UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

LEONARDO FRANCISCO CAVENAGHI

O Teorema de Calabi-Yau via fluxos de Ricci

Campinas

2018

Leonardo Francisco Cavenaghi

O Teorema de Calabi-Yau via fluxos de Ricci

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rafael de Freitas Leão

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Leonardo Francisco Cavenaghi e orientada pelo Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 131875/2016-7

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C315t

Cavenaghi, Leonardo Francisco, 1994-
O teorema de Calabi-Yau via fluxos de Ricci / Leonardo Francisco Cavenaghi. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Rafael de Freitas Leão.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Calabi-Yau, Variedades de. 2. Kahler-Einstein, Métrica de. 3. Ricci, Fluxo de. 4. Kahler-Ricci, Fluxo de. 5. Grupos de holonomia. I. Leão, Rafael de Freitas, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The Calabi-Yau theorem via Ricci flow
Palavras-chave em inglês:
Calabi-Yau manifolds
Kahler-Einstein metrics
Ricci flow
Kahler-Ricci flow
Holonomy groups
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Rafael de Freitas Leão [Orientador]
Lino Anderson da Silva Grama
Llohann Dallagnol Sperança
Data de defesa: 16-02-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de fevereiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO

Prof(a). Dr(a). LINO ANDERSON DA SILVA GRAMA

Prof(a). Dr(a). LLOHANN DALLAGNOL SPERANÇA

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Com amor e saudade, a Ully, ao Antonio, a Maite e a Babi.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Plinio Cavenaghi Filho, meu pai e maior fonte de inspiração. O ser humano mais inteligente que conheço. Nunca mediu esforços para que o título de mestre fosse conseguido.

Agradeço à família Cavenaghi, em especial à Vó Maria, pelo apoio e amor de sempre, que fizeram a trajetória ser muito, mas muito, mais fácil.

Agradeço aos meus irmãos Raul, George, Gabriel e Alex, que cresceram comigo e me ajudaram a ser quem eu sou.

À minha mãe e às minhas irmãs, cuja convivência foram determinantes no meu caráter.

Aos professores Giovana (história), Mariana (literatura), João (física), Adriano (química), César (matemática), Luciana (biologia) e Cristiano (geografia), que forneceram uma base sólida na minha formação colegial, permitindo o ingresso na universidade. À Mariana, em particular, agradeço por me fazer um apaixonado por literatura e lirismo, que certamente só melhoram meu trabalho como matemático.

Aos meus irmãos Augusto, Charles, Gustavo, Anderson e Ygor, que me ouviram sempre e me carregaram emocionalmente nestes anos de convívio.

Ao Alexandre, à Ana e Verônica, agradeço por me resgatarem quando me vi sem ninguém.

À Isabela Moretto, pelos anos vividos juntos, minha eterna gratidão e respeito. Seja sempre feliz.

Ao Rafael Leão, maior responsável por eu ser um geômetra, obrigado! Obrigado por aceitar me orientar, obrigado por entrar de cabeça nesse projeto. Você é e sempre foi uma grande inspiração.

Ao Lino, ser humano e profissional incrível, me ensinou quase toda a geometria que eu sei, sou seu fã! Obrigado por tudo.

Ao Ricardo, sem dúvidas, sem ele eu não teria sido mestre. Me fez ser forte quando eu mais precisei, acreditou em mim em todos os momentos e se tornou um grande amigo. Muito obrigado.

Ao Llohann, que mais que meu futuro orientador de doutorado, é um amigo sincero, uma inspiração, um grande mentor, meu segundo pai.

À secretaria do IMECC que sempre foi muito solícita e competente.

Ao CNPq, que por meio do contribuinte brasileiro, tornou possível o cumprimento deste projeto. Vida longa!

Por fim, a todos os meus colegas do IMECC e IFGW, vocês fizeram tudo mais fácil.

Ser quem sou, por que sou, por quem será? Não é mais um conto vazio, um final sem sentido, um sentimento doído, um fim de cigarro. É uma música nova, um cheiro cor de rosa, um propósito de haver. E há, aqui, agora, só há. Não há mais dor que vigora, só o que se sente, de repente, reluzente a imensidão de estar. Talvez não tenha sido, tenha faltado juízo, tenha existido de menos. Mas eis que agora, agora sou eu, inteiro, completo, pleno. Sou uma caixa cheia, uma alma que existe, existo.

Resumo

O objetivo desta dissertação é entender a formulação do Teorema de Calabi-Yau, algumas de suas consequências relacionadas à holonomia especial $SU(m)$, estudar a existência de métricas Kähler-Einstein em variedades com primeira classe de Chern com sinal e apresentar uma demonstração para esse teorema via fluxos de Ricci.

Palavras-Chave: Calabi-Yau. Métricas de Kähler-Einstein. Holonomia Especial $SU(m)$. Fluxos de Ricci. Fluxos de Kähler-Ricci.

Abstract

The aim of this dissertation is to understand the formulation of Calabi-Yau theorem and present a proof for this theorem via Ricci flow, understand some of it consequences related to special holonomy $SU(m)$ and to study the existence of Kähler-Einstein metrics on manifolds with first Chern class with sign.

Keywords: Calabi-Yau. Kähler-Einstein metrics. Special holonomy $SU(m)$. Ricci flow. Kähler-Ricci flow.

Sumário

Introdução 13

1 PRELIMINARES EM GEOMETRIA RIEMANNIANA . . . 16
1.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo 16
1.2 Holonomia e a Lista de Berger 17
1.2.1 Holonomia e Variedades Simétricas e Irredutíveis 17
1.2.1.1 Variedades riemannianas irredutíveis 19
1.2.1.2 Variedades Simétricas 21
1.3 Variedades Einstein 25
1.4 Exemplos 27

2 GEOMETRIA DIFERENCIAL COMPLEXA 31
2.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo 31
2.2 Variedades complexas 32
2.3 Geometria Kähler via geometria riemanniana 40
2.4 Geometria de fibrados holomorfos e fibrados holomorfos hermitianos 45
2.5 Revisitando variedades Kähler 50
2.6 Classes de Chern 52
2.7 Teoria de Hodge em variedades Kähler 55
2.8 Exemplos 61

3 O TEOREMA DE CALABI-YAU 64
3.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo 64
3.2 A conjectura de Calabi e a prova de Yau 64
3.3 Variedades com Holonomia contida ou igual a SU(n) 69

4 FLUXOS DE RICCI 74
4.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo 74
4.2 Exemplo prático de fluxos de Ricci 76
4.2.1 Fluxos de Ricci como um sistema de EDO's 76
4.2.2 Fluxo de Ricci na esfera de Berger 77
4.3 Evoluções e estimativas 78
4.4 Existência e unicidade de solução para o Fluxo de Ricci 83
4.5 O blow-up da curvatura de Riemann 88
4.6 Fluxo de Ricci como um fluxo gradiente 94

5 TEOREMA DE CALABI-YAU E MÉTRICAS DE KÄHLER-EINSTEIN VIA FLUXOS DE RICCI 100
5.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo 100
5.2 Como provar o Teorema de Calabi-Yau usando fluxos de Ricci 100
5.3 Solução para todo tempo 103
5.4 Convergência 109
5.5 Existência de métricas Kähler-Einstein 113

REFERÊNCIAS 115

APÊNDICES 118

APÊNDICE A – TÓPICOS DE ANÁLISE 119
A.1 Análise básica em variedades 119
A.1.1 Espaços de Lebesgue e Sobolev 119
A.1.2 Espaços de classe C^k e de Hölder 120
A.2 Sobolev, Kondrakov e Poincaré: inclusões e desigualdades . . . 121
A.3 Operadores Diferenciais em Fibrados Vetoriais 122
A.3.1 Definições gerais 122
A.3.2 Operadores Elípticos e equações diferenciais parabólicas 124

Introdução

O objetivo desta dissertação é entender a formulação, consequências e demonstração do clássico Teorema de Calabi-Yau, provado em 1978 por Shing-Tung Yau em [Yau78]. O teorema foi oriundo de uma conjectura proposta por Eugenio Calabi na década de 50 que trata sobre a existência de métricas kählerianas com forma de Ricci prescritas.

Dado o fato que a forma de Ricci ρ em uma variedade Kähler determina a primeira classe de Chern desta e que ρ pode ser obtida via o tensor de Ricci da conexão de Levi-Civita associada à g segundo

$$\rho(X, Y) := \mathrm{Ric}(JX, Y),$$

caracterizamos o sinal da primeira classe de Chern de acordo com o tensor de Ricci. Se a forma quadrática definida por Ric for positiva definida, dizemos que a primeira classe de Chern é positiva, escrevendo $c_1(M) > 0$. Analogamente para os casos que é nula ou negativa definida. Assim, essencialmente, o Teorema de Calabi-Yau responde a pergunta: uma vez que a primeira classe de Chern tem sinal, existe uma métrica de Kähler-Einstein com a constante obedecendo este sinal? A resposta para tal pergunta é sim nos casos em que a primeira classe de Chern é nula e também no caso em que é negativa. Para o caso em que $c_1(M) > 0$, Yau forneceu um contra-exemplo antes mesmo de ter dado a prova para os outros casos. Ele constrói uma variedade de Kähler, utilizando técnicas de geometria algébrica, com primeira classe de Chern positiva, e que não admite métricas Kähler-Einstein.

O caso de existência de métricas Kähler-Einstein segue se respondemos primariamente a questão:

Dada uma variedade de Kähler (M, J, g, ω) com forma de Ricci ρ, e uma $(1,1)$-forma ρ' cohomóloga a ρ, existe uma métrica de Kähler g' em M, com forma de Kähler ω' cohomóloga a ω tal que sua forma de Ricci é ρ'?

Para responder a esta pergunta, procedemos de duas maneiras: a primeira foi seguir a demonstração clássica de Yau para esse teorema, assumindo estimativas difíceis oriundas de equações diferenciais parciais e utilizando o método da continuidade. Tal

abordagem é imediata uma vez que aceitas as estimativas. Nós não apresentamos aqui como calculá-las, indicando as referências [Joy00, Yau78].

Uma segunda abordagem para prova do Teorema de Calabi-Yau foi proposta por Cao em [Cao85] e assume algumas poucas estimativas de Yau. Cao aproveitou-se das técnicas desenvolvidas por Hamilton em [Ham82] no estudo do recém introduzido fluxo de Ricci, para deformar métricas segundo uma equação análoga a do calor, só que para métricas kählerianas. Tal prova nós apresentamos em todos os detalhes nesta dissertação, seguindo o artigo original e [San12].

Em [Ham82], Hamilton provou que qualquer 3-variedade compacta (M, g) com curvatura de Ricci positiva admite uma métrica de Einstein com curvatura escalar positiva. Para tanto, ele considerou a equação de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial t}(t) = -2\tilde{R}_{ij}(t) + \dfrac{2}{3} r \tilde{g}_{ij}(t), \\ \tilde{g}_{ij}(0) = g_{ij}, \end{cases} \tag{1}$$

onde $r = \dfrac{1}{vol(M)} \displaystyle\int_M S_{\tilde{g}} d\mu(\tilde{g})$.

Esse resultado, junto ao fato que 3-variedades com métrica de Einstein possuem curvatura seccional constante foi a motivação para que o fluxo de Ricci fosse utilizado em uma tentativa de demonstração da conjectura de Poincaré. De fato, esses dois resultados mostram que 3-variedades com curvatura de Ricci positiva admitem uma métrica de curvatura seccional constante positiva.

Em seu trabalho, Hamilton garantiu a existência de uma solução em $M \times [0, \infty)$ para o problema (1), e mostrou que $\dfrac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial t}(t) \to 0$ na topologia suave quando $t \to \infty$. Assim, a métrica limite tem a propriedade

$$\tilde{R}_{ij}(\infty) = \frac{1}{3} r \tilde{g}_{ij}(\infty), \tag{2}$$

satisfazendo o procurado, já que $r > 0$.

Dada uma variedade de Kähler (M, g, ω), a versão complexa do fluxo de Ricci foi introduzida em 1985 por Cao

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}(t) = -\tilde{\rho}(t), \\ \tilde{\omega}(0) = \omega, \end{cases} \tag{3}$$

onde $\tilde{\rho}(t)$ é a forma de Ricci de $\tilde{g}(t)$, a métrica kähleriana associada à forma de Kähler $\tilde{\omega}(t)$.

A equação (3) tem o nome de **Fluxo de Kähler-Ricci** e em coordenadas holomorfas se escreve como

$$\frac{\partial \tilde{g}_{j\bar{k}}}{\partial t} = -\tilde{R}_{j\bar{k}}(t), \tag{4}$$

onde $\tilde{R}_{j\bar{k}}(t)$ é o tensor de Ricci de $\tilde{g}_{j\bar{k}}(t)$. Resultados sobre existência em tempo curto e estimativas para evolução dos tensores associados à $\tilde{g}_{j\bar{k}}$ podem ser vistos em [SW12].

Mostramos que:

Teorema (Cao-Calabi-Yau)**.** *Seja M uma variedade de Kähler compacta de dimensão complexa n com métrica de Kähler $g_{j\bar{k}}$. Então, para qualquer $(1,1)$ forma $\rho' = \frac{i}{2\pi} T_{j\bar{k}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ que represente a primeira classe de Chern $c_1(M)$ de M, podemos deformar a métrica inicial segundo a equação do calor*

$$\frac{\partial \tilde{g}_{j\bar{k}}}{\partial t}(t) = -\tilde{R}_{j\bar{k}}(t) + T_{j\bar{k}} \tag{5}$$

para outra métrica $\tilde{g}_{j\bar{k}}$ cuja forma de Kähler está na mesma classe que a forma de Kähler de $g_{j\bar{k}}$ e tal que sua forma de Ricci é ρ'.

A ideia é seguir os passos de Hamilton e mostrar que o problema (5) tem solução em $[0, \infty]$ e que quando $t \to \infty$, tem-se $\tilde{R}_{j\bar{k}} \to T_{j\bar{k}}$, sendo portanto a métrica definida em $t = \infty$ a que satisfaz a tese.

A fim de tornar mais familiar o conceito de fluxos de Ricci, faremos uma incursão por boa parte da teoria já consolida deste fluxo. Nos embasando em referências clássicas como [Top06, AH10], apresentamos resultados mais antigos, como a existência de solução em tempo curto para o fluxo de Ricci, e outros mais recentes, como o blow-up da norma do tensor de Riemann segundo o fluxo, além formulação do fluxo de Ricci como um fluxo gradiente, proposta por Perelman [Per02].

Apresentamos também as chamadas *variedades de Calabi-Yau*, que são variedades Kähler com holonomia igual a $SU(n)$, tendo sua existência relacionada ao Teorema de Calabi-Yau.

Os capítulos são divididos por grupos de conteúdo, evitando sempre misturar fatos de geometria diferencial complexa com fatos de geometria riemanniana, exclusivamente. Ao início de cada um dos capítulos, buscamos expor o que será apresentado, relacionando com o trabalho total.

Assume-se como bem conhecido conteúdo básico de geometria diferencial, embora busquemos sempre oferecer referências para aprofundar as discussões. Além disso, é exigida muito da teoria de análise, que tem alguns resultados utilizados discutidos no único Apêndice.

Capítulo 1

Preliminares em Geometria Riemanniana

1.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo

Este capítulo tem como objetivo introduzir conceitos de geometria riemanniana não costumeiramente vistos nos cursos de pós-graduação. Tais conceitos serão essenciais para o desenvolvimento desta dissertação, sendo trabalhados de forma mais completa possível. Assumiremos, entretanto, bom conhecimento de geometria riemanniana básica, como as definições de derivada covariante, transporte paralelo, mapa exponencial e os principais tensores de curvatura. Assume-se também conhecimento em geometria de fibrados vetoriais e suas conexões. Quando necessário daremos maiores detalhes e/ou referências sobre estes objetos.

Iniciaremos tratando de Holonomia no âmbito de conexões em fibrados vetoriais. Posteriormente particualirzamos para o caso de Holonomia em geometria riemanniana. Entender bem tal conceito será fundamental quando tratarmos de holomoia em variedades Kähler e Calabi-Yau. Veremos como tal assunto tem relação direta com a topologia dessas variedades. Destacam-se nesta seção o Teorema de Ambrose-Singer junto do importante Corolário 1.2.

Com o objetivo de entender a Lista de Berger, que caracteriza os possíveis grupos de holonomia que uma grande classe de variedades pode assumir, faz-se necessária uma incursão no estudo de Variedades Simétricas. Buscamos caracterizar estes objetos sob um ponto de vista intrinsicamente relacionado com geometria riemanniana e consequentemente, com holonomia.

Seguidamente, estudamos as variedades Einstein. Ganhando destaque por serem soluções das equações de campo de Einstein, tais variedades são bons exemplos de variedades riemannianas com curvatura de Ricci (consequentemente escalar) constante.

Umas das consequências da demonstração do Teorema de Calabi-Yau é garantir a existência de variedades Kähler-Einstein assumindo condições topológicas (sinal da primeira classe de Chern), sendo portanto interessante apresentar as variedades de Einstein no caso riemanniano para fomentar a discussão entre as relações entre esses dois tipos de objetos.

A última seção destina-se a apresentar exemplos concretos de toda a teoria aqui estudada.

1.2 Holonomia e a Lista de Berger

Em 1955, Berger provou o seguinte resultado:

Teorema 1.1 (Berger)**.** *Suponha que M seja uma variedade simplesmente conexa de dimensão n e que g seja uma métrica riemanniana em M. Assuma que g seja irredutível e não simétrica. Então, exatamente um dos sete casos ocorre:*

1. $\mathrm{Hol}(g) = SO(n)$,
2. $n = 2m$ *com* $m \geq 2$, $\mathrm{Hol}(g) = U(m) \subset SO(2m)$,
3. $n = 2m$ *com* $m \geq 2$, $\mathrm{Hol}(g) = SU(m) \subset SO(2m)$,
4. $n = 4m$ *com* $m \geq 2$, $\mathrm{Hol}(g) = Sp(m) \subset SO(4m)$,
5. $n = 4m$ *com* $m \geq 2$, $\mathrm{Hol}(g) = Sp(m)Sp(1) \subset SO(4m)$,
6. $n = 7$, $\mathrm{Hol}(g) = \mathcal{G}_2 \subset SO(7)$,
7. $n = 8$, $\mathrm{Hol}(g) = Spin(7) \subset SO(8)$.

O primeiro objetivo desta dissertação consiste em tornar entendível este enunciado como motivação para o estudo de holonomia, que será necessário quando discutirmos variedades de Calabi-Yau.

1.2.1 Holonomia e Variedades Simétricas e Irredutíveis

Seja M uma variedade suave e $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial suave munido de uma conexão ∇. Sejam $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva suave por partes em M.Suponha que $\gamma : [0,1] \to M$ seja uma curva suave por partes tal que $\gamma(0) = x \in M$ e $\gamma(1) = y \in M$. Então, para cada $v \in E_x$, existe única seção suave $s \in C^\infty(\gamma^*(E))$ tal que $\dfrac{\nabla}{dt}s(t) = 0, \forall t \in [0,1]$ e $s(0) = v$. Definimos $P_\gamma : T_xM \to T_yM$ colocando $P_\gamma(v) := s(1)$. A esta aplicação (linear) damos o nome de **transporte paralelo** ao longo de γ.

Se considerarmos γ uma curva fechada, isto é, $\gamma : [0,1] \to M$ é tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x \in M$, o transporte paralelo P_γ fornece um isomorfismo em T_xM. Chamaremos tais curvas de **laços**.

Definição 1.1. *Seja $E \to M$ um fibrado vetorial suave com conexão ∇. O **grupo de holonomia** da conexão ∇ em $x \in M$ é definido por*

$$\mathrm{Hol}_x(\nabla) := \{P_\gamma : \gamma \text{ é um laço com base em } x\}. \tag{1.1}$$

Observamos que:

1. $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ é de fato um grupo, sendo subgrupo de $GL(E_x)$. De fato, se γ, δ são laços com base em x, então definimos um novo laço

$$\gamma * \delta := \begin{cases} \gamma(2t), \ t \in [0, 1/2] \\ \delta(2t-1), \ t \in [1/2, 1] \end{cases} \tag{1.2}$$

   Ainda mais, podemos definir o laço inverso, $\gamma(t)^{-1} := \gamma(1-t)$.

   Assim, a estrutura de grupo de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ é dada por

$$P_\gamma P_\delta := P_{\gamma * \delta}, \tag{1.3}$$

$$P_\gamma^{-1} := P_{\gamma^{-1}(t)} \tag{1.4}$$

2. Se $x, y \in M$ e $\gamma : [0,1] \to M$ é um caminho suave por partes que liga x a y, então

$$\mathrm{Hol}_x(\nabla) = P_\gamma^{-1} \mathrm{Hol}_x(\nabla) P_\gamma^{-1}. \tag{1.5}$$

   Em particular, se uma variedade é conexa por caminhos, não importa a escolha de ponto base, pois os grupos de holonomia em quaisquer dois pontos serão sempre isomorfos.

3. Se denotarmos por $\mathrm{Hol}^0(\nabla)$ o subconjunto de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ onde consideramos apenas laços contráteis, então existe uma sobrejeção

$$\pi_1(M) \to \mathrm{Hol}_x(\nabla)/\mathrm{Hol}^0(\nabla), \tag{1.6}$$

   onde $\pi_1(M)$ é o grupo fundamental de M. Em particular, se M é simplesmente conexa, então $\mathrm{Hol}^0(\nabla) = \mathrm{Hol}_x(\nabla)$.

Vale observar que o grupo de holonomia $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ define uma ação em T_xM. De fato, dado $v \in T_xM$ e P_γ com $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, podemos definir tal ação por

$$\phi : \mathrm{Hol}_x(\nabla) \to GL(T_xM)$$

$$P_\gamma \mapsto (P_\gamma : v \mapsto P_\gamma(v)), \tag{1.7}$$

ou seja, $\phi : \mathrm{Hol}_x(\nabla) \hookrightarrow GL(T_xM)$ define a inclusão.

Especializaremos o estudo para o caso em que $E = TM$ considerando uma métrica riemanniana g em M. Nesse caso, utilizaremos a conexão de Levi-Civita em TM e denotaremos $\mathrm{Hol}_x(\nabla) = \mathrm{Hol}(g)$, uma vez que como observamos, em variedades conexas por caminho não há importância quanto à escolha de ponto base.

Existe uma extensão natural da ação de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ em potências de T_xM (e de T_x^*M). Se S é uma seção de $(\otimes^k TM) \otimes (\otimes^l T^*M)$, então definimos a ação estendida, a qual também denotaremos por ϕ, em $S(x)$ por

$$(\phi(P_\gamma)S(x))(v_1, \ldots, v_k; f^1, \ldots, f^l) := S(x)(P_\gamma v_1, \ldots, P_\gamma v_k; f^1 \circ P_\gamma, \ldots, f^l \circ P_\gamma). \tag{1.8}$$

Teorema 1.2. *Seja M uma variedade suave com conexão ∇ em TM (não necessariamente a conexão de Levi-Civita). Para cada $x \in M$ seja $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ o grupo de holonomia de ∇ em x. Então, se S é uma seção de $(\otimes^k TM) \otimes (\otimes^l T^*M)$ tal que $\nabla S = 0$, para cada $x \in M$, o elemento $S(x)$ é fixado pela ação de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ em $(\otimes^k T_xM) \otimes (\otimes^l T_x^*M)$. Reciprocamente, dado $S \in C^\infty((\otimes^k TM) \otimes (\otimes^l T^*M))$, se $S(x)$ é fixado por todo elemento de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ então existe única extensão $\tilde{S}$ de $S(x)$ tal que $\nabla \tilde{S} = 0$.*

Como consequência deste teorema e do fato que $\nabla g = 0$ se ∇ é a conexão de Levi-Civita associada a uma métrica riemanniana g em M, temos necessariamente que $\mathrm{Hol}(g) \subseteq O(n)$. Ou ainda, uma outra forma de verificar este fato é que para conexões compatíveis com a métrica o transporte paralelo define uma isometria linear.

1.2.1.1 Variedades riemannianas irredutíveis

Sejam (P, g) e (Q, h) variedades riemannianas. Lembramos rapidamente que a variedade produto $P \times Q$ tem a propriedade que para quaisquer $(p, q) \in P \times Q$

$$T_{(p,q)}P \times Q \cong T_pP \oplus T_qQ,$$

e ainda,

$$g \times h_{(p,q)} = g_p + h_q.$$

Uma variedade riemanniana (M, g') é dita **localmente redutível** se, para cada ponto de M existe uma vizinhança aberta que é isométrica a um produto $(P \times Q, g \times h)$. Quando M é não redutível, dizemos que esta é irredutível.

Dadas as projeções no primeiro e segundo fator,

$$p_1 : P \times Q \to P,$$

$$p_2 : P \times Q \to Q,$$

podemos construir um isomorfismo de grupos entre $\mathrm{Hol}(h \times g)$ e $\mathrm{Hol}(g) \times \mathrm{Hol}(h)$. De fato, este é dado explicitamente por

$$P_\gamma \mapsto (P_{p_1 \circ \gamma}, P_{p_2 \circ \gamma}), \tag{1.9}$$

onde γ é um laço em $P \times Q$ com base em $(p, q) \in P \times Q$.

Lembramos rapidamente que uma **representação** de grupos é um homomorfismo

$$\rho : G \to GL(V),$$

com V um espaço vetorial. Naturalmente, uma representação pode ser pensada como uma ação do grupo G em V. Dessa forma, podem existir subespaços de V que são invariantes pela ação definida por ρ. A restrição de ρ a cada um destes subespaços fornece uma sub-representação. Diremos que uma representação é **irredutível** se as únicas sub-representações são definidas pela restrição de ρ ao espaço todo, que é naturalmente invariante, e ao $\{0\} \subseteq V$. Dito de outro maneira, os únicos subespaços invariantes por ρ são a origem e o espaço todo.

Note que no caso de métricas riemannianas e conexão de Levi-Civita, a ação pelo grupo de holonomia define uma representação com imagem em $O(n) \subseteq GL(n)$. Portanto, tome $x \in M$ e considere a ação de $\mathrm{Hol}_x^0(\nabla)$ em TM. Se E é subespaço invariante pela representação de holonomia, então $E^\perp$ também é invariante, o que permite decompor

$$T_x M = E_1 \oplus \dots E_k,$$

onde $E_j, j \in \{1, \dots, k\}$ são subespaços invariantes pela representação de $\mathrm{Hol}_x^0(\nabla)$. Podemos transladar estes subespaços via transporte paralelo para todo ponto de M assumindo a hipótese de que M seja conexa por caminhos. Isso produz uma decomposição do fibrado tangente TM em sub-fibrados

$$TM = \eta_1 \oplus \dots \oplus \eta_k.$$

Teorema 1.3 (de Rham)**.** *Dada uma decomposição de $TM = \eta_1 \oplus \dots \eta_k$ em sub-fibrados obtidos por translação de subespaços invariantes pela representação de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ em um ponto $x \in M$, então existe uma vizinhança $U \ni x$ tal que (como variedades isométricas)*

$$(U, g) \cong (U_1 \times \dots U_k, g_1 \times \dots \times g_k),$$

onde $TU_i = \eta_i\Big|_{U_i}$ e U_i são subvariedades de M. Ainda mais, se M é simplesmente conexa, então a decomposição é global.

Demonstração. Veja [Pet06, Página 253, Theorem 56]. ■

Corolário 1.1. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana e g uma métrica irredutível em M, então, a representação de holonomia em $\mathbb{R}^n$ é irredutível.*

Seja M uma variedade suave compacta, $E \to M$ um fibrado vetorial de posto k sobre M e ∇ uma conexão em E. Observamos que fixado $x \in M$ temos que em x a álgebra de Lie $\mathfrak{hol}_x$ do grupo de holonomia $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ é subespaço vetorial da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{R})$ de $GL(k, \mathbb{R})$. Então, podemos pensar em $\mathfrak{hol}_x$ como um espaço vetorial de transformações lineares numa fibra fixada.

Lembramos ainda que se ∇ é uma conexão em E, então sua curvatura é a 2-forma F_∇ com valores nos endomorfismos de E. Logo, para x fixado e $v, w \in T_xM$, temos que $F_\nabla(v, w)$ é uma transformação linear na fibra E_x.

Teorema 1.4 (Ambrose-Singer)**.** *Seja M variedade suave compacta e $E \to M$ fibrado vetorial sobre M munido de uma conexão ∇, fixe $x \in M$. Seja F_∇ a 2-forma de conexão de ∇. Então, $\mathfrak{hol}_x$ é gerada pelos elementos da forma*

$$P_\gamma^{-1} \circ F_\nabla(v, w) \circ P_\gamma, \ \ \gamma(0) = x, \gamma(1) = y, v, w \in T_yM,$$

com γ curva suave por partes.

Demonstração. Veja [Joy00, Capítulo 2, Página 33, Theorem 2.4.3]. ■

Observação 1.1. *Note que o y tem que variar por todos os pontos da variedade, inclusive $y = x$.*

Um importante corolário é o seguinte:

Corolário 1.2. *Nas condições do Teorema anterior, fixados $x, y \in M$ temos que $\mathrm{Hol}_x(\nabla) = \{1\}$ se, e somente se, para cada $v, w \in T_yM$ $F_\nabla(v, w)$ é a transformação nula.*

1.2.1.2 Variedades Simétricas

Definição 1.2. *Uma variedade riemanniana (M, g) é dita um **espaço localmente simétrico**, se para cada $p \in M$ existe uma isometria s_p em uma vizinhança de p, chamada de **simetria**, tal que $s_p^2 = I_p$, a aplicação identidade, e tal que p é o único ponto fixo s_p em tal vizinhança.*

Definição 1.3. *Uma variedade riemanniana (M, g) é dia **espaço simétrico** se a simetria da definição 1.2 pode ser estendida para todo M.*

A seguir algumas propriedades de **espaços simétricos**.

Proposição 1.1. *Seja (M, g) um espaço simétrico conexo e simplesmente conexo. Então g é métrica completa. Ainda mais, se G é o grupo de isometrias de (M, g) gerado por elementos da forma $s_y \circ s_z$, para $y, z \in M$, então G é um grupo de Lie conexo que age transitivamente em M. Assim, toda variedade simétrica é um espaço homogêneo difeomorfo ao quociente de G pelo grupo de isotropia em um ponto qualquer $x \in M$.*

Demonstração. Veja [Pet06, Captíulo 8]. ■

Sejam M e $\tilde{M}$ duas variedades riemanniana de mesma dimensão, e sejam $p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$. Escolha uma isometria linear $i : T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Seja $V \subseteq M$ uma vizinhança geodésica de p tal que $\exp_{\tilde{p}}$ esteja definida em $i \circ \exp_{\tilde{p}}^{-1}(V)$. Defina $f : V \to \tilde{M}$ por

$$f(q) := \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q), \ q \in V. \tag{1.10}$$

Para cada $q \in V$ existe uma única geodésica normalizada $\gamma : [0, t] \to M$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(t) = q$. Seja P_γ o transporte paralelo ao longo de γ ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$. Se definirmos $\varphi_t : T_qM \to T_{f(q)}\tilde{M}$ por

$$\varphi_t(v) = P_{\tilde{\gamma}} \circ i \circ P_\gamma^{-1}(v), \ v \in T_qM, \tag{1.11}$$

com $P_{\tilde{\gamma}}$ denotando o transporte paralelo ao longo da geodésica $\tilde{\gamma}$ em $\tilde{M}$ com $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ e $\tilde{\gamma}'(o) = i(\gamma'(0))$. Denote por R e $\tilde{R}$ os tensores de curvatura associados às conexões de Levi-Civita em M e $\tilde{M}$, respectivamente. Enunciamos o seguinte lema.

Lema 1.1 (Cartan)**.** *Com as notações acima, se, para cada $q \in V$, e para cada t, vale que*

$$\varphi_t^* \tilde{R} = R, \tag{1.12}$$

então $f : V \to f(V) \subseteq \tilde{M}$ é isometria com $df_p = i$.

Demonstração. Veja [dC88, Capítulo 8, Página 174, Teorema 2.1]. ■

Proposição 1.2. *Sejam M_1, M_2 dois espaços simétricos com M_1 simplesmente conexo e $p_i \in M_i$ pontos fixados. Considere a isometria $A : T_{p_1}M_1 \to T_{p_2}M_2$. Definindo φ_t como antes, se $\varphi_t^*(R_2) = R_1$, então existe um recobrimento riemanniano $f : M_1 \to M_2$ com $df_{p_1} = A$, isto é f é uma aplicação de recobrimento onde troca-se todos os adjetivos "homeomorfismo"na definição de espaço de recobrimento por "isometrias".*

Demonstração. Seja $V \subseteq M_1$ uma vizinhança normal de p_1 em M_1 de modo que a exponencial $\exp_{p_2}$ esteja definida em $A \circ \exp_{p_1}^{-1}(V)$. Definamos

$$f : V \subseteq M_1 \to M_2$$

por

$$f(q) = \exp_{p_2} \circ A \circ \exp_{p_1}^{-1}(q), \ \forall q \in V.$$

Da hipótese de que A é isometria segue que $\dim M_1 = \dim M_2$. Se mostrarmos que f define uma isometria local com sua imagem e que o mapa f é sobrejetivo, seguirá que f define um recobrimento riemanniano com uma única folha, porque M_1 é simplesmente conexa. A parte da isometria local segue imediatamente pelo Lema 1.1.

Para a sobrejetividade note que dado que $f : V \to f(V)$, como M_1 é completa por ser espaço simétrico, então f pode ser estendido para M_1 todo. Resta mostrar que $f(M_1) = M_2$. Dado $p \in M_2$ defina, escolha q em M_1 dado por $q = \exp_{p_1} \circ A^{-1} \circ \exp_{p_2}^{-1}(p)$ e note que $f(q) = p$. ■

Discutamos em mais detalhes algumas propriedades das variedades localmente simétricas.

Proposição 1.3. *Em uma variedade riemanniana (M, g) vale o seguinte:*

1. *Se (M, g) é variedade riemanniana tal que $\nabla R = 0$ e $c : I \to M$ é uma curva suave por partes em M e X, Y, Z são campos paralelos ao longo de c, então $R(X, Y)Z$ é paralelo ao longo de c,*

2. *Se (M, g) é variedade riemanniana tal que $\nabla R = 0$, conexa e tem dimensão 2, então M tem curvatura de Gauss constante,*

3. *Se M tem curvatura seccional constante, então $\nabla R = 0$.*

Demonstração. 1. Tome X, Y, Z campos paralelos ao longo de c. Sabemos da regra de derivar campos tensoriais que

$$-\frac{\nabla}{dt}(R(X,Y)Z) = -(\frac{\nabla}{dt}R)(X,Y,Z) - R(\frac{\nabla}{dt}X, Y)Z - R(X, \frac{\nabla}{dt}Y)Z - R(X,Y)(\frac{\nabla}{dt}Z).$$

Como X, Y, Z são paralelos e $\nabla R = 0$, então

$$\frac{\nabla}{dt}(R(X,Y)Z) = 0,$$

de onde segue o resultado.

2. Defina $\mathcal{O} := \{p \in M : K(e_1, e_2) = \text{ constante }\}$, onde K denota a curvatura de Gauss de M e e_1, e_2 são vetores tangentes unitários em p. Claramente $\mathcal{O}$ é não vazio. Da continuidade de K segue que $\mathcal{O}$ é fechado. Provemos que $\mathcal{O}$ é aberto. Da conexidade de M seguirá que $\mathcal{O} = M$. Tome $p \in \mathcal{O}$ qualquer e $q \in M$ em uma vizinhança geodésica de p. Transportando paralelamente e_1, e_2 vetores ortonormais em T_pM para q segue do item anterior que a curvatura em q é a mesma que em p, de onde $\mathcal{O}$ é aberto.

3. Este ponto é imediato.

■

Teorema 1.5. *Seja (M, g) uma variedade riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ e tensor de curvatura R. Então (M, g) é um espaço localmente simétrico se, e somente se, $\nabla R = 0$. Ou seja, R é fixado pelo grupo de holonomia de g.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Fixe $p \in M$ e considere um referencial geodésico em T_pM, isto é, um referencial onde os símbolos de Christoffel se anulem em p. Denote por $R_{ijkl} := g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$. Como $\nabla R = 0$, então R_{ijkl} é constante (veja proposição anterior) ao longo de geodésicas que partem de p. Faça $i : T_pM \to T_pM$ a isometria linear $i(v) = -v$. Note ainda que como R_{ijkl} tem um número par de componentes, então $\varphi_t^* R_{ijkl} = R_{ijkl}$. Portanto, se definirmos $f := \exp_p \circ i \circ \exp_p^{-1}$, segue do Lema 1.1 que f é uma isometria local de p com a propriedade que $f^2 = I$, sendo portanto uma simetria.

($\Rightarrow$) Seja $p \in M$ e $Z \in T_pM$. Considere uma geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = Z$. Tome uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em T_pM e transporte tal base paralelamente a um referencial $\{e_i(t)\}$ ao longo de γ. Denotemos por

$$R_{ijkl}(t) := g(R(e_i(t), e_j(t))e_k(t)), e_l(t)).$$

Então,

$$\begin{aligned}(\nabla_Z R)(p) &:= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} R_{ijkl}(t), \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \{R_{ijkl}(t) - R_{ijkl}(-t)\} = 0,\end{aligned}$$

já que como (M, g) é localmente simétrico, existe uma simetria s_p ao redor de p tal que $s_p^* R_{ijkl}(t) = R_{ijkl}(-t)$. Assim, como s_p é também uma isometria, segue que $s_p^* R_{ijkl}(t) = R_{ijkl}(t)$, de onde, $\nabla R = 0$ porque p e Z são arbitrários. ■

Agora que estamos em condições de entender o Teorema de Berger, notemos que: as hipóteses assumidas para g, *simplesmente conexa*, *irredutível* e *não simétrica* não tem consequências quanto à perda de generalidade sobre a determinação do grupo de Holonomia. Em verdade,

- Se M é simplesmente conexa então $\mathrm{Hol}(g)$ é conexa. Se M não fosse simplesmente conexa então a lista de Berger conteria grupos de Lie não conexos tais que cada componente conexa já estaria na Lista de Berger.
- Se g é irredutível, então a ação de $\mathrm{Hol}(g)$ em $\mathbb{R}^n$ é irredutível. No caso em que g não é irredutível a representação de holonomia seria decomponível em sub-representações onde valeria o teorema de Berger para cada sub-representação. Portanto, não seria acrescida informação sobre qualquer grupo que não está na lista.
- Se g é não simétrica então $\nabla R \neq 0$. Por outro lado, o caso de variedades simétricas já havia sido resolvido por Cartan, então pôde ser descartado.

Cabe observar que Berger provou que somente estes grupos da lista são possíveis, mas *não* provou sob que condições estes ocorrem. Somente 30 anos após este Teorema foram expostos exemplos de variedades e métricas cuja holonomia é uma dentre as listadas. Um dos objetivos desta dissertação é entender a holonomia $SU(m)$.

