

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

BENEDITO SILVA ABREU

Um Método de Elementos Finitos Baseado em Fluxos em $H(\text{div})$

Campinas

2018

Benedito Silva Abreu

Um Método de Elementos Finitos Baseado em Fluxos em H(div)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Uni-
versidade Estadual de Campinas como parte
dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa

Este exemplar corresponde à versão
final da Tese defendida pelo aluno Be-
nedito Silva Abreu e orientada pelo
Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES; CNPq, 143131/2015-0

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Ab86m Abreu, Benedito Silva, 1982-
Um método de elementos finitos baseado em fluxos em $H(\text{div})$ / Benedito Silva Abreu. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Galerkin, Métodos de. 3. Análise numérica. 4. Equações diferenciais elípticas - Soluções numéricas. I. Correa, Maicon Ribeiro, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A finite element method based upon $H(\text{div})$ fluxes

Palavras-chave em inglês:

Finite element method

Galerkin methods

Numerical analysis

Elliptic differential equations - Numerical solutions

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Maicon Ribeiro Correa [Orientador]

Grigori Chapiro

Denise de Siqueira

Sandra Augusta Santos

Eduardo Cardoso de Abreu

Data de defesa: 21-02-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 21 de fevereiro de 2018 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). MAICON RIBEIRO CORREA

Prof(a). Dr(a). GRIGORI CHAPIRO

Prof(a). Dr(a). DENISE DE SIQUEIRA

Prof(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS

Prof(a). Dr(a). EDUARDO CARDOSO DE ABREU

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Agradecimentos

Em primeiro lugar preciso agradecer a Deus por cuidar de mim e de minha família. Meus pais – José Valter de Abreu e Rita Silva Abreu – pelos sacrifícios e abnegação típicos de pais muito humildes. São tantas pessoas a se agradecer, numa jornada tão complexa, mas eu vivo para servir.

Minha profunda gratidão a meu orientador, Professor Maicon Ribeiro Correa, por compartilhar sua área de estudos e estilo comigo. Também por sua paciência e apoio, que espero sempre poder fazer jus. Eu comecei o doutorado muito inseguro e indeciso quanto ao que estudar, tudo me parecia estranho. Hoje me sinto apaixonado pela minha área de estudos.

Momento também de agradecer à coordenação do departamento por me indicar uma bolsa. Agradeço o apoio financeiro das agências: CAPES (03/2012 a 07/2015) e CNPq (08/2015 a 02/2016, processo número 143131/2015-0). Também preciso agradecer o apoio financeiro do Imecc/Unicamp através de suas bolsas de estágio docente (PED) e aos professores com quem tive contato através destas: Professora Ketty Resende, Prof. Laécio Barros e Prof. Adriano Moura. Não poderia deixar de agradecer também ao Prof. Marcelo Firer pela oportunidade em seu projeto de site de disciplinas básicas no verão de 2017.

Agradeço também ao pessoal da informática e impressoras: muito zelosos e atenciosos. Também ao pessoal da secretaria: muito solícitos e atentos a toda sorte de dúvida. Também gostaria de agradecer ao pessoal da biblioteca (bimecc): um acervo maravilhoso, um lugar fantástico.

Também preciso agradecer aos pesquisadores do grupo de análise numérica do Imecc/Unicamp por aulas e seminários que pude frequentar; assim como a rica interação com seus alunos. Em especial, preciso agradecer meus colegas de seminários e orientação: Margui, Juan e Felipe. Espero sempre poder revê-los e fortalecer nossos laços.

Agradeço a meus amigos de graduação Thiago e Marcelo pelo apoio, confiança e amizade de sempre. Meu amigo de infância Daniel, pela amizade longa; e meus irmãos Sônia e Roberto, pelo contato mais próximo, as horas no telefone.

Em especial, minha noiva Emelly por tudo, até mesmo sua simples presença. Meus sogros – Samuel e Eliane Aveiro – pela minha acolhida em sua família: minha segunda família. Também aos nossos amigos em Hortolândia, em particular, ao casal Wagner e Evellyn Teoro.

Finalmente, e novamente, a Deus, por me permitir, acima de tudo, continuar sendo um indivíduo socrático; e para um socrático a curiosidade lhe basta.

Resumo

Neste trabalho é considerada uma formulação de elementos finitos baseada em fluxos $H(\text{div})$ -conformes para uma certa classe de problemas elípticos, motivado por modelos de Darcy (ou fluxo de Darcy) em meios porosos e problemas relacionados. Um problema global em $H(\text{div})$ é resolvido apenas para o fluxo, sendo o potencial então aproximado via um pós-processamento local a nível do elemento. Também é abordada a questão da influência da transformação de Piola sobre a otimalidade da aproximação, assim como a aproximação do divergente do campo vetorial. Comparações com o método misto dual clássico são conduzidas através de experimentos numéricos. Nesta formulação alternativa são propostas duas maneiras de contornar a perda de otimalidade sobre malhas quadrilaterais gerais. A primeira consiste em usar espaços enriquecidos a fim de melhorar a aproximação do divergente. A outra proposta consiste em considerar a projeção do divergente diretamente na formulação variacional, obtendo uma economia de graus de liberdade.

Palavras-chave: métodos de elementos finitos. Galerkin misto. $H(\text{div})$. malhas quadrilaterais.

Abstract

We consider an alternative approach to the classical mixed Galerkin finite element method based on $H(\text{div})$ interpolation. We are specially interested in solving a class of elliptic problems motivated by Darcy's problem (or Darcy's flow) on porous media and related problems. A global problem in $H(\text{div})$ is set up and solved only for the flow, the potential being then computed via a local postprocessing at the element level. The influence of Piola's mapping on optimality properties of the solution is also addressed as well as the approximation of the divergence of vector fields. Comparisons with the classical mixed Galerkin method are carried out through numerical experiments. In this alternative formulation we propose two ways of dealing with the resulting loss of accuracy over general quadrilateral meshes. The first one consists in deploying enriched finite element spaces in order to improve the approximation of the divergence. The second one relies on directly modifying the variational formulation by projecting the divergence operator into a proper space for the potential, thereby not increasing the number of degrees of freedom.

Keywords: finite element methods. mixed Galerkin. $H(\text{div})$. quadrilateral meshes.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Componente não nula das funções bolha: $\hat{\chi}_1$ (a), $\hat{\chi}_2$ (b), $\hat{\chi}_3$ (c) e $\hat{\chi}_4$ (d).	54
Figura 2 – Malha de 4×4 quadrados (esquerda) e trapézios (direita).	59
Figura 3 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: pressão exata (esquerda) e aproximada pelo método misto (direita) com \mathcal{RT}_1 usando malha de quadrados.	60
Figura 4 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: componente x da velocidade, exata (esquerda) e aproximada (direita) pelo método misto com \mathcal{RT}_1 usando malha de quadrados.	61
Figura 5 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: divergente exato (esquerda) e aproximado pelo método misto (direita) usando \mathcal{RT}_1 com malha de quadrados.	61
Figura 6 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: componente y da velocidade aproximada pelo método misto com \mathcal{RT}_1 sobre malha de quadrados.	61
Figura 7 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: pressão exata (esquerda) e aproximada (direita) pelo método misto usando \mathcal{RT}_1 com malha de trapézios.	62
Figura 8 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: componente x da velocidade, exata (esquerda) e aproximada pelo método misto usando \mathcal{RT}_1 (direita) com malha de trapézios.	62
Figura 9 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: divergente exato (esquerda) e aproximado pelo método misto usando \mathcal{RT}_1 (direita) com malha de trapézios.	62
Figura 10 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: componente y da velocidade aproximada pelo método misto usando \mathcal{RT}_1 sobre malha de trapézios.	63
Figura 11 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o misto dual usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 , na norma L^2 , sobre malha de quadrados (figs. (a) e (c)) e de trapézios (figs (b) e (d)).	68
Figura 12 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o misto dual usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 , na norma de L^2 , sobre malha de quadrados (figs (a) e (c)) e de trapézios (figs. (b) e (d)).	69
Figura 13 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método misto usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2 , na norma de L^2 , sobre malha de quadrados (figs. (a) e (c)) e de trapézios (figs. (b) e (d)).	70

Figura 14 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método FB usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 , na norma L^2 , sobre malha de quadrados ((a) e (c)) e trapézios ((b) e (d)).	83
Figura 15 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método FB usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 , na norma L^2 , sobre malha de quadrados ((a) e (c)) e trapézios ((b) e (d)).	85
Figura 16 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método FB usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2 , na norma L^2 , sobre malha de quadrados ((a) e (c)) e trapézios ((b) e (d)).	87
Figura 17 – Complexidade para as formulações mista dual (MD), sem condensação, e baseada em fluxo (FB) utilizando: (a) \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 (b) \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1	89
Figura 18 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método FB usando \mathcal{RT}_0^1 e \mathcal{RT}_1^2 , na norma de L^2 , sobre malha de quadrados ((a) e (c)) e trapézios ((b) e (d)).	91
Figura 19 – Domínio do escoamento com barreiras.	95
Figura 20 – Malha de elementos finitos.	96
Figura 21 – Escoamento com barreiras, componente u_x : aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	97
Figura 22 – Escoamento com barreiras, componente u_y : aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	97
Figura 23 – Escoamento com barreiras, pressão: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	98
Figura 24 – Escoamento com barreiras, fluxo: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	99
Figura 25 – Domínio do problema <i>um quarto de five spot</i> , com condutividade constante (esquerda) e com alto contraste (direita).	100
Figura 26 – Um quarto de five-spot, componente u_x em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	102
Figura 27 – Um quarto de five-spot, componente u_y em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	102
Figura 28 – Um quarto de five-spot, pressão em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	103
Figura 29 – Um quarto de five-spot, fluxo em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	104
Figura 30 – Um quarto de five-spot, componente u_x em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	105
Figura 31 – Um quarto de five-spot, componente u_y em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	105

Figura 32 – Um quarto de five-spot, pressão em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	106
Figura 33 – Um quarto de five-spot, fluxo em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	107
Figura 34 – Um quarto de five-spot, componente u_x em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	109
Figura 35 – Um quarto de five-spot, componente u_y em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	109
Figura 36 – Um quarto de five-spot, pressão em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	110
Figura 37 – Um quarto de five-spot, fluxo em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	111
Figura 38 – Um quarto de five-spot, componente u_x em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	112
Figura 39 – Um quarto de five-spot, componente u_y em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	112
Figura 40 – Um quarto de five-spot, pressão em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	113
Figura 41 – Um quarto de five-spot, fluxo em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	114
Figura 42 – Meio altamente heterogêneo: campo de permeabilidade com 60×30 elementos.	115
Figura 43 – Meio altamente heterogêneo, pressão: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	117
Figura 44 – Meio altamente heterogêneo, fluxo: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1	118
Figura 45 – Meio altamente heterogêneo: diferença entre as aproximações usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 para (a) a componente x e (b) fluxo vetorial.	119
Figura 46 – Aplicação bilinear do mapeamento geométrico.	128
Figura 47 – Malha quadrilateral regular h -uniforme.	129

Lista de tabelas

Tabela 1 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método misto dual usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0	64
Tabela 2 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o misto dual usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1	65
Tabela 3 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método misto dual usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2	66
Tabela 4 – Comparando as pressões obtidas no Misto Dual e no pós-processamento <i>pontual</i> , usando \mathcal{RT}_k	81
Tabela 5 – Esquema em velocidade: erros e ordem de convergência para \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0	82
Tabela 6 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método FB usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1	84
Tabela 7 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método FB usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2	86
Tabela 8 – Tempo computacional na resolução do problema com $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$ sobre malha de quadrados.	89
Tabela 9 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método em fluxo FB usando-se os espaços \mathcal{RT}_0^1 e \mathcal{RT}_1^2	90
Tabela 10 – Erros e ordem de convergência para \mathcal{RT}_0 sobre malha de trapézios.	94

Lista de abreviaturas e siglas

MD	representa a formulação Mista Dual ('Mixed Dual').
MD_h	aproximação de elementos finitos para a formulação Mista Dual.
FB	formulação alternativa em Fluxo ('Flux Based') apresentada.
FB_h	aproximação de elementos finitos para a alternativa Baseada em Fluxo.
\mathcal{RT}_k	família de espaços de Raviart-Thomas de índice $k = 0, 1, 2, \dots$
\mathcal{ABF}_k	família de espaços de Arnold-Boffi-Falk de índice $k = 0, 1, 2, \dots$
X_h	denota um subespaço de elementos finitos (dimensão finita) para um espaço X .
$\hat{\cdot}$	denota funções definidas no elemento de referência $\hat{E} = [-1, 1]^2$.

Lista de símbolos

- \mathbb{Z}_+ denota o conjunto dos números inteiros não-negativos.
- \mathbb{R} denota o corpo dos números reais.
- $v|_A$ denota a restrição de uma função v a um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ contido em seu domínio.
- ∂A : fronteira ou bordo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$: para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$.
- $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$: vetor normal exterior unitário.
- $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(\mathbf{x})$: derivada fraca de multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ da função v no ponto \mathbf{x} .
- $\mathcal{L}(X, Y)$: espaço das aplicações lineares contínuas $B : X \longrightarrow Y$.
- X' : dual de um espaço de Banach X .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$: par dualidade entre X' e X .
- $\dim X_h$: dimensão do espaço X_h .
- $\text{Ker } B = \{x \in X; Bx = 0\}$: núcleo da aplicação linear $B \in \mathcal{L}(X, Y)$.
- $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$: produto interno em $L^2(\Omega)$.
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx$: produto interno em $(L^2(\Omega))^2$.
- $H^m(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega); D^\alpha q \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$, onde $m \in \mathbb{Z}_+$.
- $\|q\|_{m, \Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha q|^2 \, dx \right)^{1/2}$.
- $|q|_{m, \Omega} = \|D^m q\|$: seminorma em $H^m(\Omega)$.
- $H(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2; \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$.
- $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$: bordo contendo partes Dirichlet e Neumann.
- $H_{0,D}^1(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega); q = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}$.
- $H_{0,N}(\text{div}; \Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_N\}$.

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{div}; \Omega)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0, \Omega} + (\text{div } \mathbf{u}, \text{div } \mathbf{v})_{0, \Omega}$: produto interno em $H(\text{div}; \Omega)$.

$\hat{E} = [-1, 1]^2$: quadrado de referência no sistema de coordenadas $\xi\eta$.

\mathcal{T}_h : partição regular de Ω formada por quadriláteros E , i.e., tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{E \in \mathcal{T}_h} E$.

$h = \max_{E \in \mathcal{T}_h} \text{diam } E$: parâmetro de malha.

$\prod_E H^1(E) = \{q \in L^2(\Omega); q|_E \in H^1(E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}$: espaços H^1 por partes.

$\prod_E H(\text{div}; E) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2; \mathbf{v}|_E \in H(\text{div}; E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}$: espaços $H(\text{div})$ por partes.

$H^{1/2}(\partial A) = \{\mu \in L^2(\partial A); \exists q \in H^1(A); q = \mu \text{ sobre } \partial A\}$ munido da norma

$$\|\mu\|_{1/2, \partial A} = \inf \{\|q\|_{1, A}; q \in H^1(A), q = \mu \text{ sobre } \partial A\}.$$

$H^{-1/2}(\partial A)$: espaço dual de $H^{1/2}(\partial A)$.

$P_k(\hat{e}) = \{\mu(\xi) = \sum_{j=0}^k a_j \xi^j; \xi \mapsto \hat{\mathbf{x}} \in \hat{e}\}$: funções polinomiais de grau até k sobre uma aresta \hat{e} .

$\hat{\mathbf{V}}$: espaço vetorial de referência.

$\text{div } \mathbf{V} = \{\text{div } \mathbf{v}; \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}$: conjunto imagem do operador divergente.

C, C', C'', \dots denotam constantes em estimativas.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	18
2	MODELAGEM EM MEIOS POROSOS	23
2.1	O Meio Poroso	23
2.2	O Meio Poroso Contínuo	24
2.2.1	Porosidade e Volume Elementar Representativo	25
2.2.2	Balanço de Massa	26
2.3	Escoamento Monofásico	27
2.3.1	Regimes de Compressibilidade	28
2.4	Problema Estacionário Linear	29
2.4.1	Relação com o Problema Parabólico	30
3	FORMULAÇÕES VARIACIONAIS ABSTRATAS	32
3.1	O Problema-Modelo	32
3.2	Notações e Resultados Básicos	33
3.3	Formulações Variacionais	35
3.3.1	Métodos de Elementos Finitos	36
3.4	Formulação Mista Dual	38
3.4.1	Boa Colocação	38
4	APROXIMAÇÃO MISTA DUAL SOBRE MALHAS QUADRILATE- RAIS	40
4.1	Elementos Finitos Sobre Malhas Quadrilaterais	40
4.1.1	Mapeamento geométrico e $H(\text{div})$ -Conformidade	42
4.1.2	Os espaços de Raviart-Thomas	42
4.1.3	Otimalidade e as Famílias \mathcal{RT}_k	45
4.1.4	Os Espaços de Arnold-Boffi-Falk	47
4.1.5	Espaços Enriquecidos	47
4.2	Aproximação Mista Dual para Problemas Elípticos	49
4.2.1	Análise de Convergência	50
4.2.2	Implementação	52
4.2.2.1	Funções de Forma no Elemento de Referência	52
4.2.2.2	Sistema Linear Condensado	53
4.3	Formulação Mista Híbrida Dual (MHD)	56
4.3.1	Aproximação	57
4.3.1.1	Implementação	58

4.4	Experimentos numéricos	59
4.4.0.1	Estudo de convergência	60
5	FORMULAÇÃO BASEADA EM FLUXO	72
5.1	Definição da Formulação Baseada em Fluxo	72
5.2	Análise da Formulação	73
5.2.1	Existência e Unicidade	73
5.3	Aproximação da Velocidade	74
5.3.1	Otimidade	75
5.3.2	Análise de Erro	75
5.3.3	Implementação	76
5.4	Aproximação da Pressão	77
5.4.1	Via Projecção Local	78
5.4.2	Análise de Convergência	79
5.5	Experimentos numéricos	80
5.5.1	Experimentos com os Espaços Originais	82
5.5.1.1	Tempo Computacional	88
5.5.2	Experimentos com os Espaços Enriquecidos	90
5.6	Formulação com o Divergente Projetado	92
5.6.1	Aproximação do Fluxo	92
5.6.2	Aproximação da Pressão	93
5.6.3	Experimentos Numéricos	94
6	APLICAÇÕES	95
6.1	Escoamento com Barreiras	95
6.2	Um Quarto de Five-Spot	100
6.2.1	Meio Homogêneo	100
6.2.2	Condutividade com Salto	108
6.3	Meio Altamente Heterogêneo	115
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	120
7.1	Conclusões	120
7.2	Perspectivas	121
	REFERÊNCIAS	123
	APÊNDICES	127
	APÊNDICE A – JACOBIANO DE MALHA Q_1-DEFORMADA	128

	APÊNDICE B – CONDENSAÇÃO ESTÁTICA A NÍVEL DO ELE- MENTO	132
B.1	Biblioteca Lapack	133
B.1.1	Convenção de nomes	133
B.1.1.1	Solver	134

1 Introdução

Com o crescimento da capacidade de processamento dos computadores atuais, a modelagem computacional de problemas complexos tem ganhado destaque, em particular, no contexto da simulação de escoamentos em meios porosos. O princípio básico de métodos de balanço material é a conservação de massa sobre um domínio poroso ou volume drenado (CHEN, 2007). O processo de simulação computacional basicamente envolve quatro etapas inter-relacionadas. Primeiro, um modelo físico dos processos relevantes é elaborado a fim de descrevê-lo. Em seguida, um sistema de equações diferenciais não-lineares é considerado com respeito à boa-colocação: existência, unicidade, estabilidade e regularidade de solução. Na etapa seguinte, um modelo numérico é considerado a fim de incorporar as propriedades básicas do modelo matemático (discretização). Por fim, algoritmos (e códigos) eficientes são desenvolvidos. Estes estágios estão mutuamente relacionados de forma que às vezes são necessários ajustes entre si a fim de que as previsões do modelo possam ser precisas e confiáveis. A larga aceitação de simulações computacionais pode ser atribuída aos crescentes avanços nestas diferentes etapas: modelagem matemática, métodos numéricos, métodos para a resolução de sistemas lineares (e.g., métodos iterativos), ferramentas de visualização e avanços computacionais (CHEN, 2007).

O escoamento de um fluido num meio poroso é governado pelas equações de conservação da massa, do momento linear e da energia. Na simulação do fluxo em meios porosos, a equação do momento linear é dada numa forma *efetiva* ou *homogeneizada* (HORNUNG, 1997) através da lei de Darcy. As equações que governam o escoamento de uma única fase fluida num meio poroso saturado são dadas pela equação de conservação da massa, a lei de Darcy e, eventualmente, uma equação de estado relacionando pressão, temperatura e densidade. Neste trabalho, vamos supor regime isotérmico. No caso de gases ou fluidos ligeiramente compressíveis, teremos a presença de termos não lineares na equação de conservação da massa que, todavia, vamos supor linearizados. O caso incompressível também pode ser incluso nesta abordagem através de uma penalização, ou seja, introdução de uma compressibilidade artificial muito pequena. Neste trabalho iremos considerar apenas equações estacionárias lineares.

Em regime estacionário, a lei de Darcy, substituída diretamente na equação da conservação da massa, fornece uma equação elíptica de segunda ordem na variável escalar (pressão). Uma aproximação numérica para a solução desta equação pode ser obtida com o clássico método de Galerkin primal (CIARLET, 1978), onde a pressão é aproximada em um subespaço conforme de H^1 . Desta forma, o campo de velocidades pode ser aproximado explicitamente através da lei de Darcy, a partir do gradiente do campo de pressão aproximado. Entretanto, tal aproximação possui como inconveniente

a falta de conservação local de massa. Outras técnicas de pós-processamento podem ser encontradas, por exemplo, em [Durlinsky \(1993\)](#), [Loula, Rochinha e Murad \(1995\)](#), [Correa e Loula \(2007\)](#). Em [Correa e Loula \(2007\)](#), o método de [Loula, Rochinha e Murad \(1995\)](#), obtido pela adição do resíduo de mínimos quadrados da equação de conservação da massa à forma fraca da lei de Darcy, tem sua origem relacionada a métodos estabilizados, sendo aplicado para o caso de campos de permeabilidade anisotrópicos descontínuos. Entretanto, mesmo considerando pós-processamentos através de problemas variacionais auxiliares, as taxas de convergência assim obtidas ainda se mostram sub-ótimas.

Como o fluxo geralmente é a variável de maior interesse na avaliação dos processos de transporte associados ao escoamento, uma aproximação mais precisa faz-se necessária. O método de elementos finitos *mistos* dual ([RAVIART; THOMAS, 1977](#); [BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013](#); [ROBERTS; THOMAS, 1991](#)) surge então como uma opção mais adequada pois, além de aproximar melhor a variável do fluxo, mantém a propriedade de conservação local da massa ([MOSE et al., 1994](#)). O método é baseado numa formulação variacional envolvendo um sistema de equações de primeira ordem (geralmente, do tipo ponto de sela), onde as variáveis escalar (ou primal) e vetorial (fluxo) são aproximadas simultaneamente. A principal característica dos métodos de elementos finitos mistos consiste no uso de diferentes espaços de aproximação para a pressão e a velocidade, requerendo-se, entretanto, uma condição de compatibilidade entre os mesmos ([BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013](#); [RAVIART; THOMAS, 1977](#)). Atualmente, existem diferentes famílias de espaços de aproximação discretos que cumprem os requisitos de compatibilidade e cujas ordens de interpolação já foram analisadas. Como pioneiros, podemos citar os clássicos espaços de Raviart-Thomas ([RAVIART; THOMAS, 1977](#)), Brezzi-Douglas-Marini ([BREZZI; Douglas Jr.; MARINI, 1985](#)) e Brezzi-Douglas-Fortin-Marini ([BREZZI et al., 1987](#)). Podemos também citar, entre outros, as famílias Arnold-Boffi-Falk ([ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005](#)) e Arbogast-Correa ([ARBOGAST; CORREA, 2016](#)).

Os graus de liberdade para estes elementos são definidos de forma a cumprir a conformidade em $H(\text{div})$, ou seja, a continuidade da componente normal do fluxo precisa ser satisfeita sobre a fronteira de cada elemento. Assim, as funções de forma são construídas a partir das arestas, sendo então as ‘internas’ definidas de forma a se obter um espaço polinomial de certo grau para o fluxo e seu divergente. A introdução de graus de liberdade auxiliares, definidos sobre o bordo dos elementos constitui um procedimento útil chamado *hibridização* ([ARNOLD; BREZZI, 1985](#); [BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013](#)) pois não só permite eliminar graus de liberdade internos através de condensação estática, como também flexibiliza a escolha de funções de base (e não mais de forma). O procedimento de hibridização é justificado variacionalmente relaxando-se a hipótese de continuidade do traço normal em $H(\text{div})$ (i.e., ‘quebrando-se’ este espaço), que passa a ser imposta fracamente ([ARNOLD; BREZZI, 1985](#); [BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013](#)).

Um outro aspecto importante no método misto dual consiste na escolha da família estável de elementos $H(\text{div})$ -conformes sendo, por exemplo, os espaços de Raviart-Thomas uma opção atraente em muitos casos. Entretanto, conforme mostrado em [Arnold, Boffi e Falk \(2005\)](#), o emprego de difeomorfismos não afins resulta em perda da capacidade de aproximação, por exemplo, para as famílias usuais de espaços de Raviart-Thomas (\mathcal{RT}_k), Brezzi-Douglas-Marini (\mathcal{BDM}_k) e Brezzi-Douglas-Fortin-Marini (\mathcal{BDFM}_k) quando comparada com a ordem obtida (ótima) sobre malhas de elementos retangulares e o uso da transformação de Piola. Neste sentido, os autores fornecem condições suficientes e necessárias para que a optimalidade seja recuperada, exemplificando tais hipóteses através da definição de uma nova família: \mathcal{ABF}_k ([ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005](#)). O ponto é que o uso da transformação de Piola em malhas de elementos não-afins afeta a aproximação do operador divergente: o divergente mapeado se torna uma função racional e não mais polinomial. O uso de \mathcal{ABF}_k , em vez de \mathcal{RT}_k , apesar de recobrar a optimalidade, possui o inconveniente de introduzir uma grande quantidade de novos graus de liberdade que, por sua vez, resultam num maior uso de memória computacional.

Uma forma eficiente de contornar a perda de aproximação pelo uso de Piola em malhas quadrilaterais gerais pode ser encontrada em métodos *mimetic*¹ (de mimetismo ou imitação) ([LIPNIKOV; MANZINI; SHASHKOV, 2014](#); [BERNDT et al., 2005](#); [BERNDT et al., 2001](#); [EWING; LIU; WANG, 1999](#)) que, entretanto, ficam restritos ao contexto de baixa ordem polinomial. A principal característica destes métodos é o uso de uma integração modificada, definida através de um produto interno que, por sua vez, ‘imita’ ou carrega características do operador a ser aproximado. Em [Berndt et al. \(2005\)](#) e [Ewing, Liu e Wang \(1999\)](#), por exemplo, obtém-se superconvergência da velocidade em $H(\text{div})$ usando-se as famílias clássicas \mathcal{RT}_k e \mathcal{BDFM}_k , mesmo considerando o tensor de permeabilidade cheio (hipótese de meio heterogêneo e anisotrópico). Outra característica importante desses métodos é o fato de que usam diretamente resultados da formulação mista para conduzir a análise de erro, ou seja, a ordem de convergência efetivamente obtida é a de um problema misto equivalente ([LIPNIKOV; MANZINI; SHASHKOV, 2014](#)). Vale frisar que nos métodos de mimetismo, a transformação de Piola e suas propriedades são fortemente utilizadas. Em [Boffi e Gastaldi \(2009\)](#), esta abordagem é utilizada como motivação para a construção de uma bolha auxiliar que, adicionada a \mathcal{RT}_0 , permite recuperar quadratura exata, antes perdida por causa da transformação de Piola.

O objetivo principal deste trabalho é a introdução de uma formulação de elementos finitos baseada em fluxos para o problema de Darcy com um termo de compressibilidade. Este problema diferencial, posto através de um sistema de primeira ordem com um termo de ordem zero, modela também o problema de difusão-reação em regime estacionário.

¹ Em português o termo ‘mimético’ não é dicionarizado; a palavra mais próxima parece ser ‘mimetismo’.

Esta formulação *baseada em fluxo*, como iremos chamá-la, é inspirada no método proposto em [Murad et al. \(2013, sec. 4.1\)](#), onde a pressão é explicitada para a equação parabólica no problema de escoamento em meios compressíveis. Em [Murad et al. \(2013\)](#), a pressão é constante por partes e o fluxo é aproximado em \mathcal{RT}_0 sobre uma malha ortogonal (afim). Neste trabalho, estamos propondo um novo método através do emprego das famílias \mathcal{RT}_k e \mathcal{ABF}_k em malhas quadrilaterais quaisquer. Este método se mostra potencialmente interessante em problemas parabólicos. Nesta formulação, um problema global em $H(\text{div})$ é estabelecido para o fluxo, enquanto as pressões são pós-processadas a nível do elemento. Como veremos, a questão da degradação da aproximação do divergente do campo vetorial, quando mapeado sobre quadriláteros através da transformação de Piola, se torna crítica nesta formulação, afetando também a aproximação do fluxo. Neste sentido, discutiremos algumas soluções expostas na literatura para contornar este viés em problemas envolvendo fluxos em $H(\text{div})$ (particularmente, Darcy).

Uma variante desta formulação, em que o divergente do fluxo é projetado sobre o espaço da pressão, também será apresentada. Neste caso, o espaço polinomial da variável escalar pode ser definido de duas formas diferentes: *mapeada* (referência) ou *não-mapeada* (geométrica) ([BOFFI; GASTALDI, 2009](#)). Como, neste caso, o mapeamento geométrico do elemento de referência para o elemento físico é bilinear e devido às condições suficiente e necessárias de otimalidade apresentadas em [Arnold, Boffi e Falk \(2002\)](#), resulta que estas duas construções não são equivalentes ([BOFFI; GASTALDI, 2009](#); [BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013](#)). Portanto, o emprego da projeção sobre ambos os espaços será estudado, definindo o que chamaremos de formulação baseada em fluxo com o divergente projetado. Como veremos, tal variante é capaz de recuperar a otimalidade para a família \mathcal{RT}_k de elementos finitos sobre malhas quadrilaterais convexas

Organização do Texto

No Capítulo 2, a título de motivação, apresentamos um problema-modelo linear envolvendo um termo de compressibilidade no contexto do escoamento de Darcy em meios porosos. No Capítulo 3 apresentamos formulações variacionais abstratas e discutimos a boa-colocação das mesmas. Também introduzimos notações e conceitos importantes. No Capítulo 4 são definidas as aproximações de elementos finitos mistos duais sobre malhas quadrilaterais, sendo discutido o aspecto da otimalidade e mostrados exemplos através das famílias \mathcal{RT}_k e \mathcal{ABF}_k , incluindo versões enriquecidas. No Capítulo 5 é introduzida e analisada a formulação baseada em fluxo em $H(\text{div})$, com a definição do esquema de projeção, ou pós-processamento local, empregado para o cálculo da pressão. Uma variante da formulação baseada em fluxo que emprega a projeção do divergente no espaço da pressão é apresentada no final do Capítulo 5. Resultados numéricos são apresentados ao longo do texto, a fim de estudar características de convergência e precisão dos métodos estudados.

Em especial, no Capítulo 6 são apresentados resultados numéricos para problemas de aplicação em meios porosos com diferentes características de permeabilidade.

Por fim, no Capítulo 7 mencionamos possíveis desdobramentos e perspectivas em aberto. Um apêndice é acrescido, a fim de harmonizar e melhor elucidar o arcabouço do texto.

2 Modelagem em Meios Porosos

A nível microscópico, o processo de escoamento em meios porosos é bastante complexo pois envolve a interação de diversos fenômenos físicos em diferentes graus e escalas. Entretanto, se visto de uma escala macroscópica (por exemplo, geológica, com centenas de metros) para efeito de avaliação e tomada de decisão, o escoamento pode ser representado pelo modelo de Darcy (tipicamente envolvendo velocidades muito baixas, com as forças viscosas predominando sobre as inerciais).

A modelagem de meios porosos requer uma compreensão das propriedades do meio poroso (matriz sólida contendo os canais ou poros) e dos fluidos que o preenchem (água, óleo e gases). As propriedades de interesse do meio refletem sua capacidade de transmitir (permeabilidade) e armazenar fluidos em seus poros (porosidade). Já as propriedades de interesse do fluido incluem aquelas que dependem fortemente da pressão como: densidade, viscosidade, fator de formação de volume (meio a alta pressão e temperatura), compressibilidade, e fator de solubilidade de gás. Embora alguns desses termos e conceitos sejam típicos da descrição multifásica (e.g., saturação, pressão capilar e outros), vamos apenas mencionar aqueles presentes no caso monofásico.

Neste capítulo pretende-se contextualizar o modelo matemático cuja aproximação numérica será objeto de estudo. Partindo-se de um problema não-linear geral, sucessivas simplificações serão consideradas até nosso problema- modelo (elíptico linear) de escoamento compressível.

2.1 O Meio Poroso

Vamos introduzir alguns conceitos básicos (SOUTO, 2002; BEAR, 1972):

- Um *meio poroso* é uma porção do espaço ocupada por matéria heterogênea ou multifásica. Pelo menos uma das fases que forma o meio não é sólida, podendo ser constituída de gases e/ou líquidos. A parte sólida é chamada de *matriz sólida*. O espaço no interior do meio, que não faz parte da matriz sólida, é conhecido como espaço vazio.
- A fase sólida encontra-se distribuída pelo domínio ocupado pelo meio poroso e o sólido deve estar presente em cada volume elementar representativo (VER). Uma característica essencial de um meio poroso consiste no fato de que a *superfície específica* da matriz sólida é relativamente alta. Outra característica básica é a de

que as várias passagens conectadas, chamadas de *poros*, são relativamente estreitas (tipicamente, de tamanho entre 1 a 200 μm (CHEN, 2007)).

- Pelo menos alguns dos poros que compreendem o espaço vazio devem estar interconectados (espaço vazio *efetivo*).

Os meios porosos podem ser de origem natural: rochas, areia, esponjas, madeira, etc. Ou de origem industrial: isolantes, filtros, reatores catalíticos, concreto, etc. Os meios porosos são habitualmente classificados em *homogêneos* ou *heterogêneos* e *isotrópicos* ou *anisotrópicos*. Por homogêneos entendemos que suas propriedades não dependem da posição (invariância por translação) e é dito isotrópico quando suas propriedades não dependem da direção (invariante por rotação).

Atualmente, são numerosas as aplicações dos fenômenos de transporte em meios porosos. Podemos citar, entre outras, as seguintes (SOUTO, 2002):

Engenharia química: reatores catalíticos e leitos de partículas; filtração; secagem; cromatografia; transferência de massa através de membranas; etc.

Meio ambiente: escoamento freático; contaminação da napa freática; estocagem de rejeitos radioativos; irrigação; etc.

Geologia: mineração d'água; gestão da energia geotérmica; ciclo térmico das rochas; etc.

Mecânica: isolamento; combustão; secagem; lubrificação; fusão e solidificação de misturas binárias; armazenagem de energia solar; etc.

Petróleo: escoamento de gás e óleo nos reservatórios; recuperação de reservatórios de petróleo; produção de gás natural; etc.

Medicina: escoamento de um fluido e/ou de um soluto no interior de órgãos tais como o pulmão e os rins; etc.

2.2 O Meio Poroso Contínuo

Na clássica mecânica dos fluidos, um fluido é tratado como uma substância infinitamente divisível, um *continuum*, sem se preocupar com o comportamento individual das moléculas. Como uma consequência da hipótese do continuum, assume-se que cada propriedade do fluido possui um valor definido (univocamente) em cada ponto no espaço. Ou seja, propriedades do fluido tais como densidade, temperatura, velocidade, entre outras, são consideradas funções contínuas da posição e do tempo. Assim, a definição das propriedades do fluido está associada com a questão do volume elementar que deve ter

uma partícula ou ponto material. Uma certa propriedade ζ de um fluido num ponto \mathbf{x}_0 será definida por (BEAR, 1972):

$$\zeta(\mathbf{x}_0) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow \Delta V_0} \zeta_i,$$

sendo ΔV_i a região cujo centróide é o ponto \mathbf{x}_0 e sobre a qual ζ assume o valor ζ_i . O volume característico ΔV_0 , chamado de ponto material, é identificado como sendo o volume da partícula no ponto \mathbf{x}_0 (BEAR, 1972). Desse modo, podemos substituir um material constituído por uma coleção de moléculas no vácuo, por um continuum que preenche todo o espaço.

Portanto, a hipótese do continuum nos permite tratar o problema do escoamento de um fluido no interior de um meio poroso ao nível *microscópico* ao invés do nível *molecular*, como é típico da mecânica dos fluidos. O fluido passa a ser então considerado como um continuum e, a cada ponto do mesmo, podemos definir propriedades físicas, cinemáticas e dinâmicas das partículas do fluido. Além disso, podemos obter as equações que governam o escoamento de um fluido contínuo no interior dos espaços vazios do meio poroso como, por exemplo, as equações de Navier-Stokes. Entretanto, é praticamente impossível, com exceção de alguns casos simples, descrever de maneira exata ou numérica este comportamento no caso de geometrias complexas que delimitam o domínio do escoamento no interior da matriz sólida. Além do mais, nestes casos, mesmo as condições de contorno são de difícil especificação. Uma maneira de se contornar estas dificuldades consiste em descrever o processo de transporte via uma técnica apropriada, não mais ao nível microscópico, mas sim numa escala maior dita *nível macroscópico*. Nesse sentido, diferentes técnicas podem ser empregadas e, além da Teoria das Misturas (ATKIN; CRAINE, 1976), podemos citar as técnicas de transferência de escalas (*scaling up*) tais como a Média Volumétrica (WHITAKER, 1999) e o Método de Homogeneização (HORNUNG, 1997). Na clássica Teoria das Misturas, as equações de governo são postuladas diretamente na macroescala; enquanto nas técnicas de transferência de escala tenta-se obter uma descrição dos fenômenos na macroescala pela propagação de informações constitutivas oriundas das escalas inferiores (CORREA, 2006).

2.2.1 Porosidade e Volume Elementar Representativo

Como visto anteriormente, o essencial no conceito de meio contínuo é a noção de partícula, isto é, o volume representativo sobre o qual tomamos a média. Tal fato também é verdadeiro na passagem entre os níveis *microscópico* e *macroscópico*. Ou seja, este volume deve ser muito menor que o tamanho do domínio total do escoamento. Por outro lado, ele deve ser grande o suficiente de maneira a conter um número mínimo de poros e de forma a permitir que os valores médios tenham um significado estatístico. Assim, supondo que valha a ‘hipótese do continuum’ quanto à distribuição dos poros no meio,

podemos definir o volume elementar representativo (VER) Y_0 em torno de um ponto \mathbf{x}_0 no interior do meio. Então a porosidade volumétrica neste ponto poderá ser definida como

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \lim_{Y_i \rightarrow Y_0} \frac{\text{vol}(Y_i)}{\text{vol}(\bar{Y}_i)},$$

onde $\text{vol}(Y_i)$ é o volume do espaço contido na região $Y_i \subset \mathbb{R}^d$, cujo volume total é $\text{vol}(\bar{Y}_i)$.

Assim, a partir da introdução do conceito de porosidade no ponto \mathbf{x} e da definição do VER, nós substituímos o meio real por um continuum fictício, no qual podemos atribuir valores de qualquer propriedade a qualquer ponto.

Acima, consideramos o conceito de porosidade *efetiva*, onde apenas o espaço definido por poros interconectados é levado em conta. Além disso, a variação do volume do poro com a pressão sobre o mesmo pode ser levada em conta se considerarmos a porosidade como uma função da pressão. A porosidade depende apenas da pressão devido à compressibilidade da rocha, definida como (CHEN; HUAN; MA, 2006)

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp}. \quad (2.1)$$

Para efeito de simplificação, vamos considerar o meio poroso como sendo rígido, de forma que $\phi = \phi_0(\mathbf{x})$ é a porosidade a uma pressão de referência p_0 (por exemplo, a pressão atmosférica ou a pressão inicial no meio).

2.2.2 Balanço de Massa

Consideremos um intervalo de tempo $I = (0, T)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) a região (limitada) ocupada por um meio poroso. De forma análoga à porosidade, definimos a fração de volumes de uma fase β como

$$\phi_\beta(\mathbf{x}) = \lim_{Y_\beta^{(i)} \rightarrow Y_\beta} \frac{\text{vol}(Y_\beta^{(i)})}{\text{vol}(Y^{(i)})},$$

onde $\text{vol}(Y_\beta^{(i)})$ é a porção do volume de controle $Y^{(i)}$ ocupada pela fase β . Sendo ainda $m_\beta^{(i)}$ a massa da fase β contida em $Y_\beta^{(i)}$, definimos sua massa específica aparente por

$$\rho_\beta(\mathbf{x}, t) = \lim_{Y_\beta^{(i)} \rightarrow Y_\beta} \frac{m_\beta^{(i)}}{\text{vol}(Y_\beta^{(i)})},$$

ou, simplesmente,

$$\rho_\beta(\mathbf{x}, t) = \frac{m_\beta}{\text{vol}(Y)}$$

que, entretanto, deve ser entendida no sentido limite de meios contínuos.

