilustra os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância aplicados na imagem em tons de cinza da Lena para alguns valores particulares de r. Um fato interessante que podemos observar nesta abordagem baseada em distância é que $\delta_B^0(f) = \varepsilon_B^1(f)$ e $\delta_B^1(f) = \varepsilon_B^0(f)$, como ilustra a Figura 11.*

3.1.1 Caracterização dos operadores ε_B^r, δ_B^r e ϱ_B^r.

Nesta seção vamos apresentar uma caracterização dos operadores baseados em distância erosão, dilatação e gradiente para imagens em tons de cinza em função da referência

Figura 10 – Imagem da Lena em tons de cinza.

$r \in [0,1]$. Estamos interessados em determinar como a escolha da referência r influencia no resultado dos operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância para imagens em tons de cinza.

Vamos considerar $r \in [0,1]$ uma referência fixa e o reticulado completo $[0,1]$ com a ordem total baseada em distância $\preccurlyeq_r$.

Teorema 3.1. *Sejam $f \in Fun(\mathcal{D}, [0,1])$ uma imagem em tons de cinza e $B \subset \mathbb{Z}^2$ um elemento estruturante flat finito. Os operadores baseados em distância erosão, dilatação e gradiente, dados por (3.5) e (3.8) satisfazem as seguintes equações para todo $x \in \mathcal{D}$*

$$\varepsilon_B^r(f)(x) = \begin{cases} f_k, \text{ se } r \in [0, me), \\ f_1, \text{ se } r \in [me, 1], \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\delta_B^r(f)(x) = \begin{cases} f_{i+1}, \text{ se } r \in [a_i, a_{i+1}) \text{ e } i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, \\ f_k, \text{ se } r = 1, \end{cases} \tag{3.11}$$

e

$$\varrho_B^r(f)(x) = \begin{cases} f_k - f_{i+1}, \text{ se } r \in [0, me) \cap [a_i, a_{i+1}) \text{ e } i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, \\ f_{i+1} - f_1, \text{ se } r \in [me, 1) \cap [a_i, a_{i+1}) \text{ e } i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, \\ f_k - f_1, \text{ se } r = 1, \end{cases} \tag{3.12}$$

onde $f_1 < f_2 < \cdots < f_k$ são valores da imagem selecionados pelo elemento estruturante B centrado em $x \in \mathcal{D}$, $me = \dfrac{f_1 + f_k}{2}$, $a_0 = 0$, $a_k = 1$ e $a_j = \dfrac{f_j + f_{j+1}}{2}$, com $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

	Dilatação	Erosão	Gradiente
$r = 0$	(a) $\delta_B^0(f)$	(b) $\varepsilon_B^0(f)$	(c) $1 - \overline{\varrho}_B^0(f)$
$r = 0.2$	(d) $\delta_B^{0.2}(f)$	(e) $\varepsilon_B^{0.2}(f)$	(f) $1 - \overline{\varrho}_B^{0.2}(f)$
$r = 0.5$	(g) $\delta_B^{0.5}(f)$	(h) $\varepsilon_B^{0.5}(f)$	(i) $1 - \overline{\varrho}_B^{0.5}(f)$
$r = 1$	(j) $\delta_B^1(f)$	(k) $\varepsilon_B^1(f)$	(l) $1 - \overline{\varrho}_B^1(f)$

Figura 11 – Operadores dilatação, erosão e o complementar do gradiente normalizado para alguns valores de r.

Demonstração. A demonstração desse resultado será feita de forma construtiva. Vamos considerar $r \in [0,1]$ uma referência fixa. Sejam $f \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1])$ uma imagem em tons de cinza e $B \subset \mathbb{Z}^2$ um elemento estruturante finito. Vamos construir uma lista ordenada sem repetições com os valores da imagem f nos pixels selecionado pelo elemento estruturante B centrado em $x \in \mathcal{D}$ fixo. Formalmente, defina $\mathcal{H} = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, com $k \leqslant \text{Card}(B)$, onde $f_m = f(x+b)$ para algum $b \in B$ e $f_m < f_n$ quando $m < n$, $m, n \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Vamos definir $me = \dfrac{f_1 + f_k}{2}$, isto é, o ponto médio entre o menor valor e o maior valor da lista $\mathcal{H}$. Note que $f_1 < me < f_k$. Dessa forma, se $0 \leqslant r < me$ então a erosão baseada em distância representa o valor mais distante da referência r, ou seja, f_k. Se $me \leqslant r \leqslant 1$ então a erosão baseada em distância fornece o valor mais distante da referência r, ou seja, f_1. Portanto, para $x \in \mathcal{D}$ a erosão baseada em distância é dada por

$$\varepsilon_B^r(f)(x) = \begin{cases} f_k, \text{ se } r \in [0, me)\,, \\ f_1, \text{ se } r \in [me, 1]\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Agora, vamos definir $a_j = \dfrac{f_j + f_{j+1}}{2}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, onde a_j é o ponto médio entre dois elementos consecutivos da lista $\mathcal{H}$. Assim, construímos uma nova lista de pontos ordenados $\mathcal{J} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$, onde $a_0 = 0$ e $a_k = 1$. Note que $f_j < a_j < f_{j+1}$ e $j_j < f_{j+1} < a_{j+1}$. Dessa forma, se $a_i \leqslant r < a_{i+1}$ para $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, então a dilatação baseada em distância representa o valor mais próximo da referência r, ou seja, f_{i+1}. Portanto, para $x \in \mathcal{D}$ a dilatação baseada em distância é dada por

$$\delta_B^r(f)(x) = \begin{cases} f_{i+1}, \text{ se } r \in [a_i, a_{i+1}) \text{ e } i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\,, \\ f_k, \text{ se } r = 1. \end{cases} \tag{3.14}$$

Finalmente, de acordo com (3.8), (3.13) e (3.14), para $x \in \mathcal{D}$ o gradiente baseado em distância é dado por

$$\varrho_B^r(f)(x) = \begin{cases} f_k - f_{i+1}, \text{ se e } r \in [0, me) \cap [a_i, a_{i+1}) \text{ e } i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\,, \\ f_{i+1} - f_1, \text{ se } r \in [me, 1) \cap [a_i, a_{i+1}) \text{ e } i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\,, \\ f_k - f_1, \text{ se } r = 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

□

A Figura 12 ilustra o que acontece geometricamente com os operadores morfológicos erosão e dilatação baseados em distância de uma imagem f num determinado pixel $x \in \mathcal{D}$. Em outras palavras, o item (a) da Figura 12 é uma interpretação geométrica da erosão $\varepsilon_B^r(f)(x)$ para cada $x \in \mathcal{D}$ e o item (b) da Figura 12 é uma interpretação geométrica da dilatação $\delta_B^r(f)(x)$ para cada $x \in \mathcal{D}$.

O Teorema 3.1 mostra que os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância são determinados de acordo com a região em que a referência r pertence. Portanto, caracterizamos os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância em função da referência $r \in [0,1]$.

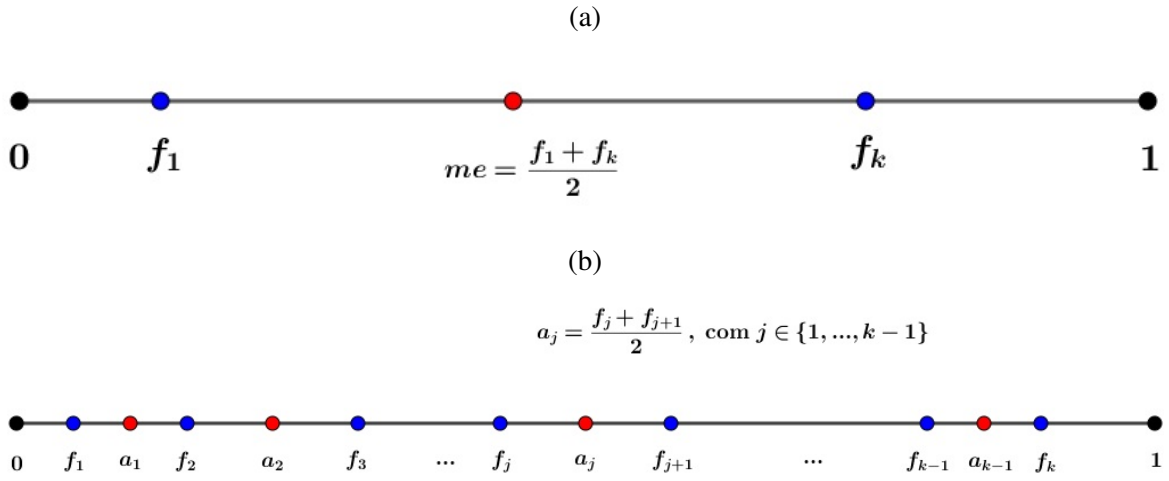


Figura 12 – Interpretação geométrica de $\varepsilon_B^r(f)(x)$ e $\delta_B^r(f)(x)$.

Exemplo 3.3. *Nesse exemplo, mostraremos como fica a caracterização dos operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância. Para isso, vamos considerar uma imagem em tons de cinza f e o elemento estruturante B, como mostrados na Figura 7. Dessa forma, os elementos f_j da imagem f selecionados pelo elemento estruturante B centrado em $x = (3,3)$ são $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.2$, $f_3 = 0.3$ e $f_4 = 0.7$. Com isso, temos a lista ordenada $\mathcal{H} = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.7\}$ e $me = \dfrac{f_1 + f_4}{2} = 0.4$. Portanto, a erosão baseada em distância em $x = (3,3)$ é dada por*

$$\varepsilon_B^r(f)(3,3) = \begin{cases} 0.7, \text{ se } r \in [0, 0.4)\,, \\ 0.1, \text{ se } r \in [0.4, 1]\,. \end{cases} \tag{3.16}$$

Agora, vamos determinar os pontos $a_i = \dfrac{f_i + f_{i+1}}{2}$, para $i \in \{1,2,3\}$. Daí, temos que $a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.25$ e $a_3 = 0.5$, e com isso construímos a lista ordenada $\mathcal{J} = \{0, 0.15, 0.25, 0.5, 1\}$. Portanto, a dilatação baseada em distância em $x = (3,3)$ é dada por

$$\delta_B^r(f)(3,3) = \begin{cases} 0.1, \text{ se } r \in [0, 0.15)\,, \\ 0.2, \text{ se } r \in [0.15, 0.25)\,, \\ 0.3, \text{ se } r \in [0.25, 0.5)\,, \\ 0.7, \text{ se } r \in [0.5, 1]\,. \end{cases} \tag{3.17}$$

Finalmente, o gradiente morfológico baseado em distância em $x = (3,3)$ é dado por

$$\varrho_B^r(f)(3,3) = \begin{cases} 0.6, \text{ se } r \in [0, 0.15) = [0, 0.4) \cap [0, 0.15)\,, \\ 0.5, \text{ se } r \in [0.15, 0.25) = [0, 0.4) \cap [0.15, 0.25)\,, \\ 0.4, \text{ se } r \in [0.25, 0.4) = [0, 0.4) \cap [0.25, 0.5)\,, \\ 0.2, \text{ se } r \in [0.4, 0.5) = [0.4, 1) \cap [0.25, 0.5)\,, \\ 0.6, \text{ se } r \in [0.5, 1] = [0.4, 1) \cap [0.5, 1) \cup \{1\}\,. \end{cases} \tag{3.18}$$

A Figura 13 mostra os gráficos da erosão, dilatação e gradiente baseados em distância da imagem f em $x = (3,3)$ com r variando de 0 a 1. Observe que o gráfico da dilatação, gráfico de cor azul, apresenta descontinuidades, nos valores $a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.25$ e $a_3 = 0.5$. Analogamente, o gráfico da erosão, gráfico de cor vermelha, apresenta apenas uma descontinuidade, no valor $me = 0.4$. As descontinuidades da dilatação e da erosão aparecem juntas no gráfico do gradiente, ou seja, o gráfico de cor preta.

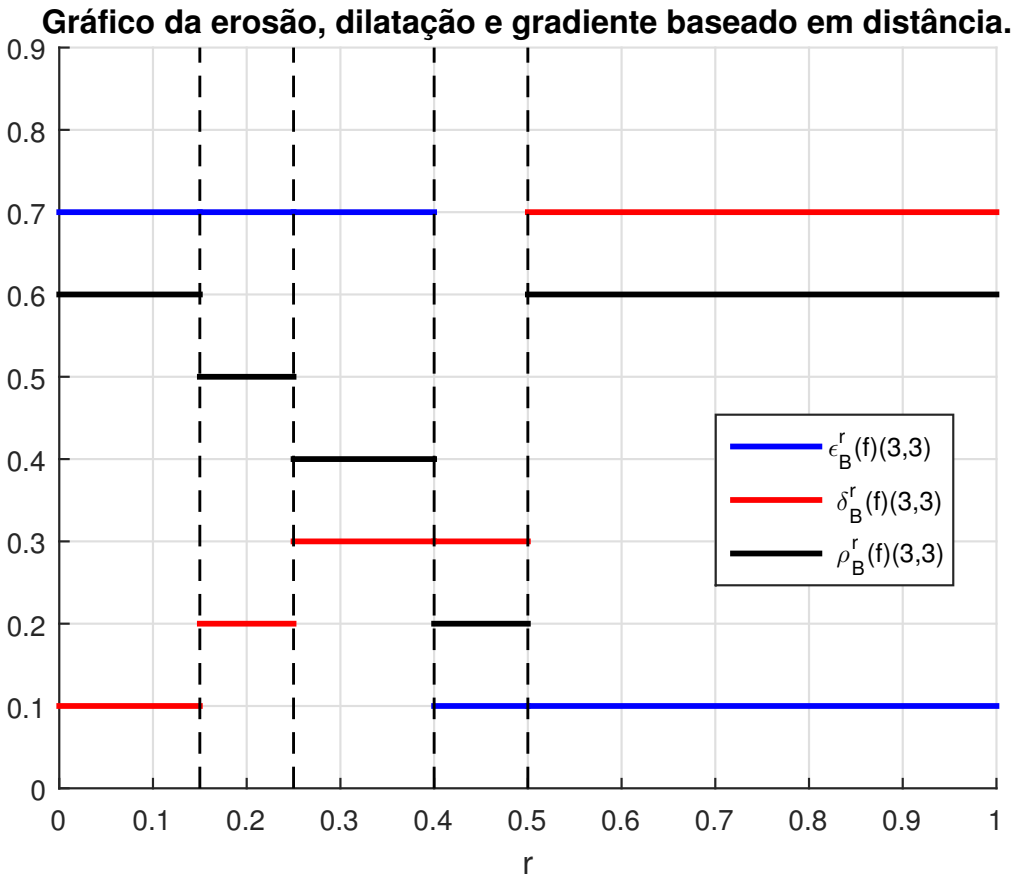


Figura 13 – Gráfico dos operadores $\varepsilon_B^r(f)(3,3)$, $\delta_B^r(f)(3,3)$ e $\varrho_B^r(f)(3,3)$ para $r \in [0,1]$.