1.3 Variedades Einstein

Poderia-se fazer uma longa incursão sobre este tema. Os livros [O'N83] e [Bes87] fornecem ótimas discussões sobre o assunto, que por brevidade de tempo discutimos sucintamente.

A **equação de campo** para relatividade geral é dada por

$$\mathrm{Ric}(g) + \Lambda g - \frac{1}{2}Sg = \frac{8\pi G}{c^4}T, \tag{1.13}$$

onde c é a **velocidade da luz no vácuo**, G é a **constante universal de gravitação** e Λ é chamada de **constante cosmológica**. O tensor T é um $(0,2)$-tensor chamada de **tensor de energia e momento** e S é a **curvatura escalar** de g. O tensor $\mathcal{G} := \frac{8\pi G}{c^4}T - \Lambda g$ é chamado de **tensor de Einstein**. Um adendo importante é que as métricas de interesse em relatividade geral tem assinatura $(n-2)$[1], onde n é a dimensão da variedade, que em geral é 4.

Esta é uma segunda variante da equação de campo, sendo introduzida em 1917, a fim de considerar a possível expansão do universo. Há controvérsias sobre considerar ou não o fator Λ, e se de fato este deve ser uma constante. Tal determinação ou não depende da modelagem dos problemas em física. No nosso caso introduzimos a noção de **variedades Einstein** a seguir: faremos uma conta simples que motiva a definição de Variedades de Einstein para os matemáticos: imagine a ausência de matéria, isto é, façamos $T = 0$. Assuma que a métrica g é riemanniana e tem assinatura 4, pois estamos assumindo que $n = 4$. Tomando o traço na equação (1.13) temos

$$S + 4\Lambda - 2S = 0, \tag{1.14}$$

ou seja,

$$S = 4\Lambda. \tag{1.15}$$

Substituindo $S = 4\Lambda$ na equação (1.13) com $T = 0$ obtemos

$$\mathrm{Ric}(g) + \Lambda g - 2\Lambda g = 0, \tag{1.16}$$

ou ainda,

$$\mathrm{Ric}(g) = \Lambda g. \tag{1.17}$$

[1] Adotamos a nomenclatura *assinatura* para denominar a diferença entre o número de autovalores positivos da métrica em cada ponto, com o número de autovalores negativos

Definição 1.4. *Uma variedade riemanniana (M, g) é dita* ***variedade de Einstein*** *se existe uma função suave $\Lambda : M \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathrm{Ric}(g) = \Lambda g.$$

Teorema 1.6. *Seja (M, g) uma variedade de Einstein. Então,*

1. *Se M é conexa e tem dimensão maior ou igual que 3, então Λ é constante,*
2. *Se M tem dimensão 3 e é conexa, então M tem curvatura seccional constante.*

Demonstração. 1. Faremos uso do seguinte Lema:

Lema 1.2 (Segunda Identidade de Bianchi)**.** *Seja (M, g) variedade riemanniana com tensor de curvatura R. Sejam X, Y, Z, W, T campos vetoriais em M e denotemos por $Rm(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W)$. Então,*

$$\nabla_T Rm(X, Y, Z, W) + \nabla_Z Rm(X, Y, W, T) + \nabla_W Rm(X, Y, T, Z) = 0. \tag{1.18}$$

Considere um referencial $\{e_i\}$ ortonormal e geodésico, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \geq 3$ em um ponto $p \in M$. Da segunda identididade de Bianchi (veja o Lema anterior) temos que em p

$$e_s(R_{hijk}) + e_j(R_{hiks}) + e_k(R_{hisj}) = 0. \tag{1.19}$$

Se multiplicarmos (1.19) por $\delta_{ik}\delta_{hj}$ e somarmos em i, k, h, j teremos

$$\sum_{ikjh} \delta_{hj}\delta_{ik} e_s(R_{hujk}) = e_s(\sum_{ikjh} \delta_{hj}\delta_{ik} R_{hujk}) = e_s(\sum_{hj} \delta_{hj} R_{hj}) = e_s(\sum_{hj} \delta_{hj}(\lambda\delta_{hj})) =$$

$ne_s(\lambda)$.

Por outro lado,

$$\sum_{ikjh} \delta_{hj}\delta_{ik} e_j(R_{hiks}) = -e_s(\lambda),$$
$$\sum_{ikjh} \delta_{hj}\delta_{ik} e_j(R_{hisj}) = -e_s(\lambda).$$

Logo, inferimos que

$$(n-2)e_s(\lambda) = 0.$$

Como o ponto p é arbitrário necessariamente λ é constante.

2. Para este item note que se tomarmos um referencial ortonormal em $p \in M$, então

$$\mathrm{Ric}(e_1) = \Lambda = K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3)$$
$$\mathrm{Ric}(e_2) = \Lambda = K(e_2, e_1) + K(e_2, e_3)$$
$$\mathrm{Ric}(e_3) = \Lambda = K(e_3, e_1) + K(e_2, e_3).$$

A única solução para este sistema é $K(e_1, e_2) = K(e_1, e_3) = K(e_2, e_3) = \dfrac{\Lambda}{2}$. Como $\dim M = 3$, pelo item anterior segue que Λ é constante, de onde M^3 tem curvatura seccional constante.

■

Teorema 1.7. *Se (M, g) é uma variedade riemanniana irredutível, isto é, g é uma métrica irredutível, e ainda, $\nabla \operatorname{Ric} = 0$, onde* Ric *é o tensor de curvatura de Ricci associado à conexão de Levi-Civita de g, então (M, g) é variedade de Einstein com Λ constante. Em particular, espaços localmente simétricos são variedades Einstein com Λ constante.*

Demonstração. Veja [Pet06, Página 254, Theorem 57]. ■

1.4 Exemplos

Exemplo 1.1 (Espaço projetivo quaterniônico)**.** *O espaço projetivo quaterniônico é definido como sendo o espaço das linhas quaterniônicas em $\mathbb{H}^{n+1}$. Os quaternions são matrizes complexas na forma*

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

Se identificarmos $\mathbb{H}$ com $\mathbb{R}^4$ escrevendo $x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ definimos a seguinte tabela de multiplicação

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = k &= -ji, \\ jk = i &= -kj, \\ ki = j &= -ik. \end{aligned}$$

É um cálculo imediato que as matrizes do enunciado satisfazem as relações pedidas para i, j, k como quaternions. Ainda mais, note que se

$$z = x_1 + ix_2,$$

$$w = x_3 + ix_4,$$

então

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{bmatrix} =$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} =$$

$$x_1 + ix_2 + jx_3 + jx_4.$$

O grupo simplético $Sp(n) \subset SU(2n) \subset SO(4n)$ consiste nas matrizes ortogonais que comutam com as 3 estruturas complexas geradas por i, j, k em $\mathbb{R}^{4n}$. Podemos olhar para este grupo considerando matrizes A $n \times n$ com entradas quaterniônicas tais que $A^{-1} = A^*$. A conjugação de um quaternion é dada por

$$\overline{x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4} = x_1 - ix_2 - jx_3 - kx_4.$$

Então,

$$|q|^2 = q\overline{q}.$$

Temos que

$$\mathbb{H}P^n = \mathbb{H}^{n+1} - \{0\} \Big/ \sim,$$

onde $(h_1, \ldots, h_n) \sim (\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n)$ se, e só se, existe $\lambda \neq 0 \in \mathbb{H}$ tal que

$$(h_1 \ldots, h_n) = \lambda(\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n).$$

Podemos considerar a esfera quaterniônica dada por

$$\mathbb{S}^n_{\mathbb{H}} := \{(h_1, \ldots, h_{n+1}) \in \mathbb{H}^{n+1} : |h_1|^2 + \ldots + |h_{n+1}|^2 = 1\}.$$

Assim como no caso de espaços projetivos reais/complexos temos que

$$\mathbb{H}P^n = \mathbb{S}^n_{\mathbb{H}} \Big/ \{\boldsymbol{h}, \lambda \boldsymbol{h}\},$$

onde $\boldsymbol{h}$ é um ponto de $\mathbb{S}^n_{\mathbb{H}}$ e $|\lambda| = 1$, com $\lambda \in \mathbb{H}$.

Note agora que a esfera quaterniônica $\mathbb{S}^n_{\mathbb{H}}$ é difeomorfa a esfera padrão $\mathbb{S}^{4n+3}$. Em particular, sabemos que $\mathbb{S}^{4n-1} \cong Sp(n) \Big/ Sp(n-1)$. Portanto,

$$\mathbb{S}^{4n+3} \cong Sp(n+1) \Big/ Sp(n).$$

Podemos então introduzir uma ação transitiva de $Sp(n+1)$ em $\mathbb{H}P^n$ definindo simplesmente como sendo a projeção da ação de $Sp(n+1)$ em $\mathbb{S}^{4n+3}$, que já era uma ação transitiva. Realizando a inclusão

$$Sp(1) \times Sp(n) \to Sp(n+1)$$

pela diagonal, temos de verificar que o grupo de isotropia em um ponto qualquer da ação de $Sp(n+1)$ em $\mathbb{H}P^n$ é isomorfo a $Sp(1) \times Sp(n)$. Por conveniência escolhamos o ponto

$$[I : 0 : \ldots : 0],$$

onde I é a matriz identidade. Note que a ação de qualquer matriz de $Sp(n+1)$ neste vetor só vai deixá-lo fixo se ela se quebrar como sendo:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{4\times 4} & 0 \\ \hline 0 & B \in Sp(n) \end{array}\right],$$

onde A é uma matriz no grupo de isotropia de uma ação em de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{H}$. Como devemos ter que a ação de $Sp(n+1)$ em $\mathbb{H}^{n+1}$ preserva a norma dos quaternions, necessariamente $A \in Sp(1)$.

Exemplo 1.2. *Lembremos rapidamente que $SU(2) \cong S^3$ como variedades diferenciáveis. Existe uma base $\{X_1, X_2, X_3\}$ para $\mathfrak{su}(2)$ tal que*

$$[X_1, X_2] = 2X_3,\ [X_2, X_3] = 2X_1,\ [X_3, X_1] = 2X_2.$$

Coloquemos uma família de produtos interno g_λ em $\mathfrak{su}(2)$ de tal maneira que $\lambda X_1, X_2$ e X_3 seja um referencial ortonormal. Como existe uma correspondência $1-1$ entre métricas invariantes à esquerda em $SU(2)$ e produtos interno em $\mathfrak{su}(2)$ segue que esta família de p.i. define uma métrica invariante à esquerda em $SU(2)$. Isto permite uma grande simplificação para expressão da conexão de Levi-Civita em $SU(2)$. Em verdade, utilizando que se X, Y, Z são campos quaisquer em $SU(2)$, então $Z\langle X, Y\rangle = 0$, pois a métrica não depende do ponto escolhido em $SU(2)$.

Temos

$$2g_\lambda(\nabla_X Y, Z) = g_\lambda([X, Y], Z) - g_\lambda([Y, Z], X) + g_\lambda([Z, X], Y),$$

de onde conseguimos

$$\nabla_1 X_2 = (2-\lambda)X_3,\ \nabla_1 X_3 = (\lambda-2)X_2,\ \nabla_2 X_1 = -\lambda X_3,$$

$$\nabla_2 X_3 = X_1,\ \nabla_3 X_2 = -X_1,\ \nabla_3 X_1 = \lambda X_2.$$

Em particular, o tensor de Riemann é dado por

$$R^2_{121} = \lambda^2,\ R^1_{122} = -\lambda, R^k_{123} = 0\ k \in \{1, 2, 3\}.$$

$$R^3_{131} = \lambda^2,\ R^k_{132} = 0\ k \in \{1, 2, 3\}, R^1_{133} = -\lambda.$$

$$R^k_{231} = 0\ k \in \{1, 2, 3\},\ R^3_{232} = (4 - 3\lambda),\ R^2_{233} = (3\lambda - 4).$$

Vamos calcular as curvaturas seccionais:

$$K(X_1, X_2) = \langle R(X_1, X_2)X_1, X_2\rangle = \sum_{j=1}^{3} R^j_{121}(g_{j2})_\lambda = \lambda^2.$$

$$K(X_1, X_3) = \sum_{j=1}^{3} R^j_{131}(g_{j3})_\lambda = \lambda^2.$$

$$K(X_2, X_3) = \sum_{j=1}^{3} R^j_{232}(g_{j3})_\lambda = 4 - 3\lambda.$$

Lembrando que o tensor de Ricci é dado por $R_{ik} = R_{ijkl}g^{jl}$, temos

$$R_{12} = R_{13} = R_{23} = 0,$$

$$R_{11} = R_{1j1l}g^{jl} = R_{1212} + R_{1313} = 2\lambda^2,$$

$$R_{22} = R_{1212} + R_{2323} = \lambda^2 + 4 - 3\lambda,$$
$$R_{33} = R_{1313} + R_{2323} = \lambda^2 + 4 - 3\lambda.$$

Para procurar métricas Einstein devemos resolver a equação $\Lambda \neq 0$

$$\mathrm{Ric}(g) = \Lambda g,$$

que é equivalente a

$$2\lambda^2 = \Lambda\lambda,$$
$$\lambda^2 + 4 - 3\lambda = \Lambda.$$

Multiplicando a segunda equação por 2 *e substituindo a primeira*

$$\Lambda\lambda + 8 - 6\lambda = 2\Lambda,$$

$$\lambda(\Lambda - 6) = -8 + 2\Lambda.$$

Portanto,

$$\lambda = \frac{2\Lambda - 8}{\Lambda - 6},$$

ou ainda,

$$\Lambda = \frac{6\lambda - 8}{\lambda - 2}.$$

então $\lambda = 2$ *não admite métrica métrica de Eistein,* $\lambda = \dfrac{8}{6}$ *é métrica Ricci flat,* $\lambda > 2$ *garante curvatura de Ricci constante e positiva e nenhuma métrica admite curvatura de Ricci constante e negativa.*

Capítulo 2

Geometria diferencial complexa

2.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo

Este capítulo visa apresentar conceitos usais em geometria diferencial complexa. Começamos introduzindo variedades complexas e quase complexas, e seus principais tensores e formas diferenciais. Um dos principais resultados apresentado é o Teorema 2.1, decisivo para diferenciar estes dois conceitos de variedades.

Após tal caracterização de variedades complexas, estudamos como métricas riemannianas definem a geometria deste espaço a partir da sua relação com a estrutura complexa nessas variedades. Tentamos entender a geometria kähleriana como extensão $\mathbb{C}$-linear da geometria riemanniana nas variedades reais subjacentes às variedades complexas.

Admitindo-se boa familiaridade com a geometria de fibrados vetoriais, estudamos fibrados vetoriais holomorfos e holomorfos hermitianos, isto é, munidos de métrica hermitiana em cada fibra. Mostramos a existência de uma conexão privilegiada neste espaço, a conexão de Chern, e mostramos que quando a variedade base é uma variedade de Kähler e o fibrado considerado é o fibrado tangente holomorfo, então a conexão de Chern coincide com a conexão de Levi-Civita estendida $\mathbb{C}$-linearmente para o fibrado tangente holomorfo.

A forma de Ricci em uma variedade Kähler carrega toda informação do tensor de Ricci de tais variedades, ao introduzir as Classes de Chern mostramos como esse objeto geométrico tem uma contra-parte topológica. Isto é, mostraremos que a forma de Ricci de uma variedade Kähler é um representante da primeira classe de Chern do fibrado tangente holomorfo sobre a variedade.

Finalmente, discutimos brevemente Teoria de Hodge em variedades kählerianas a fim de entender obstruções para existência de métricas kählerianas em variedades complexas. Após introduzir a Cohomologia de Dolbeault, mostramos que no contexto Kähler esta tem relação direta (surpreendentemente) com a cohomologia de de Rham na

variedade à coeficientes complexos.

Terminamos expondo exemplos concretos acerca da teoria estudada.

2.2 Variedades complexas

Como referência para esta seção indicamos [Tau11, Capítulo 17].

Se V é um espaço vetorial real de dimensão finita qualquer, existem duas formas de tornar este espaço vetorial complexo. A primeira delas é considerar $V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Assim, um elemento arbitrário deste espaço se escreverá como $v \otimes z$, com $v \in V$ e $z \in \mathbb{C}$. A multiplicação por escalares complexos $w \in \mathbb{C}$ é dada por $w \cdot (v \otimes z) := v \otimes (w \cdot z)$. Deste modo, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base para V como espaço vetorial real, $\{e_1 \otimes 1, \ldots, e_n \otimes 1\}$ será base para V como espaço vetorial complexo, de onde $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$.

Por outro lado, se V é um espaço vetorial real de dimensão finita e existir $J : V \to V$ uma aplicação linear tal que $J^2 = -1$, onde 1 é a transformação identidade, então J dá origem a uma multiplicação por escalar em V por $(a + ib)v := av + bJv$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$. Uma estrutura J deste tipo tem o nome de **estrutura complexa**.

Para que uma estrutura como essa exista em um espaço vetorial V é necessário que $\dim_{\mathbb{R}} V \equiv 0 \pmod 2$. De fato, uma vez que $(\det J)^2 = \det J^2 = \det -1 = (-1)^{\dim_{\mathbb{R}} V}$ e $(\det J)^2 > 0$ necessariamente $\dim_{\mathbb{R}} V \equiv 0 \pmod 2$.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^{2n}$ possui uma estrutura complexa natural J_0 obtida via identificação $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) \cong (z^1, \ldots, z^n)$ com $z^k = x^k + iy^k$. Precisamente, J_0 é definida por

$$J_0(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = (-y^1, \ldots, -y^n, x^1, \ldots, x^n). \tag{2.1}$$

A dimensão do espaço vetorial complexificado (como espaço vetorial complexo) é a mesma do espaço vetorial real. Isto não acontece quando pedimos que a multiplicação por escalares complexos seja oriunda de J. Neste caso, a dimensão de V como espaço vetorial complexo é a metade da dimensão de V como espaço vetorial real. Vejamos que é conveniente muitas vezes em um espaço vetorial real V de dimensão par com estrutura complexa J, complexificar este espaço, preservando assim a dimensão par, e estender J para a complexificação de V.

Se V é espaço vetorial real, a aplicação J não possui autovalores reais uma vez que seu polinômio mínimo é $p(x) = x^2 + 1$, que tem como raízes $\pm i$. Uma alternativa para utilizar os auto-espaços de J para descrever expressões para os elementos de (V, J) consiste em complexificar V e estender J por $\mathbb{C}$-linearidade. Ou seja, $J(v \otimes z) := J(v) \otimes z$, com $v \in V$ e $z \in \mathbb{C}$. Isto permite decompor $(V^{\mathbb{C}}, J)$[1] em termos dos auto-espaços de J. Se denotarmos por $V_{1,0}$ o auto-espaço associado ao autovalor i e por $V_{0,1}$ o auto-espaço

[1] Estamos também denotando por J a extensão de J a V complexificado

associado ao autovalor $-i$, então $V = V_{1,0} \oplus V_{0,1}$. Denote $u = v + iw$. Se $u \in V_{1,0}$, então $Ju = iu$ e, portanto, $u = v - iJv$. De fato, basta escrever $u = v + iw$ e notar que $Ju = i(v + iw) = J(v) + iJ(w)$, se $u \in V_{1,0}$. Assim, $J(v) = -w$ e $u = v - iJv$. O caso de $u \in V_{0,1}$ é análogo.

Se $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base de V com a propriedade de que $J(e_k) = f_k$, então $V_{1,0} = \langle \frac{1}{2}(e_k - if_k) \rangle$ e $V_{0,1} = \langle \frac{1}{2}(e_k + if_k) \rangle$, onde $\langle \cdot \rangle$ é a notação para espaço gerado.

Lema 2.1. *Sempre existe uma base $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ para V com a propriedade de que $J(e_k) = f_k$.*

Demonstração. Note que dado $e_j \neq 0$ qualquer, então $Je_j \neq e_j$. Assim, se $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, escolhendo qualquer vetor v, o conjunto $\{v, Jv\}$ é base para V. Suponha que o resultado valha para $\dim = 2n-2$. Então, seja $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, Je_1, \ldots, Je_{n-1}\}$ base para um subespaço H de dimensão $2n-2$ de V, espaço vetorial real de dimensão $2n$. Afirmamos que se v é L.I. com $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, Je_1, \ldots, Je_{n-1}\}$, então Jv é L.I. com este conjunto. De fato, suponha o contrário. Então,

$$Jv = \sum_i \alpha_i e_i + \sum_i \beta_i Je_i,$$

com α_i e β_i números reais não todos nulos para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Então,

$$v = \sum_i \alpha_i Je_i - \sum_i \beta_i e_i.$$

Mas por hipótese temos v é L.I. com $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, Je_1, \ldots, Je_{n-1}\}$, o que é uma contradição. Logo, o conjunto $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, Je_1, \ldots, Je_{n-1}\} \cup \{v, Jv\}$ é L.I. e tem dimensão $2n$, formando, portanto, uma base para V. ■

Torna-se mais fácil caracterizar o espaço dual a $(V^{\mathbb{C}}, J)$. Deve valer uma decomposição $V^* = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ ao definir a aplicação $J^*(\xi)(v) = \xi(J(v)),\ \xi \in V^*, v \in V$ e a estendendo para $(V^*)^{\mathbb{C}}$. É imediato que $V^{1,0} = \langle e^k + if^k \rangle$ e $V^{0,1} = \langle e^k - if^k \rangle$, com $\{e^1, \ldots, e^n, f^1, \ldots, f^n\}$ base de V^* com a propriedade $e^k(e_j) = \delta_{kj}$ e $f^k(f_j) = \delta_{kj}, e^k(f_j) = f^j(e_k) = 0$.

Como observação final, notamos que (V, J) é isomorfo como espaço vetorial complexo a $V_{1,0}$ e $\overline{V}_{0,1}$. De fato, se $\{e_1, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n\}$ é base para V como espaço vetorial real, então $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base para (V, J), visto como espaço vetorial complexo. Assim, os isomorfismos requeridos são dados por

$$e_k \mapsto \frac{1}{2}(e_k - iJe_k) \Rightarrow (V, J) \cong V_{1,0}, \tag{2.2}$$

$$e_k \mapsto \frac{1}{2}(e_k + iJe_k) \Rightarrow (V, J) \cong \overline{V}_{0,1}. \tag{2.3}$$

Definição 2.1. *Uma variedade real e suave M de dimensão $2n$ munida de um campo tensorial suave $J : M \to \mathrm{End}(TM)$ tal que $J^2 = -1$, com $1(p) : T_pM \to T_pM$ a*

transformação identidade, é chamada de ***variedade quase complexa*** *e denotada por* (M, J)*. Chamamos o campo tensorial* J *de estrutura quase complexa.*

Podemos utilizar a argumentação inicial sobre estruturas complexas em espaços vetoriais para descrever variedades quase complexas e seus tensores. De fato, seja (M, J) uma variedade quase complexa, para cada ponto $p \in M$ consideramos $T_pM^{\mathbb{C}} := T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Tal processo permite transformar o fibrado tangente de M em um fibrado vetorial complexo $TM^{\mathbb{C}}$.

Estendendo a estrutura quase complexa J para o complexificado TM, podemos decompor $TM^{\mathbb{C}}$ em sub-fibrados associados aos auto-valores $\pm i$ de J. De fato, para cada $p \in M$

$$T_pM^{\mathbb{C}} = (T_pM)_{1,0} \oplus (T_pM)_{0,1},$$

onde $(T_pM)_{1,0} = \{v \in T_pM : J(v) = iv\}$, $(T_pM)_{1,0} = \{v \in T_pM : J(v) = -iv\}$. Esta decomposição pontual induz a decomposição de fibrados

$$TM^{\mathbb{C}} = TM_{1,0} \oplus TM_{0,1},$$

onde $TM_{1,0}$ é o fibrado vetorial complexo cuja fibra típica é $(T_pM)_{1,0}$ e $TM_{0,1}$ é o fibrado vetorial complexo cuja fibra típica é $(T_pM)_{1,0}$.

Um **campo vetorial complexo** X é uma seção suave de $TM^{\mathbb{C}}$. Dizemos que X é do tipo $(1, 0)$ se X é uma seção suave de $TM_{1,0}$. Se X for seção suave de $TM_{0,1}$, então dizemos que X é do tipo $(0, 1)$. Pelo que discutimos no contexto de espaços vetoriais, um campo vetorial X é do tipo $(1, 0)$ se existir um campo vetorial real Z tal que $X = Z - iJZ$. Analogamente, X é do tipo $(0, 1)$ se existir um campo vetorial real Z tal que $X = Z + iJZ$.

Uma 1-forma em $TM^{\mathbb{C}}$, chamada de 1-forma complexa, é seção de $(TM^*)^{\mathbb{C}}$, onde a construção deste fibrado é análoga a que fizemos de $TM^{\mathbb{C}}$, considerando como fibra típica as fibras duais às de TM, tensorizadas por $\mathbb{C}$. Parafraseando toda a construção feita com espaços vetoriais, podemos dar uma descrição precisa do espaço vetorial das 1-formas complexas. Uma 1-forma complexa ω se escreve como $\omega = \alpha + i\beta$, onde α, β são 1-formas reais. Uma 1-forma complexa ω é do tipo $(1, 0)$ se existir uma 1-forma real α tal que $\omega = \alpha + i\alpha \circ J$. Por outro lado, ω é do tipo $(0, 1)$ se existir uma 1-forma real α de maneira que $\omega = \alpha - i\alpha \circ J$. De maneira indutiva, uma k-forma complexa ω se escreve como

$$\omega = \alpha + i\beta,$$

onde α, β são k-formas reais.

Estendendo o produto exterior de forma $\mathbb{C}$-linear para 1-formas complexas, qualquer k-forma se escreve como produto exterior de 1-formas complexas. Podemos bigraduar as formas complexas. Isto é, uma k-forma complexa pode ser produto de uma quantidade r de 1-formas do tipo $(1, 0)$ e uma quantidade s de 1-formas do tipo

$(0,1)$. Se para cada $p \in M$ temos $\{\omega^1(p), \ldots, \omega^n(p)\}$ uma base para $(T_pM)^{1,0}$, então $\{\overline{\omega}^1(p), \ldots, \overline{\omega}^n(p)\}$ é uma base para $(T_pM)^{0,1}$. Assim, se $(j_1, \ldots, j_r), (k_1, \ldots, k_s)$ denotam multi-índices ascendentes com $r + s = k$, então

$$\{\omega^{j_1}(p) \wedge \ldots \omega^{j_r}(p) \wedge \overline{\omega}^{k_1}(p) \wedge \ldots \overline{\omega}^{k_s}(p)\}$$

forma uma base para o espaço das k-formas do tipo (r, s), isto é, com r componentes do tipo $(1, 0)$ e s componentes do tipo $(0, 1)$.

Como k-formas são regras que associam para cada ponto $p \in M$ um k-covetor, podemos definir $\Omega^{r,s}(M)$ como o C^∞-módulo das k-formas complexas em M que são do tipo (r, s). Naturalmente, se $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M)$ denota o C^∞-módulo das k-formas complexas em M, então

$$\Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \oplus_{r+s=k}\Omega^{r,s}(M).$$

Dada uma 1-forma complexa $\omega = \alpha + i\beta$, o operador derivada exterior d defindo em 1-formas se estende $\mathbb{C}$-linearmente, isto é, $d\omega = d\alpha + id\beta$. Uma vez que temos tal extensão e também a já definida extensão do produto exterior de 1-formas, temos um operador derivada exterior d para k-formas complexas que satisfaz as mesmas propriedades do operador derivada exterior no caso real. Segue em adicional que

Lema 2.2. *Valem as seguintes continências:*

$$d\Omega^{0,0}(M) \subseteq \Omega^1_{\mathbb{C}}(M) = \Omega^{1,0}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M),$$

$$d\Omega^{1,0}(M) \subseteq \Omega^2_{\mathbb{C}}(M) = \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M),$$

$$d\Omega^{0,1}(M) \subseteq \Omega^2_{\mathbb{C}}(M) = \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M).$$

$$d\Omega^{r,s}(M) \subseteq \Omega^{r+2,s-1}(M) \oplus \Omega^{r+1,s}(M) \oplus \Omega^{r,s+1}(M) \oplus \Omega^{r-1,s+2}(M),$$

para cada par de inteiros positivos $r, s \geq 1$.

Demonstração. Usamos indução e observamos que os dois primeiros pontos são imediatos.

Suponha que a fórmula seja válida para $(r-1, s-1)$. Então,

$$d\Omega^{r-1,s-1}(M) \subseteq \Omega^{r+1,s-2}(M) \oplus \Omega^{r,s-1}(M) \oplus \Omega^{r-1,s}(M) \oplus \Omega^{r-2,s+1}(M).$$

Como,

$$\Omega^{r,s}(M) = \Omega^{r-1+1,s-1+1}(M) = \Omega^{\tilde{r}-1,\tilde{s}-1},$$

onde $\tilde{r} = r + 1, \tilde{s} = s + 1$. Então,

$$d\Omega^{r,s}(M) \subseteq \Omega^{\tilde{r}+1,\tilde{s}-1}(M) \oplus \Omega^{\tilde{r},\tilde{s}-1}(M) \oplus \Omega^{\tilde{r}-1,\tilde{s}}(M) \oplus \Omega^{\tilde{r}-2,\tilde{s}+1}(M),$$

e por fim,

$$d\Omega^{r,s}(M) \subseteq \Omega^{r+2,s-1}(M) \oplus \Omega^{r+1,s}(M) \oplus \Omega^{r,s+1}(M) \oplus \Omega^{r-1,s+2}(M).$$

■

Quando tratamos de variedades diferenciáveis consideramos um espaço topológico M que admite base enumerável, é Hausdorff e **localmente euclidiano**, no sentido de que M admite um sistema de coordenadas na vizinhança de cada ponto. O adjetivo diferenciável enfatiza que dadas duas vizinhanças de um mesmo ponto, a regra que leva um sistema de coordenadas no outro é um difeomorfismo. Uma variedade diferenciável de dimensão par será dita complexa quando ao identificar $\mathbb{R}^{2n}$ com $\mathbb{C}^n$, as mudanças de coordenadas, agora vistas entre abertos de $\mathbb{C}^n$, sejam **biholomorfismos**.

Definição 2.2. *Uma **variedade complexa** M de dimensão complexa n é um espaço topológico **Hausdorff**, **satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade**, que admite um **atlas holomorfo** de dimensão n. Ou seja, M admite uma família de homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ tais que*

1. *$\{U_\alpha\}$ é uma cobertura aberta de M;*
2. *As mudanças de coordenadas $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ são funções biholomorfas em seu domínio de definição.*

Costuma-se denotar as coordenadas[2] de φ_α por $(z_\alpha^1, \ldots, z_\alpha^n)$, onde $z_\alpha^k : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ é função holomorfa para cada k. Se escrevermos $z^k = x^k + iy^k$[3] e virmos $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}^{2n}$, o espaço tangente da variedade real subjacente M^{2n} em um ponto $p \in M$ será gerado por $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}, \dfrac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y^n}$. Podemos complexificar T_pM e estender a aplicação J_0 de $\mathbb{R}^{2n}$ para T_pM fazendo

$$J_\alpha(X) := ((\varphi_\alpha^{-1})_* \circ J_0 \circ (\varphi_\alpha)_*)X,$$

com $X \in T_pM$ e $(\varphi_\alpha)_*$ o push-forward por φ_α. Isto define uma estrutura quase complexa natural em TM que satisfaz

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y^k}$$
$$J\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Se considerarmos a extensão de J_α para $T_pM^{\mathbb{C}}$, então $T_pM^{\mathbb{C}} = (T_pM)_{1,0} \oplus (T_pM)_{0,1}$, com

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z^k} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right) : k \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

sendo uma base local de $T_pM_{1,0}$ e

$$\{\frac{\partial}{\partial \overline{z}^k} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right) : k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

[2] Chamadas de **coordenadas holomorfas**.

[3] Omitimos o índice α mas fica implícito que estamos trabalhando em um aberto coordenado.

base local de $T_pM_{0,1}$. Por dualidade,

$$\{dz^k := dx^k + idy^k : k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

é base local de $T^{1,0}M$ e

$$\{d\overline{z}^k := dx^k - idy^k : k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

é base local de $T^{0,1}M$.

Observação 2.1. *Se M é uma variedade complexa e $f : M \to \mathbb{C}$ uma função suave, então f é holomorfa se, e somente se, $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}^i} f = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Vamos dar uma descrição bastante precisa sobre as potências exteriores de $T_p^*M^{\mathbb{C}}$ para cada $p \in M$, que segue imediatamente da descrição de k-formas complexas em variedades quase complexas.

Para cada $p \in M$ e para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $\Lambda^k T_p^{\mathbb{C}} M$ o espaço vetorial dos k-covetores, gerado por $\{dz^{j_1} \wedge \ldots \wedge dz^{j_r} \wedge d\overline{z}^{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}^{k_s}\}$, onde $r+s = k$ e $(j_1, \ldots, j_r)$, $(k_1, \ldots, k_s)$ são multi-índices ascendentes. Então,

$$\Lambda^k T_p^* M^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=k} \Lambda^r T_p^{1,0} M \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^s T_p^{0,1} M.$$

De maneira análoga à que tratamos variedades quase complexas, denotaremos por $\Omega^k_{\mathbb{C}}$ o espaço das k-formas complexas em M, que é um C^∞-módulo sobre as funções complexas definidas em M. Novamente observamos que vale a decomposição

$$\Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \bigoplus_{r+s=k} \Omega^r(T^{1,0}M) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^s(T^{0,1}M).$$

A presença de uma estrutura holomorfa em M permite dar uma melhor caracterização do operador de derivada exterior em M. Para cada par (r, s) de inteiros positivos definimos

$$\pi^{r,s} : \Omega^{r+s}_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^{r,s}(M), \tag{2.4}$$

as projeções de formas de grau $r + s$ no espaço das formas de grau (r, s). O operador derivada exterior é estendido no contexto de variedades complexas por

$$d = \partial + \overline{\partial}, \tag{2.5}$$

com

$$\partial := \pi^{r+1,s} \circ d : \Omega^{r+s}_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^{r+1,s}(M),$$
$$\overline{\partial} := \pi^{r,s+1} \circ d : \Omega^{r+s}_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^{r,s+1}(M).$$

Definição 2.3. *Os operadores $\partial, \overline{\partial}$ são chamados de* ***Operadores de Dolbeault*** *de M.*

Lema 2.3. *Se M é uma variedade complexa, dado que $d^2 = 0$ e que $d = \partial + \overline{\partial}$ temos*

$$0 = d^2 = \partial^2 + (\partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial) + \overline{\partial}^2. \tag{2.6}$$

De onde segue que

$$\partial^2 = 0,\ \overline{\partial}^2 = 0 \tag{2.7}$$

$$\partial \circ \overline{\partial} + \overline{\partial} \circ \partial = 0. \tag{2.8}$$

Para discutir a prova deste Lema precisamos fazer uma incursão sobre quando variedades quase complexa são de fato complexas. De fato, uma vez que conseguimos caracterizar variedades complexas utilizando estruturas complexas no espaço tangente complexificado, a pergunta natural é: toda variedade quase complexa admite uma estrutura de variedade complexa, isto é, admite um atlas holomorfo? O objetivo das próximas linhas é apresentar uma resposta satisfatória para esta pergunta.

Considere (M, J) uma variedade quase complexa e denote por $\pi^{0,2}$ o operador projeção de $\Omega^2_{\mathbb{C}}(M)$ sobre o espaço das $(0,2)$-formas $\Omega^{0,2}(M)$. Definimos o operador $N_J := \pi^{0,2} \circ d : \Omega^{1,0}(M) \to \Omega^{0,2}(M)$, chamado de **tensor de Nijenhuis**. Repare que N_J é de fato um tensor pois se $f : M \to \mathbb{C}$ função suave e $\omega \in \Omega^{1,0}(M)$, então $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$. Por outro lado, $df \wedge \omega \in \Omega^{1,1}(M)$ e assim, $\pi^{0,2}(df \wedge \omega) = 0$. Logo, $N_J(f\omega) = \pi^{0,2}(fd\omega) = f\pi^{0,2}(\omega) = fN_J(\omega)$.[4]

A importância deste tensor é que ele dá o critério para uma variedade suave com estrutura quase complexa admitir atlas holomorfo.

O seguinte teorema caracteriza quando uma estrutura quase complexa provém de um atlas holomorfo.

Teorema 2.1 (Newlander-Nirenberg)**.** *Seja (M, J) uma variedade quase complexa. Então, J provém de um atlas holomorfo se, e somente se, $N_J \equiv 0$.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Esta é a implicação difícil do Teorema e foge dos propósitos desta dissertação. Recomendamos consultar [NS73].

($\Rightarrow$) Suponha que J provenha de um atlas holomorfo. Assim, $\Omega^{1,0}(M)$ é gerado como $C^\infty(M)$ módulo por $\{dz^k\}$ e ainda mais, z^k são funções holomorfas para cada k. Como N_J é tensor, basta mostrar que $N_J(dz^k) = 0,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}$. Mas note que $N_J(dz^k) = \pi^{0,2}(d^2 z^k) = \pi^{0,2}(0) = 0$ porque o operador d só terá componente que produz derivada na direção dos campos coordenados holomorfos, pela observação 2.1, de onde $d^2 = 0$. ∎

Um corolário fácil e que fornece muitos exemplos é o seguinte.

[4] Esta definição para o tensor de Nijenhuis é dada em [Tau11] e é equivalente à clássica com colchetes de campos

Corolário 2.1. *Toda 2-variedade diferenciável com estrutura quase complexa J é integrável. Chamamos tais variedades de* ***superfícies de Riemann****.*

Demonstração. Seja J uma estrutura quase complexa em M. Como M tem dimensão real 2, temos que $T_p^{1,0}M$ e $T_p^{0,1}M$ são espaços vetoriais complexos de dimensão complexa 1, para cada $p \in M$. Logo, $\Omega^{2,0}(M) = \Omega^{0,2}(M) = \{0\}$ e $\Omega^2_{\mathbb{C}}(M) = \Omega^{1,1}(M)$, de onde $\pi^{0,2} = 0$. ■

Se $X, Y, X', Y' \in C^\infty(TM)$, variedade diferenciável munida de estrutura quase complexa J, o colchete entre campos complexos é estendido $\mathbb{C}$-linearmente e satisfaz $\overline{[Z,W]} = [\overline{Z}, \overline{W}]$.

Voltemos à questão dos operadores de Dolbeault. O Teorema 2.1 ainda permite uma série de equivalências que caracterizam quando variedades quase complexas são complexas, como sumarizado a seguir.

Teorema 2.2. *Seja (M, J) variedade quase complexa. São equivalentes:*

1. *Para cada $p \in M$, tem-se $[T_p^{1,0}M, T_p^{1,0}M] \subset T_p^{1,0}M$;*
2. *Para cada $p \in M$, tem-se $[T_p^{0,1}M, T_p^{0,1}M] \subset T_p^{0,1}M$;*
3. *$d\Omega^{1,0}(M) \subseteq \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$ e $d\Omega^{0,1}(M) \subseteq \Omega^{1,1}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M)$;*
4. *$d\Omega^{r,s}(M) \subseteq \Omega^{r+1,s}(M) \oplus \Omega^{r,s+1}(M)$,*
5. *$N_J \equiv 0$.*

Ideia da prova. Mostramos apenas que 5 ⇒ 3 ⇒ 1 ⇒ 5.