Para um dado volume de controle Y , podemos também definir a saturação de uma fase β (notação: S_β) sobre o mesmo como sendo a fração do espaço vazio (poros)

ocupado pela fase. Tal conceito nos permite considerar a superposição das diferentes fases sobre todo o domínio poroso Ω . Assim, a massa específica intrínseca, ou *real*, pode ser escrita como

$$\rho_\beta^r = \frac{m_\beta}{Y_\beta} = \left(\frac{m_\beta}{Y}\right)\left(\frac{Y}{Y_\beta}\right) = \frac{\rho_\beta}{\phi_\beta},$$

ou seja, em função da fração de volumes. Por conseguinte, a forma pontual do balanço de massa para uma fase β fica dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\beta^r \phi_\beta) + \text{div}(\rho_\beta^r \phi_\beta \mathbf{v}_\beta^r) + r_\beta = f_\beta, \quad (2.2)$$

em que \mathbf{v}_β^r é a velocidade de *percolação* da fase β , r_β é um termo envolvendo possíveis reações (tais como troca de massa entre as fases) (PINEDO, 2016) e o termo f_β representa possíveis fontes/sorvedouros de massa da fase β definidos sobre todo o domínio.

Para o fechamento de um modelo de escoamento, precisamos considerar, além do balanço de massa, equações constitutivas para determinar a velocidade de percolação e equações de estado relacionando massa específica, pressão e temperatura. Nosso próximo passo de simplificação consistirá em considerar o escoamento isotérmico monofásico em um meio poroso rígido. Em especial, a hipótese de regime isotérmico nos permite desconsiderar o balanço de energia.

2.3 Escoamento Monofásico

Para o caso em que um único fluido, de viscosidade dinâmica μ , satura os poros do meio poroso, temos apenas uma equação para o balanço de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho\mathbf{u}_D) + r(\rho, \mathbf{x}, t) = f, \quad (2.3)$$

em que ρ passa a denotar a massa específica real e $\mathbf{u}_D := \phi\mathbf{v}$ uma velocidade efetiva do escoamento. A equação (2.3) possui $1 + d$ variáveis (uma de estado e mais d cinemáticas). Assim, a menos de um contorno e dados iniciais, para ‘fechar’ o modelo precisamos de uma equação de estado $\rho = \rho(p)$ e mais uma relação constitutiva $\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D(p)$ ou $\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_D(\rho)$. Neste caso, a relação constitutiva para a velocidade corresponde à conservação do momento linear e é dada pela lei de Darcy

$$\mathbf{u}_D = -\frac{\mathbf{K}}{\mu}(\nabla p - \rho g \nabla z), \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$ é o tensor de permeabilidade absoluta do meio poroso, μ é a viscosidade do fluido, g é a magnitude da aceleração da gravidade e z é a altura. Já a equação de estado $\rho = \rho(p)$ pode ser obtida através da consideração da compressibilidade isotérmica

$$c_f := \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T. \quad (2.5)$$

Considerando o meio como sendo rígido, teremos $\phi = \phi(\mathbf{x})$ e (2.3) pode ser reescrita como

$$\rho\phi c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}_D) + r(\rho, \mathbf{x}, t) = f. \quad (2.6)$$

Temos, portanto, um sistema fechado de equações nas incógnitas \mathbf{u}_D , p e ρ :

Problema Compressível: Dadas a porosidade ϕ e a permeabilidade k do meio, a viscosidade μ do fluido, uma equação de estado $\rho = \rho(p)$ envolvendo uma compressibilidade c_f , encontrar ρ , p e \mathbf{u}_D tais que

$$c_f \phi \rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}_D) + r(\rho, \mathbf{x}, t) = f, \quad \text{em } \Omega \times I, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u}_D = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - \rho g \nabla z), \quad \text{em } \Omega \times I, \quad (2.8)$$

satisfazendo condições de contorno e iniciais apropriadas.

Este sistema pode também ser escrito em termos de uma variável de estado (a pressão, por exemplo). O modelo resultante será chamado de formulação *primal*.

2.3.1 Regimes de Compressibilidade

Vamos comentar brevemente sobre alguns casos envolvendo o regime de compressibilidade do fluido no meio poroso.

Fluido com Compressibilidade Constante

Neste caso, podemos integrar diretamente a equação (2.5) e obter

$$\rho(p) = \rho_0 \exp(c_f(p - p_0)), \quad (2.9)$$

onde ρ_0 é a massa específica a uma pressão de referência p_0 .

Fluido ligeiramente compressível

Usando uma expansão em série de Taylor, ρ dada em (2.9) pode ser reescrita como

$$\rho(p) = \rho_0[1 + c_f(p - p_0)] + \mathcal{O}(c_f^2(p - p_0)^2). \quad (2.10)$$

Assim, até primeira ordem, temos a aproximação linear em torno de p_0

$$\rho(p) \approx \rho_0[1 + c_f(p - p_0)], \quad (2.11)$$

que será uma aproximação tão boa quanto menor for c_f .

Gases

No caso de gases não rarefeitos (de forma que ainda possa valer a hipótese do continuum), a compressibilidade c_g geralmente é suposta não constante, além de possuir maior magnitude. Neste caso podemos usar a relação (CHEN; HUAN; MA, 2006)

$$\rho = \frac{pW}{ZRT}, \quad (2.12)$$

onde W é o peso molecular, $Z = Z(p, T)$ é o fator de compressibilidade (ou volume de formação) do gás, R a constante universal dos gases e T a temperatura. O fator de volume de formação Z é definido pela razão

$$Z(p, T) = \frac{\rho_S}{\rho(p, T)}, \quad (2.13)$$

onde ρ_S denota a massa específica em condições normais (273.15K e 101325 Pa). Substituindo (2.12) em (2.5) resulta (com $c_g = c_f$):

$$c_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p} \Big|_T. \quad (2.14)$$

Para um gás puro, o termo gravitacional é pequeno e pode ser desconsiderado no problema compressível (CHEN; HUAN; MA, 2006). Assim, podemos usar a equação de estado (2.12), com c_g dado em (2.14), no problema compressível, resultando num problema transiente não-linear.

2.4 Problema Estacionário Linear

Como um passo seguinte de simplificação, consideremos o problema compressível em regime estacionário sem efeitos gravitacionais

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}_D) + r(\rho, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \text{em } \Omega, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}_D = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad \text{em } \Omega. \quad (2.16)$$

A fim de obtermos um problema-modelo linear, vamos definir duas novas variáveis

$$\mathbf{u} := \rho \mathbf{u}_D \quad \text{e} \quad \psi(p) := \int_{p_0}^p \rho(s) ds, \quad (2.17)$$

onde \mathbf{u} é o fluxo de Darcy e, para o pseudopotencial ψ , supondo ρ diferenciável, teremos

$$\psi'(p) = \rho \quad \text{e} \quad \nabla \psi = \rho(p) \nabla p. \quad (2.18)$$

Assim, o sistema (2.15)-(2.16) pode ser reescrito como

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) + r(\psi', \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \text{em } \Omega, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla \psi, \quad \text{em } \Omega. \quad (2.20)$$

Por fim, para que o termo envolvendo a função r seja linear em ψ , podemos supor que

$$r(\psi', \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) \int_0^{\psi} \zeta(s) ds,$$

onde ζ é uma função positiva, suave e crescente, e $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, com $0 < \alpha_{min} \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq \alpha_{max}$. Tomando uma aproximação linear para a função ζ acima, podemos considerar r da forma

$$r(\psi', \mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\psi(\rho).$$

A segunda expressão em (2.18), juntamente com a definição da compressibilidade, podem ser usadas para escrever explicitamente ρ em função de ψ . Por exemplo, no caso de fluido com compressibilidade constante, teremos

$$\nabla \rho = c_f \rho \nabla p = c_f \nabla \psi. \quad (2.21)$$

Assim, supondo $\rho(p)$ diferenciável em Ω , decorre a seguinte aproximação de Taylor (de primeira ordem) em torno do ponto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &\approx \rho(\mathbf{x}_0) + \nabla \rho(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &= \rho(\mathbf{x}_0) + c_f \nabla \psi(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

onde

$$c_f = \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T.$$

2.4.1 Relação com o Problema Parabólico

A presença de um termo de ordem zero no problema elíptico estacionário também pode decorrer de uma semidiscretização temporal do problema parabólico

$$\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}) = f(t, \mathbf{x}), \quad \Omega \times I, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla p, \quad \Omega \times I, \quad (2.23)$$

$$p(0, \mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}), \quad \Omega, \quad (2.24)$$

onde $I = (0, T)$ é um intervalo de interesse e $\beta \in L^\infty(\Omega)$. Dado um passo de tempo $\Delta t = T/N$, consideremos uma partição uniforme $t_i = (i-1)\Delta t$, $i = 1, 2, \dots, N+1$ do intervalo I . Segue que, por exemplo, usando o método de Euler *implícito*, teremos

$$\frac{\beta}{\Delta t} (p(t_{n+1}, \mathbf{x}) - p(t_n, \mathbf{x})) + \operatorname{div}(\mathbf{u})(t_{n+1}, \mathbf{x}) = f(t_{n+1}, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\Delta t). \quad (2.25)$$

Considerando $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(t_i, \mathbf{x})$, $p^{(i)}(\mathbf{x}) \approx p(t_i, \mathbf{x})$ e definindo $\alpha := \frac{\beta}{\Delta t}$, a expressão (2.25) fica

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(n+1)} + \alpha(\mathbf{x})p^{(n+1)} = f^{(n+1)}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x})p^{(n)}. \quad (2.26)$$

Definindo ainda $\bar{f}(\mathbf{x}) := f^{(n+1)}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{x})p^{(n)}$ e omitindo o índice de passo de tempo, podemos enfim reescrever a equação anterior como

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{x})p = \bar{f}(\mathbf{x}), \quad \text{em } \Omega. \quad (2.27)$$

Além disso, a lei de Darcy é dada por

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = -\mathbf{K}\nabla p^{(n+1)}, \quad (2.28)$$

onde \mathbf{K} é a condutividade hidráulica e, considerando $0 < \beta_0 \leq \beta(\mathbf{x}) < \beta_1$ para constantes β_0 e β_1 , decorre também que $0 < \frac{\beta_0}{\Delta t} \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq \frac{\beta_1}{\Delta t}$.

Assim, dados p_0 e condições de contorno, o sistema (2.27)–(2.28) pode ser evoluído para fornecer aproximações $(\mathbf{u}^{(n+1)}, p^{(n+1)})$ de ordem $\mathcal{O}(\Delta t)$ para o problema (2.22)–(2.24).

3 Formulações Variacionais Abstratas

Neste capítulo, após introduzirmos alguns conceitos e notações, apresentaremos resultados bem estabelecidos sobre formulações variacionais abstratas para problemas lineares. Nosso principal objetivo consiste em enunciar a boa-colocação dos diferentes problemas variacionais, envolvendo diferentes espaços de funções e diferentes formulações.

3.1 O Problema-Modelo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio aberto limitado com fronteira Lipschitz contínua Γ de normal exterior \mathbf{n} . Consideremos também a divisão $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, onde Γ_D e Γ_N denotam, respectivamente, partes disjuntas, onde condições de Dirichlet e Neumann poderão ser prescritas.

Vamos considerar o seguinte problema elíptico linear (motivado pela Seção 2.4) dado por

$$\alpha(\mathbf{x})p - \operatorname{div}(\mathbf{K}(\mathbf{x})\nabla p) = f(\mathbf{x}), \quad \text{em } \Omega, \quad (3.1)$$

na forma de uma equação diferencial parcial de segunda ordem ou, como o sistema de primeira ordem

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{x})p = f(\mathbf{x}), \quad \text{em } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x})\nabla p, \quad \text{em } \Omega, \quad (3.3)$$

com condições de contorno

$$p = p_D, \quad \text{sobre } \Gamma_D; \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_N; \quad (3.5)$$

onde estamos redefinindo $\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{k(\mathbf{x})\mathbf{I}}{\mu}$ como sendo um tensor simétrico envolvendo características do meio e do fluido, chamado *condutividade hidráulica*. Além disso, vamos supor que existem constantes positivas α_0 e α_1 tais que

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha(\mathbf{x}) \leq \alpha_1, \quad \text{em } \Omega. \quad (3.6)$$

Vamos assumir que \mathbf{K} é um tensor simétrico e positivo-definido, i.e., existem constantes positivas k_0 e k_1 tais que

$$k_0 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} \leq k_1 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2. \quad (3.7)$$

Conseqüentemente, existe $\mathbf{K}^{-1} =: \boldsymbol{\Lambda}$ para o qual também vale que

$$\lambda_0 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} \leq \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\xi} \leq \lambda_1 \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}, \quad (3.8)$$

para todo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$, onde λ_0 e λ_1 são constantes positivas.

3.2 Notações e Resultados Básicos

A fim de introduzirmos algumas formulações variacionais, vamos antes apresentar alguns conceitos e resultados básicos.

Num espaço de Hilbert (real) H qualquer, com produto interno $b(\cdot, \cdot)$, vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|b(u, v)| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

onde $\|u\|_H^2 := b(u, u)$ denota a norma induzida pelo produto interno.

Denota-se por $L^2(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ quadrado integráveis, munido do seguinte produto interno e norma induzida

$$(p, q)_0 := \int_{\Omega} pq \, dx \quad \text{e} \quad \|\cdot\|^2 = \int_{\Omega} |\cdot|^2 \, dx.$$

Por vezes, também será usada a notação $\|\cdot\|_{0,\Omega}$, ou $\|\cdot\|_0$ quando o domínio Ω ficar subentendido.

Para um dado inteiro $m \geq 0$, vamos considerar o seguinte espaço de Hilbert

$$H^m(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega); D^\alpha q \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ é um vetor de inteiros não negativos (multi-índices), com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ e $D^\alpha(\cdot) := \frac{\partial^{|\alpha|}(\cdot)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$ denota a derivada fraca (no sentido das distribuições). O produto interno, e sua norma induzida, em $H^m(\Omega)$ serão denotados, respectivamente, por

$$(p, q)_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha p D^\alpha q \, dx, \quad \|q\|_m := (q, q)_{m,\Omega}^{1/2}.$$

A seminorma em $H^m(\Omega)$ será denotada por $|q|_{m,\Omega} := \|D^m q\|$. Com isso, em particular, estaremos denotando $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$ e será de interesse o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ formado pelas (classes de) funções integráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que ∇u existe (no sentido fraco) e pertence a $L^2(\Omega)$. Trata-se de um espaço de Hilbert com o produto interno $(u, v)_1 := (u, v)_0 + (\nabla u, \nabla v)_0$, cuja norma induzida será denotada por $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ ou, apenas $\|\cdot\|_1$ quando o domínio Ω ficar subentendido.

Analogamente, para o caso de campos vetoriais com domínio em Ω , define-se também o seguinte espaço

$$\mathbf{H}^m(\text{div}) = \mathbf{H}^m(\text{div}; \Omega) := \{\mathbf{v} \in (H^m(\Omega))^2; \text{div } \mathbf{v} \in H^m(\Omega)\}.$$

Em particular, vamos denotar $H(\text{div}) = H(\text{div}; \Omega) := \mathbf{H}^0(\text{div}; \Omega)$, ou seja,

$$H(\text{div}; \Omega) := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2; \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}; \quad (3.9)$$

sendo este um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{div}; \Omega)} := (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0, \Omega} + (\text{div } \mathbf{u}, \text{div } \mathbf{v})_{0, \Omega}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega), \quad (3.10)$$

cuja norma induzida será denotada por $\|\cdot\|_{H(\text{div}; \Omega)}$.

A fim de ajustar contornos, dois particulares subespaços fazem-se necessários

$$H_{0,D}^1(\Omega) := \{q \in H^1(\Omega); q = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\}, \quad (3.11)$$

e

$$H_{0,N}(\text{div}; \Omega) := \{\mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_N\}, \quad (3.12)$$

sendo as igualdades definidas no sentido dos respectivos traços (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013).

Seja \mathcal{T}_h uma partição regular de Ω (cf. apêndice A) formada por quadriláteros E , i.e., tal que $\bar{\Omega} = \bigcup_{E \in \mathcal{T}_h} E$, e indexada pelo parâmetro $h = \max_{E \in \mathcal{T}_h} \text{diam } E$. Consideremos os espaços ‘quebrados’

$$X(\Omega) = \prod_E H^1(E) := \{q \in L^2(\Omega); q|_E \in H^1(E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{Y}(\Omega) = \prod_E H(\text{div}; E) := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2; \mathbf{v}|_E \in H(\text{div}; E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.14)$$

com suas respectivas normas

$$\|\cdot\|_{X(\Omega)}^2 := \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\cdot\|_{1,E}^2, \quad (3.15)$$

$$\|\cdot\|_{\mathbf{Y}(\Omega)}^2 := \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \|\cdot\|_{H(\text{div}; E)}^2. \quad (3.16)$$

Dadas duas funções $q \in X(\Omega)$ e $\mathbf{v} \in \mathbf{Y}(\Omega)$, temos as seguintes caracterizações:

Proposição 1. $q \in H_{0,D}^1(\Omega)$ se, e somente se,

$$\sum_E \int_{\partial E} q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_{0,N}(\text{div}; \Omega).$$

Analogamente, $\mathbf{v} \in H_{0,N}(\text{div}; \Omega)$ se, e somente se,

$$\sum_E \int_{\partial E} q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0, \quad \forall q \in H_{0,D}^1(\Omega).$$

Demonstração. Vide Boffi, Fortin e Brezzi (2013, pp. 57). □

3.3 Formulações Variacionais

Vamos introduzir um problema variacional abstrato e fornecer condições que garantam a existência e unicidade de solução para o mesmo. Dado um espaço de Banach qualquer \mathcal{V} , denotamos por \mathcal{V}' seu dual topológico, com a norma $\|v'\|_{\mathcal{V}'} = \sup_{v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}} \frac{|\langle v', v \rangle|}{\|v\|_{\mathcal{V}}}$.

Sejam \mathcal{U} e \mathcal{V} espaços de Banach reais. Consideremos o seguinte problema abstrato

Problema UV: Dado $F \in \mathcal{V}'$, encontrar $u \in \mathcal{U}$ tal que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3.17)$$

onde B é uma forma bilinear contínua sobre $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Acima, \mathcal{U} é chamado espaço *solução* e \mathcal{V} é dito espaço das funções *teste*. O problema (3.17) é dito *bem-posto* (no sentido de Hadamard) se o mesmo admite uma única solução, a qual depende continuamente dos dados. Além disso, existe $c > 0$ tal que, para toda $F \in \mathcal{V}'$, vale a estimativa de estabilidade

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq c \|F\|_{\mathcal{V}'}. \quad (3.18)$$

A boa-colocação para o problema variacional linear (3.17) pode ser vista através do seguinte resultado (BABUSKA, 1971)

Teorema 1. *Sejam \mathcal{U} e \mathcal{V} espaços de Banach reais, com \mathcal{V} reflexivo. Se $F \in \mathcal{V}'$ e $B : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear:*

(i) *Contínua, i.e., existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$|B(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathcal{U}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3.19)$$

(ii) *Coerciva, i.e., existem constantes $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$ tais que*

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \frac{|B(u, v)|}{\|u\|_{\mathcal{U}}} \geq \alpha_1 \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3.20)$$

$$\sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{|B(u, v)|}{\|v\|_{\mathcal{V}}} \geq \alpha_2 \|u\|_{\mathcal{U}}, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad (3.21)$$

então o **Problema UV** possui uma única solução $u \in \mathcal{U}$ e vale

$$\|u\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{\|F\|_{\mathcal{V}'}}{\alpha_2}. \quad (3.22)$$

Se os espaços solução e teste são idênticos, teremos um caso mais simples.

Problema V: Dado $F \in \mathcal{V}'$, encontrar $u \in \mathcal{V}$ tal que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3.23)$$

Em particular, quando a forma bilinear B é simétrica e positiva, o problema (3.23) pode ser interpretado como um problema de minimização para o funcional $J(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - F(v)$. Ou seja, u resolve (3.23) se, e somente se, u minimiza J sobre \mathcal{V} .

Um caso particular útil é obtido quando consideramos \mathcal{V} no problema acima como sendo um espaço de Hilbert. Neste caso, o problema variacional é analisado pelo próximo resultado.

Lema 1 (Lax-Milgram). *Dado um espaço de Hilbert H , seja $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear*

i) *limitada, i.e., existe uma constante $M > 0$ tal que*

$$|B(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H; \quad (3.24)$$

ii) *H -elíptica, i.e., existe uma constante $\beta > 0$ tal que*

$$B(v, v) \geq \beta \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H. \quad (3.25)$$

Então, para todo funcional $F \in H'$, existe um único $u \in H$ que satisfaz (3.23). Além disso, vale a estimativa de estabilidade

$$\|u\|_H \leq \frac{\|F\|_{H'}}{\beta}.$$

3.3.1 Métodos de Elementos Finitos

A ideia fundamental por trás de métodos de Galerkin consiste em substituir os espaços \mathcal{U} e \mathcal{V} no **Problema UV** por espaços de dimensão finita \mathcal{U}_h (Solução) e \mathcal{V}_h (Teste) conformes. A aproximação é dita conforme se $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$; e é dita não-conforme caso contrário. Por sua vez, a teoria de elementos finitos se encarrega da questão de como construir tais espaços usando ferramentas e recursos de interpolação.

Em particular, consideremos o **Problema V**, assumindo que o espaço \mathcal{V} seja de Hilbert e sejam também satisfeitas as demais hipóteses do Lema de Lax-Milgram para a forma bilinear B e o funcional F . Dado um espaço $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ de elementos finitos, consideremos o correspondente problema discreto (método de Galerkin *padrão*)

Problema \mathcal{V}_h : *Encontrar $u_h \in \mathcal{V}_h$ tal que*

$$B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad (3.26)$$

Se a solução exata u do **Problema V** também satisfaz o problema aproximado (3.26) acima, dizemos que a aproximação é *consistente*. Como consequência imediata da consistência, temos o resultado de *ortogonalidade*

$$B(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad (3.27)$$

Com o emprego de aproximações conformes no método de Galerkin, temos automaticamente a transferência das propriedades de continuidade e elipticidade do problema contínuo para o discreto. Ou seja, a existência e unicidade da solução aproximada são herdadas do problema em dimensão infinita. Além disso, da consistência variacional do **Problema Vh**, decorre o seguinte resultado de limitação para o erro

Lema 2 (Céa). *Satisfeitas as hipóteses do Lema de Lax-Milgram, seja u_h solução do problema aproximado **Vh**. Então vale a seguinte estimativa de erro*

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M}{\beta} \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}}, \quad (3.28)$$

onde M é a constante de continuidade e β a constante de elipticidade no Lema 1.

Para provar este resultado, basta ver que a ortogonalidade implica

$$B(u - u_h, u - u_h) = B(u - u_h, u - v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h,$$

e usar as propriedades de continuidade e elipticidade da forma bilinear B . Esta estimativa pode ser melhorada se B é simétrica pois, neste caso, podemos considerar a norma da energia $\|u\|_e^2 := B(u, u)$, a qual é equivalente à norma de \mathcal{V} :

$$\beta^{1/2} \|v\|_{\mathcal{V}} \leq \|v\|_e \leq M^{1/2} \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3.29)$$

Além disso, devido à ortogonalidade, teremos que u_h é a melhor aproximação de $u \in \mathcal{V}$, ou seja,

$$\|u - u_h\|_e \leq \|u - v_h\|_e, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad (3.30)$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \beta \|u - u_h\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq B(u - u_h, u - u_h) \\ &= \|u - u_h\|_e^2 \\ &\leq \|u - v_h\|_e^2 \\ &\leq M \|u - v_h\|_{\mathcal{V}}^2, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \end{aligned}$$

Logo, sendo B simétrica, teremos que

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{V}} \leq \left(\frac{M}{\beta}\right)^{1/2} \|u - v_h\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad (3.31)$$

Formulação Variacional Primal

Vamos apenas comentar esta formulação, caracterizada pela conformidade H^1 onde, neste caso, usando que $p_D = 0$ sobre $\partial\Omega$, o espaço de Hilbert (nas condições do lema anterior) é dado por

$$H_0^1(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega); p = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Assumindo $p_D = 0$ e multiplicando a equação (3.1) por uma função teste $v \in H_0^1(\Omega)$, integrando sobre o domínio e usando integração por partes, temos:

Formulação Primal: Dada $f \in L^2(\Omega)$, encontrar $p \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\mathbf{K}\nabla p, \nabla q) + (\alpha p, q) = (f, q), \quad \forall q \in H_0^1(\Omega). \quad (3.32)$$

A existência e unicidade de solução para esta formulação decorrem diretamente do lema de Lax-Milgram (JOHNSON, 2009; CIARLET, 1978).

3.4 Formulação Mista Dual

No caso da formulação Mista Dual, o par de espaços para as funções teste é dado por

$$\mathcal{V} = H(\text{div}; \Omega) \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} = L^2(\Omega). \quad (3.33)$$

Neste caso, multiplicando a equação $\Lambda \mathbf{u} = -\nabla p$ por uma função teste $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ e a equação (3.2) por uma $q \in \mathcal{Q}$, integrando sobre Ω e usando integração por partes juntamente com a condição de contorno, obtemos uma formulação fraca em $H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$:

Formulação Mista Dual: Dada $f \in \mathcal{Q}$, encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ e $p \in \mathcal{Q}$ tais que

$$(\Lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \text{div } \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.34)$$

$$(\text{div } \mathbf{u}, q) + (\alpha p, q) = (f, q), \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \quad (3.35)$$

3.4.1 Boa Colocação

Consideremos as formas bilineares limitadas $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ e $c : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\Lambda \mathbf{u}, \mathbf{v});$$

$$b(\mathbf{v}, p) := -(p, \text{div } \mathbf{v});$$

$$c(p, q) := (\alpha p, q).$$

Assim, o problema (3.34)-(3.35) pode ser reescrito na forma variacional abstrata de ponto de sela: Dada $f \in \mathcal{Q}'$, encontrar $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (3.36)$$

$$b(\mathbf{u}, q) - c(p, q) = -(f, q), \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \quad (3.37)$$

Sejam $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{Q}')$ e $C \in \mathcal{L}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ os respectivos operadores lineares induzidos pelas formas bilineares, ou seja, definidos como

$$\begin{aligned}\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}; \\ \langle B\mathbf{v}, q \rangle_{\mathcal{Q}' \times \mathcal{Q}} &= b(\mathbf{v}, q), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, q \in \mathcal{Q}; \\ \langle Cp, q \rangle_{\mathcal{Q}' \times \mathcal{Q}} &= c(p, q), \quad \forall p, q \in \mathcal{Q};\end{aligned}$$

sendo que o operador transposto $B^T : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{V}'$ satisfaz

$$\langle B^T q, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = b(\mathbf{v}, q), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \forall q \in \mathcal{Q}.$$

As seguintes hipóteses para a boa-colocação do problema-modelo podem então ser verificadas (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013).

(H1) As formas bilineares a , b e c são contínuas.

(H2) A imagem do operador B é fechada em \mathcal{Q}' .

(H3) As formas bilineares a e c são simétricas semidefinidas positivas, i.e.,

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \text{e} \quad c(q, q) \geq 0, \quad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

(H4) a é coerciva sobre $\text{Ker}B$ e c é coerciva sobre $\text{Ker}B^T$, ou seja, existem constantes positivas α_0 e γ_0 tais que

$$\begin{aligned}\alpha_0 \|\mathbf{v}_0\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq a(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0), \quad \forall \mathbf{v}_0 \in \text{Ker}B, \\ \gamma_0 \|q_0\|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq c(q_0, q_0), \quad \forall q_0 \in \text{Ker}B^T.\end{aligned}$$

(H5) (Condição inf-sup) Existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\inf_{q \in (\text{Ker}B^T)^\perp} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|q\|_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}} = \inf_{\mathbf{v} \in (\text{Ker}B)^\perp} \sup_{q \in \mathcal{Q}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|q\|_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}} = \beta > 0.$$

Assim, temos o seguinte resultado de boa-colocação para o problema de ponto de sela (3.36)-(3.37) (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013, pp. 241).

Teorema 2. *Suponhamos satisfeitas as hipóteses (H1)-(H5). Então dada $f \in \mathcal{Q}$, o problema (3.36)-(3.37) possui uma única solução $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$, a qual satisfaz*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} + \|p\|_{\mathcal{Q}} \leq C \|f\|_{\mathcal{Q}}, \quad (3.38)$$

onde C depende apenas das constantes de estabilidade α_0 , γ_0 , β e também das constantes de continuidade $\|a\|$ e $\|c\|$.

4 Aproximação Mista Dual Sobre Malhas Quadrilaterais

Neste capítulo discutimos a aproximação de elementos finitos mista dual sobre malhas quadrilaterais gerais. Nosso enfoque será sobre a capacidade de aproximação de duas famílias *estáveis* de elementos finitos mistos sobre malhas quadrilaterais afins e não-afins. Inicialmente, enunciamos alguns resultados básicos sobre a aproximação de funções em $H(\text{div})$. Por fim, através de tabelas e gráficos, pretendemos fornecer uma validação de convergência para um exemplo cuja solução é regular. Os resultados apresentados neste capítulo fornecem uma revisão de importantes resultados da literatura.

4.1 Elementos Finitos Sobre Malhas Quadrilaterais

Esta seção pretende resumir alguns resultados principais sobre interpolação em $H(\text{div})$, assim como introduzir o problema da perda de aproximação decorrentes do uso do mapeamento de Piola. Maiores detalhes, como demonstrações, podem ser vistos no Capítulo 2 de [Boffi, Fortin e Brezzi \(2013\)](#).

Especialmente no contexto de malhas quadrilaterais regulares, consideramos espaços de dimensão finita definidos como produtos tensoriais (ou diretos) de bases unidimensionais ([PRENTER, 1975](#)). Para definir este conceito, suponha que $X = \mathcal{C}[a, b]$ e $Y = \mathcal{C}[c, d]$ denotam espaços de funções reais contínuas sobre os intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente. Sejam

$$X_N = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\} \quad \text{e} \quad Y_M = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M\}$$

subespaços N e M -dimensionais de X e Y , respectivamente. Então definimos o espaço produto tensorial

$$X_N \otimes Y_M := \text{span}\{\phi_i(x)\psi_j(y); 1 \leq i \leq N \text{ e } 1 \leq j \leq M\}. \quad (4.1)$$

Definido desta forma, i.e. contendo todas as combinações lineares possíveis das funções de base, $X_N \otimes Y_M$ é um subespaço de dimensão NM . Além disso, o mesmo é um subespaço de $\mathcal{C}([a, b] \times [c, d])$ sendo composto pelas somas de produtos de funções contínuas sobre o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ ([PRENTER, 1975](#)).

Denotar por $\hat{E} = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ um (elemento) quadrado de referência, cujos pontos têm coordenadas $\hat{\mathbf{x}} = (\xi, \eta)$. Considerando a definição de elementos finitos sobre quadriláteros ([CIARLET, 1978](#); [JOHNSON, 2009](#)), vamos utilizar a notação a seguir.

- Sendo k_1 e k_2 inteiros não-negativos,

$$P_{k_1, k_2}(\hat{E}) := \left\{ \hat{q}(\xi, \eta) = \sum_{\substack{i \leq k_1 \\ j \leq k_2}} a_{ij} \xi^i \eta^j \right\},$$

ou ainda,

$$P_{k_1, k_2}(\hat{E}) := \text{span}\{\xi^i; 0 \leq i \leq k_1\} \otimes \text{span}\{\eta^j; 0 \leq j \leq k_2\}.$$

Ou seja, é o espaço dos polinômios de grau $\leq k_1$ em ξ e $\leq k_2$ em η com dimensão $(1 + k_1)(1 + k_2)$.

- Com isso, também definimos o espaço dos polinômios de grau $\leq k$ em cada variável

$$Q_k(\hat{E}) := P_{k, k}(\hat{E}),$$

com dimensão $(1 + k)^2$.

- O espaço de Raviart-Thomas de ordem $k = 0, 1, 2, \dots$ é definido localmente por

$$\mathcal{RT}_k(\hat{E}) := P_{k+1, k}(\hat{E}) \times P_{k, k+1}(\hat{E}),$$

ou ainda,

$$\mathcal{RT}_k = \text{span} \left\{ (\xi^i \eta^j, 0); \substack{0 \leq i \leq k+1 \\ 0 \leq j \leq k} \right\} \cup \text{span} \left\{ (0, \xi^i \eta^j); \substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq k+1} \right\},$$

tendo dimensão $2(k + 1)(k + 2)$.

- $\mathcal{S}_k(\hat{E})$ é o subespaço de $\mathcal{RT}_k(\hat{E})$ obtido substituindo-se o par de vetores $(\xi^{k+1} \eta^k, 0)$ e $(0, \xi^k \eta^{k+1})$ por $(\xi^{k+1} \eta^k, -\xi^k \eta^{k+1})$ na base.
- \mathcal{R}_k é o subespaço de $Q_{k+1}(\hat{E})$ retirando-se da base o monômio $\xi^{k+1} \eta^{k+1}$.
- Definimos também o espaço polinomial *total* como sendo

$$P_k(\hat{E}) = \left\{ \hat{q}(\xi, \eta) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{ij} \xi^i \eta^j \right\},$$

o qual, no caso bidimensional, tem dimensão $\frac{1}{2}(k + 1)(k + 2)$.

- $\mathbf{H}^k(\hat{E}) := H^k(\hat{E})^2$.

Note que \mathcal{S}_k e \mathcal{R}_k são subespaços de codimensão 1.

4.1.1 Mapeamento geométrico e $H(\text{div})$ -Conformidade

Seja $\{\mathcal{T}_h\}$ uma família de partições *regulares* de Ω em elementos quadrilaterais E . Vamos supor que cada elemento $E \in \mathcal{T}_h$ pode ser obtido como $E = \mathbf{F}_E(\hat{E})$, onde \hat{E} é um elemento de referência e \mathbf{F}_E uma aplicação suave invertível (mapeamento geométrico), podendo ser afim ou bilinear. Se $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in L^2(\hat{E})^2$, a transformação $\hat{v}_i := \hat{v}_i \circ \mathbf{F}_E^{-1}$, $i = 1, 2$, não preserva componentes normais e logo não mapeia $H(\text{div}; \hat{E})$ em $H(\text{div}; E)$. Para isso faz-se necessário introduzir a *transformação de Piola*.

Para um mapeamento geométrico $F_E : \hat{E} \rightarrow E$, a transformação (contravariante) de Piola $\mathbf{P}_{\mathbf{F}_E} : L^2(\hat{E})^2 \rightarrow L^2(E)^2$ é definida por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{v}})(\mathbf{x}) := \frac{1}{J_E(\hat{\mathbf{x}})} D\mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) \circ \mathbf{F}_E^{-1}, \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{x} = \mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}})$ e $J_E := |\det(D\mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}}))|$, sendo $D\mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}})$ a matriz jacobiana do mapeamento \mathbf{F}_E . Se $\hat{\mathbf{v}} \in C^1(\hat{E})^2$, então $\mathbf{v} = \mathbf{P}_{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{v}} \in C^1(E)^2$ e vale

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\hat{\text{div}} \hat{\mathbf{v}}}{J_E}.$$

Uma série de propriedades desta transformação podem ser verificadas em [Boffi, Fortin e Brezzi \(2013\)](#). A transformação de Piola é adequada para transformações envolvendo campos vetoriais em $H(\text{div}; \Omega)$.

4.1.2 Os espaços de Raviart-Thomas

O elemento de Raviart-Thomas ([RAVIART; THOMAS, 1977](#)) de ordem $k = 0, 1, \dots$, é definido a nível do elemento padrão \hat{E} , como:

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathcal{RT}_k(\hat{E}), \quad \hat{\text{div}} \hat{\mathbf{V}} = Q_k(\hat{E}) \quad (4.3)$$

e tal que, se $\hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{RT}_k(\hat{E})$,

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\hat{e}} \in P_k(\hat{e}) \text{ sobre a aresta } \hat{e}.$$

Com isso, temos que o espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas $\mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h)$ é dado por

$$\mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h) := \{\mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega); \mathbf{v}|_E \in \mathcal{RT}_k(E), E \in \mathcal{T}_h\}, \quad (4.4)$$

onde $\mathcal{RT}_k(E) := \mathbf{P}_{\mathbf{F}}(\mathcal{RT}_k(\hat{E}))$ e vale que

$$\text{div } \mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h) |_E \subseteq Q_k(E). \quad (4.5)$$

Estimativas de erro a priori para aproximações de Raviart-Thomas

Dados a sua importância e seu caráter ubíquo neste trabalho, vamos enunciar alguns resultados fundamentais concernentes aos espaços de Raviart-Thomas para quadriláteros. As estimativas de erro iniciais, obtidas da boa colocação do problema, nos permitem derivar estimativas de erro a priori para as aproximações de Raviart-Thomas por meio de interpolação em $H(\text{div}; \Omega)$. Para isso, também tira-se proveito da equivalência afim dos elementos, através do mapeamento \mathbf{F}_E , assim como de propriedades da transformação de Piola.

Para $E \in \mathcal{T}_h$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, definimos

$$R_k(\partial E) := \{\mu \in L^2(\partial E); \mu|_e \in P_k(e), \text{ p/ toda aresta } e \text{ de } E\}.$$

Vamos definir então o operador de interpolação local:

Definição 1. *O operador de interpolação local (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013)*

$$\rho_E : H(\text{div}; E) \cap L^s(E)^2 \longrightarrow \mathcal{RT}_k(E), \quad s > 2, \quad (4.6)$$

é definido por:

$$\begin{cases} \int_{\partial E} (\mathbf{v} - \rho_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} q_k \, d\sigma = 0, & q_k \in R_k(\partial E) \\ \int_E (\mathbf{v} - \rho_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{q}_{k-1} \, dx = 0, & \mathbf{q}_{k-1} \in P_{k-1}(E)^2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Em particular, para $\mathcal{RT}_0(E)$, o mesmo é definido por

$$(\rho_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}|_e = \frac{1}{|e|} \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma, \quad e \text{ uma aresta de } E. \quad (4.8)$$

Podemos, assim, enunciar a seguinte estimativa:

Teorema 3. *Sejam $E \in \mathcal{T}_h$ um elemento e $\rho_E : H(\text{div}; E) \cap L^s(E)^2 \longrightarrow \mathcal{RT}_k(E)$ o operador de interpolação local. Então existe uma constante positiva $C = C(k, E)$ tal que, para $\mathbf{v} \in H^m(E)^2$, $1 \leq m \leq k + 1$, vale*

$$\|\mathbf{v} - \rho_E \mathbf{v}\|_{l,E} \leq C(k, E) h_E^{m-l} |\mathbf{v}|_{m,E}, \quad l = 0 \text{ ou } l = 1. \quad (4.9)$$

A prova do resultado acima usa propriedades da transformação de Piola e argumentos de escala (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013, pp. 107) (RAVIART; THOMAS, 1977).

O erro em $H(\text{div}; E)$ decorre da seguinte propriedade de comutatividade:

Lema 3. *Sejam $E \in \mathcal{T}_h$ um elemento, ρ_E o operador de interpolação e π_E a projeção- L^2 sobre o espaço $\text{div } \mathcal{RT}_k(E)$. Então, para todo $\mathbf{v} \in H(\text{div}; E) \cap L^s(E)^2$, $s > 2$, vale*

$$\text{div}(\rho_E \mathbf{v}) = \pi_E(\text{div } \mathbf{v}). \quad (4.10)$$

De outra forma, (4.10) é expressa através do seguinte *diagrama comutativo*:

$$\begin{array}{ccc}
 H(\operatorname{div}, E) \cap L^s(E)^2 & \xrightarrow{\operatorname{div}} & L^2(E) \\
 \rho_E \downarrow & & \downarrow \pi_E \\
 \mathcal{RT}_k(E) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & \operatorname{div} \mathcal{RT}_k(E)
 \end{array} \tag{4.11}$$

Demonstração. Vide (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013; RAVIART; THOMAS, 1977). \square

Para $m \in \mathbb{N}$, vamos também considerar o seguinte espaço

$$\mathbf{H}^m(\operatorname{div}; E) := \{\mathbf{v} \in H^m(E)^2; \operatorname{div} \mathbf{v} \in H^m(E)\}. \tag{4.12}$$

Assim, também enunciaremos o seguinte resultado de estimativa local (RAVIART; THOMAS, 1977):

Teorema 4. *Existe uma constante positiva $C = C(k, E)$ tal que, para $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\operatorname{div}; E)$, $1 \leq m \leq k + 1$, vale*

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{v} - \rho_E \mathbf{v})\|_{0,E} \leq C(k, E) h_E^m |\operatorname{div} \mathbf{v}|_{m,E}. \tag{4.13}$$

Podemos, subsequentemente, estimar o erro de interpolação global. Para isso, precisamos, primeiramente, definir o operador de interpolação global

Definição 2. *Seja \mathcal{T}_h uma partição regular de Ω . O **operador de interpolação global***

$$\Pi_h : H(\operatorname{div}; \Omega) \cap L^s(\Omega)^2 \longrightarrow \mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h), \quad s > 2, \tag{4.14}$$

é definido como:

$$\Pi_h(\mathbf{v})|_E := \rho_E(\mathbf{v}|_E), \quad E \in \mathcal{T}_h. \tag{4.15}$$

Uma importante propriedade dos espaços \mathcal{RT}_k , a ser utilizada neste trabalho, consiste da seguinte *propriedade de comutatividade* (RAVIART; THOMAS, 1977; BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013)

Lema 4. *Seja \mathcal{T}_h uma partição regular de Ω , Π_h o operador de interpolação global e \mathcal{P} a projeção- L^2 sobre*

$$\mathcal{Q}_h(\operatorname{div} \mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h), \mathcal{T}_h) := \{q \in L^2(\Omega); q|_E \in \operatorname{div} \mathcal{RT}_k(E), E \in \mathcal{T}_h\}. \tag{4.16}$$

Então vale a seguinte **propriedade de comutatividade**

$$\operatorname{div}(\Pi_h \mathbf{v}) = \mathcal{P}(\operatorname{div} \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega) \cap L^s(\Omega)^2. \tag{4.17}$$

A mesma propriedade é usualmente representada pelo seguinte *diagrama comutativo*:

$$\begin{array}{ccc}
 H(\operatorname{div}, \Omega) \cap L^s(\Omega)^2 & \xrightarrow{\operatorname{div}} & L^2(\Omega) \\
 \Pi_h \downarrow & & \downarrow \mathcal{P} \\
 \mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & \mathcal{Q}_h(\operatorname{div} \mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h), \mathcal{T}_h)
 \end{array} \tag{4.18}$$

Em particular, deste resultado temos que

$$\operatorname{div} \mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h) \subset \mathcal{Q}_h(\operatorname{div} \mathcal{RT}_k(\Omega, \mathcal{T}_h), \mathcal{T}_h). \tag{4.19}$$

Ficamos, enfim, em posição de estimar o erro de interpolação *global* (RAVIART; THOMAS, 1977).