Analisando a Figura 12 item (b), percebemos que a interpretação geométrica da dilatação baseada em distância está diretamente relacionada com uma estrutura muito especial e clássica da geometria computacional, o diagrama de Voronoi (Rezende and Stolfi, 1994), para mais detalhes ver o Apendice A. A partir desta observação, temos que os pontos f_j da lista $\mathcal{H} = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ representam os sítios de Voronoi. Para cada sítio $f_j \in \mathcal{H}$, considere o conjunto RV_{f_j} dos pontos p do intervalo $[0,1]$ tais que o sítio mais próximo de p é f_j. Os pontos da lista $\mathcal{J} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$ representam os vértices de Voronoi. Assim, cada conjunto RV_{f_j}, chamado de Região de Voronoi, representa uma região ou intervalo limitado pelos vértices a_j e a_{j+1}. Por questão de simplicidade, denotaremos RV_{f_j} por RV_j. A coleção de todas as regiões de Voronoi RV_j é, por definição, o diagrama de Voronoi de $\mathcal{H}$. Formalmente,

$DV(\mathcal{H}) = \{RV_1, \ldots, RV_k\}$. Analogamente, analisando a Figura 12 item (a), percebemos que a interpretação geométrica da erosão baseada em distância está ligada de forma direta com uma variação do diagrama de Voronoi, conhecida como o diagrama de Voronoi do vizinho mais distante, para mais detalhes ver (Aurenhammer, 1991). Assim, os operadores morfológicos dilatação e erosão baseados em distância, estão fortemente ligados com o diagrama de Voronoi e o diagrama de Voronoi do vizinho mais distante, respectivamente. Em outras palavras, os diagramas de Voronoi na reta mostram como a escolha do valor de referência r influencia no resultado dos operadores erosão e dilatação baseados em distância.

3.2 Abordagem para Imagens Coloridas

A abordagem proposta por Angulo (2007) em seu trabalho é uma generalização de outras abordagens baseadas em distância porpostas na literatura, ver (Comer and Delp, 1999; Weeks and Sartor, 1999; Ortiz Zamora et al., 2001; Sartor and Weeks, 2001; Al-Otum, 2003). Os operadores da morfologia matemática baseada em distância utilizam uma ordem total em $[0,1]^3$, dada por (3.1). Especificamente, dada uma cor de referência $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$, a ordem baseada em distância $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$, dada por

$$\boldsymbol{u} \preccurlyeq_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \begin{cases} d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) > d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}) & \text{ou} \\ d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{r}) = d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r}) & \text{e} \quad \boldsymbol{u} \preccurlyeq_L \boldsymbol{v},\ \forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in [0,1]^3, \end{cases} \tag{3.19}$$

define uma ordem total no conjunto $[0,1]^3$, para mais detalhes ver (Angulo, 2007).

O conjunto $[0,1]^3$ equipado com a ordem $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$, é um reticulado completo. Note que dada uma referência $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ no reticulado completo $\left([0,1]^3, \preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}\right)$ a maior cor é a própria referência $\boldsymbol{r}$, isto é, $\boldsymbol{u} \preccurlyeq_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r},\ \forall\, \boldsymbol{u} \in [0,1]^3$. A relação de ordem $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$ em $[0,1]^3$ induz uma ordem parcial em $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$. Assim, para cada $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$, temos

$$\boldsymbol{f} \preccurlyeq_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{g} \Leftrightarrow \begin{cases} d(\boldsymbol{f}(x),\boldsymbol{r}) > d(\boldsymbol{g}(x),\boldsymbol{r}) \text{ ou} \\ d(\boldsymbol{f}(x),\boldsymbol{r}) = d(\boldsymbol{g}(x),\boldsymbol{r}) \text{ e } \boldsymbol{f}(x) \preccurlyeq_L \boldsymbol{f}(x), \forall\, x \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{3.20}$$

em que $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ é um valor de referência fixo.

De acordo com a Definição 2.1, apresentamos os operadores morfológicos erosão e dilatação baseados em distância para imagens coloridas em termos da ordem $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$.

Definição 3.3. *Seja $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ uma cor de referência e $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$ uma ordem total dada por (3.19). A erosão e a dilatação baseadas em distância para uma imagem colorida $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to [0,1]^3$ pelo elemento estruturante B são dadas, respectivamente, por*

$$\varepsilon_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \bigwedge_{\substack{b \in B \\ x+b \in \mathcal{D}}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}(x+b) \quad e \quad \delta_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \bigvee_{\substack{b \in B \\ x+b \in \mathcal{D}}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}(x+b),\ \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{3.21}$$

Observe que para cada cor de referência $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ escolhida obtemos um par de operadores morfológicos, $\boldsymbol{\varepsilon}_B^r$ e $\boldsymbol{\delta}_B^r$, baseados em distância. Sobretudo, segue da Proposição 2.1 que o par $\left(\boldsymbol{\varepsilon}_B^r, \boldsymbol{\delta}_{\check{B}}^r\right)$ forma uma adjunção sobre $\text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$.

Logo, a Definição 3.1 é consistente com a Definição 1.5. Além disso, as Proposições 2.2, 2.3 e 2.4 são válidas. De acordo com a Definição 2.10, o gradiente morfológico baseado em distância para imagens coloridas é dado por:

Definição 3.4. *O gradiente morfológico baseado em distância é definido como sendo a norma da diferença entre a dilatação e a erosão baseadas em distância da imagem colorida* $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to [0,1]^3$ *pelo elemento estruturante* B*. Formalmente, o gradiente morfológico é dado por:*

$$\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f})(x) = \left\|\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x) - \boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f})(x)\right\|_2, \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{3.22}$$

Além disso, o gradiente morfológico normalizado, $\overline{\boldsymbol{\varrho}}_B : \mathcal{D} \to [0,1]$*, é dado por*

$$\overline{\boldsymbol{\varrho}}_B^r(\boldsymbol{f})(x) = \frac{\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f})(x)}{\bigvee\{\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f})(y) : y \in \mathcal{D}\}}. \tag{3.23}$$

Figura 14 – Imagem natural colorida $\boldsymbol{f}_{124084}$.

Exemplo 3.4. *Utilizaremos a imagem colorida* $\boldsymbol{f}_{124084}$*, para mostrar os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância para algumas cores de referência* $\boldsymbol{r}$*. Para isso, utilizamos um elemento estruturante* B *quadrado de dimensão* 3×3 *e a imagem natural colorida de dimensão* 321×428*, mostrada na Figura 14. A imagem natural colorida* $\boldsymbol{f}_{124084}$

foi retirada do dataset da University of California, Berkley. Fonte: (https://www2.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/grouping/). A Figura 15 mostra o resultado dos operadores erosão, dilatação e gradiente baseados em distância para as cores de referência vermelha, verde, ciano e preta. Por exemplo, se considerarmos a cor de referência como sendo vermelha, então a imagem obtida pela dilatação baseada em distância mostra que as cores próximas da cor vermelha se destacaram, ver Figura 15 item (a). Dualmente, a imagem obtida pela erosão baseada em distância mostra que as cores mais distantes da cor vermelha tendem a se destacar, ver Figura 15 item (b).

3.2.1 Caracterização dos operadores $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}$ e $\boldsymbol{\varrho}_B^{\boldsymbol{r}}$.

Motivados pela caracterização apresentada para os operadores morfológicos baseados em distância em tons de cinza, apresentaremos uma caracterização para os operadores morfológicos baseados em distância $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}$ e $\boldsymbol{\varrho}_B^{\boldsymbol{r}}$ em função da referência $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$.

No caso dos operadores morfológicos baseados em distância para imagens em tons de cinza, a influência do valor de referência $\boldsymbol{r}$ está relacionada com o diagrama de Voronoi e suas variações. Por exemplo, a dilatação está diretamente relacionada com o diagrama de Voronoi e a erosão está diretamente relacionada com o diagrama de Voronoi do vizinho mais distante. Dessa forma, utilizaremos o diagrama de Voronoi e suas variações no cubo $[0,1]^3$ para apresentar uma caracterização para os operadores morfológicos baseados em distância para imagens coloridas.

Teorema 3.2. *Sejam $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ uma referência fixa e o reticulado completo $[0,1]^3$ com a ordem total baseada em distância $\preccurlyeq_{\boldsymbol{r}}$. Dada uma imagem colorida $\boldsymbol{f} \in Fun(\mathcal{D}, [0,1]^3)$ e um elemento estruturante flat finito $B \subset \mathbb{Z}^2$. Para cada pixel $x \in \mathcal{D}$, os operadores baseados em distância erosão, dilatação e gradiente, dados por (3.21) e (3.22) satisfazem as seguintes equações:*

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}_i, \quad se \quad \boldsymbol{r} \in \overline{RV}_i \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}_j, \quad se \quad \boldsymbol{r} \in RV_j \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{\varrho}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \left\| \boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i \right\|_2, \quad se \quad \boldsymbol{r} \in RV_j \cap \overline{RV}_i, \tag{3.26}$$

onde $\boldsymbol{f}_m$ com $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$, é uma cor da imagem $\boldsymbol{f}$ em um pixel selecionado pelo elemento estruturante B centrado em $x \in \mathcal{D}$. Além disso, RV_m e $\overline{RV}_m$ denotam, respectivamente, a região de Voronoi e a região de Voronoi do vizinho mais distante, ambas contruídas usando $f_1, \ldots, f_k$, que contém a cor f_m.

Demonstração. A demonstração é semelhante a demonstração do Teorema 3.1. Vamos considerar $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ uma referência fixa. Sejam $\boldsymbol{f} \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$ uma imagem colorida e $B \subset \mathbb{Z}^2$ um elemento estruturante finito. Vamos construir um conjunto de pontos com os valores da

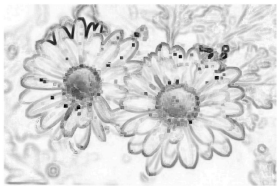
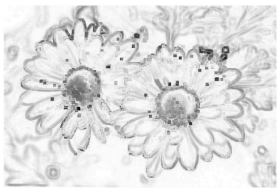
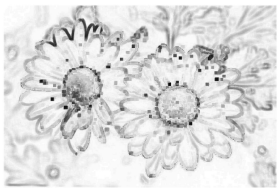
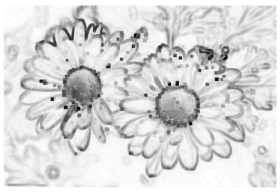
	Dilatação	Erosão	Gradiente
$\boldsymbol{r} = (1,0,0)$	(a) $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$	(b) $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$	(c) $1 - \overline{\boldsymbol{\varrho}}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$ 
$\boldsymbol{r} = (0,1,0)$	(d) $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$	(e) $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$	(f) $1 - \overline{\boldsymbol{\varrho}}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$ 
$\boldsymbol{r} = (0,1,1)$	(g) $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$	(h) $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$	(i) $1 - \overline{\boldsymbol{\varrho}}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$ 
$\boldsymbol{r} = (0,0,0)$	(j) $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$	(k) $\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$	(l) $1 - \overline{\boldsymbol{\varrho}}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})$ 

Figura 15 – Operadores dilatação, erosão e o complementar do gradiente normalizado para alguns valores de $\boldsymbol{r}$.

imagem $\boldsymbol{f}$ nos pixels selecionado pelo elemento estruturante B centrado em $x \in \mathcal{D}$. Formalmente, defina $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k\}$, com $k \leqslant \text{Card}(B)$, onde $\boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{f}(x+b)$ para algum $b \in B$, com $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. O elemento $\boldsymbol{f}_j \in \mathcal{H}$ representa um pixel da imagem $\boldsymbol{f}$ selecionado pelo elemento estruturante B centrado em x. Note que a cardinalidade k de $\mathcal{H}$ corresponde ao número de cores distintas da imagem $\boldsymbol{f}$ selecionadas pelo elemento estruturante B.

Se considerarmos a dilatação baseada em distância $\boldsymbol{\delta}_B^r$, então os pontos $\boldsymbol{f}_j$ do conjunto $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k\}$ representam os sítios de Voronoi no cubo $[0,1]^3$. Para cada sítio $\boldsymbol{f}_j \in \mathcal{H}$ consideremos a região de Voronoi $RV_{\boldsymbol{f}_j}$, onde denotaremos $RV_{\boldsymbol{f}_j}$ por RV_j. A coleção de todas as regiões de Voronoi RV_j é o diagrama de Voronoi de $\mathcal{H}$, ou seja, $DV(\mathcal{H}) = \{RV_1, \ldots, RV_k\}$. Note que se $\boldsymbol{r} \in RV_j$ então a dilatação baseada em distância representa o ponto mais próximo da referência $\boldsymbol{r}$, o sítio $\boldsymbol{f}_j \in \mathcal{H}$ associado a região de Voronoi RV_j. Assim, dado $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ a dilatação baseada em distância para cada $x \in \mathcal{D}$ é dada por

$$\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}_j, \quad \text{se} \quad \boldsymbol{r} \in RV_j. \tag{3.27}$$

Analogamente, se considerarmos a erosão baseada em distância $\boldsymbol{\varepsilon}_B^r$, então os pontos $\boldsymbol{f}_i$ do conjunto $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k\}$ representam os sítios de Voronoi do vizinho mais distante no cubo $[0,1]^3$. Para cada sítio $\boldsymbol{f}_i \in \mathcal{H}$ vamos considerar a região de Voronoi do vizinho mais distante $\overline{RV}_{\boldsymbol{f}_i}$, onde denotaremos $\overline{RV}_{\boldsymbol{f}_i}$ por $\overline{RV}_i$. A coleção de todas as regiões de Voronoi $\overline{RV}_i$ é o diagrama de Voronoi do vizinho mais distante de $\mathcal{H}$, ou seja, $\overline{DV}(\mathcal{H}) = \left\{\overline{RV}_1, \ldots, \overline{RV}_k\right\}$. Note que se $\boldsymbol{r} \in \overline{RV}_i$ então a erosão baseada em distância representa o ponto mais distante da referência $\boldsymbol{r}$, o sítio $\boldsymbol{f}_i \in \mathcal{H}$ associado a região de Voronoi $\overline{RV}_i$. Assim, dado $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ a erosão baseada em distância para cada $x \in \mathcal{D}$ é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}_i, \quad \text{se} \quad \boldsymbol{r} \in \overline{RV}_i. \tag{3.28}$$

Finalmente, vamos considerar o diagrama de Voronoi DV e o diagrama de Voronoi do vizinho mais distante $\overline{DV}$ do conjunto de pontos $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k\}$. Dado $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ o gradiente morfológico baseado em distância para cada $x \in \mathcal{D}$ é dado por

$$\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f})(x) = \left\|\boldsymbol{f}_j - \boldsymbol{f}_i\right\|_2, \quad \text{se} \quad \boldsymbol{r} \in RV_j \cap \overline{RV}_i, \tag{3.29}$$

onde $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}_j$ se $\boldsymbol{r} \in RV_j$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{f}_i$ se $\boldsymbol{r} \in \overline{RV}_i$. □

O Teorema 3.2 mostra que os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância são determinados de acordo com a região de Voronoi em que a referência $\boldsymbol{r}$ pertence. Portanto, caracterizamos os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância em função da referência $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$.

Exemplo 3.5. *Considere o conjunto de pontos $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, onde $\boldsymbol{f}_1 = (0.6, 0.9, 0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0.9, 0.9, 0)$ e $\boldsymbol{f}_3 = (0.9, 0.4, 0)$. Vamos admitir que cada ponto $\boldsymbol{f}_j \in \mathcal{H}$ representa um pixel da imagem colorida $\boldsymbol{f} \in Fun(\mathcal{D}, [0,1]^3)$ selecionado pelo elemento estruturante finito B centrado em $x \in \mathcal{D}$. Note que $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ e $\boldsymbol{f}_3$ estão no plano Vermelho-Verde, pois a componenete azul é igual a zero. A Figura 16 item (a) representa a projeção do diagrama de Voronoi de $\mathcal{H}$ no plano Vermelho-Verde (R×G). Em outras palavras, $DV(\mathcal{H}) = \{RV_1, RV_2, RV_3\}$, onde RV_1 é a região de cor vermelha, RV_2 é a região de cor azul e RV_3 é a região de cor verde. Analogamente, o item (b) da Figura 16 representa a projeção do diagrama do vizinho mais*

distante $\mathcal{H}$ no plano Vermelho-Verde (R×G). Em outras palavras, $\overline{DV}(\mathcal{H}) = \left\{\overline{RV}_1, \overline{RV}_2, \overline{RV}_3\right\}$, onde $\overline{RV}_1$ é a região de cor vermelha, $\overline{RV}_2$ é a região de cor azul e $\overline{RV}_3$ é a região de cor verde. Especificamente, as regiões RV_j e $\overline{RV}_j$ são extensões cilindricas das regiões mostradas na Figura 16.