(5 ⇒ 3)

Esta implicação segue já que se $N_J \equiv 0$, como $N_J := \pi^{0,2} \circ d : \Omega^{1,0}(M) \to \Omega^{0,2}(M)$, então $d\Omega^{1,0}(M) \subseteq \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$.

(3 ⇒ 1)

Lembre-se que se θ é uma 1-forma, então $d\theta(X,Y) = X\theta(Y) + Y\theta(X) - \theta([X,Y])$. Se X, Y são do tipo $(1,0)$ e θ é do tipo $(0,1)$ então $d\theta(X,Y) = -\theta([X,Y])$ pois $\theta(Y) = \theta(X) = 0$. Ainda mais, por hipótese temos que $d\theta$ não tem componentes $(1,1)$ e $(0,2)$, de onde $d\theta(X,Y) = 0$. Daí, $\theta([X,Y]) = 0$ e segue que $[X,Y]$ é do tipo $(1,0)$.

(1 ⇒ 5)

Seguirá novamente do fato que $d\theta(X,Y) = X\theta(Y) + Y\theta(X) - \theta([X,Y])$. Seja θ uma $(1,0)$-forma. Então, se escolhermos X, Y do tipo $(0,1)$ seguirá que $d\theta(X,Y) = 0$, de onde a componente $(0,2)$ de d é nula, daí, $N_J \equiv 0$. ■

2.3 Geometria Kähler via geometria riemanniana

Discutiremos sucintamente variedades complexas munidas de métricas riemannianas e após introduzirmos fibrados hermitianos focamos na geometria destes. Para maiores detalhes veja [Bal06] e [Mor03].

Seja (M^{2n}, J) uma variedade quase complexa e considere uma métrica riemanniana g em M. Diremos que a métrica riemanniana g é **hermitiana** se $g(JX, JY) = g(X, Y)$, sempre que $X, Y \in C^\infty(TM)$. Neste caso, chamamos a tripla (M, J, g) de **variedade quase hermitiana**. Se $N_J = 0$, isto é, se J provir de um atlas holomorfo, então dizemos que (M, J, g) é uma variedade **hermitiana**.

Toda variedade complexa admite uma métrica riemanniana g. Se definirmos $\tilde{g}(X, Y) = \frac{1}{2}(g(X, Y) + g(JX, JY))$, com $X, Y \in C^\infty(TM)$, esta será claramente uma métrica hermitiana em (M, J).

Se estendermos g por $\mathbb{C}$-linearidade para $T^{\mathbb{C}}M$ conseguimos definir uma métrica hermitiana h no sentido de álgebra linear em $TM_{1,0}$ fazendo $h(X, Y) := g(X, \overline{Y})$, onde $X, Y \in C^\infty(TM)_{1,0}$, por isso damos o nome de métrica hermitiana a g. Tal $\mathbb{C}$-extensão ainda garante as seguintes propriedades:

1. $g(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{g(Z, W)},\ Z, W \in C^\infty(T^{\mathbb{C}}M)$.
2. $g(Z, \overline{Z}) > 0$, se $Z \neq 0,\ Z \in C^\infty(T^{\mathbb{C}}M)$;
3. $g(Z, \overline{W}) = 0$ para quaisquer campos Z do tipo $(1, 0)$ e W do tipo $(0, 1)$.

Associada à toda métrica hermitiana existe uma 2-forma ω do tipo $(1, 1)$, chamada de 2-**forma fundamental**, definida por $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$, com $X, Y \in C^\infty(TM)$. Considerando (M, J, g, ω) uma variedade quase hermitiana qualquer, é sempre possível construir um referencial ortonormal em M ao redor de cada ponto. De fato, se tomarmos $\tilde{e}_1$ um vetor real com norma 1 em T_pM, então $g(\tilde{e}_1, J\tilde{e}_1) = 0$ e ainda mais, $g(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1) = g(J\tilde{e}_1, J\tilde{e}_1) = 1$. Assim, temos um subespaço ortonormal real de dimensão 2 em T_pM. Para o próximo passo, escolha $\tilde{e}_2$ vetor de norma 1 que seja ortogonal a tal subespaço. Novamente, $g(\tilde{e}_2, J\tilde{e}_2) = 0$ e ainda, $g(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2) = g(J\tilde{e}_2, J\tilde{e}_2) = 1$, de onde $\{\tilde{e}_1, J\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, J\tilde{e}_2\}$ é subespaço de dimensão real 4. Procedendo por indução, obtemos $\{\tilde{e}_j, J\tilde{e}_j\}$ base ortonormal para T_pM.

Podemos utilizar este referencial para mostrar que toda variedade quase complexa é orientável. Em verdade, a $2n$-forma de volume dada por $\omega^n := \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ é real e nunca nula, verifiquemos: para mostrar que ω^n é nunca nula note que para o referencial ortonormal que escolhemos em cada ponto vale que

$$\omega(\tilde{e}_j, J\tilde{e}_j) = h(J\tilde{e}_j, J\tilde{e}_j) = \delta_{ij},$$

e

$$\omega(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k) = \omega(J\tilde{e}_j, J\tilde{e}_k) = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\omega^n(\tilde{e}_1, J\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n, J\tilde{e}_n) &= \sum_\sigma \omega(\tilde{e}_{\sigma(1)}, J\tilde{e}_{\sigma(1)}) \ldots \omega(\tilde{e}_{\sigma(n)}, J\tilde{e}_{\sigma(n)}) \\ &= n!\, \omega(\tilde{e}_1, J\tilde{e}_1) \ldots \omega(\tilde{e}_n, J\tilde{e}_n) = n!\,,\end{aligned}$$

onde σ um elemento do grupo S_n das permutações de n-elementos.

Uma vez que temos uma métrica riemanniana em (M, J), dada a conexão de Levi-Civita ∇ em (M, J, g), pode-se requerer uma condição de compatibilidade entre J e ∇ análoga a de ∇ e g, pedindo que $\nabla J = 0$. Não é sempre verdade que a conexão de Levi-Civita em uma variedade quase hermitiana satisfaz tal condição (veja [KN09, Página 149]). Na verdade, mostra-se que são equivalentes

1. A conexão de Levi-Civita ∇ associada a g satisfaz $\nabla J = 0$;
2. Se ∇ é a conexão de Levi-Civita de (M, J, g), então $\nabla\omega = 0$;
3. A estrutura quase complexa J é integrável e a 2-forma fundamental ω é fechada.

Definição 2.4. *Uma variedade quase hermitiana (M, J, g) será chamada de* ***variedade de Kähler*** *se satisfizer uma (e portanto ambas) das condições em 2.3. Neste caso, chamaremos a 2-forma fundamental ω de 2-****forma de Kähler*** *e a métrica hermitiana g de* ***métrica de Kähler****. Usaremos a notação (M, J, g, ω).*

Existe uma extensão natural da conexão de Levi-Civita ∇ para $TM^{\mathbb{C}}$, e a condição $\nabla J = 0$ embora pareça artificial, garante que transporte paralelo segundo a conexão de Levi-Civita em (M, J, g) preserva a decomposição de $TM_{1,0}$ e $TM_{0,1}$ no sentido de que campos do tipo $(1, 0)$ são transportados para campos do tipo $(1, 0)$, analogamente para campos do tipo $(0, 1)$. (Reveja o Capítulo 1, em especial o Teorema 1.2.)

Nos especializaremos daqui em diante em varidades Kähler, portanto, descrevamos a conexão de Levi-Civita de variedades Kähler e os tensores de curvatura associadas em termos da métrica g.

Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler. Escolha $\{(U, (z^1, \ldots, z^n)\}$ um atlas holomorfo para M. Sejam $\left\{\dfrac{\partial}{\partial z^k}\right\}$ e $\left\{\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}^k}\right\}$ referenciais locais para $TU_{1,0}$ e $TU_{0,1}$ com U vizinhança coordenada. Utilizando que $d = \partial + \overline{\partial}$ verifica-se que a condição $d\omega = 0$ é equivalente a

$$\begin{cases} \partial_l g_{j\bar{k}} &= \partial_j g_{l\bar{k}}, \\ \partial_{\bar{j}} g_{k\bar{l}} &= \partial_{\bar{l}} g_{k\bar{j}}; \quad \forall j, l, k \{1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $\partial_k := \dfrac{\partial}{\partial z^l}$, e $\partial_{\overline{k}} = \dfrac{\partial}{\overline{z}^k}$.

Observação 2.2. *Será comum denotarmos $Z_k := \partial_k$ e $Z_{\overline{j}} := \partial_{\overline{j}}$ quando quisermos considerar os campos coordenadas e ∂_k, $\partial_{\overline{j}}$ quando denotarmos a derivada de funções suaves definidas em M.*

Utilizando o item 3 da observação 2.3 obtemos que

$$g_{jk} = g(Z_j, Z_k) = g(Z_j, \overline{\overline{Z}}_k) = 0 \tag{2.10}$$

e por argumento análogo que $g_{\overline{j}\overline{k}} = 0$. Pela simetria de g

$$g_{\overline{j}k} = g_{k\overline{j}},\ g_{\overline{j}k} = \overline{g}_{j\overline{k}}. \tag{2.11}$$

Logo, a **métrica hermitiana** e **forma de Kähler** se escrevem nestas coordenadas como:

$$g = g_{j\overline{k}} dz^j \otimes d\overline{z}^k + \overline{g_{j\overline{k}}} d\overline{z}^j \otimes dz^k, \tag{2.12}$$

$$\omega = i g_{j\overline{k}} dz^j \wedge d\overline{z}^k. \tag{2.13}$$

Se $X, Y, U, V \in C^\infty(TM)$, a extensão $\mathbb{C}$-linear da conexão de Levi-Civita ∇ de M, a qual também denotaremos por ∇, para campos vetoriais complexos é dada por:

$$\nabla_{U+iV} X + iY := \nabla_U X - \nabla_V Y + i(\nabla_V X + \nabla_U Y).$$

Observação 2.3. *Tal extensão satisfaz as propriedades:*

1. $\nabla_W Z - \nabla_Z W = [W, Z], \quad \forall Z, W \in C^\infty(T^{\mathbb{C}}M)$, *(Sem torção)*
2. $\nabla_Z g(U, V) = g(\nabla_Z U, V) + g(U, \nabla_Z V), \quad \forall U, V \in C^\infty(TM),\ Z \in C^\infty(T^{\mathbb{C}}M)$, *(Compatibilidade com a métrica)*
3. $\nabla_{\overline{W}} \overline{Z} = \overline{\nabla_W Z}, \quad \forall Z, W \in C^\infty(T^{\mathbb{C}}M)$.

A fim de que M seja Kähler devemos ter $\nabla J = 0$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de M estendida para campos vetoriais complexos. Assim, $\nabla_X JY = J(\nabla_X Y)\ \forall X, Y \in C^\infty(TM)$. Portanto, se X, Y são tais que $[JX, Y] = 0$ então,

$$\nabla_{X+iJX}(Y - iJY) = \nabla_{Y-iJY}(X + iJX) = 0. \tag{2.14}$$

Assim, como $X = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial y^j}$ e $J(X) = Y$ são tais que $[JX, Y] = 0$, os campos coordenados $Z_j = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x^j} - iJ\dfrac{\partial}{\partial x^j})$ e $\overline{Z}_k = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x^k} + iJ\dfrac{\partial}{\partial x^k})$ satisfazem

$$\nabla_{Z_j} \overline{Z}_k = \nabla_{\overline{Z}_j} Z_k = 0,\ \forall j, k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.15}$$

Deste modo, todos os símbolos de Christhoffel com termos mistos são nulos e vale

$$\Gamma^{\bar{l}}_{\bar{j}\bar{k}} = \overline{\Gamma^{l}_{jk}}, \tag{2.16}$$

$$\nabla_{Z_j} Z_k = \Gamma^{l}_{jk} Z_l \tag{2.17}$$

$$\nabla_{\overline{Z}_j} \overline{Z}_k = \Gamma^{\bar{l}}_{\bar{j}\bar{k}} \overline{Z}_l, \tag{2.18}$$

$\forall j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

Vamos obter as expressões para os símbolos em termos das derivadas da métrica. Note que utilizando o item 2 da observação 2.3 e a equação (2.15) temos

$$\Gamma^{\mu}_{jk} g_{\mu\bar{l}} = g(\nabla_{Z_j} Z_k, \overline{Z}_l) \tag{2.19}$$

$$= Z_j g(Z_k, \overline{Z}_l) - g(Z_k, \nabla_{Z_j} \overline{Z}_l) \tag{2.20}$$

$$= \partial_j g_{k\bar{l}}. \tag{2.21}$$

Portanto,

$$\Gamma^{l}_{jk} = g^{\overline{\nu} l} \Gamma^{\mu}_{jk} g_{\mu\overline{\nu}} = g^{\overline{\nu} l} \partial_j g_{k\overline{\nu}}.$$

Agora que caracterizamos a conexão de Levi-Civita de uma variedade Kähler, descrevemaos seu tensor de curvatura R. Lembramos que no contexto riemanniano o tensor R é dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Considere agora a extensão $\mathbb{C}$-linear de R para campos vetoriais complexos. Para todos $X, Y, Z, U, V \in C^\infty(TM^{\mathbb{C}})$, a curvatura R, agora $\mathbb{C}$-linear, deve satisfazer as propriedades que R, quando visto como $\mathbb{R}$-linear, satisfaz e, ainda mais,

1. $R(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} = \overline{R(X, Y)Z}$,
2. $R(X, Y)JZ = JR(X, Y)Z$, (Primeira condição de compatibilidade)
3. $g(R(X, Y)JU, JV) = g(R(JX, JY)U, V) = g(R(X, Y)U, V)$. (Segunda condição de compatibilidade)

Com respeito aos campos coordenados holomorfos, devido à equação (2.15) temos

$$R(Z_j, Z_k)Z_l = 0, \tag{2.22}$$

$$R(\overline{Z}_j, \overline{Z}_k)\overline{Z}_l = 0, \tag{2.23}$$

$$R(Z_j, \overline{Z}_k)Z_l = R^{\mu}_{j\bar{k}l} Z_\mu, \tag{2.24}$$

$$R(\overline{Z}_j, Z_k)\overline{Z}_l = R^{\mu}_{\bar{j}kl} Z_\mu, \tag{2.25}$$

$$R(\overline{Z}_j, Z_k)\overline{Z}_l = R^{\overline{\mu}}_{\bar{j}k\bar{l}} \overline{Z}_\mu, \tag{2.26}$$

$$R(Z_j, \overline{Z}_k)\overline{Z}_l = R^{\overline{\mu}}_{j\bar{k}\bar{l}} \overline{Z}_\mu. \tag{2.27}$$

Segue do item 1 das propriedades listadas que

$$R^{\overline{\mu}}_{\overline{j}k\overline{l}} = \overline{R^{\mu}_{j\overline{k}l}} \quad \text{e} \quad R^{\overline{\mu}}_{j\overline{k}\overline{l}} = \overline{R^{\mu}_{\overline{j}kl}}. \tag{2.28}$$

Utilizando explicitamente a definição de R obtemos

$$R^{\mu}_{j\overline{k}l} = -\frac{\partial \Gamma^{\mu}_{jl}}{\partial \overline{z}^k} \quad \text{e} \quad R^{\mu}_{\overline{j}kl} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{kl}}{\partial \overline{z}^j}, \tag{2.29}$$

o que permite caracterizar completamente o tensor de curvatura de Riemann.

O objeto geométrico principal desta dissertação é o **tensor de Ricci**. No contexto Kähler este pode ser obtido como

$$\mathrm{Ric}(X,Y) := \mathrm{tr}(Z \to R(Z,X)Y),\ X,Y \in C^{\infty}(T^{\mathbb{C}}M), \tag{2.30}$$

onde o traço é tomado sendo um endomorfismo $\mathbb{C}$-linear a fim de considerarmos Ric definido também em campos vetoriais complexos. O tensor de Ricci é simétrico e $\mathrm{Ric}(\overline{X},\overline{Y}) = \overline{\mathrm{Ric}(X,Y)}$.

Em analogia ao que fizemos ao obter a 2-forma de Kähler a partir do tensor métrico, que também é um tensor simétrico, podemos obter uma 2-forma do tipo $(1,1)$ associada ao tensor de Ricci fazendo $\rho(X,Y) := \mathrm{Ric}(JX,Y)$. Chamamos tal 2-forma de **forma de Ricci**. Em coordenadas holomorfas,

$$\mathrm{Ric}(Z_j, Z_k) = R^{l}_{ljk} = R^{\overline{l}}_{\overline{l}\overline{j}k} = \mathrm{Ric}(\overline{Z}_j, \overline{Z}_k) = 0. \tag{2.31}$$

Como $\mathrm{Ric}(Z_j,\overline{Z}_k) = R^{\overline{l}}_{l\overline{j}\overline{k}} = -\partial_j \Gamma^{\overline{l}}_{\overline{l}\overline{k}}$ concluímos que

$$\mathrm{Ric}(Z_j,\overline{Z}_k) := \mathrm{Ric}_{j\overline{k}} = -\partial_j \Gamma^{\overline{l}}_{\overline{l}\overline{k}} = \overline{-\partial_{\overline{j}} \Gamma^{l}_{lk}} = \overline{\mathrm{Ric}_{\overline{j}k}} = \overline{\mathrm{Ric}(\overline{Z}_j, Z_k)}. \tag{2.32}$$

Denotando por $G := (g_{j\overline{k}})$ a matriz cujos coeficientes são os coeficientes da métrica hermitiana e por $\det G$ o determinante desta matriz, lembrando a relação para matrizes simétricas

$$\mathrm{tr} \log G = \log \det G,$$

temos

$$\frac{\partial}{\partial z^k} \log \det G = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial G}{\partial z^k}.G^{-1}\right) = \Gamma^{l}_{kl}. \tag{2.33}$$

Assim,

$$\mathrm{Ric}_{j\overline{k}} = -\partial_j \Gamma^{\overline{l}}_{\overline{l}\overline{k}} \tag{2.34}$$

$$= \overline{-\partial_{\overline{j}} \Gamma^{l}_{lk}} \tag{2.35}$$

$$= \overline{-\partial_{\overline{j}} \Gamma^{l}_{kl}}. \tag{2.36}$$

Utilizando as equações (2.33) e (2.36)

$$\mathrm{Ric}_{j\overline{k}} = -\overline{\partial^2_{\overline{j}k} \log \det G}. \tag{2.37}$$

Como localmente $\rho = i \,\mathrm{Ric}_{j\overline{k}}\, dz^j \wedge d\overline{z}^k$, temos

$$\rho = -i\partial\overline{\partial} \log \det G, \tag{2.38}$$

é uma verificação direta que forma de Ricci ρ é fechada.

2.4 Geometria de fibrados holomorfos e fibrados holomorfos hermitianos

Nosso objetivo é revisar a descrição de variedades Kähler a partir de um ponto de vista mais amplo: o de fibrados holomorfos hermitianos. A principal referência para esta seção é [Kob87]. Forneceremos quando necessário referências mais específicas.

Seja $E \to M$ um fibrado vetorial complexo de posto r, com M e E variedades suaves (Consulte [Tau11, Capítulos 3, 6]). Denote por $C^\infty(E)$ o espaço das seções suaves de E e $\Omega^1(E;M)$ o espaço das seções suaves de $E \otimes T^*M$.

Lembramos rapidamente que uma conexão ∇ em M é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\nabla : C^\infty(E) \to \Omega^1(M;E),$$

tal que

$$\nabla(f \otimes \sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma, \ \forall f \in C^\infty(M), \sigma \in C^\infty(E).$$

(Veja por exemplo [Tau11, Capítulos 11, 12]). Se denotaremos por $\Omega^k(M;E)$ o espaço das seções suaves de $\Lambda^k TM \otimes E$, então é possível estender a noção de conexão para uma família de mapas $\nabla^{(k)}$ da seguinte maneira:

$$\nabla^{(k)} : \Omega^k(E;M) \to \Omega^{k+1}(E;M)$$

$$\nabla^{(k)}(\omega \otimes \sigma) := d\omega \otimes \sigma + (-1)^k \omega \wedge \nabla\sigma, \ \sigma \in C^\infty(E), \ \omega \in \Omega^k(M).$$

Tal extensão é chamada de **Derivada Covariante Exterior**.

Sendo $\{s_1, \ldots, s_r\}$ um referencial local em E, qualquer seção σ se escreve localmente como $\sigma = f^i s_i$. Assim,

$$\nabla(f^i s_i) = df^i \otimes s_i + f^i \nabla s_i. \tag{2.39}$$

Como devemos ter $\nabla s_i \in C^\infty(\Lambda^1(E))$ existem θ_{ij}, $j \in \{1, \ldots, k\}$ tais que $\nabla s_i = \theta_{ij} \otimes s_j$. Portanto,

$$\nabla(f^i s_i) = df^j \otimes s_j + f^i \theta_{ij} \otimes s_j. \tag{2.40}$$

A partir da extensão de ∇ supracitada, faz sentido definir o operador

$$F_\nabla := \nabla^{(1)} \circ \nabla : C^\infty(M) \to \Omega^2(E;M).$$

Podemos verificar que $F_\nabla \in \Omega^2(M; \operatorname{End} E)$. Ou seja, F_∇ é um tensor. De fato, se $f \in C^\infty(M)$ e $\sigma \in C^\infty(E)$ temos

$$\begin{aligned} F_\nabla(f\sigma) = \nabla^{(1)}(\nabla f\sigma) &= \nabla^{(1)}(df \otimes \sigma + f\nabla\sigma), && (2.41)\\ &= -df \wedge \nabla\sigma + df \wedge \nabla\sigma + fF_\nabla\sigma && (2.42)\\ &= fF_\nabla\sigma. && (2.43) \end{aligned}$$

Em um referencial local podemos interpretar a partir da equação (2.4) a conexão ∇ como

$$\nabla = d + \theta, \tag{2.44}$$

considerando cada seção um vetor coluna, isto é, aplicamos ∇ desta forma no vetor $(f^1, \ldots, f^r)$, onde ω é a matriz cujas entradas são as 1-forma θ_{ij}. Da mesma maneira, se denotarmos por Θ a matriz de 2-formas que representa o tensor de curvatura F_∇, isto é, Θ é a matriz que representa a ação do tensor curvatura de E em seções representadas por vetores coluna em um referencial local, vale a equacão

$$\Theta = d\theta - \theta \wedge \theta, \tag{2.45}$$

Passemos agora ao caso onde a variedade base é complexa. Nesse caso, temos a bigraduação das k-formas complexas de M já descrita. Tal bigraduação fornece uma decomposição de $\Omega^k(M; E) = \oplus_{r+s=k}\Omega^{r,s}(M; E)$ da maneira que se espera.

Se ∇ é uma conexão em E podemos escrever $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$, com $\nabla^{1,0} := \pi^{1,0} \circ \nabla$ e $\nabla^{0,1} := \pi^{0,1} \circ \nabla$, onde $\pi^{1,0}$ e $\pi^{0,1}$ são as extensões dos mapas π definidos pela equação (2.4) definidas como

$$\pi^{1,0} : \Lambda^1(E) \to \Lambda^{1,0}(E)$$

$$\pi^{1,0}(\omega \otimes \sigma) := \pi^{0,1}(\omega) \otimes \sigma, \ \omega \in \Omega^k_{\mathbb{C}}(M), \ \sigma \in C^\infty(E).$$

A definição de $\pi^{0,1}$ é análoga.

Note que a matriz de 1-formas de conexão se quebra em parte holomorfa e antiholomorfa.

$$\theta = \theta^{1,0} + \theta^{0,1}. \tag{2.46}$$

Desta forma, a curvatura se quebra como

$$F_\nabla = (\nabla^{1,0})^2 + \nabla^{1,0} \circ \nabla^{0,1} + \nabla^{0,1} \circ \nabla^{1,0} + (\nabla^{0,1})^2. \tag{2.47}$$

e em notação matricial

$$\Theta = \Theta^{2,0} + \Theta^{1,1} + \Theta^{0,2}. \tag{2.48}$$

Caracterizaremos agora quando um fibrado vetorial complexo sobre variedade complexa admite uma estrutura de fibrado holomorfo. Isto é, o espaço total E é variedade complexa e as trivializações locais são biholomorfismos.

Proposição 2.1. *Seja E um fibrado vetorial holomorfo. Então, existe uma conexão ∇ em E tal que $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.*

Demonstração. Escolha uma coleção de trivializações $\{U\}$ para este fibrado e uma partição da unidade $\{\psi_U\}$ subordinada a aos abertos desta coleção. Seja U um aberto trivializante. Tome $\{s_1, \ldots, s_r\}$ referencial local holomorfo em U. Escolhemos a conexão plana em U

$$\nabla_U s_i = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$$

A conexão assim definida em cada aberto tem a propriedade que $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$. Definimos uma conexão global com tal propriedade fazendo

$$\nabla := \sum \psi_U \nabla_U.$$

■

Proposição 2.2. *Seja $E \to M$ um fibrado vetorial suave. Se ∇ é uma conexão em E tal que $(\nabla^{0,1})^2 = 0$, então existe uma única estrutura de fibrado holomorfo em E para qual $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.*

Demonstração. Fixe uma trivialização para $E\Big|_U = \mathbb{C}^r \times U$. Denotemos por $(z^1, \ldots, z^n)$ coordenadas holomorfas em M e $(w^1, \ldots, w^r)$ coordenadas de $\mathbb{C}^r$. Nesta trivialização teremos

$$\theta_{ij} = \theta_{ij}^{1,0} + \theta_{ij}^{0,1}.$$

Definimos uma estrutura quase complexa em E definindo a seguinte base para a componente $(1,0)$ do espaço tangente de E:

$$\{dz^k, dw^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij}^{0,1} w^j\}. \tag{2.49}$$

Verifiquemos que o tensor de Nijenhuis desta estrutura se anula identicamente. De fato,

$$d^2 z^k = 0, \tag{2.50}$$

$$d(dw^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij}^{0,1} w^j) = \sum_{j=1}^{r} d\theta_{ij}^{0,1} w^j + \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij}^{0,1} \wedge dw^j. \tag{2.51}$$

Então, utilizando a definição da estrutura holomorfa considerada podemos considerar a expressão anterior módulo o ideal dado em (2.49) para obter

$$\sum_{j=1}^{r} d\theta_{ij}^{0,1} w^j + \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij}^{0,1} \wedge dw^j \equiv \sum_{j=1}^{r} d\theta_{ij}^{0,1} w^j + \sum_{j,k=1}^{r} \theta_{ij}^{0,1} \wedge \theta_{jk}^{0,1} w^k.$$

Já que $(\nabla^{0,1})^2 = 0$ segue que $\sum_{k=1}(d\theta_{ik}^{0,1} + \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij}^{0,1} \wedge \theta_{jk}^{0,1}) w^k \equiv 0$, de onde o tensor de Nijenhuis da estrutura quase complexa assim definida é nulo e E e esta estrutura quase complexa provém de uma estrutura holomorfa em E.

Para a segunda parte note que a expressão para uma seção local é dada por

$$s : U \to U \times \mathbb{C}^r \tag{2.52}$$

$$s(z) = (z, \xi(z)). \tag{2.53}$$

Se mostrarmos que $\nabla^{0,1}s = 0$ implica que o pull-back de qualquer $(1,0)$-forma por s é uma $(1,0)$-forma, então concluiremos o objetivo. Para tanto, é necessário apenas verificar que o pull-back de $dw^j + \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij}^{0,1} w^j$ por esta seção é uma $(1,0)$-forma.

$$0 = \nabla^{0,1}s = \overline{\partial}\xi^i + \sum_j \theta_{ij}^{0,1}\xi^j = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, r\},$$

e portanto,

$$s^*(dw^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_{ij}^{0,1} w^j) = d\xi^i + \sum_j \theta_{ij}^{0,1}\xi^j = \partial\xi^i + (\overline{\partial}\xi^i + \sum_j \theta_{ij}^{0,1}\xi^j) = \partial\xi^i \in \Theta^{1,0}(M),$$

o que conclui o resultado. ■

Sumarizamos a discussão na seguinte proposição.

Proposição 2.3. *Para uma conexão ∇ em um fibrado vetorial holomorfo E são equivalentes:*

1. $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$;
2. *Para toda seção holomorfa s, ∇s tem grau $(1,0)$;*
3. *Com respeito ao sistema de coordenadas holomorfos, a conexão ∇ tem grau $(1,0)$.*

Discutiremos agora estruturas hermitianas em fibrados vetoriais complexos.

Seja $E \to M$ um fibrado vetorial complexo suave. Uma **estrutura hermitiana** em E é uma regra h que associa de forma suave cada ponto p em M um produto interno hermitiano em E_p, a fibra sobre p.

Dado um referencial local $\{s_1 \ldots, s_r\}$ em U definimos

$$h_{i\overline{j}} := h(s_i, s_j), i, j \in \{1, \ldots, r\}.$$

Denotamos a matriz de H neste referencial por H_U, lembrando que esta matriz é positiva definida em cada ponto. Se em U tivermos que $H_U = I$, a matriz identidade, dizemos que o referencial é unitário.

Se A é a matriz de mudança de um referencial local $\{s_1, \ldots, s_r\}$ em U para outro $\{\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_r\}$ em V, na interseção de dois abertos trivializantes $U \cap V$ vale então

$$H_U = A^t H_V \overline{A}. \tag{2.54}$$

Uma conexão ∇ em (E,h) é dita hermitiana se

$$dh(\xi,\eta) = h(\nabla\xi,\eta) + h(\xi,\nabla\eta),\ \forall\xi,\eta\in C^\infty(E). \tag{2.55}$$

Escolhendo um referencial local $\{s_1,\ldots,s_r\}$, teremos

$$dh_{i\bar{j}} = h(\nabla s_i, s_j) + h(s_i,\nabla s_j), \tag{2.56}$$

de onde conseguimos

$$dh_{i\bar{j}} = h(\sum_k \theta_{ki}\otimes s_k, s_j) + h(s_i,\sum_r \theta_{rj}\otimes s_r) \tag{2.57}$$

$$= \sum_k \theta_{ki}h_{k\bar{j}} + \sum_r h_{i\bar{r}}\overline{\theta}_{rj}. \tag{2.58}$$

Em notação matricial

$$dH = \theta^t H + H\overline{\theta}. \tag{2.59}$$

Se aplicarmos d na equação (2.59) teremos

$$0 = d\theta^t H - \theta^t\wedge dH + dH\wedge\overline{\theta} + Hd\overline{\theta}. \tag{2.60}$$

Utilizando que

$$\Theta = d\theta - \theta\wedge\theta, \tag{2.61}$$

e a equação (2.59) teremos

$$0 = (\Theta^t + \theta^t\wedge\theta^t)H - \theta^t\wedge(\theta^t H + H\overline{\theta}) + (\theta^t H + H\overline{\theta})\wedge\overline{\theta} + H(\overline{\Theta + \theta\wedge\theta}). \tag{2.62}$$

Reagrupando os termos, obtemos

$$0 = \Theta^t H + H\overline{\Theta}. \tag{2.63}$$

Assim, se num referencial local $H = I$, teremos

$$\theta^t = -\overline{\theta} \tag{2.64}$$

$$\Theta^t = -\overline{\Theta}, \tag{2.65}$$

e o tensor de curvatura F_∇ toma valores em $\mathfrak{u}(r)$, a álgebra de Lie de $U(r)$.

Agora estamos em posição de estabelecer a existência de conexões compatíveis com métrica em fibrados vetoriais holomorfos.

Teorema 2.3 (Conexão de Chern)**.** *Dada uma estrutura hermitiana h em um fibrado vetorial holomorfo E, existe única h-conexão ∇ em E tal que $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$. A esta conexão damos o nome de* ***conexão de Chern*** *de E.*

Demonstração. Suponha que exista tal conexão ∇ e considere $\{s_1, \ldots, s_r\}$ referencial local holomorfo em E. Pela equação (2.59) temos

$$(\partial + \overline{\partial})H = \theta^t H + H\overline{\theta}.$$

Como $\theta = \theta^{1,0}$ obtemos que

$$\partial H = (\theta^{1,0})^t H,$$

pois H está escrita em um referencial holomorfo. Assim,

$$(\theta^{1,0})^t = (\partial H)H^{-1}. \tag{2.66}$$

Isto prova a unicidade de ∇. Agora tome abertos trivializantes U e V e defina $\theta_U^{1,0} = (\partial H_U)H_U^{-1}$ e $\theta_V = (\partial H_V)H_V^{-1}$. Se ϕ_{UV} é a matriz de mudança de referencial em $U \cap V$ segue que $H_U = (\phi_{UV})^t H_v \overline{\phi}_{UV}$. Portanto, temos $\theta_U = \phi_{UV}^{-1}\theta_V\phi_{UU} + \phi_{UV}^{-1}d\phi_{UV}$, o que assegura que a família $\{\theta_U\}$ define uma conexão em E. ■

Observação 2.4. *Sendo $E \to M$ um fibrado holomorfo, temos que E, M são variedades complexas. Tomando h uma estrutura hermitiana em E e ∇ sua conexão de Chern, a componente $(0,2)$ da curvatura é nula já que $(\nabla^{0,1})^2 = 0$. Em verdade, a componente $(2,0)$ também é nula pela equação (2.63). De fato, $\Theta = \Theta^{2,0} + \Theta^{1,1}$. Como $(\Theta^{2,0} + \Theta^{1,1})^t H = -H(\Theta^{0,2} + \overline{\Theta}^{1,1}) = -H\overline{\Theta}^{1,1}$, comparando os graus $\Theta^{2,0} = 0$, assim, em um referencial holomorfo vale que $\Theta = \overline{\partial}\theta$.*

2.5 Revisitando variedades Kähler

Utilizaremos a discussão anterior para caracterizarmos variedades Kähler. Em particular, mostraremos que no contexto Kähler, a conexão de Chern do fibrado holomorfo (TM, J) de M coincide com a conexão de Levi-Civita em $TM^{\mathbb{C}}$.

Seja (M, g, ω) uma variedade Kähler. Isto é, M é uma variedade real que admite estrutura quase complexa integrável e uma métrica riemanniana g e tal que a 2-forma fundamental ω associada a g é fechada. Seja TM o fibrado tangente a M.

De maneira análoga a que fizemos no contexto de espaços vetoriais, existe um isomorfismo de fibrados vetoriais complexos

$$(TM, J) \to TM_{1,0}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \mapsto \frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - iJ(\frac{\partial}{\partial x^j})\right),$$

onde $J(\dfrac{\partial}{\partial x^j}) = \dfrac{\partial}{\partial y^j}$.

Consideramos em (TM, J) a métrica $h(\partial_j, \partial_k) := g(\partial_j, \partial_{\overline{k}})$. Assim, se denotamos por F_∇ o tensor curvatura da conexão de Chern associada a h, que é um elemento de

$C^\infty(\Lambda^{1,1}TM \otimes \mathrm{End}(TM, J))$, podemos obter sua descrição em termos de da métrica h. Antes, no entanto, gostaríamos de concluir que no contexto Kähler a conexão de Levi-Civita associada à métrica riemanniana g em M coincide com a conexão de Chern do fibrado tangente holomorfo com métrica hermitiana h. Para tanto, resta mostrar que esta última conexão é livre de torção. Da compatibilidade com a métrica h já garantida, e do fato que h e g coincidem em campos vetoriais reais, pela unicidade da conexão de Levi-Civita, se a conexão de Chern ∇ for livre de torção, esta deve coincidir com a conexão de Levi-Civita associada à métrica g.

Note que de $d\omega = 0$, onde ω é a forma de Kähler da métrica g, e do também do fato que as expressões em coordenadas holomorfas de g e h coincidem, segue que $\partial_l h_{j\bar{k}} = \partial_j h_{l\bar{k}}$. Ainda mais, como a 1-forma de conexão associada à conexão de Chern ∇ é do tipo $(1,0)$, então a torção desta $T_\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ é do tipo $(2,0)$.

Se denotarmos θ_{jk} a (j,k)-componente da matriz de conexão de ∇, então

$$T(\partial_k, \partial_j) = \nabla_k \partial_j - \nabla_j \partial_k = \theta_{jr}(\partial_k)\partial_r - \theta_{kr}(\partial_j)\partial_r.$$

Como $\theta_{jr}(\partial_k) = \partial_k h_{j\bar{l}} h^{-1}_{l\bar{r}}$ e $\theta_{rk}(\partial_j) = \partial_j h_{k\bar{l}} h^{-1}_{l\bar{r}}$, segue que $T(\partial_j, \partial_k) = 0$, de onde a torção da conexão de Chern é nula.

Agora podemos usar a teoria desenvolvida para calcular os tensores curvaturas da conexão de Chern = Levi-Civita de uma variedade Kähler.

Como,

$$F_\nabla = \Theta_{ij} dz^j \otimes \frac{\partial}{\partial z^i}, \tag{2.67}$$

com

$$\Theta_{ij} = R^i_{jk\bar{h}} dz^k \wedge d\bar{z}^h. \tag{2.68}$$

Como ∇ é por hipótese a conexão de Chern $(\theta^{1,0})^t = (\partial H) H^{-1}$ podemos calcular explicitamente

$$\Theta = \overline{\partial}((H^{-1})^t \partial H^t), \tag{2.69}$$

obtendo

$$R^i_{ja\bar{b}} = -h^{i\bar{k}} \frac{\partial^2 h_{j\bar{k}}}{\partial z^a \partial \bar{z}^b} + h^{i\bar{k}} h^{p\bar{q}} \frac{\partial h_{p\bar{k}}}{\partial z^a} \frac{\partial h_{j\bar{q}}}{\partial \bar{z}^b} \tag{2.70}$$

Se colocarmos $R_{j\bar{k}a\bar{b}} = h_{i\bar{k}} R^i_{ja\bar{b}}$ teremos

$$R_{j\bar{k}a\bar{b}} = -\frac{\partial^2 h_{j\bar{k}}}{\partial z^a \partial \bar{z}^b} + h^{p\bar{q}} \frac{\partial h_{p\bar{k}}}{\partial z^a}. \tag{2.71}$$

Verifica-se ainda que

$$R_{k\bar{h}} = R^i_{ik\bar{h}} = h^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}k\bar{h}}, \tag{2.72}$$

fornece o tensor de Ricci. A forma de Ricci ρ é obtida fazendo $\rho = i R_{k\bar{h}} dz^k \wedge d\bar{z}^h$. Segue portanto da equação (2.68) que

$$\rho = i \sum_i \Theta_{ii}, \tag{2.73}$$

isto é, a $(1,1)$-forma ρ é dada por i vezes o traço do tensor R.

