Lucas Henrique Calixto

Super álgebras de funções

CAMPINAS
2013

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

LUCAS HENRIQUE CALIXTO

SUPER ÁLGEBRAS DE FUNÇÕES

Orientador: Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de Mestre em matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO LUCAS HENRIQUE CALIXTO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. ADRIANO ADREGA DE MOURA.

Assinatura do Orientador

Moura

____

CAMPINAS
2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C129s

Calixto, Lucas Henrique, 1989-
Super álgebra de funções / Lucas Henrique Calixto. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Adriano Adrega de Moura.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Super álgebras de Lie. 2. Representações de álgebras. 3. Álgebra de funções. I. Moura, Adriano Adrega de,1975-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Map superalgebras
Palavras-chave em inglês:
Lie superalgebras
Representations of algebras
Function algebras
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Adriano Adrega de Moura [Orientador]
Roldão da Rocha Júnior
Vyacheslav Futorny
Data de defesa: 05-04-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de abril de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Moura

Prof.(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

Prof.(a). Dr(a). ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR

Prof.(a). Dr(a). VYACHESLAV FUTORNY

Agradecimentos

Agradeço à todas as pessoas que estão ou estiveram comigo em algum momento da minha vida, sem elas eu não seria quem eu sou. À minha namorada e amiga Pri por todo o seu apoio desde muito antes desse período de mestrado e também procurar e corrigir muitos erros de ortografia nesta dissertação. Aos meus amigos André, Douglas, Elizeu, Genaro, Germano e Renan, por serem ótimas companhias que espero preservar durante o decorrer de toda a minha vida. Ao meu orientador, Professor Dr. Adriano Moura, por me propor a estudar tal assunto, por todo o seu tempo gasto me orientando, lendo e corrigindo esta dissertação infinitas vezes e pela paciência e disponibilidade que teve sempre que precisei. Ao Tiago pelas incontáveis ajudas e conselhos que me deu. Ao pessoal da secretaria de pós do IMECC por sua prestatividade. Ao CNPq e a CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim agradeço em especial a minha família, pois sem ela eu não estaria aqui.

Resumo

O principal objetivo dessa dissertação é explicar a classificação dos módulos irredutíveis de dimensão finita para qualquer super álgebra de funções sobre uma super álgebra de Lie básica. Os principais resultados dizem que um módulo irredutível de dimensão finita ou é uma representação de avaliação ou é um módulo de Kac para um certo módulo de avaliação generalizado.
Para chegar a tal objetivo, também fazemos uma revisão detalhada da classificação das super álgebras de Lie básicas.

Palavras-chave: Super álgebras de Lie, Super álgebras de funções, Módulos irredutíveis de dimensão finita.

Abstract

The goal of this dissertation is to explain the classification of the irreducible finite-dimensional representations of a map superalgebra whose underlying simple Lie superalgebra is basic. The main result says that an irreducible finite-dimensional module is either an evaluation module or a Kac module associated to a certain generalized evaluation module. We also give a detailed review of the classification of the basic Lie superalgebras.

Keywords: Lie superalgebras, Map superalgebras, Irreducible finite dimensional modules.

Sumário

Introdução

Em física de partículas, supersimetria é uma teoria que foi desenvolvida para tratar de dois tipos de partículas elementares, os bosons e os fermions. Tal teoria possui um papel importante no tratamento moderno do chamado Modelo Padrão na unificação das forças fundamentais e na teoria das cordas. Matematicamente falando, supersimetria envolve conceitos de super grupos de Lie e super álgebras de Lie. A classificação das super álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero foi feita em [Kac 1] e a classificação das representações irredutíveis de dimensão finita das então chamadas super álgebras de Lie básicas em [Kac 1], [Kac 2] e [Kac 3]. O desenvolvimento da teoria de representações das super álgebras de Lie está bem atrás do correspondente estudo de álgebras de Lie. Em particular, o estudo das representações de dimensão finita das álgebras de laços e correntes sobre uma álgebra de Lie já se tornou uma área de pesquisa bem estabelecida, enquanto que o correspondente estudo para super álgebras de Lie foi iniciado em 2012 em [Sav] por A. Savage. De fato, nos últimos cinco anos tem sido realizado um estudo sistemático mais geral das álgebras de funções sobre uma álgebra de Lie e é nesse contexto mais geral que se iniciou o estudo do super contexto em [Sav].

Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e A uma álgebra comutativa e associativa. Então, a super álgebra de Lie $\mathfrak{g} \otimes A$ é chamada de super álgebra de funções sobre $\mathfrak{g}$. A motivação para o estudo dessas álgebras vem do caso em que A é o anel de coordenadas de uma variedade algébrica X, caso em que $\mathfrak{g} \otimes A$ é naturalmente identificada com a super álgebra de Lie $M(X, \mathfrak{g})$ das funções regulares $X \to \mathfrak{g}$. Em [NSS], as representações irredutíveis de dimensão finita de tais álgebras foram completamente classificadas no caso em que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita e semissimples. A saber, foi mostrado que todas as representações dessa forma são produtos tensoriais de representações de avaliação e representações de dimensão 1. No "super contexto" o estudo se iniciou com as chamadas super álgebras de Lie básicas que possuem muitas propriedades em comum com as álgebras de Lie semissimples. O objetivo desta dissertação é explicar a classificação dos módulos irredutíveis de dimensão finita de uma super álgebra de funções com $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica. Os principais resultados são os teoremas 5.5.1 e 5.5.2. Para ser especifico, o primeiro teorema diz que, se a parte par de $\mathfrak{g}$ for semissimples, então todos os seus módulos irredutíveis de dimensão finita são módulos de avaliação. Porém, se a parte par de $\mathfrak{g}$ não é semissimples, tal resultado não é mais verdade. Neste caso, é introduzida uma generalização natural dos módulos de Kac que são certos módulos induzidos a partir de módulos da álgebra de funções $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A$ (onde $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é a parte par de $\mathfrak{g}$ e, portanto, uma álgebra de Lie). O segundo teorema afirma que, neste caso, todos os módulos irredutíveis de dimensão finita podem ser descritos como quocientes irredutíveis destes módulos de Kac.

O texto está organizado em cinco capítulos mais um apêndice. O primeiro capítulo é dedicado a introduzir as estruturas graduadas que serão usadas ao longo de todo o trabalho. No segundo capítulo faremos uma revisão geral sobre super álgebras de Lie e suas representações. Serão dados alguns exemplos e resultados importantes, como por exemplo, o teorema de PBW. Veremos também algumas diferenças que existem entre o "super contexto" e o contexto não graduado, como por exemplo, o lema de Schur.

No terceiro capítulo voltaremos nossa atenção para as super álgebras de Lie simples. A finalidade deste capítulo é descrever as propriedades destas super álgebras. Em particular, apresentaremos boa parte da demonstração da classificação das chamadas super álgebras de Lie clássicas. Estes três primeiros capítulos foram fortemente basedos nos textos [M. Scheunert] e [Kac 1].

O quarto capítulo é feito para que possamos entender como são as subálgebras de Borel, assim como os sistemas de raízes positivos e fundamentais de uma super álgebra de Lie básica. Estas super álgebras de Lie possuem um diferencial com relação às demais: elas possuem uma forma bilinear não degenerada e invariante. Por isso, suas propriedades se assemelham bastante com as das álgebras de Lie semissimples. As principais referências do capítulo foram [CW] e [M. Scheunert].

O principal e último capítulo deste trabalho é o quinto. Nele explicaremos a classificação dos módulos irredutíveis de dimensão finita para uma super álgebra de funções no caso em que a super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é básica ou $\mathfrak{sl}(n,n)$, $n \geq 1$. As principais referências deste capítulo foram [Sav] e [NSS].

Alguns resultados clássicos de álgebras associativas e álgebras de Lie são usados no corpo do texto principal. Para facilidade de referência, colecionamos tais resultados no apêndice.

Capítulo 1

Algumas estruturas algébricas graduadas

1.1 Convenções

Neste trabalho somente iremos lidar com espaços vetoriais e álgebras sobre um corpo $\Bbbk$ algebricamente fechado e de característica zero.

Uma álgebra A sobre $\Bbbk$ é por definição um espaço vetorial (sobre $\Bbbk$) equipado com alguma função bilinear $A \times A \longrightarrow A$, a qual chamaremos de multiplicação. Toda suposição sobre tal multiplicação (por exemplo, associatividade) será mencionada explicitamente.

As álgebras associativas que aparecerão neste trabalho sempre irão conter um elemento unidade.

Um homomorfismo de uma álgebra associativa A em uma álgebra associativa B sempre leva elemento unidade de A no elemento unidade de B.

Nossas notações e convenções sobre álgebras de Lie estão no apêndice deste trabalho.

1.2 Observações gerais sobre certas estruturas algébricas graduadas

Esta seção tem como objetivo expor as definições, os exemplos e os fatos sobre certas estruturas graduadas que serão usados no decorrer do texto. As definições e os resultados foram retirados de [M. Scheunert].

Considere os anéis $\mathbb{Z}$ (anel dos inteiros) e $\mathbb{Z}_2$ (anel dos inteiros módulo 2). Seja Γ um destes dois anéis. Neste texto, somente iremos considerar graduações com valores em Γ. Os dois elementos de $\mathbb{Z}_2$ serão denotados por $\bar{0}$ (classe dos inteiros pares) e $\bar{1}$ (classe dos inteiros ímpares).

1) Seja V um espaço vetorial. Uma $\Gamma-$*graduação* de V é uma família $\{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ de subespaços de V tais que

$$V = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma.$$

O espaço vetorial V é chamado de $\Gamma-$*graduado* se tal espaço é equipado com uma $\Gamma-$graduação.

Um elemento de V é dito ser *homogêneo* de grau γ, com $\gamma \in \Gamma$, se esse elemento está em V_γ. No caso em que $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, os elementos de $V_{\bar{0}}$ (resp. $V_{\bar{1}}$) são chamados de elementos pares (resp. elementos ímpares).

Denotaremos o *grau* de um elemento homogêneo $v \in V_\gamma$, com $\gamma \in \Gamma$, por $|v|$. Note que não faz sentido falar de grau de um elemento se este não for homogêneo. Logo, sempre que estiver escrito o termo $|v|$ estamos subentendendo que v é um elemento homogêneo de V.

Observe que todo elemento $v \in V$ possui uma única decomposição da forma

$$v = \sum_{\gamma \in \Gamma} v_\gamma \,, \quad v_\gamma \in V_\gamma.$$

Aqui, somente uma quantidade finita de v_γ é diferente de zero. O elemento v_γ é chamado de *componente homogênea* de grau γ de v.

Um subespaço U de V é chamado de $\Gamma-$graduado (ou simplesmente de graduado), se este subespaço contém as componentes homogêneas de todos seus elementos, ou dito de outra forma, se

$$U = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} (U \cap V_\gamma) \,.$$

Se V é um espaço vetorial $\mathbb{Z}-$graduado, então existe uma $\mathbb{Z}_2-$graduação natural que é dita induzida pela $\mathbb{Z}-$graduação. Esta graduação é definida da seguinte maneira:

$$V_{\bar{0}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_{2j} \,, \quad V_{\bar{1}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_{2j+1}.$$

2) Considere um segundo espaço vetorial $\Gamma-$graduado

$$W = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} W_\gamma.$$

Uma função linear

$$f : V \longrightarrow W$$

é chamada de homogênea de grau γ, com $\gamma \in \Gamma$, se

$$f(V_\alpha) \subseteq W_{\alpha+\gamma} \,, \forall\, \alpha \in \Gamma.$$

Dizemos que f é um *homomorfismo* de espaços vetoriais $\Gamma-$graduados, se f é homogênea de grau zero. As definições de isomorfismos e automorfismos são óbvias.

3) Se U e U' são dois espaços vetoriais $\Gamma-$graduados, então o produto tensorial $U \otimes U'$ possui uma $\Gamma-$graduação natural onde

$$(U \otimes U')_\gamma = \bigoplus_{\alpha+\beta=\gamma} \left(U_\alpha \otimes U'_\beta\right)$$

4) Seja A uma álgebra. Dizemos que A é $\Gamma-$graduada se ela for $\Gamma-$graduada como um espaço vetorial

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \,,$$

e, além disso,

$$A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta} \,, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \Gamma.$$

Note que A_0 (ou $A_{\bar{0}}$) é uma subálgebra que possui o elemento unidade de A.

Um homomorfismo entre álgebras $\Gamma-$graduadas é um homomorfismo entre as álgebras subjacentes que também é um homomorfismo entre os espaços vetoriais $\Gamma-$graduados subjacentes, em particular, um homomorfismo entre álgebras é homogêneo de grau zero. Novamente a partir daqui, as definições de isomorfismos e automorfismos entre álgebras são naturais.

Uma *subálgebra graduada* (resp. *ideal*) de uma álgebra $\Gamma-$graduada A é uma subálgebra (resp. ideal) da álgebra A que também é um subespaço vetorial graduado do espaço vetorial $\Gamma-$graduado A. O quociente de uma álgebra $\Gamma-$graduada por um ideal (bilateral) graduado é novamente uma álgebra $\Gamma-$graduada.

5) Se A e B são duas álgebras $\Gamma-$graduadas, o produto direto (ou produto cartesiano) $A \times B$ é novamente uma álgebra $\Gamma-$graduada, onde tal graduação é definida por

$$(A \times B)_\gamma = A_\gamma \times B_\gamma\,, \quad \forall\, \gamma \in \Gamma.$$

6) Se A e A' são duas álgebras $\mathbb{Z}-$graduadas tais que as álgebras subjacentes são iguais, mas a $\mathbb{Z}-$graduação de A' é dada por

$$A'_j = A_{-j}, \quad \forall\, j \in \mathbb{Z},$$

então A' é chamada de álgebra $\mathbb{Z}-$graduada obtida de A pela inversão da $\mathbb{Z}-$graduação. Note que de acordo com nossas definições as álgebras $\mathbb{Z}-$graduadas A e A' não são necessariamente isomorfas.

7) Sejam A e B duas álgebras associativas $\Gamma-$graduadas (lembre que de acordo com as nossas convenções, ambas as álgebras A e B possuem elemento unidade). Sobre o espaço vetorial $\Gamma-$graduado $A \otimes B$ (veja 3) definiremos uma multiplicação onde

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\beta\alpha'}(aa') \otimes (bb'), \tag{1.2.1}$$

para quaisquer $a \in A$, $b \in B_\beta$, $a' \in A_{\alpha'}$, $b' \in B$ e β, $\alpha' \in \Gamma$. Não é difícil de ver que com essa multiplicação $A \otimes B$ é uma álgebra $\Gamma-$graduada. Esta álgebra é chamada de *produto tensorial graduado* das álgebras $\Gamma-$graduadas A e B, e será denotada por $A\bar{\otimes}B$.

Note que as álgebras $A\bar{\otimes}B$ e $B\bar{\otimes}A$ são canonicamente isomorfas. De fato, é fácil de verificar que existe uma única função linear

$$\begin{array}{rcl} s : A\bar{\otimes}B & \longrightarrow & B\bar{\otimes}A \\ a \otimes b & \longmapsto & (-1)^{\alpha\beta} b \otimes a \end{array}$$

para quaisquer $a \in A_\alpha$, $b \in B_\beta$ e α, $\beta \in \Gamma$, e que esta função é um isomorfismo de álgebras $\Gamma-$graduadas.

A definição do produto tensorial graduado de álgebras associativas pode ser intuitivamente estendida para o caso em que temos mais do que dois fatores.

8) Sejam A uma álgebra associativa $\Gamma-$graduada e V um $A-$módulo. Em particular, V é um espaço vetorial. O $A-$módulo V é dito $\Gamma-$graduado se o espaço vetorial V é $\Gamma-$graduado e, além disso,

$$A_\alpha V_\beta \subseteq V_{\alpha+\beta}\,, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \Gamma.$$

Um homomorfismo entre $A-$módulos, é por definição um homomorfismo entre os $A-$módulos subjacentes que também é um homomorfismo entre os espaços vetoriais $\Gamma-$graduados subjacentes. As definições de isomorfismos e automorfismos entre $A-$módulos são naturais.

9) Sejam A e B duas álgebras associativas $\Gamma-$graduadas e considere V (resp. W) um $A-$módulo (resp. $B-$módulo) $\Gamma-$graduado. Lembre que $V \otimes W$ é um espaço vetorial $\Gamma-$graduado e que $A\bar{\otimes}B$ é uma álgebra associativa $\Gamma-$graduada. Assim, existe uma única estrutura de $A\bar{\otimes}B-$módulo $\Gamma-$graduado em $V \otimes W$ tal que

$$(a \otimes b)(v, w) = (-1)^{\beta\xi}(av) \otimes (bw)\,, \quad \forall\, a \in A,\, b \in B_\beta,\, v \in V_\xi,\, w \in W;\;\; \alpha,\, \xi \in \Gamma.$$

Vamos introduzir agora algumas noções para o caso em que uma álgebra é equipada com ambas as graduações, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_2$.

Definição 1.2.1. Uma álgebra $\mathbb{Z}_2-$graduada é chamada de *super álgebra*.

Definição 1.2.2. Uma super álgebra S é dita $\mathbb{Z}-$graduada se para uma família $\{S_j \,|\, j \in \mathbb{Z}\}$ de subespaços $\mathbb{Z}_2-$graduados de S temos que

$$S = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S_j\,, \quad S_iS_j \subseteq S_{i+j}\ \forall\, i, j \in \mathbb{Z}. \tag{1.2.2}$$

A $\mathbb{Z}-$graduação $\{S_j \,|\, j \in \mathbb{Z}\}$ é *consistente* com a $\mathbb{Z}_2-$graduação de S se

$$S_{\bar{0}} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S_{2j}\,, \quad S_{\bar{1}} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S_{2j+1}. \tag{1.2.3}$$

Veja que de acordo com a nossa definição uma super álgebra com uma $\mathbb{Z}-$graduação consistente (ou uma super álgebra $\mathbb{Z}-$graduada consistentemente) nada mais é que uma álgebra $\mathbb{Z}-$graduada equipada com a $\mathbb{Z}_2-$graduação induzida pela sua $\mathbb{Z}-$graduação.

Exemplo 1.2.3. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e considere $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ uma base de V. Sabemos que a álgebra exterior

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n(V),$$

é uma álgebra associativa $\mathbb{Z}-$graduada. A $\mathbb{Z}-$graduação induz uma $\mathbb{Z}_2-$graduação de $\bigwedge(V)$, onde

$$\bigwedge(V)_{\bar{0}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^{2k}(V), \quad \bigwedge(V)_{\bar{1}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^{2k+1}(V).$$

Assim, $\bigwedge(V)$ pode ser considerada como uma super álgebra. Chamamos tal álgebra de *super álgebra de Grassmann*. Note que por construção $\bigwedge(V)$ é uma super álgebra $\mathbb{Z}-$graduada consistentemente.

Às vezes é mais conveniente ver a super álgebra de Grassmann como sendo a álgebra dos polinômios nas variáveis ξ_i, onde a seguinte relação é satisfeita

$$\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i.$$

Quando for o caso denotaremos tal álgebra por $\bigwedge[\xi_1, \ldots, \xi_n]$.

Capítulo 2

Teoria básica de super álgebras de Lie

O objetivo deste capítulo é expor as definições, os exemplos e os fatos básicos da teoria de super álgebras de Lie. A referência para tal tema são [M. Scheunert] e [Kac 1].

2.1 Definição e propriedades elementares das super álgebras de Lie

Lembre que uma super álgebra é por definição nada mais do que uma álgebra $\mathbb{Z}_2-$graduada.