(a) $DV(\mathcal{H})$ (b) $\overline{DV}(\mathcal{H})$

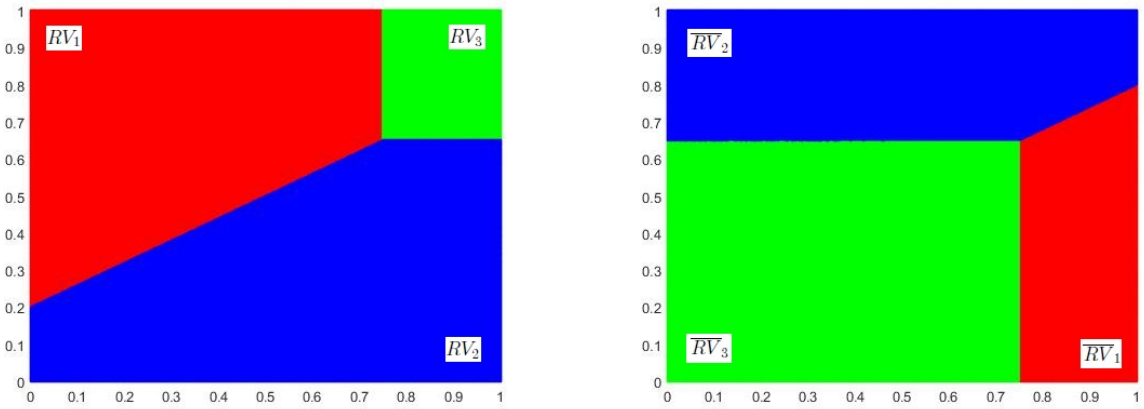


Figura 16 – Diagrama de Voronoi e o diagrama do vizinho mais distante de $\mathcal{H}$.

De acordo com os diagramas de Voronoi e do vizinho mais distante, mostrado nos itens (a) e (b) da Figura 16, a dilatação e a erosão baseadas em distância em $x \in \mathcal{D}$ são dadas por

$$\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \begin{cases} (0.6, 0.9, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in RV_1, \\ (0.9, 0.9, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in RV_2, \\ (0.9, 0.4, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in RV_3. \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \begin{cases} (0.6, 0.9, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in \overline{RV}_1, \\ (0.9, 0.9, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in \overline{RV}_2, \\ (0.9, 0.4, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in \overline{RV}_3. \end{cases} \tag{3.31}$$

Vamos considerar o diagrama de Voronoi $DV(\mathcal{H})$ e o diagrama de Voronoi do vizinho mais distante $\overline{DV}(\mathcal{H})$, como mostra a Figura 16 itens (a) e (b). De acordo com (3.26), dado $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$ o gradiente morfológico baseado em distância para cada $x \in \mathcal{D}$ é dado por

$$\boldsymbol{\varrho}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \begin{cases} 0.3 & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in \left(RV_1 \cap \overline{RV}_2\right) \cup \left(RV_2 \cap \overline{RV}_1\right), \\ 0.5 & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in \left(RV_2 \cap \overline{RV}_3\right) \cup \left(RV_3 \cap \overline{RV}_2\right), \\ 0.583 & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in \left(RV_1 \cap \overline{RV}_3\right) \cup \left(RV_3 \cap \overline{RV}_1\right). \end{cases} \tag{3.32}$$

Ao caracterizar os operadores morfológicos baseados em distância em função da referência $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$, percebemos que os operadores apresentam algumas descontinuidades. Especificamente no interior das regiões de Voronoi, os operadores morfológicos baseados em distância são insensíveis a pequenas perturbações da referência $\boldsymbol{r}$. Contudo, há uma mudança

brusca no resultado dos operadores para pequenas perturbações da referência $\boldsymbol{r}$ na fronteira das regiões de Voronoi.

Neste capítulo, mostramos que o diagrama de Voronoi possui uma relação muito importante com os operadores morfológicos baseados em distância. Mais precisamente, a dilatação baseada em distância está diretamente relacionada com o diagrama de Voronoi, enquanto a erosão baseada em distância está relacionada com o diagrama de Voronoi do vizinho mais distante. Os diagramas de Voronoi serviram para mostrar como a escolha do valor de referência r ou da cor de referência $\boldsymbol{r}$ influencia no resultado dos operadores morfológicos baseados em distância erosão e dilatação. No próximo capítulo, utilizaremos os diagramas de Voronoi para definir os operadores Pseudo-Morfológicos baseados em distância.

4 Estatística Descritiva de Operadores Morfológicos Baseados em Distância

Nas últimas décadas, diferentes abordagens para a MM colorida baseada em distância foram propostas por pesquisadores proeminentes, como Angulo (2007); Aptoula and Lefèvre (2009); De Witte et al. (2005a); Ledoux et al. (2014, 2015); Deborah et al. (2015); Al-Otum (2015); Valle and Valente (2017). Apesar das aplicações bem sucedidas, essas abordagens geralmente se deparam com a difícil tarefa de escolher uma referência adequada para ordenação das cores, tornando-se um dos grandes desafios para a morfologia matemática colorida baseada em distância. No capítulo anterior, apresentamos uma caracterização para os operadores morfológicos erosão, dilatação e gradiente baseados em distância em função do valor de referência r ou da cor de referência $\boldsymbol{r}$, através dos diagramas de Voronoi. Neste capítulo, interpretaremos a referência como uma variável aleatória e, utilizando conceitos de estatística descritiva, podemos contornar o problema da escolha da referência apropriada. Alternativamente, a interpretação da referência como uma variável aleatória contempla o caso em que há incerteza na escolha da referência. Especificamente, utilizaremos algumas medidas de tendência central e dispersão para definir novos operadores. Por exemplo, a média da dilatação, a média da erosão ou o desvio padrão do gradiente, entre outros.

4.1 Abordagem para Imagens em Tons de Cinza

Nesta seção, abordaremos alguns conceitos e resultados importantes de estatística descritiva, como medidas de tendência central e medidas de dispersão, para mais detalhes ver (Papoulis and Pillai, 2002), (Oja, 1983), (Small, 1990), (Johnson and Wichern, 2007) e (Rohatgi and Saleh, 2010). Lembre-se que, na abordagem baseada em distância, o valor de referência r pode assumir qualquer valor entre 0 e 1. Dessa forma, interpretaremos a referência r como uma amostragem de uma variável aleatória contínua R com uma função densidade de probabilidade p_R. A seguir, definiremos algumas medidas de tendência central e dispersão para uma função de uma variável aleatória.

Definição 4.1. *Seja R uma variável aleatória e $h : \mathbb{R} \to \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ uma função.*

1) A esperança de $h(R)$ é dada por

$$E\left(h(R)\right) = \sum_{j=1}^{k} h_j P\left(h(R) = h_j\right). \tag{4.1}$$

2) Adotamos como a moda (M_o) *de* $h(R)$ *o menor valor* h_j *tal que*

$$P\left(h(R) = h_j\right) \quad \textit{é máxima}. \tag{4.2}$$

3) Adotamos como a mediana (M_d) *de* $h(R)$ *o menor valor* h_j *tal que*

$$P\left(h(R) \leqslant M_d\right) \geqslant 0.5 \quad \textit{e} \quad P\left(h(R) \geqslant M_d\right) \geqslant 0.5. \tag{4.3}$$

4) A variância de $h(R)$ *é dada por*

$$Var\left(h(R)\right) = E\left(\left(h(R)\right)^2\right) - \left(E\left(h(R)\right)\right)^2. \tag{4.4}$$

5) O desvio padrão de $h(R)$ *é dado por*

$$\sigma\left(h(R)\right) = \sqrt{Var\left(h(R)\right)}. \tag{4.5}$$

Observação 4.1. *Se* R *possui função densidade de probabilidade* p_R*, então*

$$P\left(h(R) = y\right) = \int\limits_{\{r:h(r)=y\}} p_R(r)dr \quad \textit{e} \quad P\left(h(R) \leqslant y\right) = \int\limits_{\{r:h(r)\leqslant y\}} p_R(r)dr. \tag{4.6}$$

Exemplo 4.1. *Neste exemplo, vamos considerar a dilatação baseada em distância da imagem* f *avaliada no pixel* $x = (3,3)$*, apresentada no exemplo 3.3. Seja* $\mathcal{H} = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.7\}$ *a lista ordenada de pontos da imagem* f *selecionados pelo elemento estruturante* B*. Dessa forma, o diagrama de Voronoi de* $\mathcal{H}$*,* $DV(\mathcal{H})$*, é dado por* $DV(\mathcal{H}) = \{RV_1, RV_2, RV_3, RV_4\}$*, em que* $RV_1 = [0, 0.15)$*,* $RV_2 = [0.15, 0.25)$*,* $RV_3 = [0.25, 0.5)$ *e* $RV_4 = [0.5, 1]$*. Assim, a dilatação* $\delta_B^r(f)(3,3)$ *em função de* r *é dada por*

$$\delta_B^r(f)(3,3) = \begin{cases} 0.1 \textit{ se } r \in RV_1, \\ 0.2 \textit{ se } r \in RV_2, \\ 0.3 \textit{ se } r \in RV_3, \\ 0.7 \textit{ se } r \in RV_4. \end{cases} \tag{4.7}$$

Vamos admitir que a referência r *é uma amostragem de uma variável aleatória contínua* R *com uma função densidade de probabilidade* p_R*. Especificamente, vamos considerar a função densidade de probabilidade uniforme, ou seja,* $p_R(r) = 1$ *para todo* $r \in [0,1]$*. Dessa forma, podemos calcular a probabilidade de ocorrência dos valores de* $\delta_B^r(f)(3,3)$ *para cada região de Voronoi* RV_j*. Em termos matemáticos,*

- $P(\delta_B^r(f)(3,3) = 0.1) = \int\limits_{RV_1} p_R(r)dr = \int_0^{0.15} dr = 0.15$
- $P(\delta_B^r(f)(3,3) = 0.2) = \int\limits_{RV_2} p_R(r)dr = \int_{0.15}^{0.25} dr = 0.10$

- $P(\delta_B^r(f)(3,3) = 0.3) = \int\limits_{RV_3} p_R(r)dr = \int_{0.25}^{0.5} dr = 0.25$
- $P(\delta_B^r(f)(3,3) = 0.7) = \int\limits_{RV_4} p_R(r)dr = \int_{0.5}^{1.0} dr = 0.5$

Note que a probabilidade de $\delta_B^r(f)(3,3)$ pertencer a região de Voronoi RV_j é igual ao comprimento da região de Voronoi RV_j. E, com isso, obtemos a seguinte tabela de probabilidade

Tabela 1 – Tabela de Probabilidade de $\delta_B^r(f)(3,3)$ do Exemplo 4.1.

$\delta_B^r(f)(3,3)$	0.1	0.2	0.3	0.7
$P(\delta_B^r(f)(3,3))$	0.15	0.10	0.25	0.5

Dessa forma, vamos calcular as medidas de tendência central e dispersão para o operador dilatação $\delta_B^r(f)(3,3)$. Usando a definição de esperança dada em (4.1), em que $h = \delta_B^r(f)(3,3)$, temos que

$$\begin{aligned} E\left(\delta_B^r(f)(3,3)\right) &= 0.1 \times P(0.1) + 0.2 \times P(0.2) + 0.3 \times P(0.3) + 0.7 \times P(0.7) \\ &= 0.1 \times 0.15 + 0.2 \times 0.10 + 0.3 \times 0.25 + 0.7 \times 0.5 \\ &= 0.46 \end{aligned}$$

A moda da dilatação $\delta_B^r(f)(3,3)$, por (4.2), é $M_o(\delta_B^r(f)(3,3)) = 0.7$, pois 0.7 é o valor cuja probabilidade é máxima. A mediana de $\delta_B^r(f)(3,3)$, pode ser qualquer número entre 0.3 e 0.7, pois, para $\lambda \in [0.3, 0.7]$ temos que $P(\delta_B^r(f)(3,3) \leqslant \lambda) \geqslant 0.5$ e $P(\delta_B^r(f)(3,3) \geqslant \lambda) \geqslant 0.5$. No entanto, pela definição (4.3), a mediana é o menor valor de $\lambda \in [0.3, 0.7]$ que satisfaz a equação (4.3). Portanto, $M_d(\delta_B^r(f)(3,3)) = 0.3$.

Antes de calcular a variância de $\delta_B^r(f)(3,3)$, precisamos calcular a esperança de $(\delta_B^r(f)(3,3))^2$. Daí,

$$\begin{aligned} E\left((\delta_B^r(f)(3,3))^2\right) &= (0.1)^2 \times P(0.1) + (0.2)^2 \times P(0.2) + \\ &\quad (0.3)^2 \times P(0.3) + (0.7)^2 \times P(0.7) \\ &= 0.01 \times 0.15 + 0.04 \times 0.10 + 0.09 \times 0.25 + 0.49 \times 0.5 \\ &= 0.273. \end{aligned}$$

Assim, a variância de $\delta_B^r(f)(3,3)$, dada por (4.4), é

$$\begin{aligned} Var(\delta_B^r(f)(3,3)) &= E\left((\delta_B^r(f)(3,3))^2\right) - \left(E\left(\delta_B^r(f)(3,3)\right)\right)^2 \\ &= 0.273 - (0.46)^2 \\ &= 0.0614. \end{aligned}$$

e o desvio padrão de $\delta_B^r(f)(3,3)$*, dado por (4.5), é*

$$\begin{aligned}\sigma(\delta_B^r(f)(3,3)) &= \sqrt{Var(\delta_B^r(f)(3,3))} \\ &= \sqrt{0.0614} \\ &= 0.2478.\end{aligned}$$

4.1.1 Operadores Pseudo-Morfológicos

A estatística descritiva dos operadores morfológicos baseados em distância para imagens em tons de cinza δ_B^r e ε_B^r não comutam necessariamente com o supremo e o ínfimo, respectivamente, e portanto não representa uma dilatação e uma erosão no sentido da Definição 1.2. No entanto, podemos considerar a estatística descritiva dos operadores morfológicos baseados em distância como operadores pseudo-morfológicos (Angulo, 2007). Nesta tese, denotaremos por ψ_B^r um operador morfológico baseado em distância, tais como δ_B^r, ε_B^r ou ϱ_B^r, com base em um elemento estruturante B (*flat*) e um valor de referência $r \in [0,1]$. Além disso, denotaremos por $\mathcal{S}$ uma estatística descritiva, por exemplo, esperança, variância e desvio padrão. Dada uma imagem em tons de cinza $f \in \text{Fun}(\mathcal{D}, [0,1])$, o operador morfológico $\psi_B^r(f)(x)$ em um determinado pixel $x \in \mathcal{D}$ é determinado de acordo com a escolha do valor de referência r. Ao interpretarmos $\psi_B^r(f)(x)$ como uma função de r, definimos um operador pseudo-morfológico como se segue:

$$\mathcal{S}_R\psi_B(f)(x) = \mathcal{S}_R\left(\psi_B^r(f)(x)\right), \ \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{4.8}$$

Note que o valor de referência $r \in [0,1]$ é visto como uma amostragem de uma variável aleatória R, o operador morfológico baseado em distância ψ_B^r corresponde à função h dada na definição 4.1 e $\mathcal{S}_R$ é uma estatística descritiva tal como a esperança, a variância e o desvio padrão.