Teorema 5. *Seja \mathcal{T}_h uma partição regular de Ω e Π_h o operador de interpolação global. Então existe uma constante positiva C , independente do parâmetro de malha h tal que, para $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{k+1}(\operatorname{div}; \Omega)$ e $1 \leq m \leq k + 1$*

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq Ch^m |\mathbf{v}|_{m,\Omega}, \tag{4.20}$$

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v})\|_{0,\Omega} \leq Ch^l |\operatorname{div} \mathbf{v}|_{l,\Omega}, \quad l \leq k + 1. \tag{4.21}$$

Assim, a taxa de convergência *ótima* esperada para a aproximação de Raviart-Thomas é $k + 1$ na norma L^2 , supondo mapeamento afim.

No caso mais geral de malha quadrilateral convexa regular, temos as seguintes estimativas (RAVIART; THOMAS, 1977):

$$\|\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1} (|\mathbf{v}|_{k+1,\Omega} + h |\operatorname{div} \mathbf{v}|_{k+1,\Omega}), \tag{4.22}$$

$$\|\operatorname{div}(\mathbf{v} - \Pi_h \mathbf{v})\|_{0,\Omega} \leq Ch^k |\operatorname{div} \mathbf{v}|_{k+1,\Omega}. \tag{4.23}$$

Assim, a ordem em h para a estimativa do erro de \mathbf{v} , na norma de L^2 , permanece a mesma que aquela obtida em malhas afins, sendo requerida regularidade adicional. Entretanto, a estimativa para o erro em $\operatorname{div} \mathbf{v}$ é uma ordem menor em h . Em Arnold, Boffi e Falk (2005) os autores conseguem melhorar a estimativa (4.22), obtendo a estimativa (4.32).

4.1.3 Otimalidade e as Famílias \mathcal{RT}_k

Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e \hat{P} um espaço de referência, de grau polinomial k , definido sobre um quadrado de referência \hat{E} e mapeado para um elemento quadrilateral E qualquer através de um difeomorfismo bilinear F_E . Se V_h é uma família de espaços de elementos finitos tal que $V_h|_E = \hat{P} \circ F_E^{-1}$, para todo elemento $E \in \mathcal{T}_h$, então

u e ∇u podem ser aproximados com ordens $k+1$ e k , respectivamente, em $L^2(\Omega)$ se, e somente se, $Q_k(\hat{E}) \subset \hat{P}$ (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2002).

O mesmo resultado foi estendido, pelos mesmos autores, para a aproximação de campos vetoriais em $H(\text{div})$, desta vez considerando funções discretas definidas sobre um quadrado de referência \hat{E} e mapeados para um elemento quadrilateral convexo E através da transformação de Piola \mathbf{P}_F .

Seja $\hat{\mathbf{V}}$ um espaço vetorial de referência sobre \hat{E} , com grau polinomial k , e \mathbf{V}_h um espaço de elementos finitos. Em Arnold, Boffi e Falk (2005), considera-se a aproximação de campos em $H(\text{div}; \Omega)$ por meio de funções definidas localmente em $\mathbf{P}_F \hat{\mathbf{V}}$. Ou melhor, consideram-se aproximações que satisfazem uma relação de *comutatividade* da forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^{k+1}(\hat{E}) & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \hat{\mathbf{V}} \\ \mathbf{P}_F \downarrow & & \downarrow \mathbf{P}_F \\ \mathbf{H}^{k+1}(E) & \xrightarrow{\pi_E} & \mathbf{P}_F \hat{\mathbf{V}} \end{array} \quad (4.24)$$

onde $\hat{\pi}$ é uma dada projeção limitada definida por um conjunto unisolvente de graus de liberdade. Podemos então definir uma projeção *global* $\pi_h : H^{k+1}(\Omega)^2 \rightarrow \mathbf{V}(\mathcal{T}_h)$ por $(\pi_h \mathbf{u})|_E = \pi_E(\mathbf{u}|_E)$, onde

$$\mathbf{V}(\mathcal{T}_h) = \{\mathbf{v}_h \in H(\text{div}; \Omega); \mathbf{v}|_E \in \mathbf{P}_{F_E} \hat{\mathbf{V}}, E \in \mathcal{T}_h\}.$$

Vamos dizer que uma função *suave* $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ é aproximada de maneira *ótima* se

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{k+1}), \quad (4.25)$$

e, na semi-norma de $H(\text{div}; \Omega)$,

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\text{div}_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{k+1}). \quad (4.26)$$

Consideramos a aproximação de campos em $H(\text{div}; \Omega)$ por meio de funções definidas sobre um quadrado de referência \hat{E} e mapeadas para um quadrilátero qualquer E via a transformação de Piola. Nesse respeito, sendo $\hat{\mathbf{V}}$ um espaço de referência, definido sobre \hat{E} , teremos então o seguinte resultado (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005)

Teorema 6. *Seja $\hat{\pi} : \mathbf{H}^{k+1}(\hat{E}) \rightarrow \hat{\mathbf{V}}$ um operador de projeção limitado. Dada uma malha quadrilateral \mathcal{T}_h de um domínio Ω , seja $\pi_h : \mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{V}(\mathcal{T}_h)$ o correspondente operador global. Então a convergência ótima em $L^2(\Omega)$ é obtida se, e somente se, $\mathcal{S}_k \subset \hat{\mathbf{V}}$, onde \mathcal{S}_k é o subespaço de codimensão 1 de $\mathcal{RT}_k(\hat{E})$ obtido pela troca dos vetores $(\xi^{k+1}\eta^k, 0)$ e $(0, \xi^k\eta^{k+1})$ por $(\xi^{k+1}\eta^k, -\xi^k\eta^{k+1})$ na base. Sendo este o caso, existe uma constante C , dependendo apenas da regularidade da malha \mathcal{T}_h e de uma cota para $\hat{\pi}$, tal que*

$$\|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega). \quad (4.27)$$

Temos um resultado análogo para a aproximação do divergente.

Teorema 7. *Nas mesmas condições do resultado anterior, suponha ainda que exista um operador de projeção limitado $\hat{\Pi} : H^{k+1}(\hat{E}) \rightarrow \hat{\text{div}}\hat{\mathbf{V}}$ tal que*

$$\hat{\text{div}}\hat{\pi}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\Pi}\hat{\text{div}}\hat{\mathbf{u}}, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^{k+1}(\hat{E}) \text{ com } \hat{\text{div}}\hat{\mathbf{u}} \in H^{k+1}(\hat{E}). \quad (4.28)$$

Então a otimalidade para o divergente é atingida se, e somente se, $\mathcal{R}_k \subset \hat{\text{div}}\hat{\mathbf{V}}$. Sendo este o caso, existe uma constante C , dependendo apenas da regularidade de \mathcal{T}_h e de cotas para $\hat{\pi}$ e $\hat{\Pi}$, tais que

$$\|\text{div } \mathbf{u} - \text{div } \pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} |\text{div } \mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad (4.29)$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$ com $\text{div } \mathbf{u} \in H^{k+1}(\Omega)$.

Conseqüentemente, verifica-se que a família \mathcal{RT}_k não atinge convergência ótima em $H(\text{div}; \Omega)$ sobre malhas não-afins. \mathcal{RT}_k é ótimo apenas em $L^2(\Omega)$. Em particular, o divergente de uma função suave em \mathcal{RT}_0 não converge em $L^2(\Omega)$. Uma forma de contornar este problema consiste na definição da família \mathcal{ABF}_k (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005).

4.1.4 Os Espaços de Arnold-Boffi-Falk

Basicamente, estes espaços são definidos pela adição de bolhas $H(\text{div})$ -conformes aos espaços \mathcal{RT}_k , de forma a satisfazer a condição $\mathcal{R}_k \subset \hat{\text{div}}\hat{\mathbf{V}}$ e, conseqüentemente, atingir propriedades de convergência ótima. Ou seja, são definidos por

$$\mathcal{ABF}_k := P_{k+2,k}(\hat{E}) \times P_{k,k+2}(\hat{E}), \quad \hat{\text{div}}\mathcal{ABF}_k = \mathcal{R}_k. \quad (4.30)$$

Por conseguinte, o espaço de aproximação de ordem k para o fluxo é definido como

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h \in H(\text{div}; \Omega); \mathbf{v}_h|_E \in \mathbf{P}_{\mathbf{F}}(\mathcal{ABF}_k)\}. \quad (4.31)$$

Em Arnold, Boffi e Falk (2005) foi provado que os elementos \mathcal{ABF}_k fornecem ordem de aproximação ótima em $H(\text{div})$. Ou seja, para malhas regulares, dada uma função \mathbf{u} suficientemente suave, existe $\pi_h \mathbf{u} \in \mathcal{ABF}_k$ tal que

$$\|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\| \leq Ch^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1}, \quad (4.32)$$

$$\|\text{div}(\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u})\| \leq Ch^{k+1} |\text{div } \mathbf{u}|_{k+1}. \quad (4.33)$$

4.1.5 Espaços Enriquecidos

Uma importante conseqüência do Teorema 7, em particular, é a possibilidade de definirmos novos espaços *enriquecidos*. Neste trabalho, consideramos espaços enriquecidos a partir da família \mathcal{RT}_k , sendo a família \mathcal{ABF}_k o exemplo básico.

Conforme já discutido, o elemento \mathcal{ABF}_k consiste simplesmente do elemento \mathcal{RT}_k enriquecido com bolhas $H(\text{div})$ -conformes de forma que o espaço do divergente consiga completar o espaço \mathcal{R}_k a partir de Q_k :

$$Q_k \subset \mathcal{R}_k \subset Q_{k+1} \subset \mathcal{R}_{k+1} \subset Q_{k+2} \subset \dots \quad (4.34)$$

Por exemplo, para o caso de \mathcal{RT}_0 , temos *quatro* funções de forma associadas ao fluxo, com o espaço divergente \hat{Q} sendo formado por constantes. O espaço \mathcal{ABF}_0 é então obtido pela adição de *duas* bolhas ao espaço \hat{V} de forma que a antiga base para Q_0 é então completada a uma base para $\mathcal{R}_0 \equiv P_1(\hat{E})$. Pelo Teorema 7 decorre então que, o divergente passa a convergir com uma taxa ótima, ou seja, ganha-se uma ordem na convergência do divergente em relação ao esperado com os espaços de Raviart-Thomas sobre uma malha geral. Podemos também, em vez de completarmos Q_k até \mathcal{R}_k , a fazermos até \mathcal{R}_{k+1} . Neste caso, teremos novos espaços *enriquecidos* (FARIAS et al., 2017), que iremos denotar por

$$\mathcal{RT}_k^{k+1}, \quad (4.35)$$

onde \mathcal{RT}_k^{k+1} é o espaço de Raviart-Thomas enriquecido de forma a se obter

$$\text{div } \mathcal{RT}_k^{k+1} = \mathcal{R}_{k+1}.$$

Segundo esta notação, podemos reescrever o elemento \mathcal{ABF}_k simplesmente como (cf. (4.38))

$$\mathcal{ABF}_k \equiv \mathcal{RT}_k^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

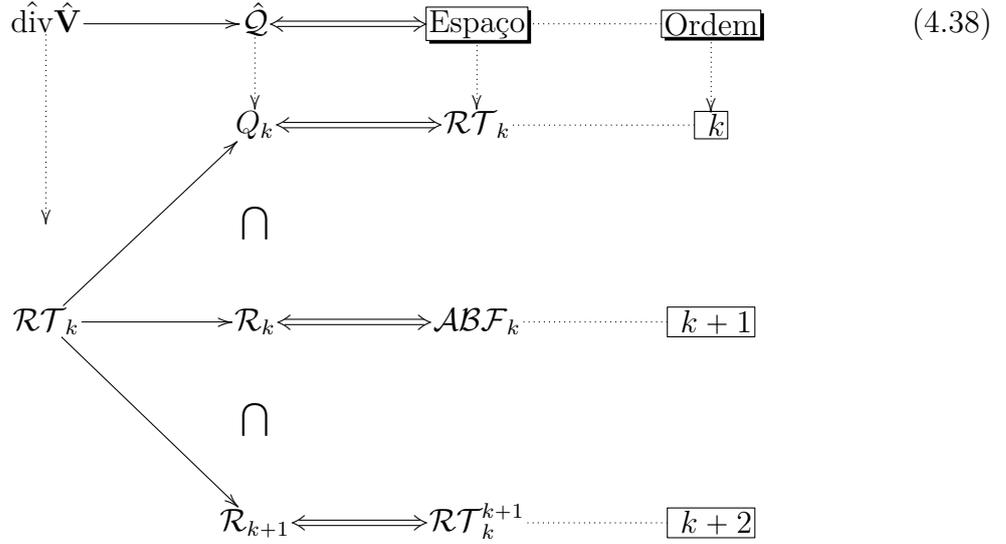
Supondo \mathbf{u} suficientemente regular e aproximada com $\mathbf{u}_h \in \mathcal{RT}_k^{k+1}$, pelo Teorema (7) verificamos então que

$$\|\text{div } \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{k+2}). \quad (4.37)$$

Assim, os espaços \mathcal{RT}_k^{k+1} fornecem aproximação para o divergente (em L^2) sobre malhas quadrilaterais não-afins com ordem até $k + 2$. É importante observar que tal estimativa é válida para a formulação mista dual. Para a formulação baseada em fluxo, que será apresentada no Capítulo 5, este resultado não se verifica.

O diagrama a seguir ilustra a definição destes espaços enriquecidos. A última coluna mostra a ordem de convergência para o divergente, e logo para a pressão também, na norma L^2 . Estes espaços enriquecidos permitem aproximar a pressão e o divergente do

campo vetorial com ordens altas.



Os experimentos numéricos com tais espaços foram feitos empregando-se o esquema em fluxo (FB)¹, a ser descrito no próximo capítulo.

4.2 Aproximação Mista Dual para Problemas Elípticos

Sejam $\mathbf{V}_h \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q}$ subespaços de dimensão finita. Com isso, escrevendo $\mathcal{V}_h = \mathbf{V}_h \cap H_{0,N}(\text{div}; \Omega)$, temos o seguinte problema aproximado: encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ tal que

$$\begin{cases}
 (\Lambda \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - (p_h, \text{div } \mathbf{v}_h) = -\langle p_D, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle, & \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \\
 -(\text{div } \mathbf{u}_h, q_h) - (\alpha(\mathbf{x})p_h, q_h) = -(f, q_h), & \forall q_h \in \mathcal{Q}_h.
 \end{cases} \tag{4.39}$$

Consideremos também as seguintes formas bilineares contínuas $a_h : \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbb{R}$, $b_h : \mathbf{V}_h \times \mathcal{Q}_h \rightarrow \mathbb{R}$ e $c_h : \mathcal{Q}_h \times \mathcal{Q}_h \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
 a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\Lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}), \\
 b_h(\mathbf{v}, p) &= -(\text{div } \mathbf{v}, p), \\
 c_h(p, q) &= (\alpha(\mathbf{x})p, q).
 \end{aligned}$$

Sejam também $A_h : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{V}'_h$, $B_h : \mathcal{V}_h \rightarrow \mathcal{Q}_h$ e $C_h : \mathcal{Q}_h \rightarrow \mathcal{Q}_h$ os respectivos operadores induzidos pelas formas bilineares. Assim, o problema anterior pode ser reescrito como

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = -\langle p_D, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \tag{4.40}$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, q_h) + c_h(p_h, q_h) = -f(q_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h. \tag{4.41}$$

Em contraste com o caso *primal*, a existência e unicidade da solução discreta $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ do problema (4.40)-(4.41) acima não segue do correspondente resultado

¹ Baseado em fluxo, do inglês *flux based*.

para dimensão infinita, exposto no Teorema 2. A razão é que as hipóteses mencionadas naquele resultado não são automaticamente herdadas quando consideramos um cenário de aproximação conforme. Por exemplo, o operador B_h não corresponde à restrição do operador B sobre \mathcal{V}_h , ou seja, $B\mathcal{V}_h \not\subseteq \mathcal{Q}_h$. Assim, as contrapartidas discretas das hipóteses do Teorema 2 precisam também ser satisfeitas. Um par de espaços \mathcal{V}_h e \mathcal{Q}_h para os quais tais hipóteses são satisfeitas será dito *compatível* ou *LBB²-estável*. Sendo este o caso, vamos ter a seguinte *estimativa de erro a priori* (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013)

Teorema 8. *Suponha satisfeitas as hipóteses do Teorema (2), assim como suas contrapartidas discretas. Sejam $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ e $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ as soluções de (3.36)-(3.37) e (4.40)-(4.41), respectivamente. Então vale a seguinte estimativa de quasi-optimalidade (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2005)*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{V}} + \|p - p_h\|_{\mathcal{Q}} \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{V}} + \inf_{q_h \in \mathcal{Q}_h} \|p - q_h\|_{\mathcal{Q}} \right), \quad (4.42)$$

com C dependendo apenas de Ω e da constante β na condição inf – sup.

Por conseguinte, na Formulação Mista Dual, os erros de aproximação dos campos vetorial e escalar ficam acoplados.

Na aproximação mista dual devemos usar espaços LBB-estáveis a fim de garantir que o problema fique bem-posto. Em Li, Arbogast e Huang (2009) mostrou-se que é possível usar espaços lagrangianos e obter aproximações estáveis. Contudo, estamos interessados em problemas onde a condutividade \mathbf{K} pode ser altamente heterogênea e a estratégia de usar espaços de elementos finitos em $(Q_k(\hat{E}))^2/Q_k(\hat{E})$ não é adequada, conforme ilustrado em Correa (2006), Loula et al. (2008). Neste sentido, optamos por utilizar espaços $H(\text{div}; \Omega)$ -conformes, em particular os espaços desenvolvidos por Raviart-Thomas.

Vamos então definir os espaços de aproximação para o problema misto:

$$\mathcal{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}; \mathbf{v}_h|_E = \mathbf{P}_{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{v}}_h) \circ \mathbf{F}_E^{-1}, \hat{\mathbf{v}}_h \in \hat{\mathbf{V}}, \forall E \in \mathcal{T}_h\}, \quad (4.43)$$

e

$$\mathcal{Q}_h := \{q \in \mathcal{Q}; q|_E = \hat{q} \circ \mathbf{F}_E^{-1}, \hat{q} \in \hat{\mathcal{Q}}, \forall E \in \mathcal{T}_h\}, \quad (4.44)$$

onde $\hat{\mathbf{V}} = \mathcal{RT}_k(\hat{E})$ e $\hat{\mathcal{Q}} = Q_k(\hat{E})$ ou $\hat{\mathbf{V}} = \mathcal{ABF}_k$ e $\hat{\mathcal{Q}} = \mathcal{R}_k$.

4.2.1 Análise de Convergência

No caso de malha quadrilateral afim, a otimalidade (na norma de $L^2(\Omega)$) é sempre esperada para as famílias de elementos finitos consideradas neste trabalho. No entanto, sobre malha quadrilateral geral, espera-se de fato a perda de uma ordem em h na aproximação do divergente no caso da família \mathcal{RT}_k .

² acrônimo para: Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi

Combinando a estimativa de quasi-otimalidade (4.42) com as estimativas na aproximação do erro, dadas pelos teoremas (6) e (7), juntamente com a estimativa (ARNOLD; BOFFI; FALK, 2002)

$$\|p - p_h\| \leq h^{k+1} \|p\|_{k+1}, \quad (4.45)$$

para a aproximação de p em \mathcal{Q}_h , somos capazes de obter estimativas de erro globais para as diferentes famílias utilizadas. Por exemplo, no caso da aproximação Mista Dual usando a família \mathcal{ABF}_k , teremos que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1} + |\text{div } \mathbf{u}|_{k+1} + |p|_{k+1}). \quad (4.46)$$

Resumimos abaixo as estimativas esperadas no caso da aproximação Mista Dual sobre malha quadrilateral *não-afim*. Vamos supor que a solução seja suficientemente regular.

- \mathcal{RT}_k . A princípio, com base nas estimativas (4.22) e (4.23), temos as seguintes estimativas (RAVIART; THOMAS, 1977):

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^{k+1} \|\mathbf{u}\|_{k+1}, \quad (4.47)$$

$$\|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| \leq Ch^k \|\text{div } \mathbf{u}\|_k. \quad (4.48)$$

Além disso, em Jr e Roberts (1985) é mostrado que se, além do domínio Ω , p também for suficientemente regular ($p \in H^{k+2}(\Omega)$), então

$$\|p - p_h\| \leq \begin{cases} Ch \|p\|_2 & , \text{ se } k = 0, \\ Ch^{k+1} \|p\|_{k+1} & , \text{ se } k \geq 1, \end{cases} \quad (4.49)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^{k+1} \|p\|_{k+2}, \quad (4.50)$$

$$\|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| \leq Ch^k \|p\|_{k+2}, \quad (4.51)$$

sendo p_h aproximada localmente em Q_k .

- \mathcal{ABF}_k . Com base nas estimativas (4.32), (4.33) e (4.45) em (4.42) teremos que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1}, \quad (4.52)$$

$$\|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| \leq Ch^{k+1} |\text{div } \mathbf{u}|_{k+1}, \quad (4.53)$$

$$\|p - p_h\| \leq Ch^{k+1} |p|_{k+1}, \quad (4.54)$$

com p_h aproximada localmente em \mathcal{R}_k .

- \mathcal{RT}_k^{k+1} . Com base nas estimativas (4.32) e (4.37), decorre que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^{k+1} |\mathbf{u}|_{k+1}, \quad (4.55)$$

$$\|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| \leq Ch^{k+2} |\text{div } \mathbf{u}|_{k+2}, \quad (4.56)$$

Além disso, usando $k + 1$ em vez de k na estimativa (4.45), segue também que

$$\|p - p_h\| \leq Ch^{k+2}|p|_{k+2}, \quad (4.57)$$

sendo p_h aproximada localmente em \mathcal{R}_{k+1} .

4.2.2 Implementação

Supondo uma certa enumeração global dos graus de liberdade e a introdução de bases globais para os espaços de aproximação, decorre de (4.40)-(4.41) que o sistema linear global é dado por

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}^T \\ \tilde{B} & -\tilde{C}_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ -F \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

A matriz associada a este sistema é não-singular, pois o problema é suposto bem-posto. Entretanto, trata-se de um sistema de ponto de sela de grande porte e, tipicamente mal-condicionado, para o qual não é apropriado o emprego de métodos iterativos.

É possível resolver este sistema de uma forma alternativa condensando estaticamente as pressões e os graus de liberdade internos da velocidade (não associados aos lados). Esta é uma estratégia clássica. A condensação estática (cf. Apêndice B) acontece a nível do elemento, deixando de lado os graus de liberdade internos, o que nos permite enfim inverter uma matriz global de menor porte.

4.2.2.1 Funções de Forma no Elemento de Referência

O procedimento de condensação estática depende essencialmente de termos funções de base com suporte apenas no elemento. Como o espaço \mathcal{Q}_h é descontínuo, seus graus de liberdade não são compartilhados por elementos contíguos. No caso do espaço \mathcal{V}_h para o fluxo, seus graus de liberdade são formados por funções que servem para transmitir o fluxo através das arestas e por funções que o aproximam no interior de cada elemento.

Vamos exibir abaixo algumas funções de forma definidas no elemento de referência \hat{E} .

- Funções de forma para o fluxo sobre as arestas:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \mathbf{e}_1, & \hat{\varphi}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \mathbf{e}_2, \\ \hat{\varphi}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \mathbf{e}_1, & \hat{\varphi}_4(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}(1 + \eta) \mathbf{e}_2, \\ \hat{\varphi}_5(\hat{\mathbf{x}}) &= \eta \hat{\varphi}_1(\hat{\mathbf{x}}), & \hat{\varphi}_6(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi \hat{\varphi}_2(\hat{\mathbf{x}}), \\ \hat{\varphi}_7(\hat{\mathbf{x}}) &= \eta \hat{\varphi}_3(\hat{\mathbf{x}}), & \hat{\varphi}_8(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi \hat{\varphi}_4(\hat{\mathbf{x}}), \\ \hat{\varphi}_9(\hat{\mathbf{x}}) &= \eta^2 \hat{\varphi}_1(\hat{\mathbf{x}}), & \hat{\varphi}_{10}(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi^2 \hat{\varphi}_2(\hat{\mathbf{x}}), \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

Acima, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ denotam a base canônica do plano $\xi\eta$ onde o elemento de referência está definido. As funções $\hat{\varphi}$ são definidas de forma que $\hat{\varphi} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ tenha a ordem polinomial desejada sobre as arestas, como requer a construção dos espaços de Raviart-Thomas sobre quadriláteros.

- Funções de forma internas para o fluxo:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= (1 - \xi)(1 + \xi) \mathbf{e}_1, & \hat{\chi}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= (1 - \eta)(1 + \eta) \mathbf{e}_2, \\ \hat{\chi}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \eta \hat{\chi}_1(\hat{\mathbf{x}}), & \hat{\chi}_4(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi \hat{\chi}_2(\hat{\mathbf{x}}), \\ & \vdots & & \vdots \\ \hat{\chi}_{2k-1}(\hat{\mathbf{x}}) &= \eta^{(k-1) \bmod 3} \xi^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} \hat{\chi}_1(\hat{\mathbf{x}}) & \hat{\chi}_{2k}(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi^{(k-1) \bmod 3} \eta^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} \hat{\chi}_2(\hat{\mathbf{x}}), \\ & & & k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Acima, para $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ denota a função maior inteiro menor ou igual a x e, para um inteiro positivo k , $k \bmod 3$ denota o resto da divisão de k por 3 nos inteiros. As funções $\hat{\chi}$ serão chamadas de *bolhas* $H(\text{div})$ -conformes pois satisfazem $\hat{\chi} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\partial \hat{E}} = 0$ e logo $\chi \cdot \mathbf{n}|_{\partial E} = 0$. Assim, as funções χ aproximam o fluxo apenas localmente no interior de cada elemento, onde têm suporte. A Figura 1 ilustra as quatro primeiras destas funções.

- Funções de forma para o potencial:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= 1, & \hat{\psi}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi, \\ \hat{\psi}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \eta, & \hat{\psi}_4(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi\eta, \\ \hat{\psi}_5(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi^2, & \hat{\psi}_6(\hat{\mathbf{x}}) &= \eta^2, \\ \hat{\psi}_7(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi^2\eta, & \hat{\psi}_8(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi\eta^2, \\ \hat{\psi}_9(\hat{\mathbf{x}}) &= \xi^2\eta^2. \end{aligned}$$

4.2.2.2 Sistema Linear Condensado

A nível do elemento (supondo uma enumeração apropriada dos graus de liberdade), escrevemos a velocidade como

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_e} \alpha_i^E \varphi_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n_i} \beta_j^E \chi_j(\mathbf{x}), \quad (4.59)$$

e a pressão como

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_p} \gamma_i^E \psi_i(\mathbf{x}), \quad (4.60)$$

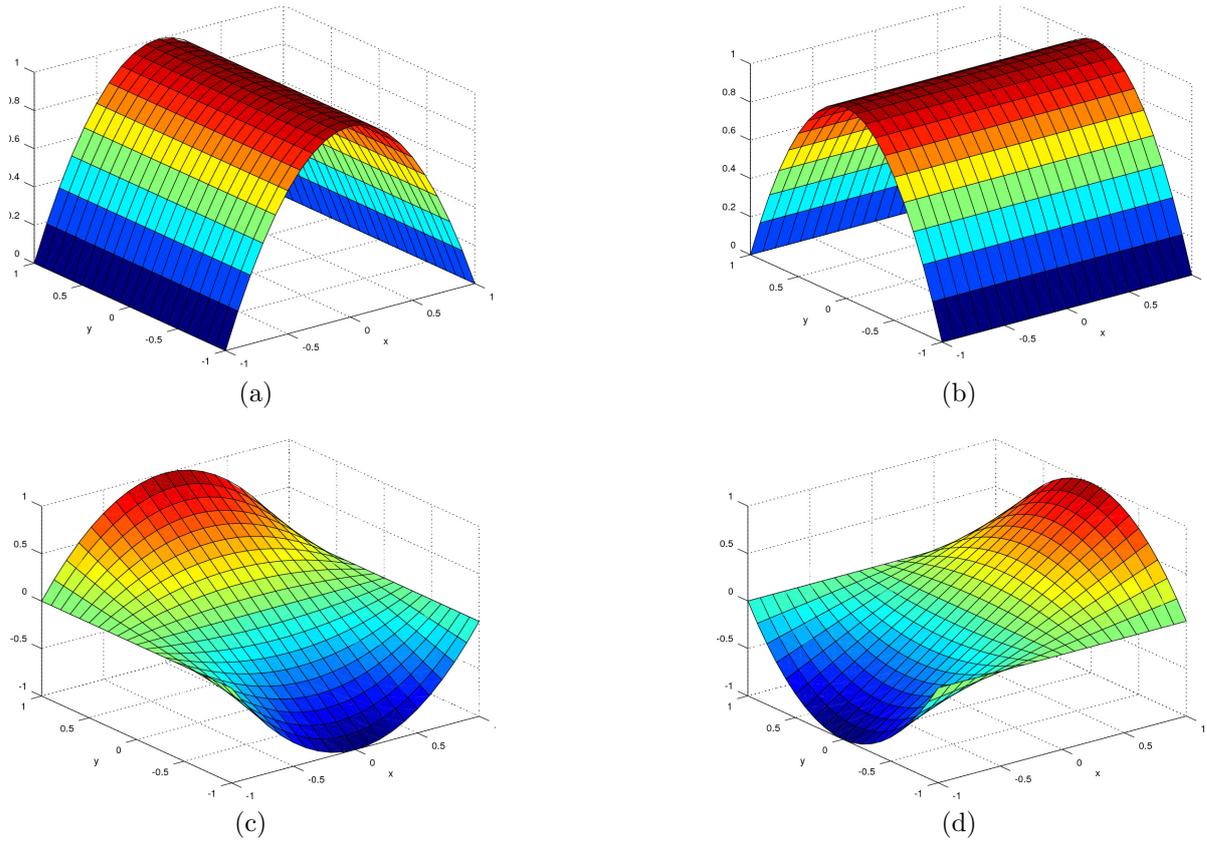


Figura 1 – Componente não nula das funções bolha: $\hat{\chi}_1$ (a), $\hat{\chi}_2$ (b), $\hat{\chi}_3$ (c) e $\hat{\chi}_4$ (d).

onde n_e , n_i e n_p indicam, respectivamente, o número de graus de liberdade associados às arestas, ao interior de cada elemento (velocidade) e à pressão (interna). Usando (4.59) e (4.60) no sistema (4.40)-(4.41) obtemos que (4.58) é formado por

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & N^T \\ N & M \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

e

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & L \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

$$G = \begin{pmatrix} -\mathbf{g} & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (4.63)$$

desta vez com

$$U^E = (\boldsymbol{\alpha}^E \ \boldsymbol{\beta}^E)^T, \quad P^E = \gamma^E,$$

onde

- $A \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e}$ é dada por

$$A_{ij} = \int_E \Lambda \boldsymbol{\varphi}_j \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \, d\mathbf{x},$$

ou, no elemento de referência

$$A_{ij} = \int_{\hat{E}} \hat{\Lambda}(D\mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_j) \cdot (D\mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i) \frac{1}{J} \, d\hat{\mathbf{x}} \quad (4.64)$$

- $B \in \mathbb{R}^{n_p \times n_e}$ é dada por

$$B_{ij} = - \int_E \psi_i \operatorname{div} \varphi_j \, d\mathbf{x},$$

- $\tilde{C}_\alpha \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$

$$(\tilde{C}_\alpha)_{ij} = \int_E \alpha(\mathbf{x}) \psi_j \psi_i \, d\mathbf{x},$$

- $M \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$

$$M_{ij} = \int_E \Lambda \chi_j \cdot \chi_i \, d\mathbf{x},$$

- $N \in \mathbb{R}^{n_i \times n_e}$

$$N_{ij} = \int_E \Lambda \chi_j \cdot \varphi_i \, d\mathbf{x},$$

- $L \in \mathbb{R}^{n_p \times n_i}$

$$L_{ij} = - \int_E \psi_i \operatorname{div} \chi_j \, d\mathbf{x},$$

- $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_e}$

$$g_i = - \int_{\partial E \cap \Gamma_D} p_D \varphi_i \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

- $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n_p}$

$$F_i = f_i = \int_E f \psi_i \, d\mathbf{x}.$$

Vamos também definir os seguintes vetores de incógnitas:

- $\boldsymbol{\alpha}^E \in \mathbb{R}^{n_e}$,
- $\boldsymbol{\beta}^E \in \mathbb{R}^{n_i}$,
- $\boldsymbol{\gamma}^E \in \mathbb{R}^{n_p}$,

de forma que, a nível do elemento, vamos ter

$$A\boldsymbol{\alpha}^E + N^T \boldsymbol{\beta}^E + B^T \boldsymbol{\gamma}^E = \mathbf{g}, \quad (4.65)$$

$$N\boldsymbol{\alpha}^E + M\boldsymbol{\beta}^E + L^T \boldsymbol{\gamma}^E = 0, \quad (4.66)$$

e

$$B\boldsymbol{\alpha}^E + L\boldsymbol{\beta}^E - C\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{f}. \quad (4.67)$$

Como a matriz M é não-singular (pois é positiva-definida), temos que

$$\boldsymbol{\beta}^E = -M^{-1} (N\boldsymbol{\alpha}^E + L^T \boldsymbol{\gamma}^E), \quad (4.68)$$

e as incógnitas de velocidade no interior do elemento podem ser eliminadas, resultando no sistema

$$(A - N^T M^{-1} N) \boldsymbol{\alpha}^E + (B^T - N^T M^{-1} L^T) \boldsymbol{\gamma}^E = -\mathbf{g}, \quad (4.69)$$

$$(B - LM^{-1}N) \boldsymbol{\alpha}^E - (\tilde{C}_\alpha + LM^{-1}L^T) \boldsymbol{\gamma}^E = -\mathbf{f}, \quad (4.70)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \bar{A} \boldsymbol{\alpha}^E + \bar{B}^T \boldsymbol{\gamma}^E &= -\mathbf{g}, \\ \bar{B} \boldsymbol{\alpha}^E - \bar{C}_\alpha \boldsymbol{\gamma}^E &= -\mathbf{f}. \end{cases}$$

Da mesma forma, como o campo de pressões é descontínuo, segue que \bar{C}_α é não-singular e logo podemos eliminar localmente as incógnitas de pressão:

$$\boldsymbol{\gamma}^E = \bar{C}_\alpha^{-1} (\bar{B} \boldsymbol{\alpha}^E + \mathbf{f}), \quad (4.71)$$

ficando com um sistema local apenas em termos da velocidade sobre as arestas

$$(\bar{A} + \bar{B}^T \bar{C}_\alpha^{-1} \bar{B}) \boldsymbol{\alpha}^E = -\mathbf{g} - \bar{B}^T \bar{C}_\alpha^{-1} \mathbf{f}, \quad (4.72)$$

ou seja,

$$K \boldsymbol{\alpha}^E = \bar{\mathbf{f}}. \quad (4.73)$$

Com a rigidez $K = \bar{A} + \bar{B}^T \bar{C}_\alpha^{-1} \bar{B}$ e o vetor de carga $\bar{\mathbf{f}} = -\mathbf{g} - \bar{B}^T \bar{C}_\alpha^{-1} \mathbf{f}$ locais, podemos espalhar para a matriz de rigidez e o vetor de carga globais. Uma vez resolvido o sistema assim montado, a pressão é então obtida através de (4.71) e a componente da velocidade, com graus de liberdade internos, obtida por (4.68).

4.3 Formulação Mista Híbrida Dual (MHD)

Vamos agora considerar a versão hibridizada da formulação mista, onde se introduz multiplicadores de Lagrange a fim de relaxar a hipótese de continuidade para a componente normal sobre a fronteira de cada elemento.

Primeiro, vamos considerar o seguinte espaço para a velocidade

$$\mathbf{Y}(\mathcal{T}_h) := \prod_E H(\text{div}; E) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega); \mathbf{v}|_E \in H(\text{div}; E), \forall E \in \mathcal{T}_h\}. \quad (4.74)$$

Para uma partição \mathcal{T}_h , vamos definir seu “esqueleto” como sendo

$$\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_h^0 \cup \mathcal{E}_h^\partial, \quad (4.75)$$

onde \mathcal{E}_h^0 é o conjunto de arestas internas e \mathcal{E}_h^∂ é o conjunto de arestas sobre Γ , com

$$\mathcal{E}_h^\partial := \mathcal{E}_h^D \cup \mathcal{E}_h^N,$$

ou seja, \mathcal{E}_h^∂ é formado por arestas do tipo Dirichlet e Neumann. Assim, podemos introduzir o seguinte espaço, definido sobre o ‘esqueleto’ (CIARLET, 1978, pp. 420),

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}_h) := \left\{ \mu \in \prod_E H^{1/2}(\partial E); \exists q \in H_{0,D}^1(\Omega), \mu|_{\partial E} = q|_{\partial E}, \forall E \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (4.76)$$

Segue que, introduzindo uma nova incógnita (multiplicador de Lagrange), obtemos a formulação *mista hibridizada*: encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}(\mathcal{T}_h)$, $p \in \mathcal{Q}$ e $\lambda \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_h)$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_E \int_E \Lambda \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \sum_E \int_E p \operatorname{div} \mathbf{v} + \sum_E \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \lambda \rangle = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p_D \rangle_{\Gamma_D}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Y}, \\ - \sum_E \int_E q \operatorname{div} \mathbf{u} - (\alpha p, q) = -(f, q), \quad \forall q \in \mathcal{Q}, \\ \sum_E \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mu \rangle = 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}, \end{array} \right. \quad (4.77)$$

lembrando que $\mathcal{Q} = L^2(\Omega)$, como já denotado para o problema misto.

4.3.1 Aproximação

Vamos considerar o espaço de Raviart-Thomas de ordem k ,

$$\mathbf{Y}_h := \{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^2; \mathbf{v}_h|_E \in \mathcal{RT}_k(E), \forall E \in \mathcal{T}_h \}. \quad (4.78)$$

Sobre o esqueleto \mathcal{E}_h , podemos definir o espaço de aproximação para os multiplicadores

$$\mathcal{M}_h := \{ \mu_h \in L^2(\mathcal{E}_h); \mu_h|_e \in P_k(e), \forall e \in \mathcal{E}_h, \mu_h|_e = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^D \}. \quad (4.79)$$

Além disso, introduzimos as seguintes formas bilineares contínuas

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) := - \sum_E \int_E q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h, \quad (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{Y}_h \times \mathcal{Q}_h, \quad (4.80)$$

$$d_h(\mathbf{v}_h, \mu_h) := \sum_E \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, \mu_h \rangle, \quad (\mathbf{v}_h, \mu_h) \in \mathbf{Y}_h \times \mathcal{M}_h, \quad (4.81)$$

$$c_h(q_h, w_h) := (\alpha q_h, w_h), \quad (q_h, w_h) \in \mathcal{Q}_h, \quad (4.82)$$

onde

$$\mathcal{Q}_h := \{ q_h \in L^2(\Omega); q_h|_E \in Q_k(E), \forall E \in \mathcal{T}_h \}.$$

Vamos então considerar a seguinte aproximação *Mista Híbrida Dual* (MHD): achar $\mathbf{u}_h \in \mathbf{Y}_h$, $p_h \in \mathcal{Q}_h$ e $\lambda_h \in \mathcal{M}_h$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Lambda \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) + d_h(\mathbf{v}_h, \lambda_h) = \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, p_D \rangle_{\Gamma_D}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Y}_h, \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) - c_h(p_h, q_h) = -(f, q_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h, \\ d_h(\mathbf{u}_h, \mu_h) = 0, \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h. \end{array} \right. \quad (4.83)$$

Nesta formulação, o multiplicador de Lagrange λ_h representa uma aproximação para o traço da pressão p sobre \mathcal{E}_h . Ambos valores, p_h e λ_h , podem ser pós-processados para obter uma melhor aproximação da pressão p (ARNOLD; BREZZI, 1985).