Se o posto de um fibrado E é r, então o fibrado $\Lambda^r E$ é um fibrado de posto 1 chamado de **fibrado determinante**. Um referencial local para E é dado por $s_1 \wedge \ldots \wedge s_r$, onde $\{s_i\}$ é um referencial local de $\Lambda^1(E)$.

Verifica-se que, se ∇ é conexão em E com formas de conexão θ_{ij}, portanto a extensão de ∇ (a qual denotaremos por ∇_d) a $\Lambda^r E$ satisfaz $\nabla_d(s_1 \wedge \ldots \wedge s_r) = (\sum_i \theta_{ii}) s_1 \wedge \ldots \wedge s_r$. É imediato que $\Theta_d = \sum_i (\Theta_{ii})$. No caso de $E = TM$ concluímos que a forma de Ricci ρ é justamente i vezes a curvatura do fibrado determinante de TM. Se h é uma métrica hermitiana em um fibrado vetorial E, então h_d definida por

$$h_d(s_1 \wedge \ldots s_r, s_1 \wedge \ldots \wedge s_r) := \det H \tag{2.74}$$

é uma métrica hermitiana em $\Lambda^r E$. No caso em que $E = TM$ podemos calcular explicitamente a forma de Ricci ρ em termos da métrica h.

Se ∇ é conexão de Chern, no referencial holomorfo $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial z^i} \right\}$ tem-se que a $\Theta_d = \overline{\partial}((H_d^{-1})^t \partial H_d^t)$ é a forma de curvatura de $\Lambda^n TM$, onde H_d denota a matriz de h_d. Mas H_d é uma função complexa pois $H_d = \det H$. Assim, $(\partial H_d) H_d^{-1} = \partial(\log H_d)$ e portanto $\Theta_d = \overline{\partial}\partial \log(\det H)$ e $\rho = i\Theta_d = i\overline{\partial}\partial \log(\det H)$. Como $\overline{\partial}\partial = -\partial\overline{\partial}$ temos que

$$\rho = -\partial\overline{\partial} i \log(\det H). \tag{2.75}$$

2.6 Classes de Chern

Mostraremos como a forma de Ricci ρ numa variedade Kähler M define um elemento topológico chamado **primeira classe de Chern** do fibrado holomorfo (TM, J). A principal referência é [Hus94].

A matriz de curvatura Θ de uma conexão ∇ em um fibrado vetorial complexo E é um tensor. Se ϕ_{UV} é a matriz de função de transição do fibrado entre dois abertos U e V com interseção não vazia e Θ_U e Θ_V são as matrizes de curvatura nos referenciais U e V respectivamente tem-se $\Theta_U = \phi_{UV} \Theta_V \phi_{UV}^{-1}$.

Considere [5] $\mathcal{A}$ o anel dos polinômios $P : M_{r\times r}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ tais que se $X, Y \in M_{r\times r}(\mathbb{C})$ então

$$P(XY) = P(YX).$$

Exemplo 2.1. *1. A função **traço** que soma os elementos da diagonal de qualquer matriz, $A \in M_{r\times r}(\mathbb{C})$ é um polinômio invariante por conjugação,*

[5] Esta notação não é padrão.

2. *Analogamente, a função* ***determinante****, que associada à cada matriz $A \in M_{r\times r}(\mathbb{C})$ seu determinante, é um polinômio invariante por conjugação.*

Este anel de polinômios é gerado pelas funções $c_q : M_{r\times r}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\det(I + Xt) = \sum_{0\leq q\leq r} c_q(X)t^q, \tag{2.76}$$

com $X \in M_{r\times r}(\mathbb{C})$ e I a matriz identidade em $M_{r\times r}(\mathbb{C})$. Em verdade, mostra-se que os anéis $\mathbb{C}[c_1(X), \ldots, c_r(X)]$ e $\mathbb{C}[\mathrm{tr}(X), \mathrm{tr}(X^2), \ldots, \mathrm{tr}(X^r)]$ são isomorfos. (Veja por exemplo [MS74]).

Dado $P \in \mathcal{A}$ e Θ matriz de curvatura de uma conexão ∇ em um fibrado vetorial complexo $E \to M$, faz sentido avaliar $P(\Theta)$. Neste caso, $P(\Theta)$ é uma forma diferencial global de grau par em M. De fato, dados U, V abertos trivializantes em M e Θ_U, Θ_V matrizes da curvatura nestes referenciais, como $\Theta_U = \phi_{UV}\Theta_V\phi_{UV}^{-1}$ temos que $P(\Theta_U) = P(\phi_{UV}\Theta_V\phi_{UV}^{-1}) = P(\Theta_V)$, e portanto, $P(\Theta)$ é um objeto global.

Lema 2.4 (Identidade de Bianchi)**.** *Seja $E \to M$ um fibrado vetorial complexo com conexão ∇ e θ, Θ matrizes de conexão e curvatura de ∇, respectivamente. Então*

$$d\Theta = \theta \wedge \Theta - \Theta \wedge \theta. \tag{2.77}$$

Demonstração. Sabemos que $\Theta = d\theta - \theta\wedge\theta$. Assim, como $d^2\theta = 0$ vale $d\Theta = -d\theta\wedge\theta + \theta\wedge d\theta$. Como $d\theta = \Theta + \theta \wedge \theta$ temos que

$$\begin{aligned} d\Theta &= -(\Theta + \theta\wedge\theta)\wedge\theta + \theta\wedge(\Theta + \theta\wedge\theta) && (2.78)\\ &= -\Theta\wedge\theta - \theta\wedge\theta\wedge\theta + \theta\wedge\Theta + \theta\wedge\theta\wedge\theta && (2.79)\\ &= \theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\theta. && (2.80)\end{aligned}$$

■

A partir de agora, fixemos $E \to M$, ∇, θ, Θ e seja P qualquer em $\mathcal{A}$. Mostremos que $P(\Theta)$ é uma forma de grau par fechada. Como $\mathcal{A}$ é gerada pro $\mathrm{tr}(X), \ldots, \mathrm{tr}(X^r)$ para todo $X \in M_{r\times r}(\mathbb{C})$ basta mostrar que $\mathrm{tr}(\Theta^q)$ é uma $2q$-forma fechada.

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{tr}(\Theta^q) &= \mathrm{tr}(d\Theta^q) = q\,\mathrm{tr}(d\Theta\wedge\Theta^{q-1}) && (2.81)\\ &= q\,\mathrm{tr}((\theta\wedge\Theta - \Theta\wedge\theta)\wedge\Theta^{q-1}) && (2.82)\\ &= q(\mathrm{tr}(\theta\wedge\Theta^q) - \mathrm{tr}(\Theta\wedge\theta\wedge\Theta^{q-1})) && (2.83)\\ &= 0, && (2.84)\end{aligned}$$

uma vez que o traço é simétrico. Daí $P(\Theta)$ é um elemento da $2q$-ésima cohomologia de de Rham se P é um polinômio homogêneo de grau q.

Definição 2.5 (Classes de Chern)**.** *Definimos a* q***-ésima classe de Chern*** *do fibrado* $E \to M$ *por*

$$\mathcal{C}_q(E, \nabla) := \frac{1}{(2\pi i)^q} c_q(\Theta), \tag{2.85}$$

onde $c_q(\Theta)$ *são as funções definidas na equação* (2.76)*.*

Se ∇_0 e ∇_1 são conexões em $E \to M$, $(1-t)\nabla_0 + t\nabla_1$ é uma conexão em $E \times [0,1] \to M \times [0,1]$. Isto é, para $t \in [0,1]$ a expressão $(1-t)\nabla_0 + t\nabla_1$ é uma conexão em $E \times \{t\} \to M \times \{t\}$. Se θ_0 e θ_1 são formas de conexão de ∇_0 e ∇_1, respectivamente, temos que $(1-t)\theta_0 + t\theta_1$ é uma forma de conexão de $\nabla_t := (1-t)\nabla_0 + t\nabla_1$. Pode-se mostrar por cálculo direto que $\Theta_t = (1-t)\Theta_0 + t\Theta_1 + t(1-t)(\theta_0 - \theta_1)^2 + (\theta_0 - \theta_1) \wedge dt$.

Se $\omega \in \Omega^p(M \times [0,1])$ então $\omega = \alpha + \beta \wedge dt$, com $\alpha \in \Omega^p(M \times [0,1])$ e $\beta \in \Omega^{p-1}(M \times [0,1])$, onde nem α nem β estão multiplicadas por dt. O **operador derivada exterior** d se decompõe como $d = d_x + d_t$. Se $\omega = \alpha + \beta \wedge dt$ definimos os operadores

$$Q(\alpha + \beta \wedge dt) := \int_0^1 \beta dt, \tag{2.86}$$

e

$$j_s(\alpha + \beta \wedge dt) := \alpha(x, t = s), x \in M. \tag{2.87}$$

Proposição 2.4 (Fórmula de Homotopia)**.** *Na situação acima vale que*

$$dQ + Qd = j_1 - j_0. \tag{2.88}$$

Demonstração. Consulte [Hus94, Página 283, Proposition 1.9]. ■

Se $P \in \mathcal{A}$ polinômio homogêneo de grau q então $P(\Theta_t)$ é uma $2q$-forma em $M \times [0,1]$ e denotamos por $P(\Theta_0, \Theta_1) := Q(P(\Theta_t)) \in C^\infty(\Lambda^{q-1}M)$.

Teorema 2.4 (Teorema de Chern-Weil)**.** *Sejam* ∇_0 *e* ∇_1 *conexões em um fibrado vetorial complexo* $E \to M$ *de posto* r*. Se* $P \in \mathcal{A}$ *é um polinômio invariante homogêneo de grau* q*, então* $P(\Theta_0)$ *e* $P(\Theta_1)$ *definem a mesma classe de cohomologia de de Rham. Em particular, cada classe de Chern* $\mathcal{C}_q(E, \nabla)$ *independe da conexão.*

Demonstração. Utilizando a **fórmula de homotopia** fornecida pela Proposição 2.4 aplicada a $P(\Omega_t)$ teremos

$$dQ(P(\Theta_t)) + Q(dP(\Theta_t)) = P(\Theta_1) - P(\Theta_0) \tag{2.89}$$

$$dP(\Theta_0, \Theta_1) = P(\Theta_1) - P(\Theta_0), \tag{2.90}$$

onde usamos que $P(\Theta)$ é $2q$-forma fechada e que $P(\Theta_0, \Theta_1) := Q(P(\Theta_t))$. Assim, $P(\Theta_1)$ e $P(\Theta_0)$ diferem por uma forma exata, definindo portanto a mesma $2q$-classe de cohomologia de de Rham. ■

Se considerarmos $TM_{1,0} \to M$ o fibrado holomorfo com conexão de Chern ∇, a forma de Ricci $\rho = i\sum_i \Theta_{ii}$ é um elemento da primeira classe de Chern de $TM_{1,0}$, uma vez que $\sum_i \Theta_{ii} = \operatorname{tr}\Theta$ e $c_1(\Theta) = \operatorname{tr}(\Theta) = 2\pi i\mathcal{C}_1(E,\nabla)$. Portanto,

$$\mathcal{C}_1(E,\nabla) = -\frac{i}{2\pi}\operatorname{tr}(\Theta) = \frac{-1}{2\pi}\rho, \tag{2.91}$$

de onde concluímos que

$$[\rho] = 2\pi\mathcal{C}_1(TM_{1,0},\nabla) \equiv 2\pi c_1(M). \tag{2.92}$$

Note que como conclusão desta equação, se M é tal que $c_1(M) = 0$, então ρ é cohomóloga à $(1,1)$-forma nula.

2.7 Teoria de Hodge em variedades Kähler

O objetivo desta curta seção é apresentar obstruções topológicas para existência de métricas Kähler em uma variedade hermitiana. Explicitamente, estas obstruções aparecem nas restrições quanto aos **números de Hodge** que uma variedade Kähler pode assumir. Ressaltamos que a descrição aqui deve ser curta e auto contida sendo que maiores detalhes sobre Teoria de Hodge podem ser vistos em [Huy06] e [Joy00].

Lembre que no contexto riemanniano (M^n, g) podemos definir um produto interno $\langle,\rangle_{L^2}$ no espaço das p-formas $\Omega^p(M)$ da seguinte maneira:

$$\langle\omega,\beta\rangle_{L^2} := \int_M \omega\wedge\star\beta, \tag{2.93}$$

onde $\star$ é o operador estrela de Hodge associado à métrica g. (Veja por exemplo [Joy00]).

Ainda mais, dado o operador derivada exterior, podemos definir o operador **codiferencial exterior** $\delta := (-1)^{n(p-1)}\star d\star$ que mapeia p-formas em $p-1$-formas. Em particular, se β é uma $(p-1)$-forma, então

$$\langle\omega, d\beta\rangle_{L^2} = \langle\delta\omega,\beta\rangle_{L^2}, \tag{2.94}$$

isto é, δ é o operador adjunto, segundo $\langle,\rangle_{L^2}$ a d.

Existe um operador de Laplace natural neste contexto, chamado de **operador de Laplace-Beltrami**, definido por

$$\Delta := d\circ\delta + \delta\circ d. \tag{2.95}$$

É uma verificação direta que Δ é um operador que mapeia p-formas em p-formas e é auto-adjunto segundo $\langle,\rangle_{L^2}$. Ainda mais,

$$\langle\Delta\omega,\omega\rangle = \|d\omega\|^2_{L^2} + \|\delta\omega\|^2_{L^2}, \tag{2.96}$$

de onde uma p-forma ω é harmônica se, e somente se, $d\omega = \delta\omega = 0$.

Existem dois teoremas importantes em teoria de Hodge que são muito difíceis de provar e não cabem a esta dissertação, mas que podem ser vistos nas primeiras páginas de [Joy00]. Os enunciamos a fim de tratar a discussão paralela no contexto Kähler.

Lembremos rapidamente que o p-ésimo grupo de cohomologia de de Rham H^p_{dR} de M consiste no conjunto das classes de equivalência das p-formas fechadas módulo exatas. Como toda forma harmônica é fechada, então existe uma inclusão natural do espaço das p-formas harmônicas, que é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, o qual denotaremos por $\mathbb{H}^p$ em H^p_{dR}. De fato, este é dado por

$$h^p : \mathbb{H}^p \to H^p_{dR}(M), \tag{2.97}$$

$$\omega \mapsto [\omega]. \tag{2.98}$$

Teorema 2.5 (Teorema do Isomorfismo de Hodge)**.** *Para cada p o mapa h^p é um isomorfismo.*

Veja [Huy06] para uma prova ou [Joy00] para indicações de outras referências.

Dado que h^p define um isomorfismo para cada p, então $\ker \Delta^p \cong_{\mathbb{R}} H^p_{dR}(M)$. Em particular, o segundo teorema de Hodge que apresentamos diz:

Teorema 2.6 (Decomposição de Hodge)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana compacta e sem bordo. Então, se $\Omega^p(M)$ denota o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das p-formas sobre M temos*

$$\Omega^p(M) = d\Omega^{p-1}(M) \oplus \Delta(\Omega^p(M)) \oplus \delta\Omega^{p+1}(M), \tag{2.99}$$

isto é, cada p-forma ω se escreve como $\omega = \omega_d + \omega_\delta + \omega_\Delta$ onde $d\omega_d = \delta\omega_\delta = \Delta\omega_\Delta = 0$.

Parafrasearemos agora estas linhas para apropriadamente entender o que é a Teoria de Hodge em variedades Kähler.

Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta. Podemos definir uma métrica h em $TM^{\mathbb{C}}$ por $h(X, Y) := g(X, \overline{Y})$ que pode ser restrita à uma métrica hermitiana em cada fibrado holomorfo $TM_{1,0}$ e $TM_{0,1}$, realizando $TM^{\mathbb{C}} = TM_{1,0} \oplus^{\perp} TM_{0,1}$. Ainda mais, esta se estende às potências exterior de $TM^{\mathbb{C}}$ promovendo uma decomposição ortogonal de $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \oplus_{r+s=k}\Omega^{r,s}(M)$.

Dado que (M, J, g, ω) é uma variedade riemanniana orientável e que ω^n define uma $2n$-forma nunca nula em M, pode-se extrair uma forma de volume $d\mu_g$ a partir de g. Portanto, se considerarmos a extensão $\mathbb{C}$-linear do operador **estrela de Hodge** $\star_g$ associado à métrica g, verifica-se que

$$\alpha \wedge \star_g \overline{\beta} = h(\alpha, \beta) d\mu_g, \ \forall \omega, \beta \in \Omega^{r,s}(M). \tag{2.100}$$

Isto permite induzir um produto interno em $\Omega^{r,s}(M)$, que se estende para $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M)$ se $r+s=k$. De fato, este é dado por

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \omega \wedge \star_g \overline{\beta} = \int_M h(\alpha,\beta) d\mu_g, \ \forall \omega, \beta, \ \forall \omega, \beta \in \Omega^{r,s}(M). \tag{2.101}$$

Se $\partial, \overline{\partial}$ denotam os operadores de Dolbeault associado à estrutura complexa J de M, definimos

$$\partial^* := - \star_g \partial \star_g, \tag{2.102}$$

$$\overline{\partial}^* := - \star_g \overline{\partial} \star_g, \tag{2.103}$$

que são operadores

$$\partial^* : \Omega^{r,s}(M) \to \Omega^{r-1,s}(M), \tag{2.104}$$

$$\overline{\partial}^* : \Omega^{r,s}(M) \to \Omega^{r,s-1}(M). \tag{2.105}$$

É uma verificação direta, similar à realizada para o operador diferencial exterior d e seu adjunto formal d^*, que ∂^* é o adjunto formal de ∂ segundo ao produto interno $\langle , \rangle$ e $\overline{\partial}^*$ é o adjunto formal de $\overline{\partial}$. Em particular,

$$d = \partial + \overline{\partial}, \tag{2.106}$$

$$\delta = \partial^* + \overline{\partial}^*. \tag{2.107}$$

Definimos os operadores de Laplace correspondentes aos operadores de Dolbeault e seus duais,

$$\Delta_\partial := \partial \circ \partial^* + \partial^* \circ \partial, \tag{2.108}$$

$$\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial} \circ \overline{\partial}^* + \overline{\partial}^* \circ \overline{\partial}, \tag{2.109}$$

e verificamos que se $\alpha \in \Omega^{r,s}(M)$ então,

$$\langle \Delta_\partial(\alpha), \alpha \rangle = \|\partial^*(\alpha)\|^2 + \|\partial \alpha\|^2, \tag{2.110}$$

$$\langle \Delta_{\overline{\partial}}(\alpha), \alpha \rangle = \|\overline{\partial}^*(\alpha)\|^2 + \|\overline{\partial} \alpha\|^2, \tag{2.111}$$

onde $\|\alpha\| := \langle \alpha, \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Disso segue que α é Δ_∂-harmônica (resp. $\Delta_{\overline{\partial}}$-harmônica) se, e somente se, $\partial^*(\alpha) = \partial \alpha = 0$ (resp. $\overline{\partial}^*(\alpha) = \overline{\partial} \alpha = 0$).

Definição 2.6. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta. Definimos*

$$\mathcal{H}^k_{\overline{\partial}}(M, g) := \{\alpha \in \Omega^k_{\mathbb{C}}(M) : \Delta_{\overline{\partial}}(\alpha) = 0\}, \tag{2.112}$$

$$\mathcal{H}^{r,s}_{\overline{\partial}}(M, g) := \{\alpha \in \Omega^{r,s}(M) : \Delta_{\overline{\partial}}(\alpha) = 0\}. \tag{2.113}$$

Como consequência do fato de h separar $\Omega^k_{\mathbb{C}} = \oplus_{r+s=k}\Omega^{r,s}(M)$ ortogonalmente, temos

$$\mathcal{H}^k_{\overline{\partial}}(M,g) = \oplus_{r+s=k}\mathcal{H}^{r,s}_{\overline{\partial}}(M,g).$$

Verifica-se (Veja [Huy06, Página 120, Capítulo 3, Proposition 3.1.12]) que $\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}}$. Esta é uma das **identidades de Kähler**. Outra relação importante que pode ser vista na mesma referência é $\partial\overline{\partial}^* = -\overline{\partial}^*\partial$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\Delta &= d\circ\delta + \delta\circ d, && (2.114)\\
&= (\partial+\overline{\partial})\circ(\partial^*+\overline{\partial}^*), && (2.115)\\
&= \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}} + (\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial) + \overline{(\partial\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\partial)}, && (2.116)\\
&= \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}}, && (2.117)\\
&= 2\Delta_\partial, && (2.118)\\
&= 2\Delta_{\overline{\partial}}, && (2.119)
\end{aligned}$$

ou seja, o operador de Laplace-Beltrami tem o mesmo núcleo que Δ_∂ e $\Delta_{\overline{\partial}}$. Então, podemos utilizar o teorema da decomposição de Hodge para concluir que

Teorema 2.7 (Teorema da Decomposição de Hodge)**.** *Seja (M,J,g) hermitiana compacta. Então,*

$$\Omega^{r,s}(M) = \overline{\partial}\Omega^{r,s-1}(M) \oplus \mathcal{H}^{r,s}_{\overline{\partial}}(M,g) \oplus \overline{\partial}^*\Omega^{r,s+1}(M),$$

e o espaço $\mathcal{H}^{r,s}_{\overline{\partial}}(M,g)$ tem dimensão finita.[6]

Uma breve digressão se faz necessária. Seja α uma k-forma complexa em uma variedade hermitiana. Estamos interessados na solução do problema

$$\alpha = \overline{\partial}\beta,\ \ \beta \in \Omega^{k-1}_{\mathbb{C}}(M). \tag{2.120}$$

Note que uma condição necessária para solução deste problema consiste em $\overline{\partial}\alpha = 0$, já que $\overline{\partial}^2 = 0$. Similarmente à cohomologia de de Rham, podemos considerar

$$H^{r,s}(M) := \frac{\{\alpha\in\Omega^{r,s} : \overline{\partial}\omega = 0\}}{\{\alpha\in\Omega^{r,s} : \exists\beta\in\Omega^{r,s-1} : \alpha = \overline{\partial}\alpha\}}.$$

Com esta abordagem podemos converter a solução do problema descrito na equação 2.120 em um problema de cohomologia. A grande surpresa é que como veremos a seguir, no contexto Kähler, este problema coincide com o problema tratado na Cohomologia de de Rham, e tal relação é obtida por meio do Teorema da Decomposição de Hodge.

[6] Não mencionamos isso, mas isto ocorre porque o núcleo do operador de Laplace tem dimensão finita em domínio compacto.

Ainda mais, no contexto Kähler, uma relação importante é a **Dualidade de Serre** (para maiores detalhes consulte [Huy06, Página 127, Seção 3.2]) que estabelece

$$\mathcal{H}^{r,s}_{\overline{\partial}}(M,g) \cong (\mathcal{H}^{n-r,n-s}_{\overline{\partial}})(M,g)^*. \tag{2.121}$$

Note que se $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ satisfaz $\Delta_{\overline{\partial}}\alpha = 0$, então $\overline{\partial}\omega = 0$ e existe uma inclusão canônica

$$\alpha \in \mathcal{H}^{r,s}_{\overline{\partial}}(M,g) \to [\alpha] \in H^{r,s}(N). \tag{2.122}$$

Acontece que esta inclusão é na verdade um isomorfismo (veja [Huy06, Página 128, Seção 3.2, Corollary 3.2.9] ou simplesmente, decorre de maneira análogo a discussão que fizemos de teoria de Hodge em variedades riemannianas) e isto permite concluir o resultado principal desta seção.

Teorema 2.8. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta. Então, se $H^k_{dR}(M, \mathbb{C})$ denota o k-ésimo grupo de cohomologia de de Rham com coeficientes complexos, então*

$$H^k_{dR}(M,\mathbb{C}) = \oplus_{r+s=k} H^{r,s}(M), \tag{2.123}$$

sendo que esta decomposição não depende de escolha de estrutura Kähler. Ademais, $H^{r,s}(M) \cong \overline{H}^{s,r}(M)$ e $H^{r,s}(M) \cong H^{n-r,n-s}(M)^*$.

Os números $b^{r,s} := \dim H^{r,s}(M)$ são chamados de **números de Hodge** e em variedades Kähler temos as obstruções:

$$b^{n-r,n-s} = b^{r.s} = b^{s,r} = b^{n-s,n-r}. \tag{2.124}$$

Para finalizar esta seção, outro operador de relevância no contexto Kähler é o operador $d^c := i(\overline{\partial} - \partial)$. Verifica-se que $dd^c = 2i\partial\overline{\partial}$. Especialmente no nosso caso este operador é importante porque a forma de Ricci ρ de uma métrica Kähler se escreve localmente como

$$\rho = -\frac{1}{2} dd^c \log \det g_{j\overline{k}}. \tag{2.125}$$

Ademais, tal operador é importante para entender o comportamento global de formas diferenciais em uma variedade Kähler.

Teorema 2.9 (dd^c-lema global)**.** *Se (M, J, g, ω) é uma variedade de Kähler compacta e $\alpha \in \Omega^k(M)$ é uma k-forma d^c-exata e d-fechada, então existe uma k-forma $\beta \in \Omega^{k-2}(M)$ tal que $\alpha = dd^c\beta$.*

Demonstração. Este resultado usa Teoria de Hodge e pode ser visto em [Huy06, Capítulo 3]. ■

Especialmente para o Teorema de Calabi-Yau, de interesse desta dissertação, convém provar o seguinte:

Corolário 2.2. *Se (M, J, g, ω) é uma variedade de Kähler compacta e α, α' são tais que $[\alpha] = [\alpha'] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$, então existe uma função real f tal que $\alpha = \alpha' + i\partial\overline{\partial} f$.*

Demonstração. Note que $\alpha - \alpha'$ é d-exata e denotemos esta diferença por $\tilde{\alpha}$. Daí, necessariamente $\tilde{\alpha} = d\eta$ para alguma 1-forma η. Escrevamos $\eta = \eta^{1,0} + \eta^{0,1}$ e notemos que

$$\tilde{\alpha} = d\eta = (\partial + \bar{\partial})(\eta^{1,0} + \eta^{0,1}) = \partial\eta^{1,0} + (\bar{\partial}\eta^{1,0} + \partial\eta^{0,1}) + \bar{\partial}\eta^{0,1}.$$

Comparando os graus obtemos

$$\begin{aligned} \partial\eta^{1,0} &= 0 \\ \bar{\partial}\eta^{1,0} + \partial\eta^{0,1} &= \tilde{\alpha} \\ \bar{\partial}\eta^{0,1} &= 0. \end{aligned}$$

Definindo $\eta' := -i(\eta^{1,0} - \eta^{0,1})$ temos que

$$\begin{aligned} d^c\eta' &= -id^c(\eta^{1,0} - \eta^{0,1}) \\ &= -(\partial - \bar{\partial})(\eta^{1,0} - \eta^{0,1}) \\ &= -\partial\eta^{1,0} + (\bar{\partial}\eta^{1,0} + \partial\eta^{0,1}) - \bar{\partial}\eta^{0,1} \\ &= \tilde{\alpha}, \end{aligned}$$

então $\tilde{\alpha}$ é d^c-exata. O resultado segue do Teorema 2.9 e também do fato que $\tilde{\alpha}$ por ser d-exata é também d-fechada. ■

Uma recíproca para o Corolário 2.2 consiste em estudar quando uma $(1,1)$-forma real fechada α em uma variedade de Kähler é dd^c-exata. Isto é, quando existe uma função suave $\phi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha = dd^c\phi$.

Teorema 2.10 (dd^c-lema local)**.** *Seja α uma $(1,1)$-forma real, suave e fechada no disco unitário em $\mathbb{C}^n$. Então, existe uma função real e suave ϕ no disco unitário tal que $\alpha = dd^c\phi$.*

Demonstração. Veja [Huy06, Capítulo 3]. ■

Ao invés de dar uma demonstração para este resultado, procuremos entender como ele caracteriza as formas de Kähler de uma variedade hermitiana.

Note que se ω é uma forma de Kähler em uma variedade hermitiana, então $d\omega = 0$. Neste caso, o Teorema 2.10 diz que em cada aberto de um atlas holomorfo para M, $\omega = dd^c\phi$, para alguma ϕ real e suave neste aberto. Reciprocamente, dada uma coleção de abertos coordenados $\{U_\alpha\}$ em M e uma coleção de funções suaves ϕ_α definidas nestes abertos que concordam em possíveis interseções, se definirmos $\omega_\alpha := dd^c\phi_\alpha$ e verificarmos que sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ valer que $\omega_\alpha\Big|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \omega_\beta\Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, então a família $\{\omega_\alpha\}$ define

uma $(1,1)$-forma real, fechado e global em M. Se tal família for **positiva** no sentido de que $\omega_\alpha(v, Jv) > 0$[7], $\forall p \in U_\alpha,\ \forall v \neq 0 \in T_pM$, então $\{\omega_\alpha\}$ define uma forma de Kähler em M. Chamamos a coleção $\{\phi_\alpha\}$ de **potencial de Kähler**.

Note que se M é compacta e sem bordo, como todas as variedades assumidas nesta dissertação, então não ocorrem potenciais de Kähler globais. De fato, suponha que exista $\phi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = dd^c\phi$. Por um lado,

$$\int_M \omega^n = n!\, vol(M).$$

Porém, $\omega = dd^c\phi$, é d-exata, de onde segue que $\int_M \omega^n = 0$.

2.8 Exemplos

Exemplo 2.2. *Seja $U \subseteq \mathbb{C}^n$ um conjunto aberto e $\{(U, id)\}$ com $id : U \to U$ a aplicação identidade. Este é um atlas (com apenas uma carta) para a variedade complexa U. É evidente que $\mathbb{C}^n$ também é variedade complexa, sendo este o exemplo mais simples de variedade Kähler. Em coordenadas holomorfas temos $g = \frac{1}{2}\sum_j (dz^j \otimes d\overline{z}^j + d\overline{z}^j \otimes dz^j)$ e forma de Kähler $\omega = \frac{i}{2}\sum_j dz^j \wedge d\overline{z}^j$.*

Exemplo 2.3 (Esfera de Riemann)**.** *Considere o seguinte conjunto:*

$$S^2 := \{(w, h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}; w\overline{w} + h^2 = 1\}.$$

Sejam $N = (0,1), S = (0,-1)$ pontos em S^2. Definamos

$$\pi_N : S^2 - \{N\} \to \mathbb{C}$$

$$\pi_N(w, h) := \frac{w}{1-h},$$

e

$$\pi_S : S^2 - \{S\} \to \mathbb{C}$$

$$\pi_S(w, h) := \frac{w}{1+h},$$

*as **projeções estereográficas**. Não é difícil ver que $(S^2 - \{N\}) \cup (S^2 - \{S\}) = S^2$. Temos que $\{(S^2 - \{N\}, \pi_N), (S^2 - \{S\}, \pi_S)\}$ formam um atlas para S^2, chamada de **Esfera de Riemann.***

*Entretanto, tal atlas **não** é holomorfo pois*

$$\pi_S \circ \pi_N^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$$

[7] Isto é necessário para que possamos obter uma métrica de ω

$$(\pi_S \circ \pi_N^{-1})(z) = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Temos no entanto que $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(\pi_S \circ \pi_N^{-1}) \neq 0$ *e portanto a aplicação* $\pi_S \circ \pi_N^{-1}$ *é não holomorfa. Porém, se considerarmos o atlas com mesmos abertos mas trocando* π_S *por* $\overline{\pi}_S$*, teremos* $(\overline{\pi}_S \circ \pi_N^{-1})(z) = \dfrac{1}{z}$*, e isto define um atlas holomorfo para* S^2*. Com tal atlas* S^2 *é variedade complexa.*

Exemplo 2.4 (Espaços projetivos complexos)**.** *Considere o conjunto* $X := \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$*. Podemos definir uma ação de* $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ *em* X *da seguinte maneira:*

$$(\lambda, z) \mapsto \lambda z := (\lambda z^0, \ldots, \lambda z^n), \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \ z \in X.$$

O conjunto $\mathbb{CP}^n := X \Big/ \mathbb{C}^*$ *possui a topologia quociente, de onde verifica-se que tal espaço é Hausdorff e satisfazendo o segundo axioma de enumerabilidade. Usualmente denota-se os elementos de* $\mathbb{CP}^n$ *por* $[z_0 : \ldots : z_n]$*. Uma carta* U_α *para* $\mathbb{CP}^n$ *é um subconjunto de* X *tal que* $z^\alpha \neq 0$ *junto do mapa* $\varphi_\alpha(z^0, \ldots, z^n) = \dfrac{1}{z^\alpha}(z^0, \ldots, \widehat{z^\alpha}, \ldots, z^n)$[8] *cuja inversa é dada por* $\varphi_\alpha^{-1}(w^1, \ldots, w^n) = [w^1 : \ldots : 1 : \ldots : w^n]$*, com* 1 *na* $\alpha-$*ésima posição. É imediato verificar que as mudanças de coordenadas são holomorfas.*

Calculemos uma forma de Kähler e uma métrica de Kähler natural associada a esta variedade específica, conhecida como ***métrica de Fubini-Study****.*

Considere a seguinte função positiva definida

$$\mathcal{K}_\alpha(p) := \sum_{j=1}^{n+1} \left| \frac{z^j}{z^\alpha} \right|, \ p \in U_\alpha.$$

Tome $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ *e note que*

$$\mathcal{K}_\alpha(p) = \left| \frac{z^\beta}{z^\alpha} \right| \mathcal{K}_\beta(p).$$

Então

$$\log \mathcal{K}_\alpha = \log \mathcal{K}_\beta + \log \frac{z^\beta}{z^\alpha} + \overline{\log \frac{z^\beta}{z^\alpha}}.$$

Como $\dfrac{z^\alpha}{z^\beta}$ *é função holomorfa temos que*

$$\overline{\partial} \log \frac{z^\beta}{z^\alpha} = 0.$$

Ademais,

$$\overline{\partial \log \frac{z^\beta}{z^\alpha}} = \overline{\overline{\partial} \log \frac{z^\beta}{z^\alpha}} = 0.$$

Logo,

$$\partial\overline{\partial} \log \mathcal{K}_\alpha = \partial\overline{\partial} \log \mathcal{K}_\beta.$$

[8] A notação $\widehat{z^\alpha}$ simboliza que este termo está sendo omitido

Assim, a $2-$*forma do tipo* $(1,1)$ *dada por*

$$\omega := i\partial\overline{\partial}\log\mathcal{K}_\alpha$$

está bem definida, e é localmente a expressão para a forma de Kähler de $\mathbb{CP}^n$ *associada à métrica* $g_{j\overline{k}} = \dfrac{\partial^2}{\partial\zeta^j\overline{\zeta}^k}\log\mathcal{K}$, *onde* $\zeta^j_\alpha := \dfrac{z^j}{z^\alpha}$ *se* $j \leq \alpha - 1$ *e* $\zeta^j_\alpha := \dfrac{z^{j+1}}{z^\alpha}$ *se* $j \geq \alpha + 1$, *são chamadas as* ***coordenadas homogêneas****.*

É interessante descrever a existência de um ***biholomorfismo***[9] *entre a esfera de Riemann (exemplo 2.3) e* $\mathbb{CP}^1$. *Tal mapa pode ser descrito da seguinte maneira:*

$$f : S^2 \to \mathbb{CP}^1$$

$$f(p) = \begin{cases} [\pi_N(p), 1], & \text{se } p \neq N \\ [1, \overline{\pi}_S(p)], & \text{se } p \neq S. \end{cases}$$

Este exemplo ainda mostra que a esfera de Riemann é variedade de Kähler com a métrica de $\mathbb{CP}^1$.

Mais geralmente temos:

Exemplo 2.5 (Superfícies de Riemann)**.** *Considere* M *uma variedade complexa de dimensão complexa* 1[10]. *Note que* $\dim_{\mathbb{C}}\Omega^2_{\mathbb{C}}(M) = \dim_{\mathbb{R}}\Omega^2(M) = 1$ *e* $\dim_{\mathbb{C}}\Omega^3_{\mathbb{C}}(M) = 0$, *de onde a* $2-$*forma fundamental* ω *associada a qualquer métrica hermitiana em* M *é fechada e toda métrica hermitiana em* M *é de Kähler.*

Como vimos, uma variedade complexa pode não admitir nenhuma métrica Kähler devido as obstruções topológicas para tal. Aqui damos dois exemplos simples.

Exemplo 2.6. *O produto das esferas* $S^3 \times S^1$ *possui* ***número de Betti*** *igual a* 1, *isto é, a dimensão do primeiro grupo de cohomologia de de Rham desta variedade é* 1. *Não é difícil verifica isto utilizando* ***fórmula de Künneth****. Mas note que como*

$$b^1 = b^{0,1} + b^{1,0} = 2b^{1,0},$$

no contexto Kähler, então em variedades Kähler b^1 *é um número par, de onde* $S^3 \times S^1$ *não admite métricas Kähler.*

Mais geralmente, o produto $S^{2l+1} \times S^{2k+1}$ *nunca admite métrica de Kähler por argumento indutivo ao que utilizamos.*

---

[9] Isto é, existe uma mapa $f : S^2 \to \mathbb{CP}^n$ holomorfo com inversa holomorfa.

[10] Chamamos tais variedades de **superfícies de Riemann**.

Capítulo 3

O Teorema de Calabi-Yau

3.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo

Este capítulo devota-se a expor o enunciado clássico e a subsequente formulação analítica do Teorema de Calabi-Yau. Apresentamos para critério de exposição, um esboço da demonstração deste teorema seguindo a prova clássica apresentada por Yau.

Estudamos as principais consequências deste resultado no âmbito de geometria Kähler. Tal resultado permite inferir como holonomia e classe de Chern estão amarradas em geometria kähleriana.

Introduzimos às variedades de Calabi-Yau e fazendo uso de resultados clássicos e extremamente difíceis em geometria complexa, como os Teoremas de Chow e Kodaira, mostramos que variedades de Calabi-Yau são variedades projetivas complexas, sendo portanto, a geometria algébrica, o ambiente natural de estudos desses espaços.

Sugere-se **fortemente** que o leitor se dirija ao Apêndice para checar qualquer dúvida quanto ao conteúdo analítico desta seção.

3.2 A conjectura de Calabi e a prova de Yau

Esta seção tem por objetivo entender e demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Conjectura de Calabi)**.** *Seja (M, J, g, ω) uma variedade Kähler com forma de Ricci ρ. Considere uma $(1,1)$-forma real ρ' em M tal que $[\rho] = [\rho']$. Então, existe uma métrica g' em M com forma de Kähler ω' tal que $[\omega] = [\omega']$, cuja forma de Ricci é ρ'.*

Esta é a primeira formulação do Teorema de Calabi-Yau, e foi proposta por Calabi entre 1954 e 1957. Convém darmos uma formulação analítica para este problema. que ainda tem a vantagem de simplificar consideravelmente o enunciado pois elimina a dependência explícita da forma ρ'.

Observação 3.1. *Para entender o próximo parágrafo reveja a equação* (2.125).