Vamos apresentar uma forma mais prática e eficiente para calcular a estatística descitiva dos operadores dilatação, erosão e gradiente baseados em distância. Algumas estatísticas descritivas possuem expressões bem simples e fáceis de serem calculadas como veremos a seguir. Nesta tese vamos considerar a função densidade de probabilidade como sendo uniforme, ou seja, $p_R(r) = 1$ para todo $r \in [0,1]$.

Teorema 4.1. *Sejam* $f : \mathcal{D} \to [0,1]$ *uma imagem em tons de cinza,* B *um elemento estruturante (flat) finito e* r *uma amostragem de uma variável aleatória uniforme no intervalo* $[0,1]$*. Se* $\psi_B^r = \varepsilon_B^r$*, então a esperança, a variância e o desvio padrão são dados por*

$$E\left(\varepsilon_B^r(f)(x)\right) = (f_k - f_1).me + f_1, \tag{4.9}$$

$$Var\left(\varepsilon_B^r(f)(x)\right) = (f_k - f_1)^2(me - me^2), \tag{4.10}$$

$$\sigma\left(\varepsilon_B^r(f)(x)\right) = (f_k - f_1)\sqrt{me - me^2}, \tag{4.11}$$

onde f_i é um pixel da imagem f selecionado pelo elemento estruturante B centrado em $x \in \mathcal{D}$ e $me = \dfrac{f_1 + f_k}{2}$.

Demonstração. Sejam $f : \mathcal{D} \to [0, 1]$ uma imagem em tons de cinza, B um elemento estruturante (*flat*) finito e r uma amostragem de uma variável aleatória uniforme no intervalo $[0, 1]$.. Pelo Teorema 3.1, o operador baseado em distância ε_B^r satisfaz

$$\varepsilon_B^r(f)(x) = \begin{cases} f_k, \text{ se } r \in [0, me), \\ f_1, \text{ se } r \in [me, 1], \end{cases} \tag{4.12}$$

onde f_i, com $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, é um pixel da imagem f selecionado pelo elemento estruturante B centrado em $x \in \mathcal{D}$ e $me = \dfrac{f_1 + f_k}{2}$.

Pela Definição 4.1, temos que para cada $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} E\left(\varepsilon_B^r(f)(x)\right) &= \sum_{j=1}^{k} f_j \omega_j, \\ &= f_1.\omega_1 + f_k.\omega_k, \\ &= f_1(1 - me) + f_k me, \\ &= (f_k - f_1).me + f_1, \end{aligned}$$

onde $\omega_k = \displaystyle\int_0^{me} dr = me$ e $\omega_1 = \int_{me}^{1} dr = 1 - me$. Note que $\omega_j = P\left(\varepsilon_B^r(f)(x) = f_j\right)$ e $f_j \in \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$. Além disso, $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \omega_j = 1$, ou seja, a soma das probabilidades é igual a 1.

Usando a Definição 4.1, temos que para cada $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} Var\left(\varepsilon_B^r(f)(x)\right) &= E\left(\left(\varepsilon_B^r(f)(x)\right)^2\right) - \left(E\left(\varepsilon_B^r(f)(x)\right)\right)^2, \\ &= (f_k^2 - f_1^2)me + f_1^2 - \left((f_k - f_1)me + f_1\right)^2, \\ &= (f_k + f_1)(f_k - f_1)me - (f_k - f_1)^2 me^2 - 2f_1(f_k - f_1)me, \\ &= (f_k + f_1 - 2f_1)(f_k - f_1)me - (f_k - f_1)^2 me^2, \\ &= (f_k - f_1)^2 me - (f_k - f_1)^2 me^2, \\ &= (f_k - f_1)^2(me - me^2). \end{aligned}$$

Usando a definição 4.1, temos que para cada $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \sigma\left(\varepsilon_B^r(f)(x)\right) &= \sqrt{(f_k - f_1)^2(me - me^2)}, \\ &= (f_k - f_1)\sqrt{me - me^2}. \end{aligned}$$

□

Note que, se considerarmos outros modelos para a função densidade de probabilidade $p_R(r)$, então os operadores pseudo-morfológicos $\mathcal{S}_R\left(\psi_B^r(f)(x)\right)$ podem ser caracterizados de

outra maneira e com isso podemos obter diferentes abordagens para esses operadores. Uma possibilidade seria considerar $p_R(r)$ como sendo uma função densidade que contém informações sobre a imagem como, por exemplo, seu histograma.

Exemplo 4.2. *Este exemplo ilustra algumas estatísticas descritivas dos operadores morfológicos dilatação, erosão e gradiente baseados em distância. Para calcular essas estatísticas, utilizamos como elemento estruturante B um quadrado de dimensão 3×3 e a imagem em tons de cinza da Lena de dimensão 512×512. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 17.*

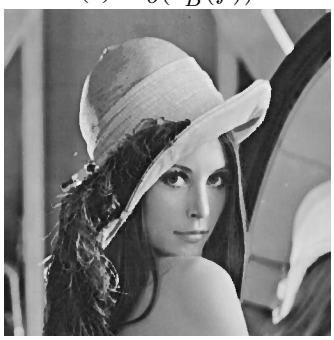
	Dilatação	Erosão	Gradiente
Esperança	(a) $E\left(\delta_B^r(f)\right)$	(b) $E\left(\varepsilon_B^r(f)\right)$	(c) $1-\overline{E}\left(\varrho_B^r(f)\right)$
Moda	(d) $M_o(\delta_B^r(f))$	(e) $M_o(\varepsilon_B^r(f))$ 	(f) $1-\overline{M}_o(\varrho_B^r(f))$
Desvio Padrão	(g) $1-\overline{\sigma}(\delta_B^r(f))$	(h) $1-\overline{\sigma}(\varepsilon_B^r(f))$	(i) $1-\overline{\sigma}(\varrho_B^r(f))$

Figura 17 – Estatística descritiva dos operadores morfológicos dilatação, erosão e gradiente.

4.2 Abordagem para Imagens Coloridas

Na abordagem baseada em distância para imagens coloridas a cor de referência $\boldsymbol{r}$ pode assumir qualquer valor no cubo unitário $[0,1]^3$. Nessa seção vamos interpretar a referência $\boldsymbol{r}$ como uma amostragem de um vetor de variáveis aleatória $\boldsymbol{R}$ com uma função densidade de probabilidade conjunta $\boldsymbol{p_R}$. Assim, vamos utilizar os conceitos de estatística descritiva, como medidas de tendência central e dispersão para extender a abordagem dos operadores pseudo-morfológicos para imagens coloridas.

Seja $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_n)$ um vetor de variáveis aleatórias, com função densidade de probabilidade conjunta $\boldsymbol{p_R}$. Na prática utilizaremos a função de densidade de probabilidade conjunta uniforme, ou seja, $\boldsymbol{p_R}(\boldsymbol{r}) = 1$ para cada $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$. Vamos considerar $\boldsymbol{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \{\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ uma função vetorial em um conjunto discreto de vetores do $\mathbb{R}^n$. Note que $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{h}_j$, para algum $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. No contexto multivariado, vamos definir algumas medidas de tendência central e dispersão para uma função vetorial $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$.

A esperança de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ é dada por

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})) = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{h}_j P\left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{h}_j\right). \tag{4.13}$$

A moda $\boldsymbol{M_o}$ de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ é um vetor $\boldsymbol{h}_j$ tal que

$$P\left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{h}_j\right) \quad \text{é máxima,} \tag{4.14}$$

para algum $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

A matriz de dispersão de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$, denotada por $\boldsymbol{\Sigma}$, é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{Var}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})) = \boldsymbol{E}\left(\left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))\right)\left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))^t\right)\right). \tag{4.15}$$

A partir da matriz de dispersão $\boldsymbol{\Sigma}$, vamos apresentar algumas medidas de dispersão (Johnson and Wichern, 2002; Bock, 1985). Uma medida númerica de variabilidade é fornecida pelo determinante da matriz de dispersão $\boldsymbol{\Sigma}$. O determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$ é denominado variância generalizada de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$. Denotaremos a variância generalizada de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ como sendo $\boldsymbol{V_g}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))$. Uma outra medida de variabilidade capaz de sintetizar a informação contida na matriz de dispersão $\boldsymbol{\Sigma}$ é a variância total. A variância total de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ é definida como sendo o traço de $\boldsymbol{\Sigma}$. Denotaremos a variância total de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ como sendo $\boldsymbol{V_t}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))$. A matriz de dispersão $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz simétrica e semidefinida positiva. Assim, as medidas de variabilidade $\boldsymbol{V_g}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))$ e $\boldsymbol{V_t}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))$ são reais e não negativas. Dessa forma, definiremos $\boldsymbol{RV_g}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})) = \sqrt{\boldsymbol{V_g}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))}$ e $\boldsymbol{RV_t}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})) = \sqrt{\boldsymbol{V_t}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}))}$. Esses operadores podem ser interpretados como generalizações do desvio padrão para vetores.

Uma outra medida de dispersão é a *Gini's Mean Difference*, denotada por $\boldsymbol{Gmd}$. O $\boldsymbol{Gmd}$ é definido como sendo a média da normas da diferença de todos os pares de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$.

Matematicamente, o $\boldsymbol{Gmd}$ de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})$ é dado por

$$\boldsymbol{Gmd}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})) = \sum_{i,j=1}^{k} \|\boldsymbol{h}_i - \boldsymbol{h}_j\|_2 \, P\left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{h}_i\right) P\left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{h}_j\right), \tag{4.16}$$

onde $\|\cdot\|_2$ representa a norma Euclidiana, para mais detalhes ver (Oja, 1983; Gerstenkorn and Gerstenkorn, 2007).

Agora, definiremos os operadores pseudo-morfológicos para imagens coloridas da mesma forma como definimos os operadores pseudo-morfológicos para uma imagem $f : \mathcal{D} \to [0,1]$ em tons de cinza, ver equação (4.8). Dada uma imagem colorida $f : \mathcal{D} \to [0,1]^3$, os operadores morfológicos baseados em distância $\boldsymbol{\psi}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x)$ em um determinado pixel $x \in \mathcal{D}$ variam de acordo com a escolha do vetor de referência $\boldsymbol{r} \in [0,1]^3$. Dessa forma, ao interpretarmos $\boldsymbol{\psi}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x)$ como uma função de uma amostra $\boldsymbol{r}$ de uma variável aleatória $\boldsymbol{R}$, obtemos operadores pseudo-morfológicos como se segue:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}_R}\boldsymbol{\psi}_B(\boldsymbol{f})(x) = \boldsymbol{\mathcal{S}_R}\left(\boldsymbol{\psi}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x)\right), \ \forall \, x \in \mathcal{D}, \tag{4.17}$$

em que $\boldsymbol{\mathcal{S}_R}$ denota uma estatística, isto é, uma medida de tendência central ou de dispersão.

Exemplo 4.3. *Neste exemplo, seja* $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$, *onde* $\boldsymbol{f}_1 = (0.6, 0.9, 0)$, $\boldsymbol{f}_2 = (0.9, 0.9, 0)$ *e* $\boldsymbol{f}_3 = (0.9, 0.4, 0)$. *Vamos admitir que cada ponto* $\boldsymbol{f}_j \in \mathcal{H}$ *representa um pixel de uma imagem colorida* $\boldsymbol{f} \in \mathit{Fun}(\mathcal{D}, [0,1]^3)$ *selecionado pelo elemento estruturante finito* B *centrado em* $x \in \mathcal{D}$. *Vamos considerar a caracterização obtida para a dilatação baseada em distância da imagem colorida* $\boldsymbol{f}$ *no pixel* $x \in \mathcal{D}$, *apresentada no Exemplo 3.5. Considere também a função de densidade de probabilidade conjunta uniforme, ou seja,* $\boldsymbol{p_R}(\boldsymbol{r}) = 1, \ \forall \, \boldsymbol{r} \in [0,1]^3$. *Assim,* $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x)$ *em função da cor de referência* $\boldsymbol{r}$ *é dada por*

$$\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = \begin{cases} (0.6, 0.9, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in RV_1, \\ (0.9, 0.9, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in RV_2, \\ (0.9, 0.4, 0) & \textit{se} \quad \boldsymbol{r} \in RV_3. \end{cases} \tag{4.18}$$

Note que RV_1, RV_2 *e* RV_3 *são as regiões de Voronoi, onde* RV_1 *é a extensão cilíndrica da região de cor vermelha,* RV_2 *é a extensão cilíndrica da região de cor verde e* RV_3 *é a extensão cilíndrica da região de cor azul, como mostra o item (a) da Figura 16. Agora, vamos calcular a probabilidade de ocorrência dos valores de* $\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x)$ *para cada região de Voronoi* RV_j, *em que* $j \in \{1, 2, 3\}$. *Assim,*

- $P(\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = (0.6, 0.9, 0)) = \iiint_{RV_1} \boldsymbol{f_R}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = 0.43125,$
- $P(\boldsymbol{\delta}_B^{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{f})(x) = (0.9, 0.9, 0)) = \iiint_{RV_2} \boldsymbol{f_R}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = 0.0875,$

- $P(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x) = (0.9, 0.4, 0)) = \iiint_{RV_3} \boldsymbol{f_R}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = 0.48125.$

Note que a probabilidade de $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$ pertencer a região de voronoi RV_j é igual ao volume da região de Voronoi RV_j. E, com isso, obtemos a seguinte tabela de probabilidade conjunta

Tabela 2 – Tabela de Probabilidade conjunta

$\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$	(0.6, 0.9,0)	(0.9, 0.9,0)	(0.9, 0.4,0)
$P(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x))$	0.43125	0.0875	0.48125

Com a Tabela 2, podemos calcular as medidas de tendência central e dispersão para a dilatação $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$. Usando a definição de esperança dada em (4.13), em que $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$, temos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)) &= (0.6, 0.9, 0) \times P((0.6, 0.9, 0)) + (0.9, 0.9, 0) \times P((0.9, 0.9, 0)) \\
&\quad + (0.9, 0.4) \times P((0.9, 0.4)) \\
&= 0.43125\,(0.6, 0.9, 0) + 0.0875\,(0.9, 0.9, 0) + 0.48125\,(0.9, 0.4, 0) \\
&= (0.770625, 0.659375, 0)\,.
\end{aligned}$$

A moda da dilatação $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$, por (4.14), resulta que $\boldsymbol{M_o}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)) = (0.9, 0.4, 0)$, uma vez que $(0.9, 0.4, 0)$ é a cor cuja probabilidade é máxima.

A matriz de dispersão de $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$, por (4.15), é dada por

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.022074609375 & -0.031130859375 & 0 \\ -0.031130859375 & 0.062412109375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir da matriz de dispersão $\boldsymbol{\Sigma}$, temos que o $det\,(\boldsymbol{\Sigma}) = 0$ e o $tr\,(\boldsymbol{\Sigma}) = 0.08448671875$. Dessa forma, a variância generalizada de $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$ é zero e a variância total de $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$ é 0.08448671875. Portanto, $\boldsymbol{RV_g}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)) = 0$ e $\boldsymbol{RV_t}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)) = 0.290665991732779$.