4.3.1.1 Implementação

Sejam $\{\varphi_i; i = 1, \dots, nN_u\}$, $\{\psi_i; i = 1, \dots, nN_p\}$ e $\{\zeta_i; i = 1, \dots, n_eN_\lambda\}$ bases para \mathbf{Y}_h , \mathcal{Q}_h e \mathcal{M}_h , respectivamente, onde n denota o número de elementos, n_e o número de arestas internas, $N_u := 2(k+1)(k+2)$, $N_p := (k+1)^2$ e $N_\lambda := k+1$, sendo $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ a ordem do espaço de Raviart-Thomas sobre um elemento quadrilateral $E \in \mathcal{T}_h$. Segue que o sistema algébrico associado às equações em (4.83) é dado por

$$\begin{cases} AU + B^T \mathbf{P} + L^T \boldsymbol{\Lambda} &= \mathbf{g}, \\ BU - C\mathbf{P} &= -\mathbf{f}, \\ LU &= \mathbf{0}, \end{cases} \quad (4.84)$$

onde $A_{ij} := (\boldsymbol{\Lambda} \varphi_j, \varphi_i)$, $B_{ij} := b_h(\varphi_j, \psi_i)$, $C_{ij} := c_h(\psi_j, \psi_i)$, $L_{ij} := d_h(\varphi_j, \zeta_i)$, $\mathbf{g}_i := \langle \varphi_i \cdot \mathbf{n}, p_D \rangle$ e $\mathbf{f}_i := (f, \psi_i)$.

A matriz

$$\begin{pmatrix} A & B^T & L^T \\ B & -C & \mathbf{0} \\ L & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

é simétrica e não-singular (o problema é suposto bem-posto), mas não é definida positiva. Entretanto, supondo que os graus de liberdade da velocidade sejam enumerados separadamente (cf. Apêndice B), A se torna bloco-diagonal, sendo cada bloco uma matriz $N_u \times N_u$ fácil de inverter. Podemos, portanto, eliminar \mathbf{U} a nível do elemento

$$\mathbf{U}^{(E)} = A_E^{-1}(\mathbf{g}_E - B_E^T \mathbf{P}^{(E)} - L_E^T \boldsymbol{\Lambda}^{(E)}), \quad (4.85)$$

obtendo

$$\begin{cases} C_1 \mathbf{P}^{(E)} + B_1^T \boldsymbol{\Lambda}^{(E)} &= \mathbf{F}_1, \\ B_1 \mathbf{P}^{(E)} + C_2 \boldsymbol{\Lambda}^{(E)} &= \mathbf{F}_2, \end{cases} \quad (4.86)$$

com

$$\begin{aligned} C_1 &:= C_E + B_E A_E^{-1} B_E^T, & B_1 &:= L E A_E^{-1} B_E^T, & \mathbf{F}_1 &:= \mathbf{f}_E + B_E A_E^{-1} \mathbf{g}_E, \\ C_2 &:= L E A_E^{-1} L_E^T, & \mathbf{F}_2 &:= L E A_E^{-1} \mathbf{g}_E. \end{aligned}$$

Desta vez, o sistema linear (4.86) está associado a uma matriz simétrica e positiva-definida.

Como o espaço \mathcal{Q}_h é descontínuo entre os elementos, e novamente supondo uma certa ordenação global dos graus de liberdade para este espaço, podemos eliminar \mathbf{P} localmente

$$\mathbf{P}^{(E)} = C_1^{-1}(\mathbf{F}_1 - B_1^T \boldsymbol{\Lambda}^{(E)}), \quad (4.87)$$

ficando, enfim, com um sistema cuja única incógnita é $\boldsymbol{\Lambda}^{(E)}$, i.e., com

$$\tilde{\mathbf{S}}_E \boldsymbol{\Lambda}^{(E)} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad (4.88)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{S}}_E := C_2 - B_1 C_1^{-1} B_1^T \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{f}} := F_2 - B_1 C_1^{-1} F_1.$$

$\tilde{\mathbf{S}}_E \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_\lambda}$ é uma matriz simétrica e positiva definida. A partir de (4.88) podemos, portanto, montar o sistema global

$$S\mathbf{\Lambda} = \bar{\mathbf{f}}, \quad (4.89)$$

com $S \in \mathbb{R}^{n_e N_\lambda \times n_e N_\lambda}$. Uma vez resolvido o sistema (4.89) para a incógnita $\mathbf{\Lambda}$, \mathbf{P} pode ser obtida por (4.87) e \mathbf{U} por (4.85).

4.4 Experimentos numéricos

Para os experimentos numéricos considerados neste trabalho, tomou-se $p_D = 0$ sobre todo o bordo $\Gamma_D = \partial\Omega$, com $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Para efeito de comparação, considerou-se duas malhas distintas sobre Ω : uma malha afim, formada por n^2 elementos *quadrados* e, uma malha não-afim (bilinear), formada por n^2 *trapézios* de base h e lados verticais paralelos de tamanhos $0,75h$ e $1,25h$, como proposto em Arnold, Boffi e Falk (2005) e ilustrado na Figura 2.

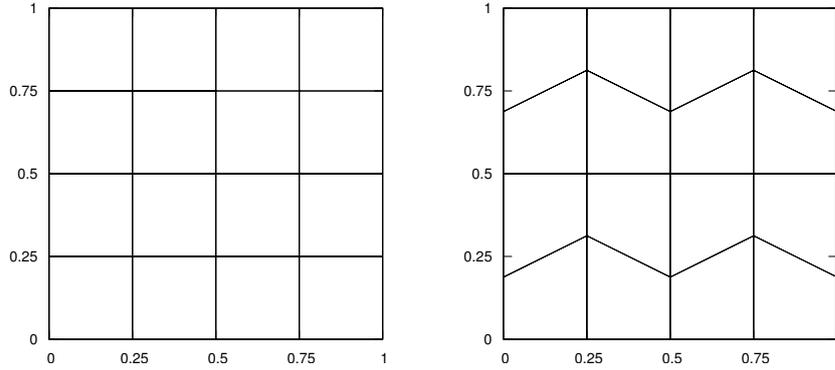


Figura 2 – Malha de 4×4 quadrados (esquerda) e trapézios (direita).

Com respeito aos coeficientes do modelo, consideramos um meio *heterogêneo*, com

$$\alpha(x, y) = \exp(1 - (x^2 + y^2)) \quad \text{e} \quad K(x, y) = 1 + 10x.$$

Além disso, considerou-se também um termo de fonte $f(\mathbf{x})$ tal que a solução exata do problema (3.2)-(3.3) seja dada por

$$p = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (4.90)$$

e

$$\mathbf{u} = -K\nabla p = -K(\mathbf{x})\pi \begin{pmatrix} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Para a integração numérica, empregou-se quadratura gaussiana com 5×5 pontos sobre o elemento de referência $\hat{E} = [-1, 1]^2$. Desta forma, podemos integrar exatamente funções polinomiais em $Q_k(E)$, com $k \leq 9$.

Além disso, dada a equivalência com o método misto, não vamos exibir tabelas comparativas para a aproximação mista dual hibridizada. De fato, as taxas, assim como os erros, para este caso são iguais aos mesmos no caso misto dual (PINEDO, 2016).

Os códigos utilizados foram implementados em linguagem FORTRAN 90, o que nos permitiu utilizar as bibliotecas LAPACK e BLAS. A máquina utilizada foi um computador pessoal com as seguintes características: sistema operacional 64 bits, 4 GB de RAM e processadores (4 cores) Intel[®] Core[™] i5 com 2.50 GHz de clock.

4.4.0.1 Estudo de convergência

É apresentado, a seguir, um estudo de convergência para a formulação mista dual (4.39). Consideramos as duas famílias estáveis \mathcal{RT}_k e \mathcal{ABF}_k , ou seja, iremos tomar $\hat{\mathbf{V}} = \mathcal{RT}_k$, com $\hat{\mathcal{Q}} = Q_k(\hat{E})$, e $\hat{\mathbf{V}} = \mathcal{ABF}_k$, com $\hat{\mathcal{Q}} = \mathcal{R}_k$. Neste capítulo, o espaço \mathcal{ABF}_k representa uma alternativa ao espaço \mathcal{RT}_k quanto à perda de otimalidade sobre malhas Q_1 -deformadas.

As Figuras 3, 4 e 5 comparam, a pressão, a componente x da velocidade e o divergente aproximados com as respectivas soluções exatas, usando uma malha *quadrilateral* uniforme com 16×16 elementos e usando \mathcal{RT}_1 .

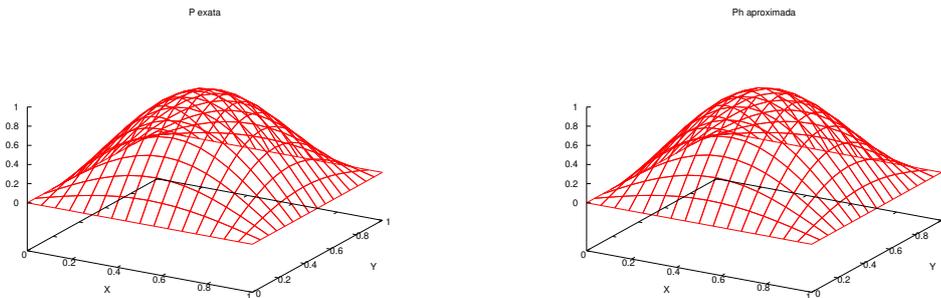


Figura 3 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: pressão exata (esquerda) e aproximada pelo método misto (direita) com \mathcal{RT}_1 usando malha de quadrados.

Além disso, a Figura 6 mostra a componente y da velocidade aproximada usando \mathcal{RT}_1 sobre uma malha de 16×16 elementos quadrados.

Já as Figuras 7, 8 e 9 comparam a pressão, a componente x da velocidade e o divergente exatos com as respectivas aproximações obtidas usando \mathcal{RT}_1 sobre uma malha *trapezoidal* com 16×16 elementos.

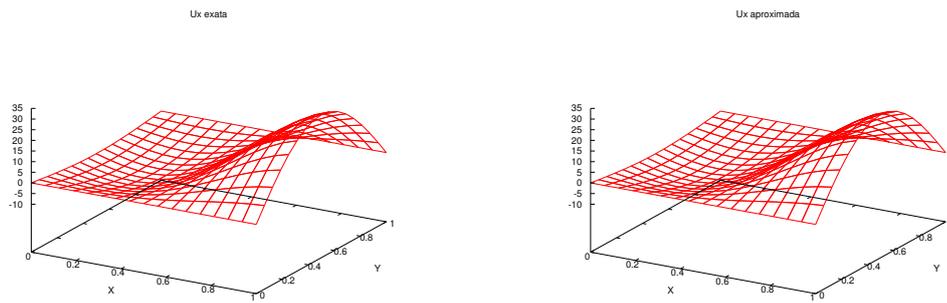


Figura 4 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: componente x da velocidade, exata (esquerda) e aproximada (direita) pelo método misto com \mathcal{RT}_1 usando malha de quadrados.

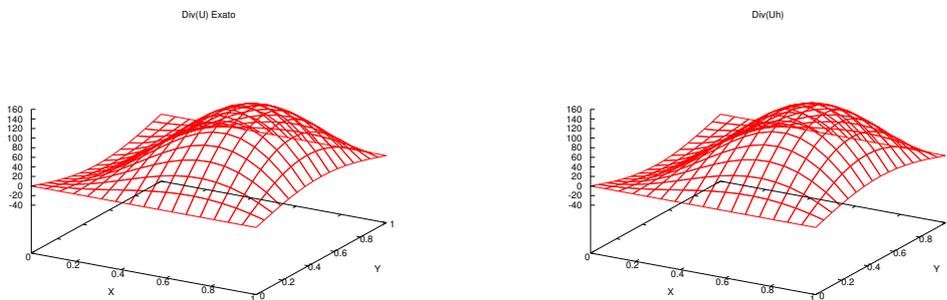


Figura 5 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: divergente exato (esquerda) e aproximado pelo método misto (direita) usando \mathcal{RT}_1 com malha de quadrados.

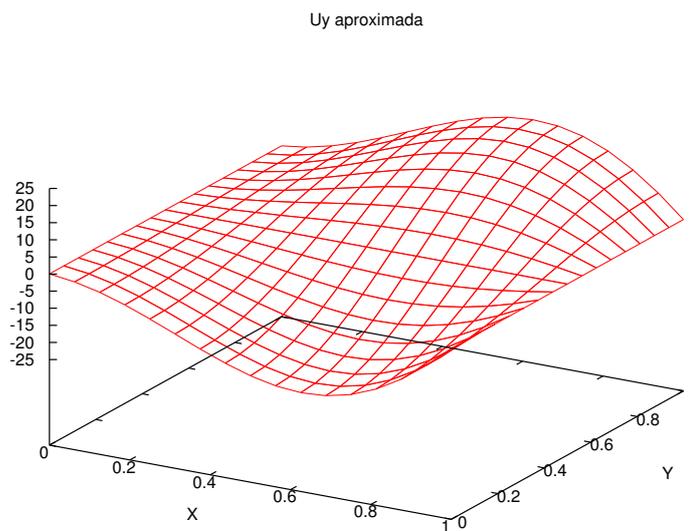


Figura 6 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: componente y da velocidade aproximada pelo método misto com \mathcal{RT}_1 sobre malha de quadrados.

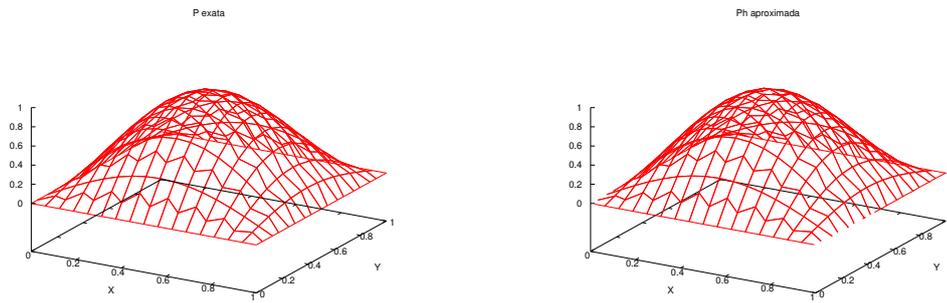


Figura 7 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: pressão exata (esquerda) e aproximada (direita) pelo método misto usando \mathcal{RT}_1 com malha de trapézios.

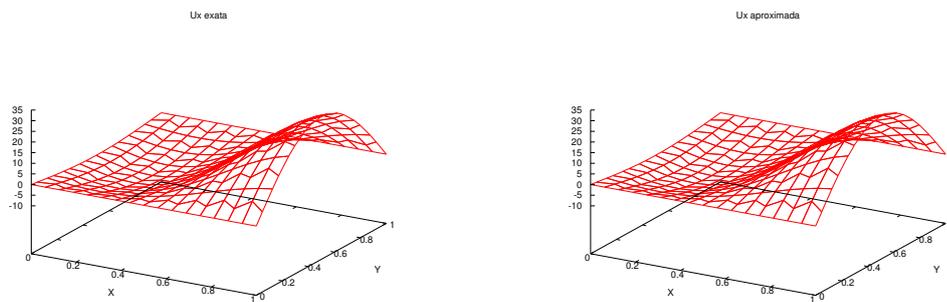


Figura 8 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: componente x da velocidade, exata (esquerda) e aproximada pelo método misto usando \mathcal{RT}_1 (direita) com malha de trapézios.

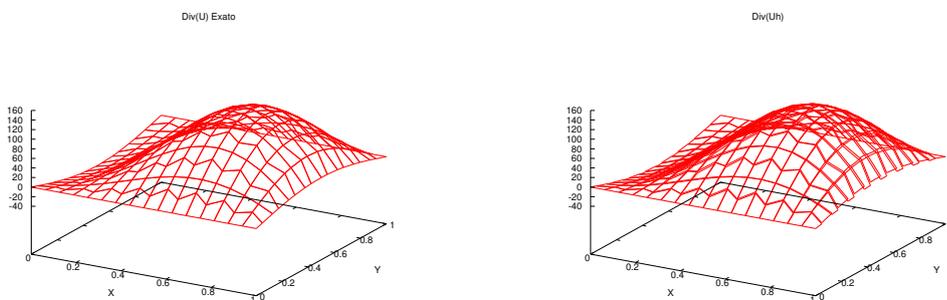


Figura 9 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: divergente exato (esquerda) e aproximado pelo método misto usando \mathcal{RT}_1 (direita) com malha de trapézios.

A Figura 10 mostra a componente y da velocidade, aproximada sobre uma malha de 16×16 elementos trapezoidais, usando \mathcal{RT}_1 .

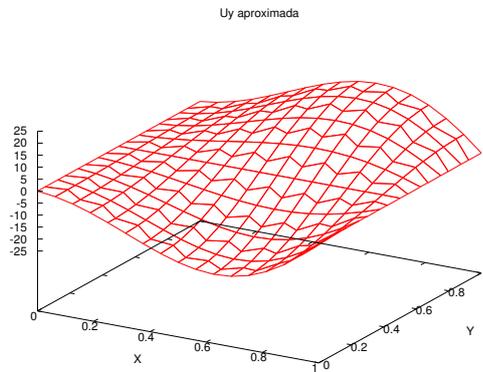


Figura 10 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: componente y da velocidade aproximada pelo método misto usando \mathcal{RT}_1 sobre malha de trapézios.

As Tabelas 1, 2 e 3 também comparam os erros, na norma L^2 , e as taxas de convergência para a pressão, a velocidade e o divergente usando \mathcal{RT}_k e \mathcal{ABF}_k , com $k = 0, 1$ e 2 . Nas tabelas, a coluna dof^3 denota o número de graus de liberdade do sistema final *condensado*, ou seja, a dimensão da matriz invertida.

³ degrees of freedom

Tabela 1 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método misto dual usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 .

n	dof	$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
		erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
\mathcal{RT}_0 em malha de quadrados							
2	12	2,962e-01		7,0079		3,895e+01	
4	40	1,576e-01	0,910	3,5772	0,970	2,197e+01	0,825
8	144	7,984e-02	0,981	1,7759	1,010	1,129e+01	0,959
16	544	4,004e-02	0,995	8,857e-01	1,003	5,6883	0,990
32	2112	2,003e-02	0,998	4,425e-01	1,000	2,8490	0,997
64	8320	1,002e-02	0,999	2,212e-01	1,000	1,4251	0,999
\mathcal{ABF}_0 em malha de quadrados							
2	12	1,742e-01		7,2815		1,639e+01	
4	40	4,207e-02	2,050	3,5957	1,017	4,6776	1,809
8	144	1,045e-02	2,008	1,7780	1,016	1,2045	1,957
16	544	2,610e-03	2,001	8,860e-01	1,004	3,033e-01	1,989
32	2112	6,525e-04	2,000	4,426e-01	1,001	7,597e-02	1,997
64	8320	1,631e-04	2,000	2,212e-01	1,000	1,900e-02	1,999
\mathcal{RT}_0 em malha de trapézios							
2	12	2,944e-01		7,1397		40,680	
4	40	1,618e-01	0,977	3,7913	0,985	24,343	0,683
8	144	8,220e-02	0,994	1,9149	0,985	15,160	0,399
16	544	4,125e-02	0,994	9,670e-01	0,985	11,492	0,399
32	2112	2,064e-02	0,998	4,861e-01	0,992	10,352	0,150
64	8320	1,032e-02	0,999	2,436e-01	0,996	10,046	0,043
\mathcal{ABF}_0 em malha de trapézios							
2	12	1,695e-01		7,1578		17,792	
4	40	4,669e-02	1,860	3,7218	0,943	6,8462	1,377
8	144	1,413e-02	1,724	1,8722	0,991	2,7852	1,297
16	544	5,053e-03	1,484	9,430e-01	0,989	1,2921	1,108
32	2112	2,179e-03	1,213	4,735e-01	0,993	6,325e-01	1,030
64	8320	1,040e-03	1,067	2,373e-01	0,996	3,145e-01	1,007

Tabela 2 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o misto dual usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 .

n	dof	$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
		erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
\mathcal{RT}_1 em malha de quadrados							
2	24	6,308e-02		1,8303		11,907	
4	80	1,614e-02	1,992	4,459e-01	2,010	2,9861	1,995
8	288	4,055e-03	1,997	1,106e-01	2,003	7,489e-01	1,998
16	1088	1,015e-03	1,997	2,761e-02	2,003	1,874e-01	1,998
32	4224	2,539e-04	1,999	6,899e-03	2,000	4,686e-02	1,999
64	16640	6,349e-05	1,999	1,724e-03	2,000	1,171e-02	1,999
\mathcal{ABF}_1 em malha de quadrados							
2	24	1,905e-02		1,3292		1,7167	
4	80	5,139e-03	1,890	4,017e-01	1,726	2,085e-01	3,040
8	288	7,999e-04	2,683	1,077e-01	1,898	2,576e-02	3,017
16	1088	1,061e-04	2,914	2,742e-02	1,973	3,209e-03	3,004
32	4224	1,347e-05	2,977	6,887e-03	1,993	4,009e-04	3,001
64	16640	1,691e-06	2,994	1,723e-03	1,998	5,010e-05	3,000
\mathcal{RT}_1 em malha de trapézios							
2	24	7,317e-02		1,9831		1,354e+01	
4	80	1,875e-02	1,963	4,545e-01	2,125	3,9629	1,773
8	288	4,728e-03	1,988	1,126e-01	2,013	1,4071	1,493
16	1088	1,184e-03	1,996	2,808e-02	2,003	6,086e-01	1,209
32	4224	2,963e-04	1,999	7,018e-03	2,000	2,911e-01	1,063
64	16640	7,410e-05	1,999	1,754e-03	2,000	1,438e-01	1,016
\mathcal{ABF}_1 em malha de trapézios							
2	24	3,033e-02		1,6473		2,8799	
4	80	5,373e-03	2,497	4,287e-01	1,941	4,823e-01	2,578
8	288	8,077e-04	2,733	1,133e-01	1,918	1,018e-01	2,243
16	1088	1,074e-04	2,909	2,880e-02	1,977	2,412e-02	2,077
32	4224	1,396e-05	2,943	7,231e-03	1,993	5,945e-03	2,020
64	16640	1,898e-06	2,878	1,810e-03	1,998	1,480e-03	2,005

Tabela 3 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método misto dual usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2 .

n	dof	$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
		erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
\mathcal{RT}_2 em malha de quadrados							
2	36	8,462e-03		2,282e-01		1,4603	
4	120	1,071e-03	2,981	2,995e-02	2,929	2,001e-01	2,867
8	432	1,346e-04	2,992	3,775e-03	2,988	2,545e-02	2,974
16	1632	1,685e-05	2,998	4,728e-04	2,997	3,195e-03	2,993
32	6336	2,107e-06	2,999	5,913e-05	2,999	3,998e-04	2,998
64	24960	2,634e-07	2,999	7,392e-06	2,999	4,999e-05	2,999
\mathcal{ABF}_2 em malha de quadrados							
2	36	1,103e-03		2,292e-01		2,218e-01	
4	120	5,711e-05	4,271	2,994e-02	2,936	1,368e-02	4,019
8	432	3,392e-06	4,073	3,774e-03	2,987	8,547e-04	4,000
16	1632	2,094e-07	4,018	4,728e-04	2,997	5,342e-05	3,999
32	6336	1,304e-08	4,004	5,913e-05	2,999	3,339e-06	3,999
64	24960	8,147e-10	4,001	7,392e-06	2,999	2,086e-07	4,000
\mathcal{RT}_2 em malha de trapézios							
2	36	1,101e-02		2,716e-01		2,5817	
4	120	1,492e-03	2,884	3,431e-02	2,985	4,572e-01	2,497
8	432	1,879e-04	2,988	4,303e-03	2,995	9,831e-02	2,217
16	1632	2,354e-05	2,997	5,385e-04	2,998	2,342e-02	2,069
32	6336	2,944e-06	2,999	6,734e-05	2,999	5,780e-03	2,018
64	24960	3,680e-07	2,999	8,419e-06	2,999	1,440e-03	2,004
\mathcal{ABF}_2 em malha de trapézios							
2	36	1,750e-03		2,570e-01		3,849e-01	
4	120	1,046e-04	4,064	3,316e-02	2,954	3,811e-02	3,336
8	432	6,516e-06	4,005	4,179e-03	2,988	4,230e-03	3,171
16	1632	4,085e-07	3,995	5,236e-04	2,996	5,104e-04	3,051
32	6336	2,574e-08	3,988	6,549e-05	2,999	6,321e-05	3,013
64	24960	1,654e-09	3,959	8,189e-06	2,999	7,882e-06	3,003

A Figura 11 mostra, graficamente, as taxas observadas para as aproximações da pressão, da velocidade e do divergente, na norma de $L^2(\Omega)$, usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 sobre malha de elementos quadrados (esquerda) e trapezoidal (direita). Já a Figuras 12 mostra as taxas de convergência das mesmas variáveis, na norma de $L^2(\Omega)$, usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 . Da mesma forma, a Figura 13 exhibe as taxas usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2 .

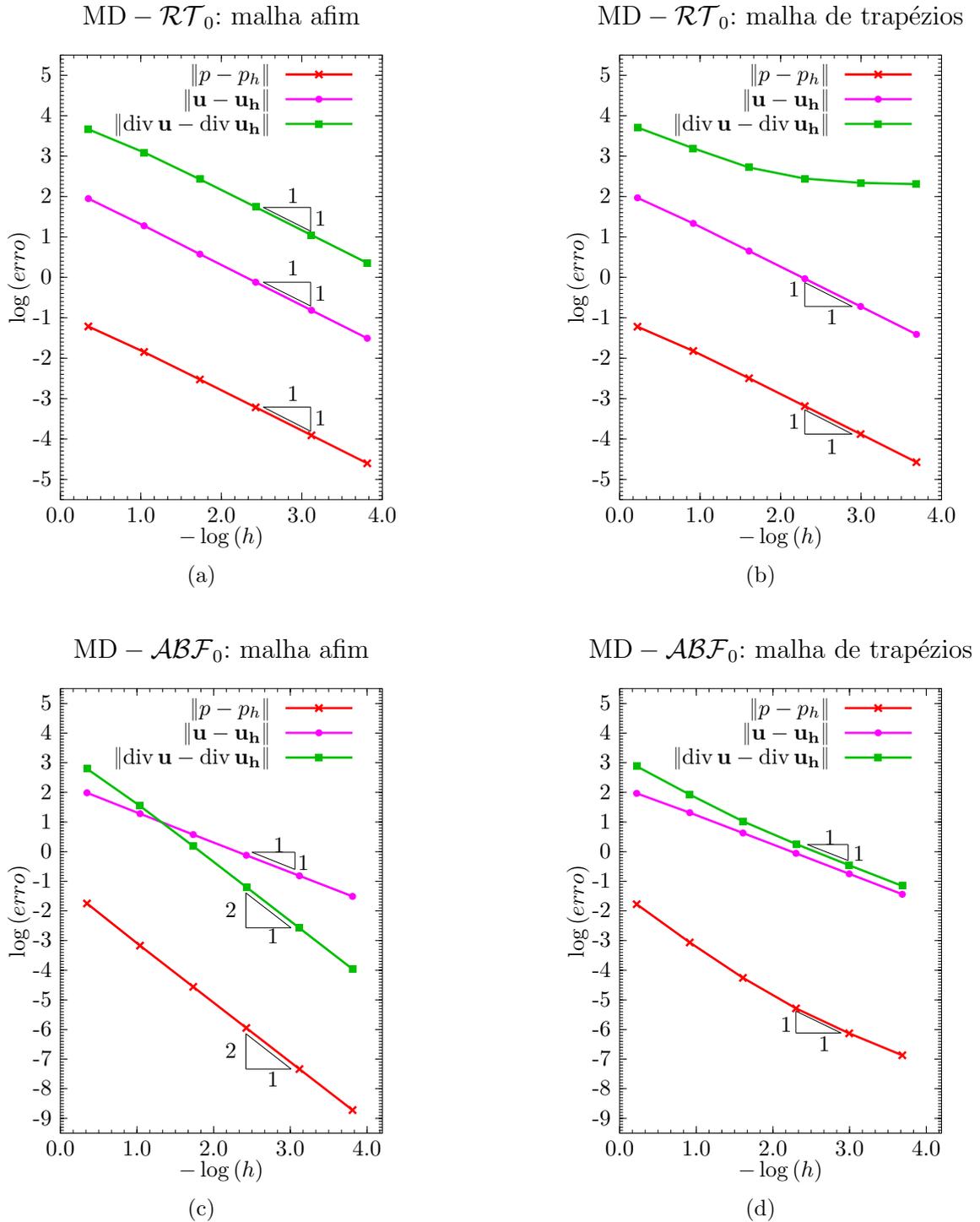


Figura 11 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o misto dual usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 , na norma L^2 , sobre malha de quadrados (figs. (a) e (c)) e de trapézios (figs (b) e (d)).

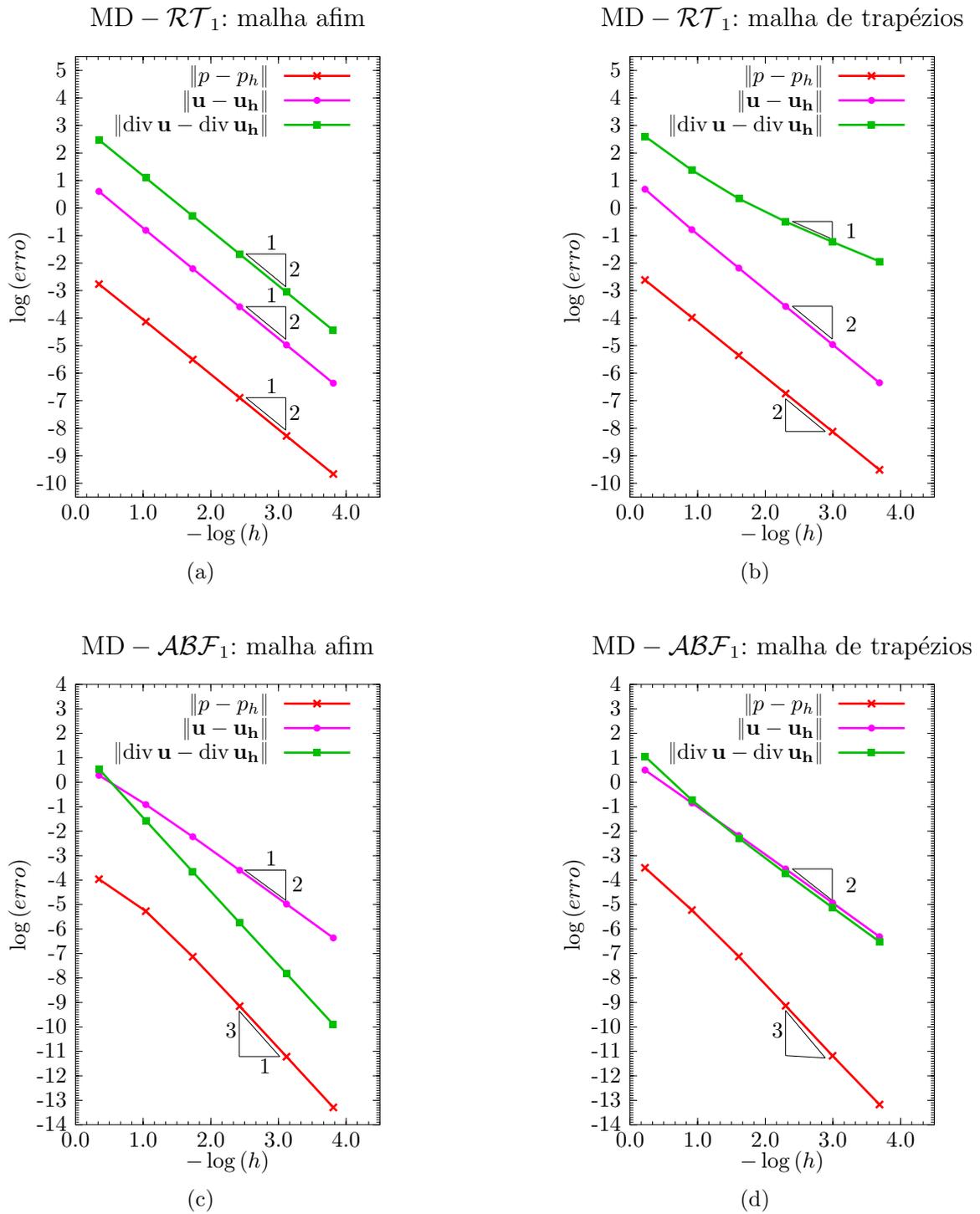


Figura 12 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o misto dual usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 , na norma de L^2 , sobre malha de quadrados (figs (a) e (c)) e de trapézios (figs. (b) e (d)).

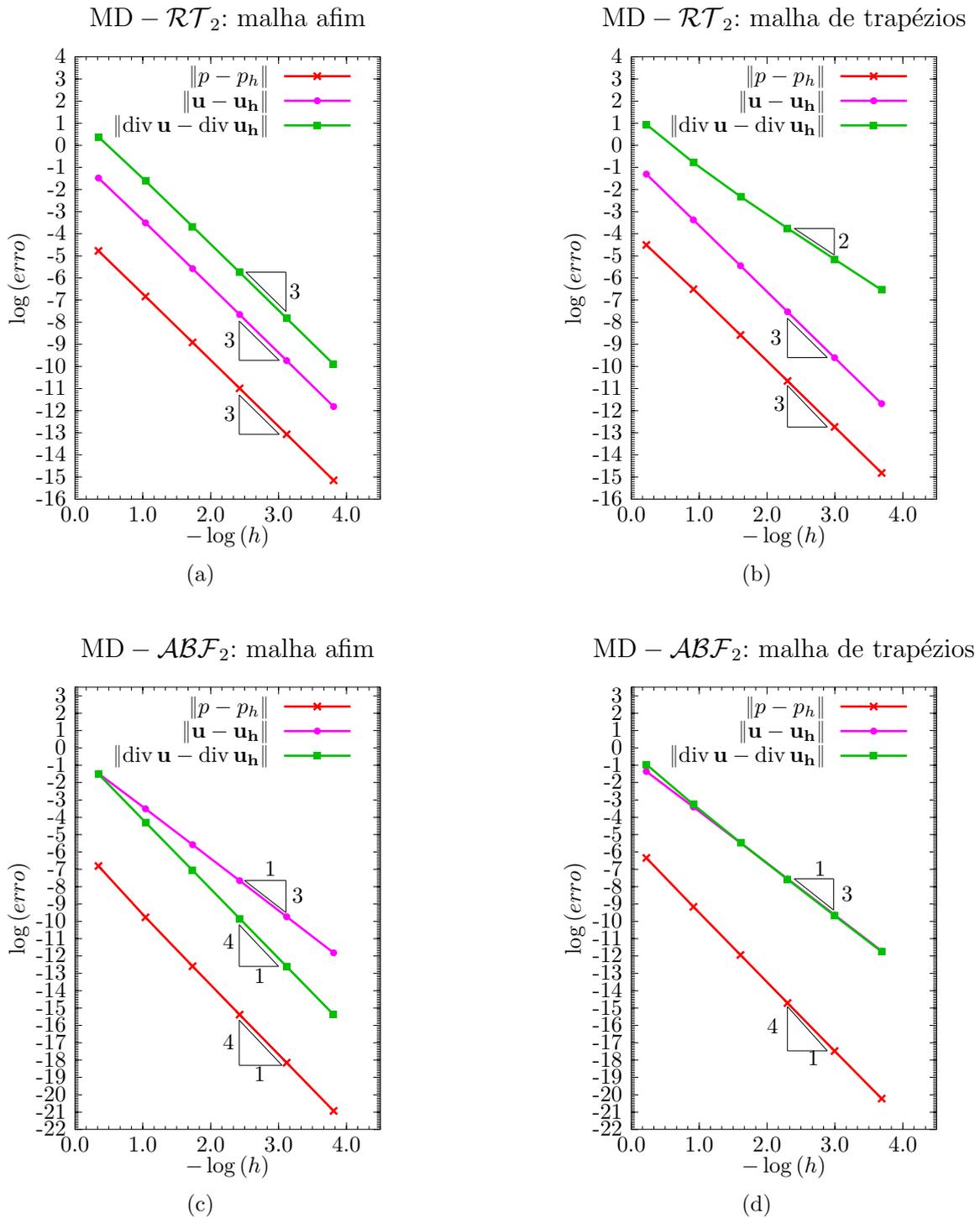


Figura 13 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método misto usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2 , na norma de L^2 , sobre malha de quadrados (figs. (a) e (c)) e de trapézios (figs. (b) e (d)).

A otimalidade tanto para o fluxo quanto para o divergente e o potencial $L^2(\Omega)$ é verificada no caso de malha quadrilateral afim formada por quadrados. No caso de malha quadrilateral *geral* (trapézios), verificamos as taxas esperadas:

- (4.47)-(4.49) para \mathcal{RT}_k ;
- (4.52)-(4.54) para \mathcal{ABF}_k ;
- (4.55)-(4.57) utilizando \mathcal{RT}_k^{k+1}

A partir destes experimentos pode-se ver que a convergência do divergente é de fato sub-ótima para a família de espaços de elementos finitos \mathcal{RT}_k sobre a malha de trapézios considerada. Inclusive, o divergente chega a não convergir quando se usa \mathcal{RT}_0 sobre tal malha, como mostra a Figura 11b. Por sua vez, a família \mathcal{ABF}_k recupera essa perda de otimalidade. As tabelas acima mostram essa comparação mais detalhadamente, nas quais é possível ver o efeito da deformação da malha sobre o erro no divergente aproximado como, por exemplo, na Tabela 1.

5 Formulação Baseada em Fluxo

Neste capítulo vamos apresentar um esquema para a resolução do sistema de primeira ordem (3.2)-(3.3), baseado apenas nas incógnitas relativas ao fluxo. Tal esquema é definido através da eliminação da pressão de forma pontual, distinta da condensação das incógnitas da pressão apresentada no capítulo anterior. A aproximação numérica se dá pela definição de subespaços conformes $\mathcal{V}_h \subset H(\text{div}; \Omega)$ para o fluxo, enquanto a pressão é pós-processada localmente, através de projeções sobre o espaço $\mathcal{Q}_h = \text{div } \mathcal{V}_h$. Resultados numéricos indicam que tal estratégia conduz a soluções equivalentes às obtidas pela formulação mista dual, para malhas afins. Para malhas não-afins, no entanto, tal equivalência não é verificada. Tais resultados mostram também que, assim como a formulação mista dual, a nova formulação exibe perda de otimalidade em malhas não afins.

5.1 Definição da Formulação Baseada em Fluxo

O primeiro passo para a definição da formulação baseada em fluxo se dá pelo enfraquecimento da lei de Darcy (3.3). Multiplicamos a lei de Darcy

$$\Lambda \mathbf{u} = -\nabla p,$$

por uma função $\mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega)$, integramos no domínio Ω e usamos integração por partes de forma a obter a equação

$$(\Lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \text{div } \mathbf{v}) + \int_{\Gamma} p_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0. \quad (5.1)$$

Em seguida utilizamos a forma pontual da lei de conservação de massa (3.2), e o fato de que $\alpha > 0$, para escrever explicitamente a pressão como

$$p = \frac{1}{\alpha}(f - \text{div } \mathbf{u}). \quad (5.2)$$

Por fim, substituindo esta expressão pontual da pressão na forma fraca (5.1) e tomando $\mathcal{V} = H(\text{div}; \Omega)$, podemos definir o seguinte problema variacional, posto em termos apenas do fluxo:

Formulação FB^1 : encontrar $\mathbf{u} \in H_{0,N}(\text{div}; \Omega)$ tal que

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (5.3)$$

com

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\Lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(\frac{1}{\alpha} \text{div } \mathbf{u}, \text{div } \mathbf{v}\right), \quad (5.4)$$

$$g(\mathbf{v}) := \left(\frac{f}{\alpha}, \text{div } \mathbf{v}\right) - \langle p_D, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (5.5)$$

¹ ou baseada em fluxo (*flux-based*)

onde $\langle p_D, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle = \int_{\Gamma} p_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$.

Nas seções a seguir, desenvolveremos a análise da existência e unicidade de solução da formulação FB, sua aproximação numérica, questões de implementação computacional bem como o pós-processamento da pressão.

5.2 Análise da Formulação

Vamos verificar as hipóteses do Lema de Lax-Milgram a fim de mostrar que o esquema **FB**, como definido acima, é bem-posto para fluxos em $H(\text{div})$.

5.2.1 Existência e Unicidade

Começemos verificando que o funcional g em (5.5) é limitado em $H(\text{div}; \Omega)$. Para isso, precisamos usar a seguinte estimativa decorrente da definição de traço em $H(\text{div})$ (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013, pp. 50)

$$\left| \int_{\Gamma} q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div})} \|q\|_1, \quad q \in H^1(\Omega), \quad \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega). \quad (5.6)$$

Assim, dado $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, usando a propriedade de limitação (3.6), segue que

$$\begin{aligned} |g(\mathbf{v})| &= \left| \left(\frac{f}{\alpha}, \text{div } \mathbf{v} \right) - \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p_D \rangle \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha_0} \|f\| \|\text{div } \mathbf{v}\| + C \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div})} \\ &\leq \max\left\{ \frac{\|f\|}{\alpha_0}, C \right\} \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div})} \\ &= C' \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div})}. \end{aligned}$$

Além disso, usando a elipticidade uniforme (3.8), como passo seguinte, verificamos as duas hipóteses fundamentais do Lema 1, envolvendo a forma bilinear A definida em (5.4).