Dada (M^{2n}, J, g, ω) uma variedade Kähler (com dimensão complexa n) compacta e sem bordo com forma de Ricci ρ, e uma $(1,1)$-forma real ρ' satisfazendo $[\rho] = [\rho']$, gostaríamos de encontrar uma métrica g' em M, cuja forma de Kähler está na mesma classe que ω e tal que sua forma de Ricci seja ρ'. Pelo Corolário 2.2, existe $f : M \to \mathbb{R}$ uma função real e suave tal que

$$\rho - \rho' = -\frac{1}{2} dd^c f. \tag{3.1}$$

Como $(\omega')^n = \dfrac{\det g'_{j\bar{k}}}{\det g_{j\bar{k}}} \omega^n$, denotemos $F := \dfrac{\det g'_{j\bar{k}}}{\det g_{j\bar{k}}}$, e $\rho' = -\dfrac{1}{2} dd^c \log \det g'_{j\bar{k}}$, $\rho = -\dfrac{1}{2} dd^c \log \det g_{j\bar{k}}$, então,

$$\frac{1}{2} dd^c \log F = \rho - \rho' = \frac{1}{2} dd^c f.$$

Desta forma,

$$dd^c (f - \log F) = 0. \tag{3.2}$$

Como M é por hipótese compacta, então $f - \log F$ é constante em M. Seja $A > 0$ tal que $f - \log F = -\log A$. Desta maneira temos

$$F = A e^f (\omega')^n - A e^f \omega^n. \tag{3.3}$$

Como necessariamente

$$[\omega'] = [\omega] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R}),$$

e M não tem bordo, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_M (\omega')^n = \int_M \omega^n. \tag{3.4}$$

Deste modo,

$$A \int_M e^f d\mu_g = \int_M d\mu_g = V_g(M) := \text{volume}_g(M). \tag{3.5}$$

A equação (3.5) caracteriza completamente a constante A.

Como $[\omega] = [\omega']$, novamente pelo Corolário 2.2, existe $\phi : M \to \mathbb{R}$ suave tal que

$$\omega' = \omega + dd^c \phi. \tag{3.6}$$

Para que ϕ seja unicamente determinada pedimos que

$$\int_M \phi d\mu_g = 0, \tag{3.7}$$

Isto permite a seguinte formulação da conjectura de Calabi, a qual damos o nome de Teorema de Calabi-Yau.

Teorema 3.2 (Teorema de Calabi-Yau)**.** *Seja (M, J, g, ω) uma variedade Kähler compacta e sem bordo. Seja $f \in C^\infty(M)$ uma função real e defina $A > 0$ por $A \int_M e^f d\mu_g = V_g(M)$. Então, existe única função $\phi : M \to \mathbb{R}$ suave tal que*

1. *$\omega + dd^c\phi$ é uma $(1,1)$-forma positiva;*
2. *$\int_M \phi d\mu_g = 0$;*
3. *$(\omega + dd^c\phi)^n = Ae^f\omega^n$ em M.*

Ainda mais, localmente a equação $(\omega + dd^c\phi)^n = Ae^f\omega^n$ tem a expressão:

$$\det(g_{j\bar{k}} + \partial^2_{j\bar{k}}\phi) = Ae^f \det(g_{j\bar{k}}). \tag{3.8}$$

A equação (3.8) é uma equação diferencial parcial elíptica de **Monge-Ampère**.

Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta e sem bordo. Utilizando as propriedades da estrela de Hodge pode-se mostrar que se $f \in C^0(M)$, $A > 0$ e existe $\phi \in C^2(M)$ que satisfaz a tese do Teorema 3.2, então

$$d\phi \wedge d^c\phi \wedge \omega^{n-1} = \frac{1}{n}|\nabla\phi|^2_g\omega^n. \tag{3.9}$$

Ainda mais, para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ existem funções não negativas F_j tais que

$$d\phi \wedge d^c\phi \wedge \omega^{n-j-1} \wedge (\omega + dd^c\phi)^j = F_j\omega^n. \tag{3.10}$$

Com isso conseguimos provar a unicidade (se houver existência) de ϕ no Teorema 3.2.

Teorema 3.3 (Calabi.)**.** *Considere as hipóteses do Teorema 3.2. Então, existe no máximo uma função ϕ que satisfaz a tese.*

Demonstração. Suponha por absurdo que o Teorema 3.2 seja verdadeiro, mas que duas funções ϕ_1, ϕ_2 diferentes satisfazendo a tese. Sejam ω_1, ω_2 formas de Kähler associadas a ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente. Isto é, $\omega_k = \omega + dd^c\phi_k$, $k \in \{1, 2\}$. Então,

$$\omega_1^n = Ae^f\omega^n = \omega_2^n. \tag{3.11}$$

Como $\omega_1 - \omega_2 = dd^c(\phi_1 - \phi_2)$, então

$$0 = \omega_1^n - \omega_2^n = dd^c(\phi_1 - \phi_2) \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \ldots + \omega_2^{n-1}). \tag{3.12}$$

Considerando a expressão $(\phi_1 - \phi_2)d^c(\phi_1 - \phi_2) \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \ldots + \omega_2^{n-1})$, como $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$ e vale a equação (3.12) temos pelo Teorema de Stokes

$$\int_m d[(\phi_1 - \phi_2)d^c(\phi_1 - \phi_2) \wedge (\omega_1^{n-1} + \omega_1^{n-2} \wedge \omega_2 + \ldots + \omega_2^{n-1})] = 0. \tag{3.13}$$

Podemos utilizar as equações (3.9) e (3.10) em (3.13) para concluir que

$$dd^c(\phi_1 - \phi_2) = 0. \tag{3.14}$$

Como $\int_M \phi_1 d\mu_g = \int_M \phi_2 d\mu_g = 0$, então $\phi_1 = \phi_2$, o que é absurdo. ■

Enunciaremos agora três estimativas difíceis (a dedução destas pode ser vista em detalhes em [Joy00, Yau78]) que a eventual solução do Teorema de Calabi-Yau deve satisfazer. Estas são chamadas de **estimativas a priori**, e são em geral muito difíceis de se obter. A dificuldade da equação de Monge-Ampère foi fator decisivo para tão longa espera da prova desse teorema. O conteúdo analítico utilizado doravante neste capítulo pode ser visto no apêndice.

Teorema 3.4. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta e sem bordo. Seja $Q_1 \geq 0$. Então, existem constante $Q_2, Q_3, Q_4 \geq 0$ dependendo somente de M, J, g e Q_1 tais que: se $f \in C^3(M)$, $\phi \in C^5(M)$ e $A > 0$ satisfazem*

$$\|f\|_{C^3} \leq Q_1, \ \int_M \phi d\mu_g = 0 \ e \ (\omega + dd^c\phi)^n = Ae^f\omega^n, \tag{3.15}$$

então $\|\phi\|_{C^0} \leq Q_2$, $\|dd^c\phi\|_{C^0} \leq Q_3$ e $\|\nabla dd^c\phi\|_{C^0} \leq Q_4$.

Teorema 3.5. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta e sem bordo. Sejam $Q_1, \ldots, Q_4 \geq 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. Então, existe constante $Q_5 \geq 0$ dependendo apenas de $M, J, g, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ e α tal que: se $f \in C^{3,\alpha}, \phi \in C^5(M)$ e $A > 0$ satisfazem $(\omega + dd^c\phi)^n = Ae^f\omega^n$ e*

$$\|f\|_{C^{3,\alpha}} \leq Q_1, \ \|\phi\|_{C^0} \leq Q_2, \ \|dd^c\phi\|_{C^0} \leq Q_3 \ e \ \|\nabla dd^c\phi\|_{C^0} \leq Q_4, \tag{3.16}$$

então $\phi \in C^{5,\alpha}(M)$ e $\|\phi\|_{C^{5,\alpha}} \leq Q_5$. Ainda mais, se $f \in C^\infty$, então $\phi \in C^\infty$.

Teorema 3.6. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta e sem bordo. Fixe $\alpha \in (0, 1)$ e suponha que $f' \in C^{3,\alpha}(M), \phi' \in C^{5,\alpha}(M)$ e $A' > 0$ satisfaçam as equações*

$$\int_M \phi' d\mu_g = 0 \ e \ (\omega + dd^c\phi)^n = A'e^{f'}\omega^n. \tag{3.17}$$

Então, sempre que $f \in C^{3,\alpha}(M)$ e $\|f - f'\|_{C^{3,\alpha}}$ for pequeno o bastante, existe $\phi \in C^{5,\alpha}(M)$ e $A > 0$ tal que

$$\int_M \phi d\mu_g = 0 \ e \ (\omega + dd^c\phi)^m = Ae^f\omega^n. \tag{3.18}$$

Em posse destas estimativas, utilizemos uma abordagem clássica para solução de equações diferenciais parciais elípticas conhecida como **método de continuidade**. A ideia é construir uma família a 1-parâmetro de equações diferenciais indexadas em $[0, 1]$ de modo que a equação no parâmetro 1 é a que desejamos resolver a equação no parâmetro

0 já tem solução garantida, possivelmente a trivial. Depois da definição daremos mais detalhes.

Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta e sem bordo. Fixe $\alpha \in (0,1)$ e considere $f \in C^{3,\alpha}(M)$. Defina

$$S := \{t \in [0,1] : \exists \phi_t \in C^{5,\alpha}(M) : \int_M \phi_t d\mu_g = 0 \text{ e } \ A_t > 0 : (\omega + dd^c\phi)^n = A_t e^{tf}\omega^n\}.$$

Note que se $t = 0$ então $A_0 = 1$ e $\phi \equiv 0 \in S$, de onde S é não vazio. Vamos mostrar que S é fechado, utilizando os Teoremas 3.4 e 3.5, e aberto, utilizando o Teorema 3.6. Neste caso, $S = [0,1]$ e a equação para $t = 1$ terá solução, como queríamos.

Teorema 3.7. *O conjunto S é aberto e fechado.*

Demonstração. S **é fechado em** $[0,1]$. Tome $t \in \overline{S}$. Então, existe uma sequência $\{t_j\} \subseteq S$ tal que $t_j \to t$. Mostremos que $t \in S$. Pela definição de S segue que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\phi_{t_j} := \phi_j \in C^{5,\alpha}(M)$ tal que $\int_M \phi_j d\mu_g = 0$ e A_j tal que $(\omega + dd^c\phi_j)^n = A_j e^{t_j f}\omega^n$. Seja $Q_1 := \|f\|_{C^{3,\alpha}}$ e sejam Q_2, Q_3, Q_4 como no Teorema 3.4 e seja Q_5 como no Torema 3.5 (esta última dependendo de Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4).

Como $t_j \in [0,1]$, então $\|t_j f\|_{C^{3,\alpha}} \leq Q_1$. Daí, podemos aplicar os Teoremas 3.4 e 3.5 para ϕ_j no lugar de ϕ e $t_j f$ no lugar de f. Desta maneira, $\|\phi_j\|_{C^0} \leq Q_2$, $\|dd^c\phi_j\|_{C^0} \leq Q_3$ e $\|\nabla dd^c\phi_j\|_{C^0} \leq Q_4$, para cada j. Daí, do teorema 3.5 temos que $\|\phi_j\|_{C^{5,\alpha}} \leq Q_5$ para cada j. Então $\{\phi_j\}$ é uma sequência de funções limitadas em $C^{5,\alpha}(M)$. Pelo Teorema de Kondrakov A.2 segue que a inclusão $C^{5,\alpha} \to C^5$ é compacta, de onde existe subsequência $\{\phi_{j_k}\}_k$ convergente em $C^5(M)$. Chamemos o limite desta sequência de ϕ.

Definimos $0 < A := \lim_k A_{j_k}$. Desta maneira, $0 = \lim_k \{\left(A_{j_k} \int_M e^{t_{j_k} f} d\mu_g\right)\} = A \int_M e^{tf} d\mu_g$. Ainda mais, como $C^5(M) \subseteq C^2(M)$, então $\{\phi_{j_k}\}$ converge para ϕ em $C^2(M)$, de onde

$$\lim_k \{(\omega + dd^c\phi_{j_k})^n = A_{j_k} e^{t_{j_k} f}\omega^n\} = \{(\omega + dd^c\phi)^n = Ae^{tf}\omega^n\}.$$

Por fim, ϕ satisfaz as hipóteses do Teorema 3.4, consequentemente do Teorema 3.5, de onde segue que $t \in S$, e portanto S é fechado.

S **é aberto em** $[0,1]$. Tome $t \in S$. Então, pela definição de S segue que existe $\phi \in C^{5,\alpha}(M)$ tal que $\int_M \phi d\mu_g = 0$ e $A > 0$ tal que $(\omega + dd^c\phi) = Ae^{tf}\omega^n$. Seja $t' > 0$ tal que $|t - t'|\|f\|_{C^{3,\alpha}}(M)$ seja pequena o bastante para satisfazer as hipóteses do Teorema 3.6. Então, existe $\phi' \in C^{5,\alpha}(M)$ e $A > 0$ tais que

$$\int_M \phi' d\mu_g = 0 \text{ e } (\omega + dd^c\phi')^n = A' e^{t' f}\omega^n.$$

Ora, então $t' \in S$ e em particular, S contém uma vizinhança pequena contendo t e t', onde segue que S é aberto. ∎

Antes de concluir a prova do Teorema de Calabi-Yau, precisamos garantir que $(\omega + dd^c\phi)$ é uma $(1,1)$-forma real positiva. Provemos o seguinte lema:

Lema 3.1. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta e conexa. Seja $f \in C^0(M)$ e defina $A\int_M e^f d\mu_g = V_g(M)$. Suponha que $\phi \in C^2(M)$ satisfaça $(\omega + dd^c\phi)^n = Ae^f\omega^n$ em M, Então $\omega + dd^c\phi$ é uma $(1,1)$-forma positiva.*

Demonstração. Lembrando que se $g_{j\overline{k}}$ representa a matriz hermitiana associada à métrica g, então $\omega + dd^c\phi$ é representada em coordenadas locais holomorfas por $g'_{j\overline{k}} = g_{j\overline{k}} + \partial_j\partial_{\overline{k}}\phi$. Ainda mais, para cada ponto $p \in M$ temos que $\det g_{j\overline{k}}(p) > 0$, já que g é uma métrica, logo é positiva definida em cada ponto. Definindo $g'_{j\overline{k}} = g_{j\overline{k}} + \partial_j\partial_{\overline{k}}\phi$ localmente, temos que $g'_{j\overline{k}}$ define uma matriz que tem determinante positivo em cada ponto já que $(\omega+dd^c)^n = Ae^f\omega^n$ e ω^n é uma $2n$-forma positiva. Daí, segue que os autovalores de $g'_{j\overline{k}}$ são não nulos. Se mostrarmos que em pelo menos um ponto $p \in M$ estes são positivos, então pela continuidade dos seus autovalores e pela conexidade de M seguirá que $g'_{j\overline{k}}$ tem seus autovalores positivos em todo ponto, de onde $(\omega + dd^c\phi)$ define uma $(1,1)$-forma positiva.

Como M é compacta, então ϕ tem um ponto de mínimo $p \in M$. Neste ponto temos que $\partial_j\partial_{\overline{k}}\phi(p) > 0$ e ainda, $g_{j\overline{k}}(p) > 0$, de onde segue que neste ponto os autovalores de $g'_{j\overline{k}}$ são positivos, e o resultado segue. ■

Demonstração do Teorema 3.2. O Teorema 3.7 garante a existência de ϕ solução para o problema, que pelo Teorema 3.5 é suave se f for suave. O Lema 3.1 garante que $\omega + dd^c\phi$ é positiva, de onde pode-se abstrair uma métrica associada a esta $(1,1)$-forma. Por fim, o Teorema 3.3 garante a unicidade de ϕ. ■

3.3 Variedades com Holonomia contida ou igual a SU(n)

Esta seção segue de perto as referências [Joy00] e [Yau77].

Seja (M^{2n}, J, g, ω) uma variedade Kähler compacta. Considere o fibrado tangente holomorfo (TM, J), que pode ser identificado com $TM_{1,0}$. Tomemos a $(n,0)$-ésima potência exterior do fibrado $TM^{1,0}$ que é dual a $TM_{1,0}$. Isto é, considere o fibrado de linha $\Lambda^{(n,0)}TM^{1,0}$. Este é o fibrado cujas seções são $(n,0)$-formas, ou ainda, n-formas holomorfas. Uma pergunta natural sobre este fibrado é sobre a admissão de uma seção suave global. Denotemos por conveniência $K_M := \Lambda^{(n,0)}TM^{1,0}$, vamos determinar sob que condições este fibrado admite uma seção suave global, isto é, sob quais condições este fibrado é trivial.

Para cada ponto $p \in M$ podemos considerar um sistema de coordenadas holomorfo e definir a n-forma $dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$. Em variedades Kähler, dado que $\nabla J = 0$, $\nabla\omega = 0$ e $\nabla g = 0$, a holonomia de g é subgrupo de $U(n)$. Suponha que consigamos reduzir esta holonomia para $SU(n)$. Neste caso, a $(n,0)$-forma $dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$ fica invariante pela

representação de holonomia. Daí, pelo Teorema 1.2 existe única extensão $dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$ para uma $(n,0)$-forma global Ω, de onde K_M é trivial. Por outro lado, se existe uma $(n,0)$-forma global em M tal que $\nabla\Omega = 0$, então a holonomia de g, pelo mesmo teorema, é subgrupo de $SU(n)$. Então, toda variedade Kähler compacta (M^n, J, g, ω) com holonomia contida em $SU(n)$ apresenta K_M trivial.

Provamos ainda que:

Teorema 3.8. *Seja (M^{2n}, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta. Então,* $\mathrm{Hol}^0(g) \subseteq SU(n)$ *se, e somente se, a forma de Ricci ρ associada à métrica g é nula. Ou seja, M tem curvatura de Ricci nula.*

Demonstração. Sendo $K_M := \Lambda^{(n,0)}TM^{1,0}$, a conexão ∇ em TM induz uma conexão ∇^K em K_M. Ainda mais, se ∇^K for compatível com a métrica de K_M induzida por g, então o grupo de holonomia de ∇^k (aqui confundimos a holonomia da conexão em K_M com a da métrica em K_M) é subconjunto de $U(1)$. Considerando o mapa determinante, $\det : U(n) \to U(1)$, temos que $\mathrm{Hol}^0(\nabla^K) = \det(\mathrm{Hol}^0(\nabla))$, onde ∇ é a conexão de Levi-Civita em (M, g). Daí, temos que $\mathrm{Hol}^0(\nabla^K) = \{1\}$ se, e somente se, $\mathrm{Hol}^0(\nabla) \subseteq SU(n)$. Mas note que pelo Corolário 1.2 $\mathrm{Hol}^0(\nabla^K) = \{1\}$ se, e somente se, o tensor de curvatura de K_M é nulo.

Como a forma de Ricci ρ da métrica g é o tensor curvatura de K_M, então $\rho = 0$ e M tem curvatura de Ricci nula se, e somente se, $\mathrm{Hol}^0(g) \subseteq SU(n)$, então o resultado está provado. ■

Definição 3.1. *Uma variedade de Kähler (M, J, g, ω) compacta tal que* $\mathrm{Hol}(g) = SU(n)$ *é chamada de* ***variedade de Calabi-Yau****.*

Antes de dizer mais sobre estas variedades, vejamos alguma consequência do Teorema de Calabi-Yau.

Seja (M, J) uma variedade complexa compacta admitindo métricas Kähler. Se g é uma métrica Kähler em M, então a forma de Kähler ω associada à métrica g é uma 2-forma real e fechada, e portanto, define uma classe de cohomologia $[\omega] \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$ chamada **classe de Kähler**, que é um invariante topológico associado a g. Como ω é também uma $(1,1)$-forma, $[\omega]$ pertence a interseção $H^{1,1}(M) \cap H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$, se pensarmos em $H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$ e $H^{1,1}(M)$ como subespaços vetoriais de $H^2_{dR}(M, \mathbb{C})$.

Definição 3.2. *O* ***cone de Kähler*** *$\mathcal{K}$ de M é o conjunto de todas as classes de Kähler em M. Este é um subconjunto convexo e aberto em $H^{1,1}(M) \cap H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$.*

Teorema 3.9. *Seja (M, J) uma variedade complexa compacta admitindo métricas de Kähler e tal que $c_1(M) = 0$. Então, existe uma única métrica de Kähler com curvatura de*

Ricci nula em M para cada classe de Kähler em M. Ou seja, a família de métricas Kähler com curvatura de Ricci nula em M é isomorfa ao cone de Kähler $\mathcal{K}$ em M.

Demonstração. Supondo que (M, J) admita métricas de Kähler e que $c_1(M) = 0$, então dada uma métrica de Kähler g com forma de Kähler ω em M, temos que sua forma de Ricci ρ é cohomóloga à forma de Ricci nula, isto é, $[\rho] = [0]$. Assim, pelo Teorema de Calabi-Yau, existe uma única métrica de Kähler g' em M com forma de Ricci ω' cohomóloga a ω e tal que sua forma de Ricci ρ' é nula, isto é, a métrica g' tem curvatura de Ricci nula. Isto prova que existe uma injeção do cone de Kähler nas métricas Kähler com curvatura de Ricci nula. Mas como cada métrica Kähler com curvatura de Ricci nula naturalmente define um elemento no cone de Kähler, temos a sobrejetividade garantida, de onde segue o afirmado. ■

O seguinte teorema fornece uma importante caracterização de variedades Kähler com primeira classe de Chern nula.

Teorema 3.10. *Seja (M, J, g, ω) uma variedade de Kähler compacta. Então, são equivalentes:*

1. $c_1(M) = 0$,
2. *M admite uma métrica de Kähler com curvatura de Ricci nula,*
3. *M admite métrica de Kähler h tal que* $\mathrm{Hol}^0(h) \subseteq SU(n)$.

Demonstração. Se $c_1(M) = 0 \Rightarrow M$ admite métrica de Kähler com curvatura de Ricci nula: segue imediatamente do Teorema 3.9.

Se M admite métrica de Kähler h com curvatura de Ricci nula então $\mathrm{Hol}^0(h) \subseteq SU(n)$: segue imediatamente do Teorema 3.8.

Se M admite métrica de Kähler h tal que $\mathrm{Hol}^0(h) \subseteq SU(n)$, então $c_1(M) = 0$: de fato, considere a conexão de Levi-Civita associada a h. Note que como $\mathrm{Hol}^0(h) \subseteq SU(n)$, então pelo teorema 3.8 temos que a forma de Ricci ρ desta conexão, que coincide com a conexão de Chern do fibrado holomorfo hermitiano associado a h, é nula. Como ρ define a primeira classe de Chern de M, que independe da conexão, então $c_1(M) = 0$. ■

Corolário 3.1. *Caracterização de variedades de Calabi-Yau.*

Demonstração. Se usarmos a lista de Berger vemos que se conseguirmos exibir uma métrica g irredutível e não simétrica com forma de Ricci nula em uma variedade simplesmente conexa de dimensão complexa ímpar, então esta variedade será tal que $\mathrm{Hol}(g) = SU(n = 2k + 1)$. Estes são exemplodes de variedades de Calabi-Yau. ■

O próximo resultado faz uso da **fórmula de Weitzenböck** e será apenas enunciado com referência para a prova. A importância desta proposição reside no fato de que tensores constantes em uma variedade munida de métrica e conexão são determinados pelo grupo de cohomologia de Dolbeault da métrica/conexão. Em suma, este resultado diz que em variedades Kähler compactas e com curvatura de Ricci nula, as $(r,0)$-formas fechadas são exatamente os tensores fixados pelo grupo de holonomia da métrica de Kähler.

Proposição 3.1. *Seja (M,J,g,ω) uma variedade de Kähler compacta e com curvatura de Ricci nula. Seja $\xi \in H^{r,0}(M)$. Se ∇ é a conexão de Levi-Civita de M, então $\nabla\xi = 0$. Reciprocamente, se ξ é uma $(r,0)$-forma em M tal que $\nabla\xi = 0$, então $d\xi = 0$. Ou seja, o espaço das $(r,0)$-formas fechadas em M é isomorfo ao espaço das $(r,0)$-formas constantes em M.*

Demonstração. Consulte [Joy00, Página 125, Proposition 6.2.4]. ■

Com este resultado em mãos, se escolhermos $r = n$, então temos:

Teorema 3.11. *Seja (M,J,g,ω) uma variedade de Kähler compacta com curvatura de Ricci nula. Então,* $\mathrm{Hol}(g) \subseteq SU(n)$ *se, e somente se, K_M é trivial.*

Demonstração. Se $\mathrm{Hol}(g) \subseteq SU(n)$ mostramos no começo da seção que K_M é um fibrado de linha que admite seção global, de onde é trivial. Por outro lado, se K_M é trivial, então existe uma $(n,0)$-forma global ζ em M, a qual chamamos de **forma de volume holomorfa**. Note que $d\zeta = 0$. Assumindo que g tenha curvatura de Ricci nula, pela Proposição 3.1 temos que $\nabla\zeta = 0$. Assim, ζ é fixada pelo grupo de holonomia de g, de onde $\mathrm{Hol}(g) \subseteq SU(n)$. ■

Podemos usar a Proposição 3.1 para entender os números de Hodge de variedades de Calabi-Yau. Como variedades de Calabi-Yau tem holonomia igual a $SU(n)$, e as únicas $(r,0)$-formas fixadas por $SU(n)$ são as $(n,0)$-formas e as 0-formas, então concluimos que

$$b^{0,n} = b^{n,0} = b^{0,0} = 1,\ b^{r,0} = 0,\ 1 < r < n. \tag{3.19}$$

Teorema 3.12. *Seja (M,J,g,ω) uma variedade de Calabi-Yau de dimensão complexa $n \geq 3$. Então, M é projetiva. Ou seja, (M,J) é uma variedade algébrica isomorfa a uma subvariedade de $\mathbb{CP}^N$.*

Ideia da prova. Note que como $n \geq 3$, então $b^{2,0} = b^{0,2} = 0$. Então, $H^{1,1}(M) = H^2_{dR}(M,\mathbb{C})$. Ainda mais, $H^{1,1}(M) \cap H^2_{dR}(M,\mathbb{R}) = H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$. Em particular, o cone de Kähler $\mathcal{K}$ de M é subconjunto aberto e convexo de $H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$. Como $H^2_{dR}(M,\mathbb{Q})$ é denso em $H^2_{dR}(M,\mathbb{R})$, então $H^2_{dR}(M,\mathbb{Q})$ é denso em $\mathcal{K}$. Daí, $\mathcal{K} \cap H^2_{dR}(M,\mathbb{Q})$ é não vazio.

Podemos portanto escolher $\alpha \in \mathcal{K} \cap H^2_{dR}(M, \mathbb{Q})$ um inteiro positivo k tal que $k\alpha \in H^2_{dR}(M, \mathbb{Z})$. Assim, $k\alpha \in \mathcal{K}$, porque $\mathcal{K}$ é um cone. Portanto, existe uma $(1,1)$-forma real positiva β tal que $[\beta] = k\alpha$. O resultado segue ao utilizar teoria de fibrados holomorfos para mostrar que existe um fibrado de linha L sobre M tal que $c_1(M) = k\alpha$. Assim, como $k\alpha$ é positivo, segue do teorema de Kodaira que existe um mergulho de M em $\mathbb{CP}^N$. O Teorema de Chow garante que qualquer subvariedade de $\mathbb{CP}^N$ é algébrica, o que conclui o resultado. (Veja os Teoremas citados em [Joy00].) ■

Capítulo 4

Fluxos de Ricci

4.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo

Já discutimos nesta dissertação o conceito de variedades de Einstein. Vejamos como motivar o problema do fluxo de Ricci através deste tipo de variedade.

Na década de 80, o matemático Richard Hamilton estava interessado no problema da conjectura de Poincaré , que essencialmente trata sobre decidir se toda 3-variedade simplesmente conexa e fechada é ou não homeomorfa a esfera padrão, S^3. Hamilton, baseando-se nos trabalhos de Eells e Sampson acerca de mapas harmônicos, conjecturou que dada certa plausibilidade da veracidade da conjectura, toda 3-variedade com curvatura de Ricci positiva deveria possuir uma métrica de curvatura seccional constante. De fato, Hamilton pensou que poderia deformar essa métrica de acordo com um fluxo gradiente associado a determinado funcional, de modo que a equação de evolução associada tivesse como métrica limite uma métrica de Einstein com curvatura escalar constante e positiva. Seguiria portanto (como vimos no Teorema 1.6) que esta seria uma métrica para qual a variedade possuiria curvatura seccional constante.

Como as equações de campo de Einstein motivam a existência de variedades de Einstein, é natural tomar como funcional candidato para evolução o funcional de Hilbert-Einstein, agindo no espaço das métricas riemannianas em uma variedade fixada,

$$\mathcal{F}(g) := \int_M S d\mu(g),$$

onde S é a curvatura escalar de g.

Usando fórmulas de variação para S e $d\mu(g)$ conclui-se que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(g+th) = \int_M g(-2\,\mathrm{Ric}(g) + \frac{S}{n}g, h) d\mu(g).$$

Portanto, a equação de evolução procurada para métrica seria

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -2\,\mathrm{Ric}(g) + 2\frac{S}{n}g. \tag{4.1}$$

No entanto, esta equação implica numa evolução ruim para a curvatura escalar. De fato, a equação de evolução da curvatura escalar é uma equação do calor do tipo backward, e não se experaria portanto existência de solução para a equação (4.1) em tempo curto.

Como o problema se dá pela evolução da curvatura escalar, pode-se considerar a média desta função por toda M, a qual denotamos por $r := \int_M S d\mu(g) \Big/ \int_M d\mu(g)$, e tentar resolver a equação de evolução

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -2\,\mathrm{Ric}(g) + 2\frac{r}{n}g. \tag{4.2}$$

Esta equação sim é satisfatória para os propósitos de Hamilton (veja [Ham82]), e é conhecida como **fluxo de Ricci normalizado**. A equação geral do fluxo de Ricci não contém o termo $2\frac{r}{n}g$, sendo simplesmente

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g).$$

A equação do fluxo de Ricci normalizado evita fatos indesejados que são comuns no fluxo de Ricci, como colpaso de variedades em tempo finito. Por exemplo, se considerarmos a esfera padrão S^n com a métrica redonda g_0, então dada a família de métricas $g(t) = r^2(t)g_0$, como $\mathrm{Ric}(g(t)) = \mathrm{Ric}(g_0)$, procuramos solução do tipo

$$(2rr')(t)g_0 = -2\,\mathrm{Ric}(g_0) = -2(n-1)g_0, \tag{4.3}$$

já que $\mathrm{Ric}(g_0) = (n-1)g_0$. Desta forma,

$$rr'(t) = -(n-1), \tag{4.4}$$

ou seja,

$$r^2(t) = -2(n-1)t + 1, \tag{4.5}$$

$$r(t) = \sqrt{-2(n-1)t+1}, \tag{4.6}$$

de onde

$$g(t) = \sqrt{-2(n-1)t+1}g_0, \tag{4.7}$$

que colapsa para $t = \dfrac{1}{2(n-1)}$.

Hamilton tinha esperanças de formular essa equação como o gradiente de algum funcional, mas não obteve sucesso. Em verdade, Robert Bryant mostra que não é possível associar essa equação como fluxo gradiente se considerar a norma L^2-habitual no espaço das métricas riemannianas. Felizmente, [Per02] apresenta uma formulação como gradiente de um determinado funcional para o fluxo de Ricci, e seguindo as ideias que

Hamilton tentara sem sucesso, prova a conjectura de Poincaré, numa sequência de mais dois artigos [Per03a], [Per03b].

Neste capítulo estudaremos os resultados mais clássicos da teoria referente a esta equação, como existência em tempo curto, blow up da norma do tensor curvatura de Riemann e como alguns tensores evoluem segundo o fluxo. O principal objetivo é adquirir familiarização com este tipo de fluxo para poder trabalhar em detalhes no caso complexo, onde buscamos condições para obter métricas Käler-Einstein em variedades compactas. Veremos que a ideia de Hamilton é copiada de forma satisfatória no caso complexo, implicando em uma demonstração bastante simples para o Teorema de Calabi-Yau.

4.2 Exemplo prático de fluxos de Ricci

Aqui daremos um exemplo da aplicação do fluxo de Ricci no contexto homogêneo. Isso servirá para ganhar familiaridade com a aplicação dessa equação. A referência base é [San12]. A ideia será tentar generalizar a ideia de como, no contexto de grupos de Lie, podemos tornar o tensor de Ricci globalmente diagonal, e a partir daí, estudar o fluxo de Ricci da família de métricas de Berger, definida na Seção de Exemplos do Capítulo 1.

4.2.1 Fluxos de Ricci como um sistema de EDO's

Seja G um grupo de Lie de dimensão 3 e denote por $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Sabidamente, existe uma bijeção entre métricas invariantes à esquerda em G e produto internos ad-invariantes em $\mathfrak{g}$. Então, o conjunto das métricas invariantes à esquerda em G pode ser identificado com o conjunto das matrizes simétricas vistas como endomorfismos de $\mathfrak{g}$. Em particular, para cada métrica inicial g_0 em G, o fluxo de Ricci define uma curva $g(t)$ no espaço das matrizes simétricas $S_n \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Naturalmente, isto já implica numa redução no número de equações associadas ao fluxo para $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

A ideia será considerar um referencial apropriado para $\mathfrak{g}$ que permita diagonalizar o fluxo. Para tanto, tome um referencial E_i invariante à esquerda em G, isto é, considere uma base apropriada para a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Definimos as **constantes de estrutura** por

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{3} c_{ij}^k E_k. \tag{4.8}$$

A **representação adjunta** é então definida por

$$ad(V)(W) := [V, W]. \tag{4.9}$$

Assumindo que o referencial $\{E_i\}$ é ortonormal, as constantes c_{ij}^k são determinadas por

$$c_{ij}^k = \langle [E_i, E_j], E_k \rangle. \tag{4.10}$$

Definimos um endomorfismos C em $\mathfrak{g}$ identificando

$$E_1 \mapsto [E_2, E_3], \tag{4.11}$$

$$E_2 \mapsto [E_3, E_1], \tag{4.12}$$

$$E_3 \mapsto [E_1, E_2], \tag{4.13}$$

o que faz com que as entradas da matriz C sejam as constantes de estrutura c_{ij}^k.

Com a hipótese que o grupo de Lie G seja conexo e que $\operatorname{tr} ad(V) = 0,\ \forall V \in \mathfrak{g}$[1], a matriz C será auto-adjunta. Assim, C será diagonalizável por base ortonormal de autovetores.

Entretanto, abriremos mão da ortonormalidade e pediremos que C seja escrita como

$$C = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\nu \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

onde $\lambda \leq \mu \leq \nu,\ \lambda, \mu, \nu \in \{-1, 0, 1\}$. O referencial que promove essa decomposição é chamado de **referencial de Milnor**.

Se denotarmos por $\{F_i\}$ o referencial de Milnor e por $\{\eta^i\}$ seu referencial dual, então o produto interno ad-invariant em $\mathfrak{g}$ é escrito como

$$g = A\eta^1 \otimes \eta^1 + B\eta^2 \otimes \eta^2 + C\eta^3 \otimes \eta^3. \tag{4.15}$$

Ainda mais, no contexto invariante, a conexão de Levi-Civita associada à métrica g (que confundiremos toda hora com o produto interno ad-invariante) é dada por

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left\{[X, Y] - (adX)^* Y - (adY)^* X\right\}, \tag{4.16}$$

e vale que

$$\langle R(F_k, F_i)F_j, F_k\rangle = 0, \tag{4.17}$$

de onde o tensor de Ricci é diagonal e o fluxo de Ricci se reduz a um sistema de 3 equações.

4.2.2 Fluxo de Ricci na esfera de Berger

Mais geralmente ao que fizemos no Capítulo 1, considere uma família de métricas escritas no referencial dual a um referencial de Milnor em $SU(2) \cong S^3$ dada por

$$g = \epsilon A\omega^1 \otimes \omega^2 + B\omega^2 \otimes \omega^2 + C\omega^3 \otimes \omega^3, \tag{4.18}$$

onde $\epsilon \in (0, 1]$.

[1] Isto é equivalente, num grupo conexo, ao grupo ser unimodular.

Observação 4.1. *Observe que diferentemente do Capítulo 1, o parâmetro aqui não é denotado por λ, e sim por ϵ, dado que usamos a letra λ com outro significado nesta seção.*

Com cálculos similares ao que fizemos no Capítulo 1, concluímos que as componentes do tensor de Ricci no referencial $\{F_1, F_2, F_3\}$ são:

$$\mathrm{Ric}(E_1) = \frac{2}{BC}\left\{(\epsilon A)^2 - (B-C)^2\right\}, \tag{4.19}$$

$$\mathrm{Ric}(E_2) = \frac{2}{\epsilon AC}\left\{B^2 - (\epsilon A - C)^2\right\}, \tag{4.20}$$

$$\mathrm{Ric}(E_3) = \frac{2}{\epsilon AB}\left\{C^2 - (\epsilon A - B)^2\right\}. \tag{4.21}$$

Assim, considerando $A = A(t), B = B(t), C = C(t)$, a equação do fluxo de Ricci fica determinada e dependente de $\epsilon \in (0, 1]$.

Proposição 4.1. *Para qualquer $\epsilon > 0$ e qualquer escolha de dado inicial $A_0, B_0, C_0 > 0$, existe uma solução do fluxo de Ricci em $SU(2)$ em um tempo máximo $T_\epsilon < \infty$.*

Demonstração. Veja [San12, Página 20, Capítulo 3, Proposition 3.2.1]. ■

4.3 Evoluções e estimativas

Nesta subseção obteremos estimativas para o comportamento da curvatura escalar segundo o fluxo de Ricci, do volume da variedade e da norma do tensor de Riemann.

Chamaremos de **tensor de Riemann** a aplicação $R : (X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z$ e de **tensor curvatura de Riemann** o tensor $\mathrm{Rm}(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W)$.

Proposição 4.2. *Faça $\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}(t)$ denotar o tensor de Ricci associado à métrica $g(t)$ no instante t, $\mathrm{Rm} = \mathrm{Rm}(t)$ denotar o tensor de curvatura Riemann associado à métrica $g(t)$ no instant t, $S = S(t)$ denotar a curvatura escalar associada à métrica $g(t)$ no instante t, $d\mu(g) = d\mu(g_t)$ denotar a forma de volume associada à métrica $g(t)$ no instante t e $V(t)$ denotar o volume da variedade M associado à métrica $g(t)$ no instante t.*

Então, as seguintes fórmulas são verdadeiras:

1. $\dfrac{\partial}{\partial t}S = 2\Delta S + 2|\mathrm{Ric}|^2,$
2. $\dfrac{\partial}{\partial t}d\mu = -S d\mu,$
3. $\dfrac{dV}{dt} = -\displaystyle\int_M S d\mu.$
4. $\dfrac{\partial}{\partial t}|\mathrm{Rm}|^2 = 2|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + 2g(\mathrm{Rm}, \Delta\,\mathrm{Rm}),$ *onde* $\mathrm{Rm}(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W),$

5. $\dfrac{\partial}{\partial t}|\mathrm{Rm}|^2 \leq \Delta|\mathrm{Rm}|^2 - 2|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + C|\mathrm{Rm}|^3$, *onde* C *é uma constante que depende só da dimensão de* M.