A medida de dispersão de Gini de $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$, dada por (4.16), satisfaz

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Gmd}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)) &= \|(0.6, 0.9, 0) - (0.9, 0.9, 0)\|_2 \times 0.43125 \times 0.0875 \\
&\quad + \|(0.6, 0.9, 0) - (0.9, 0.4, 0)\|_2 \times 0.43125 \times 0.48125 \\
&\quad + \|(0.9, 0.9, 0) - (0.9, 0.4, 0)\|_2 \times 0.0875 \times 0.48125 \\
&= 0.153390028973879.
\end{aligned}$$

Observação 4.2. *Computacionalmenter, vamos utilizar o Método de Monte Carlo para estimar o cálculo da probabilidade de $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})(x)$ pertencer a região de Voronoi RV_j. Com efeito, o cálculo da probabilidade de $\delta_B^r(f)(3, 3)$ pertencer a região de Voronoi RV_j é igual ao cálculo do*

volume da região de Voronoi RV_j. Para determinar o volume da região de Voronoi distribuímos 1000 *pontos de forma aleatória e uniformemente distribuídos no interior do cubo unitário* $[0,1]^3$ *usando o comando* `rand` *do* `GNU Octave`*, em seguida calculamos quantos pontos caíram dentro da região de Voronoi RV_j e dividimos pelo número total pontos distribuídos, ou seja, dividimos por* 1000.

Exemplo 4.4. *Neste exemplo, ilustraremos algumas estatísticas dos operadores morfológicos dilatação, erosão e gradiente baseados em distância. Vamos considerar um elemento estruturante B quadrado de dimensão 3×3 e uma imagem natural colorida $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{253036}$ de dimensão 481×321. Lembrando que a imagem natural colorida $\boldsymbol{f}_{253036}$ foi retirada do dataset da University of California, Berkeley. Fonte: (https://www2.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/grouping/).*

Se considerarmos o operador morfológico baseado em distância $\psi_B^r = \varepsilon_B^r$, obtemos dos operadores pseudo-morfológicos, as imagens mostradas na Figura 18 (b)-(f). Agora, se considerarmos o operador morfológico baseado em distância $\psi_B^r = \delta_B^r$, obtemos dos operadores pseudo-morfológicos, as imagens mostradas na Figura 19 (b)-(f). Por último, se considerarmos o operador morfológico baseado em distância $\psi_B^r = \varrho_B^r$, obtemos dos operadores pseudo-morfológicos, as imagens mostradas na Figura 20 (a)-(d).

Observe que os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância $\boldsymbol{RV_g}$, $\boldsymbol{RV_t}$ e $\boldsymbol{Gmd}$ fornecem imagens em tons de cinza, enquanto que os operadores $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{M_o}$ fornecem imagens coloridas.

Uma vez que os operadores pseudo-morfológicos $\boldsymbol{E}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$, $\boldsymbol{E}(\delta_B^r(\boldsymbol{f}))$, $\boldsymbol{M_o}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$ e $\boldsymbol{M_o}(\delta_B^r(\boldsymbol{f}))$ foram definidos e calculados, vamos definir outros dois operadores pseudo-morfológicos. Ambos motivados pela definição do gradiente morfológico colorido, dado em (3.22). Formalmente, dados os operadores pseudo-morfológicos $\boldsymbol{E}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$ e $\boldsymbol{E}(\delta_B^r(\boldsymbol{f}))$, definimos a norma da diferença entre a média da dilatação e a média da erosão, $\varrho_B^{\boldsymbol{E}}$, por

$$\varrho_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f}(x)) = \left\| \boldsymbol{E}(\delta_B^r(\boldsymbol{f}(x))) - \boldsymbol{E}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}(x))) \right\|_2, \ \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{4.19}$$

Além disso, o $\varrho_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f})$ normalizado, $\overline{\varrho}_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f}) : \mathcal{D} \to [0,1]$, é dado por

$$\overline{\varrho}_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f}(x)) = \frac{\varrho_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f}(x))}{\bigvee \{\varrho_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f}(y)) : y \in \mathcal{D}\}}. \tag{4.20}$$

De modo análogo, dados os operadores pseudo-morfológicos $\boldsymbol{M_o}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$ e $\boldsymbol{M_o}(\delta_B^r(\boldsymbol{f}))$, definimos a norma da diferença entre a moda da dilatação e a moda da erosão, $\varrho_B^{\boldsymbol{M_o}}$, por

$$\varrho_B^{\boldsymbol{M_o}}(\boldsymbol{f}(x)) = \left\| \boldsymbol{M_o}(\delta_B^r(\boldsymbol{f}(x))) - \boldsymbol{M_o}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}(x))) \right\|_2, \ \forall\, x \in \mathcal{D}. \tag{4.21}$$

Além disso, o $\varrho_B^{\boldsymbol{M_o}}(\boldsymbol{f})$ normalizado, $\overline{\varrho}_B^{\boldsymbol{M_o}}(\boldsymbol{f}) : \mathcal{D} \to [0,1]$, é dado por

$$\overline{\varrho}_B^{\boldsymbol{M_o}}(\boldsymbol{f}(x)) = \frac{\varrho_B^{\boldsymbol{M_o}}(\boldsymbol{f}(x))}{\bigvee \{\varrho_B^{\boldsymbol{M_o}}(\boldsymbol{f}(y)) : y \in \mathcal{D}\}}. \tag{4.22}$$

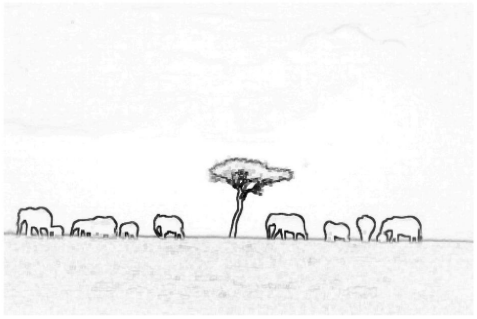
(a) Imagem $\boldsymbol{f}_{253036}$

(b) $\boldsymbol{E}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$

(c) $\boldsymbol{M_o}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$

(d) $1 - \overline{\boldsymbol{RV_g}}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$

(e) $1 - \overline{\boldsymbol{RV_t}}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$



(f) $1 - \overline{\boldsymbol{Gmd}}(\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f}))$

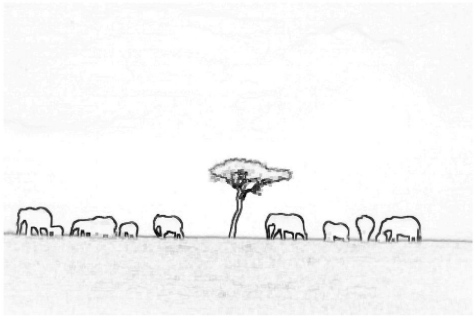


Figura 18 – Imagem original colorida, os operadores pseudo-morfológicos e o complementar dos operadores pseudo-morfológicos normalizados aplicados em $\varepsilon_B^r(\boldsymbol{f})$.

Exemplo 4.5. *A Figura 21 mostra as imagens fornecidas pelos operadores pseudo-morfológicos* $\overline{\varrho}_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f})$ *e* $\overline{\varrho}_B^{\boldsymbol{M_o}}(\boldsymbol{f})$*, em que* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{253036}$ *é a imagem mostrada na Figura 18 (a). Note que os*

(a) Imagem $\boldsymbol{f}_{253036}$

(b) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$

(c) $\boldsymbol{M_o}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$

(d) $1 - \overline{\boldsymbol{RV_g}}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$

(e) $1 - \overline{\boldsymbol{RV_t}}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$

(f) $1 - \overline{\boldsymbol{Gmd}}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$

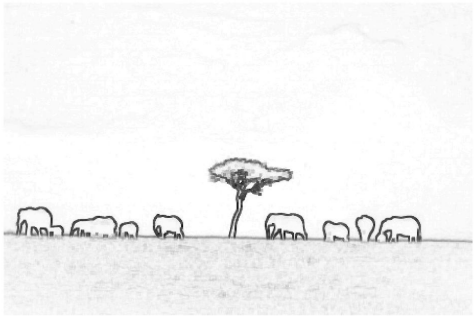
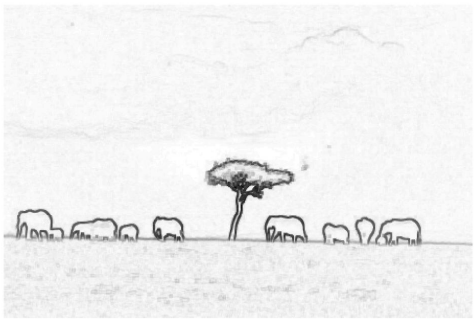


Figura 19 – Imagem original colorida, os operadores pseudo-morfológicos e o complementar dos operadores pseudo-morfológicos normalizados aplicados em $\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f})$.

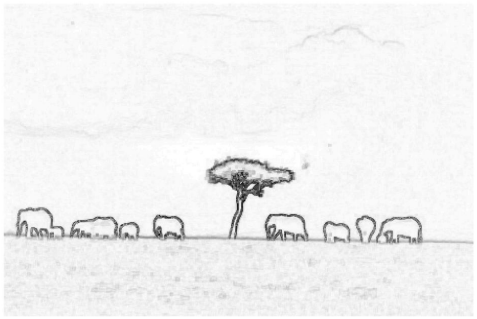
operadores pseudo-morfológicos $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f}))$ *e* $\boldsymbol{M_o}(\boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f}))$ *foram exibidos na Figura 18. Da mesma forma, observe que os operadores pseudo-morfológicos* $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$ *e* $\boldsymbol{M_o}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$ *foram*

(a) Imagem $\boldsymbol{f}_{253036}$

(b) $1 - \overline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$



(c) $1 - \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$



(d) $1 - \overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$

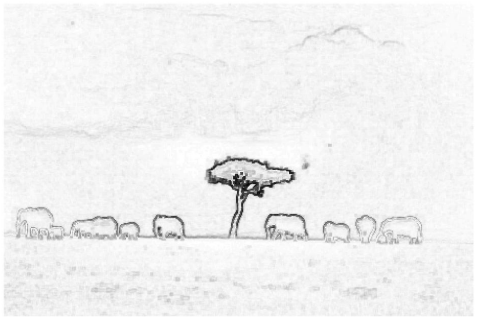
Figura 20 – Imagem original colorida e o complementar dos operadores pseudo-morfológicos normalizados aplicados em $\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f})$.

exibidos na Figura 19.

Observe que os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância $\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{E}}$ e $\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{M}_o}$ fornecem imagens em tons de cinza.

Neste capítulo, definimos particularmente alguns operadores pseudo-morfológicos baseados em distância para imagens em tons de cinza e imagens coloridas. Note que os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância não necessitam da escolha de um valor de referência r ou de uma cor de referência $\boldsymbol{r}$ e, com isso, contornamos o problema da escolha de uma referência apropriada. Sobretudo, os operadores pseudo-morfológicos, por meio da função de distribuição de probabilidade, permitem agregar uma certa incerteza na escolha da referência. No próximo capítulo, aplicaremos os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância no problema de detecção de bordas. Especificamente, daremos uma atenção especial para a aplicação dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância em imagens coloridas.

(a) $1 - \overline{\varrho}_B^E(\boldsymbol{f})$



(b) $1 - \overline{\varrho}_B^{Mo}(\boldsymbol{f})$

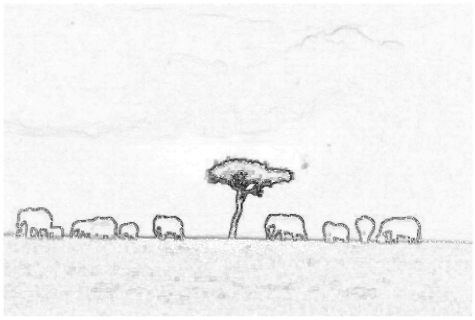


Figura 21 – Imagem complementar dos operadores pseudo-morfológicos normalizados.

5 Aplicação em Detecção de Bordas em Imagens Coloridas

A detecção de borda é uma tarefa importante em muitas aplicações, como visão computacional, segmentação de imagens e reconhecimento de objetos. Em morfológia matemática o gradiente morfológico é utilizado em problemas de detecção de bordas de um determinado objeto numa imagem apresentada. Uma borda é o limite entre duas regiões, cujos tons de cinza predominates na imagem são relativamente diferentes. Observando os resultados apresentados pelas estatíticas descritivas de operadores morfológicos baseados em distância, percebemos que boa parte dos nossos operadores se comportam, na prática, como gradientes morfológicos, ou seja, os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância realçam variações de intensidade de um pixel em uma vizinhança determinada pelo elemento estruturante. Com efeito, a borda, como uma propriedade intrínseca do objeto em uma imagem, não deve depender do esquema de ordenação utilizado. Baseado nessa observação, vamos considerar a detecção de borda como uma aplicação para os nossos operadores pseudo-morfológicos baseados numa distribuição de probabilidade uniforme.

Neste capítulo, avaliaremos quantitativamente o desempenho dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância no problema de detecção de bordas. Em seguida, vamos selecionar os operadores pseudo-morfológicos com as melhores acurácias, ou seja, os operadores que apresentaram a melhor capacidade de detecção de bordas para representar nossa abordagem. Por fim, vamos comparar a capacidade de detecção de bordas dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância com outras abordagens propostas na literatura.

No intuito de avaliarmos a eficiência dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância no problema de detecção de bordas, utilizaremos um *dataset* de segmentação de imagens da *University of California, Berkeley* (Martin et al., 2001). Esse *dataset* possui 300 imagens coloridas naturais e 1633 imagens binárias que foram segmentadas manualmente por um grupo de pessoas, onda cada pessoa fez a segmentação de uma certa quantidade de imagens. Para medir a capacidade de detecção dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância precisamos de alguma medida de desempenho. Existem muitas medidas de desempenho sendo utilizada na literatura, ver (Papari and Petkov, 2011; Lopez-Molina et al., 2013). Nesta tese, utilizaremos a medida de desempenho proposta por Pratt (2007), conhecido como Figura de Merito (FoM) de Pratt.

A medida de desempenho FoM é utilizada para quantificar a similaridade entre as imagens β e τ, onde β é a imagem binarizada produzida por um detector de borda ao qual queremos avaliar e τ é a imagem de borda de referência. Formalmente, τ denota uma imagem

binária correspondente a segmentação humana de uma imagem colorida $\boldsymbol{f}$ do *dataset*, isto é, o *Ground Truth* (GT). O FoM é uma das medidas mais utilizadas na literatura (Lopez-Molina et al., 2013) e é definida por

$$\text{FoM}(\beta,\tau) = \frac{1}{M}\sum_{x\in\tau}\frac{1}{1+\alpha d^2(x,\beta)}, \tag{5.1}$$

em que $M = \max\{\text{card}(\beta), \text{card}(\tau)\}$, onde $\text{card}(\beta)$ determina o número de pixels da borda da imagem β, α é uma constante escalar e $d(x,\beta)$ é a distância entre um ponto x da borda ideal em τ à β. Nesta tese, fixaremos o parâmetros $\alpha = 1/9$ e d é a distância Euclidiana (Pratt, 2007). Observe que $0 \leqslant \text{FoM}(\beta,\tau) \leqslant 1$ e um valor mais elevado do FoM indica uma capacidade melhor de detecção de borda. Assim, quanto mais próximo de 1 for o resultado da medida de desempenho FoM melhor será a detecção de bordas.