Definição 2.1.1. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ uma super álgebra cuja multiplicação é denotada pelo colchete [,]. Isso implica, em particular, que

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}\,, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma *super álgebra de Lie*, se sua multiplicação satisfaz as seguintes condições:

a) Anti-simetria:

$$[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$$

b) Identidade de Jacobi:

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{|a||b|}[b, [a, c]]$$

Aqui, a, b, $c \in \mathfrak{g}$ são elementos homogêneos.

Observação 2.1.2. **a)** A subálgebra $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é uma álgebra de Lie.

b) As definições de subálgebras graduadas, ideais graduados e quocientes graduados de uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ são naturais e não precisamos repeti-las. Vamos notar, contudo, que um ideal graduado à esquerda (ou à direita) de $\mathfrak{g}$ é automaticamente um ideal graduado bilateral.

No próximo capítulo iremos descrever várias super álgebra de Lie. Sendo assim, restringiremos a nossa atenção para alguns exemplos que serão usados no desenvolvimento da teoria geral.

Exemplo 2.1.3. O *comutador* de $\mathfrak{g}$, definido por $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é um ideal graduado de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 2.1.4. O produto direto de duas super álgebras de Lie é uma super álgebra de Lie.

Se A é uma super álgebra, podemos definir a função bilinear $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : A \times A \longrightarrow A$ onde

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba \quad a,\, b \in A. \tag{2.1.1}$$

Esta função é chamada de *super comutador*. No caso em que A é uma super álgebra associativa, o super comutador satisfaz a seguinte condição:

$$[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{|a||b|}b[a, c] \quad a,\, b,\, c \in A. \tag{2.1.2}$$

Exemplo 2.1.5. Seja A uma super álgebra associativa. Então, o super comutador faz de A uma super álgebra de Lie. Dizemos que tal álgebra de Lie é associada a álgebra associativa A. Observe que a identidade de Jacobi segue diretamente de (2.1.2).

Um caso especial e de grande importância do exemplo 2.1.5 é dado no próximo exemplo.

Exemplo 2.1.6. Seja $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado. A álgebra $\mathrm{End}\,(V)$ torna-se uma super álgebra associativa se definirmos a $\mathbb{Z}_2-$graduação por

$$\mathrm{End}_\alpha(V) = \{T \in \mathrm{End}(V) \mid T(V_\beta) \subseteq V_{\alpha+\beta},\ \beta \in \mathbb{Z}_2\},$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. A super álgebra de Lie associada a $\mathrm{End}\,(V)$ será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$ e será chamada de super álgebra de Lie linear geral.

Definição 2.1.7. Seja A uma super álgebra. Denote por $\mathrm{Der}_\alpha(A)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, o subespaço de todos $D \in \mathrm{End}_\alpha(A)$ tais que

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{\alpha|a|}aD(b), \quad \forall\, a, b \in A. \tag{2.1.3}$$

Defina agora

$$\mathrm{Der}(A) = \mathrm{Der}_{\bar{0}}(A) \oplus \mathrm{Der}_{\bar{1}}(A).$$

É fácil ver que $\mathrm{Der}(A)$ é uma subálgebra graduada de $\mathfrak{gl}(A)$. Os elementos de $\mathrm{Der}(A)$ são chamados de *super-derivações* de A e $\mathrm{Der}(A)$ é chamada de super álgebra das super-derivações de A.

Exemplo 2.1.8. Considere os operadores lineares $\{\partial_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ definidos nos vetores da base da super álgebra de Grassmann $A = \bigwedge[\xi_1,\, \ldots,\, \xi_n]$ por

$$\partial_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

e estenda para toda álgebra conforme a equação (2.1.3). Não é difícil mostrar que $\mathrm{Der}(A)$ é o subespaço de $\mathrm{End}(A)$ gerado por $\{\partial_i \mid i = 1, \ldots, n\}$.

A super álgebra $\mathfrak{gl}(V)$ tem um papel fundamental no desenvolvimento da teoria de super álgebras de Lie. Em particular, temos a seguinte definição:

Definição 2.1.9. Seja $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ um espaço $\mathbb{Z}_2-$graduado. Uma *representação graduada* de uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo (par) entre as super álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Se ρ é injetora dizemos que a representação é *fiel*.

Exemplo 2.1.10. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie. Defina a função

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \\ a &\longmapsto \mathrm{ad}(a) \end{aligned}$$

onde $\mathrm{ad}(a)(b) = [a, b]$, $\forall\, b \in \mathfrak{g}$. A partir das propriedades do colchete de $\mathfrak{g}$ podemos provar as seguintes afirmações:

a) A função ad é um homomorfismo de super álgebras de Lie, ou seja, ad é uma representação graduada de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$. Tal representação é chamada de *representação adjunta* de $\mathfrak{g}$.

b) Da identidade de Jacobi segue que $\mathrm{ad}(a)$ é uma super-derivação de $\mathfrak{g}$, para todo $a \in \mathfrak{g}$.

Combinando esses dois resultados vemos que ad é um homomorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ assumindo valores $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. As super-derivações de $\mathfrak{g}$ que são da forma $\mathrm{ad}(a)$, $a \in \mathfrak{g}$, são conhecidas como *super-derivações internas* de $\mathfrak{g}$ e formam um ideal graduado de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, já que

$$[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(D(x)) \; \forall \, D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}).$$

Denotamos este ideal por $\mathrm{Inner}(\mathfrak{g})$.

Já foi mencionado anteriormente que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é uma álgebra de Lie. Portanto, a restrição de ad a $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é uma representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}$. Observe que os subespaços $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ de $\mathfrak{g}$ são invariantes por esta representação. Isso sugere a seguinte definição:

Definição 2.1.11. A representação ad da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, induz uma representação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ no subespaço ímpar $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Esta representação é chamada de representação adjunta de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e será denotada por ad'.

Agora, iremos dar uma nova descrição das super álgebras de Lie. Se $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie, então podemos especificar unicamente $\mathfrak{g}$ por três objetos. São eles, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, a representação ad' de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e a função bilinear simétrica

$$\varphi : \mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}},$$

onde $\varphi(y, z) = [y, z]$, para quaisquer $y,\ z \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Da identidade de Jacobi segue que φ é $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariante, isto é,

$$[a, \varphi(b, c)] = \varphi(\mathrm{ad}'(a)(b), c) + \varphi(b, \mathrm{ad}'(a)(c)), \quad \forall \, a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}},\ b, c \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}.$$

Além disso,

$$\mathrm{ad}'(\varphi(a, b))c + \mathrm{ad}'(\varphi(b, c))a + \mathrm{ad}'(\varphi(c, a))b = 0 \;\; \forall \;\; a, b, c \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}. \tag{2.1.4}$$

Reciprocamente, seja $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ uma álgebra de Lie cujo colchete de Lie é denotado por $[\,\cdot\,,\,\cdot]_{\bar{0}}$ e ad' uma representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em algum espaço vetorial $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Suponha também que nos é dada uma função bilinear simétrica $\varphi : \mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Considere o espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e defina uma função $[\,\cdot\,,\,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ da seguinte forma:

$$[x, y] = [x, y]_{\bar{0}}, \quad \text{se} \quad x, y \in \mathfrak{g}_{\bar{0}};$$

$$[x, y] = -[y, x] = \mathrm{ad}'(x)y, \quad \text{se} \quad x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}},\ y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}};$$

$$[y, z] = \varphi(y, z), \quad \text{se} \quad y, z \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}.$$

Esta função é bilinear e satisfaz as condições da definição 2.1.1 se e só se φ é $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariante e satisfaz a equação (2.1.4).

Neste sentido, uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é uma "super estrutura"construída sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Este ponto de vista é bastante útil tanto para o desenvolvimento da teoria geral quanto para construções explicitas de super álgebras de Lie.

Exemplo 2.1.12. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 e Ψ uma forma bilinear não degenerada e anti-simétrica em V (quaisquer duas formas satisfazendo isso são proporcionais). Então, $\mathfrak{sl}(V) = \mathfrak{sp}(\Psi)$ é a álgebra de Lie das transformações lineares em V que preservam Ψ. Para $i = 1, 2, 3$, tome copias (V_i, Ψ_i) de (V, Ψ) e considere

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(\Psi_1) \times \mathfrak{sp}(\Psi_2) \times \mathfrak{sp}(\Psi_3), \quad \mathfrak{g}_{\bar{1}} = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3. \tag{2.1.5}$$

Para uma representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, escolha o produto tensorial das representações naturais de $\mathfrak{sp}(\Psi_i)$ em V_i.

Defina agora funções bilineares

$$\varphi_i : V_i \times V_i \longrightarrow \mathfrak{sp}(\Psi_i),$$

por

$$\varphi_i(x_i, y_i)z_i = \Psi_i(y_i, z_i)x_i - \Psi_i(z_i, x_i)y_i\,, \quad \forall\, x_i,\, y_i,\, z_i \in V_i.$$

Não é difícil de mostrar que φ_i é simétrica e $\mathfrak{sp}(\Psi_i)-$invariante.

Considerando $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ uma tripla de elementos de $\Bbbk$, podemos definir uma função bilinear

$$\varphi : \mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$$

da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \varphi(x_i \otimes x_2 \otimes x_3, y_1 \otimes y_2 \otimes y_3) &= \sigma_1 \Psi_2(x_2, y_2)\Psi_3(x_3, y_3)\varphi_1(x_1, y_1) \\ &+ \sigma_2 \Psi_1(x_1, y_1)\Psi_3(x_3, y_3)\varphi_2(x_2, y_2) \\ &+ \sigma_3 \Psi_1(x_1, y_1)\Psi_2(x_2, y_2)\varphi_3(x_3, y_3), \end{aligned}$$

para quaisquer $x_i,\, y_i \in V_i$, $i = 1, 2, 3$. A função φ é simétrica e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariante. Além disso, φ satisfaz a equação (2.1.4) se e só se $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Assim, se esta condição é satisfeita, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é uma super álgebra de Lie, a qual será denotada por $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Observe que esta notação é conveniente. De fato, suponha que nos é dado, para $i = 1, 2, 3$ um espaço vetorial V_i' de dimensão 2, uma forma bilinear Ψ_i' em V_i' e uma constante $\sigma_i' \in \Bbbk$. Suponha também que $\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$. Aplicando a construção acima obtemos uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}'$. Não é difícil mostrar que as super álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ são isomorfas se e só se existe uma permutação π do conjunto $\{1, 2, 3\}$ e um elemento não nulo $\tau \in \Bbbk$ tal que

$$\sigma_i' = \tau \sigma_{\pi(i)}\,, \quad i = 1, 2, 3.$$

2.2 A álgebra envelopante de uma super álgebra de Lie

Nesta seção introduziremos a álgebra envelopante de uma super álgebra de Lie, descreveremos algumas de suas propriedades e exporemos resultados que serão usados ao longo do texto. Assim como acontece no contexto de álgebras de Lie, a álgebra envelopante é uma ferramenta muito útil para a teoria de super álgebras de Lie e suas representações.

2.2.1 Definição e algumas propriedades básicas da álgebra envelopante

Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e considere a álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ do espaço vetorial $\mathfrak{g}$. A $\mathbb{Z}_2-$graduação de $\mathfrak{g}$ induz uma $\mathbb{Z}_2-$graduação em $T(\mathfrak{g})$ tal que a injeção canônica $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$ é uma função linear par e $T(\mathfrak{g})$ é uma super álgebra. Seja J o ideal bilateral de $T(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos da forma

$$x \otimes y - (-1)^{\alpha\beta} y \otimes x - [x, y], \text{ com } x \in \mathfrak{g}_\alpha,\ y \in \mathfrak{g}_\beta;\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Estes elementos são homogêneos (de grau $\alpha + \beta$), e sendo assim J é um ideal graduado. Portanto, se definirmos

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J,$$

segue que $U(\mathfrak{g})$ é uma super álgebra associativa. Esta álgebra é chamada de *álgebra universal envelopante* de $\mathfrak{g}$. Se compormos a injeção canônica $\mathfrak{g} \hookrightarrow T(\mathfrak{g})$ com a projeção canônica $T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow T(\mathfrak{g})/J = U(\mathfrak{g})$, obteremos a função linear par

$$\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$$

que satisfaz a condição

$$\sigma([a, b]) = \sigma(a)\sigma(b) - (-1)^{\alpha\beta}\sigma(b)\sigma(a)\,, \quad \forall\ a \in \mathfrak{g}_\alpha,\ b \in \mathfrak{g}_\beta;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_2. \tag{2.2.1}$$

Qualquer elemento de $U(\mathfrak{g})$ é uma combinação linear de produtos da forma

$$\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_n),\ \ a_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i},\ \alpha_i \in \mathbb{Z}_2,\ \ 1 \leq i \leq n. \tag{2.2.2}$$

(Para $n = 0$, definimos o produto sendo igual a 1). Observe que o produto em (2.2.2) é um elemento homogêneo de $U(\mathfrak{g})$ cujo grau é $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

O par $(U(\mathfrak{g}), \sigma)$ é caracterizado pela equação (2.2.1) e pela seguinte propriedade universal:

Proposição 2.2.1. Seja A uma álgebra associativa com elemento unidade e seja f uma função linear de $\mathfrak{g}$ em A tal que

$$f([a, b]) = f(a)f(b) - (-1)^{\alpha\beta} f(b)f(a)\,, \quad \forall\ a \in \mathfrak{g}_\alpha,\ b \in \mathfrak{g}_\beta;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_2. \tag{2.2.3}$$

Então, existe um único homomorfismo $\tilde{f}$ entre as álgebras $U(\mathfrak{g})$ e A tal que

$$f = \tilde{f} \circ \sigma.$$

Corolário 2.2.2. Se A é uma super álgebra e se f é homogênea de grau zero, então $\tilde{f}$ também é homogênea de grau zero, isto é, $\tilde{f}$ é um homomorfismo de super álgebras.

Corolário 2.2.3. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ duas super álgebras de Lie e denote por σ e σ' as funções canônicas entre $\mathfrak{g}$ e $U(\mathfrak{g})$ e entre $\mathfrak{g}'$ e $U(\mathfrak{g}')$ respectivamente. Se $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ é um homomorfismo de super álgebras de Lie, então existe um único homomorfismo $\bar{f} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}')$ de super álgebras tal que

$$\sigma' \circ f = \bar{f} \circ \sigma.$$

Para dar um exemplo de como a proposição 2.2.1 e seus corolários podem ser aplicados, discutiremos a álgebra envelopante do produto direto $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ de duas super álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$. As funções canônicas entre $\mathfrak{g}$ e $U(\mathfrak{g})$ e entre $\mathfrak{g}'$ e $U(\mathfrak{g}')$ serão denotadas por σ e σ', respectivamente.

Considere S uma álgebra associativa e $f : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' \longrightarrow S$ uma função linear que satisfaz a condição (2.2.3). Seja h (resp. h') a restrição de f a $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$). Então, a condição (2.2.3) também é satisfeita por h e h'. Logo, existem dois homomorfismos de álgebras

$$\bar{h} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow S, \quad \bar{h}' : U(\mathfrak{g}') \longrightarrow S$$

tais que $h = \bar{h} \circ \sigma$ e $h = \bar{h}' \circ \sigma'$. É fácil mostrar que

$$\bar{h}(x)\bar{h}'(x') = (-1)^{\xi\xi'}\bar{h}'(x')\bar{h}(x), \quad \forall\, x \in U(\mathfrak{g})_\xi,\, x' \in U(\mathfrak{g}')_{\xi'};\ \xi,\, \xi' \in \mathbb{Z}_2.$$

Portanto, se $U(\mathfrak{g})\bar{\otimes}U(\mathfrak{g}')$ é o produto tensorial graduado entre as super álgebras $U(\mathfrak{g})$ e $U(\mathfrak{g}')$, existe um homomorfismo de álgebras

$$\hat{f} : U(\mathfrak{g})\bar{\otimes}U(\mathfrak{g}') \longrightarrow S$$

tal que

$$\hat{f}(x \otimes x') = \bar{h}(x)\bar{h}'(x'), \quad \forall\, x \in U(\mathfrak{g}),\, x' \in U(\mathfrak{g}').$$

Defina agora a função

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' & \longrightarrow & U(\mathfrak{g})\bar{\otimes}U(\mathfrak{g}') \\ (a, a') & \longmapsto & \sigma(a) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma'(a') \end{array} \tag{2.2.4}$$

para quaisquer $a \in \mathfrak{g}$, $a' \in \mathfrak{g}'$. A função τ satisfaz a condição (2.2.3) e

$$f = \hat{f} \circ \tau.$$

Concluímos daí o seguinte resultado:

Proposição 2.2.4. A álgebra envelopante $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}')$ é canonicamente isomorfa ao produto tensorial graduado $U(\mathfrak{g})\bar{\otimes}U(\mathfrak{g}')$ e a função τ definida em (2.2.4) corresponde à função canônica entre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ e $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}')$.

2.2.2 Filtração da álgebra envelopante e o teorema de PBW

Sejam $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado e $T(V)$ a álgebra tensorial de V. Já sabemos que $T(V)$ é uma álgebra $\mathbb{Z}-$graduada

$$T(V) = \bigoplus_n T_n(V),$$

onde $T_n(V) = \{0\}$ se $n \leq -1$ e $T_n(V) = V^{\otimes^n}$ se $n \geq 0$. Se $T(V)$ está equipada com a $\mathbb{Z}_2-$graduação induzida de V, então todos os $T_n(V)$ são subespaços $\mathbb{Z}_2-$graduados de $T(V)$, sendo assim, por definição, $T(V)$ é uma super álgebra associativa $\mathbb{Z}-$graduada.

Vamos considerar agora o ideal bilateral $\widetilde{J}$ de $T(V)$ que é gerado pelos tensores da forma

$$a \otimes b - (-1)^{\alpha\beta} b \otimes a, \quad a \in V_\alpha,\ b \in V_\beta;\ \alpha,\, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Estes tensores são homogêneos com relação a ambas as graduações de $T(V)$. Assim,

$$\widetilde{U}(V) = T(V)/\widetilde{J}$$

é uma super álgebra associativa e $\mathbb{Z}-$graduada que é chamada de *álgebra supersimétrica* do espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado V.

Assim, tomando $V = \mathfrak{g}$ temos que $T(\mathfrak{g})$ possui uma estrutura natural de super álgebra $\mathbb{Z}-$graduada

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} T_n(\mathfrak{g}).$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, defina

$$T^n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m \leq n} T_m(\mathfrak{g}). \tag{2.2.5}$$

Note que $T^n(\mathfrak{g})$ são subespaços $\mathbb{Z}_2-$graduados de $T(\mathfrak{g})$.

Seja agora $U(\mathfrak{g})$ a álgebra envelopante de $\mathfrak{g}$ e $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ a função canônica. Lembre que $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$, onde J é um ideal $\mathbb{Z}_2-$graduado. Seja $U^n(\mathfrak{g})$ a imagem de $T^n(\mathfrak{g})$ pela projeção canônica $T(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g})$. As seguintes propriedades são satisfeitas:

a) $U^n(\mathfrak{g}) \subseteq U^m(\mathfrak{g})$ se $n \leq m$;

b) $U^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ se $n \leq -1$;

c) $U^0(\mathfrak{g}) = \Bbbk 1$;

d) $\bigcup_{n \geq 0} U^n(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})$;

e) $U^n(\mathfrak{g})U^n(\mathfrak{g}) \subseteq U^{n+m}(\mathfrak{g})$, para quaisquer n, $m \in \mathbb{Z}$.

A família $\{U^n(\mathfrak{g}) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ é chamada de *filtração canônica* da álgebra envelopante $U(\mathfrak{g})$.