Observação 4.2. *Para prova destas fórmulas consulte [Top06, Capítulo 2]. Apresentamos apenas uma ideia da técnica para este tipo de cálculo.*

Para a primeira equação, por exemplo, note que $S = g^{ij}R_{ij}$, *onde* g^{ij} *e* R_{ij} *dependem do tempo. Assim, lembre que*

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_{ik}. \tag{4.22}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}g_{jk} + g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}g_{jk} = 0. \tag{4.23}$$

Logo, como $-2R_{jk} = \dfrac{\partial}{\partial t}g_{jk}$ *obtemos*

$$\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} = 2g^{jk}g^{ij}R_{jk}. \tag{4.24}$$

Portanto,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial t}R_{ij} + g^{ij}\frac{\partial R_{ij}}{\partial t}, \tag{4.25}$$

$$= 2g^{ij}g^{jk}R_{ij}R_{jk} + g^{ij}\frac{\partial R_{ij}}{\partial t}, \tag{4.26}$$

$$= 2|\mathrm{Ric}|^2 + g^{ij}\frac{\partial R_{ij}}{\partial t}. \tag{4.27}$$

A ideia agora é usar que $R_{ij} = g^{kl}R_{kijl}$ *e a expressão de* R_{kijl} *em termos dos símbolos de Christofell. Para tanto, é importante saber como os símbolos evoluem. Isto é obtido a partir da fórmula,*

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}\right) \tag{4.28}$$

lembrando que

$$\partial_t g_{mk,l} = g_{mk,lt} = g_{mk,tl}, \tag{4.29}$$

onde

$$g_{mk,lt} \equiv \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^l \partial t}. \tag{4.30}$$

Adiantamos que se denotarmos por $h := \dfrac{\partial g}{\partial t}$, *então a fórmula para a evolução dos símbolos é dada por:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left((\nabla_j h)(\partial_i, \partial_l) + (\nabla_i h)(\partial_j, \partial_l) - (\nabla_l h)(\partial_i, \partial_l)\right). \tag{4.31}$$

O seguinte Lema será importante para obtermos estimativas para evolução de grandezas com valores em $\mathbb{R}$, como a curvatura escalar, volume e norma do tensor de Riemann de acordo com o fluxo de Ricci.

Lema 4.1 (Princípio do máximo fraco para escalares)**.** *Sejam M uma variedade fechada e $t \in [0,T)$ $(0 < T < \infty)$ tal que $g(t)$ é uma família de métricas riemannianas, $X(t)$ é uma família de campos de vetores suaves em M. Seja $F : \mathbb{R} \times [0,T) \to \mathbb{R}$ e suponha que $u \in C^\infty(M \times [0,T), \mathbb{R})$ satisfaz*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta_{g(t)} u + g(X(t), \nabla u) + F(u,t). \tag{4.32}$$

Seja $\phi : [0,T) \to \mathbb{R}$ solução de

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{dt} = F(\phi(t), t) \\ \phi(0) = \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.33}$$

Se $u(\cdot, 0) \leq \alpha$, então $u(\cdot, t) \leq \phi(t)$ para todo $t \in [0,T)$.

Demonstração. Pode ser vista em [Top06, Capítulo 3, Página 44, Theorem 3.1.1.]. ■

Observação 4.3. *O Lema 4.1 é também verdadeiro revertendo todas as desigualdades.*

Teorema 4.1 (Evolução da curvatura escalar)**.** *Suponha que $g(t)$ seja um fluxo de Ricci em uma variedade fechada, com $t \in [0,T)$. Se $S \geq \alpha$ em $t = 0$, então para todo $t \in [0,T)$,*

$$S \geq \frac{\alpha}{1 - \left(\frac{2\alpha}{n}\right) t}. \tag{4.34}$$

Demonstração. Note que do item 1 da Proposição 4.2 e também do fato que $|\mathrm{Ric}|^2 \geq \dfrac{S^2}{n}$, onde n é a dimensão de M, podemos utilizar o Lema 4.1 com todas as desigualdades invertidas tomando $u \equiv S$, $X \equiv 0$ e $F(r,t) \equiv \dfrac{2}{n} r^2$. Neste caso

$$\phi(t) = \frac{\alpha}{1 - \left(\frac{2\alpha}{n}\right) t}.$$

■

Corolário 4.1. *Suponha que $g(t)$ seja um fluxo de Ricci em uma variedade fechada M para todo $t \in [0,T)$. Se $S \geq \alpha \in \mathbb{R}$ em $t = 0$, então $S \geq \alpha$ para todo $t \in [0,T)$.*

Corolário 4.2. *Curvatura escalar positiva (ou não negativa) é preservada pelo fluxo de Ricci.*

Corolário 4.3. *Suponha que $g(t)$ seja um fluxo de Ricci em M para todo $t \in [0,T)$. Se $S \geq \alpha > 0$ em $t = 0$, então $T \leq \dfrac{n}{2\alpha}$.*

Demonstração. Como

$$S \geq \frac{\alpha}{1 - \left(\frac{2\alpha}{n}\right) t},$$

e $\alpha > 0$ teremos

$$\frac{\alpha}{1-\left(\frac{2\alpha}{n}\right)t} > 0 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{2\alpha}{n}\right)t > 0,$$

de onde

$$t < \frac{n}{2\alpha}.$$

Assim, o tempo máximo permitido é $T \leq \frac{n}{2\alpha}$. Note que para $T = \frac{n}{2\alpha}$ o fluxo desenvolve uma singularidade (caso não tenha desenvolvido antes). ■

Corolário 4.4. *Suponha que $g(t)$ seja um fluxo de Ricci em uma variedade fechada M para todo $t \in [0,T)$. Se em em $t = 0$ valer $S \geq 0$, então o volume $V(t)$ de M é não crescente.*

Demonstração. Pelo item 3 da Proposição 4.2 temos que

$$\frac{dV}{dt} = -\int_M S d\mu.$$

Se em $t = 0$ tivermos $S \geq 0$, então pelo Corolário 4.2 vale que $S \geq 0$ para todo t. Assim,

$$-\int_M S d\mu \leq 0,$$

de onde

$$\frac{dV}{dt} \leq 0.$$

■

Corolário 4.5. *Suponha que $g(t)$ seja um fluxo de Ricci em uma variedade fechada M para todo $t \in [0,T)$. Se em $t = 0$ tivermos $\alpha := \inf_M S < 0$, então*

$$V(t) \leq V(0)\Big(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\Big)^{n/2}. \tag{4.35}$$

Demonstração.

$$\frac{d}{dt}\log\Big[\frac{V(t)}{\Big(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\Big)^{n/2}}\Big] = \frac{d}{dt}\Big(\log V - \frac{n}{2}\log\Big(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\Big)\Big)$$

$$= \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} - \frac{(-\alpha)}{1+\frac{2(-\alpha)}{n}t} = -\frac{1}{V}\int_M S d\mu + \frac{\alpha}{1+\frac{2(-\alpha)}{n}t},$$

já que

$$-\int_M S d\mu = \int_M -S d\mu \leq (-\inf_M S)\int_M d\mu = (-\inf_M S)V.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\log\Big[\frac{V(t)}{\Big(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\Big)^{n/2}}\Big] \leq -\inf_M S + \frac{\alpha}{1+\frac{2(-\alpha)}{n}t} \leq 0.$$

Como log é uma função crescente obtemos que

$$\frac{d}{dt}\log\left[\frac{V(t)}{\left(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\right)^{n/2}}\right]\leq 0,$$

então,

$$\frac{d}{dt}\frac{V(t)}{\left(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\right)^{n/2}}\leq 0,$$

de onde

$$\frac{V(t)}{\left(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\right)^{n/2}}$$

é uma função decrescente. Assim,

$$\frac{V(t)}{\left(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\right)^{n/2}}\leq V(0),$$

o que conclui o afirmado. ■

Corolário 4.6. *Se o fluxo de Ricci está definido em $[0,\infty)$, então o limite*

$$\overline{V}:=\lim_{t\to\infty}\frac{V(t)}{\left(1+\frac{2(-\alpha)}{n}t\right)^{n/2}}, \tag{4.36}$$

existe.

Demonstração. Note que do corolário anterior essa quantidade é limitada e tanto divisor como dividendo são funções monótonas. ■

Curvatura escalar é uma dentre as curvaturas que tem positividade preservada pelo fluxo de Ricci. Um importante resultado devido a Hamilton, é que em dimensão 3 (não necessariamente acontece em outras dimensões), curvatura de Ricci positiva continua positiva. Para maiores detalhes consulte [Ham82, Página 280, Corollary 9.2.].

Teorema 4.2. *Suponha que $g(t)$ seja um fluxo de Ricci em uma variedade fechada M para todo $t\in[0,T)$ e tal que em $t=0$ tenhamos $|\mathrm{Rm}|\leq K$. Então, para todo $t\in[0,T)$*

$$|\mathrm{Rm}|\leq\frac{K}{1-\frac{1}{2}CKt}. \tag{4.37}$$

Demonstração. Note que usando o item 5 na Proposição 4.2 conseguimos que

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathrm{Rm}|^2\leq\Delta|\mathrm{Rm}|^2+C|\mathrm{Rm}|^3.$$

Se escolhermos $u \equiv |\mathrm{Rm}|^2$, $X \equiv 0$, $F(r,t) \equiv Cr^{3/2}$ e $\alpha = K^2$, então, utilizando o Lema 4.1 e que

$$\phi(t) = \frac{1}{(K^{-1} - \frac{1}{2}Ct)^2}$$

é solução de

$$\begin{cases} \phi'(t) = C\phi(t)^{3/2} \\ \phi(0) = K^2, \end{cases}$$

o resultado segue. ■

4.4 Existência e unicidade de solução para o Fluxo de Ricci

A existência de solução global para problemas de EDP depende da topologia do espaço. Em geometria riemanniana, a topologia está intimamente relacionada à geometria, uma vez que a primeira fornece obstruções para existência de métricas de tipos arbitrários no espaço. Entretanto, assim como as equações das geodésicas e de campos de Jacobi em uma variedade riemanniana, para garantir a boa colocação da equação, é necessário que se consiga pelo menos solução em tempo curto sobe hipóteses mínimas, como compacidade. Buscamos nesta seção fornecer a prova para existência em tempo curto do fluxo de Ricci em variedades riemannianas fechadas e analisar o comportamento da solução quando esta não existe para todo tempo.

Para a solução em tempo curto, a ideia é construir uma equação análoga a do fluxo de Ricci, que não é uma EDP parabólica, de forma que a equação análoga seja parabólica. Utilizando então de teoremas de existência para este tipo de equação, e difeomorfismos na variedade, construíremos uma solução para o fluxo de Ricci. Tal método é conhecido como **DeTurck trick** e fornece uma alternativa à forma encontrada por Hamilton, que inicialmente utilizava **Teorema da função implícita de Nash-Moser**, e foi feito apenas para dimensão 3 em [Ham82, Página 262, Theorem 4.2.]. Na forma que apresentaremos não há restrições quanto à dimensão, e o procedimento é inspirado no estudo de **mapas harmônicos**.

A demonstração que apresentaremos é baseada em [Bre10, Capítulo 2].

Sejam (M,g) e (N,h) variedades riemannianas fechadas. Um **mapa harmônico** em M é uma aplicação $f : (M,g) \to (M,h)$ que é ponto crítico do **funcional de Dirichlet**

$$E(f) := \int_M \|df\|^2 d\mu_g, \tag{4.38}$$

onde $d\mu_g := \sqrt{g}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, com $g := \det(g_{ij})$ e $\|\cdot\|$ é a norma induzida no fibrado $T^*M \otimes f^*(TN)$.

Mostra-se que f é um mapa harmônico se, e somente se, $\mathrm{tr}_g \nabla df = 0$, onde ∇ é a **conexão induzida** em $TM \otimes f^*(TN)$. Neste contexto, se $f : (M,g) \to (N,h)$ é

qualquer mapa, definimos um **operador de Laplace** por

$$\Delta_{g,h} f := \operatorname{tr}_g \nabla df. \tag{4.39}$$

Lema 4.2. *Nas condições anteriores, se φ é um difeomorfismo da variedade M, então*

$$(\Delta_{\varphi^*(g),h} f \circ \varphi)(p) = (\Delta_{g,h} f)(\varphi(p)) \in T_{f(p)}N, \ \forall\ p \in M. \tag{4.40}$$

Demonstração. Veja [Bre10, Página 17, Lemma 2.3]. ■

Fixe (M, h) uma variedade riemanniana fechada. Chamamos h de **métrica de referência**. Suponha que $\tilde{g}(t), t \in [0, T)$ é uma família a um parâmetro de métricas riemannianas em M. Dizemos que $\tilde{g}$ é solução do **fluxo de Ricci-DeTurck** se $\tilde{g}$ satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) = -2 \operatorname{Ric} \tilde{g}(t) - \mathcal{L}_{\xi_t}\tilde{g}(t), \tag{4.41}$$

onde $\mathcal{L}$ denota a **derivada de Lie**, $\operatorname{Ric} \tilde{g}(t)$ o **tensor de Ricci** da métrica $\tilde{g}$ e $\xi_t := \Delta_{\tilde{g}(t),h} I$, com I o difeomorfismo identidade.

Derivemos uma expressão para ξ_t. Tome (x^i) carta local em M. Utilizaremos extensivamente a convenção de soma de Einstein. Temos que $dI = dx^i \otimes \partial_i$, onde $\partial_i \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Se denotarmos $\tilde{\nabla}$ a conexão riemanniana associada a $\tilde{g}$, com t fixo e ∇ a conexão riemanniana associada à métrica h e por conexão D em $T^*M \otimes TM$ temos que $D = \tilde{\nabla} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla$, onde 1 é a aplicação identidade entre seções. Daí,

$$D(dI) = (\tilde{\nabla} dx^i) \otimes \partial_i + dx^i \otimes (\nabla \partial_i). \tag{4.42}$$

Utilizando que $\Delta_{\tilde{g},h}$ é um traço, teremos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\tilde{g},h} f &= \tilde{g}^{kl}(D_k dI)(\partial_l), && (4.43)\\
&= \tilde{g}^{kl}\left((\tilde{\nabla}_k dx^i)(\partial_l)\partial_i + dx^i(\partial_l)(\nabla_k \partial_i)\right), && (4.44)\\
&= \tilde{g}^{kl}\left(-\tilde{\Gamma}^p_{ki}\delta_{pl}\partial_i + \delta_{il}\Gamma^p_{ki}\partial_p\right), && (4.45)\\
&= \tilde{g}^{ik}(\Gamma^l_{ik} - \tilde{\Gamma}^l_{ik})\partial_l, && (4.46)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de um rearranjo de índices.

Concluímos portanto que para t fixo $\xi = \tilde{g}^{ik}(\Gamma^l_{ik} - \tilde{\Gamma}^l_{ik})\partial_l$, onde Γ denota os **símbolos de Christoffel** na métrica h e conexão ∇ e $\tilde{\Gamma}$ denota os símbolos para $\tilde{g}$ e $\tilde{\nabla}$.

Utilizando as expressões para os símbolos de Christoffel em termos das métricas $\tilde{g}$ e h obtemos que

$$\xi = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}\tilde{g}^{jl}(\partial_i \tilde{g}_{jk} + \partial_k \tilde{g}_{ij} - \partial_j \tilde{g}_{ik})\partial_l + \text{termos de ordem menor.}$$

Utilizando que a conexão $\tilde{\nabla}$ é compatível com a métrica teremos que

$$\mathcal{L}_\xi(\tilde{g}_{jl}dx^j \otimes dx^l) = \xi[g_{jl}]dx^j \otimes dx^l + g_{jl}(\mathcal{L}_\xi dx^j) \otimes dx^l + g_{jl}dx^j \otimes (\mathcal{L}_\xi dx^l),$$

e do fato que

$$\mathcal{L}_\xi dx^j = \partial_i \xi^j dx^i,$$
$$\mathcal{L}_\xi dx^l = \partial_i \xi^l dx^i,$$

concluímos que

$$\mathcal{L}_\xi(\tilde{g}_{jl}dx^j \otimes dx^l) = \xi[g_{jl}]dx^j \otimes dx^l + g_{jl}\partial_i\xi^j dx^i \otimes dx^l + g_{jl}\partial_i\xi^l dx^j \otimes dx^i.$$

Disso vemos que os termos de mais alta ordem são

$$g_{jl}\partial_i\xi^j dx^i \otimes dx^l + g_{jl}\partial_i\xi^l dx^j \otimes dx^i.$$

Daí,

$$\mathcal{L}_\xi \tilde{g} = -\tilde{g}^{ik}(\partial_i\partial_l\tilde{g}_{jk} + \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} - \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik})dx^j \otimes dx^l + \text{termos de menor ordem.}$$

Como em coordenadas locais

$$\operatorname{Ric}\tilde{g} = -\frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl} - \partial_i\partial_l\tilde{g}_{jk} - \partial_j\partial_k\tilde{g}_{il} + \partial_j\partial_l\tilde{g}_{ik})dx^j \otimes dx^l + \text{termos de ordem menor,}$$

obtemos

$$-2\operatorname{Ric}\tilde{g} - \mathcal{L}_\xi(\tilde{g}) = \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_k\tilde{g}_{jl}dx^j \otimes dx^l + \text{termos de ordem menor.}$$

Como estamos interessados em verificar que a equação de Ricci-Deturck é parabólica precisamos olhar para a linearização do operador $-2\operatorname{Ric} - \mathcal{L}_\xi$, agindo no espaço das formas bilineares simétricas e positivas definidos, verificando que seu símbolo define um isomorfismo (veja no apêndice uma discussão sobre operadores diferenciais, símbolos e operadores elípticos). Como linearização não altera a ordem, basta olharmos para o termo de mais alta ordem. Fixemos uma métrica qualquer $\tilde{h}$. Então,

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\{(\tilde{h}^{ik} + s\tilde{g}^{ik})\partial_i\partial_k(\tilde{h}_{jl} + s\tilde{g}_{jl})dx^j \otimes dx^l\} = \tilde{g}^{ik}\partial_i\partial_j h_{jl}dx^j \otimes dx^l + \tilde{h}^{ik}\partial_i\partial_k(\tilde{g}_{jl})dx^j \otimes dx^l, \tag{4.47}$$

indica que o símbolo do operador linearizado é dado por

$$\sigma(p;\theta) := \tilde{h}^{ik}(p)\theta_i\theta_k,\ p \in M, \theta \in T_p^*M - \{0\}. \tag{4.48}$$

Mas note que $\tilde{h}^{ik}\theta_i\theta_k = \|\theta\|^2_{\tilde{h}}$, de onde o símbolo é claramente um isomorfismo para todo $p \in M, \theta \in T_p^*M - \{0\}$. Daí, a equação de Ricci-DeTurck é uma equação parabólica e portanto vale o seguinte teorema:

Teorema 4.3. *Sejam M uma variedade suave fechada e h uma métrica de referência fixa em M. Dada qualquer métrica inicial g_0, existe um número real $T > 0$ e uma família a um parâmetro de métrica riemanniana $\tilde{g}(t), t \in [0, T)$ tal que $\tilde{g}(t)$ é solução única suave do fluxo de Ricci-DeTurck.*

Demonstração. Mostramos que a equação de DeTruck-Ricci é parabólica. Pelo Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais parabólicas A.5 com condição inicial suave o resultado segue. ■

Proposição 4.3. *Fixe uma variedade riemanniana fechada (M, h). Assuma que $\tilde{g}(t), t \in [0, T)$ é uma família a um parâmetro de métricas em M que satisfaz*

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g} = -2\,\mathrm{Ric}\,\tilde{g}(t) - \mathcal{L}_{\xi(t)}\tilde{g}(t),$$

onde $\xi_t = \Delta_{\tilde{g},h} I$ e que $\varphi_t, t \in [0, T)$ é uma família a um parâmetro de difeomorfismos de M satisfazendo

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \xi_t(\varphi_t(p)),$$

para todo $p \in M$ e para todo $t \in [0, T)$, então as métricas $g(t) = \varphi_t^*(\tilde{g}(t)), t \in [0, T)$ formam uma solução do fluxo de Ricci.

Demonstração. Lembre que $\varphi_t^*(\mathrm{Ric}\,\tilde{g}(t)) = \mathrm{Ric}\,g(t)$, pois φ_t é isometria. Ainda mais,

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \frac{\partial}{\partial s}\varphi_{t+s}^*(\tilde{g}(t+s))(s=0) = \varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathcal{L}_{\xi(t)}\tilde{g}(t)).$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) + 2\,\mathrm{Ric}\,g(t) = \varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathcal{L}_{\xi(t)}\tilde{g}(t) + 2\,\mathrm{Ric}\,\tilde{g}(t)) = 0.$$

■

Proposição 4.4. *Fixe uma variedade riemanniana fechada (M, h) e assuma que $g(t), t \in [0, T)$ é um fluxo de Ricci em M. Assuma ainda que $\varphi_t, t \in [0, T)$ é uma família a um parâmetro de difeomorfismos de M que evoluem segundo a equação*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = \Delta_{g(t),h}\varphi_t.$$

Para cada $t \in [0, T)$ definimos $\tilde{g}(t)$ por $\varphi_t^*(\tilde{g}(t)) = g(t)$. Então $\tilde{g}(t)$ satisfaz a quação de Ricci-DeTurck e ainda mais, $\Delta_{g(t),h}\varphi_t(p) = \xi_t(\varphi_t(p))$ para todo $p \in M$ e $t \in [0, T)$.

Demonstração. Como,

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = (\Delta_{g(t),h}\varphi_t)(p),$$

pelo Lema 4.2 temos que

$$(\Delta_{g(t),h}\varphi_t)(p) = (\Delta_{\varphi_t^*(\tilde{g}),h}\varphi_t)(p), \tag{4.49}$$
$$= (\Delta_{\tilde{g}(t),h}I)(\varphi(p)), \tag{4.50}$$
$$= \xi_t(\varphi_t(p)). \tag{4.51}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathcal{L}_{\xi(t)}\tilde{g}(t)),$$

de onde,

$$\varphi_t^*(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathcal{L}_{\xi(t)}\tilde{g}(t) + 2\,\mathrm{Ric}\,g(t)) = \frac{\partial}{\partial t}g(t) + 2\,\mathrm{Ric}\,g(t) = 0.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{g}(t) + \mathcal{L}_{\tilde{g}(t)} + 2\,\mathrm{Ric}\,g(t) = 0,$$

o que conclui o resultado. ■

Estamos em condição de provar a existência de solução para o fluxo de Ricci.

Teorema 4.4 (R. Hamilton [Ham82])**.** *Seja M uma variedade fechada e g_0 uma métrica riemanniana em M. Então, existe um número real $T > 0$ e uma família a um parâmetro de métricas $g(t)$, $t \in [0, T)$ tal que $g(t)$ é solução para o fluxo de Ricci com $g(0) = g_0$. Ainda mais, a solução $g(t)$ é única.*

Demonstração. Para a existência basta notar que pelo Teorema 4.3 existe solução $\tilde{g}(t)$ em $[0, T)$ para o fluxo de Ricci-DeTurck com $\tilde{g}(0) = g_0$. Pela Proposição 4.3 existe solução para o fluxo de Ricci em $[0, T)$. Pode acontecer que a solução não seja única. Vejamos que isto não ocorre.

Suponha que $g^1(t), g^2(t)$ sejam soluções do fluxo de Ricci definidas no mesmo intervalo $[0, T)$ e tais que $g^1(0) = g^2(0)$. Afirmamos que $g^1(t) = g^2(t),\ \forall t \in [0, T)$ pela continuidade das métricas. Suponha o contrário, isto é, suponha que exista $t \in [0, T)$ tal que $g^1(t) \neq g^2(t)$ para algum $t \in [0, T)$. Defina $\tau \in [0, T)$ por

$$\tau := \inf\{t \in [0, T) : g^1(t) \neq g^2(t)\}.$$

Note que $g^1(\tau) = g^2(\tau)$. Seja φ_t^1 a solução de

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^1 = \Delta_{g^1(t),h}\varphi_t^1$$

com condição inicial $\varphi_\tau^1 = I$, a identidade. Similarmente, denotamos por φ_t^2 a solução de

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^2 = \Delta_{g^2(t),h}\varphi_t^2,$$

com $\varphi_\tau^2 = I$. Por Teorema de existência e unicidade de EDO's segue que as soluções estão definidas em $[\tau, \tau+\epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Se pegarmos ϵ pequeno o bastante, então podemos garantir φ_t^1 e φ_t^2 difeomorfismos em seu intervalo de definição.

Para cada $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$, conside $\tilde{g}^1, \tilde{g}^2$ dadas por $(\varphi_t^i)^*(g^i(t)) = g^i(t), i \in \{1,2\}$. Segue da Proposição 4.4 que $\tilde{g}^1$ e $\tilde{g}^2$ são soluções do fluxo de Ricci-DeTurck. Como $\tilde{g}^1(\tau) = \tilde{g}^2(\tau)$ segue que $\tilde{g}^1 = \tilde{g}^2$ em $[\tau, \tau+\epsilon)$. Para cada $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$ definimos o campo ξ_t em M por

$$\xi_t = \Delta_{\tilde{g}^1(t),h} I = \Delta_{\tilde{g}^2(t),h} I.$$

Pela Proposição 4.4 temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^1(p) = \xi_t(\varphi_t^1(p)),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^2(p) = \xi_t(\varphi_t^2(p)),$$

para todo $p \in M$ e $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$. Como $\varphi_\tau^1 = \varphi_\tau^2$, temos $\varphi_t^1 = \varphi_t^2,\ \forall t \in [\tau, \tau+\epsilon)$. Segue portanto que

$$g^1(t) = (\varphi_t^1)^*(\tilde{g}^1(t)) = (\varphi_t^2)^*(\tilde{g}^2(t)) = g^2(t),$$

para todo $t \in [\tau, \tau+\epsilon)$. Ora, então τ não é o ínfimo de $\{t \in [0,T) : g^1(t) \neq g^2(t)\}$, o que é contradição. ■

Passemos agora a analisar o comportamento da solução se esta não pode ser estendida para todo $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

4.5 O blow-up da curvatura de Riemann

Teorema 4.5 (Curvatura blow-up para singularidade)**.** *Se M é uma variedade fechada e $g(t)$ é um fluxo de Ricci definido no intervalo máximo $[0,T)$ e $T < \infty$, então*

$$\sup_M |\mathrm{Rm}|(t) \to \infty \text{ se } t \nearrow T. \tag{4.52}$$

A ideia da prova do Teorema 4.5 é supor que a tese é falsa e obter que o intervalo de existência do fluxo de Ricci pode ser aumentado. Para tanto, usaremos a limitação da curvatura e o Lema 4.4 para estender a solução do fluxo de forma contínua em $[0,T]$. Embora consigamos definir uma métrica em $t = T$, precisamos de mais estimativas para garantir que $g(T)$ é métrica riemanniana. Tais estimativas surgem ao se conhecer o bom comportamento das derivadas do tensor de Riemann no sentido: se o tensor de Riemann for limitado espacialmente e temporalmente, gostaríamos que suas derivadas fossem limitadas espacialmente e temporalmente.

Antes de passarmos à prova, são necessários os seguintes resultados e definições.

Definição 4.1. *Se A e B são tensores do mesmo tipo, $A * B$ simboliza o tensor que é obtido de $A \otimes B$ via combinação de uma ou mais das seguintes operações:*

1. *Soma sob quaisquer dois pares de índices,*
2. *Contração de índices via métrica ou métrica dual.*

O algoritmo para chegar na expressão correta para $A * B$ deve ser independente de escolhas particulares para A e B, isto é, o procedimento não pode contar com nada que seja específico a um tensor, mas sim a classe de tensores daquele tipo. Tendo isso em conta, a próxima proposição deve valer:

Proposição 4.5. *Dados A e B tensores do mesmo tipo, considere o tensor $A * B$. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. $|A * B| \leq C|A||B|$, *onde C não depende de A nem de B.*
2. *Como $\nabla g = 0$, então $\nabla(A * B) = (\nabla A) * B + A * (\nabla B)$.*

Teorema 4.6 (Bernstein-Bando-Shi)**.** *Seja $g(t), t \in [0, T)$, um fluxo de Ricci em uma variedade fechada M^n. Então, para cada $p \in \mathbb{N}$ existe C_p dependendo somente de n tal que se $\sup_M |\mathrm{Rm}| \leq K$ para todo $t \in (0, T)$, então*

$$|\nabla^p \mathrm{Rm}| \leq \min\left\{ \sup_{M\times\{0\}} |\nabla^p \mathrm{Rm}(0)| e^{C_p K t}, C_p \max\left\{ K^{\frac{p+2}{2}}, \frac{K}{t^{\frac{p}{2}}} \right\} \right\}, \tag{4.53}$$

em $M \times (0, T)$.

Ideia da prova. Daremos apenas um esboço da demonstração, que pode ser consultada em detalhes em [AH10, Capítulo 8, Páginas 137 - 140, Theorem 8.1].

Sejam A, B são tensores do mesmo tipo que dependem do tempo e satisfazem

$$\nabla_t A = \Delta A + B, \tag{4.54}$$

então

$$\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 = \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2\langle B, A\rangle, \tag{4.55}$$

e

$$\nabla_t \nabla A = \Delta(\nabla A) + \nabla B + R * \nabla A + \nabla R * A. \tag{4.56}$$

Neste teorema estamos interessados na evolução de $|\mathrm{Rm}|^2$. Fazendo $A = \mathrm{Rm}$ e $B = \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm}$ obtemos de (4.55)

$$\frac{\partial}{\partial t}|\mathrm{Rm}|^2 = \Delta|\mathrm{Rm}|^2 - 2|\nabla \mathrm{Rm}|^2 + \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm} * \mathrm{Rm}\,. \tag{4.57}$$

Se utilizarmos novamente as equações (4.55) e (4.56) com $A = \nabla R$ e $B = R * \nabla R$, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}|\nabla \operatorname{Rm}|^2 = \Delta|\nabla \operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla^2 \operatorname{Rm}|^2 + \operatorname{Rm} * \nabla \operatorname{Rm} * \nabla \operatorname{Rm}\,. \tag{4.58}$$

Gostaríamos de estimar $|\nabla \operatorname{Rm}|^2$ a partir destas equações. Para isso, definimos

$$F := t|\nabla \operatorname{Rm}|^2 + |\operatorname{Rm}|^2. \tag{4.59}$$

Note que em $t = 0$ não temos o termo $|\nabla \operatorname{Rm}|^2$. Assim, $F(0) \leq K^2$. Ainda mais, note que para t pequeno o termo $|\nabla \operatorname{Rm}|^2$ não fará diferença, porque este será controlado pelo termo $-2|\nabla \operatorname{Rm}|^2$ obtido da diferenciação de $|\operatorname{Rm}|^2$ com respeito ao tempo. (Veja a equação (4.57)). Derivando F em t e utilizando (4.57) e (4.58) temos

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq |\nabla \operatorname{Rm}|^2 + t(\Delta|\nabla \operatorname{Rm}|^2 + \operatorname{Rm} * \nabla \operatorname{Rm} * \nabla \operatorname{Rm}) + \Delta|\operatorname{Rm}|^2 - 2|\nabla \operatorname{Rm}|^2 + \operatorname{Rm} * \operatorname{Rm} * \operatorname{Rm}\,.$$

Notando que $\Delta F = t\Delta|\nabla \operatorname{Rm}|^2 + \Delta\nabla|\operatorname{Rm}|^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq \Delta F - 2|\nabla \operatorname{Rm}|^2 + t \operatorname{Rm} * \nabla \operatorname{Rm} * \nabla \operatorname{Rm} + \operatorname{Rm} * \operatorname{Rm} * \operatorname{Rm}\,.$$

Utilizando que $|\operatorname{Rm}| \leq K$ podemos escolher C_1, C_2 tais que $\operatorname{Rm} * \nabla \operatorname{Rm} * \nabla \operatorname{Rm} \leq 2C_1K$ e $\operatorname{Rm} * \operatorname{Rm} * \operatorname{Rm} \leq C_2K^3$. Assim,

$$\frac{\partial F}{\partial t} \leq \Delta F + (tC_1K - 1)|\nabla \operatorname{Rm}|^2 + C_2K^3. \tag{4.60}$$

Agora podemos utilizar o princípio do máximo (Lema 4.1) no intervalo $\left(0, \dfrac{1}{C_1K}\right]$, obtendo

$$t|\nabla \operatorname{Rm}|^2 \leq K^2 + tC_2K^3 \leq \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)K^2.$$

Se $t > \dfrac{1}{C_1K}$, utilizamos o mesmo argumento em $[t - \dfrac{1}{C_1K}, t]$ para obter

$$\frac{|\nabla \operatorname{Rm}|^2}{C_1K} \leq \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)K^2.$$

Assim, combinando estas duas estimativas conseguimos

$$|\nabla \operatorname{Rm}|^2 \leq \max\left\{\frac{\left(1 + \dfrac{C_2}{C_1}\right)K^2}{t}, (C_1 + C_2)K^3\right\},$$

de onde provamos o caso $p = 1$.

Para concluir utiliza-se indução e a fórmula

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^k \operatorname{Rm} = \Delta\nabla^k \operatorname{Rm} + \sum_{j=0}^{k} \nabla^j \operatorname{Rm} * \nabla^{k-j} \operatorname{Rm},$$

junto do seguinte truque:

Tome

$$G := t^p|\nabla^p R|^2 + \beta_p \sum_{k=1}^{p} \alpha_p t^{p-k} |\nabla^{p-k} R|^2.$$

A ideia é utilizar o mesmo argumento de EDP utilizado anteriormente, considerando uma escolha apropriada de β_p.

■

Lema 4.3. *Fixe uma métrica $\tilde{g}$ e uma conexão $\tilde{\nabla}$ em M. Para qualquer solução $g(t)$ suave do fluxo de Ricci em $M \times [0,T)$, para as quais $\sup_{M\times[0,T)} |\mathrm{Rm}| \leq K$, existem constantes C_q para cada $q \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\sup_{M\times[0,T)} |\tilde{\nabla}^q g|_{\tilde{g}} \leq C_q. \tag{4.61}$$

Demonstração. A prova em detalhes pode ser vista em [AH10, Páginas 141 e 142, Capítulo 8, Lemma 8.6]. A ideia consiste em mostrar por indução que

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\nabla}^q g = \sum_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q} \nabla^{j_0} R * \tilde{\nabla}^{j_1} g * \ldots * \tilde{\nabla}^{j_m} g. \tag{4.62}$$

Uma vez que tenhamos verificado isso, se tivermos controlado as $\tilde{\nabla}$-derivadas de g até ordem q, a derivada $q+1$ é controlada, já que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\tilde{\nabla}^{q+1} g\right|^2_{\tilde{g}} \leq C\left(1 + \left|\tilde{\nabla}^{q+1} g\right|\right). \tag{4.63}$$

■

Observação 4.4. *A ideia deste Lema reside em entender como as derivadas da métrica se comportam. A tática de utilizar uma métrica de referência se dá pelo fato que a estrutura diferenciável da variedade está sempre fixa, então derivar covariantemente segundo uma conexão aparentemente arbitrária serve para limitar as derivadas parciais (não temporais) dos coeficientes da métrica que evolui.*

Lema 4.4 (Equivalência de métricas)**.** *Se $g(t)$ é um fluxo de Ricci para $t \in [0,s]$ e $|\mathrm{Ric}| \leq K$ em $M \times [0,s]$, então*

$$e^{-2Kt} g(0) \leq g(t) \leq e^{2Kt} g(0), \ \forall t \in [0,s]. \tag{4.64}$$

Demonstração. Tome $p \in M$ e seja $v \neq 0 \in T_pM$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(v,v) = -2\,\mathrm{Ric}(v,v).$$

Assim,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} g(v,v)\right| \leq 2|\mathrm{Ric}| g(v,v).$$

Logo,

$$\left|\frac{1}{g(v,v)}\frac{\partial}{\partial t}g(v,v)r\right| \leq 2|\mathrm{Ric}|.$$

Como $|\mathrm{Ric}| < K$ por hipótese e

$$\left|\frac{1}{g(v,v)}\frac{\partial}{\partial t}g(v,v)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial t}\log g(v,v)\right| \leq 2K,$$

temos

$$\left|\log\frac{g(v,v)}{g_0(v,v)}\right| \leq \int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial t}\log g(v,v)\right| dt \leq Kt,$$

de onde, dado que $v \neq 0$ é arbitrário,

$$e^{-Kt}g(0) \leq g(t) \leq e^{Kt}g(0).$$

■

Agora estamos em condições de provar o Teorema 4.5.

Demonstração do Teorema 4.5. Assumindo a contrapositiva, existe $K < \infty$ e uma sequência $t_i \nearrow T$ tal que

$$\sup_M |R(\cdot, t_i)| \leq K.$$

Vale em particular do Teorema 4.2 que

$$|\mathrm{Rm}| \leq \frac{K}{1 - \frac{1}{2}CK(t - t_i)}, \ \forall t \geq t_i, \ p \in M.$$

Pegando i grande o suficiente, isto é, tal que $t_i = T - \epsilon$ para $0 < \epsilon << 1$ temos

$$\sup_M |\mathrm{Rm}| \leq \frac{K}{1 - \frac{1}{2}CK(t - (T - \epsilon))}, \ \forall t \in [T - \epsilon, T).$$

Então, como $1 - \frac{1}{2}CK(t - (T - \epsilon)) \geq 1 - \frac{1}{2}CK(T - (T - \epsilon)) = 1 - \frac{1}{2}CK\epsilon$, temos

$$\sup_M |\mathrm{Rm}| \leq \frac{K}{1 - \frac{1}{2}CK\epsilon} := K_1, \text{ se } t \in [T - \epsilon, T).$$

Por outro lado, como $[0, t_i]$ é compacto, então $\sup_M |\mathrm{Rm}|$ é uniformemente limitada em $[0, t_i]$ por alguma constante K_2. Fazendo $\tilde{K} := \max\{K_1, K_2\}$ temos que

$$\sup_M |\mathrm{Rm}| \leq \tilde{K},$$

em $[0, T)$.