Para aplicar a medida de desempenho FoM precisamos fazer um tratamento nas imagens obtidas pelos operadores pseudo-morfológicos. Vamos considerar o operador pseudo-morfológico $\boldsymbol{\mathcal{S}_R}(\boldsymbol{\psi}_B^r(\boldsymbol{f}))$, onde $\boldsymbol{f}$ é uma imagem colorida e $\boldsymbol{\psi}_B^r$ representa os operadores morfológicos erosão $\boldsymbol{\varepsilon}_B^r$, dilatação $\boldsymbol{\delta}_B^r$ e gradiente $\boldsymbol{\varrho}_B^r$ baseados em distância. A metodologia adotada para fazer o tratamento é composta por duas etapas: o método de Supressão de não-Máximos (NMS, *Non-Maximum Suppression*) e o método de histerese (*hysteresis*). Esse tratamento é feito aplicando o método NMS em $\boldsymbol{\psi}_B^r(\boldsymbol{f})$ e em seguida o método de histerese para binarizar a imagem obtida no passo anterior. Essa metodologia é baseada no processo utilizado pelo detector de bordas do Canny, para mais detalhes ver (Canny, 1986).

Em nossos experimentos usamos o comando `NonMaxSupHyst` do `GNU Octave` que combina o método NMS e a histerese, contido na implementação do detector de bordas de Canny. Uma implementação alternativa do método NMS pode ser encontrada em Kovesi (2012). Uma desvantagem dessa implementação alternativa é que ela gasta muito tempo no processamento das imagens. O NMS calculado usando o comando `NonMaxSupHyst` é muito mais rápido no processamento das imagens. O método de histerese precisa de dois valores de limiar T_1 e T_2, em que $T_1 \leqslant T_2$. Nesta tese, vamos fixar os valores de limiar $T_1 = 0.01$ e $T_2 = 0.2$, para maiores detalhes ver (Gonzalez-Hidalgo et al., 2015). Gostaríamos de salientar que esses valores de limiar T_1 e T_2 podem ser otimizados, em outras palavras, os valores de limiar T_1 e T_2 podem ser ajustados para obtermos melhores resultados, conforme feito por Gonzalez-Hidalgo et al. (2015).

Para facilitar a compreensão dos resultados vamos representar os nossos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância pela seguinte nomeclatura:

- MeanG - representa o operador $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$.
- DMean - representa o operador $\boldsymbol{\varrho}_B^{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{f})$.
- ModG - representa o operador $\boldsymbol{M_o}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$.

- DMod - representa o operador $\boldsymbol{\varrho}_B^{M_o}(\boldsymbol{f})$.
- SdG - representa o operador $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varrho}_B^r(\boldsymbol{f}))$.
- RVgD - representa o operador $\boldsymbol{RV_g}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$.
- RVgE - representa o operador $\boldsymbol{RV_g}(\boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f}))$.
- RVtD - representa o operador $\boldsymbol{RV_t}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$.
- RVtE - representa o operador $\boldsymbol{RV_t}(\boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f}))$.
- GmdD - representa o operador $\boldsymbol{Gmd}(\boldsymbol{\delta}_B^r(\boldsymbol{f}))$.
- GmdE - representa o operador $\boldsymbol{Gmd}(\boldsymbol{\varepsilon}_B^r(\boldsymbol{f}))$.

Com o intuito de avaliar o desempenho dos nossos operadores pseudo-morfológicos no problema de detecção de bordas, vamos aplicar eles nas 300 imagens coloridas naturais e, em seguida, calcularemos a medida de desempenho FoM dos nossos operadores com relação às 1633 imagens binárias segmentadas (GT) do *dataset*. Os valores da medida de desempenho FoM dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância estão resumidos no gráfico *boxplot* ilustrado na Figura 22.

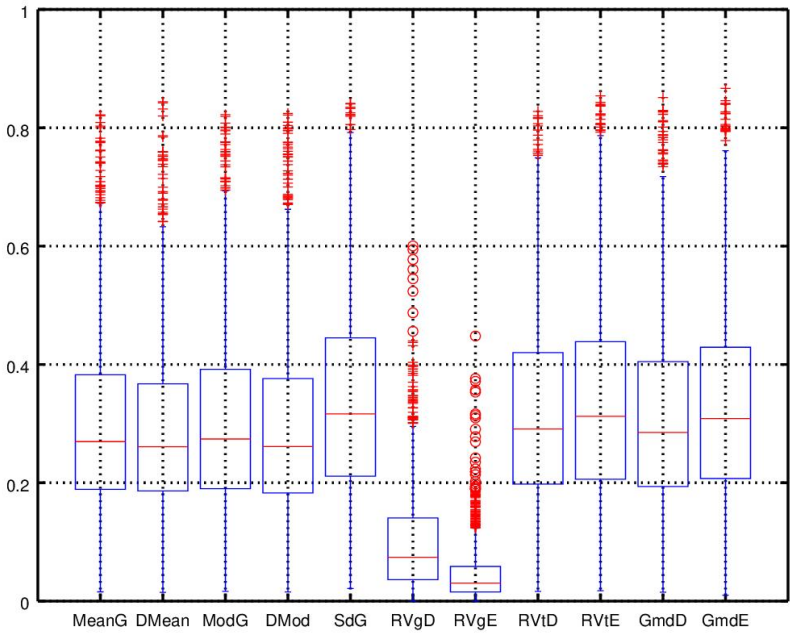


Figura 22 – *Boxplot* dos valores FoM para os operadores pseudo-morfológicos.

O gráfico *boxplot* é uma ferramenta interessante para apresentar algumas estatísticas relativas as medidas, por exemplo, dispersão e a mediana. Porém, ainda é difícil determinar

qual operador pseudo-morfológico apresentou o melhor desempenho. Para isto, vamos utilizar a média das medidas de desempenho FoM para cada operador em formato de tabela, tornando, assim, uma comparação númerica entre os resultados obtidos pelos diferentes operadores pseudo-morfológicos. A Tabela 3 mostra os valores médios da medida de desempenho FoM dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância. Além disso, o maior valor para o FoM médio é destacado em negrito. De acordo com a Tabela 3, o operador pseudo-morfológico que apresentou o maior FoM médio foi o SdG, cujo valor é 0.33661.

Tabela 3 – Valores do FoM médio para os operadores $\boldsymbol{\mathcal{S}_R}$.

Método	MeanG	DMean	ModG	DMod	SdG	RVgD
FoM	0.29671	0.28491	0.30185	0.28916	**0.33661**	0.09944
Método	RVgE	RVtD	RVtE	GmdD	GmdE	—-
FoM	0.04423	0.31657	0.33329	0.30815	0.32723	—-

Vamos utilizar um teste de hipóteses para poder interpretar melhor o desempenho dos operadores pseudo-morfológicos. A Figura 23 apresenta o resultado do teste t que compara o desempenho de dois operadores usando as 1633 valores do FoM com um nível de significância de 5%. Nesta figura, uma flecha significa que o teste t rejeitou a hipótese nula de que dois operadores possuem médias iguais contra a hipótese de que o valor do FoM médio na parte inferior da seta é menor do que o valor do FoM médio na parte superior da seta. Em outras palavras, o operador no topo da seta superou o operador na parte inferior da seta.

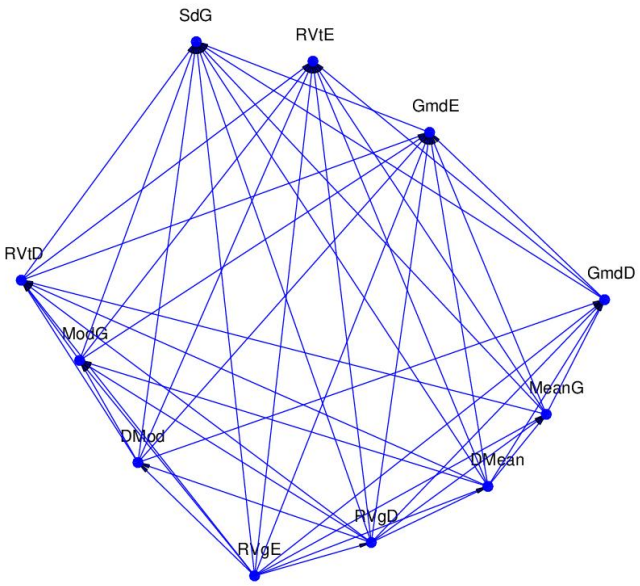


Figura 23 – Diagrama dos operadores pseudo-morfológicos.

A Figura 23, indica que os operadores pseudo-morfológicos SdG, RVtE e GmdE superaram os outros operadores. Note que os operadores SdG e RVtE não são comparavéis, em outras palavras, o teste t não rejeitou a hipótese nula de que o valor do FoM médio dos operadores SdG e RVtE são iguais. Da mesma forma que o teste t também não rejeitou a hipótese nula de que o valor do FoM médio dos operadores RVtE e GmdE são iguais, ou seja, os operadores RVtE e GmdE não são comparavéis. Por outro lado, a Tabela 3 mostra que os operadores RVgD e RVgE apresentaram os piores valores de FoM médio, 0.09944 e 0.04423, respectivamente. Além disso, a Figura 23 indica que o teste t rejeitou a hipótese nula de que o valor do FoM médio produzido pelos operadores RVgD e RVgE são iguais. Assim, RVgE representa o operador pseudo-morfológico com pior valor de desempenho médio, indicando uma baixa capacidade de detecção de bordas. Portanto, ao nível de significância de 5%, os dados trazem evidência a favor da suposição de que o desempenho dos operadores SdG, RVtE e GmdE na média, é superior ao desempenho dos operadores pseudo-morfológicos MeanG, DMean, ModG, DMod, RVgD, RVgE, RVtD e GmdD, obtendo um resultado estatisticamente significativo. Os experimentos mostraram que tanto o operador SdG como os operadores RVtE e GmdE apresentaram boa performance quando comparados com os demais operadores, indicando assim uma boa capacidade de detecção de bordas.

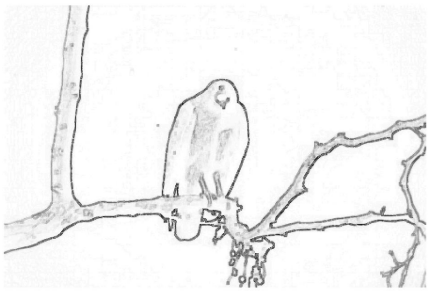
A Figura 24 ilustra, por exemplo, o operador pseudo-morfológico SdG aplicado na imagem natural colorida $\boldsymbol{f}_{42049}$, o complementar de τ_{42049} e o complementar da imagem binarizada β_{SdG}. Além disso, o valor da medida de desempenho FoM do operador SdG foi de 0.76529.

Para fins comparativos, vamos confrontar os nossos operadores SdG, RVtE e GmdE com alguns detectores de bordas clássicos da literatura, por exemplo, os detectores de bordas de Sobel e Canny. Lembrando que o `GNU Octave` possue os detectores de bordas de Sobel e Canny implementados para imagens em tons de cinza. Vamos considerar também a abordagem baseada no gradiente morfológico em tons de cinza. Especificamente, o gradiente morfológico ϱ_B, dado por (2.10). Além destes detectores de bordas, utilizaremos o gradiente morfológico para algumas abordagens da MM colorida, por exemplo, a abordagem marginal, lexicográfica, Witte et al e Angulo, como visto em 2.2.1. Em todas as abordagens utilizaremos um elemento estruturante (*flat*) B quadrado de dimensão 3×3. Na abordagem baseada em distância proposta por Angulo, utilizaremos duas cores de referência, a cor preta $\boldsymbol{r_b} = (0, 0, 0)$ e a cor branca $\boldsymbol{r_w} = (1, 1, 1)$. Para facilitar a análise dos resultados vamos representar os detectores de bordas descritos anteriormente com as seguintes nomeclaturas: Canny (C), Sobel (S), Gradiente Morfológico em tons de cinza (G), Marginal (M), Lexicográfica (L), Witte (W), Angulo com cor de referência preta (Ab) e Angulo com cor de referência branca (Aw). Lembrando que os nossos operadores são representados por SdG, RVtE e GmdE.

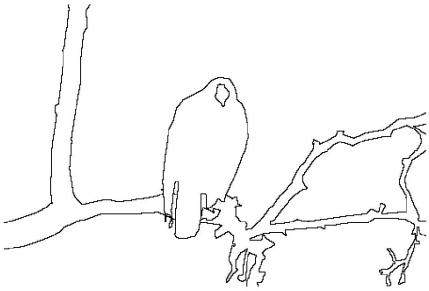
A fim de avaliar a capacidade de detecção de bordas dos nossos operadores SdG, RVtE e GmdE, vamos calcular a medida de desempenho FoM para as imagens obtidas pelos

(a) Imagem $\boldsymbol{f}_{42049}$

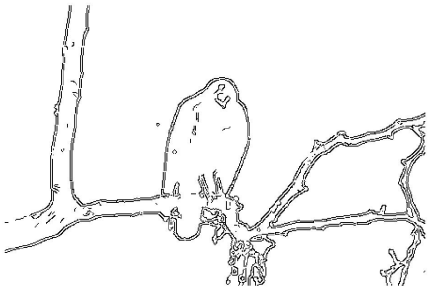
(b) SdG



(c) Ground Truth τ_{42049}



(d) β_{SdG}



FoM $= 0.76529$

Figura 24 – Imagem natural colorida, o complementar do SdG normalizado, o complementar do *Ground Truth* e o complementar da imagem binarizada.

operadores e comparar com as 1633 imagens binárias segmentadas (GT) do *dataset*. Antes de aplicar a medida de desempenho FoM precisamos fazer um tratamento nas imagens obtidas pelos detectores de bordas G, M, L, W, Ab e Aw. Assim como foi feito anteriormente com os operadores pseudo-morfológicos, aplicamos o NMS e histeresis nas imagens do gradiente obtido pelas diferentes abordagens. Note que os detectores de bordas de Canny (C) e Sobel (S) produzem em sua saída imagens binarizadas e por isso não precisam fazer um tratamento nas imagens de saída. Os valores da medida de desempenho FoM dos detectores de bordas estão resumidos no gráfico *boxplot* mostrado na Figura 25.

A Tabela 4 mostra os valores médios da medida de desempenho FoM para os onze operadores de detecção de bordas listados acima.

A Figura 26 apresenta o resultado do teste t que compara o desempenho de dois detectores de bordas da Tabela 4 com um nível de significância de 5%.

Note que maior FoM médio é dado em negrito e foi obtido pelo operador SdG, como mostra a Tabela 4, cujo valor é 0.33661. A Figura 26, mostra que o operador SdG superou os

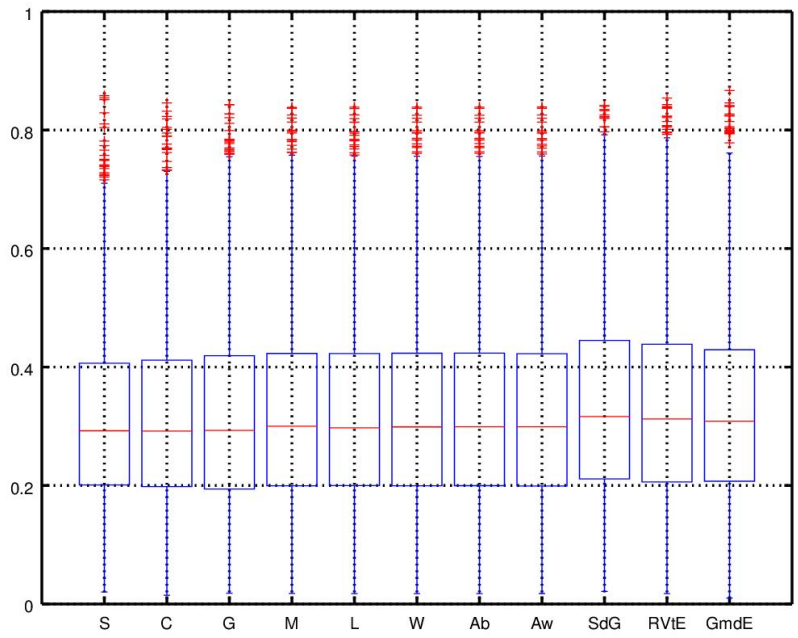


Figura 25 – *Boxplot* dos valores de FoM para os detectores de bordas.