Considere agora

$$\mathrm{G}(\mathfrak{g}) = \bigoplus \mathrm{G}_n(\mathfrak{g}) \tag{2.2.6}$$

a álgebra $\mathbb{Z}-$graduada associada a álgebra filtrada $U(\mathfrak{g})$. Aqui

$$\mathrm{G}_n(\mathfrak{g}) = U^n(\mathfrak{g})/U^{n-1}(\mathfrak{g})$$

e a multiplicação em $\mathrm{G}(\mathfrak{g})$ é obtida passando ao quociente a multiplicação de $U(\mathfrak{g})$. Note que $\mathrm{G}(\mathfrak{g})$ também possui uma $\mathbb{Z}_2-$graduação natural. Equipada com estas duas graduações $\mathrm{G}(\mathfrak{g})$ é uma super álgebra associativa $\mathbb{Z}-$graduada.

Denote por φ_n, a composição das funções canônicas $T_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow U^n(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathrm{G}_n(\mathfrak{g})$ e considere a função linear $\varphi : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathfrak{g})$ que é definida pela família $\{\varphi_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Dessa forma φ é um homomorfismo de super álgebras $\mathbb{Z}-$graduadas que anula todos os tensores da forma

$$a \otimes b - (-1)^{\alpha\beta} b \otimes a, \quad a \in \mathfrak{g}_\alpha,\ b \in \mathfrak{g}_\beta;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Consequentemente, φ define um homomorfismo $\widetilde{\varphi}$, da super álgebra $\mathbb{Z}-$graduada $\widetilde{U}(\mathfrak{g})$ (álgebra super-simétrica do espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado $\mathfrak{g}$) para a super álgebra $\mathbb{Z}-$graduada $\mathrm{G}(\mathfrak{g})$.

Estamos prontos para enunciar um resultado central sobre as álgebras universais envelopantes: O teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt ou apenas PBW.

Teorema 2.2.5. (PBW) O homomorfismo $\widetilde{\varphi} : \widetilde{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathfrak{g})$ é um isomorfismo de super álgebras $\mathbb{Z}-$graduadas.

Vamos agora tirar algumas conclusões a partir do teorema de PBW.

Corolário 2.2.6. A função canônica $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ é injetiva.

A partir de agora, graças ao corolário 2.2.6 denotaremos a imagem $\sigma(x)$ de um elemento $x \in \mathfrak{g}$ pelo próprio elemento x, isto é, $\sigma(x) := x$.

O próximo corolário é ele próprio muitas vezes chamado de teorema de PBW. Ele nos fornece uma base de $U(\mathfrak{g})$ a partir de uma base de $\mathfrak{g}$.

Corolário 2.2.7. Sejam $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e $\{x_i \mid i \in I\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ formada por elementos homogêneos. Suponha que o conjunto de índices I é totalmente ordenado. Se $(i_1, \ldots, i_r)$ percorre todas as sequências finitas em I tais que

$$r \geq 0;$$

$$i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r;$$

$$i_p < i_{p+1}, \text{ se } x_{i_p}, x_{i_{p+1}} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}.$$

Então, os monômios da forma

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}.$$

formam uma base do espaço vetorial $U(\mathfrak{g})$. Para $r = 0$, o produto acima é definido sendo igual a 1.

Considere $\mathfrak{g}'$ uma subálgebra graduada da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\iota : \mathfrak{g}' \hookrightarrow \mathfrak{g}$ a injeção canônica. Se σ e σ' são as funções canônicas entre $\mathfrak{g}$ e $U(\mathfrak{g})$ e entre $\mathfrak{g}'$ e $U(\mathfrak{g}')$, respectivamente, então de acordo com o corolário 2.2.3, existe um homomorfismo canônico de super álgebras

$$\bar{\iota} : U(\mathfrak{g}') \longrightarrow U(\mathfrak{g}),$$

tal que

$$\sigma \circ \iota = \bar{\iota} \circ \sigma'.$$

Corolário 2.2.8. O homomorfismo $\bar{\iota}$ é injetivo.

O homomorfismo canônico $\bar{\iota}$ nos permite identificar a álgebra envelopante $U(\mathfrak{g}')$ de $\mathfrak{g}'$ com uma subálgebra graduada de $U(\mathfrak{g})$. Assim, podemos considerar a álgebra $U(\mathfrak{g})$ como um $U(\mathfrak{g}')-$módulo. Este módulo é livre (isto é, tem uma base). Mais precisamente, seja $\{x_j \mid j \in J\}$ uma família de elementos homogêneos de $\mathfrak{g}$, tais que suas imagens por meio do homomorfismo canônico $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ formam uma base para o espaço vetorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. Suponha que J é totalmente ordenado. Se $(j_1, \ldots, j_r)$ percorre todas as sequências finitas em J tais que

$$r \geq 0;$$

$$j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_r;$$

$$j_p < j_{p+1}, \text{ se } x_{j_p}, x_{j_{p+1}} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}.$$

Então, os monômios da forma

$$x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_r}.$$

formam uma base para o $U(\mathfrak{g}')-$módulo $U(\mathfrak{g})$.

Note que o corolário 2.2.8 pode ser aplicado, em particular, para o caso em que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Então, $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ é a álgebra envelopante usual da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $\{y_1, \ldots, y_n\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Deve-se tomar cuidado para não confundir $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ com a subálgebra par $U(\mathfrak{g})_{\bar{0}}$ de $U(\mathfrak{g})$.

2.3 Representações de super álgebras de Lie

Nesta seção iremos descrever as construções básicas que são usualmente feitas com as representações de super álgebras de Lie. Podemos antecipar que o conteúdo desta seção é uma transcrição dos resultados que são bem conhecidos no contexto das álgebras de Lie. De fato, tudo que temos que fazer é adicionar os fatores sinais (± 1) nos lugares apropriados.

2.3.1 Conexão entre representações de $\mathfrak{g}$ e $U(\mathfrak{g})$

Na definição 2.1.9 nós introduzimos o conceito de uma representação graduada de uma super álgebra de Lie. Vamos agora repetir esta definição em uma linguagem compatível com os resultados da seção 2.2.

Definição 2.3.1. Sejam $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e V um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado. Suponha que ρ é uma representação graduada de $\mathfrak{g}$ em V. Neste caso dizemos que V é equipado com uma representação graduada de $\mathfrak{g}$ e chamamos tal espaço vetorial de um $\mathfrak{g}-$*módulo* cuja a ação de $\mathfrak{g}$ em V é a induzida por ρ.

Seja $U(\mathfrak{g})$ a álgebra envelopante de $\mathfrak{g}$ e $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ o homomorfismo canônico. Se ρ é uma representação graduada de $\mathfrak{g}$ em algum espaço vetorial graduado V, então graças à propriedade universal de $U(\mathfrak{g})$ existe um único homomorfismo de super álgebras associativas

$$\overline{\rho} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}(V),$$

tal que

$$\overline{\rho}(a) = \rho(a)\,, \quad \forall\, a \in \mathfrak{g}.$$

Em particular, temos que

$$\overline{\rho}(U(\mathfrak{g})_\alpha)V_\beta \subseteq V_{\alpha+\beta}\,, \quad \forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Assim, $\overline{\rho}$ é uma representação da super álgebra associativa $U(\mathfrak{g})$ no espaço vetorial graduado V, ou em outra linguagem, V é um $U(\mathfrak{g})-$módulo $\mathbb{Z}_2-$graduado.

Reciprocamente, suponha que V é um $U(\mathfrak{g})-$módulo e seja

$$\omega : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$

o correspondente homomorfismo de super álgebras associativas. Então, a restrição ρ de ω a $\mathfrak{g}$, é uma representação graduada de $\mathfrak{g}$ em V, e além disso $\overline{\rho} = \omega$.

Tendo em vista a discussão acima, os conceitos de um $\mathfrak{g}-$módulo graduado e um $U(\mathfrak{g})-$módulo graduado são completamente equivalentes.

Para simplificar notações, a partir de agora escreveremos ρ ao invés de $\overline{\rho}$ e x ao invés de $\rho(x)$.

Exemplo 2.3.2. O espaço vetorial $\Bbbk$ possui uma estrutura de $\mathfrak{g}-$módulo graduado trivial, onde sua $\mathbb{Z}_2-$graduação é definida por

$$\Bbbk_{\bar{0}} = \Bbbk\,, \quad \Bbbk_{\bar{1}} = \{0\}$$

e a representação de $\mathfrak{g}$ em $\Bbbk$ é igual a zero.

De acordo com nossas convenções gerais sobre estruturas algébricas graduadas, um homomorfismo entre dois $\mathfrak{g}-$módulos graduados V e W é uma função linear par

$$f : V \longrightarrow W$$

tal que

$$f(av) = af(v), \;\; \forall\, a \in \mathfrak{g},\, v \in V.$$

Daí, segue que

$$f(xv) = xf(v), \;\; \forall\, x \in U(\mathfrak{g}),\, v \in V,$$

ou seja, f é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})-$módulos graduados.

Os conceitos de submódulo graduado, módulo quociente graduado, soma direta, irredutibilidade e completa redutibilidade de um $\mathfrak{g}-$módulo são os usuais e não serão definidos separadamente.

2.3.2 O produto tensorial de $\mathfrak{g}-$módulos graduados

Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ duas super álgebras de Lie. Suponha também que nos são dados um $\mathfrak{g}-$módulo graduado V e um $\mathfrak{g}'-$módulo graduado V'. Considerando V como um $U(\mathfrak{g})-$módulo graduado e V' como um $U(\mathfrak{g}')-$módulo graduado, sabemos que $V \otimes V'$ possui uma estrutura natural de $U(\mathfrak{g})\bar{\otimes}U(\mathfrak{g}')-$módulo, onde a ação é definida por

$$(x \otimes x')(v \otimes v') = (-1)^{\xi'\eta}(xv) \otimes (x'v'),$$

para quaisquer $x \in U(\mathfrak{g})$, $x' \in U(\mathfrak{g}')_{\xi'}$, $v \in V_\eta$, $v' \in V'$ e ξ', $\eta \in \mathbb{Z}_2$ (ver seção 1.2).

Pela proposição 2.2.4, o produto tensorial graduado $U(\mathfrak{g})\bar{\otimes}U(\mathfrak{g})$ é canonicamente isomorfo a álgebra envelopante de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, portanto $V \otimes V'$ é equipado com uma estrutura natural de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'-$módulo dada por

$$(a, a')(v \otimes v') = (av) \otimes v' + (-1)^{\alpha'\eta} v \otimes a'v',$$

para quaisquer $a \in \mathfrak{g}$, $a' \in \mathfrak{g}'_{\alpha'}$, $v \in V_\eta$, $v' \in V'$ e α', $\eta \in \mathbb{Z}_2$. Este $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'-$módulo graduado $V \otimes V'$ é chamado de produto tensorial do $\mathfrak{g}-$módulo graduado V com o $\mathfrak{g}'-$módulo graduado V'.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, então usando o homomorfismo diagonal $a \mapsto (a, a)$ entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, deduzimos a seguinte estrutura de $\mathfrak{g}-$módulo graduado em $V \otimes V'$

$$a(v \otimes v') = (av) \otimes v' + (-1)^{\alpha\eta} v \otimes (av'), \quad a \in \mathfrak{g}_\alpha,\ v \in V_\eta,\ v' \in V';\ \alpha, \eta \in \mathbb{Z}_2.$$

Observação 2.3.3. Note que essa construção pode ser estendida para uma quantidade finita de super álgebras de Lie.

2.3.3 Representações em espaços de funções multilineares

Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ duas super álgebras de Lie. Suponha que V é um $\mathfrak{g}-$módulo graduado e que V' é um $\mathfrak{g}'-$módulo graduado. Considere V como um $U(\mathfrak{g})-$módulo graduado e V' como um $U(\mathfrak{g}')-$módulo graduado. Então, $\mathrm{Hom}(V, V')$ possui uma estrutura natural de $U(\mathfrak{g})\bar{\otimes}U(\mathfrak{g}')-$módulo graduado. De fato, a $\mathbb{Z}_2-$graduação para $\mathrm{Hom}(V, V')$ é escolhida sendo

$$\mathrm{Hom}(V, V')_\alpha = \{T \in \mathrm{Hom}(V, V') \,|\, T(V_\beta) \subseteq V'_{\alpha+\beta},\ \beta \in \mathbb{Z}_2\},$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, e a estrutura de módulo é definida por

$$(x \otimes x')T = (-1)^{\xi(\xi'+\gamma)} x' \circ T \circ (\theta(x)),$$

para quaisquer $x \in U(\mathfrak{g})_\xi$, $x' \in U(\mathfrak{g}')_{\xi'}$, $T \in \mathrm{Hom}(V, V')$ e ξ, $\xi' \in \mathbb{Z}_2$. Aqui θ é uma função linear

$$\theta : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}),$$

tal que

$$\theta(xy) = (-1)^{\xi\eta}\theta(y)\theta(x),\ \forall\, x \in U(\mathfrak{g})_\xi,\ y \in U(\mathfrak{g})_\eta,\ \xi\, \eta \in \mathbb{Z}_2;$$

$$\theta(\sigma(a)) = -\sigma(a),\ \ \forall a \in \mathfrak{g} \ \text{ e } \ \theta(1) = 1.$$

A representação correspondente de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ é dada por

$$(a, a')T = a' \circ T - (-1)^{\alpha\gamma} T \circ a, \tag{2.3.1}$$

para quaisquer $a \in \mathfrak{g}_\alpha$, $a' \in \mathfrak{g}'$, $T \in \mathrm{Hom}(V,V')_\gamma$ e $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_2$. O caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$ é particularmente importante. Neste caso, usando o homomorfismo diagonal $a \mapsto (a,a)$ entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, obtemos de (2.3.1) a seguinte estrutura de $\mathfrak{g}-$módulo graduado em $\mathrm{Hom}(V,V')$:

$$aT = a \circ T - (-1)^{\alpha\gamma} T \circ a \tag{2.3.2}$$

para quaisquer $a \in \mathfrak{g}_\alpha$, $T \in \mathrm{Hom}(V,V')_\gamma$ e $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_2$.

Vamos considerar agora $V' = \Bbbk$ o $\mathfrak{g}-$módulo trivial (ver exemplo 2.3.2). Então, $\mathrm{Hom}(V,\Bbbk) = V^*$ é o espaço vetorial dual de V, sua $\mathbb{Z}_2-$graduação é dada por

$$(V^*)_\alpha = \{T \in V^* \,|\, T(V_{\alpha+\bar{1}}) = \{0\}\},$$

e a equação (2.3.2) nos dá a seguinte ação de $\mathfrak{g}$ em V^*

$$aT = -(-1)^{\alpha\gamma} T \circ a, \;\; \forall\, a \in \mathfrak{g}_\alpha,\, T \in (V^*)_\gamma;\, \alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_2. \tag{2.3.3}$$

Dizemos que o $\mathfrak{g}-$módulo V^* é o $\mathfrak{g}-$*módulo dual* de V.

Os resultados desta subseção e da subseção anterior podem ser combinados para nos fornecer mais algumas representações. Como um exemplo, consideraremos um espaço de funções bilineares. Suponha então que V, V', W são $\mathfrak{g}-$módulos graduados. Denote o espaço vetorial das funções bilineares de $V \times V'$ a valores em W por $\mathrm{B}(V,V';W)$. Pela definição de $V \otimes V'$, este espaço é canonicamente isomorfo a $\mathrm{Hom}(V \otimes V';W)$. Portanto, a $\mathbb{Z}_2-$graduação natural de $\mathrm{B}(V,V';W)$ é dada por

$$\mathrm{B}(V,V;W)_\beta = \{\phi \in \mathrm{B}(V,V';W) \,|\, \phi(V_\xi, V'_{\xi'}) \subseteq W_{\beta+\xi+\xi'},\; \xi,\, \xi' \in \mathbb{Z}_2\}, \;\; \forall\, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

e a representação graduada de $\mathfrak{g}$ em $\mathrm{B}(V,V';W)$ é definida por

$$(a\phi)(v,v') = a\phi(v,v') - (-1)^{\alpha\beta}\phi(av,v') - (-1)^{\alpha(\beta+\xi)}\phi(v,xv'),$$

para quaisquer $a \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\phi \in \mathrm{B}(V,V';W)_\beta$, $v \in V_\xi$, $v' \in V'$ e α, β, $\xi \in \mathbb{Z}_2$.

Sabemos que existem alguns homomorfismos canônicos entre o produto tensorial de espaços vetoriais e o espaço das funções multilineares. Vamos discutir quais destes homomorfismos são homomorfismos de $\mathfrak{g}-$módulos graduados.

Sejam V, W, $V_1, \ldots, V_n$ $\mathfrak{g}-$módulos graduados e considerem todos os produtos tensoriais e espaços de funções multilineares equipados com uma estrutura de $\mathfrak{g}-$módulo graduado conforme as construções anteriores. Então, as seguintes funções lineares são homomorfismos de $\mathfrak{g}-$módulos graduados.

$$\eta : V \longrightarrow V^{**}$$
$$(\eta(x))(f) = (-1)^{\xi\gamma} f(x), \text{ se } x \in V_\xi,\; f \in (V^*)_\gamma;\; \xi, \gamma \in \mathbb{Z}_2$$

$$\lambda : \mathrm{B}(V,W;\Bbbk) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W^*)$$
$$((\lambda(f))(x))(y) = f(x,y), \text{ se } f \in \mathrm{B}(V,W;\Bbbk),\, x \in V,\; y \in W$$

$$\mu : \mathrm{Hom}(V,W^*) \longrightarrow (V \otimes W)^*$$
$$(\mu(T))(x \otimes y) = (T(x))(y), \text{ se } T \in \mathrm{Hom}(V,W^*),\, x \in V,\; y \in W$$

$$\tau : W \otimes V^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,W)$$
$$(\tau(y \otimes f))(x) = f(x)y, \text{ se } y \in W,\; f \in V^*,\, x \in V$$

A equação (2.3.3) sugere a seguinte definição:

Definição 2.3.4. Seja V um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado. Existe uma única função linear

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{End}(V) & \longrightarrow & \mathrm{End}(V^*), \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

tal que

$$A^T(f) = (-1)^{\alpha\gamma} f \circ A, \;\; A \in \mathrm{End}(V)_\alpha, \;\; f \in (V^*)_\gamma; \;\; \alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_2.$$

Se $A \in \mathrm{End}(V)$, então A^T é chamada de *supertransposta* de A.

Pela equação (2.3.3) a função $A \mapsto -A^T$ é um homomorfismo de $\mathfrak{gl}(V)$ em $\mathfrak{gl}(V^*)$.

2.3.4 Invariantes

Definição 2.3.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e V um $\mathfrak{g}-$módulo graduado. Um elemento $v \in V$ é chamado de *invariante* com respeito a representação de $\mathfrak{g}$ em V (ou simplesmente $\mathfrak{g}-$invariante) se

$$ax = 0, \quad \forall\, a \in \mathfrak{g}.$$

Um elemento de V é $\mathfrak{g}-$invariante se e só se suas componentes homogêneas o são. Logo, o conjunto de todos os elementos $\mathfrak{g}-$invariantes de V é um subespaço graduado de V.

Exemplo 2.3.6. Sejam V, W $\mathfrak{g}-$módulos graduados. Um elemento $T \in \mathrm{Hom}(V, W)_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, é $\mathfrak{g}-$invariante se e só se

$$x \circ T = (-1)^{\xi\gamma} T \circ x, \quad \forall\, x \in U(\mathfrak{g})_\xi, \;\; \xi \in \mathbb{Z}_2.$$

O espaço vetorial de todas as funções lineares de V em W que são $\mathfrak{g}-$invariantes será denotado por $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(V, W)$. No caso em que a linguagem $U(\mathfrak{g})-$módulos é mais natural, também escreveremos $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(V, W)$ ao invés de $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(V, W)$ e chamaremos os elementos deste espaço de $U(\mathfrak{g})-$invariantes. Note que os elementos de $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(V, W)_{\bar{0}}$ são homomorfismos do $\mathfrak{g}-$módulo graduado V para o $\mathfrak{g}-$módulo graduado W.