Afirmamos que a métrica g pode ser estendida suavemente para $[0, T]$. De fato, pelo Lema 4.4 temos que para quaisquer t_j, t_k vale que para $v \neq 0 \in T_pM$ fixo

$$|\log\frac{g(v,v)(t_k)}{g(v,v)(t_j)}| \leq 2\tilde{K}|t_k - t_j|.$$

Como a sequência t_i é convergente, ela é de Cauchy. Concluímos que $g(t_i)(v,v)$ é de Cauchy. Daí, $g(t_i)(v,v)$ converge (pela completude de $\mathbb{R}$) para um número $g(T)(v,v)$, para cada v. Isto permite definir a métrica $g(T)(v,v) := \lim_i g(t_i)(v,v)$. Resta verificar que $g(T)$ é suave, no sentido de que se X e Y são campos suaves em M, então $g(X,Y)$ é função suave. Note que pelo Lema 4.3 temos

$$|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\nabla}^q g| \leq \sum_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q+1} |\nabla^{j_0}\operatorname{Rm} * \tilde{\nabla}^{j_1} g * \ldots * \tilde{\nabla}^{j_m} g|.$$

Mas daí,

$$|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\nabla}^q g| \leq (q+1)\max_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q+1} |\nabla^{j_0}\operatorname{Rm} * \tilde{\nabla}^{j_1} g * \ldots * \tilde{\nabla}^{j_m} g|.$$

Integrando em t em ambos os lados temos

$$|\tilde{\nabla}^q g(t_j) - \tilde{\nabla}^q g(t_k)| \leq (q+1)\max_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q+1} \int_{t_k}^{t_j} |\nabla^{j_0}\operatorname{Rm} * \tilde{\nabla}^{j_1} g * \ldots * \tilde{\nabla}^{j_m} g| dt.$$

Pelo Lema 4.3 existem constantes $C_{j_1}, \ldots, C_{j_m}$ tais que

$$|\nabla^{j_0}\operatorname{Rm} * \tilde{\nabla}^{j_1} g * \ldots * \tilde{\nabla}^{j_m} g| \leq C_{j_1} \ldots C_{j_m} |\nabla^{j_0}\operatorname{Rm}|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&(q+1)\max_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q+1} \int_{t_k}^{t_j} |\nabla^{j_0}\operatorname{Rm} * \tilde{\nabla}^{j_1} g * \ldots * \tilde{\nabla}^{j_m} g| dt \\
&\leq (q+1)\max_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q+1} \int_{t_k}^{t_j} C_{j_1} \ldots C_{j_m} |\nabla^{j_0}\operatorname{Rm}| dt.
\end{aligned}$$

Note que $[t_k, t_j]$ é compacto, de onde $\nabla^{j_0}\operatorname{Rm}$ é uma função uniformemente contínua. Assim,

$$\begin{aligned}
&(q+1)\max_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q+1} \int_{t_k}^{t_j} C_{j_1} \ldots C_{j_m} |\nabla^{j_0}\operatorname{Rm}| dt \\
&\leq (q+1)\max_{j_0+j_1+\ldots+j_m=q+1} C_{j_1} \ldots C_{j_m} \|\nabla^{j_0}\operatorname{Rm}\|_\infty (t_j - t_k).
\end{aligned}$$

Gostaríamos de concluir que $(\tilde{\nabla}^q g(t_j))$ é sequência de Cauchy. Note que $\|\nabla^{j_0}\operatorname{Rm}\|_\infty$ está atrelado aos extremos $[t_k, t_j]$ e poderia ocorrer que ao tomarmos $j, k \to \infty$ essa quantidade divergisse. Mas pelo Teorema 4.6 esta quantidade está bem controlada e como $|t_j - t_k| \to 0$ se $j, k \to \infty$, então $(\tilde{\nabla}^q g(t_j))$ é sequência de Cauchy. Então, essa sequência é limitada e segue da extensão de g em T (que é uniforme), que estas são as derivadas de g em T. Assim, é possível estender o fluxo de Ricci em $[0,T]$. Começando um novo fluxo com a condição inicial em T temos que a extensão vale para $[0, T+\delta)$, para algum $\delta > 0$ pelo Teorema 4.4, de onde $[0,T)$ não é o intervalo maximal de solução do fluxo. ■

4.6 Fluxo de Ricci como um fluxo gradiente

Os matemáticos Robert Bryant e Richard Hamilton estabeleceram que a equação do fluxo de Ricci em dimensão maior que 2 não é uma equação gradiente de nenhum funcional em $\mathfrak{Met}$, o espaço vetorial das formas bilineares simétricas positiva definidas em uma variedade riemanniana fechada (M, g) com o produto interno

$$(h, h') := \int_M g^{ik} g^{jl} h_{ij} h'_{kl} d\mu(g).$$

Não existe uma única referência para esse fato. A ideia é entender os chamados **Ricci solitons**, não abordados nesta dissertação. Para uma discussão de trabalhos recentes sobre esse fluxo, recomendamos [Cao06].

Uma das maiores contribuições provenientes dos trabalhos de Perelman foi considerar um funcional com uma dependência extra atribuída, no caso, considera-se o espaço $\mathfrak{Met} \times C^\infty(M)$, o que torna o fluxo não mais uma única equação, mas um sistema de equações que mostraremos ser equivalente, em um sentido análogo ao fornecido pelo DeTurck trick, à equação do fluxo de Ricci. Isso contorna o problema exposto por Hamilton e Bryant de maneira satisfatória.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. A **derivada de Gâteaux** de uma função[2] $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ num ponto $u \in \mathcal{H}$ é a transformação linear $d\mathcal{E}(u)$ contínua tal que

$$d\mathcal{E}(u)(v) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\mathcal{E}(u + tv) - \mathcal{E}(u)).$$

Mais geralmente pode-se definir a derivada de $\mathcal{E}$ no **sentido de Fréchet**, que segue analogia similar com a teoria de funções de varias variáveis em $\mathbb{R}^n$, estando a derivada de Fréchet para a derivada de Gâteaux como a derivada total está para a derivada direcional. Precisamente, $\mathcal{E}$ será diferenciável no sentido de Fréchet em u se para qualquer $v \in \mathcal{H}$ tivermos

$$\mathcal{E}(u + tv) - \mathcal{E}(u) - d\mathcal{E}(u)(tv) = o(\|tv\|),$$

onde $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} o(\|tv\|) = 0$.

Mostra-se, em particular, que um funcional $\mathcal{E}$ diferenciável em um ponto $u \in \mathcal{H}$ no sentido de Gâteaux admite derivada no sentido de Fréchet se a dependência de $d\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ for contínua (como aplicação linear, isto é, se $d\mathcal{E}$ define um operador linear limitado) em um aberto contendo u.

Formalmente, o **gradiente** de um funcional definido em um espaço de Hilbert é definido como:

Definição 4.2. *Se $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ é uma aplicação suave de $\mathcal{H}$, um espaço de Hilbert, dizemos que $\nabla\mathcal{E}$ é o **gradiente** do funcional $\mathcal{E}$ se $\nabla\mathcal{E}$ for a única aplicação linear $\nabla\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$*

[2] Esta definição vale para aplicações gerais entre espaços de Banach.

tal que o funcional linear

$$d\mathcal{E}(u) : \mathcal{H} \to \mathbb{R},$$

com d denotando a derivada no ***sentido de Gâteaux****, é representado*[3] *por*

$$d\mathcal{E}(u)(v) = \langle \nabla \mathcal{E}(u), v \rangle, \tag{4.65}$$

para cada $u \in \mathcal{H}$.

Dada a devida introdução, de modo ingênuo, um **fluxo gradiente** é a solução $\phi : I \to \mathcal{H}$ do problema

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = -\nabla \mathcal{E}(\phi(t)), \tag{4.66}$$

onde I é um subconjunto aberto da reta. O adjetivo *ingênuo* apenas enfatiza que em verdade um **fluxo** é uma aplicação $\phi : I \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ de modo que para cada t fixo a aplicação $\phi_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é suave no sentido de Gâteaux, ou Fréchet, a depender da análise.

O exemplo clássico de fluxo gradiente é obtido a partir do funcional de Dirichlet

$$\mathcal{E}(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx.$$

Entretanto, este funcional já traz problemas como nossa formalização de fluxos gradientes. A função u no domínio deve pertencer a $L^2 \cap C^\infty(\mathbb{R})$, que não é completo, então, não há como garantir que que a derivada deste funcional seja representada por um vetor pelo Teorema de Riesz. No entanto, a discussão lançada anteriormente é só uma motivação para trabalhar com fluxos gradientes em contextos mais gerais, porque nas aplicações não é razoável esperar que, a princípio, os funcionais estejam sempre definidos em espaços de Hilbert. Note pois que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{E}(u + tv) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u + t\nabla v|^2 dx,$$

o que permite concluir

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{E}(u + tv) = -\int_{\mathcal{R}^n} \langle \Delta u, v \rangle, \tag{4.67}$$

de onde o fluxo gradiente associado a esta equação é

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \Delta u,$$

a clássica equação do calor.

Se considerarmos uma variedade riemanniana fechada $(M, \langle , \rangle)$ e o funcional de Hilbert-Einstein $\mathcal{E} : \mathfrak{Met} \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{E}(g) := \int_M S d\mu(g),$$

[3] Pelo teorema da representação de Riesz

podemos calcular sua derivada de Gâteaux em g na direção de h:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{E}(g+th) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_M S(g+th)d\mu(g+th),$$

obtendo

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathcal{E}(g+th) = \int_M \langle\frac{S}{2}g - \mathrm{Ric}(g), h\rangle d\mu(g).$$

Assim, podemos considerar o fluxo gradiente:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \frac{S}{2}g - \mathrm{Ric}(g). \tag{4.68}$$

Se nos restringirmos à dimensão 2 e denotarmos por K a curvatura gaussiana da métrica g, então

$$Sg = 2Kg,\ \mathrm{Ric}(g) = Kg,$$

de onde concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = \frac{S}{2}g - \mathrm{Ric}(g) = 0,$$

recuperamos que soluções estacionárias do Funcional de Hilbert-Einstein são soluções das equações de campo de Einstein no vácuo já que $\frac{S}{2}g - \mathrm{Ric}(g) = \mathcal{G}$, onde $\mathcal{G}$ é o tensor de Einstein.

Em dimensão maior que 2 não se espera que a equação (4.68) tenha solução haja vista que segundo esta equação, a curvatura escalar S evoluiria no fluxo de acordo com

$$\frac{\partial}{\partial t}S = -(\frac{n}{2}-1)\Delta S + |\mathrm{Ric}|^2 - \frac{1}{2}S^2, \tag{4.69}$$

que é uma equação do calor do tipo **backward**, não admitindo soluções para $t > 0$.

A ideia de Perelman foi considerar a aplicação $\mathcal{F}$ em $\mathfrak{Met}\times C^\infty(M)$ definida por

$$\mathcal{F}(g,f) := \int_M (S + |\nabla f|^2)e^{-f}d\mu(g), \tag{4.70}$$

onde S é a curvatura escalar da conexão de Levi-Civita associada à métrica g. A função f é chamada de **dilatação**.

Mostra-se [AH10, Capítulo 10, Página 164, Remark 10.3] que esta aplicação $\mathcal{F}$ é invariante por difeomorfismos e satisfaz

$$\mathcal{F}(c^2g, f+b) = e^{n-2}e^{-b}\mathcal{F}(g,f),\ \forall c, b > 0.$$

A próxima proposição tem uma demonstração direta, que omitiremos, podendo ser encontrada em [AH10, Capítulo 10, Página 165, Proposition 10.4].

Proposição 4.6. *Se M é uma variedade fechada, então a variação de $\mathcal{F}$ é dada por*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(g,f) = -\int_M \langle \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}(f), \frac{\partial g}{\partial t}\rangle e^{-f}d\mu + \int_M (\frac{1}{2}\operatorname{tr}_g\frac{\partial}{\partial t}g - \frac{\partial}{\partial t}f)(2\Delta f - |\nabla f|^2 + S\rangle e^{-f}d\mu. \tag{4.71}$$

Gostaríamos de variações onde o volume é preservado.

Corolário 4.7. *Assuma que f e g são tais que $\frac{d}{dt}(e^{-f}d\mu(g)) = 0$. Então, a equação (4.71) tem a forma*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(g,f) = -\int_M \langle \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}(f), \frac{\partial g}{\partial t}\rangle e^{-f}d\mu(g).$$

Fixada uma medida $d\omega$ em M, isto é, dada uma forma de volume $d\omega$ em M podemos definir o volume de qualquer boreliano em M por

$$\omega(U) := \int_U d\omega.$$

Assim, considere o mapa $X : \mathfrak{Met} \to \mathfrak{Met} \times C^\infty(M)$ dado por

$$g \to (g, \log \frac{d\mu(g)}{d\omega}).$$

Gostaríamos de obter a solução do fluxo de Ricci como solução do fluxo gradiente de um certo funcional. Note que a composição $\mathcal{F}^m := \mathcal{F} \circ X : \mathfrak{Met} \to \mathbb{R}$ define um funcional em $\mathfrak{Met}$ com a forma

$$\mathcal{F}^m(g) = \int_M \Big(S + |\nabla \log \frac{d\mu}{d\omega}|^2\Big)d\omega.$$

Aqui vale percerber que $f = \log \frac{d\mu}{d\omega}$, de onde $d\omega = e^{-f}d\mu(g)$. Mostremos que este é o funcional procurado.

Como $\frac{d}{dt}d\omega = \frac{d}{dt}(e^{-f}d\mu(g)) = 0$, pelo Corolário 4.7 a variação de $\mathcal{F}^m$ é dada por

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}^m = -\int_M \langle \mathrm{Ric}(g) + \mathrm{Hess}(f), \frac{\partial g}{\partial t}\rangle d\omega,$$

onde $f = \log \frac{d\mu(g)}{d\omega}$.

Segue portanto que

$$\nabla \mathcal{F}^m(g) = -(\mathrm{Ric}(g) + \mathrm{Hess}_g(f)).$$

Daí, se considerarmos $g = g(t)$ como solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2(\mathrm{Ric}(g) + \mathrm{Hess}_g(f)), \\ \frac{\partial f}{\partial t} = -2(S + \Delta f), \end{cases} \tag{4.72}$$

onde a primeira equação é o fluxo gradiente e a segunda vem de pedirmos volume constante, teríamos que o funcional $\mathcal{F}^m$ evoluiria segundo a equação,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}^m = 2\int_M |\mathrm{Ric}(g) + \mathrm{Hess}(f)|^2 e^{-f}d\mu(g) \geq 0, \tag{4.73}$$

e g poderia ser vista como um fluxo gradiente do funcional $\mathcal{F}^m$.

Surgem duas questões:

1. Este fluxo tem solução?

2. Como isso se relaciona ao fluxo de Ricci?

A primeira equação do sistema (4.72) é similar a do fluxo de Ricci e à primeira vista não há indicativos de que este sistema tem solução. Entretanto, mostraremos que este pode ser modificado, via difeomorfismo que depende do parâmetro t, no sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g), \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f + |\nabla f|^2 - S. \end{cases} \tag{4.74}$$

Neste caso, podemos sim garantir solução para o sistema (4.74) notando que:

1. A primeira equação é a equação do fluxo de Ricci que, como mostramos, tem solução com condição inicial dada em tempo curto pelo Teorema 4.4.

2. Se definirmos
$$\Box^* := -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + S,$$
e fizermos a mudança $u = e^f$ teremos que
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f + |\nabla f|^2 - S \Leftrightarrow \Box^* u = 0.$$

3. O operador $\Box^*$ é um operador do calor no sentido contrário, isto é, a equação $\Box^* u = 0$ é uma equação do calor do tipo **backward**. Se impormos condição final, ou seja, no tempo máximo de defingção do fluxo de Ricci, esta equação tem solução até $t = 0$.

Assim, resta mostrar que existe solução de (4.72) se, e somente se, existe solução de (4.74). Para tanto, sejam $g(t), f(t)$ soluções de (4.74) e considere o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial t} = -\nabla f(\varphi_t, t), \\ \varphi_t(0) = I, \end{cases} \tag{4.75}$$

onde ∇ é a conexão da métrica $g(t)$ e I é a identidade de M. Defina $\hat{g} := \varphi_t^* g$ e lembre que $\varphi_t^* \,\mathrm{Ric}(g) = \mathrm{Ric}(\hat{g})$ uma vez que a aplicação $\varphi_t : (M, \hat{g}) \to (M, g)$ é, por construção, uma isometria. Como $-\mathcal{L}_{\nabla f} g = 2\,\mathrm{Hess}(f)$, onde $\mathcal{L}$ denota a derivada de Lie, então

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = \varphi_t^* \frac{\partial g}{\partial t} - 2\,\mathrm{Hess}(f).$$

Mas $\dfrac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g)$, de onde

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(\hat{g}) - 2\,\mathrm{Hess}(f).$$

Por fim, note que

$$\frac{\partial(f\circ\varphi_t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(\varphi_t,t) - \mathcal{L}_{\nabla f} f(\varphi_t,t) \tag{4.76}$$

$$= \Big((-\Delta_g f + |\nabla f|^2 - S_g) - |\nabla f|^2\Big)(\varphi_t,t) \tag{4.77}$$

$$= -\Delta_{\hat{g}}(f\circ\varphi_t) - S_{\tilde{g}}. \tag{4.78}$$

Assim, conseguimos construir uma solução de (4.72) sempre que temos uma solução de (4.74). Uma conta análoga, porém considerando ∇f e não mais $-\nabla f$, mas com mesmo procedimento, permite transitar de uma solução de (4.74) para uma solução de (4.72).

Teorema 4.7. *Dada g_0 uma métrica arbitrária em uma variedade fechada M, existe $T>0$ e uma n-forma ω, tal que existe solução do fluxo gradiente associado ao funcional*

$$\mathcal{F}^m(g) = \int_M (S + |\nabla f|^2)\omega, \tag{4.79}$$

onde f é determinada por $\omega = e^{-f} d\mu(g)$. Ainda mais, este fluxo gradiente é precisamente o fluxo de Ricci modificado por um difeomorfismo dependente de t.

Capítulo 5

Teorema de Calabi-Yau e Métricas de Kähler-Einstein via fluxos de Ricci

5.1 Conteúdo e objetivos deste capítulo

Este capítulo tem por objetivo utilizar as estimativas derivadas do trabalho original de Yau a fim de apresentar outra prova para o Teorema de Calabi-Yau e garantir a existência de métricas de Kähler-Einstein em variedades complexas compactas com primeira classe de Chern negativa ou nula, seguindo as referências [Cao85, San12]

Ao fim, discutiremos de maneira sucinta levantamentos recentes sobre por que este problema no caso de primeira classe de Chern positiva.

5.2 Como provar o Teorema de Calabi-Yau usando fluxos de Ricci

Em [Ham82], Hamilton provou que qualquer 3-variedade compacta (M, g) com curvatura de Ricci positiva admite uma métrica de Einstein com curvatura escalar positiva. Para tanto, ele considerou a equação de evolução

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial t}(t) = -2\tilde{R}_{ij}(t) + \dfrac{2}{3} r \tilde{g}_{ij}(t), \\ \tilde{g}_{ij}(0) = g_{ij}, \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $r = \dfrac{1}{vol(M)} \displaystyle\int_M S_{\tilde{g}} d\mu(\tilde{g})$.

Este resultado junto do Teorema 1.6 mostrou que o fluxo de Ricci era a alternativa natural para demonstração da conjectura de Poincaré. De fato, estes dois resultados mostram que 3-variedades com curvatura de Ricci positiva admite uma métrica de curvatura seccional constante e positiva.

Em seu trabalho, Hamilton garantiu existência de solução em $M \times [0, \infty]$ para o problema (5.1), e mostrou que $\frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial t}(t) \to 0$ na topologia suave quando $t \to \infty$. Assim, a métrica limite tem a propriedade

$$\tilde{R}_{ij}(\infty) = \frac{1}{3} r \tilde{g}_{ij}(\infty), \tag{5.2}$$

satisfazendo o procurado já que $r > 0$.

Utilizaremos o mesmo tratamento para prova do Teorema 3.2. Em verdade, a equação (5.1) é uma variante da equação do fluxo de Ricci. Dada uma variedade de Kähler (M, g, ω), a versão complexa do fluxo de Ricci é a equação

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t}(t) = -\tilde{\rho}(t), \\ \tilde{\omega}(0) = \omega, \end{cases} \tag{5.3}$$

onde $\tilde{\rho}(t)$ é a forma de Ricci de $\tilde{g}(t)$, a métrica kähleriana associada à forma de Kähler $\tilde{\omega}(t)$. A equação (5.3) tem o nome de **Fluxo de Kähler-Ricci**. Em coordenadas holomorfas esta equação (5.3) se escreve como

$$\frac{\partial \tilde{g}_{j\bar{k}}}{\partial t} = -\tilde{R}_{j\bar{k}}(t), \tag{5.4}$$

onde $\tilde{R}_{j\bar{k}}(t)$ é o tensor de Ricci de $\tilde{g}_{j\bar{k}}(t)$.

Resultados sobre existência em tempo curto e estimativas para evolução dos tensores associados à $\tilde{g}_{j\bar{k}}$ podem ser vistos em [SW12] e são inteiramente análogos aos que apresentamos no Capítulo 4 para o fluxo de Ricci clássico. Utilizaremos a ideia de Hamilton ao modificar a equação do fluxo de Ricci para o caso riemanniano, ao fornecer uma equação modificada do fluxo de Kähler-Ricci para fornecer uma demonstração do Teorema de Calabi-Yau 3.2. Mostramos:

Teorema 5.1 (Cao-Calabi-Yau)**.** *Seja M uma variedade de Kähler compacta de dimensão complexa n com métrica de Kähler $g_{j\bar{k}}$. Então, para qualquer $(1,1)$ forma $\rho' = \frac{i}{2\pi} T_{j\bar{k}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ que represente a primeira classe de Chern $c_1(M)$ de M, a solução do problema em $t = \infty$*

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = -\tilde{\rho}(t) + \rho', \tag{5.5}$$

ou ainda, coordenadas

$$\frac{\partial \tilde{g}_{j\bar{k}}}{\partial t}(t) = -\tilde{R}_{j\bar{k}}(t) + T_{j\bar{k}} \tag{5.6}$$

tem forma de Ricci ρ'.

Gostaríamos de re-escrever a equação (5.6) sem a dependência de ρ'. Para tanto, considere (M, g) uma variedade Kähler compacta com forma de Ricci ρ. Seja ρ' uma $(1,1)$-forma cohomologa a ρ, isto é, seja ρ' um outro representante da primeira classe

de Chern de M. Em coordenadas holomorfas, $\frac{i}{2\pi}R_{j\bar{k}}dz^j \wedge d\bar{z}^k$, $\frac{i}{2\pi}T_{j\bar{k}}dz^j \wedge d\bar{z}^k$. Estamos interessados em garantir solução e todo tempo do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{j\bar{k}}(t) = -\tilde{R}_{j\bar{k}}(t) + T_{j\bar{k}}, \\ \tilde{g}_{j\bar{k}}(0) = g_{j\bar{k}}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Utilizando o Lema 2.2 temos que existe uma função suave f definida em $M \times [0, T)$ tal que

$$R_{j\bar{k}} = T_{j\bar{k}} - \partial_{j\bar{k}} f.$$

Para cada tempo t, considere uma métrica de Kähler $\tilde{\omega}(t) = i\tilde{g}_{j\bar{k}}(t)dz^j \wedge d\bar{z}^k$ na mesma classe de cohomologia de $\omega = ig_{j\bar{k}}dz^j \wedge d\bar{z}^k$. Novamente, pelo Lema 2.2 temos que existe u (agora com dependência também temporal, porque para cada t fixo existe uma função diferente) tal que

$$\tilde{g}_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u.$$

Então, o problema (5.7) é convertido em:

$$\begin{cases} \partial_{j\bar{k}}\dfrac{\partial}{\partial t}u = -\tilde{R}_{j\bar{k}} + R_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} f, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Como (veja a equação (2.125))

$$\tilde{R}_{j\bar{k}} = -\partial_{j\bar{k}} \log\det \tilde{g}_{j\bar{k}} = -\partial_{j\bar{k}} \log\det(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u), \tag{5.9}$$

$$R_{j\bar{k}} = -\partial_{j\bar{k}} \log\det g_{j\bar{k}} \tag{5.10}$$

então,

$$\partial_{j\bar{k}}\frac{\partial}{\partial t}u = \partial_{j\bar{k}}\{\log\det(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u) - \log\det g_{j\bar{k}} + f\}. \tag{5.11}$$

Note que

$$\partial_{j\bar{k}}\{\frac{\partial}{\partial t}u - \log\det(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u) + \log\det g_{j\bar{k}} - f\} = 0, \tag{5.12}$$

daí, como a variedade é compacta,

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \log\det(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u) + \log\det g_{j\bar{k}} - f = \phi(t) \tag{5.13}$$

onde ϕ só depende do tempo, sendo determinada por

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \log\det(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}}) - \log\det g_{j\bar{k}} + f + \phi(t).$$

De fato,

$$\log\det(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u) - \log\det g_{j\bar{k}} = \log\frac{\tilde{\omega}^n}{\omega^n}, \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u - f = \phi(t) + \log\frac{\tilde{\omega}^n}{\omega^n}, \tag{5.15}$$

$$\exp\left(\frac{\partial}{\partial t}u - f\right) = \exp(\phi(t))\frac{\tilde{\omega}^n}{\omega^n}. \tag{5.16}$$

Concluímos que

$$\exp\left(\frac{\partial}{\partial t}u - f\right)\omega^n = \exp(\phi(t))\tilde{\omega}^n \tag{5.17}$$

$$\int_M \exp(\frac{\partial}{\partial t}u - f)d\mu(g) = \exp(\phi(t))vol(M). \tag{5.18}$$

No que segue consideraremos $\phi(t) = 0$, e portanto, buscamos solução para o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \log\det\left(g_{j\bar{k}} + \partial^2_{j\bar{k}}u\right) - \log\det g_{j\bar{k}} + f, \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{5.19}$$

com solução definida em $[0,T)$ onde T é máximo valor para o qual

$$\tilde{g}_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}}u \tag{5.20}$$

é positiva definida, definindo portanto uma métrica Kähler em M para todo tempo $t \in [0,T)$.

Observação 5.1. *É importante notar que a equação (5.20) garante ainda que se a solução limite ($t = \infty$) existe, então ela ainda sim é cohomóloga à forma de Kähler original, como requerido pela conjectura de Calabi.*

5.3 Solução para todo tempo

A equação (5.19) é uma equação diferencial parcial não linear parabólica, diferentemente do Fluxo de Ricci, admitindo, portanto, solução em tempo curto. Usaremos estimativas a priori para mostrar que de fato $T = \infty$, isto é, a solução existe e define uma métrica de Kähler para todo tempo. Recordamos algumas definições

$$\text{O operador de Laplace no caso Kähler,} \quad \Delta := g^{j\bar{k}}\partial^2_{j\bar{k}}, \tag{5.21}$$

$$\text{O operador de D'Lambert,} \quad \Box := \tilde{\Delta} - \frac{\partial}{\partial t}, \tag{5.22}$$

onde $\tilde{\Delta}$ é o operador de Laplace na métrica $\tilde{g}$.

Se diferenciarmos a equação (5.19) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \tilde{g}^{j\bar{k}}\partial^2_{j\bar{k}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \tilde{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{5.23}$$

O nosso objetivo será o seguinte: mostraremos que podemos estender o intervalo $[0,T)$ para $[0,T]$. Feito isso, pode-se considerar o problema de valor inicial com condição em T. Aumentaria-se portanto um pouco mais o intervalo de solução já que se trata de uma EDP parabólica. Ou seja, existiria $\epsilon > 0$ tal que a solução do problema se dá em

$[0, T+\epsilon]$. Pode-se realizar este procedimento iterativamente de modo a concluir que o domínio na solução é dado por $[0, \infty]$. Mais ainda, isto implica na existência de uma sequência de funções $u(x, t_n)$, onde t_n são tomados como os extremos do intervalo em cada acréscimo, de onde $t_n \to \infty$. Assim, pode-se considerar uma função limite $u(x, \infty)$, onde $u(x, t_n) \to u_\infty(x)$ na topologia suave definida em M. A solução estará portanto definida em $[0, \infty]$.

Faremos isso começando por tentar limitar uniformemente em $M \times [0, T)$ a função u e suas derivadas de terceira ordem. Isto implica que $u \in C^{2,\alpha}(M \times [0, T))$. Usaremos o operador $\Box$ que é de ordem 2 para mostrar via teoria de regularidade de EDP's elípticas que $u \in C^{3,\alpha}(M \times [0, T))$. Repetiremos o mesmo argumento para concluir que $u \in C^\infty(M \times [0, \infty])$.

Começamos por tentar limitar o laplaciano de u. Será importante obter uma limitação atemporal. Não provaremos os próximos dois resultados que decorrem das estimativas de Yau.

Lema 5.1. *Existem constantes positivas C_0 e C_1 tais que*

$$0 < n + \Delta u \leq C_1 \exp\left(C_0\left(u - \inf_{M\times[0,T)} u\right)\right), \ \forall t \in [0, T). \tag{5.24}$$

Para as estimativas a priori é pode ser interessante considerar a função

$$v := u - \bar{u}, \tag{5.25}$$

onde $\bar{u} := \dfrac{1}{vol(M)} \displaystyle\int_M u d\mu(g)$, pois v tem integral nula em M.

Lema 5.2. *Existem constantes positivas C_2, C_3 tais que*

$$\sup_{M\times[0,T)} v \leq C_2, \tag{5.26}$$

$$\sup_{M\times[0,T)} \int_M |v| d\mu(g) \leq C_3. \tag{5.27}$$

Lema 5.3. *Existe uma constante $C_4 > 0$ tal que*

$$\sup_{M\times[0,T)} |v| < C_4. \tag{5.28}$$

Demonstração. Lembremos que

$$\omega = \frac{i}{2} g_{j\bar{k}} dz^j d\bar{z}^k, \tag{5.29}$$

$$\tilde{\omega} = \frac{i}{2} \tilde{g}_{j\bar{k}} dz^j d\bar{z}^k, \tag{5.30}$$

e que

$$d\mu(g) = \det g_{j\overline{k}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{i}{2} dz^j \wedge d\overline{z}^k \right) = \frac{1}{n!} \omega^n, \tag{5.31}$$

$$d\mu(\tilde{g}) = \det \tilde{g}_{j\overline{k}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{i}{2} dz^j \wedge d\overline{z}^k \right) = \frac{1}{n!} \tilde{\omega}^n. \tag{5.32}$$

Como

$$d\mu(\tilde{g}) = \exp\left(\frac{\partial u}{\partial t} - f \right) d\mu(g), \tag{5.33}$$

temos que para $p > 1$, se renormalizarmos v de tal forma que $\sup_M v \leq -1$, o que é possível pelo Lema 5.2, obtemos

$$-\frac{1}{n!} \int_M \frac{(-v)^{p-1}}{p-1} (\omega^n - \tilde{\omega}^n) = -\int_M \frac{(-v)^{p-1}}{p-1} (d\mu(g) - d\mu(\tilde{g})), \tag{5.34}$$

$$= \int_M \frac{(-v)^{p-1}}{p-1} \left(\exp(\frac{\partial u}{\partial t} - f) - 1 \right) d\mu(g). \tag{5.35}$$

Por outro lado, como

$$-\frac{1}{n!} \int_M \frac{(-v)^{p-1}}{p-1} (\omega^n - \tilde{\omega}^n) = -\int_M \frac{(-v)^{p-1}}{p-1} \left(\omega^n - \left(\omega + \frac{i}{2} \partial\overline{\partial} v \right)^n \right), \tag{5.36}$$

$$= \int_M \frac{(-v)^{p-1}}{p-1} \left(\frac{i}{2} \partial\overline{\partial} v \right) \wedge \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \tilde{\omega}^{n-j-1}, \tag{5.37}$$

$$= \int_M (-v)^{p-2} \left(\frac{i}{2} \partial v \wedge \overline{\partial} v \right) \wedge \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \tilde{\omega}^{n-j-1}, \tag{5.38}$$

$$\geq \int_M (-v)^{p-2} \left(\frac{i}{2} \partial v \wedge \overline{\partial} v \right) \wedge \omega^{n-1}, \tag{5.39}$$

onde a última desigualdade segue de (3.10).

Como $\left(\frac{i}{2} \partial v \wedge \overline{\partial} v \right) \wedge \omega^{n-1} = |\nabla v|^2 d\mu(g)$, onde $|\nabla v|^2 = g^{j\overline{k}} \frac{\partial v}{\partial z^j} \frac{\partial v}{\partial \overline{z}^k}$, obtemos

$$-\frac{1}{n!} \int_M \frac{(-v)^{p-1}}{p-1} (\omega^n - \tilde{\omega}^n) d\mu(g) \geq \int_M (-v)^{p-2} |\nabla v|^2 d\mu(g). \tag{5.40}$$

Uma vez que

$$(-v)^{p-2} |\nabla v|^2 = 4p^{-2} |\nabla (-v)^{p/2}|^2, \tag{5.41}$$

segue da equação (5.40) que

$$\int_M |\nabla (-v)^{p/2}|^2 d\mu(g) \leq C \frac{p^2}{p-1} \int_M (-v)^{p-1} d\mu(g). \tag{5.42}$$

Daí,

$$\|(-v)^{p/2}\|_{H^1} = \int_M |\nabla(-v)^{p/2}|^2 d\mu(g) + \int_M (-v)^p d\mu(g), \tag{5.43}$$

$$\leq C\frac{p^2}{p-1}\int_M (-v)^p d\mu(g), \tag{5.44}$$

$$\leq Cp\int_M (-v)^p d\mu(g), \quad p >> 1. \tag{5.45}$$

Segue da **Desigualdade de Sobolev** Teorema A.1 com $k = l = 0$, $q = \dfrac{2n}{n-1}$, $r = \dfrac{1}{2}$ que

$$\|(-v)^{p/2}\|^2_{L^{\frac{2n}{n-1}}} \leq C\|(-v)^{p/2}\|^2_{L^2}, \tag{5.46}$$

porém, como $\displaystyle\int_M v d\mu(g) = 0$, segue que de fato,

$$\|(-v)^{p/2}\|^2_{L^{\frac{2n}{n-1}}} \leq C\|(-v)^{p/2}\|^2_{H^1}. \tag{5.47}$$

Logo, combinando as equações (5.42) e (5.47) e observando que $\|v\|^p_{L^{\frac{np}{n-1}}} = \|v\|^p_{L^{\frac{np}{n-1}}}$ obtemos

$$\|v\|^p_{L^{\frac{np}{n-1}}} \leq Cp\|v\|^p_{L^p}, \quad p \geq 1. \tag{5.48}$$

Façamos $p = \gamma^j$, onde $\gamma = \dfrac{n}{n-1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Por indução em j obtemos

$$\|v\|_{L^{\gamma_j+1}} \leq \tilde{C}^{\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{\gamma^k}}\gamma^{\sum_k \frac{k}{\gamma_k}} C_3. \tag{5.49}$$

Fazendo $j \to \infty$ obtemos

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C_4. \tag{5.50}$$

Como C_4 não depende de t, então

$$\sup_{M\times[0,T)} |v| \leq C_4. \tag{5.51}$$

■

Podemos combinar os Lemas 5.1, 5.2 e 5.3 para concluir que

$$0 < n + \Delta v = n + \Delta u, \tag{5.52}$$

$$\leq C_1 \exp\left(C_o\left(u - \inf_{M\times[0,T)} u\right)\right), \tag{5.53}$$

$$\leq C_1 \exp\left(C_o\left(v - \inf_{M\times[0,T)} v\right)\right), \tag{5.54}$$

$$\leq C_1 \exp\left(C_0 \sup_{M\times[0,T)} v\right) \exp\left(C_0 \sup_{M\times[0,T)} |v|\right), \tag{5.55}$$

$$\leq C_5, \tag{5.56}$$

já que $-\inf_{M\times[0,T)} v = \sup_{M\times[0,T)} -v \leq \sup_{M\times[0,T)} |v|$.

Teorema 5.2. *As derivadas espaciais até terceira ordem de v são uniformemente limitadas em $M \times [0,T)$.*

Ideia da demonstração. Como $n + \Delta u$ é limitado, então $1 + \partial^2_{i\bar{i}} u$ é limitado por cima para todo i. Em particular, $\prod_{i=1}^{n}(1 + \partial^2_{i\bar{i}} u)$ é limitado por cima. Daí, existem constantes A, B tais que

$$A \leq 1 + \partial^2_{i\bar{i}} u \leq B, \forall i. \tag{5.57}$$

Disso segue em particular que as métricas $\tilde{g}_{j\bar{k}}(t)$ e $g_{j\bar{k}}$ são equivalentes. De fato, basta olhar a equação $\tilde{g}_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u$ e lembrar que $g^{j\bar{k}} \partial^2_{j\bar{k}} u = \Delta u$ e $g^{j\bar{k}}$ não tem dependência temporal.

Para provar as estimativas de terceira ordem para função v, Yau considerou a quantidade

$$F = g^{i\bar{r}} g^{\bar{j}s} g^{k\bar{t}} v_{i\bar{j}k} v_{\bar{r}s\bar{t}}. \tag{5.58}$$

Segue das suas estimativas que

$$\Box(F + C_8 \Delta v) \geq C_9 F - C_{10}, \tag{5.59}$$

onde C_8, C_9 e C_{10} são constantes positivas que podem ser estimadas. No ponto de máximo $p(t)$ de $S + C_8 \Delta v$ no tempo t, Yau mostra que

$$C_9 F - C_{10} \leq 0, \tag{5.60}$$

e portanto,

$$C_9(F + C_8 \Delta v) \leq C_{10} + C_8 C_9 \Delta v, \tag{5.61}$$

em $p(t)$. Segue portanto que $\sup_{M \times [0,T)} F + C_8 \Delta v$ é limitado. Usando novamente que Δv é limitado em $M \times [0,T)$ concluímos que existe $\tilde{C} > 0$ tal que $\sup_{M \times [0,T)} F \leq \tilde{C}$, o que conclui o afirmado. ■

Já discutimos na prova do Teorema anterior que as métricas $\tilde{g}_{j\bar{k}}$ e $g_{j\bar{k}}$ são equivalentes. Enunciamos este resultado como um Lema para melhor referenciar mais a frente.

Lema 5.4. *$\tilde{g}_{j\bar{k}} \in C^{0,\alpha}(M \times [0,T))$ se $v \in C^{2,\alpha}(M \times [0,T))$. Em particular $\tilde{g}_{j\bar{k}}(t)$ é uniformemente equivalente a $g_{j\bar{k}}$.*

Lema 5.5. *Existe uma constante $C > 0$ tal que $\sup_{M \times [0,T)} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq C$.*

Demonstração. Note que a equação (5.19) é equivalente à

$$\exp(\frac{\partial u}{\partial t} - f)\omega^n = \tilde{\omega}^n \tag{5.62}$$

$$\max_M \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| - \max_M |f| \leq \max_M \left|\frac{\partial u}{\partial t} - f\right| \leq \max_M \left|\log\left(\frac{\tilde{\omega}^n}{\omega^n}\right)\right| \leq \max_M \left|\log\det\left(g_{j\bar{k}} + \partial^2_{j\bar{k}} u\right)\right|. \tag{5.63}$$

$$\max_M \left|\log\det\left(g_{j\bar{k}} + \partial^2_{j\bar{k}} u\right)\right| \leq \max_M \left|\det\left(g_{j\bar{k}} + \partial^2_{j\bar{k}} u\right)\right| \leq \max_M \prod_{i=1}^{n} |1 + \partial^2_{i\bar{i}} u| \leq B^n, \tag{5.64}$$

pelo Teorema 5.2.