Continuidade. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ quaisquer, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\begin{aligned} |A(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \lambda_1 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \frac{1}{\alpha_0} \|\text{div } \mathbf{u}\| \|\text{div } \mathbf{v}\| \\ &\leq \max\left\{ \lambda_1, \frac{1}{\alpha_0} \right\} (\|\mathbf{u}\| + \|\text{div } \mathbf{u}\|) (\|\mathbf{v}\| + \|\text{div } \mathbf{v}\|) \\ &\leq M \|\mathbf{u}\|_{H(\text{div})} \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div})}, \end{aligned}$$

onde $M = \max\left\{ \lambda_1, \frac{1}{\alpha_0} \right\}$ nas condições do item (i) em (1). Portanto A é limitada.

\mathcal{V} -elipticidade. Para $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ qualquer, teremos que

$$\begin{aligned} A(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= (\Lambda \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{v}}{\alpha}, \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \\ &\geq \lambda_0 \|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{\alpha_1} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 \\ &\geq \min \left\{ \lambda_0, \frac{1}{\alpha_1} \right\} \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div})}^2. \end{aligned}$$

Assim, tomando $\beta = \min \left\{ \lambda_0, \frac{1}{\alpha_1} \right\} > 0$, tem-se que A é \mathcal{V} -elíptica.

Portanto, pelo Lema de Lax-Milgram, o problema variacional (5.3) possui uma única solução e, além disso,

$$\|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div})} \leq \frac{\|g\|_{\mathcal{V}'}}{\beta}.$$

Esta abordagem contempla, como caso particular, o *método penalizado* (HUGHES, 2000), tipicamente considerado no contexto do problema de Stokes incompressível.

5.3 Aproximação da Velocidade

A análise anterior mostra que a formulação obtida desta forma é estável para qualquer escolha $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$. Ou seja, basta escolhermos subespaços $H(\operatorname{div})$ -conformes, tal como na formulação de Galerkin do problema primal. Isto representa um ganho em relação à formulação mista clássica pelo fato da não exigência de compatibilidade associada à escolha de um par de subespaços. Em particular, a fim de discretizar o problema (5.3), podemos usar um subespaço conforme $\mathcal{V}_h \subset H(\operatorname{div}; \Omega)$ definido, por exemplo, pelos espaços de Raviart-Thomas ou de Arnold-Boffi-Falk. Com isso, teremos a seguinte aproximação para a velocidade:

Formulação FBh: encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h$ tal que

$$A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = g(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \quad (5.7)$$

ou ainda,

$$(\Lambda \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u}_h}{\alpha}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h \right) = \left(\frac{f}{\alpha}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h \right) - \langle p_D, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h. \quad (5.8)$$

Uma vez que estamos utilizando aproximações conformes $\mathcal{V}_h \subset H(\operatorname{div}; \Omega)$, a existência e unicidade da aproximação \mathbf{u}_h decorre prontamente do Lema de Lax-Milgram. Além disso, vale ressaltar que a aproximação desta forma não depende da condição LBB e também se mostra *incondicionalmente estável*.

Observação 1. Para $f = 0$ e quando α for próximo de zero em (5.7) acima, pode ocorrer o fenômeno de locking total (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013), i.e.,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0 \implies \mathbf{u}_h = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Formalmente, fazendo $\alpha \rightarrow 0$ em (5.8), temos que $\operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0$ (multiplique a equação por α e tome o limite). Assim, como um caso extremo, pode ocorrer que $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$. Neste caso, o fenômeno de “locking²” pode ser visto como um problema numérico quando o termo de fonte f for identicamente nulo.

5.3.1 Otimalidade

Uma vez que a *Formulação FB* é incondicionalmente estável, é grande a flexibilidade na escolha dos subespaços de aproximação $\mathcal{V}_h \subset H(\operatorname{div}; \Omega)$. Conforme foi discutido no Capítulo 4, para que sejam obtidas soluções ótimas em $H(\operatorname{div}; \Omega)$, é necessário que o subespaço para a aproximação do fluxo cumpra as condições do Teorema 6. Assim, o comportamento sub-ótimo da família \mathcal{RT}_k é também esperado na formulação **FB**, uma vez que esta é uma limitação na capacidade de aproximação do espaço em si, e não da formulação. Neste sentido, é natural o emprego de espaços da família \mathcal{ABF}_k . Na verdade, a estabilidade da formulação **FB** torna particularmente atraente a escolha de versões enriquecidas \mathcal{RT}_k^l sendo que, em particular, temos $\mathcal{ABF}_k = \mathcal{RT}_k^k$. Aqui vamos considerar

$$\mathcal{V}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}; \mathbf{v}_h|_E = \mathbf{P}_F(\hat{\mathbf{v}}_h), \hat{\mathbf{v}}_h \in \hat{\mathbf{V}}, \forall E \in \mathcal{T}_h\}, \quad (5.10)$$

onde \mathbf{P}_F representa a transformação de Piola, podendo ser $\hat{\mathbf{V}} = \mathcal{RT}_k(\hat{E})$, $\hat{\mathbf{V}} = \mathcal{ABF}_k$ ou ainda um enriquecimento maior.

5.3.2 Análise de Erro

Com base na estimativa *a priori* (3.31), podemos então derivar estimativas para os diferentes espaços de elementos finitos. Vamos supor que a solução \mathbf{u} seja suficientemente regular.

A partir de (3.31), temos que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \leq C (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0, \Omega} + \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0, \Omega}), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h. \quad (5.11)$$

Por exemplo, no caso de malha afim, com (4.20) e (4.21) em (5.11) obtemos que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \leq Ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{k+1}). \quad (5.12)$$

Estamos particularmente interessados em verificar tais estimativas no caso de malhas não-afins para os diferentes espaços de aproximação utilizados. No caso de malhas quadrilaterais gerais como as consideradas neste trabalho, teremos as seguintes estimativas

² travamento: um fenômeno encontrado em elasticidade.

- \mathcal{RT}_k . Por (4.22) e (4.23) em (5.11), teremos que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div};\Omega)} \leq C_1 h^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1} + h|\text{div } \mathbf{u}|_{k+1}) + C_2 h^k |\text{div } \mathbf{u}|_{k+1}.$$

Ou seja,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div};\Omega)} \leq Ch^k (|\text{div } \mathbf{u}|_{k+1} + h|\mathbf{u}|_{k+1} + h^2|\text{div } \mathbf{u}|_{k+1}). \quad (5.13)$$

- \mathcal{ABF}_k . Da mesma forma, usando (4.32) e (4.32) em (5.11), teremos que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div};\Omega)} \leq Ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1} + |\text{div } \mathbf{u}|_{k+1}). \quad (5.14)$$

- \mathcal{RT}_k^{k+1} . De (4.32) e (4.37) em (5.11), obtemos que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H(\text{div};\Omega)} \leq Ch^{k+1} (|\mathbf{u}|_{k+1} + h|\text{div } \mathbf{u}|_{k+2}). \quad (5.15)$$

5.3.3 Implementação

Usamos condensação estática para eliminar graus de liberdade internos e diminuir a dimensão do problema. Novamente, escrevendo a velocidade como

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{ne} \alpha_i^E \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{ni} \beta_j^E \boldsymbol{\chi}_j(\mathbf{x}), \quad (5.16)$$

segue que, localmente, vamos ter o sistema

$$A^{(E)} \boldsymbol{\alpha}^{(E)} = \mathbf{b}^{(E)}, \quad (5.17)$$

ou

$$\begin{pmatrix} A_* & B_*^T \\ B_* & C_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^E \\ \boldsymbol{\beta}^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_e \\ f_0 \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

onde

- $A_* \in \mathbb{R}^{ne \times ne}$ é dada por

$$(A_*)_{ij} := A(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) = (\Lambda \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i) + \left(\frac{1}{\alpha} \text{div } \boldsymbol{\varphi}_j, \text{div } \boldsymbol{\varphi}_i\right), \quad (5.19)$$

- $B_* \in \mathbb{R}^{ni \times ne}$ é dada por

$$(B_*)_{ij} := A(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\chi}_i) = (\Lambda \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\chi}_i) + \left(\frac{1}{\alpha} \text{div } \boldsymbol{\varphi}_j, \text{div } \boldsymbol{\chi}_i\right), \quad (5.20)$$

- $C_* \in \mathbb{R}^{ni \times ni}$ é dada por

$$(C_*)_{ij} := A(\boldsymbol{\chi}_j, \boldsymbol{\chi}_i) = (\Lambda \boldsymbol{\chi}_j, \boldsymbol{\chi}_i) + \left(\frac{1}{\alpha} \text{div } \boldsymbol{\chi}_j, \text{div } \boldsymbol{\chi}_i\right), \quad (5.21)$$

- $f_e \in \mathbb{R}^{n_e}$ dada por

$$(f_e)_i := g(\varphi_i) = \left(\frac{f}{\alpha}, \operatorname{div} \varphi_i\right) - \langle p_D, \varphi_i \cdot \mathbf{n} \rangle, \quad (5.22)$$

- e $f_0 \in \mathbb{R}^{n_i}$ sendo dada por

$$(f_0)_i := \left(\frac{1}{\alpha} f, \operatorname{div} \chi_i\right). \quad (5.23)$$

Analogamente, podemos condensar as componentes internas da velocidade. Começamos substituindo

$$\beta^E = C_*^{-1}(f_0 - B_* \alpha^E) \quad (5.24)$$

na primeira equação, para obter o seguinte sistema local condensado:

$$(A_* - B_*^T C_*^{-1} B_*) \alpha^E = f_e - B_*^T C_*^{-1} f_0,$$

ou seja,

$$\tilde{K} \alpha^E = \tilde{b}. \quad (5.25)$$

Então espalhamos para a matriz de rigidez e o vetor de carga globais, ficando com um sistema global de equações menor do que o original. Uma vez obtida a solução α , podemos obter β pela equação (5.24).

5.4 Aproximação da Pressão

Com a formulação baseada em fluxo a pressão é obtida via um pós-processamento da velocidade; o que é o contrário da forma primal, onde primeiro se aproxima a pressão. A recuperação do campo escalar pode ocorrer, por exemplo, através da projeção L^2 sobre um subespaço polinomial \mathcal{Q}_h . Nesta seção, veremos que a simples projeção L^2 local fornece um esquema de pós-processamento similar à formulação mista dual. A fim de contornar a perda de otimalidade devido ao caráter não-afim da malha, uma primeira opção consiste em utilizar versões enriquecidas de \mathcal{RT}_k (como a família \mathcal{ABF}_k), através da introdução de novos graus de liberdade a serem condensados.

O uso de projeção L^2 sobre um subespaço polinomial nos permite aproximar a variável escalar posteriormente em relação ao campo de fluxo.

Sobre uma malha quadrilateral geral o espaço $\mathcal{Q}_h = \operatorname{div} \mathbf{V}_h$ pode ser definido de duas formas, dependendo do fato de se usar ou não o mapeamento geométrico para definir funções de base: localmente (mapeado) ou globalmente (não-mapeado). Como o mapeamento geométrico é bilinear, as duas construções não são equivalentes (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013; BOFFI; GASTALDI, 2009). Além disso, devido aos resultados provados em Arnold, Boffi e Falk (2002), decorre que a abordagem *local* para a pressão não pode

atingir ordem de aproximação ótima sobre malha quadrilateral geral (BOFFI; FORTIN; BREZZI, 2013; BOFFI; GASTALDI, 2009). Um exemplo particularmente interessante, neste sentido, é dado pelo emblemático elemento de Stokes $\mathbf{Q}_2 - P_1$ (STENBERG, 1984; BOFFI; GASTALDI, 2002).

A condição inf – sup não desempenha nenhum papel na estabilidade ou acurácia das aproximações para a velocidade, obtidas por (5.7). Entretanto, quando tivermos um par de espaços *geral* não-estável, ela poderá se manifestar quando da recuperação da pressão.

Valor Pontual

Naturalmente, uma primeira forma de pós-processamento consiste em computar a pressão *pontualmente*, em cada elemento $E \in \mathcal{T}_h$, através da equação da continuidade (conservação da massa), i.e.,

$$p_h|_E := \frac{1}{\alpha(\mathbf{x})}(f - \operatorname{div} \mathbf{u}_h)|_E. \quad (5.26)$$

O problema desta abordagem é que f pertence a um espaço que não foi aproximado enquanto $\operatorname{div} \mathbf{u}_h$ pertence a um espaço de dimensão finita. Assim, a pressão forçosamente estará no mesmo espaço que a f , tendo sido subtraída desta função uma aproximação do divergente do fluxo, gerando uma incompatibilidade. Em outras palavras, em (5.26), apenas um termo é aproximado.

Usando que

$$\begin{aligned} p &= (f - \operatorname{div} \mathbf{u})/\alpha, \\ p_h &= (f - \operatorname{div} \mathbf{u}_h)/\alpha, \end{aligned}$$

segue então que

$$\begin{aligned} \|p - p_h\| &= \|(\operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{u}_h)/\alpha\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha_0} \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ou seja, apesar de convergir como o divergente, a aproximação desta forma é muito pobre.

5.4.1 Via Projeção Local

Obtida uma aproximação \mathbf{u}_h para o fluxo, então a pressão pode ser obtida, a nível de elemento, através da projeção L^2 de $(f - \operatorname{div} \mathbf{u}_h)/\alpha(\mathbf{x})$ sobre o espaço do divergente da velocidade, ou seja, sobre cada $E \in \mathcal{T}_h$, p_h é definida variacionalmente através do seguinte problema

$$(p_h, q_h) = \left(\frac{f - \operatorname{div} \mathbf{u}_h}{\alpha(\mathbf{x})}, q_h \right), \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h, \quad (5.28)$$

onde

$$\mathcal{Q}_h|_E = \hat{\mathcal{Q}} \circ \mathbf{F}_E^{-1}, \quad (5.29)$$

podendo ser $\hat{\mathcal{Q}} = \operatorname{div} \mathcal{RT}_k(\hat{E})$ ou $\hat{\mathcal{Q}} = \operatorname{div} \mathcal{ABF}_k$. Assim, conclui-se que este esquema, com a pressão recuperada desta forma, é similar ao método misto dual no caso de malhas afins. Esta semelhança não se verifica no caso de malhas quadrilaterais gerais.

5.4.2 Análise de Convergência

Diferentemente da Formulação Mista Dual, onde temos um acoplamento entre as variáveis \mathbf{u} e p dado através da estimativa (4.46), a pressão aqui obtida terá erro dependendo apenas do erro no divergente do campo vetorial. Inicialmente, para todo $E \in \mathcal{T}_h$, temos que

$$(p_h, q_h)_E = \left(\frac{f - \operatorname{div} \mathbf{u}_h}{\alpha}, q_h \right)_E, \quad (5.30)$$

$$(p, q_h)_E = \left(\frac{f - \operatorname{div} \mathbf{u}}{\alpha}, q_h \right)_E, \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h. \quad (5.31)$$

Decorre então que

$$(p - p_h, q_h) = \left(\frac{\operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \mathbf{u}_h}{\alpha}, q_h \right), \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h, \quad (5.32)$$

e o erro é dado pela projeção L^2 do erro no divergente sobre o espaço \mathcal{Q}_h escolhido.

Assim, usando as estimativas de erro para o divergente das diferentes famílias utilizadas, obteremos as respectivas estimativas de erro globais para a aproximação sobre malhas quadrilaterais gerais. Ou seja, supondo que a solução \mathbf{u} seja suficientemente regular, vamos obter as seguintes estimativas sobre malhas quadrilaterais não-afins:

- \mathcal{RT}_k . Usando a estimativa (4.23), segue que

$$\|p - p_h\| \leq Ch^k |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{k+1}. \quad (5.33)$$

- \mathcal{ABF}_k . Analogamente, usando a estimativa (4.33), obteremos que

$$\|p - p_h\| \leq Ch^{k+1} |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{k+1}. \quad (5.34)$$

- \mathcal{RT}_k^{k+1} . Usando a estimativa (4.37), obtemos a estimativa melhorada

$$\|p - p_h\| \leq Ch^{k+2} |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{k+2}. \quad (5.35)$$

5.5 Experimentos numéricos

Nesta seção, exibimos tabelas e gráficos de convergência para analisar a solução obtida via projeção L^2 local. Vamos utilizar as famílias de espaços \mathcal{RT}_k e \mathcal{ABF}_k , com $k = 0, 1, 2$, assim como enriquecimentos maiores em \mathcal{RT}_k^{k+1} . Consideramos também a pressão pós-processada através da projeção L^2 de $(f - \text{div } \mathbf{u}_h)/\alpha(\mathbf{x})$ sobre o espaço $\text{div } \mathcal{V}_h$.

Assim como visto para a aproximação Mista Dual, o emprego de \mathcal{ABF}_k é uma primeira forma de recobrar a perda de otimalidade devida à deformação da malha.

Experimento numérico com: $K = 1 + 10x$ e $\alpha(\mathbf{x}) = \exp(1 - (x^2 + y^2))$. Lembrando que, para este caso, a fonte f é dada por

$$f(x, y) = \alpha p(\mathbf{x}) + \text{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x})),$$

com

$$p = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (5.36)$$

e

$$\mathbf{u} = -K(x)\pi \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Ilustrando a Projeção Pontual

A Tabela (4) seguinte pretende ilustrar quão pobre é a pressão obtida via pós-processamento *pontual* do campo de fluxo, empregando-se os espaços \mathcal{RT}_k , com $k = 0, 1$ e 2 . Para isso, estamos comparando com o clássico Misto Dual, os erros na norma de L^2 .

Tabela 4 – Comparando as pressões obtidas no Misto Dual e no pós-processamento *pontual*, usando \mathcal{RT}_k .

n	dof	Misto		Pontual	
		erro	ordem	erro	ordem
Pressão obtida usando-se \mathcal{RT}_0 em malha de quadrados					
4	40	1,576e-01		2,073e+01	
8	144	7,984e-02	0,9812	1,088e+01	0,9305
16	544	4,004e-02	0,9956	5,50597	0,9826
32	2112	2,003e-02	0,9989	2,76123	0,9956
64	8320	1,001e-02	0,9997	1,38165	0,9989
Pressão obtida usando-se \mathcal{RT}_0 em malha de trapézios					
4	40	1,618e-01		2,198e+01	
8	144	8,220e-02	0,9776	1,357e+01	0,6957
16	544	4,125e-02	0,9945	9,82281	0,4666
32	2112	2,064e-02	0,9985	8,58282	0,1946
64	8320	1,032e-02	0,9996	8,24011	0,0587
Pressão obtida usando-se \mathcal{RT}_1 em malha de quadrados					
4	80	1,614e-02		2,64926	
8	288	4,055e-03	1,9929	6,586e-01	2,0080
16	1088	1,015e-03	1,9979	1,644e-01	2,0017
32	4224	2,539e-04	1,9994	4,110e-02	2,0004
64	16640	6,349e-05	1,9998	1,027e-02	2,0001
Pressão obtida usando-se \mathcal{RT}_1 em malha de trapézios					
4	80	1,875e-02		3,59991	
8	288	4,728e-03	1,9880	1,28398	1,4873
16	1088	1,184e-03	1,9967	5,621e-01	1,1915
32	4224	2,963e-04	1,9991	2,705e-01	1,0553
64	16640	7,410e-05	1,9997	1,339e-01	1,0138
Pressão obtida usando-se \mathcal{RT}_2 em malha de quadrados					
4	120	1,071e-03		1,553e-01	
8	432	1,346e-04	2,9924	2,036e-02	2,9316
16	1632	1,685e-05	2,9980	2,574e-03	2,9834
32	6336	2,107e-06	2,9994	3,227e-04	2,9959
64	24960	2,634e-07	2,9998	4,037e-05	2,9989
Pressão obtida usando-se \mathcal{RT}_2 em malha de trapézios					
4	120	1,492e-03		4,344e-01	
8	432	1,879e-04	2,9888	9,252e-02	2,2314
16	1632	2,354e-05	2,9971	2,181e-02	2,0847
32	6336	2,944e-06	2,9992	5,350e-03	2,0273
64	24960	3,680e-07	2,9998	1,328e-03	2,0094
128	99072	4,601e-08	2,9999	3,314e-04	2,0036

5.5.1 Experimentos com os Espaços Originais

Na Tabela (5), é possível ver que os resultados sobre malhas de trapézios não são tão bons quanto sobre malhas de quadrados. Em particular, podemos ver que os resultados são comparáveis aos obtidos em [Arnold, Boffi e Falk \(2005, Table 3\)](#) para o Método de Mínimos Quadrados aplicado ao problema de Poisson.

Tabela 5 – Esquema em velocidade: erros e ordem de convergência para \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 .

n	dof	$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
		erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
FB – \mathcal{RT}_0 em malha de quadrados							
2	12	2,991e-01		7,2517		3,941e+01	
4	40	1,578e-01	0,922	3,6076	1,007	22,074	0,836
8	144	7,986e-02	0,982	1,7796	1,019	11,312	0,964
16	544	4,004e-02	0,996	8,862e-01	1,005	5,6900	0,991
32	2112	2,003e-02	0,999	4,426e-01	1,001	2,8492	0,997
64	8320	1,001e-02	0,999	2,212e-01	1,000	1,4251	0,999
FB – \mathcal{ABF}_0 em malha de quadrados							
2	12	1,780e-01		7,2821		1,660e+01	
4	40	4,239e-02	2,070	3,5963	1,017	4,7046	1,819
8	144	1,047e-02	2,016	1,7780	1,016	1,2064	1,963
16	544	2,612e-03	2,003	8,860e-01	1,004	3,034e-01	1,991
32	2112	6,526e-04	2,000	4,426e-01	1,001	7,598e-02	1,997
64	8320	1,631e-04	2,000	2,212e-01	1,000	1,900e-02	1,999
FB – \mathcal{RT}_0 em malha de trapézios							
2	12	2,4557		7,4201		4,080e+01	
4	40	2,2698	0,113	3,8825	0,934	24,286	0,748
8	144	1,5986	0,505	1,9709	0,978	15,059	0,689
16	544	1,3003	0,297	1,0291	0,937	11,387	0,403
32	2112	1,2076	0,106	5,823e-01	0,821	10,247	0,152
64	8320	1,1828	0,029	3,962e-01	0,555	9,9405	0,043
FB – \mathcal{ABF}_0 em malha de trapézios							
2	12	1,6944		7,1562		1,789e+01	
4	40	8,047e-01	1,074	3,7171	0,945	6,8236	1,391
8	144	3,828e-01	1,071	1,8721	0,989	2,7629	1,304
16	544	1,811e-01	1,079	9,430e-01	0,989	1,2796	1,110
32	2112	8,896e-02	1,025	4,735e-01	0,993	6,261e-01	1,031
64	8320	4,427e-02	1,006	2,373e-01	0,996	3,113e-01	1,008

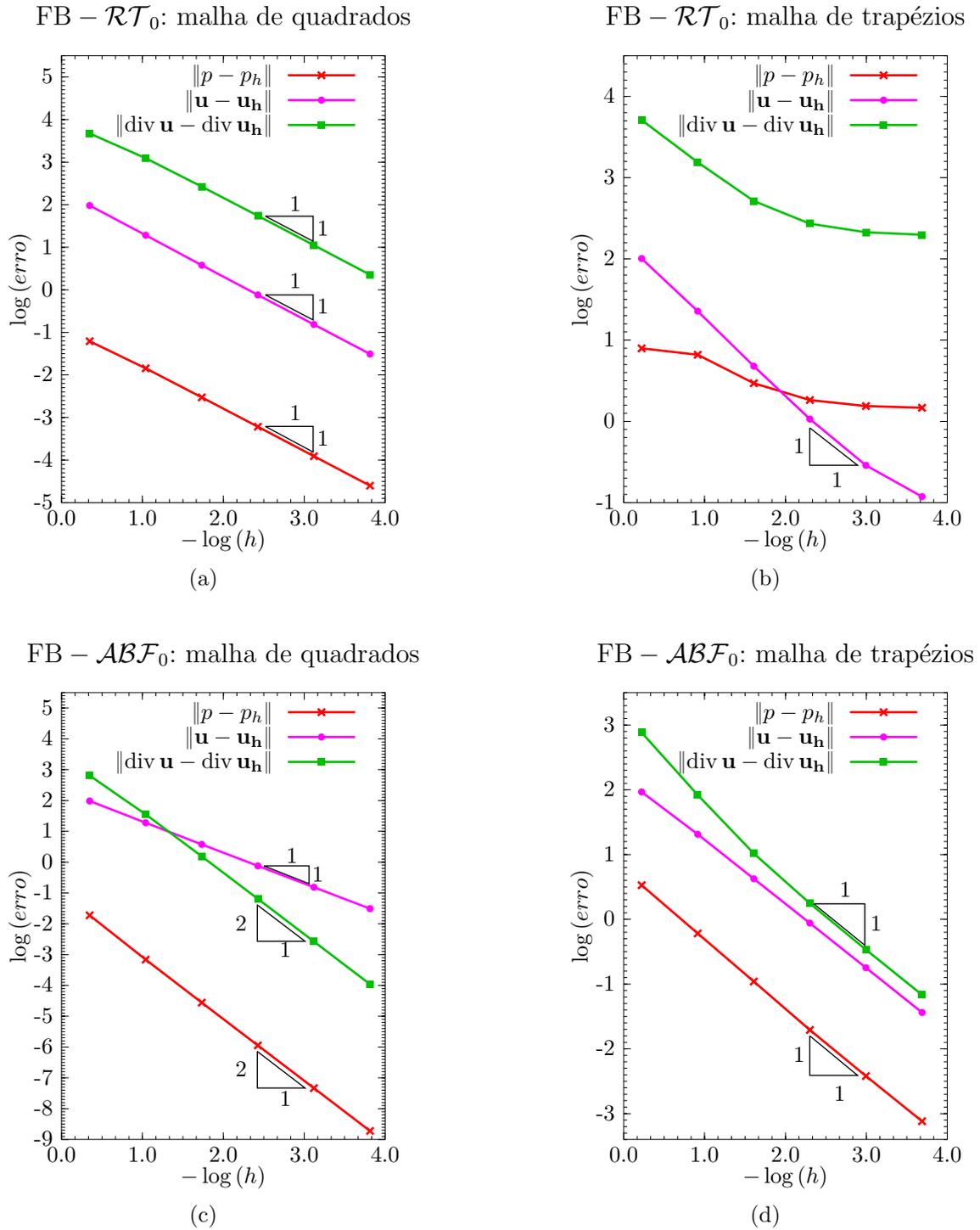


Figura 14 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método FB usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 , na norma L^2 , sobre malha de quadrados ((a) e (c)) e trapézios ((b) e (d)).

Tabela 6 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método FB usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 .

n	dof	$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
		erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
FB – \mathcal{RT}_1 em malha de quadrados							
2	24	6,385e-02		1,8446		1,209e+01	
4	80	1,616e-02	1,982	4,462e-01	2,047	2,99719	2,012
8	288	4,056e-03	1,994	4,462e-01	2,011	7,496e-01	1,999
16	1088	1,015e-03	1,998	2,761e-02	2,003	1,874e-01	1,999
32	4224	2,539e-04	1,999	6,899e-03	2,000	4,686e-02	1,999
64	16640	6,349e-05	1,999	1,724e-03	2,000	1,171e-02	1,999
FB – \mathcal{ABF}_1 em malha de quadrados							
2	24	1,873e-02		1,3141		1,7356	
4	80	5,136e-03	1,866	4,014e-01	1,710	2,091e-01	3,052
8	288	7,999e-04	2,682	1,077e-01	1,897	2,578e-02	3,020
16	1088	1,061e-04	2,914	2,742e-02	1,973	3,210e-03	3,005
32	4224	1,347e-05	2,977	6,887e-03	1,993	4,009e-04	3,001
64	16640	1,691e-06	2,994	1,723e-03	1,998	5,010e-05	3,000
FB – \mathcal{RT}_1 em malha de trapézios							
2	24	1,3668		1,9818		1,355e+01	
4	80	4,281e-01	1,674	4,548e-01	2,123	3,9483	1,779
8	288	1,614e-01	1,406	1,127e-01	2,012	1,3973	1,498
16	1088	7,291e-02	1,147	2,813e-02	2,002	6,036e-01	1,210
32	4224	3,545e-02	1,040	7,032e-03	2,000	2,886e-01	1,064
64	16640	1,760e-02	1,009	1,758e-03	1,999	1,426e-01	1,017
FB – \mathcal{ABF}_1 em malha de trapézios							
2	24	2,938e-01		1,6517		2,8946	
4	80	5,523e-02	2,411	4,302e-01	1,940	4,799e-01	2,592
8	288	1,202e-02	2,199	1,135e-01	1,922	1,011e-01	2,247
16	1088	2,864e-03	2,070	2,881e-02	1,978	2,393e-02	2,078
32	4224	7,047e-04	2,022	7,232e-03	1,994	5,896e-03	2,021
64	16640	1,751e-04	2,008	1,810e-03	1,998	1,468e-03	2,005

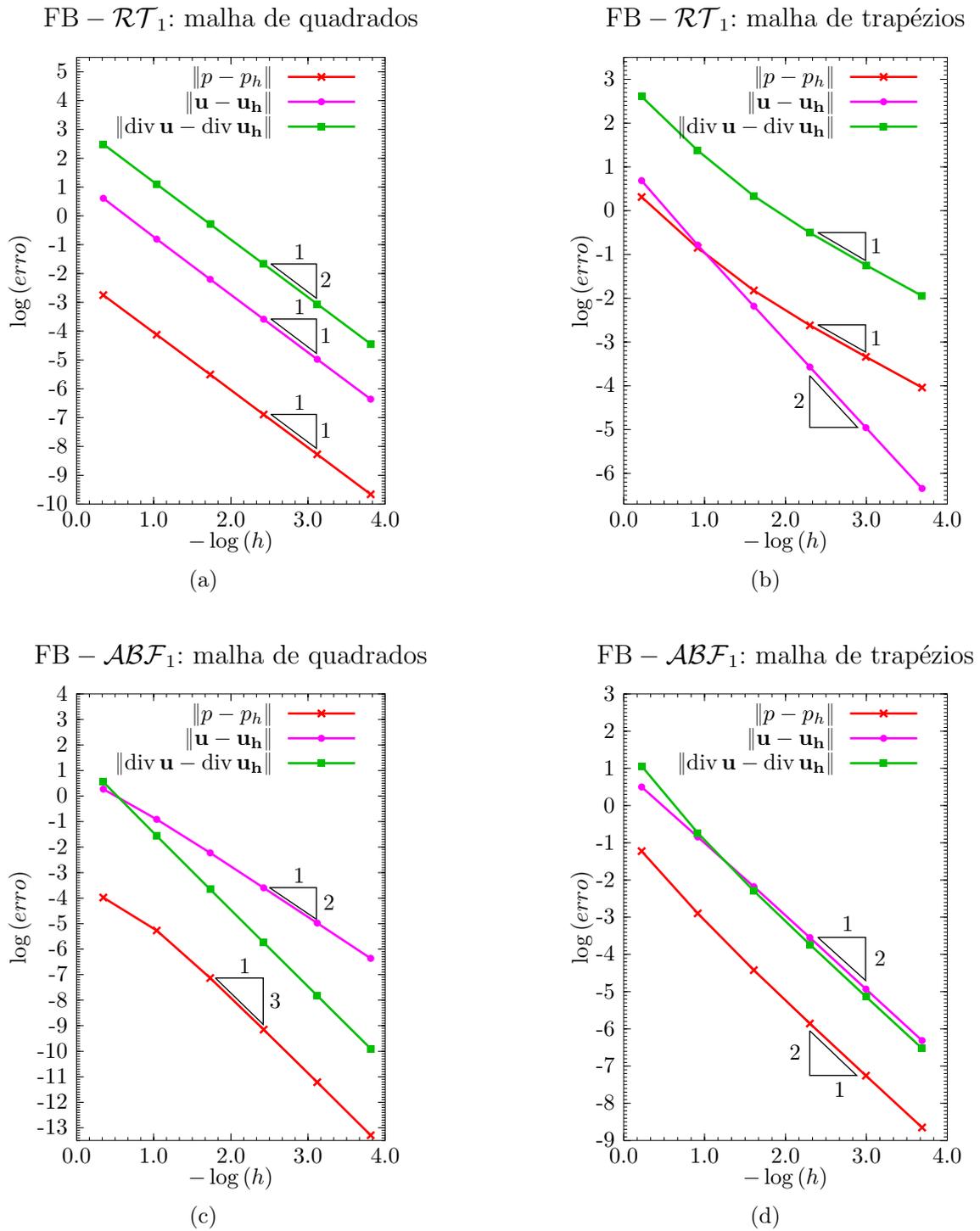


Figura 15 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método FB usando \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 , na norma L^2 , sobre malha de quadrados ((a) e (c)) e trapézios ((b) e (d)).

Tabela 7 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método FB usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2 .

n	dof	$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
		erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
FB – \mathcal{RT}_2 em malha de quadrados							
2	36	8,488e-03		2,287e-01		1,46724	
4	120	1,071e-03	2,985	2,996e-02	2,932	2,005e-01	2,870
8	432	1,346e-04	2,992	3,775e-03	2,988	2,547e-02	2,976
16	1632	1,685e-05	2,998	4,728e-04	2,997	3,196e-03	2,994
32	6336	2,107e-06	2,999	5,913e-05	2,999	3,998e-04	2,998
64	24960	2,634e-07	2,999	7,760e-06	2,929	4,999e-05	2,999
FB – \mathcal{ABF}_2 em malha de quadrados							
2	36	1,107e-03		2,293e-01		2,248e-01	
4	120	5,713e-05	4,276	2,994e-02	2,937	1,372e-02	4,034
8	432	3,392e-06	4,073	3,774e-03	2,987	8,554e-04	4,004
16	1632	2,094e-07	4,018	4,728e-04	2,997	5,343e-05	4,001
32	6336	1,304e-08	4,004	5,913e-05	2,999	3,339e-06	4,000
64	24960	9,850e-10	3,727	7,754e-06	2,930	2,086e-07	4,000
FB – \mathcal{RT}_2 em malha de trapézios							
2	36	2,702e-01		2,754e-01		2,5866	
4	120	5,367e-02	2,332	3,451e-02	2,996	4,551e-01	2,506
8	432	1,173e-02	2,193	4,323e-03	2,997	9,760e-02	2,221
16	1632	2,798e-03	2,068	5,408e-04	2,998	2,323e-02	2,071
32	6336	6,888e-04	2,022	6,765e-05	2,998	5,732e-03	2,018
64	24960	1,712e-04	2,008	3,194e-05	1,083	1,428e-03	2,005
FB – \mathcal{ABF}_2 em malha de trapézios							
2	36	3,146e-02		2,571e-01		3,847e-01	
4	120	3,574e-03	3,138	3,316e-02	2,954	3,791e-02	3,343
8	432	4,459e-04	3,003	4,179e-03	2,988	4,199e-03	3,174
16	1632	5,590e-05	2,995	5,236e-04	2,996	5,063e-04	3,052
32	6336	7,017e-06	2,994	6,553e-05	2,998	6,270e-05	3,013
64	24960	8,799e-07	2,995	2,920e-05	2,608	7,819e-06	3,003

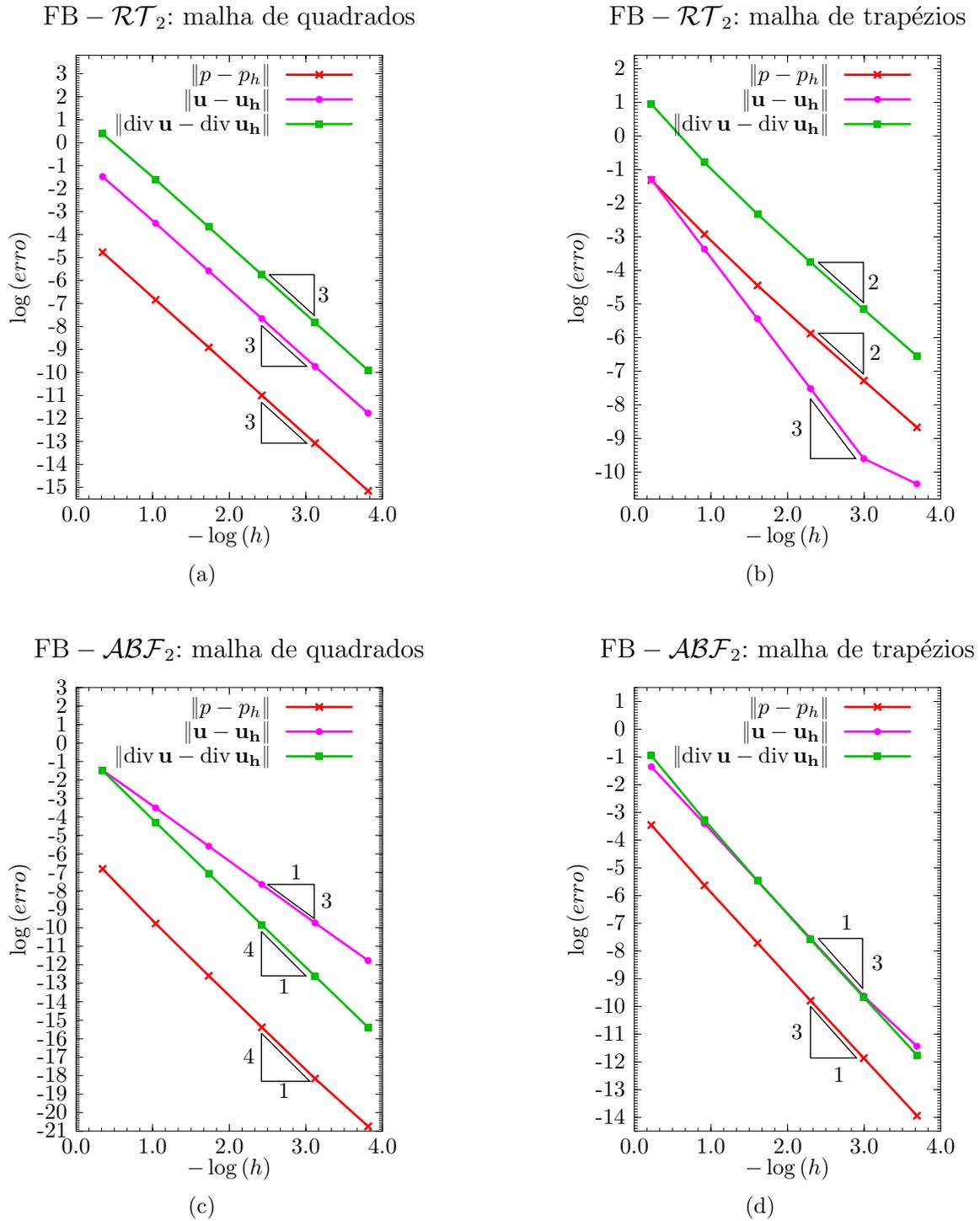


Figura 16 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método FB usando \mathcal{RT}_2 e \mathcal{ABF}_2 , na norma L^2 , sobre malha de quadrados ((a) e (c)) e trapézios ((b) e (d)).

5.5.1.1 Tempo Computacional

Vamos exibir o tempo computacional gasto pela estratégia baseada em fluxo (FB) utilizando os espaços \mathcal{RT}_0 , \mathcal{ABF}_0 , \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 sobre malhas de quadrados. Trata-se de um experimento ilustrativo, onde não foi feito um estudo estatístico dos resultados pelo fato de observar-se uma certa uniformidade nos tempos calculados. O objetivo consiste em avaliar os diferentes aspectos de implementação e seus efeitos sobre o tempo de execução.

A Tabela 8 mostra o tempo de execução (`cpu_time`) *total*, em segundos, assim como os percentuais do mesmo gastos nos principais estágios: montagem (`assbl`), solução do sistema algébrico (`slv`) e pós-processamento (`pp`).

O sistema algébrico resolvido é aquele montado a partir de (5.25). Além disso, os resultados reportados nesta seção, rodados com precisão dupla, são referentes a uma máquina com as seguintes características:

- processador Intel[®] Core[™] i5;
- clock de 2.7 GHz;
- memória RAM de 6 GB;
- sistema operacional de 64 bits.

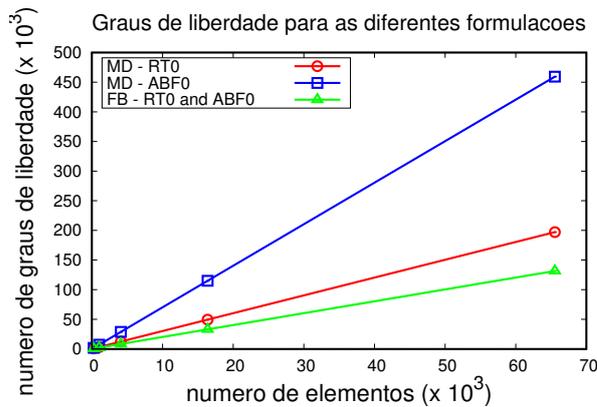
Com base na Tabela 8 é possível ver que a montagem do sistema algébrico compete com a resolução do sistema algébrico até certa ordem de complexidade. Como esperado, conforme cresce a dimensão do sistema algébrico condensado, uma maior exigência computacional recai sobre a resolução do sistema algébrico.

Observação 2. *O método misto híbrido fornece um sistema algébrico final com o mesmo número de incógnitas ou graus de liberdade (ndof), mesma esparsidade e um custo computacional equivalente.*

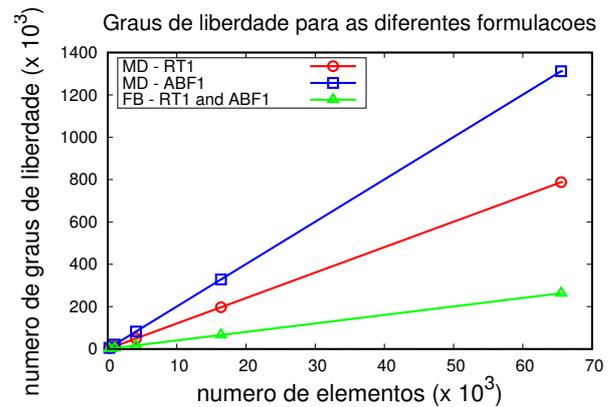
A Figura 17 compara o número *total* de graus de liberdade e o número de elementos para as diferentes formulações, considerando as famílias \mathcal{RT}_k e \mathcal{ABF}_k , com $k = 0, 1$. Nesta mesma figura, os graus de liberdade para a formulação Mista Dual (MD) correspondem ao total sem condensação das incógnitas relativas à pressão descontínua e dos fluxos internos.