Enunciaremos agora a versão graduada do lema de Schur para super álgebras de Lie.

Proposição 2.3.7. (Lema de Schur) Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e V um $\mathfrak{g}-$módulo graduado irredutível. Então,

$$\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(V)_{\bar{0}} = \Bbbk\, I\,, \quad \mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(V)_{\bar{1}} = \Bbbk\, T,$$

com $T = 0$ ou $T^2 = -I$.

Vamos mostrar que as duas possibilidades que aparecem na super versão do lema de Schur realmente ocorrem. Para isso consideraremos uma representação da super álgebra de Heisenberg que será definida no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.8. Considere a super álgebra de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{n}_{\bar{1}}$, onde $\mathfrak{n}_{\bar{0}}$ é o espaço vetorial unidimensional com base $\{e\}$, $\mathfrak{n}_{\bar{1}}$ é o espaço vetorial com base $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$ e os únicos colchetes não nulos em $\mathfrak{n}$ são

$$[a_i, b_i] = e.$$

Dessa forma $\mathfrak{n}$ é uma super álgebra de Lie que é conhecida como *super álgebra de Heisenberg.* Seja $\alpha \in \Bbbk$, um elemento não nulo arbitrário. Defina uma representação ρ_α de $\mathfrak{n}$ na álgebra de Grassmann $V = \bigwedge[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ da seguinte forma:

$$a_i \cdot u = \partial_i u, \;\; b_i \cdot u = \alpha \xi_i u, \;\; e \cdot u = \alpha u.$$

Assim, ρ_α é bem definida (ou seja, preserva os colchetes), é irredutível e os endomorfismos de V que comutam com os elementos de $\rho_\alpha(\mathfrak{n})$ são múltiplos da identidade.

Daremos agora o exemplo que realiza a segunda possibilidade do Lema de Schur.

Primeiramente vamos considerar a super álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n} \oplus \Bbbk\, c$, onde o colchete entre elementos de $\mathfrak{n}$ é definido como acima,

$$[\mathfrak{n}, c] = 0\,, \quad [c, c] = e$$

e $|c| = 1$. Seja também $\Bbbk[\epsilon]$, a álgebra de polinômios na variável ϵ. Como essa álgebra é $\mathbb{Z}-$graduada, podemos considerá-la como uma super álgebra, onde a sua $\mathbb{Z}_2-$graduação é a induzida pela $\mathbb{Z}-$graduação. Tomando o ideal graduado $\mathfrak{i}$ de $\Bbbk[\epsilon]$ que é gerado pelos elementos homogêneos (pares) da forma

$$\epsilon^2 - \alpha/2,$$

podemos definir a super álgebra quociente

$$W = \Bbbk[\epsilon]/\mathfrak{i}.$$

(Note que como espaço vetorial $W = \{a + b\epsilon \,/\, a, b \in \Bbbk\}$). Considerando a super álgebra $\widetilde{V} = V \bar{\otimes} W$ (ver seção 1.2), podemos definir uma representação $\widetilde{\rho}_\alpha$ de $\tilde{\mathfrak{n}}$ em $\widetilde{V}$ da seguinte maneira:

$$h(u \otimes v) = (hu) \otimes v\,, \text{ para todo } h \in \mathfrak{n} \text{ e } c(u \otimes v) = (1 \otimes \epsilon)(u \otimes v).$$

Lembre que $(1 \otimes \epsilon)(u \otimes v) = (-1)^{|\epsilon||u|}(1 \wedge u) \otimes (\epsilon v) = (-1)^{|u|}(u) \otimes (\epsilon v)$.

Desta forma, esta representação está bem definida e é irredutível. Tomando $n = 2$, podemos provar que o homomorfismo ímpar

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

comuta com $\widetilde{\rho}_\alpha$ para $\alpha = 2$, realizando assim o caso em que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V)_{\bar{1}} = \Bbbk\, T$, onde $T^2 = -I$.

Voltando a invariância, suponha que V, W e U são três $\mathfrak{g}-$módulos graduados.

Exemplo 2.3.9. Uma função bilinear $f : V \times W \longrightarrow U$ que é homogênea de grau β é $\mathfrak{g}-$invariante se e só se

$$af(v, w) = (-1)^{\alpha\beta} f(av, w) + (-1)^{\alpha(\beta+\xi)} f(v, aw),$$

para quaisquer $a \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V_\xi$, $w \in W$ e $\alpha, \xi \in \mathbb{Z}_2$.

Para qualquer função bilinear $f : V \times W \longrightarrow U$, definimos uma função bilinear $sf : W \times V \longrightarrow U$, tal que

$$sf(w, v) = (-1)^{\xi\eta} f(v, w), \;\; \forall\, v \in V_\xi,\; w \in W_\eta,\; \xi, \eta \in \mathbb{Z}_2.$$

A função $f \mapsto sf$ de $\mathrm{B}(V, W; U)$ em $\mathrm{B}(W, V; U)$ é um isomorfismo de $\mathfrak{g}-$módulos graduados, portanto f é $\mathfrak{g}-$invariante se e só se sf é $\mathfrak{g}-$invariante. Isso sugere a seguinte definição:

Definição 2.3.10. Uma função bilinear $f : V \times V \longrightarrow U$ é chamada de *supersimétrica/antí-supersimétrica* se

$$f(v, w) = \pm(-1)^{\xi\eta} f(w, v), \;\; \forall v \in V_\xi,\; w \in V_\eta,\; \xi, \eta \in \mathbb{Z}_2.$$

Note que o colchete de uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é antí-supersimétrico.

Exemplo 2.3.11. Suponha $U = \Bbbk$, o $\mathfrak{g}-$módulo trivial. Então, uma forma bilinear $f : V \times W \longrightarrow \Bbbk$ é $\mathfrak{g}-$invariante se e só se

$$f(av, w) + (-1)^{\alpha\xi} f(v, aw) = 0, \;\; \forall a \in \mathfrak{g}_\alpha,\; v \in V_\xi,\; w \in W,\;\; \alpha, \xi \in \mathbb{Z}_2. \tag{2.3.4}$$

Exemplo 2.3.12. No exemplo anterior escolha $V = W = \mathfrak{g}$ (equipados com a representação adjunta). Então, a condição (2.3.4) é equivalente a

$$f([a, b], c) = f(a, [b, c]), \;\; \forall\, a, b, c \in \mathfrak{g}. \tag{2.3.5}$$

Introduziremos agora uma importante classe de formas $n-$lineares invariantes em uma super álgebra de Lie. Para isso, consideremos o espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, onde $V_{\bar{0}} = \Bbbk^m$ e $V_{\bar{1}} = \Bbbk^n$ (a partir de agora, se este for o caso, escreveremos $V = \Bbbk^{m|n}$). Denotaremos a super álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ por $\mathfrak{gl}(m, n)$.

Escolha bases ordenadas para $V_{\bar{0}}$ e $V_{\bar{1}}$, estas bases combinadas formam uma base ordenada de elementos homogêneos para V. Iremos fazer uma convenção (que usaremos no próximo capítulo) de forma que tal base é parametrizada pelo conjunto

$$I(m, n) = \{\overline{1}, \ldots, \overline{m}; 1, \ldots, n\} \tag{2.3.6}$$

onde a ordem total é dada por

$$\overline{1} < \cdots < \overline{m} < 0 < 1 < \cdots < n. \tag{2.3.7}$$

O número 0 foi inserido aqui por conveniência de notação. Com respeito a uma base desse tipo, $\mathfrak{gl}(V)$ pode ser realizada como o conjunto de todas as matrizes por blocos da forma

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right),$$

onde $A \in M_{m\times m}(\Bbbk)$ e $D \in M_{n\times n}(\Bbbk)$. Note que $\mathfrak{gl}(m, n)_{\bar{0}}$ é o conjunto de todas as matrizes com $B = C = 0$ e $\mathfrak{gl}(m, n)_{\bar{1}}$ é o conjunto de todas as matrizes tais que $A = D = 0$. Além disso, observe que se $n = 0$, isso recupera a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m)$.

Definição 2.3.13. Defina a função linear $\mathrm{str} : \mathfrak{gl}(m, n) \longrightarrow \Bbbk$ da seguinte forma: Se $X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(m, n)$, então

$$\mathrm{str}(X) = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(D).$$

Chamamos tal função de *super-traço.*

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas bases distintas do espaço vetorial V, formadas pela união de uma base de $V_{\bar{0}}$ com uma base de $V_{\bar{1}}$ e denote por $[T]_\mathcal{B}$ (resp. $[T]_\mathcal{C}$) a representação matricial de um elemento $T \in \mathfrak{gl}(V)$ na base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$). Assim,

$$\mathrm{str}([T]_\mathcal{B}) = \mathrm{tr}([A]_\mathcal{B}) - \mathrm{tr}([D]_\mathcal{B}) = \mathrm{tr}([A]_\mathcal{C}) - \mathrm{tr}([D]_\mathcal{C}) = \mathrm{str}([T]),$$

ou seja, o super-traço da matriz de um operador em $\mathfrak{gl}(V)$ não depende da escolha da base. Sendo assim, definimos o super-traço de um operador como sendo o super-traço de sua representação matricial.

A função str é par e $\mathfrak{gl}(V)-$invariante, isto é,

$$\mathrm{str}([T, S]) = 0, \;\; \forall\, T, S \in \mathfrak{gl}(V).$$

Veja que a equação acima é equivalente a seguinte relação:

$$\mathrm{str}(T \circ S) = (-1)^{\alpha\beta} \mathrm{str}(S \circ T), \;\; \forall\, T \in \mathfrak{gl}(V)_\alpha,\;\; S \in \mathfrak{gl}(V)_\beta.$$

A partir daí concluímos a seguinte proposição:

Proposição 2.3.14. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e V um espaço vetorial graduado equipado com uma representação ρ de $\mathfrak{g}$. A função $n-$linear em $\mathfrak{g}$ que é dada por

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \mathrm{str}(\rho(a_1) \circ \cdots \circ \rho(a_n)), \;\; a_i \in \mathfrak{g}, \; 1 \leq i \leq n, \tag{2.3.8}$$

é par e $\mathfrak{g}-$invariante com respeito a representação adjunta de $\mathfrak{g}$.

A função n-linear definida na proposição anterior é chamada de *função $n-$linear associada a representação* ρ (ou ao $\mathfrak{g}-$módulo V). O caso em que $V = \mathfrak{g}$ e $n = 2$ sugere a seguinte definição:

Definição 2.3.15. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie. A forma bilinear ϕ em $\mathfrak{g}$ que é definida por

$$\phi(a, b) = \mathrm{str}(\mathrm{ad}(a) \circ \mathrm{ad}(b)), \;\; \forall\, a, b \in \mathfrak{g} \tag{2.3.9}$$

é chamada de *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$. Esta forma é par, invariante e supersimétrica.

Observação 2.3.16. Note que, através de uma representação graduada ρ de $\mathfrak{g}$ em V podemos definir sobre $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ duas formas bilineares

$$(a, b)_{V_{\bar{0}}} = \mathrm{tr}(\rho(a)|_{V_{\bar{0}}} \circ \rho(b)|_{V_{\bar{0}}}) \text{ e } (a, b)_{V_{\bar{1}}} = \mathrm{tr}(\rho(a)|_{V_{\bar{1}}} \circ \rho(b)|_{V_{\bar{1}}}), \;\; \forall\, a, b \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$$

e segue portanto da definição de super-traço que

$$\mathrm{str}(\rho(a) \circ \rho(b)) = (a, b)_{V_{\bar{0}}} - (a, b)_{V_{\bar{1}}}, \;\; \forall\, a, b \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}. \tag{2.3.10}$$

Neste caso, denotamos a função 2-linear de $\mathfrak{g}$ dada na proposição anterior por $(\;,\;)_V$. Sendo assim, a condição (2.3.10) se reescreve como

$$(a, b)_V = (a, b)_{V_{\bar{0}}} - (a, b)_{V_{\bar{1}}}, \;\; \forall\, a, b \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}. \tag{2.3.11}$$

2.3.5 O produto tensorial de módulos irredutíveis

Nesta subseção mostraremos que o produto tensorial entre dois módulos irredutíveis de duas super álgebras de Lie também será um módulo irredutível para a super álgebra de Lie produto. Mas antes disso precisamos da seguinte proposição que é conhecida como o teorema da Densidade.

Proposição 2.3.17. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie, V um $\mathfrak{g}-$módulo irredutível e suponha que $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \cong \Bbbk$. Considere $\rho : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ a representação correspondente da álgebra envelopante. Seja $f \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Então, existe $x \in U(\mathfrak{g})$, tal que

$$xv_i = f(v_i) \;\; \text{para} \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Em particular $\rho(U(\mathfrak{g})) = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ quando V tem dimensão finita.

Demonstração. Se V é um $\mathfrak{g}-$módulo irredutível, então ele também é um $U(\mathfrak{g})-$módulo irredutível. Agora, nas notações do teorema sobre a densidade de Jacobson (teorema A.2.1), tome $R = U(\mathfrak{g})$. Daí $R' = \mathrm{End}_{U(\mathfrak{g})}(V) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \cong \Bbbk$. Assim, se $f \in \mathrm{End}_{R'}(V) = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$, existe $x \in U(\mathfrak{g})$ tal que $xv_i = f(v_i)$, para $1 \leq i \leq n$, e portanto o resultado está provado.

□

Teorema 2.3.18. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ duas super álgebras de Lie tais que $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \cong \Bbbk$ e $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}'}(V) \cong \Bbbk$. Suponha também que nos são dados um $\mathfrak{g}-$módulo graduado e irredutível V e um $\mathfrak{g}'-$módulo graduado e irredutível W. Considere

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}', \quad U = V \otimes W,$$

onde a super álgebra de Lie produto $\widetilde{\mathfrak{g}}$ é definida na subseção 1.2 e U é o $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo definido na subseção 2.3.2. Então, U é um $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo irredutível.

Demonstração. Tome $v \otimes w \in U$ um elemento não nulo tal que $v \in V_\xi$, $\xi \in \mathbb{Z}_2$. Se $u \in U \setminus \{0\}$ é um elemento qualquer, então

$$u = \sum_i^n v_i \otimes w_i, \quad v_i \in V,\ w_i \in W,\ i = 1, \ldots, n.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$ defina as seguintes funções lineares:

$$f_i : V \longrightarrow V\,, \quad g_i : W \longrightarrow W,$$

tais que

$$f_i(v) = v_i\,, \quad g_i(w) = w_i.$$

Pela proposição 2.3.17, existem $x_i \in U(\mathfrak{g})$ e $y_i \in U(\mathfrak{g}')$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$x_i v = f_i(v)\,, \quad y_i w = g_i(w), \ \forall\, i = 1 \ldots, n.$$

Note que $x_i \otimes y_i \in U(\mathfrak{g})\bar{\otimes}U(\mathfrak{g}') \cong U(\widetilde{\mathfrak{g}})$ (ver proposição 2.2.4). Além disso, supondo que $y_i = y_{i_{\bar{0}}} + y_{i_{\bar{1}}}$, onde $y_{i_\alpha} \in U(\mathfrak{g}')_\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, temos que

$$\begin{aligned} x_i \otimes (y_{i_{\bar{0}}} + (-1)^\xi y_{i_{\bar{1}}})(v \otimes w) &= (x_i v) \otimes (y_{i_{\bar{0}}} w) + (-1)^\xi \left((-1)^\xi (x_i v) \otimes (y_{i_{\bar{1}}} w)\right) \\ &= (x_i v) \otimes (y_{i_{\bar{0}}} w) + (x_i v) \otimes (y_{i_{\bar{1}}} w) \\ &= (x_i v) \otimes (y_i w) \\ &= v_i \otimes w_i, \ \forall\, i = 1 \ldots, n. \end{aligned}$$

Defina $\tilde{y}_i = y_{i_{\bar{0}}} + (-1)^\xi y_{i_{\bar{1}}}$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$ e tome

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \tilde{y}_i \in U(\widetilde{\mathfrak{g}}).$$

Assim, temos que

$$x(v \otimes w) = u. \tag{2.3.12}$$

Em particular isso mostra que a ação de $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$ sobre U é transitiva. De fato, se $u, u' \in U$ são dois elementos não nulos quaisquer, então

$$u = \sum_i^n v_i \otimes w_i, \quad u' = \sum_j^m v'_j \otimes w'_j,$$

onde $v_i, v'_i \in V$ e $w_i, w'_i \in W$ para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Suponha agora que $v_1 = v_{1_{\bar{0}}} + v_{1_{\bar{1}}}$, onde $v_{1_\xi} \in V_\xi$, $\xi \in \mathbb{Z}_2$ e pelo menos um destes elementos é não nulo. Suponha por exemplo que $v_{1_{\bar{0}}} \neq 0$ e considere o elemento $v_{1_{\bar{0}}} \otimes w_1$. Então, existe $z \in U(\widetilde{\mathfrak{g}})$ tal que

$$z(v_{1_{\bar{0}}} \otimes w_1) = u', \ \ z(v_{1_{\bar{1}}} \otimes w_1) = 0 \ \text{ e } \ z(v_i \otimes w_i) = 0, \text{ se } 1 < i \leq n.$$

Logo,

$$zu = u',$$

ou seja, a ação de $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$ em U é transitiva e portanto U é um $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo irredutível.

$\square$

É importante observar que, como o corpo $\Bbbk$ é algebricamente fechado, esse teorema é sempre válido no caso em que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie simples, pois o lema de Schur implica na hipótese $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V) \cong \Bbbk$, que foi exigida no enunciado do teorema.

2.4 Representações induzidas

Nesta seção iremos introduzir uma importante ferramenta para a teoria de representações de super álgebras de Lie: As representações induzidas. Também apresentaremos o teorema de Ado para super álgebras de Lie.

Antes de começar a entrar nos detalhes da seção, introduziremos algumas notações que serão usadas constantemente. Suponha que $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie e que $\mathfrak{g}'$ é uma subálgebra graduada de $\mathfrak{g}$. Seja $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\mathfrak{g}')$) a álgebra envelopante de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}'$). De acordo com a seção 2.2 (ver corolários 2.2.6 e 2.2.8) podemos supor que $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ e $U(\mathfrak{g}')$ são canonicamente mergulhados em $U(\mathfrak{g})$. Então, $U(\mathfrak{g})$ possui uma estrutura natural de $U(\mathfrak{g}')-$módulo graduado que é definida pela multiplicação. Além disso, o teorema de PBW implica na seguinte reformulação do corolário 2.2.8:

Proposição 2.4.1. Seja $\{x_j \,|\, j \in J\}$ uma família de elementos homogêneos de $\mathfrak{g}$ tais que suas imagens por meio do homomorfismo canônico $\mathfrak{g} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ formam uma base para o espaço vetorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$. Suponha que J é totalmente ordenado e, tome H sendo o conjunto de todas as sequências finitas $(j_1, \ldots, j_r)$ em J tais que

$$r \geq 0;$$

$$j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_r;$$

$$j_p < j_{p+1}, \text{ se } x_{j_p}, x_{j_{p+1}} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}.$$

Se $N = (j_1, \ldots, j_r)$ é uma sequência desse tipo, definimos

$$x_N = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_r}.$$

Então, a família $\{x_N \,|\, N \in H\}$ é uma base do $U(\mathfrak{g}')-$módulo $U(\mathfrak{g})$. Aqui, por convenção definimos $x_\emptyset = 1$.