■

Uma vez que utilizamos as estimativas de Yau para obter limitações atemporais para u e suas terceiras derivadas, a principal diferença entre a demonstração com fluxos de Ricci e a prova clássica se dá ao notar que na prova clássica as estimativas a priori são obtidas com o intuito de utilizar o método da continuidade. Aqui, estamos interessamos em utilizar as estimativas a priori e as estimativas de Schauder para garantir existência de solução do fluxo em $[0, \infty]$.

Teorema 5.3 (Estimativas de Schauder)**.** *Seja M uma variedade riemanniana compacta e $E, \tilde{E}$ fibrados vetoriais sobre M de mesma dimensão. Seja P um operador linear elíptico de ordem k entre E e $\tilde{E}$. Seja $\alpha \in (0,1)$ e $l \geq 0$ um inteiro. Suponha que os coeficientes de P pertençam a $C^{l,\alpha}$ e que $P(s) = \tilde{s}$ para algum $s \in C^{k,\alpha}(V)$ e $\tilde{s} \in C^{l,\alpha}(W)$. Então, $s \in C^{k+l,\alpha}(V)$ e*

$$\|s\|_{C^{k+l,\alpha}} \leq C\left(\|\tilde{s}\|_{C^{l,\alpha}} + \|s\|_{C^0}\right), \tag{5.65}$$

onde C independe de s e $\tilde{s}$.

Teorema 5.4. *Seja u uma solução de (5.19) com intervalo máximo de solução $[0, T)$ e seja $v := u - \bar{u}$. Então, a norma C^∞ de v é uniformemente limitada para todo $t \in (0, T)$, e consequentemente, $T = \infty$. Ainda mais, existe uma sequência de tempos $t_n \to \infty$ tal que $v(x, t_n) \to v_\infty(x)$ na topologia suave em M quando $n \to \infty$.*

Demonstração. Considere o operador $\square$. Verifica-se que

$$\square\left(\frac{\partial u}{\partial z^l}\right) = g^{j\bar{k}} \frac{\partial}{\partial z^l}(g_{j\bar{k}}) - \tilde{g}^{j\bar{k}} \frac{\partial}{\partial z^l}(g_{j\bar{k}}). \tag{5.66}$$

Pelo Lema 5.4 temos que $\square$ tem coeficientes em $C^{0,\alpha}(M \times [0,T))$. Ainda mais, o lado direito da equação (5.66) tem limitação em $C^{0,\alpha}(M \times [0,T))$. Como pelo Teorema 5.2 temos que as derivadas até terceira ordem de u são uniformemente limitadas em $M \times [0,T)$, então $u \in C^{2,\alpha}(M \times [0,T))$, de onde $\dfrac{\partial u}{\partial z^l} \in C^{1,\alpha}(M \times [0,T))$. Note que estamos nas hipóteses do Teorema de Schauder 5.3 com $P = \square$. Daí, segue que dado que a ordem de P é 2, então $\dfrac{\partial u}{\partial z^l} \in C^{2,\alpha}(M \times [0,T))$. Podemos repetir o processo iterativamente, já que agora os

coeficientes e o lado direito da equação (5.66) pertencem a $C^{1,\alpha}(M)$, pela equação (5.20). Isto permite concluir que $v \in C^{\infty}(M \times [0,T))$. Juntando essa limitação e o Lema 5.5 podemos estender o domínio de u para $M \times [0,T]$. De fato, tal Lema garante que a função não explode ao tomar $t \to T$. Para ver isso, tome $t_n \to T$. Note que tal sequência é de Cauchy pois é convergente. Ainda mais,

$$\sup_M |u(t_i) - u(t_j)| \leq \int_{t_i}^{t_j} \sup_M \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| dt \leq C|t_i - t_j| \to 0, \ i,j \to \infty. \tag{5.67}$$

Logo, $\{u(t_i)\}$ é de Cauchy na norma uniforme, de onde existe o limite $u(T)$. Assim, consideramos a mesma equação com condição de inicial em T e aumentamos novamente (pelos mesmos argumentos) o intervalo de solução da equação para $[0, T+\epsilon)$. Faz-se isso de maneira iterativa de modo a obter que u está definida em $M \times [0,\infty]$ e ainda, tomando $\{t_n\}$ a sequência com os extremos do intervalo para cada iteração, obtemos que $u(x,t_n) \to u_\infty(x)$ na topologia suave em M. ■

5.4 Convergência

Novamente assumiremos que temos solução para o problema de valor inicial (5.19), desta vez com definição em $M \times [0,\infty]$. Provaremos que $v(x,t)$ converge uniformemente na topologia suave em $M \times [0,\infty]$ a uma função $v_\infty(x)$ e que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ converge (também na topologia suave) para uma constante quanto $t \to \infty$.

Teorema 5.5 (Li-Yau)**.** *Seja M uma variedade compacta de dimensão m e seja $g_{ij}(t)$, $0 \leq t < \infty$ uma família de métricas riemannianas em M com as seguintes propriedades:*

1. $C_1 g_{ij}(0) \leq g_{ij}(t) \leq C_2 g_{ij}(0)$,
2. $\left|\dfrac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t}\right| \leq C_3 g_{ij}(0)$,
3. $R_{ij}(t) \geq -K g_{ij}(0)$,

onde C_1, C_2, C_3 e K são constantes positivas independentes de t. Seja Δ_t o Laplaciano de $g_{ij}(t)$. Se $\varphi(x,t)$ é solução positiva do problema

$$\left(\Delta_t - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi(x,t) = 0, \tag{5.68}$$

em $M \times [0,\infty]$, então para qualquer $\alpha > 1$ temos

$$\sup_{x \in M} \varphi(x,t_1) \leq \inf_{x \in M} \varphi(x,t_2)\gamma, \tag{5.69}$$

para todos $0 < t_1 < t_2 < \infty$ onde γ depende de t_1, t_2, m do diâmetro de M segundo a métrica $g_{ij}(0)$ e de $A = \|\nabla^2 \log \varphi\|_\infty$. Ainda mais, se $t_2 = 1$ e $t_1 = \dfrac{1}{2}$, então $\gamma > 1$.

Se denotarmos $F = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, então pela equação (5.23) temos que F satisfaz a equação (5.68) com condição inicial $F(x,0) = f(x)$. Ainda mais, segue do princípio do máximo para equações diferenciais parabólicas que se $t_2 > t_1 > 0$, então

$$\sup_{x\in M} F(x,t_2) < \sup_{x\in M} F(x,t_1) < \sup_{x\in M} f(x), \tag{5.70}$$

$$\inf_{x\in M} F(x,t_2) > \inf_{x\in M} F(x,t_1) > \inf_{x\in M} f(x). \tag{5.71}$$

Defina

$$\varphi_n(x,t) = \sup_{x\in M} F(x,n-1) - F(x,(n-1)+t), \tag{5.72}$$

$$\psi_n(x,t) = F(x,n-1+t) - \inf_{x\in M} F(x,n-1), \tag{5.73}$$

$$\operatorname{osc}(t) = \sup_{x\in M} F(x,t) - \inf_{x\in M} F(x,t). \tag{5.74}$$

É claro que φ_n e ψ_n satisfazem a equação (5.68) e de acordo com as desigualdades (5.70) estas funções são positivas. Assim, se aplicarmos o Teorema 5.5 com $t_2 = 1$ e $t_1 = \dfrac{1}{2}$ obtemos

$$\sup_{x\in M} F(x,n-1) - \inf_{x\in M} F(x,n-\frac{1}{2}) \leq \gamma \left(\sup_{x\in M} F(x,n-1) - \sup_{x\in M} F(x,n) \right), \tag{5.75}$$

$$\sup_{x\in M} F(x,n-\frac{1}{2}) - \inf_{x\in M} F(x,n-1) \leq \gamma \left(\inf_{x\in M} F(x,n) - \inf_{x\in M} F(x,n-1) \right). \tag{5.76}$$

Adicionando as duas equações obtemos

$$\operatorname{osc}(n-1) + \operatorname{osc}(n-\frac{1}{2}) \leq \gamma \left(\operatorname{osc}(n-1) - \operatorname{osc}(n) \right), \tag{5.77}$$

de onde

$$\operatorname{osc}(n) \leq \delta \operatorname{osc}(n-1), \tag{5.78}$$

onde $\delta := \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} < 1$. Note que δ não depende de n.[1] Segue indutivamente que $\operatorname{osc}(n) \leq \delta^n \operatorname{osc}_0$, onde

$$\operatorname{osc}_0 = \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} f(x). \tag{5.79}$$

Novamente, pelas desigualdades (5.70) temos que $\operatorname{osc}(t)$ decresce com o tempo. Assim, existe $C_4 > 0$ tal que

$$\operatorname{osc}(t) \leq C_4 e^{-at}, \ (\delta = e^{-a}). \tag{5.80}$$

Definamos agora

$$\varphi(x,t) := \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{vol(M)} \int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(\tilde{g}). \tag{5.81}$$

[1] n NÃO é a dimensão da variedade aqui, embora a notação seja ambígua. Segue do enunciado do Teorema 5.5 que γ não depende de n de onde δ não depende de n.

Note agora que como

$$d\mu(\tilde{g}) = i^{\dim_{\mathbb{C}} M}(\dim_{\mathbb{C}} M)! \det\left(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u\right) \prod_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\overline{z}^j, \tag{5.82}$$

então

$$\frac{d\mu(\tilde{g})}{i^{\dim_{\mathbb{C}} M}(\dim_{\mathbb{C}} M)! \det\left(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u\right)} = \prod_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\overline{z}^j, \tag{5.83}$$

de onde se lembrarmos que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial t} \log\det(g_{j\bar{k}} + \partial^2_{j\bar{k}} u)$ e utilizarmos a equação (5.23) então

$$\frac{\partial}{\partial t} d\mu(\tilde{g}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(i^{\dim_{\mathbb{C}} M}(\dim_{\mathbb{C}} M)! \det\left(g_{j\bar{k}} + \partial_{j\bar{k}} u\right) \prod_{j=1}^{n} dz^j \wedge d\overline{z}^j \right), \tag{5.84}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} \log\det(g_{j\bar{k}} + \partial^2_{j\bar{k}} u) \right) d\mu(\tilde{g}), \tag{5.85}$$

$$= \tilde{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) d\mu(\tilde{g}). \tag{5.86}$$

Definindo

$$E = \frac{1}{2} \int_M \varphi^2 d\mu(\tilde{g}), \tag{5.87}$$

segue de (5.86) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E &= \int_M \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mu(\tilde{g}) + \frac{1}{2} \int_M \varphi^2 \tilde{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) d\mu(\tilde{g}), \\
&= \int_M \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{vol(M)} \int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(\tilde{g}) \right) \left(\tilde{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{1}{vol(M)} \int_M \frac{\partial u}{\partial t} \tilde{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) d\mu(\tilde{g}) \right) + \\
&\qquad \frac{1}{2} \int_M \varphi^2 \tilde{\Delta}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) d\mu(\tilde{g}) \\
&= \int_M (-1 + \varphi) \left| \tilde{\nabla} \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 d\mu(\tilde{g}) \leq -\frac{1}{2} \int_M \left| \tilde{\nabla} \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 d\mu(\tilde{g}),
\end{aligned} \tag{5.88}$$

onde $|\tilde{\nabla}()|^2 = \tilde{g}^{j\bar{k}}()_j()_{\bar{k}}$ e a última igualdade pode ser conseguida já que para t grande $\sup_{x \in M} \varphi(x,t) < \text{osc}(t) < \dfrac{1}{2}$, pois osc$(t)$ decresce quando t cresce. Como

$$\int_M \varphi d\mu(\tilde{g}) = 0, \tag{5.89}$$

segue da **desigualdade de Poincaré** Teorema A.3 que

$$\int_M \left| \tilde{\nabla} \varphi \right|^2 d\mu(\tilde{g}) \geq \lambda_1(t) \int_M \varphi^2 d\mu(\tilde{g}), \tag{5.90}$$

onde $\lambda_1(t)$ é o primeiro autovalor do operador $-\tilde{\Delta}$ no tempo t. Como as métricas $\tilde{g}_{j\bar{k}}(t)$ são uniformemente equivalentes a $g_{j\bar{k}}$ existe $C_5 > 0$ tal que $\lambda_1(t) > C_5$ para todo $t > 0$, de onde

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -C_5 E. \tag{5.91}$$

Assim, pela **Desigualdade de Gronwall** Teorema A.4

$$E \leq C_6 e^{-C_5 t}. \tag{5.92}$$

Como as métricas são uniformemente equivalentes, de onde as formas de volume o são, obtemos

$$\int_M \varphi^2 d\mu(g) \leq C_6' e^{-C_5 t}. \tag{5.93}$$

Proposição 5.1. *Quanto $t \to \infty$ a função $v(x,t)$ convege a uma função $v_\infty(x)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ converge a uma constante, ambas as convergências na topologia suave.*

Demonstração. Para todo $0 < s < s'$ temos

$$\int_M |v(x,s') - v(x,s)| d\mu(g) \leq \int_M \int_s^{s'} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \right| dt d\mu(g), \tag{5.94}$$

$$= \int_M \int_s^{s'} \left| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{vol(M)} \frac{\partial u}{\partial t} \right| d\mu(g) dt, \tag{5.95}$$

$$\leq \int_s^{s'} |\varphi| d\mu(g) dt + \int_s^{s'} \frac{1}{vol(M)} \left| \int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(\tilde{g}) - \int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(g) \right| d\mu(g), \tag{5.96}$$

onde a última desigualdade vem da desigualdade trinagular obtida ao somar e subtrair $\displaystyle\int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(\tilde{g})$. Usando que

$$\int_s^{s'} |\varphi| d\mu(g) \leq vol(M)^{1/2} \int_s^{\infty} \left(\int_M \varphi^2 \right)^{1/2} dt \tag{5.97}$$

e ainda,

$$\int_s^{s'} \frac{1}{vol(M)} \left| \int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(\tilde{g}) - \int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(g) \right| d\mu(g) \leq \frac{1}{vol(M)} \operatorname{osc}(t) dt, \tag{5.98}$$

dadas as desigualdades (5.93) e (5.80), concluímos que

$$\int_s^{s'} \frac{1}{vol(M)} \left| \int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(\tilde{g}) - \int_M \frac{\partial u}{\partial t} d\mu(g) \right| d\mu(g) \leq C_7 \int_s^{\infty} e^{-C_5 2t} dt + \int_s^{\infty} C_8 e^{-at} dt. \tag{5.99}$$

Tomando $s \to \infty$ o lado direito se anula, de onde $v(x,t)$ com $t \to \infty$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(M)$. Então $v(x,t)$ converge na norma $L^1(M)$ para uma função $v_\infty'(x)$. Por unicidade da convergência temos que $v_\infty'(x)$ é igual a $v_\infty(x)$ fornecida pelo Teorema 5.4.

Não resta outra alternativa que não a convergência de $v(x,t)$ para $v_\infty(x)$ na topologia $C^\infty(M \times [0,\infty])$. De fato, do contrário existiria $\epsilon > 0$, um inteiro $r > 0$ e uma sequência t_n tal que

$$\|v(x,t_n) - v_\infty(x)\|_{C^r(M \times [0,\infty])} \geq \epsilon. \tag{5.100}$$

Mas como $v(x,t_n)$ é limitada na toplogia suave em $M\times[0,\infty]$ então existe $v(x,t_{n_k})$ sequência convergente para uma função suave $\tilde{v}_\infty(x)$. Da equação (5.100) temos que $\tilde{v}_\infty(x)\neq v_\infty(x)$. Ora, como $v(x,t_{n_k})$ também converge a $v_\infty(x)$ na norma $L^1(M)$ isso é um absurdo, de onde $v(x,t)\overset{t\to\infty}{\to}v_\infty(x)$ na topologia suave. Como $\mathrm{osc}(t)\to 0$ se $t\to\infty$ então $\dfrac{\partial}{\partial t}u(x,\infty)$ é constante. ■

Dado que $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\infty)$ é constante e

$$\tilde{g}_{j\bar{k}}(t)=g_{j\bar{k}}+\partial^2_{j\bar{k}}u, \tag{5.101}$$

diferenciando essa equação em t concluímos que

$$\frac{\partial\tilde{g}_{j\bar{k}}}{\partial t}(t)=\partial_t\partial^2_{j\bar{k}}u=\partial^2_{j\bar{k}}\partial_t u(x,t). \tag{5.102}$$

Tomando $t\to\infty$ em ambos os lados,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial\tilde{g}_{j\bar{k}}}{\partial t}(t)=\lim_{t\to\infty}\partial^2_{j\bar{k}}\partial_t u(x,t)=0. \tag{5.103}$$

Isto conclui a prova do Teorema 5.1.

5.5 Existência de métricas Kähler-Einstein

Note que se (M,g) é uma variedade de Kähler com $c_1(M)=0$ então a $(1,1)$-forma nula é cohomóloga à forma de Ricci ρ de g e podemos aplicar o Teorema 5.1 para garantir a existência de uma métrica Einstein com constante de Einstein nula em M.

Se $c_1(M)<0$ então uma variante da equação usada para deformação poderia ser empregada. A saber, poderia-se considerar o problema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{g}_{j\bar{k}}}{\partial t}(t)=-\tilde{R}_{j\bar{k}}(t)-\tilde{g}_{j\bar{k}}(t),\\ \tilde{g}_{j\bar{k}}(0)=g_{j\bar{k}}.\end{cases} \tag{5.104}$$

Neste caso, poderia-se seguir as mesmas etapas empregadas na demonstração do Teorema (5.1) para garantir solução para este problema. Em verdade, mostraria-se que $\dfrac{\partial\tilde{g}_{j\bar{k}}}{\partial t}(t)$ converge para 0 quanto $t\to\infty$ na topologia suave, de onde

$$\tilde{R}_{j\bar{k}}(\infty)=-\tilde{g}_{j\bar{k}}(\infty), \tag{5.105}$$

sendo a métrica limite Kähler-Einstein com constante de Einstein -1.

Yau mostrou que o caso de existência de métricas Kähler-Einstein na mesma classe da métrica original com $c_1(M)>0$ nem sempre é verdadeiro. Em verdade, Yau constrói uma variedade de Kähler com $c_1(M)>0$ que não admite nenhuma métrica

Kähler-Einstein (veja [Yau77]). Há resultados ainda que garantem que mesmo quando a métrica de Kähler-Einstein existe, não há garantia que seja única.

Uma condição necessária para a existência de uma métrica de Kähler-Einstein é que a álgebra de Lie de campos de vetores holomorfos seja redutiva. Yau conjecturou que, quando a primeira classe de Chern é positiva, uma variedade Kähler possui uma métrica Kähler-Einstein se e somente se for estável no sentido da teoria geométrica invariante (Geometric Invariant Theory).

O caso de superfícies complexas foi resolvido por Gang Tian. As superfícies complexas com classe Chern positiva são produto de duas cópias de uma linha projetiva (que tem uma métrica Kähler-Einstein) ou um blow-up do plano projetivo em até 8 pontos em posição geral. O plano projetivo tem uma métrica Kähler-Einstein, a saber, a métrica de Fubini-Study, e o plano projetivo explodido em 1 ou 2 pontos não. Tian mostrou que o plano projetivo explodido em 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 pontos em posição geral possui uma métrica Kähler-Einstein (veja [Tia90]).

Mais recentemente essa conjectura de Yau foi resolvida independentemente em [CDS12b, CDS12a, CDS13, CDS14] e [Tia12].

Referências

[AH10] B. Andrews and C. Hopper. The Ricci Flow in Riemannian Geometry: A Complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem. Number N° 2011 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2010. 15, 89, 91, 96

[Bal06] W. Ballmann. Lectures on Kähler Manifolds. ESI lectures in mathematics and physics. European Mathematical Society, 2006. 40

[Bes87] A.L. Besse. Einstein Manifolds:. Classics in mathematics. Springer, 1987. 25

[Bre10] S. Brendle. Ricci Flow and the Sphere Theorem. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010. 83, 84

[Cao85] Huai-Dong Cao. Deformation of kähler matrics to kähler-eisenstein metrics on compact kähler manifolds., 1985. 14, 100

[Cao06] Huai-Dong Cao. Geometry of ricci solitons*, Apr 2006. 94

[CDS12a] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun. Kahler-Einstein metrics on Fano manifolds, II: limits with cone angle less than 2 \pi, December 2012. 114

[CDS12b] X.-X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun. Kahler-Einstein metrics and stability, October 2012. 114

[CDS13] X. Chen, S. Donaldson, and S. Sun. Kahler-Einstein metrics on Fano manifolds, III: limits as cone angle approaches 2\pi\ and completion of the main proof, February 2013. 114

[CDS14] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler–einstein metrics and stability, 2014. 114

[dC88] M.P. do Carmo. Geometria riemanniana. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988. 22

[Ham82] R. S. Hamilton. Three-manifolds with positive ricci curvature, 1982. 14, 75, 82, 83, 87, 100

[Hus94] D. Husemöller. Fibre Bundles. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1994. 52, 54

[Huy06] D. Huybrechts. Complex Geometry: An Introduction. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2006. 55, 56, 58, 59, 60

[Joy00] D.D. Joyce. Compact Manifolds with Special Holonomy. Oxford mathematical monographs. Oxford University Press, 2000. 14, 21, 55, 56, 67, 69, 72, 73

[KN09] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry, 2 Volume Set. Wiley Classics Library. Wiley, 2009. 41

[Kob87] S. Kobayashi. Differential Geometry of Complex Vector Bundles. Kanô memorial lectures. Iwanami Shoten, 1987. 45

[Mor03] Andrei Moroianu. Kähler geometry, 2003. 40

[MS74] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. Characteristic Classes. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974. 53

[NS73] L. Nirenberg and C.B.M. Sciences. Lectures on Linear Partial Differential Equations. Regional conference series in mathematics. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1973. 38

[O'N83] B. O'Neill. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1983. 25

[Per02] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, November 2002. 15, 75

[Per03a] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, July 2003. 76

[Per03b] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds, March 2003. 76

[Pet06] P. Petersen. Riemannian Geometry. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006. 20, 22, 27

[San12] B. Santoro. Introduction to evolution equations in geometry, May 2012. 14, 76, 78, 100

[SW12] J. Song and B. Weinkove. Lecture notes on the K\"ahler-Ricci flow, December 2012. 15, 101

[Tau11] C. Taubes. Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature. Oxford Graduate Texts in Mathematics. OUP Oxford, 2011. 32, 38, 45

[Tia90] G. Tian. On calabi's conjecture for complex surfaces with positive first chern class, Dec 1990. 114

[Tia12] G. Tian. K-stability and K\"ahler-Einstein metrics, November 2012. 114

[Top06] P. Topping. Lectures on the Ricci Flow. Lecture note series. Cambridge University Press, 2006. 15, 79, 80

[WYW06] Z. Wu, J. Yin, and C. Wang. Elliptic & Parabolic Equations. World Scientific, 2006. 125

[Yau77] Shing-Tung Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, 1977. 69, 114

[Yau78] Shing-Tung Yau. On the ricci curvature of a compact kähler manifold and the complex monge-ampére equation, i, 1978. 13, 14, 67

Apêndices

APÊNDICE A

Tópicos de Análise

Neste apêndice destacaremos elementos importante no campo da Análise que serão úteis ao longo do texto. Não pretende-se fazer uma exposição em todos os detalhes. Gostaríamos de situar o leitor sobre o assunto com definições e principais teoremas.

A.1 Análise básica em variedades

A.1.1 Espaços de Lebesgue e Sobolev

Seja (M, g) uma variedade riemanniana com forma de volume $d\mu(g)$. Para $q \geq 1$ definimos o **espaço de Lebesgue** $L^q(M)$ como sendo o conjunto das funções localmente integráveis f em M cuja seguinte norma é finita

$$\|f\|_{L^q} := \left(\int_M |f|^q d\mu(g) \right)^{1/q} < \infty. \tag{A.1}$$

Suponha que $r, s, t \geq 1$ e que $frac1r = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$. Se $\phi \in L^s(M), \psi \in L^t(M)$, então $\phi\psi \in L^r(M)$, e ainda, a seguinte **desigualdade de Hölder** é satisfeita:

$$\|\phi\psi\|_{L^r} \leq \|\phi\|_{L^s} \|\psi\|_{L^t}. \tag{A.2}$$

É conveniente estender o conceito de **derivada fraca** usualmente visto em $\mathbb{R}^n$ para variedades. Lembrando que

$$\nabla^k : C^\infty(M) \otimes \Omega^k(M) \to C^\infty(M) \otimes \Omega^{k+1}(M),$$

então a derivada fraca de $f \in C^\infty(M)$ é a única 1-forma ∇f que satisfaz

$$g(\nabla f, \varphi) = \int_M f \nabla^* \varphi d\mu(g), \tag{A.3}$$

para toda 1-forma φ com suporte compacto em M, e ∇^* é o adjunto formal de ∇ segundo a métrica g.

Indutivamente,

$$g(\nabla^k f, \varphi) = g(\nabla^{k-1} f, \nabla^* \varphi). \tag{A.4}$$

Seja $q \geq 1$ e k um inteiro não negativo. Definimos o **espaço de Sobolev** $L^q_k(M)$ como sendo o conjunto das funções $f \in L^q(M)$ tais que f é k-vezes fracamente diferenciável e $|\nabla^j f| \in L^q$ para $j \geq k$. Munimos este espaço com a norma

$$\|f\|_{L^q_k} := \left(\sum_{j=0}^{k} \int_M |\nabla^j f|^q d\mu(g) \right)^{1/q}, \tag{A.5}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de g.

O espaço $L^q_k(M)$ é um espaço de Banach com tal norma, e $L^2_k(M) := H^k(M)$ é um espaço de Hilbert.

Os espaços $L^q(M)$ e $L^q_k(M)$ são espaços vetoriais de funções. Será conveniente estender as definições destes espaços a fim de consider seções de fibrados vetoriais.

Seja (M, g) uma variedade riemanniana e $V \to M$ um fibrado vetorial suave. Equipe V com uma família de métricas euclidianas variando suavemente com as fibras. Seja $\hat{\nabla}$ uma conexão em V que preserve a métrica em V. Então, as definições acima são as mesmas considerando $|v|$ no lugar de $|f|$ e $|\hat{\nabla}^j v|$ no lugar de $|\nabla^j f|$, onde $|\cdot|$ representa a métrica em V.

A.1.2 Espaços de classe C^k e de Hölder

Seja (M, g) uma variedade riemanniana. Para cada inteiro $k \geq 0$ defina o espaço $C^k(M)$ como sendo o espaço das funções $f : M \to \mathbb{R}$ cujas k-primeiras derivadas são existem e são contínuas e limitadas munido da norma

$$\|f\|_{C^k} := \sum_{j=0}^{k} \sup_M |\nabla^j f|, \tag{A.6}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de g.

Dada a métrica g em M, podemos considerar uma função distância $d : M \times M \to [0, \infty]$ em M de forma natural, como sendo o ínfimo dos comprimentos de arco de curvas ligando x a y. Desta maneira, uma função $f : M \to \mathbb{R}$ será dita **Hölder contínua com expoenten** α, onde $\alpha \in (0, 1)$, se satisfizer

$$[f]_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha} < \infty. \tag{A.7}$$

Uma observação imediata é que funções Hölder contínuas também são contínuas. Assim, podemos definir uma norma no espaço destas funções, o qual denotaremos por

$C^{0,\alpha}(M)$. A saber, esta é dada por:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \|f\|_{\infty} + [f]_{\alpha}. \tag{A.8}$$

À mesma maneira, podemos definir o espaço das **seções Hölder contínuas** de um fibrado vetorial $V \to M$. Dados $x, y \in M$ numa mesma vizinhança geodésica, chamamos a diferença $|v(x) - v(y)|$ da norma da diferença entre $v(x)$ e do transporte paralelo de $v(y)$ a $v(x)$, definido pela conexão $\hat{\nabla}$ em V, associada à métrica euclidiana em V. Assim, uma seção $v \in V$ é dita Hölder contínua se satisfizer:

$$[v]_{\alpha} := \sup_{x \neq y} \frac{|v(x) - v(y)|}{d(x,y)^{\alpha}} < \infty, \tag{A.9}$$

onde $d(x, y) \leq \delta(g)$, onde $\delta(g)$ é o raio de injetividade da métrica g.

A discussão anterior permite definir o espaço das funções $C^{k,\alpha}(M)$. De fato, dada $f \in C^k(M)$, como $\nabla^k f$ é uma seção de $\otimes^k T^*M$, podemos considerar $V = \otimes^k T^*M$ e pedir que

$$[\nabla^j f]_{\alpha} := \sup_{x \neq y} \frac{|\nabla^j f(x) - \nabla^j f(y)|}{d(x,y)^{\alpha}} < \infty. \tag{A.10}$$

Se esta relação é verificada para todo $j \in \{1, \ldots, j\}$, dizemos que $f \in C^{k,\alpha}(M)$. A norma natural deste espaço é dada por

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} := \|f\|_{C^k} + \sum_{j=1}^{k} [\nabla^j f]_{\alpha}. \tag{A.11}$$

Com esta norma, o espaço $C^{k,\alpha}(M)$ é de Banach, sendo chamado de **Espaço de Hölder com expoente** α.

A.2 Sobolev, Kondrakov e Poincaré: inclusões e desigualdades

Em equações diferenciais parciais é usual entender como incluir espaços de Sobolev e espaços de Hölder de forma apropriada em outros espaços. O objetivo desta seção é o de enunciar os teoremas de inclusões necessários nesta dissertação.

Teorema A.1 (Teorema do Mergulho de Sobolev)**.** *Sejam M uma variedade riemanniana compacta de dimensão n, k, l números inteiros com $k \geq l \geq 0$, q, r números reais com $q, r \geq 1$ e $\alpha \in (0, 1)$. Se*

$$\frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} + \frac{k-l}{n},$$

ent ao $L_k^q(M)$ admite um mergulho contínuo em $L_l^r(M)$ pela inclusão. Se

$$\frac{1}{q} \leq \frac{k-l-\alpha}{n},$$

então $L^q_k(M)$ é continuamente mergulhado em $C^{l,\alpha}(M)$ pela inclusão.

Teorema A.2 (Teorema de Kondrakov)**.** *Sejam M uma variedade riemanniana compacta, k, l inteiros tais que $k \geq l \geq 0$, q, r números reais com $q, r \geq 1$ e $\alpha \in (0, 01)$. Se*

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{r} + \frac{k-l}{n},$$

ent ao o mergulho $L^q_k(M) \hookrightarrow L^r_l(M)$ é compacto. Se

$$\frac{1}{q} < \frac{k-l-\alpha}{n},$$

ent ao $L^q_k \hookrightarrow C^{l,\alpha}(M)$ é compacto. Ainda mais, $C^{k,\alpha}(M) \hookrightarrow C^k(M)$ é compacto.

Teorema A.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Sejam (M, g) uma variedade riemanniana compacta e $1 \leq q < \infty$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|\nabla u\|_{L^q}, \tag{A.12}$$

onde ∇ é a conexão de Levi-Civita de g.

Ainda mais, se $q = 2$ e λ_1 é o primeiro autovalor de $-\Delta$, onde Δ é o operador de Laplace associado a g, então $C = \dfrac{1}{\lambda_1}$.

Teorema A.4 (Desigualdade de Growall)**.** *Seja $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde I é um intervalo ou compacto ou com o maior extremo sendo ∞ e o menor extremo sendo $a \in \mathbb{R}$, e u é diferenciável no interior de I e contínua em I. Assuma que*

$$u'(t) \leq \beta(t)u(t),$$

onde β é uma função contínua em I. Então,

$$u(t) \leq u(a) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right), \ \forall t \in I.$$

A.3 Operadores Diferenciais em Fibrados Vetoriais

A.3.1 Definições gerais

Sejam (M, g) uma variedade riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita associada à métrica g.

Definição A.1. *Um **operador diferencial parcial**, ou simplesmente, **operador diferencial**, P em M, de ordem k, é uma aplicação que leva funções reais u definidas em M em funções reais Pu definidas em M, e que depende de u e de suas k-primeiras derivadas. Explicitamente, se $\nabla^j u,\ j \in \{0, \ldots, k\}$ denotam as k-primeiras derivadas de u (possivelmente no sentido fraco), então existe Q uma função real, pelo menos contínua em cada um dos seus argumentos, tais que*

$$(Pu)(x) = Q(x, u(x), \nabla u(x), \ldots, \nabla^k u(x)). \tag{A.13}$$

Se Q é suave nos seus argumentos dizemos que o operador P é **operador diferencial suave**. Se $P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então dizemos que P é **linear**. Se P é não linear, dizemos que P é **não linear**.

Exemplo A.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Um operador diferencial linear de ordem 2 é da forma*

$$(Pu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} b^k(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^k} + c(x)u(x),$$

onde os coeficientes a_{ij}, b, c são funções em M e cuja regularidade define o operador. Por exemplo, se o coeficiente mais regular é Hölder contínuo com expoente α, então o operador P é dito Hölder contínuo com coeficiente α.

Exemplo A.2. *Se P é um operador diferencial suave em uma variedade riemanniana (M, g), então claramente P mapeia funções suaves em M em funções suaves em M.*

Por outro lado, em geral, P decresce regularidade. A saber, se os coeficientes de P são limitados, então

$$P : L^q_{k+l}(M) \to L^q_l(M),$$
$$P : C^{k+l}(M) \to C^l(M).$$

Será conveniente entender o que são operadores elípticos. Antes, no entanto, faz-se necessário saber como dada alguma regularidade para P, como podemos linearizá-lo.

Definição A.2. *Seja P um operador linear de ordem k tal que Q como em (A.13). Se Q é de classe C^1 em seus argumentos, então, **a linearização** de P em u é definida como sendo o limite*

$$L_u P(v) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(P(u + tv) - P(v)\right). \tag{A.14}$$

Observamos que em geral, mesmo se o operador P for suave, não há garantias de que sua linearização seja suave. Em verdade, se $u \in C^{k+l}(M)$ e P é de ordem k, então $L_u P$ tem ordem l.

Em coordenadas locais, um operador diferencial *linear* de ordem k tem a seguinte expressão geral

$$Pu = A^{i_1 \ldots i_k}\nabla_{i_1 \ldots i_k} u + B^{i_1 \ldots i_{k-1}}\nabla_{i_1 \ldots i_{k-1}} u + \ldots + K^{i_1}\nabla_{i_1} u + Lu, \tag{A.15}$$

onde A, B, K são tensores simétricos e L é uma função real. Para cada ponto $x \in M$ e cada $\xi \in T^*_x M$. Considere a expressão

$$\sigma_\xi(P; x) := A^{i_1 \ldots i_k}\xi^{i_1} \ldots x i^{i_k}. \tag{A.16}$$

O **símbolo** de P é a aplicação

$$\sigma : T^*M \to \mathbb{R}$$
$$\sigma : (x, \xi) \mapsto \sigma_\xi(P; x).$$

A.3.2 Operadores Elípticos e equações diferenciais parabólicas

Definição A.3. *Um operador diferencial P de ordem k linear é dito* ***elíptico*** *se para todo $(x,\xi) \in T^*M - \{0\}$, onde 0 é a seção nula, $\sigma_\xi(P;x) \neq 0$.*

Um operador não linear é dito elíptico se sua linearização na direção de toda função for um operador elíptico.

Se M é variedade riemanniana com métrica g e V e W são fibrados vetoriais sobre M munidos de métrica e ∇^V é uma conexão compatível em V, então podemos lançar mão da seguinte definição:

Definição A.4. *Um operador diferencial de ordem k em fibrados vetoriais é uma associação que aplica seções v de V em seções de W, e que depende de v e das suas primeiras k-derivadas com respeito a ∇^V. Precisamente, se v é uma seção de V, então existe uma função Q pelo menos contínua em seus argumentos e com valores nas fibras de W tais que*

$$P(v)(x) = Q(x, v(x), \nabla^V v(x), \ldots, (\nabla^V)^k v(x)) \in W_x, \tag{A.17}$$

para cada $x \in M$.

O operador P é é dito suave se Q depende suavemente de seus argumentos. Se $P(\alpha v + \beta w) = \alpha P(v) + \beta P(w)$ onde v, w são seções e α, β funções suaves em M, então dizemos que P é linear. Analogamente ao que discutimos, faz sentido definir uma linearização para P.

Exemplo A.3.

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M), \quad \textit{derivada exterior} \tag{A.18}$$

$$\delta : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^{k-1}(M), \quad \textit{operador codiferencial} \tag{A.19}$$

$$\Delta := d \circ \delta + \delta \circ d, \quad \textit{laplaciano de Beltrami} \tag{A.20}$$

$$\nabla : \Gamma(V) \to \Gamma(V) \otimes \Omega^1(M), \quad \textit{derivada covariante} \tag{A.21}$$

são exemplos de operadores diferenciais entre fibrados vetoriais.

Em coordenadas locais, um operador diferencial *linear* de ordem k entre fibrados vetoriais tem a seguinte expressão geral

$$Pv = A^{i_1 \ldots i_k} \nabla_{i_1 \ldots i_k} v + B^{i_1 \ldots i_{k-1}} \nabla_{i_1 \ldots i_{k-1}} v + \ldots + K^{i_1} \nabla_{i_1} v + Lv, \tag{A.22}$$

onde A, B, K são tensores com valores em $V^* \otimes W$ e L é uma aplicação de fibrados entre V e W.

Assim, o **símbolo** de um operador diferencial entre fibrados é a aplicação

$$\sigma : \Omega^1(M) \to \Gamma(V^* \otimes W),$$

definida por

$$\sigma : (x, \xi) \mapsto A^{i_1 \dots i_k} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_k} = \sigma_\xi(P; x).$$

Se para cada (x, ξ) a aplicação $\sigma(x, \xi)$ definir um isomorfismo entre V_x e W_x, então P é dito elíptico.

Agora que entendemos o conceito de um operador elíptico, convém entender o que é uma equação diferencial parabólica.

Dado um fibrado vetorial V sobre uma variedade riemanniana (M, g) e um operador diferencial P levando seções de V em seções de V, se I é um intervalo na reta e $v = v(x, t)$ é uma seção de $M \times I$ associada a $V \times I$, então o problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v(x,t) = P(v)(x,t), \\ v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{A.23}$$

é dito um **problema de equação diferencial parabólica** se P for elíptico.

Para essa dissertação só nos interessa o caso em que $V = M \times \mathbb{R}$, isto é, as seções são funções $\mathbb{R}$-valoradas definidas em $M \times \mathbb{R}$. Em particular, faremos uso do seguinte resultado:

Teorema A.5 (Teorema de Existência de Solução para Equações Parabólicas)**.** *Uma equação diferencial parabólica como* (A.23) *tem solução clássica em tempo curto.*

Veja o enunciado preciso (com variantes) em [WYW06, Página 251].