Tabela 8 – Tempo computacional na resolução do problema com $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$ sobre malha de quadrados.

		FB – \mathcal{RT}_0				FB – \mathcal{ABF}_0			
n	ndof	cpu_time(s)	assbl(%)	slv(%)	pp(%)	cpu_time(s)	assbl(%)	slv(%)	pp(%)
16	544	1.646E-02	76.2	2.8	14.1	2.501E-02	77.9	1.7	15.8
32	2112	7.259E-02	70.5	9.3	13.7	1.100E-01	72.9	6.1	16.6
64	8320	3.555E-01	51.3	30.8	10.2	4.958E-01	58.7	22.0	13.6
128	33024	6.168E+00	12.1	82.5	2.4	6.745E+00	18.0	75.4	3.9
256	131584	1.445E+02	2.4	96.1	0.5	1.475E+02	3.4	94.7	1.1
		FB – \mathcal{RT}_1				FB – \mathcal{ABF}_1			
n	ndof	cpu_time(s)	assbl(%)	slv(%)	pp(%)	cpu_time(s)	assbl(%)	slv(%)	pp(%)
16	1088	7.837E-02	85.2	4.6	7.5	1.349E-01	85.4	2.9	10.2
32	4224	3.634E-01	70.4	19.3	6.8	5.603E-01	75.7	12.5	9.6
64	16640	3.821E+00	26.2	68.9	2.7	4.841E+00	38.5	54.6	5.1
128	66048	8.170E+01	5.0	93.7	0.5	8.410E+01	9.0	89.1	1.1
256	263168	1.936E+03	1.3	98.2	0.2	1.953E+03	2.1	97.2	0.3



(a)



(b)

 Figura 17 – Complexidade para as formulações mista dual (MD), sem condensação, e baseada em fluxo (FB) utilizando: (a) \mathcal{RT}_0 e \mathcal{ABF}_0 (b) \mathcal{RT}_1 e \mathcal{ABF}_1 .

5.5.2 Experimentos com os Espaços Enriquecidos

A Tabela 9 abaixo mostra erros e ordem de convergência para o esquema com projeção *local* usando os espaços *enriquecidos* introduzidos no capítulo anterior.

Tabela 9 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: erros e ordem de convergência para o método em fluxo FB usando-se os espaços \mathcal{RT}_0^1 e \mathcal{RT}_1^2 .

n	dof	$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
		erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
FB – \mathcal{RT}_0^1 em malha de quadrados							
2	12	1,346e-01		6,2439		1,7496	
4	40	3,812e-02	1,820	3,3598	0,894	2,186e-01	3,000
8	144	9,810e-03	1,958	1,7183	0,967	3,059e-02	2,836
16	544	2,469e-03	1,989	8,641e-01	0,991	5,253e-03	2,542
32	2112	6,184e-04	1,997	4,327e-01	0,997	1,116e-03	2,234
64	8320	1,546e-04	1,999	2,164e-01	0,999	2,654e-04	2,072
FB – \mathcal{RT}_0^1 em malha de trapézios							
2	12	3,224e-01		6,1706		2,9049	
4	40	6,891e-02	2,226	3,4786	0,826	4,850e-01	2,582
8	144	1,639e-02	2,071	1,8060	0,945	1,028e-01	2,237
16	544	4,068e-03	2,010	9,184e-01	0,975	2,444e-02	2,073
32	2112	1,018e-03	1,998	4,625e-01	0,989	6,031e-03	2,018
64	8320	2,549e-04	1,997	2,320e-01	0,995	1,503e-03	2,004
FB – \mathcal{RT}_1^2 em malha de quadrados							
2	24	7,311e-03		1,0981		2,249e-01	
4	80	1,148e-03	2,669	2,539e-01	2,112	1,387e-02	4,019
8	288	1,582e-04	2,860	6,284e-02	2,014	9,026e-04	3,941
16	1088	2,090e-05	2,920	1,571e-02	1,999	6,599e-05	3,773
32	4224	2,704e-06	2,950	3,935e-03	1,997	6,059e-06	3,445
64	16640	3,451e-07	2,969	9,848e-04	1,998	6,813e-07	3,152
FB – \mathcal{RT}_1^2 em malha de trapézios							
2	24	3,303e-02		1,3714		3,849e-01	
4	80	3,800e-03	3,119	2,862e-01	2,260	3,797e-02	3,341
8	288	4,780e-04	2,990	7,129e-02	2,005	4,212e-03	3,172
16	1088	6,024e-05	2,988	1,783e-02	1,999	5,083e-04	3,050
32	4224	7,584e-06	2,989	4,462e-03	1,998	6,296e-05	3,013
64	16640	9,527e-07	2,992	1,116e-03	1,998	7,853e-06	3,003

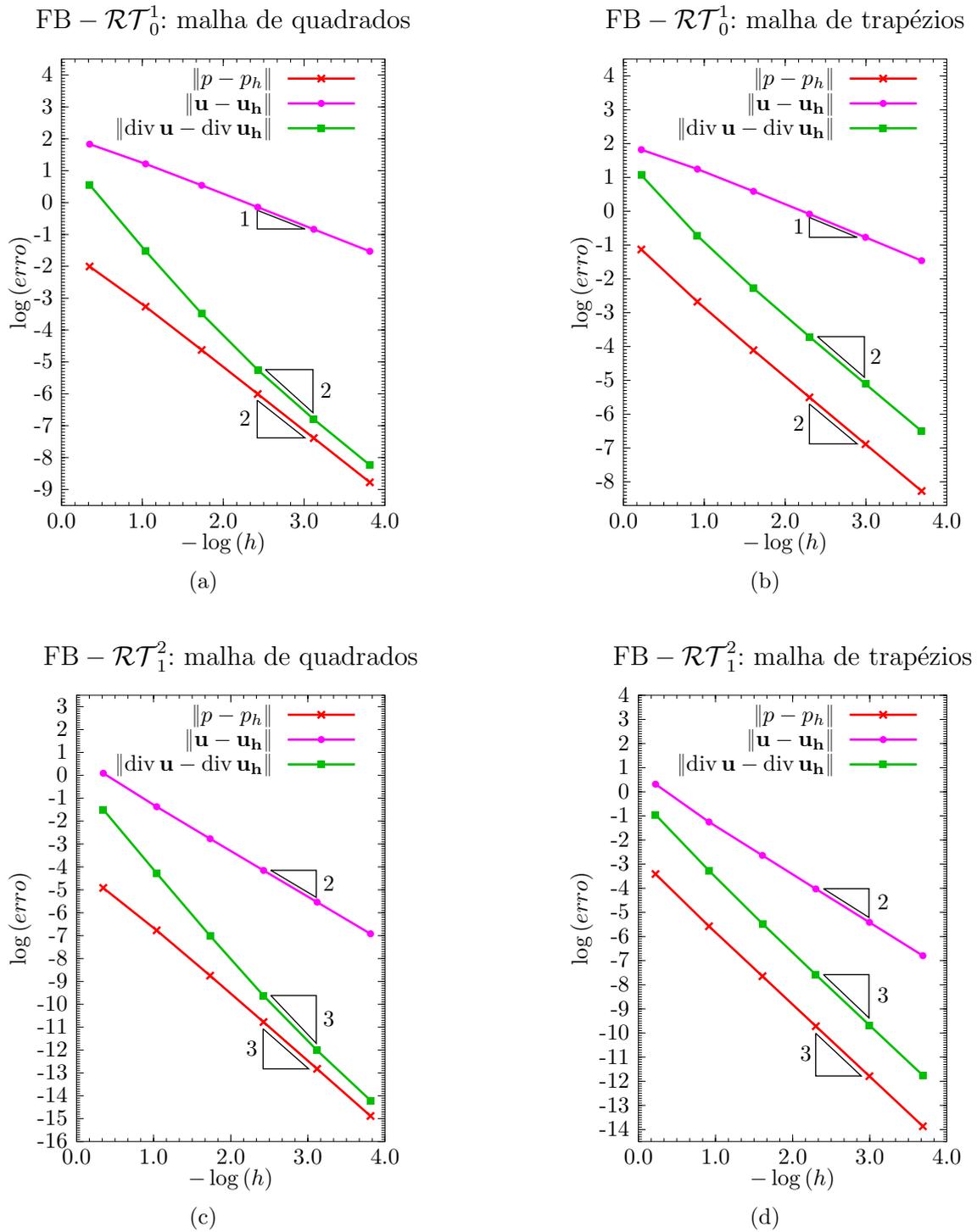


Figura 18 – Estudo de convergência para $k = 1 + 10x$ e $\alpha = \exp(1 - (x^2 + y^2))$: taxas para o método FB usando \mathcal{RT}_0^1 e \mathcal{RT}_1^2 , na norma de L^2 , sobre malha de quadrados ((a) e (c)) e trapézios ((b) e (d)).

5.6 Formulação com o Divergente Projetado

Até então, a questão da otimalidade foi contemplada através da escolha de espaços enriquecidos tal como o \mathcal{ABF}_k . Nesta seção, apresentaremos uma alternativa para a obtenção de soluções mais precisas em malhas não-afins através do emprego de uma projeção do divergente do fluxo. Isto nos permite, em especial, obter otimalidade sobre malhas não afins obtidas por mapeamentos bilineares, sem a necessidade de enriquecimentos de \mathcal{RT}_k . Para isso, de forma equivalente, vamos usar uma integração reduzida.

Em [Bochev e Rizdal \(2008\)](#), como forma de reabilitar a aproximação do divergente sobre malhas não-afins, usando \mathcal{RT}_0 , os autores consideram uma modificação do operador divergente tipicamente utilizada nos métodos do tipo mimetismo. A estratégia que consideramos é bem mais simples e nos permite obter otimalidade sobre malhas não-afins usando \mathcal{RT}_0 .

5.6.1 Aproximação do Fluxo

A fim de se valer da equivalência com o método misto dual **MD** usando \mathcal{RT}_k , uma estratégia simples consiste em usar projeção L^2 sobre Q_k . Alguns métodos como, por exemplo, os métodos de diferenças finitas do tipo *mimetismo* ([LIPNIKOV; MANZINI; SHASHKOV, 2014](#); [BERNDT et al., 2005](#)), usam uma quadratura modificada a fim de obter uma discretização equivalente à mista dual. No caso de malhas quadrilaterais, dado o caráter tensorial de Q_k , essa projeção L^2 pode ser feita através do uso de uma integração reduzida ([BOFFI; KIKUCHI; SCHOBERL, 2006](#)) e isso representa uma grande simplicidade. Dessa forma, o esquema em fluxo **FB** pode ser visto como uma quadratura modificada.

Vamos considerar, como antes, o espaço global de Raviart-Thomas de índice k

$$\mathcal{V}_h^k := \{\mathbf{v}_h \in H(\text{div}; \Omega); \mathbf{v}_h|_E \in \mathbf{P}_F(\mathcal{RT}_k), \forall E \in \mathcal{T}_h\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

e, para um dado subespaço $\mathcal{Q}_h \subset L^2(\Omega)$, denotamos por $\mathcal{P}_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{Q}_h$ o operador de projeção, definido por

$$\int_{\Omega} (\mathcal{P}_h q - q) \psi_h \, dx = 0, \quad \forall \psi_h \in \mathcal{Q}_h.$$

Assim, vamos introduzir o seguinte esquema em fluxo

FB com Divergente Projetado: encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h^k$ tal que

$$\bar{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \bar{g}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \quad (5.39)$$

desta vez com

$$\bar{A}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := (\Lambda \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \left(\mathcal{P}_h \left(\frac{\text{div } \mathbf{u}_h}{\alpha} \right), \mathcal{P}_h(\text{div } \mathbf{v}_h) \right). \quad (5.40)$$

$$\bar{g}(\mathbf{v}_h) := \left(\frac{f}{\alpha}, \mathcal{P}_h(\text{div } \mathbf{v}_h) \right) - \langle p_D, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle. \quad (5.41)$$

5.6.2 Aproximação da Pressão

Neste caso, a fim de obtermos uma aproximação equivalente à aproximação mista dual **MD**, vamos definir a aproximação da pressão como sendo a projeção L^2 sobre Q_k :

$$p_h = \mathcal{P}_h \left(\frac{f - \operatorname{div} \mathbf{u}_h}{\alpha} \right), \quad (5.42)$$

ou seja, tal que

$$(p_h, q_h) = \left(\frac{f - \operatorname{div} \mathbf{u}_h}{\alpha}, q_h \right), \quad \forall q_h \in Q_k. \quad (5.43)$$

Definimos esta projeção (global) através de pontos de integração $\hat{\mathbf{x}}_l$ definidos no quadrado de referência \hat{E} , os quais podem ser obtidos pelo produto tensorial de pontos da quadratura gaussiana unidimensional, i.e., $\hat{\mathbf{x}}_l = (\xi_{l_1}, \eta_{l_2})$. Na quadratura gaussiana unidimensional, com $m \geq 1$ pontos de integração, pode-se integrar exatamente polinômios de grau até $2m - 1$, ou seja, ξ^{2m-1} . Assim, podemos definir a projeção \mathcal{P}_h sobre Q_k através dos pontos $\mathbf{x}_l = \mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}}_l)$ (PRENTER, 1975):

$$q_h := \mathcal{P}_h q \in Q_k(E) \iff q(\mathbf{x}_l) = q_h(\mathbf{x}_l). \quad (5.44)$$

Em vez de calcularmos explicitamente a projeção $\mathcal{P}_h q$ através de (5.44), vejamos que podemos usar, de maneira mais simples, uma integração reduzida. Primeiro, notemos que, como $|J_E| \in P_1(\hat{E})$ (A), decorre que

$$\underbrace{\mathcal{P}(\hat{\operatorname{div}} \mathbf{u}_h)}_{\in Q_k} \underbrace{\mathcal{P}(\hat{\operatorname{div}} \mathbf{v}_h)}_{\in Q_k} \underbrace{|J_E|}_{\in P_1} \in Q_{2k+1}(\hat{E}). \quad (5.45)$$

Assim, dada uma função $q_h \in Q_{2k+1}$, consideremos a quadratura *reduzida*:

$$\int_{\hat{E}} \hat{q}_h d\hat{\mathbf{x}} = \sum_{l=1}^{(k+1)^2} w_l \hat{q}_h(\hat{\mathbf{x}}_l). \quad (5.46)$$

Vemos que esta quadratura é de fato exata para funções polinomiais em Q_{2k+1} pois $2(k+1) - 1 = 2k + 1$. Logo, a projeção \mathcal{P}_k pode ser dada através dos pontos \mathbf{x}_l definidos nesta quadratura. Com isso, a pressão pode ser dada por

$$p_h|_E(\mathbf{x}_l^{(E)}) = \frac{f(\mathbf{x}_l^{(E)}) - \operatorname{div} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}_l^{(E)})}{\alpha(\mathbf{x}_l^{(E)})}, \quad E \in \mathcal{T}_h, \quad (5.47)$$

onde $\mathbf{x}_l^{(E)} = \mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}}_l)$. Podemos então definir o seguinte produto interno discreto associado à regra de quadratura

$$(p, q)_h = \sum_E \sum_{l=1}^{(k+1)^2} w_l p(\mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}}_l)) q(\mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}}_l)) |J_E(\hat{\mathbf{x}}_l)|. \quad (5.48)$$

5.6.3 Experimentos Numéricos

Os experimentos numéricos se referem somente ao caso $k = 0$. A Tabela 10 abaixo mostra a convergência obtida quando se emprega a estratégia de projeção do divergente. Tal estratégia foi realizada através de uma integração reduzida.

Tabela 10 – Erros e ordem de convergência para \mathcal{RT}_0 sobre malha de trapézios.

n	dof	$\ p - p_h\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathcal{P}\nabla \cdot \mathbf{u}_h\ $	
		erro	ordem	erro	ordem	erro	ordem
FB – \mathcal{RT}_0 global em malha de trapézios							
2	12	1,894e+01		7,1030		3,876e+01	
4	40	5,3197	1,832	3,7783	0,910	2,262e+01	0,776
8	144	1,3510	1,977	1,9130	0,981	1,161e+01	0,961
16	544	3,402e-01	1,989	9,667e-01	0,984	5,8474	0,990
32	2112	8,694e-02	1,968	4,861e-01	0,991	2,9283	0,997
64	8320	2,350e-02	1,887	2,436e-01	0,996	1,4647	0,999

Observação 3. Como tal estratégia somente faz sentido para malhas não-afins, a Tabela 10 não considera malhas de quadrados.

6 Aplicações

Neste capítulo consideramos a aplicação da metodologia baseada em fluxo proposta, a problemas de escoamentos em meios porosos. Em particular, consideramos meios homogêneos e altamente heterogêneos e com interface de descontinuidade.

Nos experimentos a seguir, tomou-se $\alpha = 10^{-8}$ e $f = 0$ em (3.2). Além disso, foram utilizados apenas os espaços \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 . No caso do espaço \mathcal{RT}_1 , será interessante verificar sua capacidade em obter uma aproximação mais regular não apenas na direção do fluxo normal, mas também na direção de fluxo tangencial.

6.1 Escoamento com Barreiras

Neste exemplo foi considerado um domínio quadrado com $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$ contendo duas barreiras (onde $k = 10^{-5} \text{ m/dia}$), sendo $k = 1.0 \text{ m/dia}$ a condutividade para o escoamento. A Figura 19 ilustra o domínio do meio poroso (cf. (CORREA, 2006)).

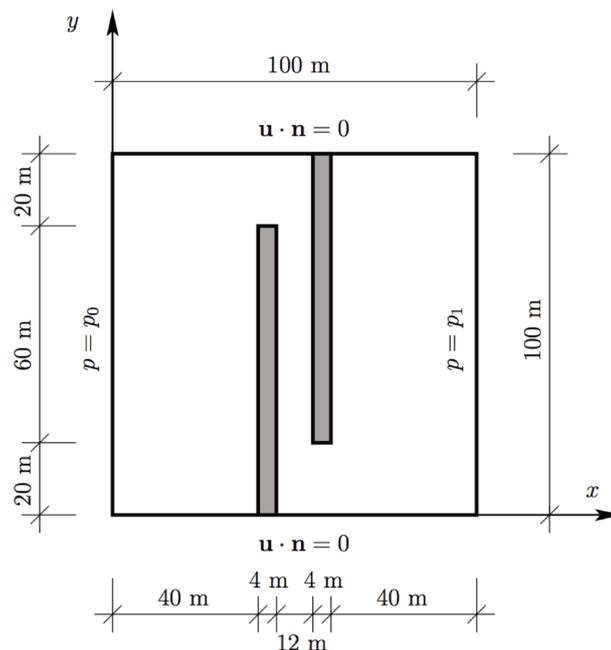


Figura 19 – Domínio do escoamento com barreiras.

Tomou-se uma malha com 25×25 elementos (quadrados ou trapezoidais). Para o domínio, tomou-se os seguintes dados de contorno (veja Figuras 19 e 20):

- $p_0 = 1.0$ no lado esquerdo (entrada);
- $p_1 = 0$ no lado direito (saída);

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre os lados inferior e superior.

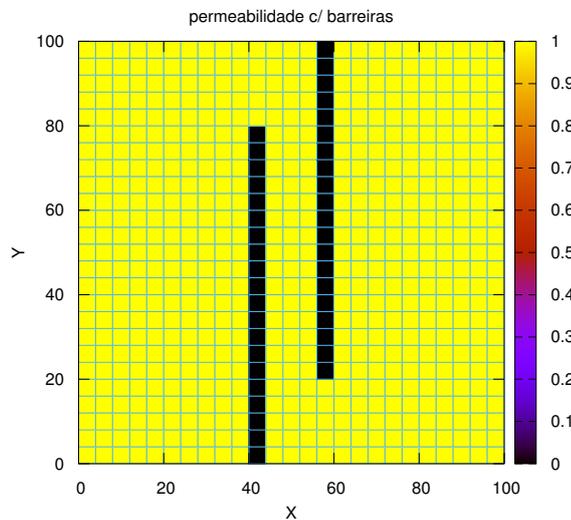


Figura 20 – Malha de elementos finitos.

O objetivo principal deste experimento consiste em verificar a característica de que a componente tangencial do fluxo ao longo da barreira é preservada, conforme ilustra a Figura 24. Uma discussão mais detalhada deste experimento pode ser consultada em Correa (2006) onde, em especial, é discutida a questão do balanço *global* de massa: prescrito na entrada menos o que passa entre as barreiras.

As Figuras 21, 22 e 23 mostram, respectivamente, as componentes x e y do fluxo e a pressão aproximados utilizando-se \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 com elementos *quadrados*.

Através destas figuras, podemos verificar algumas características da solução.

- A continuidade do fluxo é bem representada. Pelo fato da conformidade em $H(\text{div})$, a componente normal é contínua, como ilustram as Figuras 21 e 22.
- Em especial, a *descontinuidade* da componente tangencial do fluxo é bem representada.
- Comparando as figuras em 23, podemos ver que \mathcal{RT}_1 representa melhor a pressão.

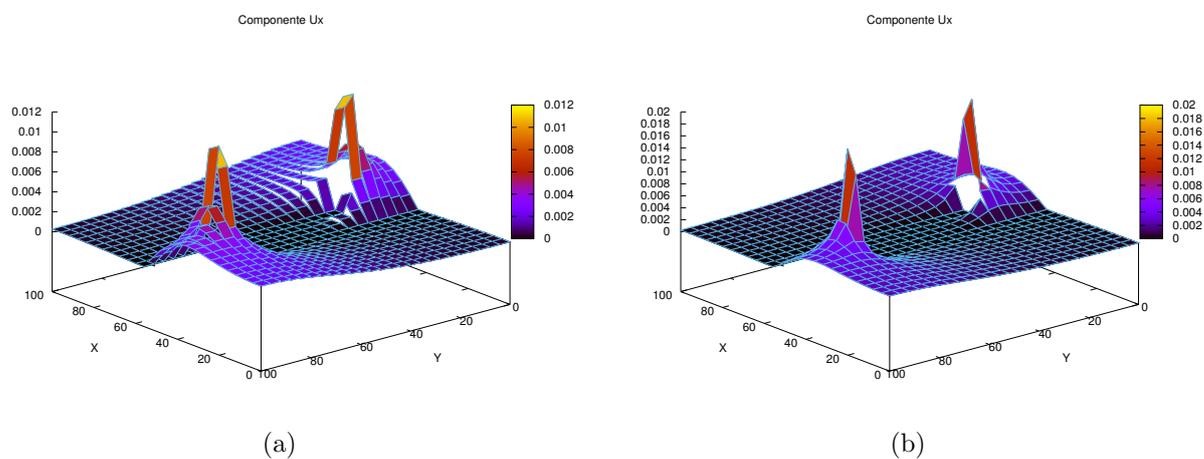


Figura 21 – Escoamento com barreiras, componente u_x : aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

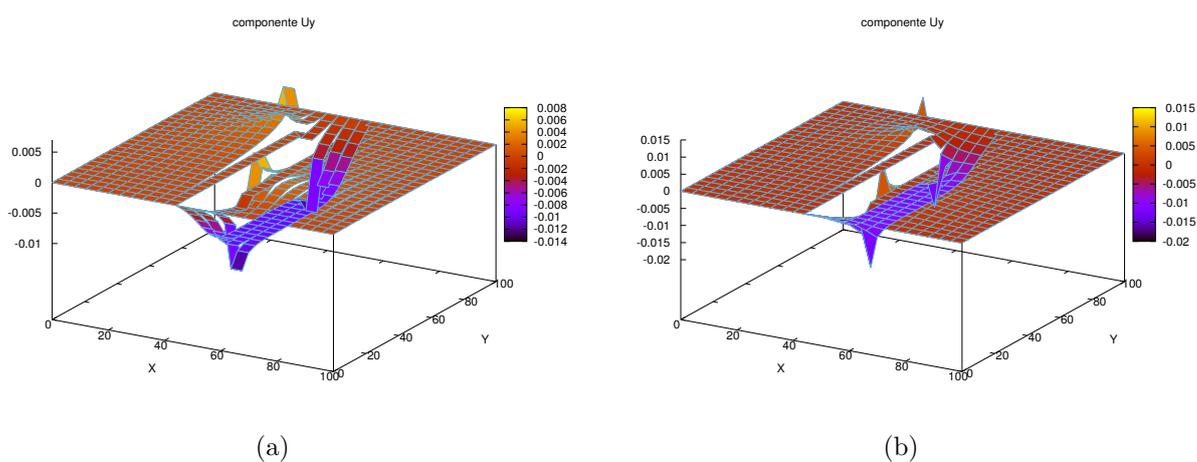
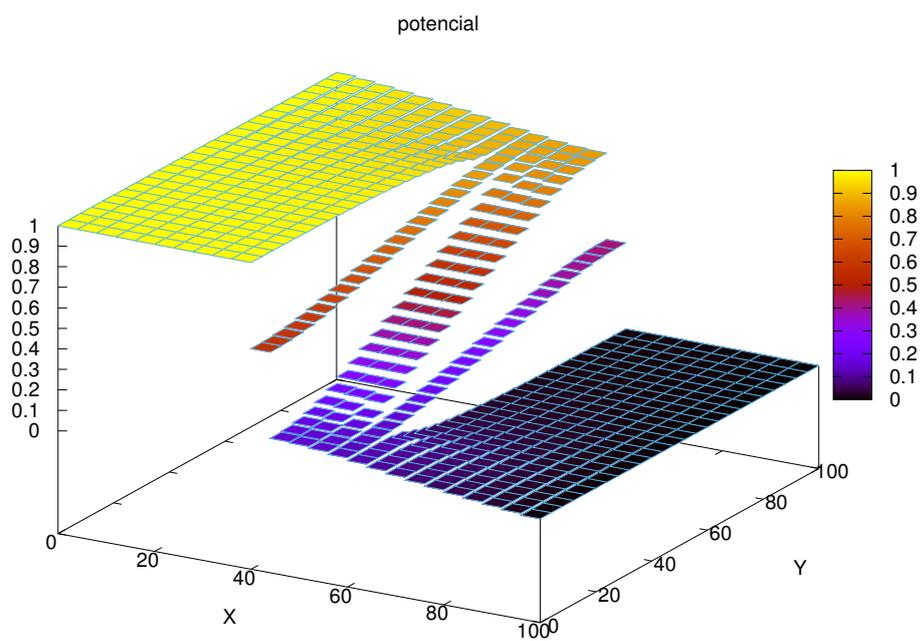
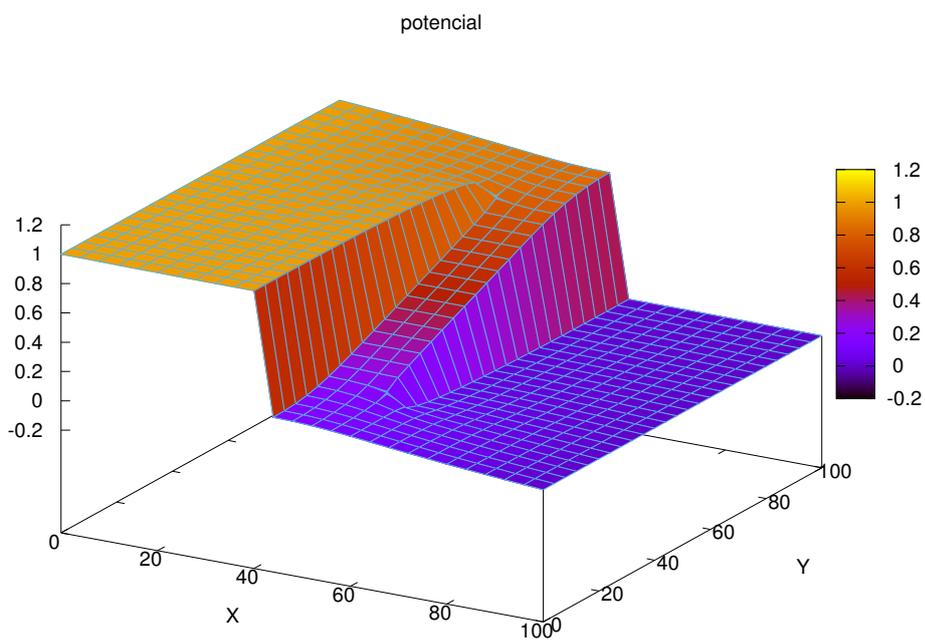


Figura 22 – Escoamento com barreiras, componente u_y : aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .



(a)



(b)

Figura 23 – Escoamento com barreiras, pressão: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

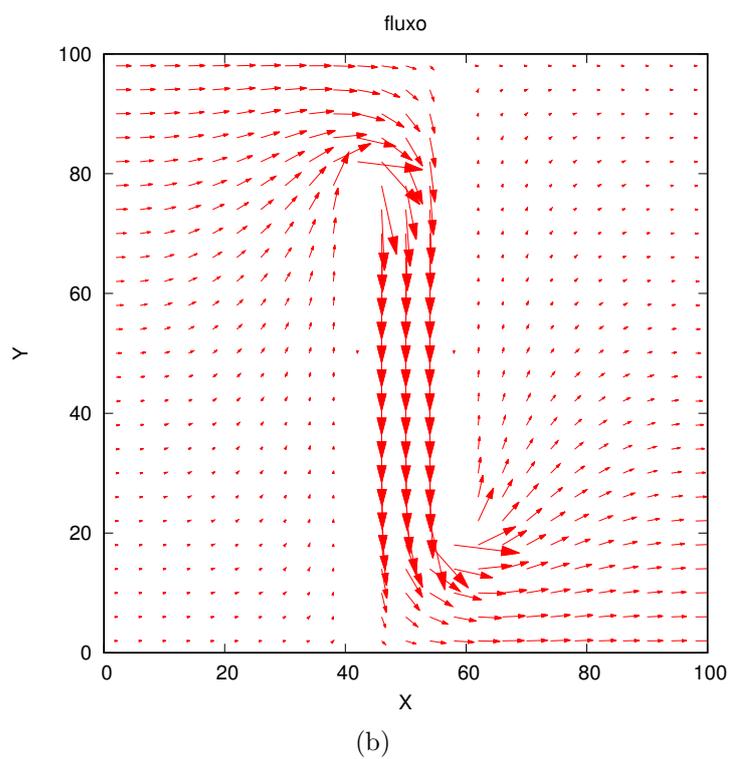
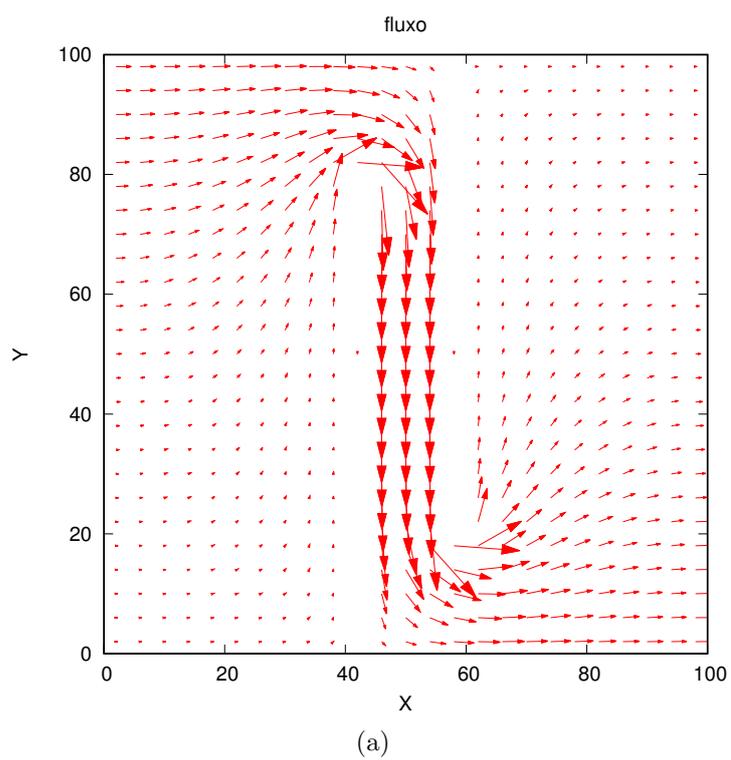


Figura 24 – Escoamento com barreiras, fluxo: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

6.2 Um Quarto de Five-Spot

Neste experimento, utilizamos o método **FB** para obter aproximações numéricas para o modelo conhecido como *um quarto de five-spot*. Aqui, estamos considerando um quadrado unitário com poços de injeção e extração localizados, respectivamente, na origem e no vértice superior direito do domínio. Neste experimento as dimensões das variáveis serão omitidas.

Além disso, os poços são tratados através de condições de contorno, de forma que fontes distribuídas ficam ausentes no balanço de massa (CORREA; BORGES, 2013). No poço de injeção, prescreveu-se fluxo unitário sobre a fronteira do primeiro elemento. No poço de extração prescreveu-se pressão nula.

Como feito em Harder, Paredes e Valentin (2013), Concha (2013), vamos considerar dois subcasos: condutividade constante $k = 1$ e com salto

$$k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , y \leq 1/2; \\ 1000 & , y > 1/2; \end{cases} \quad (6.1)$$

conforme ilustra a Figura 25.

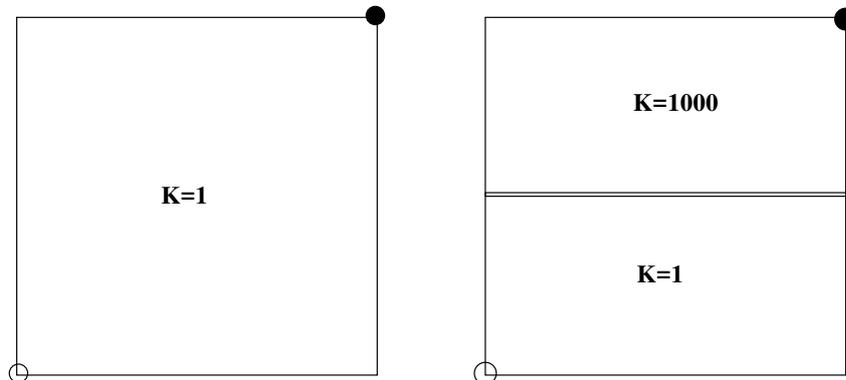


Figura 25 – Domínio do problema *um quarto de five spot*, com condutividade constante (esquerda) e com alto contraste (direita).

6.2.1 Meio Homogêneo

Neste experimento consideramos um meio homogêneo com condutividade constante $k = 1$ (Figura 25, esquerda).

Neste caso, o objetivo principal consiste em verificar as características de simetria em torno dos poços, típicas da solução deste problema, e também singularidade na injeção e extração.

As Figuras 26 e 27 mostram as componentes x e y do fluxo aproximadas utilizando-se \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 sobre uma malha de 8×8 quadrados. Já as Figuras 28 e 29 mostram, respectivamente, a pressão e o fluxo vetorial obtidos com \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 sobre a

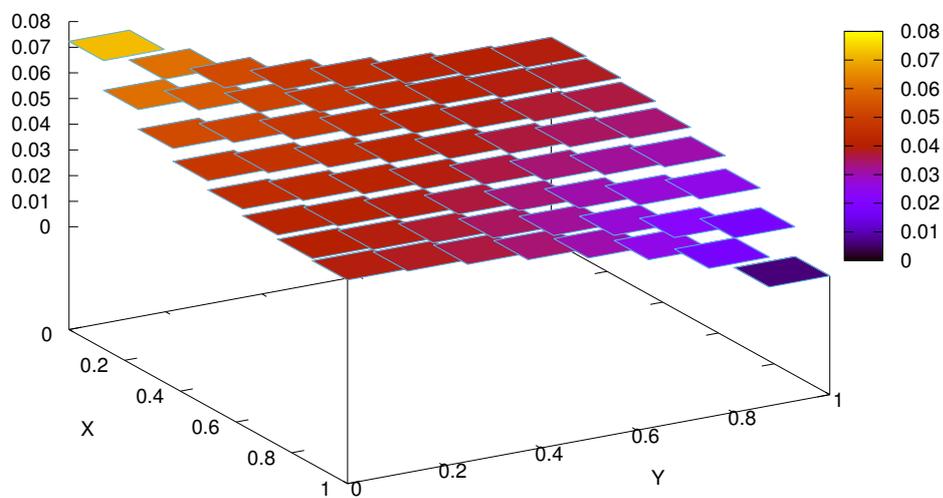
mesma malha. As Figuras 30 e 31 mostram as componentes x e y , respectivamente, do fluxo aproximadas utilizando-se \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 sobre uma malha de 16×16 quadrados. Já as Figuras 32 e 33 mostram, respectivamente, a pressão e o fluxo vetorial obtidos com \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 sobre a mesma malha.

Neste caso homogêneo, podemos ilustrar algumas características da aproximação obtida pelo método baseado em fluxo.

- A continuidade da componente normal do fluxo e *descontinuidade* da componente *tangencial* podem ser vistos nas Figuras 26, 27, 30 e 31.
- \mathcal{RT}_1 aproxima melhor do que \mathcal{RT}_0 . Em particular, a componente tangencial.
- As Figuras 28, 29, 32 e 33 mostram as características de simetria radial esperadas para a solução deste problema.

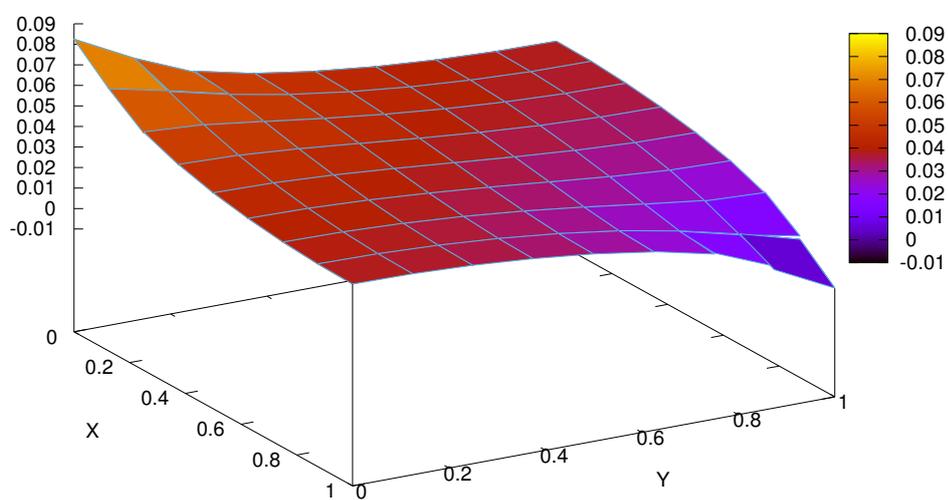
Com base nestas figuras, é possível verificar a simetria *radial* tanto da pressão quanto do fluxo para as soluções fornecidas pelo método baseado em fluxo.