Seja agora V um $U(\mathfrak{g}')-$módulo graduado. Considerando $U(\mathfrak{g})$ como um $(U(\mathfrak{g}'), U(\mathfrak{g}'))-$bimódulo graduado podemos construir o produto tensorial

$$\overline{V} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{g}')} V \tag{2.4.1}$$

Note que $\overline{V}$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado, onde o subespaço $\overline{V}_\gamma$, $\gamma \in \mathbb{Z}_2$ é gerado pelos tensores da forma $x \otimes v$ com $x \in U(\mathfrak{g})_\xi$, $v \in V_\eta$, $\xi, \eta \in \mathbb{Z}_2$, $\xi + \eta = \gamma$. Observe também que a estrutura de $U(\mathfrak{g})-$módulo graduado de $\overline{V}$ satisfaz

$$x(y \otimes v) = (xy) \otimes v, \ \ \forall x, y \in U(\mathfrak{g}), \, v \in V. \tag{2.4.2}$$

Este $\mathfrak{g}-$módulo graduado é chamado de $U(\mathfrak{g})-$*módulo graduado induzido pelo* $U(\mathfrak{g}')-$*módulo graduado* V.

Defina uma função linear par da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \alpha : V &\longrightarrow \overline{V}, \\ v &\longmapsto 1 \otimes v \end{aligned}$$

para qualquer $v \in V$. Veja que α é $U(\mathfrak{g}')-$invariante, ou seja,

$$\alpha(x'v) = x'\alpha(v), \;\; \forall\, x' \in U(\mathfrak{g}'),\, v \in V.$$

O par $(\overline{V}, \alpha)$ pode ser caracterizado pela seguinte propriedade universal:

Proposição 2.4.2. Seja $f : V \longrightarrow W$ uma função linear $U(\mathfrak{g}')-$invariante de V em um $U(\mathfrak{g})-$módulo graduado W. Então, existe uma única função linear $U(\mathfrak{g})-$invariante $\bar{f} : \overline{V} \longrightarrow W$ tal que

$$f = \bar{f} \circ \alpha.$$

Lembre que se f é homogêneo de grau γ, $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, então o mesmo continua valendo para $\bar{f}$ e além disso

$$\bar{f}(x \otimes v) = (-1)^{\gamma\xi} x f(v), \;\; \forall\, x \in U(\mathfrak{g})_\xi,\, v \in V;\; \xi \in \mathbb{Z}_2.$$

Vamos agora explorar a proposição 2.4.1. Por meio de resultados básicos sobre produtos tensoriais concluímos o

Lema 2.4.3. Usando a notação introduzida na proposição 2.4.1. Para toda sequência $N \in H$, a função $k-$linear

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \overline{V} \\ v &\longmapsto x_N \otimes v \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

é injetiva, em particular, α é injetiva. O espaço vetorial $\overline{V}$ é a soma direta dos subespaços $x_N\alpha(V)$, $N \in H$, ou seja,

$$\overline{V} = \bigoplus_{N \in H} x_N \otimes V.$$

Podemos aplicar esse lema para nos dar uma prova do teorema de Ado para super álgebras de Lie. De fato, Seja $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e seja V um $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo qualquer. Considere V com a seguinte $\mathbb{Z}_2-$graduação:

$$V_{\bar{0}} = V, \quad V_{\bar{1}} = \{0\}.$$

Então, o $\mathfrak{g}-$módulo induzido $\overline{V}$ é bem definido e o lema anterior implica:

a) Se o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo V é fiel, então o $\mathfrak{g}-$módulo também é $\overline{V}$ também é fiel.

b) Se os espaços vetoriais $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e V são de dimensão finita, então o mesmo vale para $\overline{V}$.

Usando agora o teorema de Ado para álgebras de Lie, concluímos o

Teorema 2.4.4. Toda super álgebra de Lie de dimensão finita possui uma representação graduada fiel de dimensão finita.

Capítulo 3

Super Álgebras de Lie Simples

Neste capítulo estudaremos detalhadamente as super álgebras de Lie simples, em particular nós apresentaremos boa parte da demonstração do teorema que classifica as super álgebras de Lie clássicas de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. A demonstração que será esboçada aqui requer um conhecimento sobre super álgebras de Lie irredutíveis, com $\mathbb{Z}-$graduação consistente. Os resultados expostos neste capítulo foram retirados de [M. Scheunert].

3.1 Super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas e filtradas

Nesta seção obteremos algumas propriedades elementares das super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas e filtradas.

A seguinte definição é uma reformulação para o caso de super álgebras de Lie da definição 1.2.2.

Definição 3.1.1. Uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita $\mathbb{Z}-$graduada se existe uma família $\{\mathfrak{g}_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ de subespaços $\mathbb{Z}_2-$graduados de $\mathfrak{g}$ tais que

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n \quad \text{e} \quad [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_m] \subseteq \mathfrak{g}_{n+m}, \;\; \forall\, n, m \in \mathbb{Z}.$$

A graduação $\{\mathfrak{g}_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ é dita ser consistente com a $\mathbb{Z}_2-$graduação de $\mathfrak{g}$ se

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{2n} \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{2n+1}.$$

Se $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada, por definição temos que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_n] \subseteq \mathfrak{g}_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo, $\mathfrak{g}_0$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ e a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ induz uma representação natural de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 3.1.2. Seja $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ uma super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada. A graduação $\{\mathfrak{g}_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ (e a própria álgebra $\mathfrak{g}$) é chamada

a) *Irredutível*, se a representação graduada de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_{-1}$ é irredutível (em particular $\mathfrak{g}_{-1} \neq \{0\}$).

b) *Transitiva*, se

$$\{a \in \mathfrak{g}_n \mid [a, \mathfrak{g}_{-1}] = \{0\}\} = \{0\}, \;\; \forall\, n \geq 0. \tag{3.1.1}$$

c) *Bitransitiva*, se ela for transitiva, e além disso

$$\{a \in \mathfrak{g}_n \mid [a, \mathfrak{g}_1] = \{0\}\} = \{0\}, \;\; \forall\, n \leq 0. \tag{3.1.2}$$

Note que no caso particular $n = 0$ a equação (3.1.1) (resp. (3.1.2) é valida se e só se a representação de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ (resp. $\mathfrak{g}_1$) é fiel.

Lema 3.1.3. Seja $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \geq -1} \mathfrak{g}_n$ uma super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada, transitiva e irredutível. Suponha que $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$ e que a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_1$ é fiel. Então, $\mathfrak{g}$ é bitransitiva.

Demonstração. Já mencionamos anteriormente que sobre essas hipóteses, a equação (3.1.2) é valida para $n = 0$. Tome

$$V = \{a \in \mathfrak{g}_{-1} \,|\, [a, \mathfrak{g}_1] = \{0\}\}$$

e observe que V é um $\mathfrak{g}_0-$submódulo graduado de $\mathfrak{g}_{-1}$. Como $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$, a transitividade de $\mathfrak{g}$ implica que $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \neq \{0\}$. Segue daí que $V \neq \mathfrak{g}_{-1}$ e portanto que $V = \{0\}$.

□

Lema 3.1.4. Seja $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \geq -1} \mathfrak{g}_n$ uma super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada e transitiva. Então, a $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathfrak{g}$ é consistente com a $\mathbb{Z}_2-$graduação se e só se $\mathfrak{g}_{-1}$ for um subespaço ímpar de $\mathfrak{g}$ (isto é, se e só se $\mathfrak{g}_{-1} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$).

Demonstração. Se a $\mathbb{Z}-$graduação é consistente com a $\mathbb{Z}_2-$graduação, então

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \bigoplus_{n \geq -1} \mathfrak{g}_{2n+1} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots ,$$

em particular, $\mathfrak{g}_{-1} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Reciprocamente, suponha que $\mathfrak{g}_{-1} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Provaremos por indução em n que a $\mathbb{Z}-$graduação é consistente. Se provarmos que para qualquer $n \geq -1$

$$\mathfrak{g}_{2n} \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \{0\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}_{2n+1} \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{0\},$$

então

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \bigoplus_{n \geq -1} (\mathfrak{g}_n \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}) = \bigoplus_{n \geq -1} \mathfrak{g}_{2n} \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \bigoplus_{n \geq -1} (\mathfrak{g}_n \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}}) = \bigoplus_{n \geq -1} \mathfrak{g}_{2n+1}.$$

Para $n = -1$, temos que $\mathfrak{g}_{-2} = \{0\}$ e portanto $\mathfrak{g}_{-2} \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \{0\}$. Por outro lado, por hipótese temos que $\mathfrak{g}_{-1} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, isto é, $\mathfrak{g}_{-1} \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{0\}$. Suponha por indução que o resultado é válido para $n = k$, ou seja, $\mathfrak{g}_{2k} \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \{0\}$ e $\mathfrak{g}_{2k+1} \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{0\}$. Vamos mostrar que o mesmo é satisfeito para $n = k + 1$. De fato, note que

$$[\mathfrak{g}_{2(k+1)} \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{-1}] \subseteq \mathfrak{g}_{2k+1} \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{0\}$$

e como $\mathfrak{g}$ é transitiva, segue que $\mathfrak{g}_{2(k+1)} \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \{0\}$. Analogamente, temos que $[\mathfrak{g}_{2(k+1)+1} \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{-1}] \subseteq \mathfrak{g}_{2(k+1)} \cap \mathfrak{g}_{\bar{1}} = \{0\}$. Logo, o resultado esta demonstrado.

□

Nosso interesse nas relações de transitividade (3.1.1) e (3.1.2) vêem do fato que sobre um certo sentido, elas reduzem o estudo das super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas para o estudo de sua "parte local" $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Proposição 3.1.5. Sejam $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ e $\mathfrak{g}' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_n$ duas super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas. Suponha que nos é dada uma função linear par

$$f : \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}'_{-1} \oplus \mathfrak{g}'_0 \oplus \mathfrak{g}'_1$$

que satisfaz as seguintes condições:

a)

$$f(\mathfrak{g}_{\pm 1}) = \mathfrak{g}'_{\pm 1}, \quad f(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}'_0 \tag{3.1.3}$$

b) f é compatível com a multiplicação de $\mathfrak{g}$, no sentido que

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)] \tag{3.1.4}$$

sempre que $a \in \mathfrak{g}_n$, $b \in \mathfrak{g}_m$ e $n, m, n+m \in \{-1, 0, 1\}$.

Se a álgebra $\mathfrak{g}$ é gerada por $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ e se $\mathfrak{g}'$ é bitransitiva, então existe uma única extensão de f a um homomorfismo $\tilde{f} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ de super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas.

Demonstração. Defina indutivamente para todo inteiro $r \geq -1$, uma função linear par

$$f_r : \mathfrak{g}_r \longrightarrow \mathfrak{g}'_r,$$

tal que para $r \geq 0$, as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} f_r([a,b]) &= [f(a), f_{r-1}(b)], \text{ se } a \in \mathfrak{g}_1,\, b \in \mathfrak{g}_{r-1}; & (3.1.5)\\ f_r([a,b]) &= [f(a), f_r(b)], \text{ se } a \in \mathfrak{g}_0,\, b \in \mathfrak{g}_r; & (3.1.6)\\ f_{r-1}([a,b]) &= [f(a), f_r(b)], \text{ se } a \in \mathfrak{g}_{-1},\, b \in \mathfrak{g}_r. & (3.1.7) \end{aligned}$$

Para $r \in \{-1, 0, 1\}$, defina f_r sendo a função linear induzida por f. Por hipótese, as condições (3.1.5)-(3.1.7) são satisfeitas para $r = 0$ e $r = 1$. Seja agora $r \geq 2$ e suponha que as funções f_s com $-1 \leq s \leq r-1$ são bem definidas. Seja $p \geq 1$, um inteiro positivo e tome

$$x_q \in \mathfrak{g}_1\,, \quad y_q \in \mathfrak{g}_{r-1}\,; \quad 1 \leq q \leq p.$$

Usando (3.1.4) e a hipótese de indução, vemos que para todo $a \in \mathfrak{g}_{-1}$

$$[f(a), \sum_{q=1}^{p} [f(x_q), f_{r-1}(y_q)]] = f_{r-1}\left([a, \sum_{q=1}^{p} [x_q, y_q]] \right)]. \tag{3.1.8}$$

Como $\mathfrak{g}'$ é bitransitiva e f_{-1} é sobrejetiva, concluímos de (3.1.8) que

$$\sum_{q=1}^{p} [x_q, y_q] = 0 \Rightarrow \sum_{q=1}^{p} [f(x_q), f_{r-1}(y_q)] = 0.$$

Por outro lado, a álgebra $\mathfrak{g}$ é gerada por $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ e sendo assim todo elemento de $\mathfrak{g}_r$ é da forma $\sum [x_q, y_q]$. Portanto, a equação

$$f_r\left(\sum_{q=1}^{p} [x_q, y_q] \right) = \sum_{q=1}^{p} [f(x_q), f_{r-1}(y_q)]$$

define uma função $f_r : \mathfrak{g}_r \longrightarrow \mathfrak{g}'_r$, a qual é linear e par.

Vamos provar que as condições (3.1.5)-(3.1.7) são satisfeitas. Note que (3.1.5) é verdade devido a definição de f_r. Para provar (3.1.6) e (3.1.7) podemos supor que $b = [x, y]$ com $x \in \mathfrak{g}_1$, $y \in \mathfrak{g}_{r-1}$; assim, as equações seguem por uma nova aplicação de (3.1.4) e da hipótese de indução.

Note que nossa construção pode ser feita se as álgebras $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ são equipadas com $\mathbb{Z}-$graduações invertidas (ver seção 1.2). Dessa forma obtemos uma família $\{f_r \,|\, r \in \mathbb{Z}\}$ de funções lineares pares

$$f_r : \mathfrak{g}_r \longrightarrow \mathfrak{g}'_r,$$

tal que as equações (3.1.5)-(3.1.7) são satisfeitas para todo $r \in \mathbb{Z}$. (Lembre que para $r \in \{-1, 0, 1\}$, a função f_r é induzida por f).

Só nos falta provar agora que

$$[f_r(a), f_s(b)] = f_{r+s}([a, b]), \quad \forall\, a \in \mathfrak{g}_r,\, b \in \mathfrak{g}_s\,;\; r, s \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.9}$$

Podemos fazer isso por indução em $|r|$ (= módulo de r). Pela construção da família $\{f_r \,|\, r \in \mathbb{Z}\}$, a equação (3.1.9) é válida se $r = 0$ ou $|r| = 1$. Suponha agora que $t \geq 0$ é algum inteiro positivo e que (3.1.9) é satisfeita para $|r| = t$. Seja

$$x \in \mathfrak{g}_{\pm 1}, \;\; y \in \mathfrak{g}_{\pm t}, \;\; b \in \mathfrak{g}_s.$$

Usando nossa hipótese de indução, assim como as relações (3.1.5)-(3.1.7), não é difícil verificar que

$$[f_{\pm(t+1)}([x, y]), f_s(b)] = f_{\pm(t+1)+s}([[x, y], b]).$$

Isso implica (3.1.9) para $|r| = t + 1$.

Seja agora

$$\widetilde{f} : \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_r \longrightarrow \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_r$$

a função linear definida pela família $\{f_r \,|\, r \in \mathbb{Z}\}$. Então, $\widetilde{f}$ é um homomorfismo de super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas que extende f. A unicidade de tal extensão segue diretamente.

□

Corolário 3.1.6. Usando a notação introduzida na proposição 3.1.5, vamos supor que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ são bi-transitivas, que a álgebra $\mathfrak{g}$ é gerada por $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ e que a álgebra $\mathfrak{g}'$ é gerada por $\mathfrak{g}'_{-1} \oplus \mathfrak{g}'_0 \oplus \mathfrak{g}'_1$. Se f é bijetiva, então $\tilde{f}$ é um isomorfismo de super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas.

3.1.1 Alguns resultados sobre super álgebras de Lie transitivas

Nesta subseção $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\geq -1} \mathfrak{g}_n$ denota uma super álgebra transitiva, irredutível e consistentemente $\mathbb{Z}-$graduada.

Lema 3.1.7. Se a representação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ é fiel e irredutível, então $\mathfrak{g}_0$ é redutiva.

Demonstração. Considere a representação $\mathrm{ad}_{-1} : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$. Por hipótese esta representação é irredutível, logo $\mathrm{ad}_{-1}(\mathfrak{g}_0)$ é uma álgebra de Lie redutiva (ver teorema 5.11 [S. Martin]). Por outro lado, como a representação ad_{-1} é fiel o teorema do isomorfismo para álgebras de Lie nos fornece que $\mathfrak{g}_0 \cong \mathrm{ad}_{-1}(\mathfrak{g}_0)$ e portanto $\mathfrak{g}_0$ também é uma álgebra de Lie redutiva.

□

Proposição 3.1.8. Suponha que $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$. Então,

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]. \tag{3.1.10}$$

Demonstração. Note primeiramente que

$$[\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]] = \mathfrak{g}_{-1}. \tag{3.1.11}$$

De fato, $[\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]]$ é um subespaço $\mathfrak{g}_0-$invariante de $\mathfrak{g}_{-1}$, para ver isso seja $x_{-1}, y_{-1} \in \mathfrak{g}_{-1}$, $x_1 \in \mathfrak{g}_1$ e $x_0 \in \mathfrak{g}_0$, daí veja que

$$[x_0, [x_{-1}, [y_{-1}, x_1]]] = [[x_0, x_{-1}], [y_{-1}, x_1]] + [x_{-1}, [x_0, [y_{-1}, x_1]]],$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação obviamente está em $[\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]]$, e o segundo também, pois $[x_0, [y_{-1}, x_1]] = [[x_0, y_{-1}], x_1] + [y_{-1}, [x_0, x_1]]$ está contido em $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$. Note agora que $[\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]]$ é um subespaço não nulo, pois pela transitividade de $\mathfrak{g}$ se este fosse nulo teríamos que $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = \{0\}$, e novamente pela transitividade de $\mathfrak{g}$ concluímos que $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$. O que contradiz nossa hipótese. Assim, $[\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]]$ é um subespaço não nulo de $\mathfrak{g}_{-1}$ que é $\mathfrak{g}_0-$invariante. Como a representação de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ é irredutível, $[\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]]$ deve ser todo $\mathfrak{g}_{-1}$.

Pelo lema 3.1.7, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ é redutiva, isto é, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \oplus [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, onde a álgebra de Lie $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ é semissimples.

Já vimos acima que $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$ é um ideal de $\mathfrak{g}_0$. Seja então $\mathfrak{s}$ o centralizador de $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$ em $\mathfrak{g}_0$. Como a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ é redutiva, a relação (3.1.10) segue se provarmos que $\mathfrak{s}$ é abeliana. De fato, suponha que $\mathfrak{s}$ é abeliana. Sabemos que $\mathfrak{s}$ é um ideal de $\mathfrak{g}_0$, logo $\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ é um ideal de $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, mas $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ é uma álgebra de Lie semissimples e portanto esta se decompõe numa soma direta de ideais

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n,$$

onde cada $\mathfrak{a}_i$ é simples, $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] = \{0\}$ se $i \neq j$ e, além disso, qualquer ideal de $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ se escreve como uma soma parcial destes ideais. Sendo assim, a única possibilidade é que $\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \{0\}$, pois estamos supondo $\mathfrak{s}$ abeliana. O que acabamos de provar é que $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$, mas por outro lado $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{s}$. Concluímos assim que $\mathfrak{s} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$. Finalmente, note que $\mathfrak{i} = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \cap [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ é um ideal de $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ e portanto podemos supor que

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k,$$

onde $k \leq n$. Se $k < n$, então temos que $[\mathfrak{a}_i, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]] = \{0\}$ para todo $k < i \leq n$. Mas isso implica que $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{s} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$. Logo, $\mathfrak{a}_i = \{0\}$ contradizendo o fato deste ideal ser simples. Portanto, $k = n$, isto é, $\mathfrak{i} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ implicando assim que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$.