Tabela 4 – Valores do FoM médio para os detectores de bordas.

Método	S	C	G	L	M	W
FoM	0.30898	0.31412	0.31660	0.32273	0.32267	0.32301
Método	Ab	Aw	SdG	RVtE	GmdE	—
FoM	0.32287	0.32284	**0.33661**	0.33329	0.32723	—

outros detectores de bordas, exceto o operador RVtE, ou seja, o teste t rejeitou a hipótese nula de que o valor do FoM médio apresentado pelo SdG é igual ao valor do FoM médio produzido pelos detectores S, C, G, M, L, W, Ab, Aw e GmdE. Apesar do operador RVtE superar os detectores de bordas S, C, G, M, L, W, Ab e Aw, os detectores SdG e RVtE apresentaram desempenho semelhante, ou seja, são incomparavéis. Observamos também que o teste t não rejeitou a hipótese nula de que o valor do FoM médio produzido pelos operadores M, L, W, Ab e Aw são iguais, em outras palavras, eles apresentam desempenho semelhante. Por outro lado, o detector de bordas de Sobel apresentou o menor FoM médio, enquanto que o detector de bordas de Canny (C) e o gradiente morfológico em tons de cinza (G) apresentaram um desempenho médio semelhante. Mais precisamente, o teste t de duas amostras não rejeitou a hipótese nula de que o detector de bordas de Canny tenha FoM médio igual ao FoM médio do gradiente morfológico em tons de cinza. Portanto, ao nível de significância de 5%, os dados trazem evidência a favor da suposição de que o desempenho dos detectores de bordas SdG e RVtE, na média, são maiores do que o desempenho dos detectores de bordas S, C, G, M, L, W, Ab e Aw. Dessa forma, concluímos que os operadores SdG e RVtE podem ser utilizados como detectores de bordas, ou seja, os

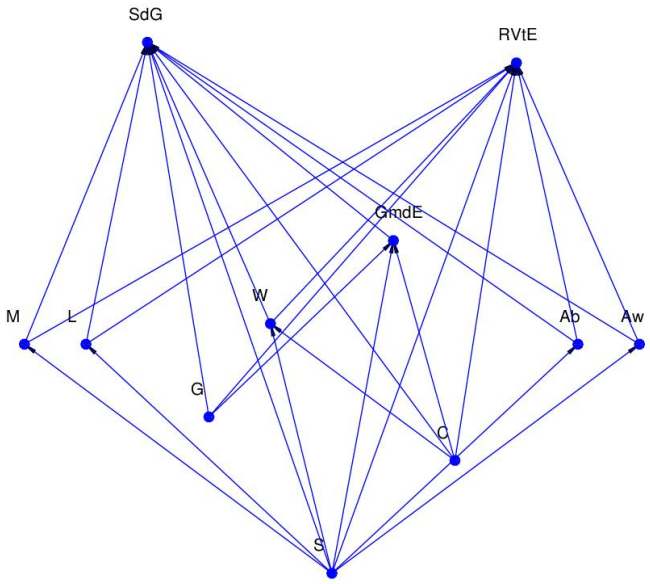
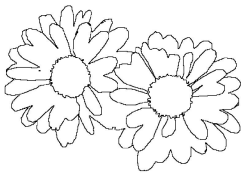
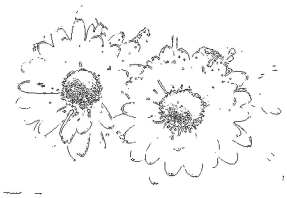


Figura 26 – Diagrama dos detectores de bordas.

operadores pseudo-morfológicos baseados em distância podem ser aplicados em problemas de detecção de bordas.

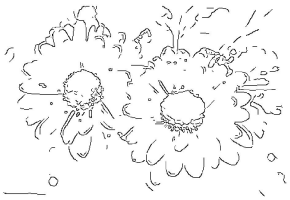
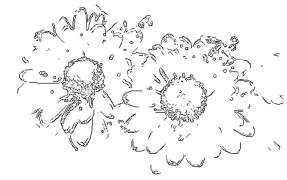
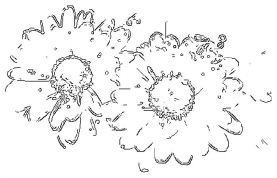
Vamos finalizar esse capítulo com três exemplos das príncipais abordagens para a detecção de bordas de algumas imagens naturais selecionadas do *dataset*. A Figura 27 mostra a imagem colorida natural $\boldsymbol{f}_{124084}$, sua imagem de *Ground Truth* τ_{124084} e as imagens binárias β_S, β_C, β_G, β_M, β_L, β_W, β_{Ab}, β_{Aw}, β_{SdG} e β_{RVtE}, obtidas respectivamente, pelos detectores de bordas S, C, G, M, L, W, Ab, Aw, SdG e RVtE. Além disso, apresentamos a medida de desempenho FoM para os respectivos detectores de bordas. Os detectores de bordas aplicados nas imagens naturais $\boldsymbol{f}_{3096}$ e $\boldsymbol{f}_{138032}$ estão ilustrados nas Figuras 28 e 29. A Figura 28 exibe os melhores resultados do FoM para os operadores SdG e RVtE quando aplicados a detecção de bordas. Os valores altos da medida de desempenho FoM confirmam a excelente capacidade dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância para detecção de bordas. Por outro lado, as imagens mostradas na Figura 29 apresentaram os piores resultados para a medida de desempenho FoM para os operadores SdG e RVtE quando aplicados a detecção de bordas. Note que as imagens binárias obtidas pelos detectores de bordas são muito mais ricas em detalhes do que a imagem de *Ground Truth* (GT). Os operadores pseudo-morfológicos conseguem detectar pequenas variações na imagem e com isso apresentam ruídos no resultado final. Isso explica os baixos valores da medida de desempenho FoM para o detectores de bordas da Figura 29. Além disso, a imagem de *Ground Truth* τ_{138032} da imagem $\boldsymbol{f}_{138032}$ apresenta poucas informações sobre a imagem.

(a) Imagem $\boldsymbol{f}_{124084}$ (b) τ_{124084} (c) β_S

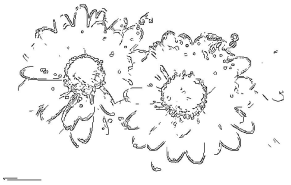
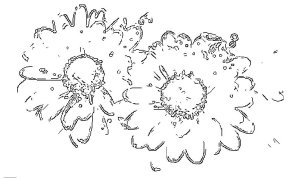
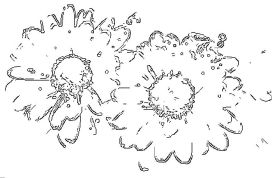
FoM $= 0.54433$

(d) β_C (e) β_G (f) β_M

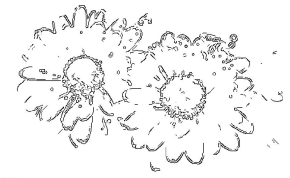
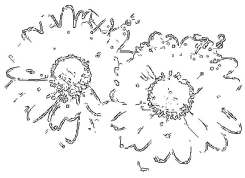
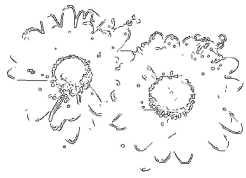
FoM $= 0.55873$ FoM $= 0.61832$ FoM $= 0.64043$

(g) β_L (h) β_W (i) β_{Ab}

FoM $= 0.65109$ FoM $= 0.65179$ FoM $= 0.65248$

(j) β_{Aw} (k) β_{SdG} (k) β_{RVtE}

FoM $= 0.64204$ FoM $= 0.66914$ FoM $= 0.51126$

Figura 27 – Imagem natural $\boldsymbol{f}_{124084}$, o complementar do *Ground Truth* τ_{124084} e o complementar das imagens binarizadas.

(a) Imagem $\boldsymbol{f}_{3096}$ (b) τ_{3096} (c) β_S

FoM $= 0.73895$

(d) β_C (e) β_G (f) β_M

FoM $= 0.81881$ FoM $= 0.79917$ FoM $= 0.79970$

(g) β_L (h) β_W (i) β_{Ab}

FoM $= 0.79718$ FoM $= 0.79908$ FoM $= 0.79908$

(j) β_{Aw} (k) β_{SdG} (k) β_{RVtE}

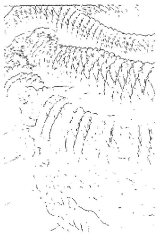
FoM $= 0.79904$ FoM $= 0.83470$ FoM $= 0.85390$

Figura 28 – Imagem natural $\boldsymbol{f}_{3096}$, o complementar do *Ground Truth* τ_{3096} e o complementar das imagens binarizadas.

(a) Imagem $\boldsymbol{f}_{138032}$

(b) τ_{138032}

(c) β_S



FoM $= 0.020235$

(d) β_C

FoM $= 0.024817$

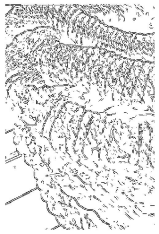
(e) β_G

FoM $= 0.027175$

(f) β_M

FoM $= 0.029401$

(g) β_L



FoM $= 0.029437$

(h) β_W

FoM $= 0.029321$

(i) β_{Ab}

FoM $= 0.029323$

(j) β_{Aw}

FoM $= 0.029313$

(k) β_{SdG}

FoM $= 0.030425$

(k) β_{RVtE}

FoM $= 0.032403$

Figura 29 – Imagem natural $\boldsymbol{f}_{138032}$, o complementar do *Ground Truth* τ_{138032} e o complementar das imagens binarizadas.

6 Considerações Finais

Nas últimas décadas grandes pesquisadores vem contribuindo com novas abordagens para extender a MM para dados multivariados, em particular, para imagens coloridas. Em termos gerais, nesta tese, apresentamos uma nova abordagem para MM colorida utilizando conceitos de estatística descritiva. Especificamente, introduzimos os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância para imagens em tons de cinza e imagens coloridas utilizando medidas de tendencia central e medidas de dispersão. Esses novos operadores pseudo-morfológicos surgem como uma proposta para solucionar o problema da escolha de uma referência apropriada na abordagem baseada em distância proposta por Angulo. Eles também permitem, por meio de uma distribuição de probabilidade, incorporar incertezas na escolha da referência.

O capítulo 1 apresenta os conceitos necessários para o desenvolvimento desta tese. Apresentamos os conceitos básicos e os principais resultados da teoria dos reticulados. Em particular, os conceitos de conjunto parcialmente ordenado, supremo e ínfimo, reticulado e reticulado completo. Apresentamos uma breve revisão teórica sobre morfologia matemática em reticulados completos, onde os operadores dilatação e erosão são associados em termos de uma relação de dualidade, ou seja, adjunção.

O capítulo 2 aborda inicialmente os conceitos básicos da morfologia matemática $\mathbb{L}-$Valorada, caso particular da morfologia matemática $\mathbb{L}$-*fuzzy* e relaciona os operadores erosão e dilatação com o conceito de adjunção. Posteriormente, apresentamos as adordagens da MM para imagens em tons de cinza e imagens coloridas. Em particular, apresentamos os operadores morfológicos elementares erosão e dilatação para imagens em tons de cinza e imagens coloridas e suas propriedades. Além disso, discutimos alguns esquemas de ordenação vetorial para MM colorida.

O capítulo 3 apresenta a abordagem da MM baseada em distância proposta por Angulo (2007) para imagens em tons de cinza e imagens coloridas. Estudamos os operadores elementares da morfologia baseados em distância, por exemplo, erosão, dilatação e gradiente. Apresentamos uma caracterização para os operadores erosão, dilatação e gradiente baseados em distância em função da referência para imagens em tons de cinza e imagens coloridas. A caracterização dos operadores baseados em distância está relacionada de forma direta com os diagramas de Voronoi. Especificamente, a dilatação baseada em distância está relacionada com o diagrama de Voronoi, enquanto que a erosão baseada em distância está relacionada com uma variação do diagrama de Voronoi, o diagrama do vizinho mais distante. Além disso, destacamos que os operadores baseados em distância como função da referência apresentam descontinuidades somente nas fronteiras das regiões de Voronoi.

O capítulo 4 introduz os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância

para imagens em tons de cinza e imagens coloridas. Com objetivo de tratar incertezas na escolha da referência na abordagem baseada em distância, definimos os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância utilizando conceitos de estatística descritiva para imagens em tons de cinza e imagens coloridas. Precisamente, utilizamos as medidas de tendencia central e dispersão para definir novos operadores. Por exemplo, definimos a esperança da erosão, a moda da dilatação, o desvio padrão do gradiente, entre outros.

O capítulo 5 apresenta uma aplicação dos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância em problemas de detecção de bordas. Especificamente, avaliamos o desempenho dos operadores pseudo-morfológicos usando o *dataset* de segmentação de imagens da *University of California*, *Berkeley*, e o FoM de Pratt. Observamos, em particular, que os operadores SdG e RVtE apresentaram uma boa capacidade de detecção de bordas quando comparado com outras abordagens da literatura tais como os detectores de bordas de Sobel, Canny, gradiente morfológico e as abordagens marginal, lexicográfica, De Witte et al e Angulo.

No futuro, pretendemos estudar de forma mais detalhada os operadores pseudo-morfológicos. Investigar algumas propriedades desses operadores e desenvolver novos operadores pseudo-morfológicos baseados em distância para processamento e análise de imagens coloridas. Apesar dos resultados obtidos pelos operadores pseudo-morfológicos para o problema de detecção de bordas, ainda existem vários pontos a serem explorados tanto do ponto de vista teórico quanto do ponto de vista computacional e aplicações em problemas práticos. Em suma, ainda falta conduzir mais pesquisa sobre os operadores pseudo-morfológicos baseados em distância.

Referências

T. Acharya and A. Ray. *Image Processing: Principles and Applications*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2005. Citado na página 32.

H. M. Al-Otum. Morphological operators for color image processing based on mahalanobis distance measure. *Optical Engineering*, 42:42 – 42 – 12, 2003. Citado na página 49.

H. M. Al-Otum. A novel set of image morphological operators using a modified vector distance measure with color pixel classification. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 30:46 – 63, Jul 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 56.

J. Angulo. Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: Application to image filtering, enhancement and analysis. *Computer Vision and Image Understanding*, 107(1–2):56–73, July-August 2007. Special issue on color image processing. Citado 12 vezes nas páginas 17, 18, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 49, 56, 59 e 81.

J. Angulo and J. Serra. Color segmentation by ordered mergings. In *Proceedings 2003 International Conference on Image Processing*, volume 2, pages II–125–8 vol.3, Sept 2003. Citado na página 33.

E. Aptoula and S. Lefèvre. A Comparative Study on Multivariate Mathematical Morphology. *Pattern Recognition*, 40(11):2914–2929, November 2007. Citado 4 vezes nas páginas 17, 32, 33 e 34.