1/4 5-spot: potencial



(a)

1/4 5-spot: potencial



(b)

Figura 28 – Um quarto de five-spot, pressão em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

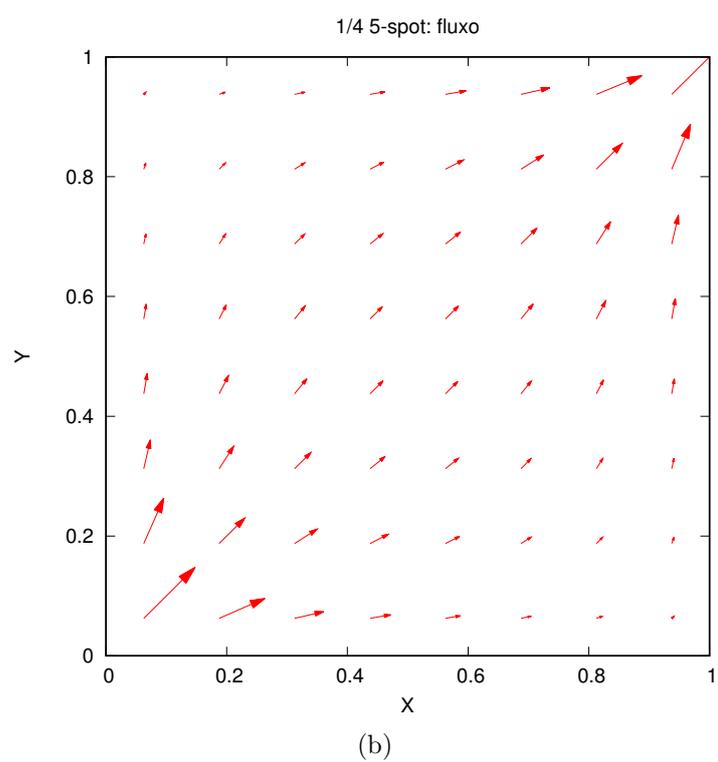
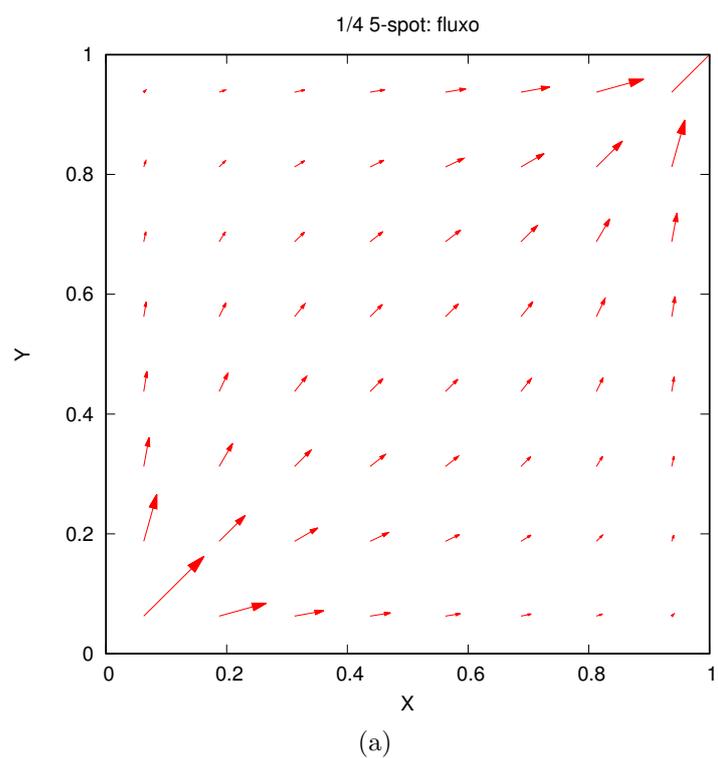


Figura 29 – Um quarto de five-spot, fluxo em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

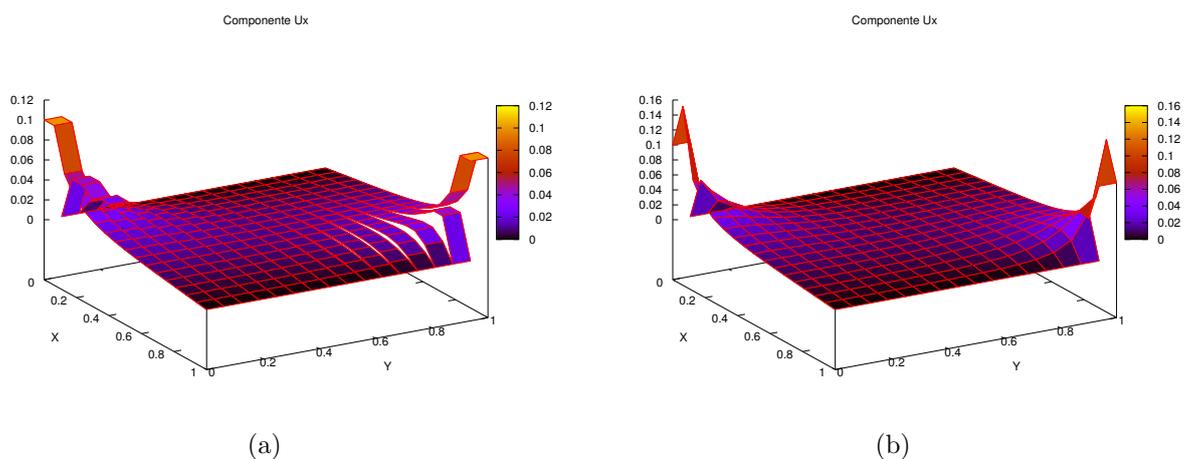


Figura 30 – Um quarto de five-spot, componente u_x em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

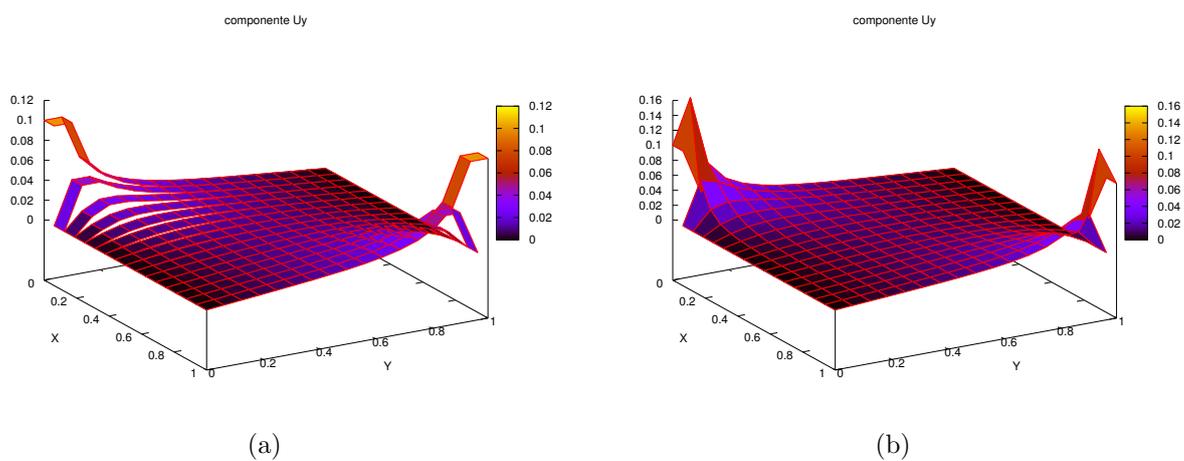
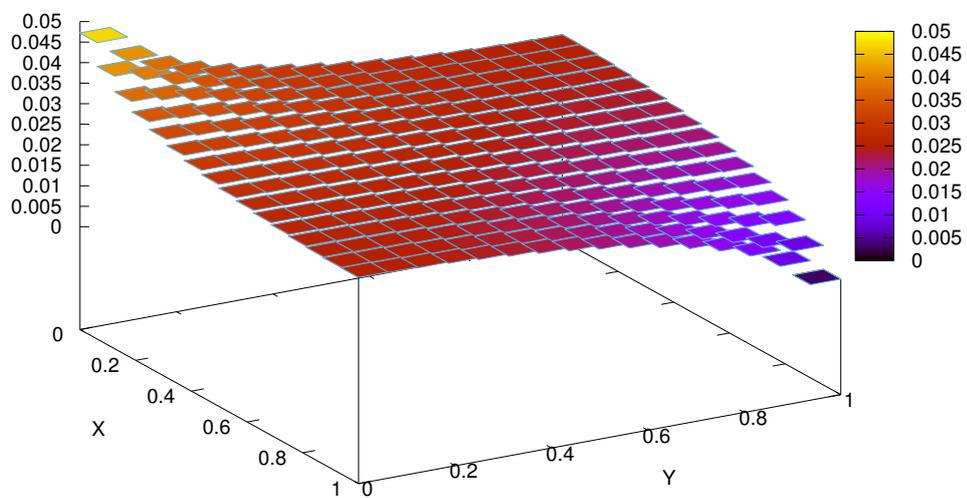


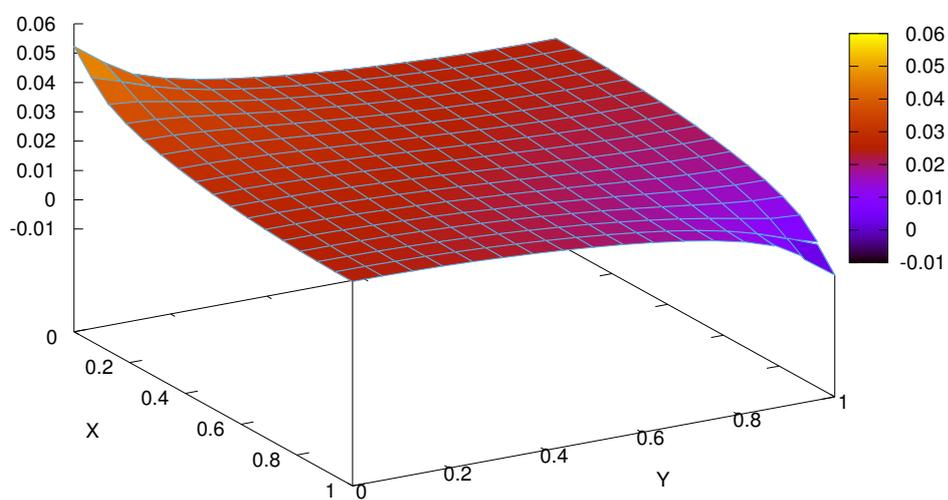
Figura 31 – Um quarto de five-spot, componente u_y em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

1/4 5-spot: potencial



(a)

1/4 5-spot: potencial



(b)

Figura 32 – Um quarto de five-spot, pressão em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

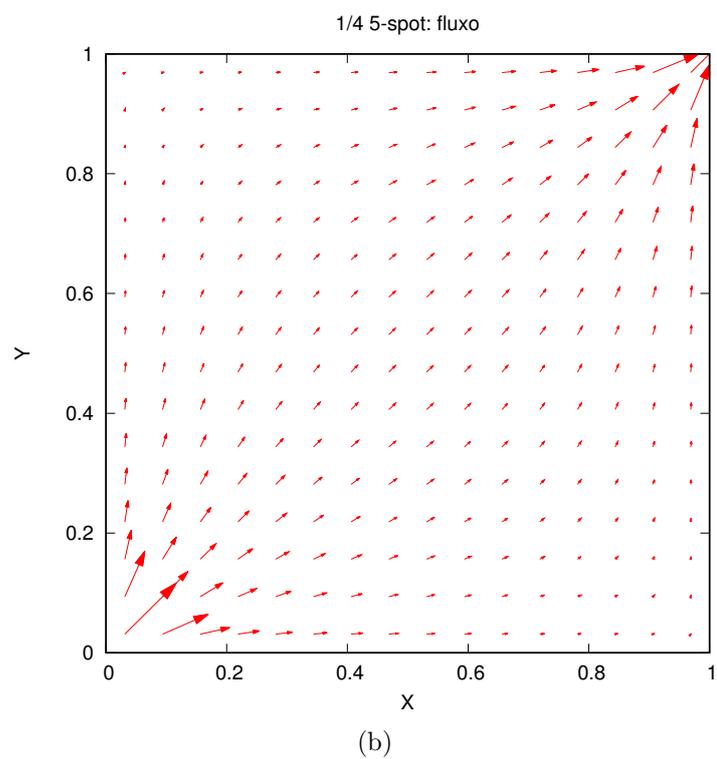
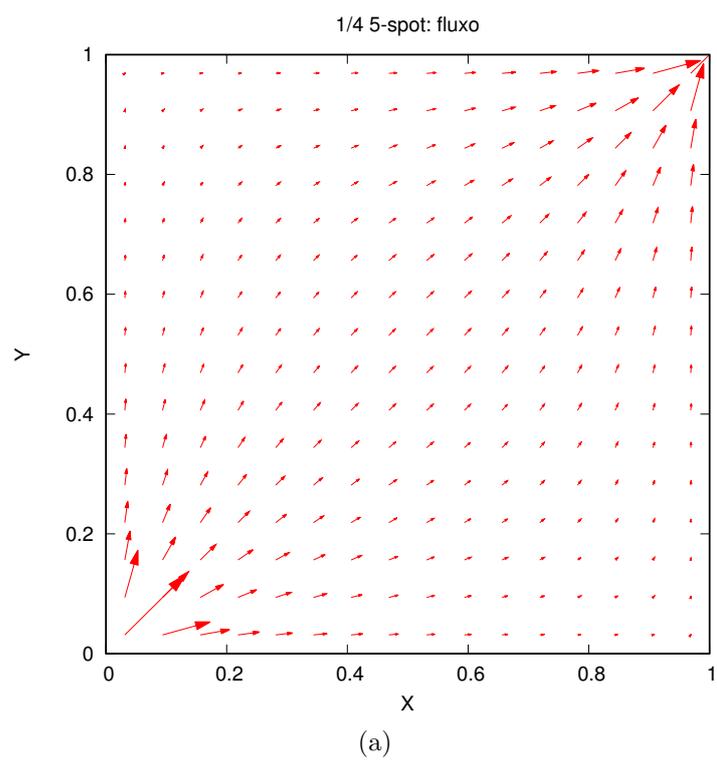


Figura 33 – Um quarto de five-spot, fluxo em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

6.2.2 Condutividade com Salto

A seguir são exibidos gráficos das soluções obtidas pelo método baseado em fluxo no caso de um meio com salto de descontinuidade da permeabilidade, ilustrado na Figura 25 (direita).

O objetivo deste experimento consiste em verificar que as soluções obtidas por este método conseguem capturar a descontinuidade na componente tangencial do fluxo.

As Figuras 34 e 35 mostram, respectivamente, as componentes x e y obtidas utilizando-se \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 sobre uma malha de 8×8 *quadrados*. Já as Figuras 36 e 37 mostram, respectivamente, a pressão e o fluxo (vetorial) obtidos sobre a mesma malha e utilizando-se os mesmos espaços.

Da mesma forma, as Figuras 38 e 39 mostram, respectivamente, as componentes x e y obtidas utilizando-se \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 sobre uma malha de 16×16 *quadrados*. As Figuras 40 e 41 mostram, respectivamente, a pressão e o fluxo (vetorial) obtidos sobre a mesma malha e utilizando-se os mesmos espaços.

Através destas figuras, podemos verificar algumas características da solução obtida para este caso.

- Neste exemplo é interessante verificar a continuidade da componente normal inclusive sobre a descontinuidade, como atestam as Figuras 35 e 39. Isso é uma característica importante decorrente da conformidade em $H(\text{div})$.
- A pressão também é bem representada sobre a descontinuidade. As Figuras 37 e 41 permitem visualizar o comportamento global do fluxo próximo à descontinuidade, assim como a ‘perda’ de simetria causada por esta.

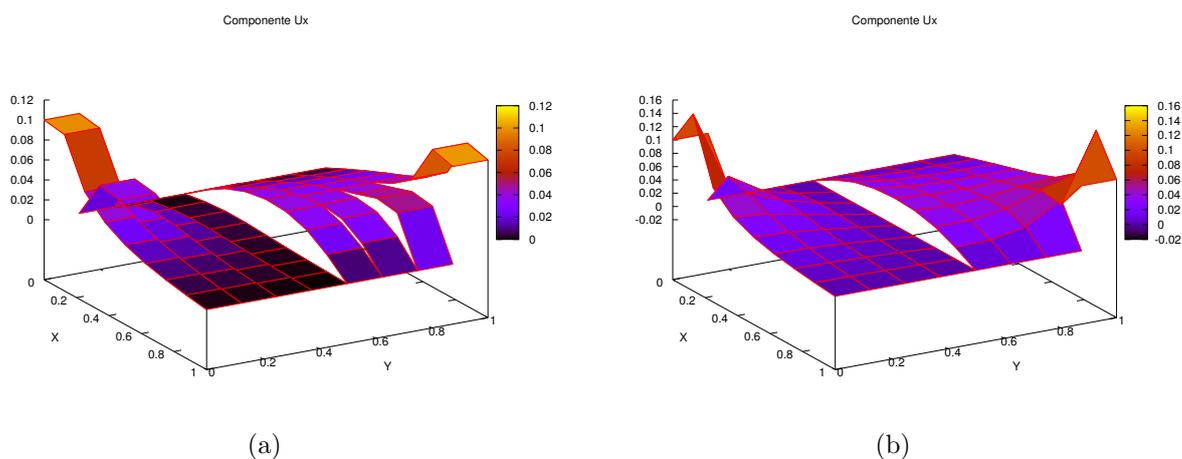


Figura 34 – Um quarto de five-spot, componente u_x em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

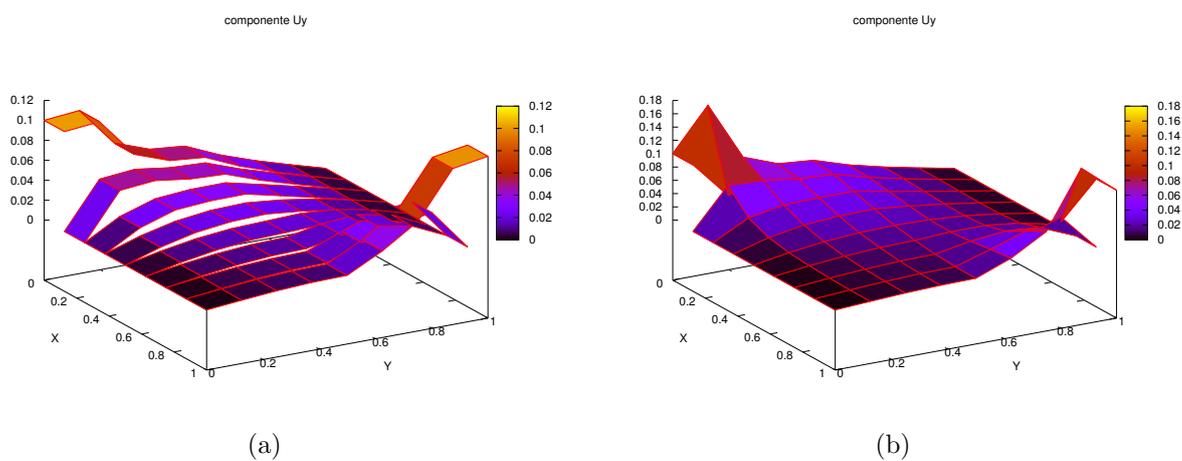
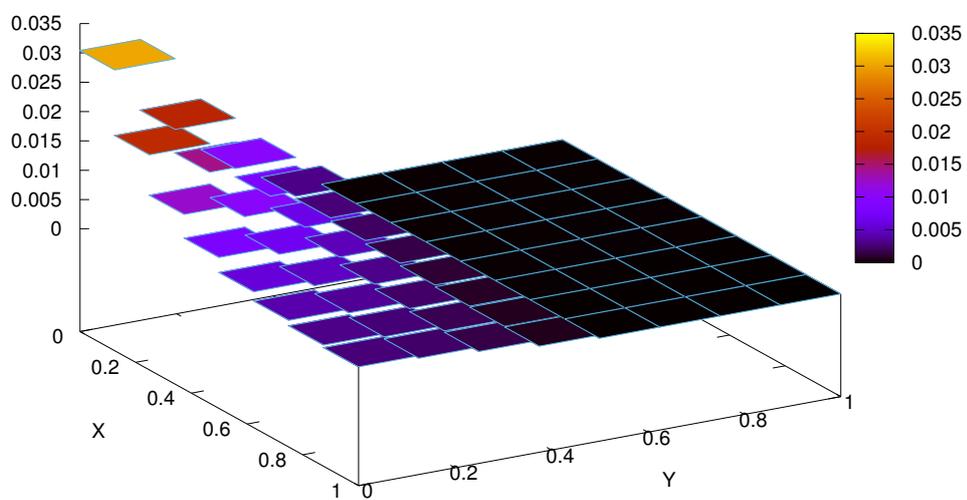


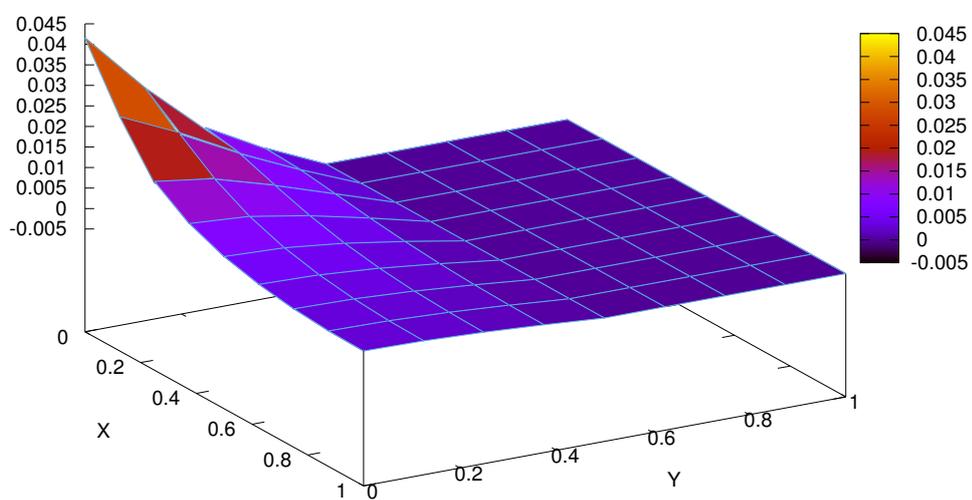
Figura 35 – Um quarto de five-spot, componente u_y em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

1/4 5-spot: potencial



(a)

1/4 5-spot: potencial



(b)

Figura 36 – Um quarto de five-spot, pressão em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

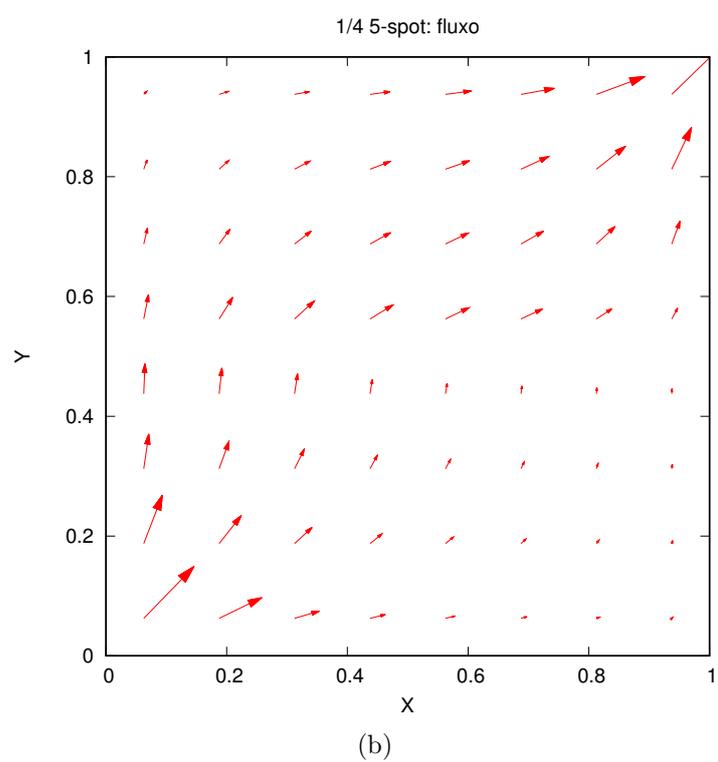
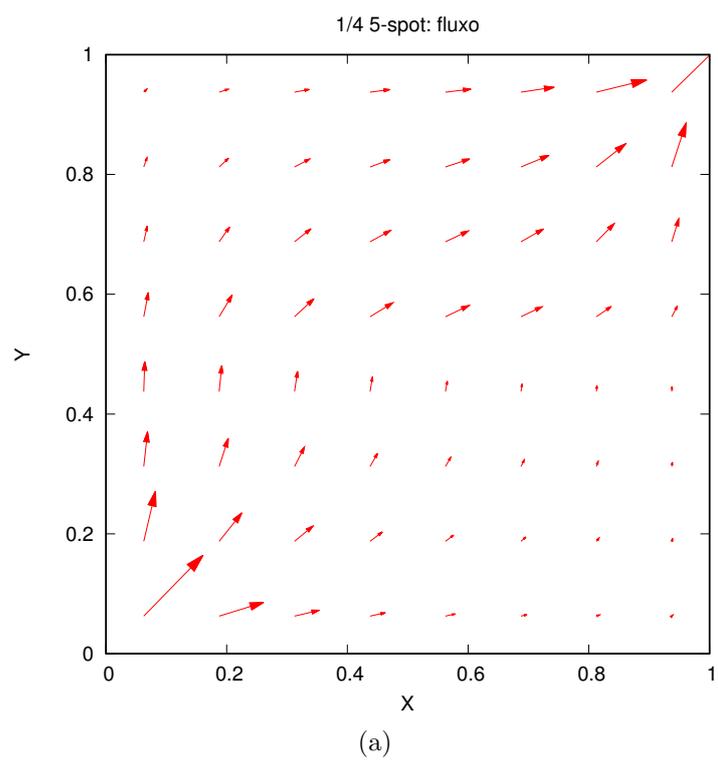


Figura 37 – Um quarto de five-spot, fluxo em malha de 8×8 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

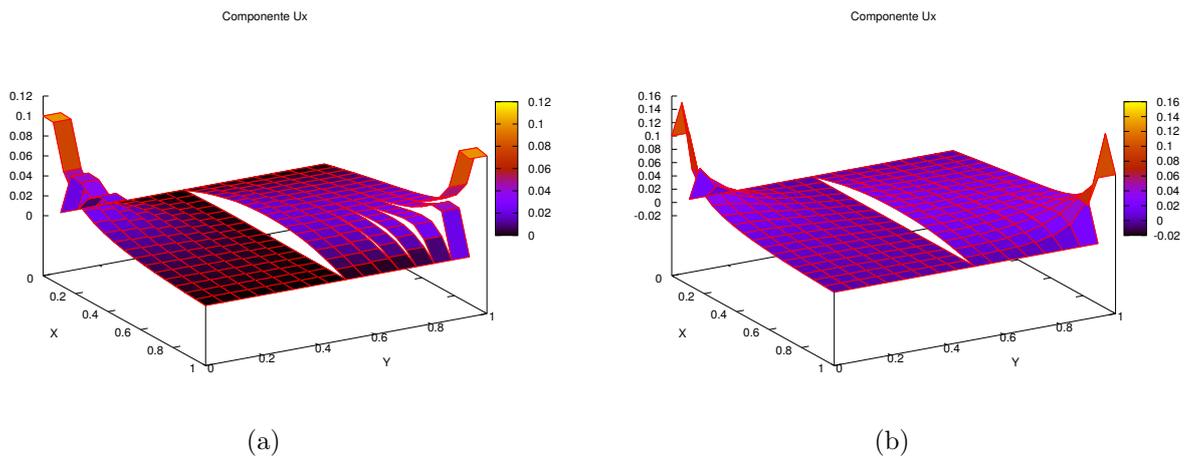


Figura 38 – Um quarto de five-spot, componente u_x em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

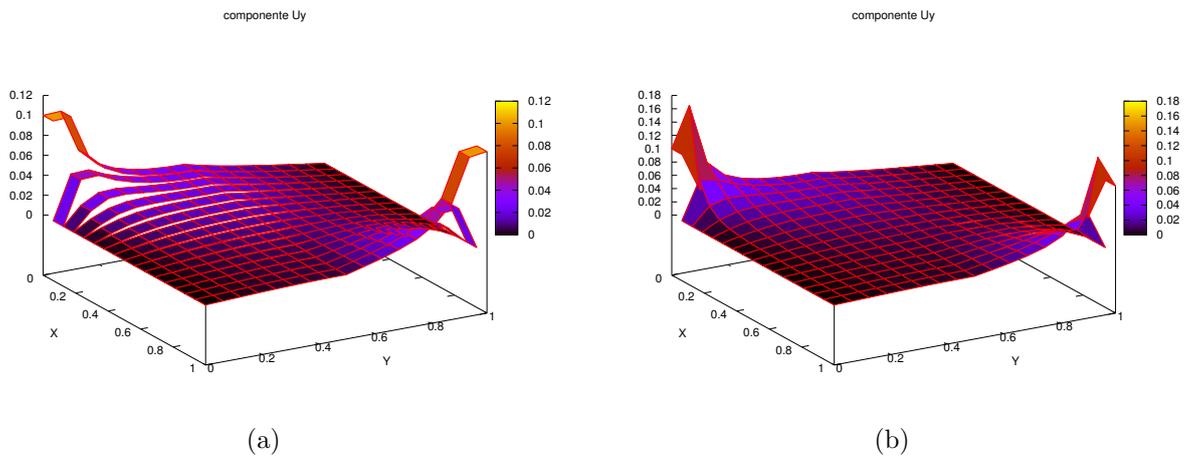
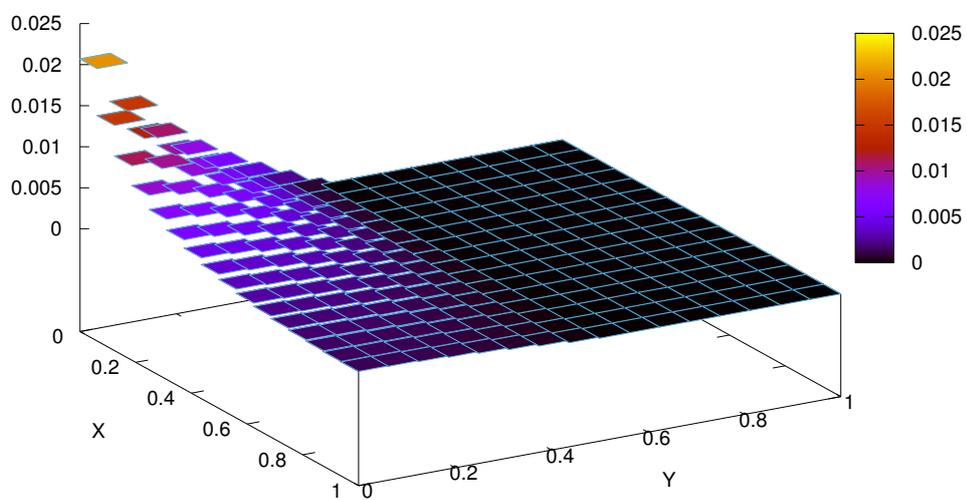


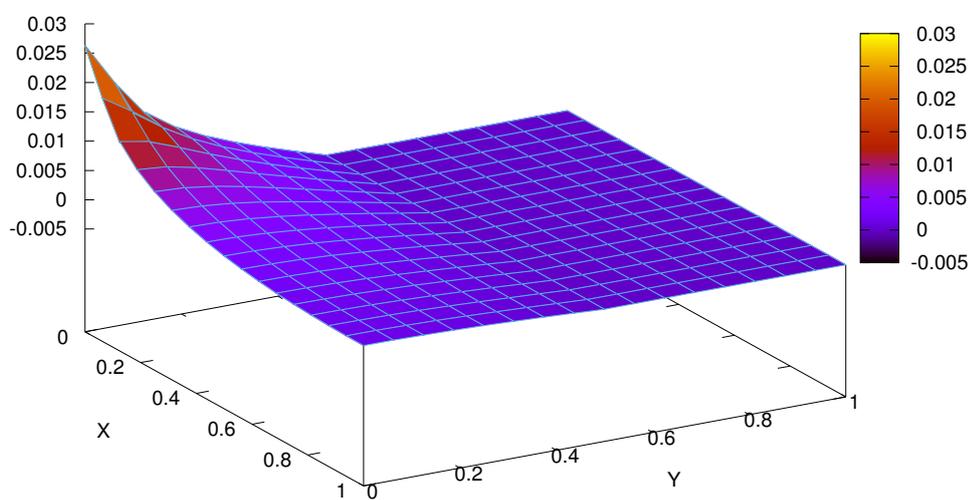
Figura 39 – Um quarto de five-spot, componente u_y em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

1/4 5-spot: potencial



(a)

1/4 5-spot: potencial



(b)

Figura 40 – Um quarto de five-spot, pressão em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

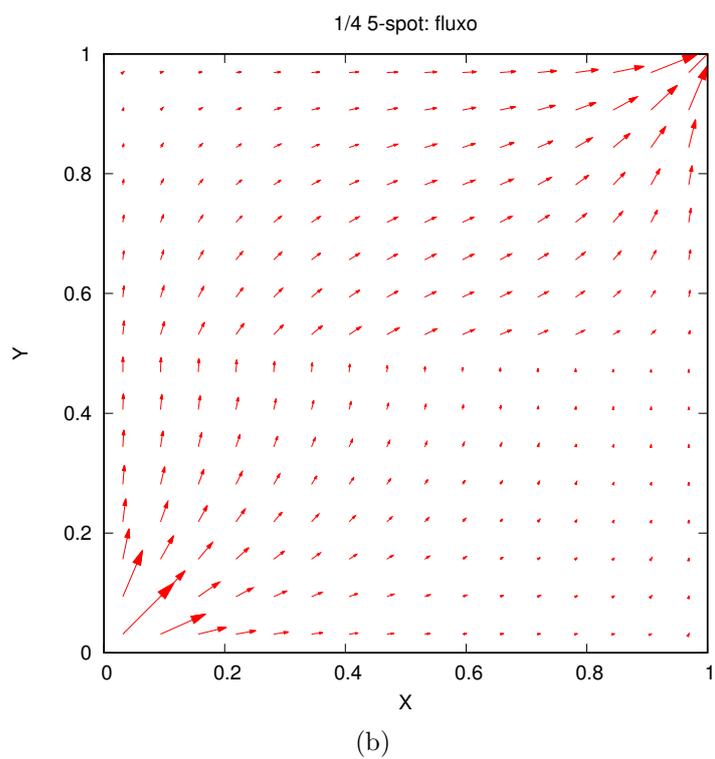
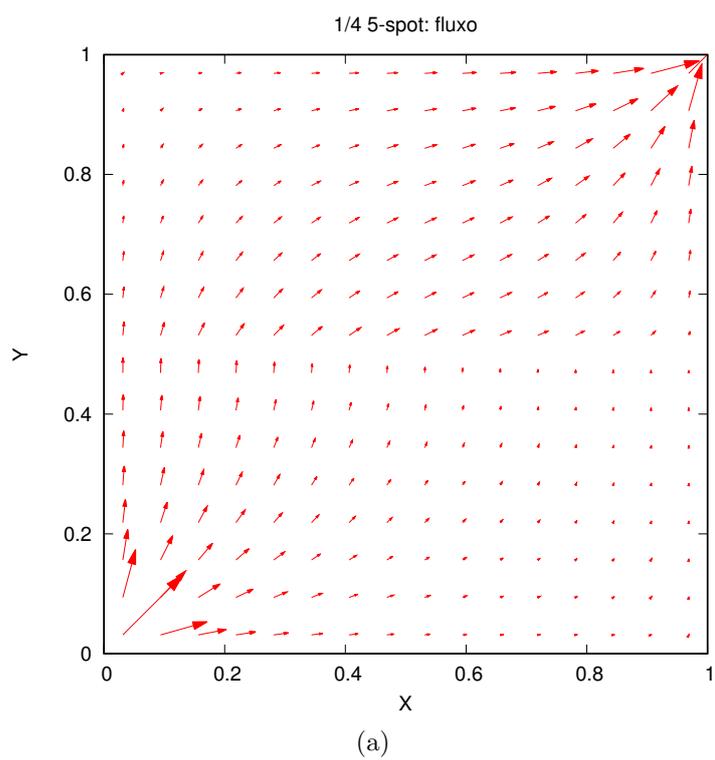


Figura 41 – Um quarto de five-spot, fluxo em malha de 16×16 quadrados: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

6.3 Meio Altamente Heterogêneo

Neste exemplo consideramos um campo de permeabilidade altamente heterogêneo (log-normal), sobre um domínio retangular bidimensional $\Omega = [0, 2L_y] \times [0, L_y]$ (Figura 42), onde L_y denota sua largura.

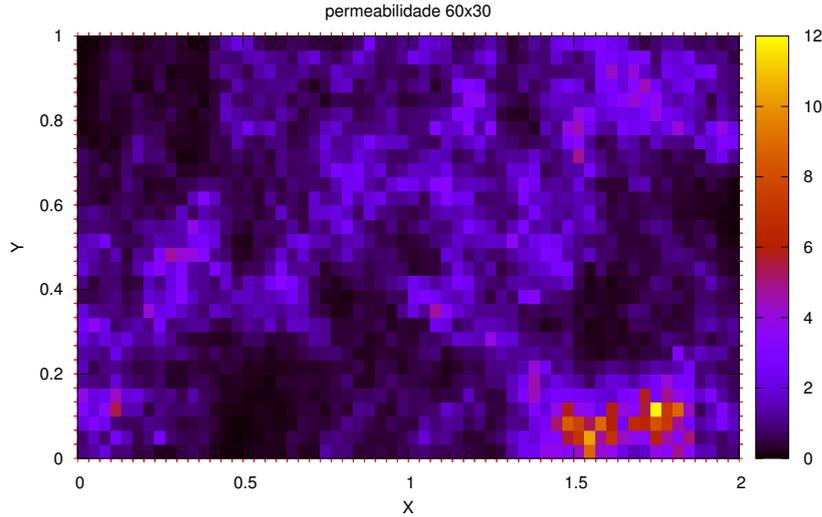


Figura 42 – Meio altamente heterogêneo: campo de permeabilidade com 60×30 elementos.

Com base na hipótese geoestatística clássica, k é tratado como uma variável aleatória com distribuição log-normal descrita como

$$k(\mathbf{x}) = \exp(\delta Z(\mathbf{x})), \quad (6.2)$$

onde δ é um parâmetro de heterogeneidade e $Z(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}(0, 1)$ é uma variável aleatória com distribuição normal reduzida (CORREA; BORGES, 2013). Neste experimento, tomamos $\delta = 1$ e o domínio foi dividido em 60×30 elementos sobre os quais Z foi tomada constante resultando, por sua vez, em k também constante por elemento.

Nos experimentos para este caso, considerou-se L_x e L_y na proporção 2 : 1. Para as condições de contorno, tomou-se:

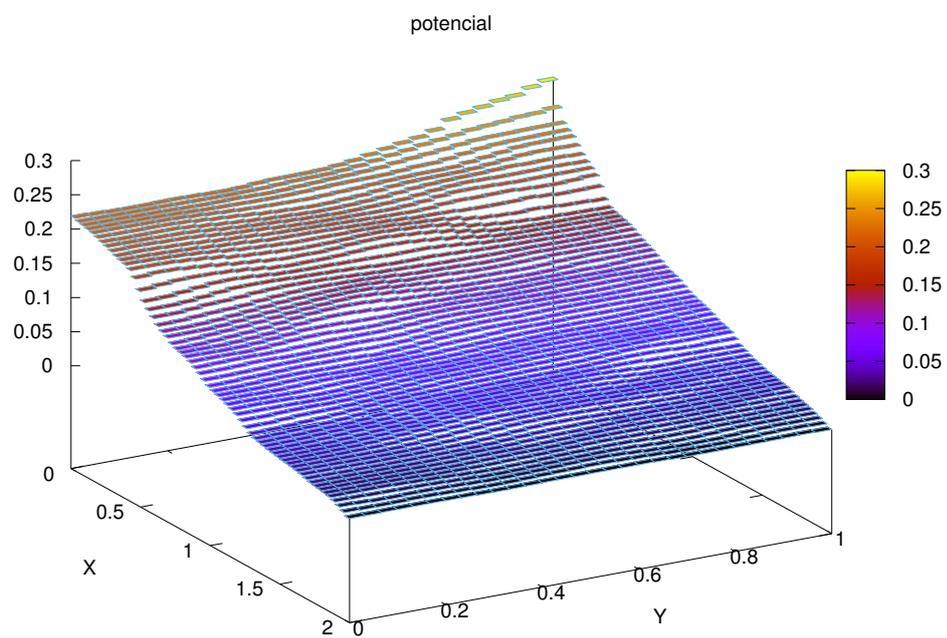
- fluxo normal $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -0.1$ por elemento sobre o lado esquerdo, i.e., $x = 0$ e $y \in [0, L_y]$;
- pressão $p = 0$ sobre o lado direito, i.e., $x = 2L_y$ e $y \in [0, L_y]$;
- fluxo normal nulo, i.e., $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre os lados inferior ($y = 0$ e $x \in [0, 2L_y]$) e superior ($y = 1$ e $x \in [0, 2L_y]$).

As Figuras 43 e 44 mostram, respectivamente, a pressão e o fluxo (vetorial) aproximados pelo método em fluxo utilizando-se \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 sobre malha de quadrados.

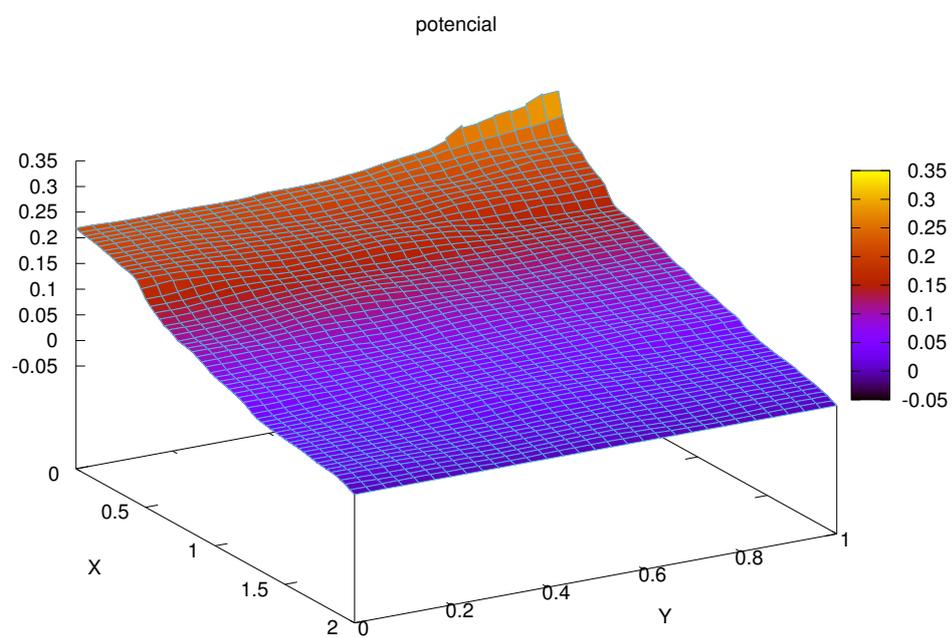
A Figura 45 mostra a diferença entre as aproximações obtidas usando-se \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 . Na Figura 45a pode-se ver a diferença na componente x , enquanto na Figura 45b é exibido o campo vetorial diferença $\mathbf{u}_h^{(\mathcal{RT}_0)} - \mathbf{u}_h^{(\mathcal{RT}_1)}$ no centro dos elementos (reescalado com fator 2 para efeito de melhor visualização).

Neste caso, podemos também citar algumas conclusões.