Para finalizar a demonstração veremos agora que $\mathfrak{s}$ é abeliana. Seja $a, b \in \mathfrak{s}$. Queremos ver que $[a, b] = 0$. Tendo em vista a transitividade de $\mathfrak{g}$ e a equação (3.1.11), este será o caso se

$$[[a, b], [\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]]] = \{0\}. \tag{3.1.12}$$

Mas se x, $y \in \mathfrak{g}_{-1}$ e $u \in \mathfrak{g}_1$, então

$$\begin{aligned} [a, [b, [x, [y, u]]]] &= [a, [[b, x], [y, u]]] \\ &= -[a, [y, [[b, x], u]]] \\ &= -[[a, y], [[b, x], u]] \end{aligned}$$

Lembre que $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] \subseteq \mathfrak{g}_{-2} = \{0\}$. Veja agora que o lado esquerdo dessa equação é anti-simétrico com relação a x, y, já que a identidade de Jacobi juntamente com o fato que $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] = \{0\}$ implica que $[x, [y, u]] = -[y, [x, u]]$. Por outro lado, o lado direito da nossa expressão troca de sinal se intercambiarmos $a \leftrightarrow b$ e $x \leftrightarrow y$, pois

$$-[[a, y], [[b, x], u]] = -([[[a, y], [b, x]], u] - [[b, x], [[a, y], u]]) = [[b, x], [[a, y], u]].$$

Assim, juntando essas duas informações temos que

$$[[a,y],[[b,x],u]] = -[[b,x],[[a,y],u]] = [[b,y],[[a,x],u]],$$

ou seja, a nossa expressão é simétrica com relação a a, b. Logo

$$\begin{aligned} [a,[b,[x,[y,u]]]] &= [[a,b],[x,[y,u]]] + [b,[a,[x,[y,u]]]] \Rightarrow \\ \Rightarrow [a,[b,[x,[y,u]]]] &= [[a,b],[x,[y,u]]] + [a,[b,[x,[y,u]]]] \Rightarrow \\ \Rightarrow [[a,b],[x,[y,u]]] &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, como as escolhas de x, y e u foram arbitrárias, segue pela transitividade de $\mathfrak{g}$, que $[a,b]=0$.

□

Proposição 3.1.9. a) Se $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ denota o centro da álgebra redutiva $\mathfrak{g}_0$, então

$$\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)) \leq 1$$

e no caso em que temos a igualdade, existe um único elemento $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ tal que $[z,x] = nx$, $\forall\, x \in \mathfrak{g}_n$.

b) Para qualquer inteiro $n \geq -1$ a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_n$ é completamente redutível.

c) Se $\mathfrak{g}_0$ é abeliana, então $\mathfrak{g}_n = \{0\}$, $\forall\, n \geq 1$.

Demonstração. (a) A representação de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ é fiel e irredutível (lembre que estamos assumindo que $\mathfrak{g}$ é transitiva e irredutível), então pelo lema de Schur para álgebras de Lie, temos que $\mathrm{ad}(z) = \lambda I$, $\forall z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$. Logo, $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)) \leq 1$. Observe agora que se $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \neq \{0\}$, então dado $\hat{z} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \setminus \{0\}$, $\mathrm{ad}(\hat{z}) = \lambda I$, onde $\lambda \neq 0$, pois a representação é fiel. Tome então $z = -(1/\lambda)\hat{z}$, daí $\mathrm{ad}(z) = -I$ e portanto

$$[z,x] = -x, \ \forall x \in \mathfrak{g}_{-1}.$$

O elemento z tem a propriedade desejada. De fato, suponha por hipótese de indução que para algum $n \geq -1$ o resultado seja válido e considere $x \in \mathfrak{g}_{n+1}$. Assim, veja que $[y,x] \in \mathfrak{g}_n$, logo $[z,[y,x]] = n[y,x]$. Por outro lado, usando a identidade de Jacobi temos $[z,[y,x]] = -[y,x] + [y,[z,x]]$. Juntando as duas informações, ficamos com

$$[y,(n+1)x - [z,x]] = 0, \ \forall y \in g_{-1}.$$

Segue da transitividade de $\mathfrak{g}$ que $(n+1)x - [z,x] = 0$ e assim provamos o item (a).

(b) Pela redutividade de $\mathfrak{g}_0$, temos que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \oplus [\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$. Mas pelo item (a), qualquer subespaço de $\mathfrak{g}_n$ é invariante por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$, sendo assim, um subespaço será $\mathfrak{g}_0-$invariante se, e somente se, este for $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]-$invariante. Assim, pelo teorema de Weyl segue o resultado desejado, já que $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ é semissimples.

(c) Suponha que $\mathfrak{g}_0$ é abeliana. Como a representação de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ é irredutível, o teorema de Lie nos diz que $\dim(\mathfrak{g}_{-1}) = 1$. Tome $x \in \mathfrak{g}_{-1} \setminus \{0\}$. Então, pela identidade de Jacobi e pelo fato que $[\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}_{-1}] \subseteq \mathfrak{g}_{-2} = \{0\}$, temos que para qualquer inteiro $n \geq 1$ e para qualquer $y_n \in \mathfrak{g}_n$

$$[x,[x,y_n]] = [[x,x],y_n] - [x,[x,y_n]] \Rightarrow 2[x,[x,y_n]] = [[x,x],y_n] = \{0\}.$$

Logo, segue da transitividade de $\mathfrak{g}$ e do fato que a escolha de $y \in \mathfrak{g}_n$ foi arbitrária que $[x,\mathfrak{g}_n] = \{0\}$. Daí, novamente pela transitividade de $\mathfrak{g}$ decorre que $\mathfrak{g}_n = \{0\}$.

□

Proposição 3.1.10. Suponha que a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_1$ é irredutível (em particular, $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$). Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie redutiva $\mathfrak{g}_0$. Escolha um sistema fundamental de raízes simples de $\mathfrak{g}_0$ com respeito a $\mathfrak{h}$. Considere λ (resp. μ) o peso máximo (resp. mínimo) da representação de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ (resp. $\mathfrak{g}_1$) e tome $x_\lambda \in \mathfrak{g}_{-1}$ (resp. $y_\mu \in \mathfrak{g}_1$) um vetor de peso associado a esse peso. Sobre estas considerações temos que

a) Se as representações de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ são duais, então:

  1) $\mu = -\lambda$;

  2) $[x_\lambda, y_\mu] = h$, onde h é algum elemento não nulo de $\mathfrak{h}$ que não está no centro de $\mathfrak{g}_0$.

b) Se as representações de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ não são duais, então:

  1) $[x_\lambda, y_\mu] = e_\alpha$, onde $\alpha = \lambda + \mu$ é uma raiz da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ e e_α é um vetor associado a ela.

  2) $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$.

  3) A álgebra de Lie $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ é simples.

Demonstração. Seja $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ um sistema fundamental de raízes simples de $\mathfrak{g}_0$, com respeito a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Para cada raiz γ de $\mathfrak{g}_0$ tome f_γ um vetor associado a ela. Note que $f_\gamma \in (\mathfrak{g}_0)_\gamma \subseteq [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, pois $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h}$. Veja agora que espaço vetorial $\mathfrak{g}_{-1}$ é gerado pelos vetores da forma

$$[f_{-\gamma_1}, [f_{-\gamma_2}, \ldots, [f_{-\gamma_r}, x_\lambda] \ldots]], \quad \text{onde} \quad \gamma_1, \ldots, \gamma_\mathrm{r} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\mathrm{m}\}$$

e o espaço vetorial $\mathfrak{g}_1$ é gerado por vetores da forma

$$[f_{\delta_1}, [f_{\delta_2}, \ldots, [f_{\delta_s}, y_\mu] \ldots]], \quad \text{onde} \quad \delta_1, \ldots, \delta_\mathrm{s} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\mathrm{m}\}.$$

Daí, segue que o espaço vetorial $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$ é gerado por vetores da forma

$$[f_{\beta_1}, [f_{\beta_2}, \ldots, [f_{\beta_t}, [x_\lambda, y_\mu]] \ldots]], \quad \text{onde} \quad \beta_1, \ldots, \beta_\mathrm{t} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\mathrm{m}, -\alpha_1, \ldots, -\alpha_\mathrm{m}\}.$$

Logo, o vetor $[x_\lambda, y_\mu]$ é cíclico para a representação de $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ sobre $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$, ou seja, $U([\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0])[x_\lambda, y_\mu] = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$, já que $f_\gamma \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, para toda raiz γ.

Note agora que se $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \{0\}$, a proposição 3.1.9 item (c) garante que $\mathfrak{g}_1 = 0$, o que gera uma contradição com a nossa hipótese. Logo, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ é uma álgebra de Lie semissimples não nula e está contida em $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1]$, isso pela proposição 3.1.8. Portanto, $[x_\lambda, y_\mu]$ não pode estar no centro de $\mathfrak{g}_0$, pois teríamos $0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_0] \supseteq [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \neq 0$. Em particular, concluímos que

$$[x_\lambda, y_\mu] \neq 0.$$

Por outro lado, $[x_\lambda, y_\mu] \in (\mathfrak{g}_0)_{\lambda+\mu}$.

Sabemos da teoria de representações de álgebras de Lie semissimples que, as representações de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ são duais se e só se $\lambda + \mu = 0$ (ver [S. Martin]). Logo, se esse for o caso, concluímos que $[x_\lambda, y_\mu] \in (\mathfrak{g}_0)_0 = \mathfrak{h}$, e a pate (a) da proposição está demonstrada.

Suponha agora que as representações de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ não são duais e que $\alpha = \lambda + \mu$. Então, α é uma raiz de $\mathfrak{g}_0$ e $[x_\lambda, y_\mu]$ é um vetor associado a ela. Seja $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ o ideal simples de $\mathfrak{g}_0$ tal que $[x_\lambda, y_\mu] \in \tilde{\mathfrak{g}}_0$. Isto, combinado com a proposição 3.1.8, implica que

$$[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}_0 \subseteq [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1].$$

Assim, provamos as afirmações (2) e (3) da parte (b).

□

Proposição 3.1.11. Suponha que $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$, mas $\mathfrak{g}_n = \{0\}$ se $n \geq 2$. Então, a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_1$ é irredutível. Além disso, se $\dim(\mathfrak{g}_1) \geq 2$, então esta representação também é fiel.

Demonstração. Começaremos provando a seguinte afirmação: Se

$$[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_1] = \{0\}, \tag{3.1.13}$$

então $\dim(\mathfrak{g}_1) = 1$. De fato, seja a um elemento não nulo de $\mathfrak{g}_1$. A equação (3.1.13) junto com o item (a) da proposição 3.1.9 e com o fato que $\mathfrak{g}_{\pm n} = \{0\}$ se $n \geq 2$, implica que

$$[\mathfrak{g}_0, \Bbbk a] = [[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0), \Bbbk a] \subseteq \Bbbk a.$$

Logo, o subespaço $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \Bbbk a$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Note que se $[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_{-1}] = \{0\}$, então segue da transitividade de $\mathfrak{g}$ que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \{0\}$, ou seja, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ (abeliana), e pelo item (c) da proposição 3.1.9 teríamos que $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$. Logo,

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{-1}] \neq \{0\}.$$

Por outro lado, estamos supondo que $[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_1] = \{0\}$, em particular $[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \Bbbk a] = \{0\}$. Assim, as representações de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_{-1}$ e em $\Bbbk a$ não podem ser duais. Portanto, obtemos da proposição 3.1.10 que

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = [\Bbbk a, \mathfrak{g}_{-1}] \tag{3.1.14}$$

é uma álgebra de Lie simples. Considere a função linear dada por

$$\begin{array}{rcl} f_a : \mathfrak{g}_{-1} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_0 \\ y & \longmapsto & [a, y] \end{array} \tag{3.1.15}$$

Esta função é $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]-$invariante e pela equação (3.1.14) sua imagem está contida em $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$. Quanto a invariância, sejam $[x, z] \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ e $y \in \mathfrak{g}_{-1}$, daí

$$\begin{aligned} f_a \circ [x, z](y) &= [a, [[x, z], y]] \\ &= [[a, [x, z]], y] + [[x, z], [a, y]] \\ &= [[x, z], [a, y]] \\ &= [x, z] \circ f_a(y). \end{aligned}$$

Assim, pela linearidade de f_a, fica provado a sua invariância. Veja agora que os $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]-$módulos $\mathfrak{g}_{-1}$ e $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ são simples (ver demonstração do item (b) da proposição 3.1.9). Com isso, não é difícil provar que qualquer função linear $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]-$invariante entre estes módulos é nula, ou é um isomorfismo. Daí, pelo Lema de Schur para álgebras de Lie, segue que quaisquer duas funções lineares $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]-$invariantes entre estes módulos são proporcionais.

Sejam agora a_1, $a_2 \in \mathfrak{g}_1$ vetores não nulos. Devido a transitividade de $\mathfrak{g}$, as funções f_{a_1} e f_{a_2} não podem ser identicamente nulas. Então, tais funções são proporcionais, isto é, para algum $\lambda \in \Bbbk \setminus \{0\}$ e qualquer $x \in \mathfrak{g}_{-1}$ temos que

$$f_{a_1}(x) = \lambda f_{a_2}(x) \Rightarrow [a_1, x] = [\lambda a_2, x] \Rightarrow [a_1 - \lambda a_2, x] = 0.$$

Mas como $\mathfrak{g}$ é transitiva e x é um elemento qualquer de $\mathfrak{g}_{-1}$, temos que $a_1 = \lambda a_2$. Concluímos assim que $\dim(\mathfrak{g}_1) = 1$.

Vamos provar agora que a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_1$ é irredutível. De acordo com a proposição 3.1.9 item (b), esta representação é completamente redutível. Suponha então que exista uma decomposição de $\mathfrak{g}_1$ como soma direta de dois submódulos

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{1,1} \oplus \mathfrak{g}_{1,2}. \tag{3.1.16}$$

Pela proposição 3.1.8, aplicada à subálgebra $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1,1}$, obtemos que

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{1,1}]. \tag{3.1.17}$$

Daí, segue que

$$[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]\mathfrak{g}_{1,2}] \subseteq [[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{1,1}]\mathfrak{g}_{1,2}] = [\mathfrak{g}_{1,1}, [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{1,2}]] \subseteq \mathfrak{g}_{1,1}. \tag{3.1.18}$$

Como $\mathfrak{g}_{1,2}$ é $\mathfrak{g}_0-$invariante, concluímos que

$$[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_{1,2}] = \{0\}. \tag{3.1.19}$$

Analogamente, prova-se que

$$[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_{1,1}] = \{0\}. \tag{3.1.20}$$

Assim, mostramos que a equação (3.1.13) é satisfeita. Mas isso implica que $\dim(\mathfrak{g}_1) = 1$. O que gera uma contradição com a nossa suposição. Portanto, $\mathfrak{g}_1$ é um $\mathfrak{g}_0-$módulo irredutível.

Por fim, suponha que a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_1$ não seja fiel. A parte (a) da proposição 3.1.9, implica que $\widehat{\mathfrak{j}} = \{$Núcleo da representação de $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ em $\mathfrak{g}_1\}$ é um ideal não nulo de $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$. Se $\widehat{\mathfrak{j}}$ é simples, tome $\mathfrak{j} = \widehat{\mathfrak{j}}$. Caso contrário $\widehat{\mathfrak{j}}$ é soma direta de ideais simples e tomemos $\mathfrak{j}$ igual a um destes ideais. Assim,

$$[\mathfrak{j}, \mathfrak{g}_1] = \{0\}. \tag{3.1.21}$$

Seja $a \in \mathfrak{g}_1$ e considere a função linear f_a, definida em (3.1.15). Veja que, dado $x \in \mathfrak{j}$, $y \in \mathfrak{g}_{-1}$

$$xf_a(y) = [x, [a, y]] = [[x, a], y] + [a, [x, y]] = 0 = [a, [x, y]] = f_a x(y),$$

ou seja, f_a é $\mathfrak{j}-$invariante. Como $\mathfrak{g}$ é transitiva o $\mathfrak{g}_0-$módulo $\mathfrak{g}_{-1}$ é fiel e irredutível, e pelo teorema de Weyl, como $\mathfrak{j}-$módulo, $\mathfrak{g}_{-1}$ é escrito como soma direta de $\mathfrak{j}-$submódulos irredutíveis e fiéis. Note que f_a envia cada um destes submódulos em $\mathfrak{j}$. Assim, segue que

$$f_a(\mathfrak{g}_{-1}) \subseteq \mathfrak{j}, \quad a \in \mathfrak{g}_1. \tag{3.1.22}$$

Ou seja

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_{-1}] \subseteq \mathfrak{j}, \quad a \in \mathfrak{g}_1. \tag{3.1.23}$$

Agora, pela proposição 3.1.8 temos que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{j}$. Portanto, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \mathfrak{j}$ e pelo que vimos no início da demonstração, $\dim(\mathfrak{g}_1) = 1$.

□

3.1.2 Filtrações de super álgebras de Lie

A seguinte definição de uma filtração é de certa forma mais restritiva do que a usual.

Definição 3.1.12. Uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita filtrada se nos é dada uma família $\{\mathfrak{g}^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ de subespaços $\mathbb{Z}_2-$graduados de $\mathfrak{g}$ tais que

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^n &\supseteq \mathfrak{g}^m, \text{ se } n \leq m && (3.1.24)\\ \mathfrak{g}^n &= \mathfrak{g}, \text{ se } n \leq -1; && (3.1.25)\\ \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^n &= \{0\}; && (3.1.26)\\ [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}^m] &\subseteq \mathfrak{g}^{n+m}, \ \forall\, n, m \in \mathbb{Z}. && (3.1.27) \end{aligned}$$

A filtração $\{\mathfrak{g}^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ (e a própria álgebra $\mathfrak{g}$) será chamada de *transitiva* se

$$\mathfrak{g}^{n+1} = \{a \in \mathfrak{g}^n \mid [a, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}^n\}, \ \forall\, n \geq 0. \tag{3.1.28}$$

Note que a equação (3.1.27) implica que $[\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}^n] \subseteq \mathfrak{g}^n$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, portanto $\mathfrak{g}^0$ é uma subálgebra graduada de $\mathfrak{g}$ e a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ induz uma representação graduada de $\mathfrak{g}^0$ em $\mathfrak{g}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Segue também das equações (3.1.26) e (3.1.28), que a filtração transitiva $\{\mathfrak{g}^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ é fixada uma vez que nos é dada a subálgebra graduada $\mathfrak{g}^0$ de $\mathfrak{g}$. Reciprocamente:

Proposição 3.1.13. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie, $\mathfrak{g}^0$ uma subálgebra graduada que não contém ideais não triviais de $\mathfrak{g}$. Então, (3.1.28) define uma filtração transitiva em $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Pela identidade de Jacobi prova-se a primeira propriedade da definição de filtração. A segunda propriedade segue do fato que $\cap\mathfrak{g}^n$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ contido em $\mathfrak{g}^0$, sendo assim, pela hipótese sobre $\mathfrak{g}^0$ este deve ser o ideal nulo.

□

A uma super álgebra de Lie filtrada $\mathfrak{g}$, podemos associar de forma natural a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada

$$\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i\geq -1} \mathrm{Gr}_i(\mathfrak{g}) \ \text{ onde } \ \mathrm{Gr}_i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+1},$$

onde a função multiplicação $\mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{Gr}_{n+m}(\mathfrak{g})$ é obtida passando ao quociente a função multiplicação $\mathfrak{g}^n \times \mathfrak{g}^m \longrightarrow \mathfrak{g}^{n+m}$, ou seja, dados $\bar{a} \in \mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g})$, $\bar{b} \in \mathrm{Gr}_m(\mathfrak{g})$, então

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \overline{[a, b]} \in \mathrm{Gr}_{n+m}(\mathfrak{g}).$$

(Aqui, se $c \in \mathfrak{g}^k$, então $\bar{c} = c + \mathfrak{g}^{k+1}$).