E. Aptoula and S. Lefèvre. On Lexicographical Ordering in Multivariate Mathematical Morphology. *Pattern Recognition Letters*, 29(2):109–118, January 2008. Citado na página 34.

E. Aptoula and S. Lefèvre. On the morphological processing of hue. *Image and Vision Computing*, 27(9):1394–1401, Aug. 2009. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 56.

F. Aurenhammer. Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Comput. Surv.*, 23(3):345–405, Sept. 1991. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 90.

F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi diagrams. In J. R. Sack and J. Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, chapter 5, pages 201 – 290. North-Holland, Amsterdam, 2000. Citado na página 90.

G. J. F. Banon and J. Barrera. *Bases da Morfologia Matemática para Análise de Imagens Binárias*. IX Escola de Computação, Recife - PE, 1994. Citado na página 16.

V. Barnett. The ordering of multivariate data. *Journal of Royal Statistical Society A*, 3:318–355, 1976. Citado na página 33.

M. Berg, M. Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational geometry: algorithms and applications*. Springer Berlin Heidelberg, New York, 2000. Citado na página 90.

S. Beucher. *Segmentation d'images et morphologie mathématique*. Ph.D. thesis, Ecole des Mines de Paris, 1990. Citado na página 30.

G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, 3 edition, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 19.

I. Bloch. Lattices of fuzzy sets and bipolar fuzzy sets, and mathematical morphology. *Information Sciences*, 181(10):2002–2015, May 2011. Citado na página 16.

R. D. Bock. *Multivariate Statistical Methods in Behavioral Research*. McGraw-Hill series in psychology. Scientific Software, 1985. Citado na página 62.

U. Braga-Neto and J. Goutsias. Supremal multiscale signal analysis. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 36(1):94–120, 2004. Citado na página 16.

J. Canny. A Computational Approach to Edge-detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8:679–700, 1986. Citado na página 71.

M. L. Comer and E. J. Delp. Morphological operations for color image processing. *Journal of Electronic Imaging*, 8(3):279–289, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 49.

B. Davey and H. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge mathematical text books. Cambridge University Press. Citado na página 19.

B. De Baets. Fuzzy Morphology: A Logical Approach. In B. M. Ayyub and M. M. Gupta, editors, *Uncertainty Analysis in Engineering and Science: Fuzzy Logic, Statistics, and Neural Network Approach*, pages 53–67. Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997. Citado na página 16.

B. De Baets, E. Kerre, and M. Gupta. The fundamentals of fuzzy mathematical morphology part 1: basic concepts. *International Journal of General Systems*, 23(2):155–171, 1995a. Citado na página 24.

B. De Baets, E. Kerre, and M. Gupta. The fundamentals of fuzzy mathematical morphology part 2: idempotence, convexity and decomposition. *International Journal of General Systems*, 23 (4):307–322, 1995b. Citado na página 24.

V. De Witte, S. Schulte, M. Nachtegael, D. Van der Weken, and E. Kerre. Vector morphological operators for colour images. In M. Kamel and A. Campilho, editors, *Image Analysis and Recognition*, pages 667–675, Berlin, Heidelberg, 2005a. Springer Berlin Heidelberg. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 56.

V. De Witte, S. Schulte, M. Nachtegael, D. Weken, and E. Kerre. Vector Morphological Operators for Colour Images. In M. Kamel and A. Campilho, editors, *Image Analysis and Recognition*, volume 3656 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 667–675. Springer Berlin Heidelberg, 2005b. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 38.

H. Deborah, N. Richard, and J. Hardeberg. Spectral ordering assessment using spectral median filters. In J. A. Benediktsson, J. Chanussot, L. Najman, and H. Talbot, editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, volume 9082 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 387–397. Springer International Publishing, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 56.

T. Deng and H. Heijmans. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 16(2):155–171, 2002. Citado na página 16.

G. Deschrijver and C. Cornelis. Representability in interval-valued fuzzy set theory. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 15(03):345–361, 2007. Citado na página 24.

E. R. Dougherty and R. A. Lotufo. *Hands-on Morphological Image Processing*. SPIE PRESS, July 2003. Citado na página 29.

T. Gerstenkorn and J. Gerstenkorn. Gini's mean difference in the theory and application to inflated distributions. *Statistica*, 63(3), 2007. Citado na página 63.

J. A. Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 18:145–174, 1967. Citado na página 24.

M. Gonzalez-Hidalgo, S. Massanet, A. Mir, and D. Ruiz-Aguilera. On the choice of the pair conjunction-implication into the fuzzy morphological edge detector. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(4):872–884, Aug 2015. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 71.

J. Goutsias, H. J. A. M. Heijmans, and K. Sivakumar. Morphological Operators for Image Sequences. *Computer vision and image understanding*, 62:326–346, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 17, 32, 33 e 34.

H. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994. Citado na página 25.

H. J. A. M. Heijmans. Mathematical Morphology: A Modern Approach in Image Processing Based on Algebra and Geometry. *SIAM Review*, 37(1):1–36, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 16, 23 e 29.

H. J. A. M. Heijmans and R. Keshet. Inf-semilattice approach to self-dual morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 17(1):55–80, Jul 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 41.

H. J. A. M. Heijmans and C. Ronse. The algebraic basis of mathematical morphology I. Dilations and erosions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 50(3):245–295, 1990. Citado na página 19.

R. Johnson and D. Wichern. *Applied multivariate statistical analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 5. ed edition, 2002. Citado na página 62.

R. A. Johnson and D. W. Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Pearson Prentice Hall, 6 th edition, 2007. Citado na página 56.

P. D. Kovesi. MATLAB and octave functions for computer vision and image processing. 2012. URL http://www.peterkovesi.com/matlabfns/. Citado na página 71.

A. Ledoux, N. Richard, A.-S. Capelle-Laizé, and C. Fernandez-Maloigne. Toward a complete inclusion of the vector information in morphological computation of texture features for color images. In A. Elmoataz, O. Lezoray, F. Nouboud, and D. Mammass, editors, *Image and Signal Processing*, volume 8509 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 222–229. Springer International Publishing, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 56.

A. Ledoux, N. Richard, A.-S. Capelle-Laizé, and C. Fernandez-Maloigne. Perceptual color hit-or-miss transform: application to dermatological image processing. *Signal, Image and Video Processing*, 9(5):1081–1091, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 56.

O. Lezoray. Complete lattice learning for multivariate mathematical morphology. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 35:220 – 235, Feb 2016. Citado na página 17.

E. L. Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 4 edition, 2009. Citado na página 29.

C. Lopez-Molina, B. De Baets, and H. Bustince. Quantitative error measures for edge detection. *Pattern Recognition*, 46(4):1125 – 1139, Apr 2013. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 71.

D. Martin, C. Fowlkes, D. Tal, and J. Malik. A Database of Human Segmented Natural Images and its Application to Evaluating Segmentation Algorithms and Measuring Ecological Statistics. In *Proceedings of the 8th International Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 416–423, July 2001. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 70.

G. Matheron. *Elements Pour une Theorie des Milieux Poreux*. Masson, Paris, 1967. Citado na página 16.

J. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1984. Citado na página 29.

M. Nachtegael and E. E. Kerre. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy Sets and Systems*, 124(1):73–85, 2001. Citado na página 16.

H. Oja. Descriptive statistics for multivariate distributions. *Statistics & Probability Letters*, 1(6): 327 – 332, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 63.

F. G. Ortiz Zamora, F. Torres-Medina, J. Lopez-Angulo, and S. Puente Mendez. Comparative study of vectorial morphological operations in different color spaces. In D. P. Casasent and E. L. Hall, editors, *Proceedings of the SPIE*, volume 4572 of *Intelligent Robots and Computer Vision XX: Algorithms, Techniques, and Active Vision*, pages 259–268, Oct. 2001. Citado na página 49.

G. Papari and N. Petkov. Edge and line oriented contour detection: State of the art. *Image and Vision Computing*, 29(2–3):79 – 103, Feb 2011. Citado na página 70.

A. Papoulis and S. U. Pillai. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw Hill, Boston, fourth edition, 2002. Citado na página 56.

W. Pratt. *Digital Image Processing*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 4th edition, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 71.

P. J. Rezende and J. Stolfi. *Fundamentos de geometria computacional*. IX Escola de Computação, Recife, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 90.

L. Rittner, J. Campbell, P. Freitas, S. Appenzeller, G. B. Pike, and R. Lotufo. Analysis of Scalar Maps for the Segmentation of the Corpus Callosum in Diffusion Tensor Fields. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 45:214–226, 2013. Citado na página 16.

V. K. Rohatgi and A. K. M. E. Saleh. *An Introduction to Probability and Statistics*. John Wiley and Sons, New Delhi, 2 nd edition, 2010. Citado na página 56.

C. Ronse. Why Mathematical Morphology Needs Complete Lattices. *Signal Processing*, 21(2): 129–154, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 21.

L. J. Sartor and A. R. Weeks. Morphological operations on color images. *Journal of Electronic Imaging*, 10(2):548–559, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 49.

J. Serra. Introduction a la Morphologie Mathematique. Booklet no. 3, Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique, Fontainebleau, France, 1969. Citado na página 16.

J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 25.

J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, New York, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 21.

J. Serra. A Lattice Approach to Image Segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24:83–130, 2006. Citado na página 16.

J. Serra. The “false colour” problem. In M. H. Wilkinson and J. B. Roerdink, editors, *Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing*, volume 5720 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 13–23. Springer Berlin Heidelberg, 2009. Citado na página 33.

C. G. Small. A survey of multidimensional medians. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, 58(3):263–277, 1990. Citado na página 56.

P. Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 16, 25, 29 e 33.

P. Soille, S. Beucher, and J. F. Rivest. Morphological gradients. *Journal of Electronic Imaging*, 2(4)(12):326–336, Oct. 1993. Citado na página 29.

S. Sternberg. Grayscale Morphology. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 35: 333–355, 1986. Citado na página 16.

P. Sussner and M. E. Valle. Classification of Fuzzy Mathematical Morphologies Based on Concepts of Inclusion Measure and Duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32 (2):139–159, Oct. 2008. Citado na página 16.

P. Sussner, M. Nachtegael, T. Mélange, G. Deschrijver, E. Esmi, and E. Kerre. Interval-valued and intuitionistic fuzzy mathematical morphologies as special cases of l-fuzzy mathematical morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 43(1):50–71, May 2012. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 24 e 25.

H. Talbot, C. Evans, and R. Jones. Complete ordering and multivariate mathematical morphology. In *Proceedings of the Fourth International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, ISMM ’98, pages 27–34, Norwell, MA, USA, 1998. Kluwer Academic Publishers. Citado 3 vezes nas páginas 17, 32 e 33.

M. Valle and R. Valente. Mathematical Morphology on the Spherical CIELab Quantale with an Application in Color Image Boundary Detection. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 52(2):183–201, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 56.

A. R. Weeks and L. J. Sartor. Color morphological operators using conditional and reduced ordering. volume 3808 of *Proceedings of SPIE*, 1999. Citado na página 49.

Apêndices

APÊNDICE A – Diagrama de Voronoi

Nesta seção faremos uma breve apresentação teórica sobre o diagrama de Voronoi e suas generalizações, para mais detalhes ver (Rezende and Stolfi, 1994; Berg et al., 2000; Aurenhammer and Klein, 2000; Aurenhammer, 1991).

O diagrama de Voronoi forma uma das estruturas fundamentais em Geometria Computacional, pois de alguma forma, ele armazena toda a informação sobre a proximidade entre os pontos. Na literartura, o diagrama de Voronoi pode ser encontrado também com os nomes de diagrama de Dirichlet ou *Thiessen Tessellations*. O diagrama de Voronoi é uma estrutura geométrica que aparece com muita frequência na natureza. Além disso, pode ser encontrado em diversos campos da ciência e tecnologia, por exemplo, fisíca, astronomia, robótica, até mesmo na arte, tendo inúmeras aplicações práticas e teóricas.

Seja $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ um conjunto de m pontos distintos no $\mathbb{R}^n$. Os pontos de P são chamados de geradores (ou sítios). Para dois sítios distintos $p_i, p_j \in P$, considere

$$H(p_i, p_j) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, p_i) \leqslant d(x, p_j)\}, \tag{A.1}$$

como sendo o semiespaço que contém p_i, onde $d(\cdot, \cdot)$ é a distância Euclidiana. Observamos que pode-se usar diferentes funções de distância para definir diferentes variações do diagrama de Voronoi.

A região de Voronoi (ou celula de Voronoi) associada ao sítio $p_i \in P$, denotada por $RV(p_i)$, é o conjunto definido por:

$$RV(p_i) = \bigcap_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq i}} H(p_i, p_j). \tag{A.2}$$

Em outras palavras, $RV(p_i)$ consiste de todos os pontos do semiespaço que estão mais próximos de p_i do que qualquer outro ponto de P, ou mais precisamente,

$$RV(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, p_i) \leqslant d(x, p_j),\ \forall\, p_j \in P \text{ com } j \neq i\}. \tag{A.3}$$

O diagrama de Voronoi de P, denotado por $DV(P)$, é a partição do $\mathbb{R}^n$ em m regiões poliédricas $RV(p_i)$, isto é, $DV(P) = \{RV(p_1), \ldots, RV(p_m)\}$.

A Figura 30 ilustra, como exemplo, (a) a região de Voronoi de um sítio $p_i \in P$ e (b) o diagrama de Voronoi do conjunto de pontos P em $\mathbb{R}^2$.

O diagrama de Voronoi $DV(P)$, pela sua definição, é chamado de diagrama do vizinho mais próximo. Dessa forma, uma generalização natural para o $DV(P)$ é o diagrama do vizinho mais distante (Aurenhammer, 1991). Formalmente, o diagrama do vizinho mais distante

(a) $RV(p_i)$ (b) $DV(P)$

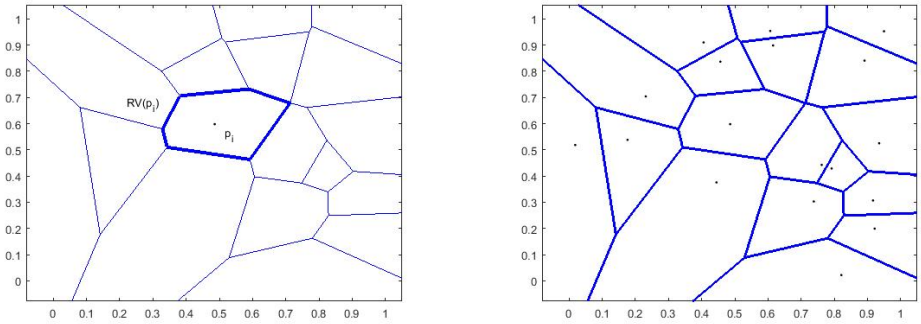


Figura 30 – Região de Voronoi e o diagrama de Voronoi.

é obtido modificando-se o sentido da desigualdade na expressão (A.3). Matematicamente, temos que

$$\overline{RV}(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, p_i) \geqslant d(x, p_j),\ \forall\ p_j \in P \text{ com } j \neq i\}\,. \tag{A.4}$$

O diagrama do vizinho mais distante de P, denotado por $\overline{DV}(P)$, é dado por $\overline{DV}(P) = \left\{\overline{RV}(p_1), \ldots, \overline{RV}(p_m)\right\}$. Note que outras generalizações podem ser obtidas trocando a função de distância $d(\cdot, \cdot)$ na definição (A.3). Por exemplo, as métrica L_1, L_∞ ou L_p podem ser utilizadas para definir outras variações do diagrama de Voronoi no $\mathbb{R}^n$.