- As soluções para este caso heterogêneo são bem-resolvidas na aproximação obtida pelo método em fluxo.
- A continuidade do fluxo é bem representada, inclusive a componente normal.
- \mathcal{RT}_1 fornece uma melhor aproximação, tanto para o potencial (Figura 43) quanto para o fluxo (Figura 45).



(a)



(b)

Figura 43 – Meio altamente heterogêneo, pressão: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

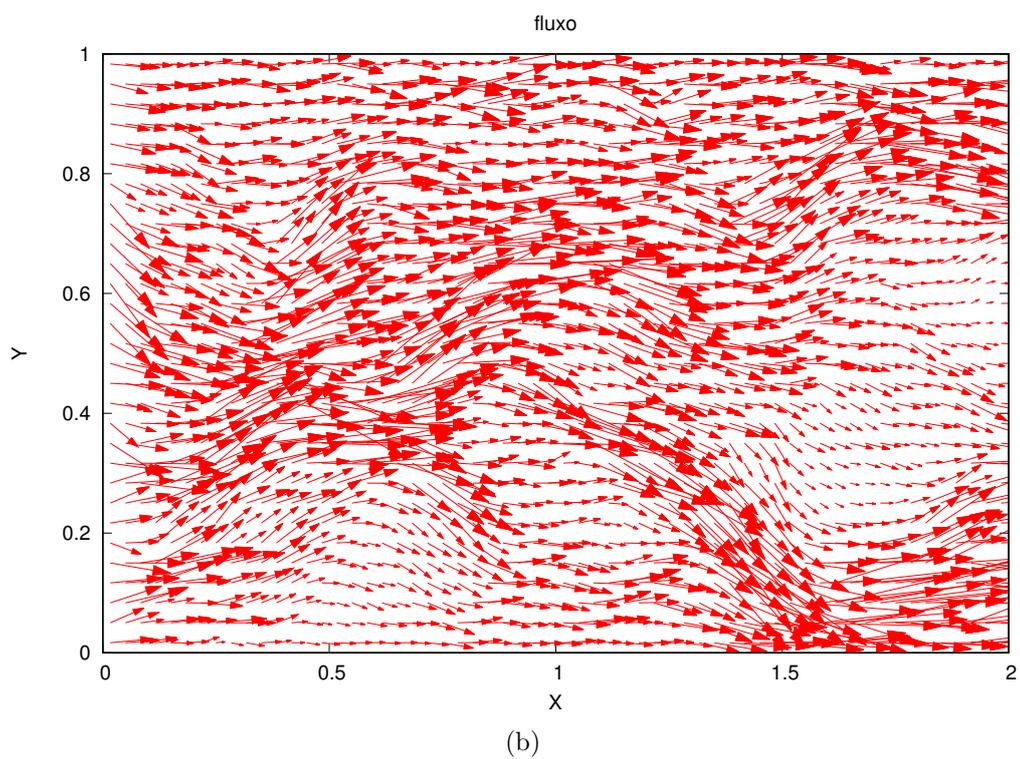
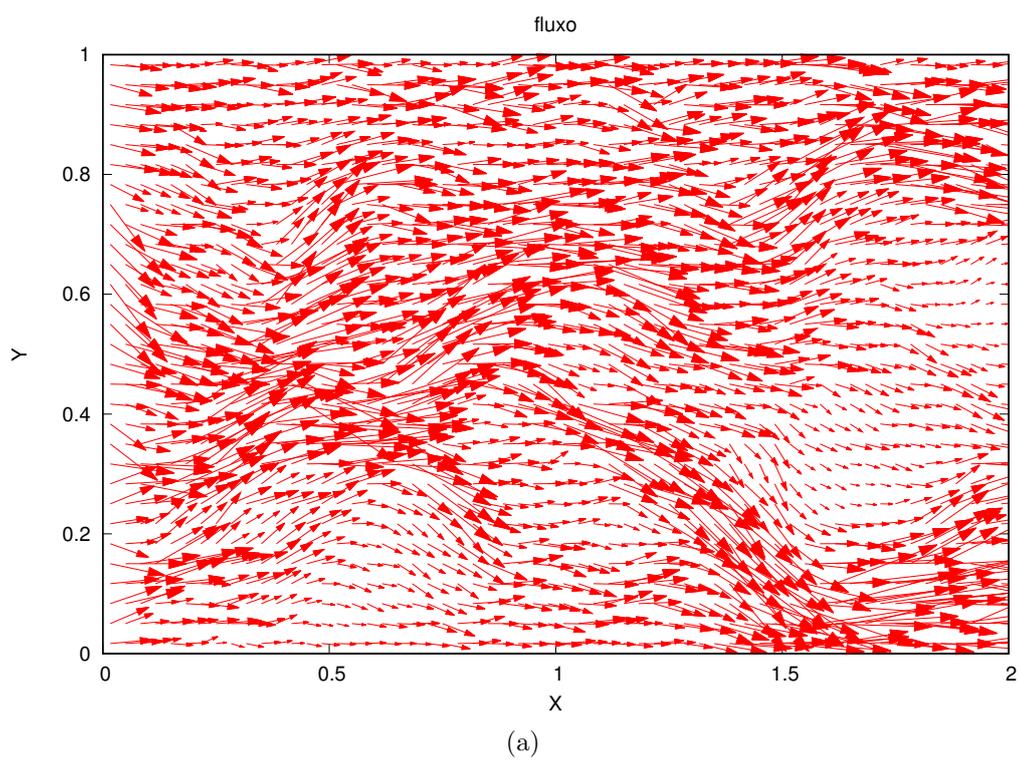


Figura 44 – Meio altamente heterogêneo, fluxo: aproximação usando (a) \mathcal{RT}_0 e (b) \mathcal{RT}_1 .

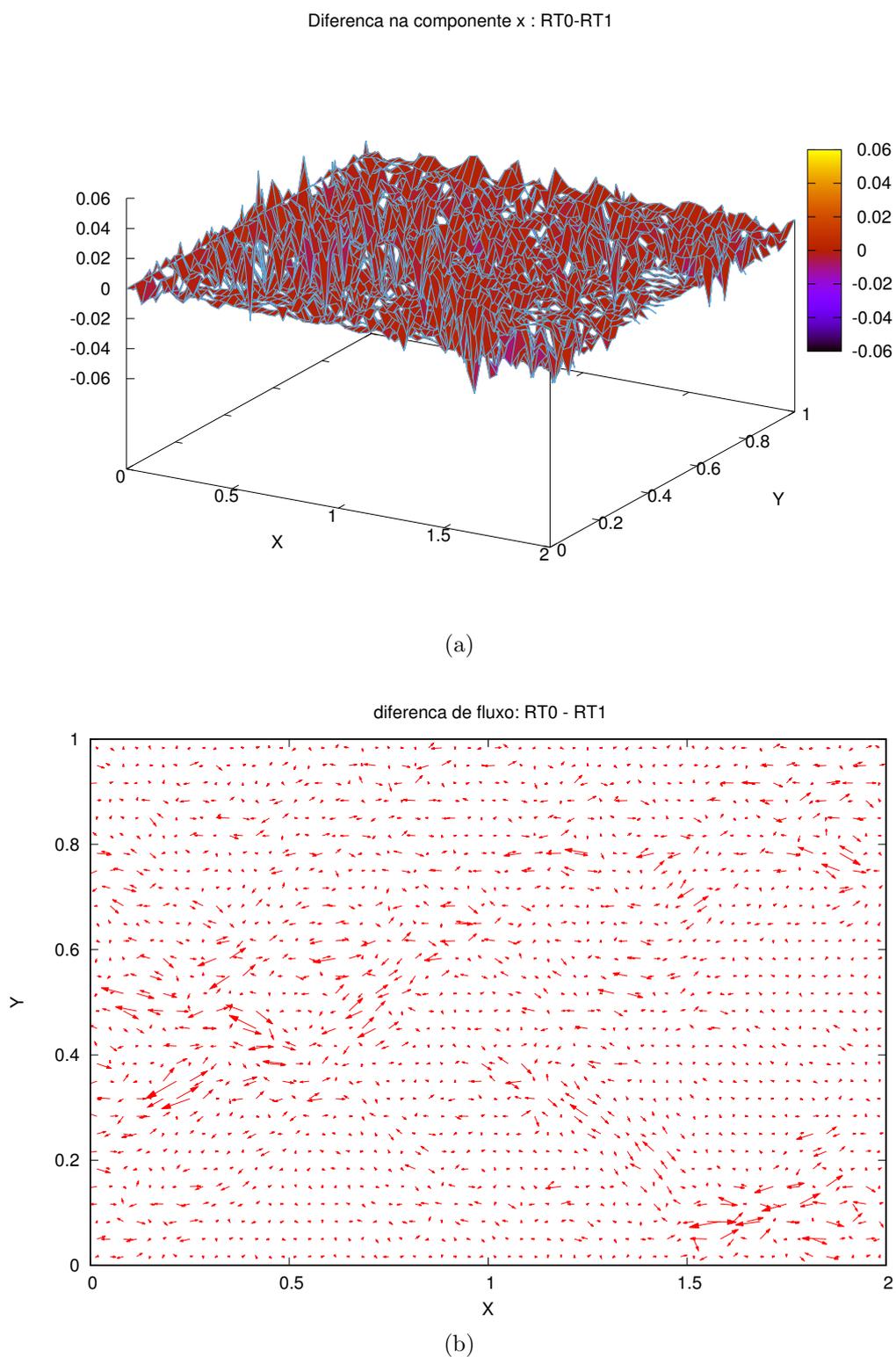


Figura 45 – Meio altamente heterogêneo: diferença entre as aproximações usando \mathcal{RT}_0 e \mathcal{RT}_1 para (a) a componente x e (b) fluxo vetorial.

7 Conclusões e Perspectivas

Com base nos resultados obtidos, podemos traçar algumas conclusões no sentido de poder comparar o esquema de projeção baseado em fluxo com o clássico método misto *dual*. Além disso, com base em desdobramentos verificados e consulta de literatura colateral, algumas perspectivas surgem naturalmente para eventuais trabalhos futuros. Neste capítulo vamos tentar mencionar as principais conclusões e perspectivas deixadas como legado e eventual contribuição deste trabalho.

7.1 Conclusões

Conforme visto no Capítulo 5, além da simplicidade, o método baseado em fluxo é incondicionalmente estável, permite o uso de quaisquer espaços conformes $\mathcal{V}_h \subset H(\text{div})$ e condensa graus de liberdade permitindo, inclusive, obter uma implementação equivalente à mista híbrida dual.

Com base nos experimentos numéricos considerados, pode-se verificar que o método misto, com elementos de Raviart-Thomas, mostra perda de uma ordem de convergência quando empregado sobre uma malha quadrilateral geral distorcida (não-afim). Em particular, para \mathcal{RT}_0 , não se pode esperar convergência do divergente numa malha não-afim. O esquema baseado em fluxo também apresenta sub-otimalidade com relação ao divergente aproximado pelo emprego de \mathcal{RT}_k . Esta perda de aproximação reflete sobre a aproximação do fluxo, que também passa a ser sub-ótima. Entretanto, quando implementados com o espaço \mathcal{ABF}_k , a otimalidade é recuperada em ambos os esquemas, havendo inclusive convergência do divergente no caso $k = 0$.

Inicialmente, temos que o método misto dual e o esquema em fluxo fornecem os mesmos resultados para os experimentos numéricos em malha regular afim, o que deixa de valer para malhas não-afins. Com base nas tabelas fornecidas nos experimentos numéricos, para malhas não-afins, vemos que:

- No método misto dual clássico **MD** empregando-se \mathcal{RT}_k , apesar da perda de otimalidade na aproximação do divergente, ainda temos a convergência do fluxo em $L^2(\Omega)$.
- No esquema baseado em fluxo **FB** usando-se \mathcal{RT}_k vemos que, além da deficiência na aproximação do divergente, o fluxo também é afetado, como mostram as Tabelas 5, 6 e 7. Isso mostra a inexistência de um truque de Nitsche (dualidade) para a aproximação do fluxo segundo a Formulação **FBh**.

Dada a sua simplicidade, o esquema em fluxo representa uma alternativa competitiva ao clássico método misto dual no caso de malhas quadrilaterais gerais. A eventual desvantagem deste esquema consiste no possível *mau-condicionamento* do sistema final quando α for muito pequeno, como tipicamente ocorre no método penalizado.

Além disso, em termos de implementação *direta*, a questão sobre qual estratégia é mais vantajosa parece recair sobre o custo computacional envolvido, pois em ambos os esquemas o sistema final possui o mesmo tamanho. Basicamente, após condensar, o custo maior, que recai naturalmente sobre a solução do sistema algébrico, é o mesmo. Logo, para malhas quadrilaterais gerais, usar os espaços \mathcal{ABF}_k se torna muito vantajoso.

Com base nisso tudo, a conclusão mais imediata parece ser: o esquema em fluxo usando \mathcal{RT}_k é uma boa opção para malhas afins. Para malhas quadrilaterais gerais, a otimalidade requer inevitavelmente um enriquecimento de \mathcal{RT}_k , como a família de espaços \mathcal{ABF}_k . No caso de mais baixa ordem, podemos também usar o esquema em fluxo com o divergente projetado.

Para esta formulação, podemos mencionar as seguintes vantagens:

Vantagens

- Não precisamos definir espaços compatíveis.
- Basta utilizar conformidade em $H(\text{div})$, i.e., $\mathcal{V}_h \subset H(\text{div}; \Omega)$.
- Em termos de graus de liberdade, é equivalente a uma formulação mista *hibridizada*, contudo não exige a definição de multiplicadores sobre as arestas.
- Pode ser aplicada tanto para triângulos quanto para quadriláteros. Em particular, estudamos quadriláteros pois em problemas aproximados em $H(\text{div})$, os graus de liberdade compartilhados por elementos vizinhos são aqueles associados às arestas. Como uma malha de triângulos possui mais lados, o número de graus de liberdade aumenta. Além disso, tal estudo permite a análise do comportamento para o mapeamento de Piola sobre malhas não-afins.
- Especialmente interessante no caso 3D, que não foi estudado nesta tese, embora a formulação **FB** exija apenas $H(\text{div})$ -conformidade, de forma que qualquer subespaço $\mathcal{V}_h \subset H(\text{div}; \Omega)$ em 3D pode ser usado: tanto em tetraedros quanto em hexaedros ou malhas de prismas, como os espaços desenvolvidos em [Castro et al. \(2016\)](#).

7.2 Perspectivas

Em relação à continuidade e extensão dos resultados da tese, pretende-se aprofundar a análise dos mecanismos de recuperação da otimalidade nas formulações apre-

sentadas: baseada em fluxo e baseada em fluxo com o divergente projetado. Basicamente, no primeiro caso, a otimalidade é recuperada com o enriquecimento dos espaços, enquanto na segunda, a projeção do divergente é responsável pela recuperação da otimalidade, mesmo utilizando os espaços \mathcal{RT}_k .

Além disso, pretende-se considerar outras famílias de espaços $H(\text{div})$ -conformes. No contexto de alta ordem, os espaços hierárquicos desenvolvidos em [Siqueira \(2012\)](#), [Siqueira, Devloo e Gomes \(2013\)](#) podem ser considerados.

Também, queremos ressaltar a importância desta formulação no desenvolvimento de métodos de alta ordem para problemas parabólicos, bem como o estudo de aplicações em *três* dimensões.

Referências

- ARBOGAST, T.; CORREA, M. R. Two families of $h(\text{div})$ mixed finite elements on quadrilaterals of minimal dimension. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 54, n. 6, p. 3332–3356, 2016. Citado na página 19.
- ARNOLD, D. N.; BOFFI, D.; FALK, R. S. Approximation by quadrilateral finite elements. *Mathematics of Computation*, v. 71, n. 239, p. 909–922, March 2002. Citado 4 vezes nas páginas 21, 46, 51 e 77.
- _____. Quadrilateral $h(\text{div})$ finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 42, n. 6, p. 2429–2451, 2005. Citado 8 vezes nas páginas 19, 20, 45, 46, 47, 50, 59 e 82.
- ARNOLD, D. N.; BREZZI, F. Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, postprocessing and error estimates. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 19, p. 7–32, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 58.
- ATKIN, R. J.; CRAINE, R. E. Continuum theory of mixtures: basic theory and historical development. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, v. 29, p. 209, 1976. Citado na página 25.
- AXELSSON, O.; BARKER, V. A. *Finite element solution of boundary value problems*. Philadelphia: [s.n.], 2001. (Classics In Applied Mathematics, 35). Citado na página 132.
- BABUSKA, I. Error bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, v. 16, p. 322–333, 1971. Citado na página 35.
- BEAR, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York: Dover, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- BERNDT, M.; LIPNIKOV, K.; MOUTON, J. D.; SHASHKOV, M. Convergence of mimetic finite difference discretizations of the diffusion equation. *J. Numer. Math.*, v. 9, p. 253–284, 2001. Citado na página 20.
- BERNDT, M.; LIPNIKOV, K.; SHASHKOV, M.; WHEELER, M.; YOTOV, I. Superconvergence of the velocity in mimetic finite difference methods on quadrilaterals. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 43, n. 4, p. 1728–1749, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 92.
- BOCHEV, P.; RIZDAL, D. Rehabilitation of the lowest-order raviart-thomas element on quadrilateral grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 1, n. 47, p. 487–507, 2008. Citado na página 92.
- BOFFI, D.; FORTIN, M.; BREZZI, F. *Mixed Finite Element Methods and Applications*. New York: Springer, 2013. v. 44. Citado 13 vezes nas páginas 19, 21, 34, 39, 40, 42, 43, 44, 50, 73, 75, 77 e 78.
- BOFFI, D.; GASTALDI, L. On the quadrilateral $q_2 - p_1$ element for the stokes problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 34, p. 664–670, 2002. Citado na página 78.

- _____. Some remarks on quadrilateral mixed finite elements. *Comput. Struct.*, v. 87, p. 751–757, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 77 e 78.
- BOFFI, D.; KIKUCHI, F.; SCHÖBERL, J. Edge element computation of maxwell's eigenvalues on general quadrilateral meshes. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, v. 16, n. 2, p. 265–273, 2006. Citado na página 92.
- BREZZI, F.; Douglas Jr., J.; MARINI, L. D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numerische Mathematik*, v. 47, p. 217–235, 1985. Citado na página 19.
- BREZZI, F.; JR, J. D.; FORTIN, M.; MARINI, L. D. Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, v. 21, n. 4, p. 581–604, 1987. EDP Sciences. Citado na página 19.
- CASTRO, D. A.; DEVLOO, P. R. B.; FARIAS, A. M.; GOMES, S. M.; SIQUEIRA, D. de; DURÁN, O. Three dimensional hierarchical mixed finite element approximations with enhanced primal variable accuracy. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 306, p. 479–502, 2016. Citado na página 121.
- CHEN, Z. *Reservoir Simulation: Mathematical techniques in oil recovery*. [S.l.]: CBMS-NSF, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 24.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. [S.l.]: SIAM, 2006. (Computational Science and Engineering). Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.
- CIARLET, P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Philadelphia: North-Holland Publishing Company, 1978. (Classics in Mathematics and its Applications, 40). Citado 4 vezes nas páginas 18, 38, 40 e 57.
- CONCHA, D. P. *Novos Métodos de Elementos Finitos Multi-Escalas: Teoria e Aplicações*. Tese (Doutorado) — LNCC, Petrópolis-RJ, 2013. Citado na página 100.
- CORREA, M. R. *Métodos de Elementos Finitos Estabilizados para os Escoamentos de Darcy e de Stokes-Darcy Acoplados*. [S.l.]: Tese de D.Sc., LNCC, Petrópolis, RJ, Brasil, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 25, 50, 95 e 96.
- CORREA, M. R.; BORGES, M. R. A semi-discrete central scheme for scalar hyperbolic conservation laws with heterogeneous storage coefficient and its application to porous media flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 73, p. 205–224, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 115.
- CORREA, M. R.; LOULA, A. F. D. Stabilized velocity post-processings for Darcy flow in heterogenous porous media. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 23, p. 461–489, 2007. Citado na página 19.
- DURLOFSKY, L. J. A triangle based mixed finite element-finite volume technique for modeling two-phase flow through porous media. *Journal of Computational Physics*, v. 105, p. 252–266, 1993. Citado na página 19.
- EWING, R. E.; LIU, M. M.; WANG, J. Superconvergence of mixed finite element approximation over quadrilaterals. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 36, n. 3, p. 772–787, 1999. Citado na página 20.

- FARIAS, A. M.; DEVLOO, P. R. B.; GOMES, S. M.; SIQUEIRA, D.; CASTRO, D. A. Two-dimensional mixed finite element approximations for elliptic problems with enhanced accuracy for the potential and flux divergence. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 74, p. 3283–3295, 2017. Citado na página 48.
- GEORGE, A.; LIU, J. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. New Jersey U.S.: Prentice-Hall, 1981. (Prentice-Hall series in computational mathematics). Citado na página 132.
- GIRAULT, V.; RAVIART, P. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1986. (Springer Series in Computational Mathematics). Citado na página 129.
- HARDER, C.; PAREDES, D.; VALENTIN, F. A family of multiscale hybrid-mixed finite element methods for the darcy equation with rough coefficients. *Journal of Computational Physics*, v. 245, p. 107–130, 2013. Citado na página 100.
- HORNUNG, U. *Homogenization and Porous Media*. [S.l.]: Springer, 1997. (Interdisciplinary Applied Mathematics). Citado 2 vezes nas páginas 18 e 25.
- HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2000. Citado na página 74.
- JOHNSON, C. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. [S.l.]: Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 40.
- JR, J. D.; ROBERTS, J. E. Global estimates for mixed methods for second order elliptic equations. *Mathematics of Computation*, v. 44, n. 169, p. 39–52, January 1985. Citado na página 51.
- LI, J.; ARBOGAST, T.; HUANG, Y. Mixed methods using standard conforming finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 5–8, p. 680 – 692, 2009. Citado na página 50.
- LIPNIKOV, K.; MANZINI, G.; SHASHKOV, M. Mimetic finite difference method. *Journal of Computational Physics*, v. 257, p. 1163–1227, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 92.
- LOULA, A. F. D.; CORREA, M. R.; GUERREIRO, J. N. C.; TOLEDO, E. M. On finite element methods for heterogeneous elliptic equations. *International Journal of Solids and Structures*, v. 45, p. 6436–6450, 2008. Citado na página 50.
- LOULA, A. F. D.; ROCHINHA, F. A.; MURAD, M. A. Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems. *Comp. Methods Appl. Mech. Engineering*, v. 128, p. 361–381, 1995. Citado na página 19.
- MOSÉ, R.; SIEGEL, P.; ACKERER, P.; CHAVENT, G. Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: luxury or necessity? *Water resources research*, v. 30, n. 11, p. 3001–3012, 1994. Wiley Online Library. Citado na página 19.

- MURAD, M. A.; BORGES, M. R.; OBREGÓN, J.; CORREA, M. A new locally conservative numerical method for two-phase flow in heterogeneous poroelastic media. *Computers and Geotechnics*, v. 48, p. 192–207, 2013. Citado na página 21.
- PINEDO, M. A. R. *Métodos de Elementos Finitos Misto-Híbridos para um Problema Elíptico Não-linear em Malhas Quadrilaterais*. Tese (Doutorado) — Imecc-Unicamp, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 60.
- PRENTER, P. M. *Splines and Variational Methods*. [S.l.]: Wiley-interscience publication, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 93.
- QUINELATO, T. O. *Formulações de Elementos Finitos Mistos Para Problemas Parabólicos Lineares*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Modelagem Computacional - LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica, 2013. Citado na página 132.
- RAVIART, P.; THOMAS, J. M. A mixed finite element method for second order elliptic problems. In: WUNDERLICH, W.; STEIN, E.; BATHE, K. J. (Ed.). *Math. Aspects of the F.E.M.* [S.l.]: Springer-Verlag, 1977, (1, 606). p. 292–315. Citado 6 vezes nas páginas 19, 42, 43, 44, 45 e 51.
- ROBERTS, J. E.; THOMAS, J. M. *Mixed and Hybrid Methods*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1991. v. 2. (Handbook of numerical analysis, v. 2). Citado na página 19.
- SIQUEIRA, D. *Construção de Espaços de Elementos Finitos do Tipo Hdiv*. Tese (Doutorado) — Imecc/Unicamp, 2012. Citado na página 122.
- SIQUEIRA, D.; DEVLOO, P. R. B.; GOMES, S. M. A new procedure for the construction of hdiv and hcurl finite element spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 240, p. 204–214, 2013. Citado na página 122.
- SOUTO, H. P. A. *Meios Porosos*. 2002. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- STENBERG, R. Analysis of mixed finite element methods for the stokes problem: a unified approach. *Mathematics of Computation*, v. 42, n. 165, p. 9–23, 1984. Citado na página 78.
- WHITAKER, S. *The method of volume averaging*. Dordrecht Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1999. v. 13. (Theory and Applications of Transport in Porous Media, v. 13). Citado na página 25.

Apêndices

APÊNDICE A – Jacobiano de Malha Q_1 -deformada

O objetivo desta seção consiste em verificar que o determinante jacobiano do difeomorfismo bilinear geométrico de uma malha quadrilateral geral é de ordem polinomial total 1, ou seja, $|J_E(\hat{\mathbf{x}})| \in P_1(\hat{E})$. Em particular, queremos ressaltar o fato de que, para malhas h -uniformes, temos que $|J(\hat{\mathbf{x}})| \in P_1(\hat{E}) + \mathcal{O}(h^2)$, quando h se torna arbitrariamente pequeno.

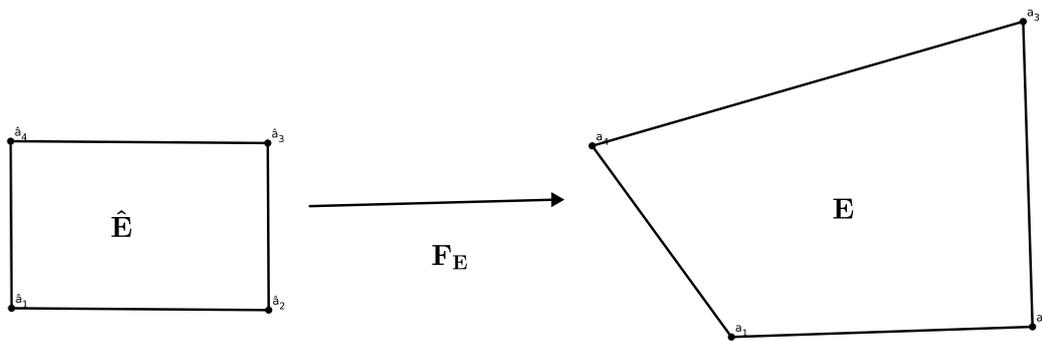


Figura 46 – Aplicação bilinear do mapeamento geométrico.

Seja \mathcal{T}_h uma partição de $\bar{\Omega}$ em elementos quadrilaterais E com parâmetro de malha $h = \max_{E \in \mathcal{T}_h} h_E$, onde $h_E = \text{diam } E$. Dado um elemento $E \in \mathcal{T}_h$ com vértices \mathbf{a}_j , $1 \leq j \leq 4$ (como na Figura 46), denotemos por S_i o subtriângulo de E com vértices \mathbf{a}_{j-1} , \mathbf{a}_j e \mathbf{a}_{j+1} (\mathbf{a}_0 coincidindo com \mathbf{a}_4 e \mathbf{a}_5 coincidindo com \mathbf{a}_1). Assim, cada quadrilátero possuirá 4 subtriângulos associados aos vértices e vamos definir

$$\rho_E := \min_{1 \leq i \leq 4} \rho_E^{(i)}, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\rho_E^{(i)} = \sup \{ \text{diam } B_i; B_i \text{ Bola contida no subtriângulo } S_i \}. \quad (\text{A.2})$$

Definição 3. *Seja $\{\mathcal{T}_h\}$ uma família de partições de $\bar{\Omega}$ em elementos quadrilaterais E , indexada pelo parâmetro $h = \max_{E \in \mathcal{T}_h} h_E$, com $h_E = \text{diam } E$. $\{\mathcal{T}_h\}$ é dita regular se existir*

uma constante $\kappa > 0$ tal que

$$\frac{h_E}{\rho_E} \leq \kappa, \quad \forall E \in \mathcal{T}_h. \quad (\text{A.3})$$

A constante κ controla a máxima deformação, para toda partição \mathcal{T}_h , garantindo que cada quadrilátero E não degenerere em um triângulo (GIRAULT; RAVIART, 1986).

Definição 4. Uma partição quadrilateral \mathcal{T}_h é dita h -uniforme se cada elemento é um h -paralelogramo, i.e., seus vértices satisfazem

$$\|(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4)\| \leq Ch, \quad (\text{A.4})$$

e quaisquer dois quadriláteros adjacentes também formam um h -paralelogramo, i.e.,

$$\|(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}'_2 - \mathbf{a}'_1)\| \leq Ch, \quad (\text{A.5})$$

onde \mathbf{a}'_i , $i = 1, 2, 3, 4$, denota os vértices de um elemento adjacente E' .

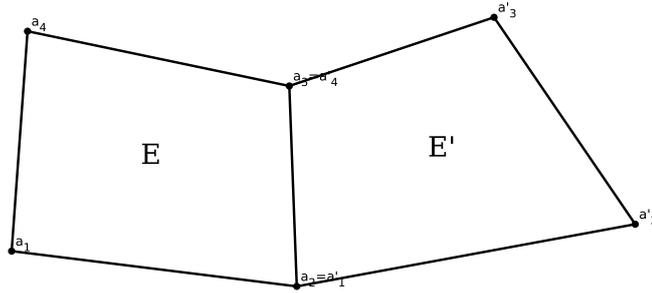


Figura 47 – Malha quadrilateral regular h -uniforme.

Seja \mathcal{T}_h uma partição *shape-regular* de Ω em quadriláteros convexos, com parâmetro

$$h = \max_{E \in \mathcal{T}_h} \text{diam} E.$$

Além disso, vamos assumir que a malha é h -uniforme. Para qualquer quadrilátero convexo $E \in \mathcal{T}_h$, existe uma bijeção $\mathbf{F}_E : \hat{E} \rightarrow E$, onde \hat{E} é o quadrado de referência, com vértices $\hat{\mathbf{a}}_1 = (-1, -1)^T$, $\hat{\mathbf{a}}_2 = (-1, 1)^T$, $\hat{\mathbf{a}}_3 = (1, 1)^T$ e $\hat{\mathbf{a}}_4 = (1, -1)^T$. Denotando os correspondentes vértices do elemento E por $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i)^T$, teremos que \mathbf{F}_E é dada como sendo a aplicação bilinear

$$\mathbf{F}_E(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{a}_1(1-\hat{x})(1-\hat{y})/4 + \mathbf{a}_2(1+\hat{x})(1-\hat{y})/4 + \mathbf{a}_3(1+\hat{x})(1+\hat{y})/4 + \mathbf{a}_4(1-\hat{x})(1+\hat{y})/4. \quad (\text{A.6})$$

Segue que a matriz Jacobiana \mathbf{DF}_E dessa mudança de coordenadas fica dada por

$$\mathbf{DF}_E(\hat{\mathbf{x}}) = [(1 - \hat{y})\mathbf{a}_{21} + \hat{y}\mathbf{a}_{34}, (1 - \hat{x})\mathbf{a}_{41} + \hat{x}\mathbf{a}_{32}], \quad (\text{A.7})$$

onde $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j$. A área do triângulo determinado por dois vetores $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ no plano é dada por

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Assim, sendo $|T_{ijk}|$ a área do triângulo de vértices \mathbf{a}_i , \mathbf{a}_j e \mathbf{a}_k (no sentido anti-horário, vide fig. 46), temos

$$2|T_{ijk}| = |\det(\mathbf{a}_{ji}, \mathbf{a}_{ki})|.$$

Para o Jacobiano J_E , usando que \det é uma aplicação multilinear alternada, temos

$$\begin{aligned} J_E &= \det(\mathbf{a}_{21} + \hat{y}(\mathbf{a}_{34} - \mathbf{a}_{21}), \mathbf{a}_{41} + \hat{x}(\mathbf{a}_{32} - \mathbf{a}_{41})) \\ &= \det(\mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{41}) + \hat{x} \det(\mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{32} - \mathbf{a}_{41}) + \hat{y} \det(\mathbf{a}_{34} - \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{41}) \\ &\quad + \hat{x}\hat{y} \det(\mathbf{a}_{34} - \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{32} - \mathbf{a}_{41}), \end{aligned}$$

por (A.4) e (A.5), o último termo acima é de ordem $\mathcal{O}(h^2)$ e podemos desconsiderá-lo. Portanto, segue que

$$J_E = 2|T_{124}| + 2(|T_{123}| - |T_{124}|)\hat{x} + 2(|T_{134}| - |T_{124}|)\hat{y}. \quad (\text{A.8})$$

Ou seja, $|J_E| \in P_1(\hat{E})$ e isso deve ser levado em conta na quadratura adotada.

Segundo um resultado básico, o min (ou max) de uma função linear sobre um poliedro convexo e limitado, quando existir, é atingido nos vértices. Assim, considerando $\min_{\hat{E}} J_E$, testando os vértices vemos que

$$J_E(\hat{\mathbf{a}}_i) > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Portanto, o Jacobiano J_E é sempre positivo e fica bem-definida a transformação (contravariante) de Piola $\mathbf{P}_{\mathbf{F}_E} = |J_E|^{-1} \mathbf{DF}_E : L^2(\hat{E})^2 \rightarrow L^2(E)^2$, $E \in \mathcal{T}_h$, dada por

$$\hat{q}(\hat{\mathbf{x}}) \mapsto q(\mathbf{x}) := \frac{1}{|J_E|} \mathbf{DF}_E \hat{q} \circ \mathbf{F}_E^{-1}(\mathbf{x}).$$

Uma propriedade importante desta transformação é que ela permite tratar certas integrais num elemento afim E como se fossem no elemento de referência. Em particular, a transformada de Piola preserva traços normais em $H^{-1/2}$ sendo, portanto, adequada para tratar transformações afins envolvendo campos vetoriais em $H(\text{div})$. Em particular, para qualquer $\hat{\mathbf{v}} \in \hat{\mathbf{V}}(\hat{E})$, sendo $\mathbf{v} := \mathbf{P}_{\mathbf{F}_E}(\hat{\mathbf{v}}) = J_E^{-1} \mathbf{DF}_E \hat{\mathbf{v}} \circ \mathbf{F}_E^{-1}$, temos

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{J_E} \hat{\text{div}} \hat{\mathbf{v}}. \quad (\text{A.9})$$

Isso também motiva a definição do espaço polinomial \mathcal{R}_k pois, em termos polinomiais, temos que

$$\mathcal{R}_k(\hat{E}) = P_1(\hat{E})Q_k(\hat{E}). \quad (\text{A.10})$$

Ou seja, \mathcal{R}_k é definido de tal forma que seu quociente por $P_1(\hat{E})$ seja exato. Assim, no caso da família \mathcal{ABF}_k , temos que $\text{div}(\mathcal{ABF}_k) = \mathcal{R}_k$ e logo, para $\mathbf{v} \in \mathcal{ABF}_k$, sobre uma malha quadrilateral geral decorre que

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{J_E} \hat{\text{div}} \hat{\mathbf{v}} \in Q_k. \quad (\text{A.11})$$

APÊNDICE B – Condensação Estática a Nível do Elemento

O esforço computacional requerido pela eliminação gaussiana depende do tamanho da banda ou do envelope (entradas não-nulas dentro da banda). Quanto menor a banda ou o envelope, mais eficiente será a eliminação gaussiana (AXELSSON; BARKER, 2001). Surgem assim, naturalmente, algoritmos no sentido de minimizar a banda ou o envelope como, por exemplo, o algoritmo reverso de Cuthill-MacKee (GEORGE; LIU, 1981). Entretanto, estes procedimentos de minimização requerem excessivo tempo computacional e produzem *fill-in*¹ (AXELSSON; BARKER, 2001), o que os torna de utilização limitada para problemas de elementos finitos. Por outro lado, existem outras técnicas especiais onde parte do processo de eliminação gaussiana pode ser conduzido de antemão ou simultaneamente com a montagem, de forma que o sistema final a ser resolvido possui tamanho reduzido. Por exemplo, a condensação estática é uma técnica para eliminar incógnitas numa etapa anterior à montagem do sistema global.

A forma mais simples de condensação estática se dá a nível do elemento² e se aplica a problemas de elementos finitos nos quais os elementos contém nós interiores. Nesta técnica, as incógnitas associadas aos nós interiores são eliminadas de antemão, resultando apenas num sistema reduzido de equações a ser armazenado, montado e resolvido. Este procedimento é equivalente à eliminação gaussiana por blocos e, como a matriz montada pode possuir uma banda muito maior do que aquela que seria obtida originalmente (AXELSSON; BARKER, 2001), conclui-se que a condensação estática envolve ordenações de nós longe de ser banda-minimizante. A característica essencial deste processo é o fato de que os nós interiores devem ser enumerados separadamente dos demais (e.g., por último) tanto local quanto globalmente. Um detalhe importante aqui é que, de maneira mais geral, ‘nó interior’ deve ser entendido como nó ‘não-compartilhado’. Incógnitas associadas a graus de liberdade de espaços de aproximação que não possuem restrição de continuidade, podem ser condensadas. Por exemplo, após a hibridização de um espaço de aproximação H(div)-conforme, suas funções de base globais deixam de possuir componente normal contínua ao longo da aresta de cada elemento, de forma que, após uma certa ordenação dos nós, a matriz global definida por essas funções de base se torna bloco-diagonal e logo pode ser condensada (invertida localmente) (QUINELATO, 2013). Resumidamente, podemos dizer que funções de base para espaços de aproximação ‘descontínuos’ geram matrizes globais que são bloco-diagonais (cada bloco associado a um elemento) e logo

¹ criação de entradas não-nulas em posições antes ocupadas por zeros

² em contraste com aquela a nível do superelemento

não-singulares.

B.1 Biblioteca Lapack

Ao longo deste trabalho foram utilizadas subrotinas da biblioteca LAPACK³, tanto para a solução do sistema global montado, assim como para avaliar condicionamento de matrizes.

LAPACK (acrônimo para “**L**inear **A**lgebra **P**ackage”) é uma biblioteca padrão para álgebra linear numérica, a qual dispõe de *rotinas* para resolver sistemas de equações lineares e mínimos quadrados linear, problemas de autovalores e decomposição em valores singulares. Além disso, dispõe também de rotinas para implementar fatorações matriciais associadas aos problemas mencionados. LAPACK foi originalmente escrito em FORTRAN 77 mas migrou para FORTRAN 90 na versão 3.2 (2008). Suas rotinas podem tratar matrizes com entradas reais ou complexas, com precisão simples ou dupla.

LAPACK evoluiu como sucessor de algumas bibliotecas com propósitos mais particulares, escritas nas décadas de 70 e 80 (e.g., LINPACK para rotinas de solver e mínimos quadrados e EISPACK para rotinas relacionadas a autovalores). Todavia, ao contrário de seus ancestrais, escritos para trabalhar com memória compartilhada (*vector computers*), LAPACK foi designado para explorar o modelo de memória cache das arquiteturas modernas e assim poder rodar mais rápido. Além disso, em pacotes mais atuais como *ScaLAPACK* e *PLAPACK*, houve extensões para rodar em arquiteturas de memória distribuída como, por exemplo, GPU’s.

B.1.1 Convenção de nomes

Devido ao fato de que os primeiros padrões de FORTRAN apenas suportavam identificadores com até 6 (seis) caracteres, as subrotinas do LAPACK possuem uma convenção de nomes bem particular. Ou seja, o nome de uma subrotina qualquer do LAPACK é da forma `pmmaa`, onde

- `p` denota o tipo numérico ou precisão a ser usada. `S` e `D` indicam, respectivamente, aritmética de ponto flutuante simples e dupla; enquanto `C` e `Z` representam aritmética *complexa* com precisão simples e dupla, respectivamente.
- `mm` especifica o tipo de matrix a ser passada para o algoritmo. A lista dos diferentes tipos é um tanto extensa. Para citar alguns exemplos apenas, temos: `GB` (matriz de banda), `GT` (matriz tridiagonal qualquer), `SY` (matriz simétrica), `TR` (matriz triangular), etc..

³ <<http://www.netlib.org/lapack/lug/>>

- **aaa** é um indicador, podendo ter de *uma a três* letras, que designa o algoritmo implementado na subrotina. Para citar alguns:
 - **TRD**: reduz uma matriz simétrica a uma matriz simétrica tridiagonal;
 - **TRF**: computa uma fatoração triangular (LU, Cholesky, etc.);
 - **TRI**: calcula a inversa (baseado na fatoração triangular);
 - **TRS**: resolve um sistema de equações lineares (baseado em fatoração triangular);
 - **CON**: estima o número de condição;
 - **EQR**: computa autovalores e/ou a forma de Schur usando o algoritmo QR;
 - etc..

Vamos discutir, brevemente, algumas rotinas utilizadas neste trabalho.

B.1.1.1 Solver

A rotina **DGBSV** computa a solução para um sistema *real* de equações $AX = B$, onde A é uma matriz de banda com, KL subdiagonais e KU superdiagonais. Neste caso, é usado fatoração LU com pivoteamento parcial e troca de linhas para fatorar a matriz A como $A = LU$, onde L é um produto de matrizes de permutação e matrizes triangular inferior unitárias com KL subdiagonais, e U é uma matriz triangular superior com $KL + KU$ superdiagonais. A forma fatorada é então usada para resolver o sistema usando, obviamente, retrossubstituição.