Como cada $\mathfrak{g}^n$ é um espaço $\mathbb{Z}_2-$graduado, $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é uma super álgebra $\mathbb{Z}-$graduada e além disso

$$\mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g}) = \{0\}, \ \text{ se } \ n \leq -2. \tag{3.1.29}$$

Observe também que a $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é consistente se e só se

$$\bigoplus_{n\geq -1} \mathrm{Gr}_{2n+2}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq -1} \mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g})_{\bar{0}}, \quad \bigoplus_{n\geq -1} \mathrm{Gr}_{2n+1}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq -1} \mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g})_{\bar{1}},$$

ou equivalentemente,

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{2r-1} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{2r}, \qquad \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{2r} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{2r+1}, \ \ \forall r \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.30}$$

Lema 3.1.14. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie filtrada (com a filtração $\{\mathfrak{g}^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$).

a) A filtração de $\mathfrak{g}$ é transitiva se, e somente se, $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ for uma super álgebra de Lie transitiva.

b) Suponha que $\mathfrak{g}$ é transitiva. A $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é consistente com a $\mathbb{Z}_2-$graduação se e só se $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \subseteq \mathfrak{g}^0$.

c) Suponha que $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \subseteq \mathfrak{g}^0$. A super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é irredutível se e só se $\mathfrak{g}^0_{\bar{1}}$ for um subespaço maximal (próprio) $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariante de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$.

Demonstração. a) Suponha que a filtração de $\mathfrak{g}$ é transitiva. Seja $a \in \mathfrak{g}^n$. Suponha que $[\bar{a}, \mathrm{Gr}_{-1}(\mathfrak{g})] = \bar{0} \in \mathrm{Gr}_{n-1}(= \mathfrak{g}^{n-1}/\mathfrak{g}^n)$. Isto é, para qualquer $b \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1}$, temos que

$$[\bar{a}, \bar{a}] = \overline{[a,b]} = \bar{0} = \mathfrak{g}^n$$

ou seja, $[a,b] \in \mathfrak{g}^n$. Como a escolha de $b \in \mathfrak{g}$ foi arbitrária, isso implica que $a \in \mathfrak{g}^{n+1}$, pois a filtração é transitiva. Portanto, $\bar{a} = \bar{0}$ em $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$. Provamos assim que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é uma super álgebra de Lie transitiva. Reciprocamente, se $a \in \mathfrak{g}^{n+1} \subseteq \mathfrak{g}^n$, então pela propriedade da filtração, tem-se que $[a,b] \in \mathfrak{g}^n$, $\forall\, b \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1}$. Portanto, $\mathfrak{g}^{n+1} \subseteq \{a \in \mathfrak{g}^n \,|\, [a, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}^n\}$. Suponha agora que exista $a \in \mathfrak{g}^n \setminus \mathfrak{g}^{n+1}$, tal que $[a,b] \in \mathfrak{g}^n$. Assim, por um lado temos que $\overline{[a,b]} \in \mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g})$. Por outro lado, $[a,b] \in \mathfrak{g}^{n-1}$, pois $a \in \mathfrak{g}^n \setminus \mathfrak{g}^{n+1}$, então $\overline{[a,b]} \in \mathrm{Gr}_{n-1}(\mathfrak{g})$, ou seja, $\overline{[a,b]} \in \mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Gr}_{n-1}(\mathfrak{g}) = \{\bar{0}\}$. Logo, $\overline{[a,b]} = \bar{0}$, ou o que é a mesma coisa, $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$, $\forall\, b \in \mathfrak{g}$. Assim, obtemos que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ não é uma super álgebra de Lie transitiva.

b) Note que, a filtração de $\mathfrak{g}$ transitiva, implica pelo item (a) que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é uma super álgebra de Lie transitiva. Logo, pelo lema 3.1.4, a $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é consistente com a $\mathbb{Z}_2-$graduação se, e somente se, $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Gr}(\mathfrak{g})_{\bar{1}}$, o que é equivalente a dizer que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{0}}$. Mas

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{0}} = \{\bar{0}\} \Leftrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}^0_{\bar{0}} \Leftrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}} \subseteq \mathfrak{g}^0.$$

c) Veja que, $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é irredutível se, e somente se, a ação de $\mathrm{Gr}_0(\mathfrak{g})$ em $\mathrm{Gr}_{-1}(\mathfrak{g})$ for irredutível. Mas $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \subseteq \mathfrak{g}^0$, ou seja, $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}^0_{\bar{0}}$. Então,

$$\mathrm{Gr}_{-1}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_{\bar{0}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{1}}$$

Como $\mathrm{Gr}_0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^0/\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^0_{\bar{0}}/\mathfrak{g}^1_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}^0_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^1_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}/\mathfrak{g}^1_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}^0_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^1_{\bar{1}}$, tal ação é dada da seguinte forma: Se $\bar{a} \in \mathfrak{g}^0_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^1_{\bar{1}}$ e $\bar{b} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{1}}$, então $[a,b] \in \mathfrak{g}^{-1}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e portanto $[\bar{a}, \bar{b}] = \overline{[a,b]} \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{0}} = \{\bar{0}\}$. Agora, falta ver como é a ação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}/\mathfrak{g}^1_{\bar{0}}$ sobre $\mathfrak{g}_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{1}}$. Para isso, seja $\bar{a} \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}/\mathfrak{g}^1_{\bar{0}}$ e $\bar{b} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{1}}$, então $[a,b] \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e portanto $[\bar{a}, \bar{b}] = \overline{[a,b]} \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}/\mathfrak{g}^0_{\bar{1}}$. Assim, tal ação é irredutível se, e somente se, $\mathfrak{g}^0_{\bar{1}}$ for o maior subespaço (próprio) de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ que é $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariante.

□

Seja $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -1} L_i$ uma super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada. Defina

$$\mathfrak{g}^n = \bigoplus_{m \geq n} L_m, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.31}$$

A família $\{\mathfrak{g}^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ define uma filtração para $\mathfrak{g}$. Esta filtração é dita ser associada a $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathfrak{g}$. Note que a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$, associada a filtração $\{\mathfrak{g}^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, é canonicamente isomorfa a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathfrak{g}$, tal isomorfismo se deve ao fato que

$$\mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^n/\mathfrak{g}^{n+1} \cong L_n, \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Gostaríamos de saber agora o recíproco do que foi feito acima, isto é, quando que uma filtração é obtida de uma $\mathbb{Z}-$graduação. A próxima proposição contém um critério para responder a essa pergunta.

Proposição 3.1.15. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie transitiva (equipada com a filtração $\{\mathfrak{g}^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$). Suponha que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é uma super álgebra de Lie irredutível consistentemente $\mathbb{Z}-$graduada e tal que $\mathfrak{z}(\mathrm{Gr}_0(\mathfrak{g})) \neq \{0\}$. Então, existe uma $\mathbb{Z}-$graduação $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\geq -1} L_n$ da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que induz a filtração $\{\mathfrak{g}^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Consequentemente, $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$.

Demonstração. Estamos supondo que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{g})$ é uma super álgebra de Lie com $\mathbb{Z}-$graduação consistente, transitiva e tal que $\mathfrak{z}(\mathrm{Gr}_0(\mathfrak{g})) \neq \{0\}$. Assim, a proposição 3.1.9 garante que existe um único elemento $\bar{c} \in \mathfrak{z}(\mathrm{Gr}_0(\mathfrak{g}))$, tal que

$$[\bar{c}, \bar{x}] = n\bar{x}, \ \text{ se } \ x \in \mathrm{Gr}_n(\mathfrak{g}). \tag{3.1.32}$$

Assim, se $z = x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}$ (aqui $x_{n_j} \in \mathrm{Gr}_j(\mathfrak{g})$, $j = 1, \ldots, k$) é um autovetor de $\mathrm{ad}(c)$, com autovalor λ, então

$$\lambda z = [c, z] = [c, x_{n_1}] + \ldots + [c, x_{n_k}] = n_1 x_{n_1} + \ldots n_k x_{n_k} \Rightarrow \lambda = n_1 + \ldots + n_k,$$

onde $-1 \leq n_1 < \ldots < n_k$. Logo, cada autovalor de $\mathrm{ad}(c)$ é um inteiro $n \geq -1$. Considere agora a decomposição primária de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathrm{ad}(c)$. Se definirmos para cada inteiro n

$$L_n = \{a \in \mathfrak{g} \,|\, (\mathrm{ad}(c) - n)^r(a) = 0, \ \text{ para algum } \ r > 0\}. \tag{3.1.33}$$

segue que

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\geq -1} L_n. \tag{3.1.34}$$

Note que, cada L_n é um subespaço $\mathbb{Z}_2-$graduado de $\mathfrak{g}$. Por outro lado, $\mathrm{ad}(a)$ é uma derivação de grau *zero* em $\mathfrak{g}$ para qualquer $a \in L_0$. Em particular, $\mathrm{ad}(c)$ também é. Note que, como em álgebras de Lie, temos que

$$[L_n, L_m] = L_{n+m}, \ \ \forall\, n, m \in \mathbb{Z}. \tag{3.1.35}$$

(ver por exemplo [S. Martin] proposição 3.1).
Portanto, $\{L_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ é uma $\mathbb{Z}-$graduação da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Basta agora provarmos que

$$\mathfrak{g}^n = \bigoplus_{m\geq n} L_m, \ \ \forall\, n \geq -1. \tag{3.1.36}$$

Seja $n \in \mathbb{Z}$, e considere a projeção canônica

$$\begin{array}{rcl} \pi_n : \mathfrak{g}^n & \longrightarrow & \mathfrak{g}^n/\mathfrak{g}^{n+1} \\ a & \longmapsto & \bar{a} = a + \mathfrak{g}^{n+1} \end{array} \tag{3.1.37}$$

Note que,

$$\pi_n([c, x]) = [\bar{c}, \bar{x}] = n\bar{x}, \ \ \forall\, x \in \mathfrak{g}^n.$$

Logo, se $m \in \mathbb{Z}$ e $n \neq m$, então $\pi_n(L_m \cap \mathfrak{g}^n) = \{\bar{0}\}$, ou seja,

$$L_m \cap \mathfrak{g}^n \subseteq \mathfrak{g}^{n+1}.$$

Vamos provar por indução que $\mathfrak{g}^n = \bigoplus_{m\geq n} L_m$. A equação 3.1.34 prova o passo indutivo. Pela hipótese de indução $\mathfrak{g}^n = \bigoplus_{m\geq n} L_m$. Daí, $x \in L_m$ para $m > n$, implica que $x \in \mathfrak{g}^n$. Portanto, $x \in \mathfrak{g}^n \cap L_m \subseteq \mathfrak{g}^{n+1}$. Ou seja,

$$\bigoplus_{m\geq n+1} L_m \subseteq \mathfrak{g}^{n+1}.$$

Seja agora $x \in \mathfrak{g}^{n+1}$. Como $\mathfrak{g}^{n+1} \subseteq \mathfrak{g}^n = \bigoplus_{m \geq n} L_m$, temos que

$$x = x_n + x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}, \quad x_{n_i} \in L_{n_i}, \quad n < n_1 < \ldots < n_k.$$

Por outro lado, $\bigoplus_{m \geq n+1} L_m \subseteq \mathfrak{g}^{n+1}$. Daí, segue que $0 = \pi_n(x) = \pi_n(x_n) = x_n$ e portanto temos a outra inclusão. Concluímos assim que

$$\mathfrak{g}^n = \bigoplus_{m \geq n} L_m.$$

□

3.2 Algumas propriedades das super álgebras de Lie simples

Nesta seção trataremos das super álgebras de Lie simples.

Definição 3.2.1. Uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é chamada de *simples* se seus únicos ideais graduados são os triviais e se, além disso, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$.

Observe que a condição $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$ serve para eliminar o caso em que $\mathfrak{g} = \{0\}$ e os dois casos em que $\dim(\mathfrak{g}) = 1$. Note que isso implica que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

De acordo com a definição anterior é permitido que uma super álgebra de Lie simples contenha ideais não triviais que sejam não graduados. Contudo, este não é o caso.

Proposição 3.2.2. Uma super álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$ não tem ideais (graduados ou não), exceto os triviais.

Demonstração. Se $a \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, então a função linear definida por

$$\begin{aligned} \gamma : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ a &\longmapsto (-1)^\alpha a \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

é um automorfismo da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se b é um elemento arbitrário de $\mathfrak{g}$, suas componentes homogêneas de grau $\beta \in \mathbb{Z}_2$ é igual a $\frac{1}{2}(b+(-1)^\beta \gamma(b))$. Em particular, um subespaço de $\mathfrak{g}$ é $\mathbb{Z}_2-$graduado se e só se este é invariante por γ.

Seja $\mathfrak{j}$ um ideal de $\mathfrak{g}$ que é diferente de $\{0\}$ e de $\mathfrak{g}$. Então, $\gamma(\mathfrak{j})$ também é um ideal de $\mathfrak{g}$. Consequentemente, $\mathfrak{j} + \gamma(\mathfrak{j})$ e $\mathfrak{j} \cap \gamma(\mathfrak{j})$ são ideais graduados de $\mathfrak{g}$ e sendo assim

$$\mathfrak{j} + \gamma(\mathfrak{j}) = \mathfrak{g}\,, \quad \mathfrak{j} \cap \gamma(\mathfrak{j}) = \{0\}.$$

Logo, o espaço vetorial $\mathfrak{g}$ é soma direta dos subespaços $\mathfrak{j}$ e $\gamma(\mathfrak{j})$, além disso, temos

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{b + (-1)^\alpha \gamma(b) \,|\, b \in \mathfrak{j}\}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_2.$$

Seja

$$\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

uma função linear que é definida da seguinte forma:

$$\tau(b) = b\,, \quad \tau(\gamma(b)) = -\gamma(b), \ \ \forall\, b \in \mathfrak{j}.$$

Assim, nós temos que

$$\tau^2 = \mathrm{id}, \quad \tau(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = \mathfrak{g}_{\bar{1}} \ \text{ e } \ \tau(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) = \mathfrak{g}_{\bar{0}}.$$

Além do mais, o fato que $\mathfrak{j}$ e $\gamma(\mathfrak{j})$ são ideais implica que τ comuta com a representação adjunta:

$$\tau([a,b]) = [a,\tau(b)], \quad \forall\, a,b \in \mathfrak{g}.$$

Mas de acordo com o próximo lema, uma função τ com essas propriedades não existe.

$\square$

Lema 3.2.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie simples. Se $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma função linear ímpar, tal que

$$\tau([a,b]) = [a,\tau(b)], \quad \forall\, a,b \in \mathfrak{g}, \tag{3.2.2}$$

então $\tau = 0$.

Demonstração. É fácil ver que tanto o núcleo quanto a imagem de τ são ideais graduados de $\mathfrak{g}$. Logo, $\tau = 0$ ou τ é bijetiva.

Suponha que τ é bijetiva e considere a e b dois elementos homogêneos quaisquer de $\mathfrak{g}$. Se a e b possuem o mesmo grau, então

$$[\tau(a),\tau(b)] = \tau([\tau(a),b]) = \tau(-(-1)^{(|a||b|+|b|)}[b,\tau(a)]) = -\tau^2([b,a]) \tag{3.2.3}$$

já que $|a||b| + |b| = \bar{0}$ pois estamos supondo $|a| = |b|$. Mas um lado dessa equação é simétrico em a, b e outro é antí-simétrico. Assim, $[a,b] = 0$ se a e b são elementos homogêneos de mesmo grau.

Por outro lado, se a e b são homogêneos de graus diferentes, então a e $\tau(b)$ são homogêneos de mesmo grau, e sendo assim, a equação (3.2.2) juntamente com resultado acabamos de provar implica que $[a,b] = 0$. Portanto, mostramos que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \{0\}$, o que é uma contradição ($\mathfrak{g}$ é simples).

$\square$

Lema 3.2.4. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie simples, então

1)

$$[\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \mathfrak{g}_{\bar{1}}. \tag{3.2.4}$$

2) Se $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$, então

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}_{\bar{1}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}] &= \mathfrak{g}_{\bar{0}} \\ \{a \in \mathfrak{g} \mid [a,\mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \{0\}\} &= \{0\}. \end{aligned}$$

Em particular, a representação adjunta de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é fiel.

3) Se $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação graduada de $\mathfrak{g}$ em algum espaço vetorial V, então

$$\mathrm{str}(\rho(a)) = 0, \quad \forall\, a \in \mathfrak{g}. \tag{3.2.5}$$

Demonstração. Os itens 1) e 2) seguem diretamente do fato que $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus [\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}]$, $[\mathfrak{g}_{\bar{1}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}] \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e $\{a \in \mathfrak{g} \mid [a,\mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \{0\}\} = \{0\}$ são ideais de $\mathfrak{g}$. Já a afirmação 3) é válida para qualquer super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, e este é o nosso caso.

$\square$

Proposição 3.2.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie simples.

1) Uma função bilinear invariante em $\mathfrak{g}$, é não degenerada ou identicamente nula.

2) Toda função bilinear invariante em $\mathfrak{g}$ é supersimétrica.

3) As funções bilineares invariantes em $\mathfrak{g}$, são todas pares ou todas ímpares.

4) No caso em que o corpo é algebricamente fechado, todas as funções bilineares invariantes em $\mathfrak{g}$ são proporcionais uma a outra.

Demonstração. 1) Seja Ψ uma função bilinear invariante em $\mathfrak{g}$. Considere

$$\mathfrak{i} = \{b \in \mathfrak{g} \,|\, \Psi(a,b) = 0 \ \forall\, a \in \mathfrak{g}\}.$$

$\mathfrak{i}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Logo, a proposição 3.2.2 prova que $\mathfrak{i} = \{0\}$, ou $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$, isto é, Ψ é identicamente nula ou não degenerada.

2) Esse resultado segue do fato que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, daí se $a, b \in \mathfrak{g}$, podemos escrever, por exemplo $a = [a_1, a_2]$, para $a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$. Assim,

$$\Psi(a,b) = \Psi([a_1,a_2],b) = \Psi(a_1,[a_2,b]) = (-1)^{|a_2||b|}\Psi(a_1,[b,a_2]) = (-1)^{|a_2||b|}\Psi([a_1,b],a_2)$$
$$= (-1)^{(|a_2|+|a_1|)|b|}\Psi([b,a_1],a_2) = (-1)^{|a||b|}\Psi(b,[a_1,a_2]) = (-1)^{|a||b|}\Psi(b,a).$$

3) As componentes homogêneas de uma função bilinear invariante também são invariantes. Assim, graças a parte 1) desta proposição, para provar este item basta provarmos que: Se Ψ e Ψ' são funções bilineares invariantes, de graus diferentes, então, Ψ não degenerada implica que $\Psi' = 0$. De fato, como Ψ é não degenerada, existe uma única função Linear τ de $\mathfrak{g}$ para ele mesmo, tal que

$$\Psi'(a,b) = \Psi(a,\tau(b)), \ \ \forall\, a,b \in \mathfrak{g}.$$

Esta função satisfaz a condição do lema 3.2.3. De fato, como os graus de Ψ e Ψ' são diferentes, da equação acima obtemos que τ é ímpar. Por outro lado, sejam $x, a, b \in \mathfrak{g}$. Então,

$$\Psi(x,\tau([a,b])) = \Psi'(x,[a,b]) = \Psi'([x,a],b) = \Psi([x,a],\tau(b)) = \Psi(x,[a,\tau(b)]),$$

mas Ψ é não degenerada, o que implica $\tau([a,b]) = [a,\tau(b)]$. Logo, pelo lema 3.2.3, $\tau = 0$ e portanto $\Psi' = 0$.

4) Sejam Ψ e Ψ' funções bilineares de $\mathfrak{g}$. Se uma delas é nula, tome a constante de proporção igual a zero. Caso contrário, pelo item 1) as duas formas são não degeneradas. Então, existe $\tau \neq 0$, linear tal que $\tau([x,y]) = [x,\tau(y)]$, ou seja, $\tau \circ \mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x) \circ \tau \ \forall\, x \in \mathfrak{g}$. Note que desta vez τ é par, pois senão, como no item anterior, uma das formas bilineares seria identicamente nula. Assim, como $\mathfrak{g}$ é simples e τ é par, o lema de Schur assegura que $\tau = \lambda I$. Portanto,

$$\Psi = \lambda \Psi'.$$

□

Diferentemente com o que acontece em álgebras de Lie, não é sempre verdade que uma super álgebra de Lie simples admite uma forma bilinear não degenerada. Este ”defeito” traz algumas dificuldades para provar o teorema de classificação.

Para terminar esta seção, daremos alguns critérios para que uma super álgebra de Lie seja simples.

Lema 3.2.6. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie que satisfaz as seguintes condições:

1) A representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é fiel e irredutível.

2) $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \mathfrak{g}_0$.

Então, $\mathfrak{g}$ é simples desde que $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \neq \{0\}$.

Demonstração. Basta ver que $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}')$, $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$ e $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, são ideais de $\mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$ é um $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$submódulo de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. □

Lema 3.2.7. Seja $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -1} \mathfrak{g}_i$ uma super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada, e suponha que $\mathfrak{g}_{-1} \neq \{0\}$.

a) Se $\mathfrak{g}$ é simples, então

1) $\mathfrak{g}$ é transitiva e irredutível,

2) $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_0$

e em particular

3) $\mathfrak{g}_0 \neq \{0\}, \quad \mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$.

b) Reciprocamente, suponha que $\mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$. Então, $\mathfrak{g}$ é simples se além da condição 1) acima, $\mathfrak{g}$ também satisfaz a seguinte condição:

4) $[\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_{n+1}, \ \forall\, n \geq -1$.

Demonstração. Seja V um subespaço $\mathbb{Z}_2-$graduado de $\mathfrak{g}$ tal que

$$[\mathfrak{g}_{-1}, V] \subseteq V, \quad [\mathfrak{g}_0, V] \subseteq V. \tag{3.2.6}$$

Tome

$$\mathfrak{g}^+ = \bigoplus_{n \geq 1} \mathfrak{g}_n \tag{3.2.7}$$

e para cada inteiro $n \geq 0$, defina

$$V^n = \underbrace{[\mathfrak{g}^+, [\mathfrak{g}^+, \ldots [\mathfrak{g}^+}_{n \text{ vezes}}, V] \ldots]]. \tag{3.2.8}$$

Não é difícil ver que

$$\widetilde{V} = \sum_{n \geq 0} V^n$$

é um ideal graduado da super álgebra $\mathfrak{g}$. Suponha que $\mathfrak{g}$ é simples e tome

$$V = \{a \in \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}_n \,|\, [a, \mathfrak{g}_{-1}] = \{0\}\}.$$

O ideal $\widetilde{V}$ esta contido em $\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}_n$. Logo, $\widetilde{V} = \{0\}$ e portanto $\mathfrak{g}$ é transitiva.

Por outro lado, seja V um $\mathfrak{g}_0-$submódulo graduado e não nulo de $\mathfrak{g}_{-1}$. Então, $\widetilde{V}$ é não nulo e está contido em $V \oplus \left(\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{g}_n\right)$. Isso implica que $V = \mathfrak{g}_{-1}$ e assim $\mathfrak{g}$ é irredutível. A equação (3.2.6), segue do fato que $\mathfrak{g}_{-1} \oplus [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \oplus \mathfrak{g}_1$ é um ideal graduado e não nulo de $\mathfrak{g}$.

b) Seja $\mathfrak{h}$ um ideal graduado de $\mathfrak{g}$. Então, $\mathfrak{h}_n \neq \{0\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Note que isso implica que $\mathfrak{h}_{-1} \neq \{0\}$. De fato, como $\mathfrak{h}_n \neq \{0\}$ e $\mathfrak{g}$ é transitiva, segue que $\{0\} \neq [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{h}_n] \subseteq \mathfrak{h}_{n-1}$. Seguindo assim, obtemos que $\mathfrak{h}_{-1} \neq \{0\}$. Logo, pelo fato que $\mathfrak{g}$ é irredutível temos que $\mathfrak{h}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}$. Dessa forma $\mathfrak{g}_0 = [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = [\mathfrak{h}_{-1}, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{h}_0$, ou seja, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0$. Prosseguindo dessa forma temos que $\mathfrak{h}_n = \mathfrak{g}_n$. Portanto, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ e concluímos assim que $\mathfrak{g}$ é simples.

□

3.2.1 Propriedades do $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$

Discutiremos agora alguns resultados sobre a representação ad$'$ de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Nesta discussão trataremos com mais interesse uma classe especial das super álgebras de Lie simples, chamadas de clássicas.

Proposição 3.2.8. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie simples. Suponha que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é a soma

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1 + \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2 \tag{3.2.9}$$

de dois subespaços próprios de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ que são $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariantes. Então, esta soma é direta e os $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulos $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$ são irredutíveis. Além do mais, temos que

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1] = [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2] = \{0\}, \quad [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2] = \mathfrak{g}_{\bar{0}}. \tag{3.2.10}$$

Antes de começarmos a demonstração, obteremos um caso especial da proposição 3.2.8.

Lema 3.2.9. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples. Suponha que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é uma soma direta

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \bigoplus_{s=1}^{r} \mathfrak{g}_{\bar{1}}^s, \quad r \geq 1 \tag{3.2.11}$$

de subespaços não nulos de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ que são $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariantes. Então, $r = 1$ ou $r = 2$. Neste último caso valem as equações (3.2.10).

Demonstração. (Do lema) No caso $r = 1$ não há nada a ser feito. Vamos considerar o caso $r = 2$. Uma vez que este caso é estabelecido o restante da demonstração segue diretamente.

Vamos provar que

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1] \oplus [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1]]$$

é um ideal de $\mathfrak{g}$.

A $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariância de $\mathfrak{i}$ é óbvia, além do mais, temos que

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i}.$$

Nossa próxima observação é que

$$[[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1], \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2] \subseteq [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2]] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1.$$

Como $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$ é $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariante segue que

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2, [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1]] = \{0\}. \tag{3.2.12}$$

Isso implica

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2,[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1,[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1]]] \subseteq [[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1],[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1]] \subseteq [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1]. \tag{3.2.13}$$

Combinando as equações (3.2.12) e (3.2.13), obtemos que

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2,\mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i}.$$

Assim, nós mostramos que $\mathfrak{i}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{i} \neq \mathfrak{g}$, concluímos que

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1] = \{0\}$$

e similarmente

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2] = \{0\}.$$

Mas a parte 2) do lema 3.2.4 nos fornece

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2] = [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1] = \mathfrak{g}_{\bar{0}}.$$

Suponha agora que $r \geq 3$. Se $s \in \{1,\ldots,r\}$ temos

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^s \oplus \left(\bigoplus_{i\neq s} \mathfrak{g}_{\bar{1}}^i\right)$$

e o caso $r=2$ implica que

$$\left[\bigoplus_{i\neq s} \mathfrak{g}_{\bar{1}}^i, \bigoplus_{j\neq s} \mathfrak{g}_{\bar{1}}^j\right] = \{0\}.$$

Daí, segue que

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^i,\mathfrak{g}_{\bar{1}}^j] = \{0\} \quad \forall\, i,j \in \{1,\ldots,r\},$$

ou seja

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}},\mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \{0\}.$$

Como estamos supondo $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \neq \{0\}$, isso é uma contradição com fato de $\mathfrak{g}$ ser simples (ver lema 3.2.4). $\square$

Tendo estabelecido o lema 3.2.9, vamos provar agora a proposição 3.2.8.

Demonstração. (Da proposição) Seja $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$ os subespaços de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ mencionados no enunciado. Defina duas sequências $(V_n^i)_{n\geq -1}$, para $i=1,2$, de subespaços de $\mathfrak{g}$, da seguinte forma: Tome

$$V_{-1}^i = \mathfrak{g}_{\bar{1}},\;\; V_0^i = \mathfrak{g}_{\bar{0}},\;\; V_1^i = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^i$$

e defina indutivamente

$$V_n^i = [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^i, V_{n-1}^i], \;\; \text{se } n \geq 2.$$

Note que os subespaços V_n^i são pares (resp. ímpares) se o inteiro n é par (resp. ímpar). Além disso, é fácil ver que para todos inteiros $n \geq -1$

$$V_n^i \;\text{ é }\; \mathfrak{g}_{\bar{0}} - \text{invariante} \tag{3.2.14}$$

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, V_{n+1}^i] \;\subseteq\; V_n^i \tag{3.2.15}$$

$$V_{n+2}^i \;\subseteq\; V_n^i. \tag{3.2.16}$$

De (3.2.16), deduzimos que existe um inteiro $m \geq 1$ tal que

$$V_{2m+2}^i = V_{2m}^i.$$

Usando (3.2.14) e (3.2.15), concluímos que $V_{2m}^i \oplus V_{2m+1}^i$ é um ideal graduado de $\mathfrak{g}$, que deve ser igual a $\{0\}$.

Assim, mostramos que

$$V_n^i = \{0\},$$

se n é um inteiro positivo suficientemente grande.

Agora, considere um inteiro positivo $r \geq 0$ e defina

$$\mathfrak{i}_{\bar{0}}^r = \sum_{s=0}^{r} V_{2(r-s)}^1 \cap V_{2s}^2 \tag{3.2.17}$$

$$\mathfrak{i}_{\bar{1}}^r = \sum_{s=0}^{r+1} V_{2(r-s)+1}^1 \cap V_{2s-1}^2 \tag{3.2.18}$$

$$\mathfrak{i}^r = \mathfrak{i}_{\bar{0}}^r \oplus \mathfrak{i}_{\bar{1}}^r \tag{3.2.19}$$

Usando (3.2.14), (3.2.15) e (3.2.16) vemos que $\mathfrak{i}^r$ é um ideal graduado de $\mathfrak{g}$, para qualquer $r \geq 0$. Observe que

$$\mathfrak{i}_{\bar{0}}^0 = \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \quad \mathfrak{i}_{\bar{1}}^0 = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1 \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2 = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$$

e que

$$\mathfrak{i}_{\bar{1}}^r \subseteq \left(V_{2r+1}^1 + \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2\right) \cap \left(\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1 + V_{2r+1}^2\right).$$

Portanto, se $V_{2r+1}^1 = \{0\}$ ou $V_{2r+1}^2 = \{0\}$ (que será o caso se r for grande o suficiente), então $\mathfrak{i}_{\bar{1}}^r \neq \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, e sendo assim $\mathfrak{i}^r = \{0\}$.

Vamos considerar agora R como sendo o menor inteiro de todos os inteiros $r \geq 1$ tal que

$$V_{2(r-s)+1}^1 \cap V_{2r-1}^2 = \{0\}, \quad \text{se } 1 \leq s \leq r \tag{3.2.20}$$

(veja (3.2.18)). Então, por um lado V_{2R-1}^1 e V_{2R-1}^2 são diferentes de $\{0\}$, pois de outra forma teríamos que $R \geq 2$ e $\mathfrak{i}^{R-1} = \{0\}$, implicando que R não é minimal. Em particular, concluímos que $\mathfrak{i}^{R-1} = \mathfrak{g}$ e consequentemente que $\mathfrak{i}_{\bar{1}}^{R-1} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$.

Por outro lado, segue de (3.2.20) que a soma definindo $\mathfrak{i}_{\bar{1}}^{R-1}$ é direta. Mas como já sabemos que os dois termos V_{2R-1}^1 e V_{2R-1}^2 desta soma são diferentes de $\{0\}$, deduzimos do lema 3.2.9 que todos os outros termos restantes da soma devem ser iguais a $\{0\}$. Isso implica que $R = 1$, pois caso contrário ele não seria minimal. Assim, mostramos que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é a soma direta de $V_1^1 = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1$ e $V_2^1 = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$.

Agora não é difícil verificar que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$ são $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulos e irredutíveis. De fato, suponha que $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\bar{1}}^1$ é um subespaço próprio $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariante de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1$. Então, podemos aplicar o resultado acima para $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1$ e $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\bar{1}}^1 \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$ e concluir que a soma destes dois subespaços deve ser direta, isto é, que $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\bar{1}}^1 = \{0\}$.

□

Observação 3.2.10. Usando a mesma notação da proposição 3.2.8, defina

$$\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \quad \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2. \tag{3.2.21}$$

Então, $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ é uma $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathfrak{g}$ que é consistente com a sua $\mathbb{Z}_2-$graduação.

Observação 3.2.11. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie simples. Então, existe somente uma das duas possibilidades.

a) O $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é completamente redutível. Então, $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ se decompõe em no máximo duas componentes irredutíveis.

b) O $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ não é completamente redutível. Neste caso existe um (único) $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$submódulo próprio de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ que contém todos os $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$submódulos próprios de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$.

Mostraremos mais adiante que as duas possibilidades realmente ocorrem.

Definição 3.2.12. Uma super álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$ é chamada de *clássica* se o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é completamente redutível.

O próximo resultado pode ser encontrado em [M. Scheunert] (teorema 1, capítulo 2, parágrafo 2, seção 2). Iremos somente enuncia-lo, pois sua demonstração é bastante extensa e o argumento usado é semelhante ao que iremos usar na subseção 3.6.2, quando formos demonstrar um dos casos do teorema que classifica as super álgebras de Lie clássicas.

Teorema 3.2.13. Uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é clássica se e só se sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ for redutiva.

Corolário 3.2.14. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie clássica tal que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \neq \{0\}$. Então,

$$\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}})) = 1 \tag{3.2.22}$$

e o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ se decompõe como soma direta de dois $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$submódulos irredutíveis

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1 \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2. \tag{3.2.23}$$

Além disso, existe um único elemento $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ tal que

$$[z, x] = (-1)^r x, \ \ \forall\, x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^r; \ \ r = 1, 2.$$

Demonstração. Suponha que o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é irredutível. Se $a \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) \neq \{0\}$, então pelo lema de Schur, existe um elemento $\alpha \in \mathbb{k}$, tal que

$$[a, x] = \alpha x, \ \ \forall\, x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}.$$

Isto implica que

$$2\alpha\mathfrak{g}_{\bar{0}} = 2\alpha[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = [a, [\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}]] = \{0\}$$

(veja lema 3.2.4). Logo, $\alpha = 0$. Mas pelo lema 3.2.4, a representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é fiel. Assim, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = \{0\}$, contrariando nossa hipótese.

Dessa forma o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é completamente redutível. Portanto, pela proposição 3.2.8 juntamente com o lema 3.2.9, obtemos que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é a soma direta de dois $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulos irredutíveis

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1 \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2.$$

Seja $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$. Então, novamente pelo lema de Schur, aplicado a cada uma das componentes irredutíveis, existem elementos α_r; $r = 1, 2$ de $\mathbb{k}$, tais que

$$[z, x_r] = \alpha_r x_r \ \ \forall\, x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^r; \ \ r = 1, 2.$$

Segue daí que

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\mathfrak{g}_{\bar{0}} = (\alpha_1 + \alpha_2)[\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2] = [z, [\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2]] = \{0\}$$

(veja proposição 3.2.8) e portanto $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Por outro lado, pela proposição 3.2.4, a representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é fiel. logo, $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}})) = 1$ e o nosso resultado segue.

$\square$

3.2.2 Subálgebras de Cartan de uma super álgebra de Lie

Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Então, podemos construir a decomposição em espaços de pesos de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$.

Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, e considere

$$\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h) - \lambda(h))^n(x) = 0, \;\; \forall\, h \in \mathfrak{h}; \;\; \text{para algum } \; n > 0\}.$$

Note que $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$ é um subespaço $\mathbb{Z}_2-$graduado de $\mathfrak{g}$, e também que

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}), \;\; \text{onde} \;\; [\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^{\mu}(\mathfrak{h})] \subseteq \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}(\mathfrak{h}); \, \forall\, \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*. \tag{3.2.24}$$

Definimos

$$\Phi_{\bar{0}} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \,|\, \lambda \neq 0; \, \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}\}; \tag{3.2.25}$$

$$\Phi_{\bar{1}} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \,|\, \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \neq \{0\}\}; \tag{3.2.26}$$

$$\Phi = \Phi_{\bar{0}} \cup \Phi_{\bar{1}}. \tag{3.2.27}$$

Os elementos de Φ são chamados de raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$. Mais precisamente, uma raiz é par (resp. ímpar), se esta raiz está em $\Phi_{\bar{0}}$ (resp. $\Phi_{\bar{1}}$). Note que uma raiz pode ser par e ímpar e, além disso, a função nula em $\mathfrak{h}$, não é, por definição, uma raiz par. Contudo, esta pode ser ímpar.

Como $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, temos que

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{0}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

Assim, a equação (3.2.24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Phi_{\bar{0}}} \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Phi_{\bar{1}}} \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \right).$$

Como em álgebras de Lie, é possível provar que quaisquer duas subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ são conjugadas uma da outra por um automorfismo da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Portanto, a partir de agora escreveremos $\mathfrak{g}^{\lambda}$ ao invés de $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$. Uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, é novamente chamada de subálgebra de Cartan da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Observação 3.2.15. Em nossas aplicações, a representação de $\mathfrak{h}$ em $\mathfrak{g}$ será completamente redutível. Neste caso, como qualquer representação irredutível de $\mathfrak{h}$ tem dimensão 1, temos que

$$\mathfrak{g}^{\lambda} = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, [h, x] = \lambda(h)x, \;\; \forall\, h \in \mathfrak{h}\}.$$

Alguns resultados mais detalhados sobre as raízes de uma super álgebra de Lie clássica, e sobre sua decomposição em espaços de raízes serão dados mais adiante neste capítulo.

3.3 Super álgebras de Lie cuja forma de Killing é não degenerada

3.3.1 Alguns resultados básicos

Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e ϕ uma forma bilinear em $\mathfrak{g}$. Lembre que ϕ é chamada de invariante se

$$\phi([x, y], z) = \phi(x, [y, z]), \;\; \forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Importantes exemplos de formas bilineares invariantes são a forma de Killing e, mais geral, as formas bilineares associadas aos $\mathfrak{g}-$módulos (de dimensão finita). Estas formas bilineares são pares e supersimétricas. Na verdade, a propriedade de supersimetria é uma característica bastante normal das formas invariantes de $\mathfrak{g}$, isto devido a

Proposição 3.3.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Então, toda forma bilinear invariante é supersimétrica.

Demonstração. Seja ϕ uma forma bilinear invariante em $\mathfrak{g}$ e, sejam $a \in \mathfrak{g}_\alpha$, $b \in \mathfrak{g}_\beta$ e $c \in \mathfrak{g}_\gamma$, com α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}_2$. Então,

$$\phi(a, [b, c]) = (-1)^{\alpha\beta}\phi([b, a], c) = (-1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\phi(b, [c, a]) = (-1)^{\alpha(\beta+\gamma)}\phi([b, c], a).$$

Como $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, o resultado está provado.

□

Proposição 3.3.2. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e ϕ uma forma bilinear invariante, que é associada a um $\mathfrak{g}-$módulo de dimensão finita (ver subseção 2.3.4). Se ϕ é não degenerada, então $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é redutiva.

Demonstração. Suponha que ϕ é uma forma bilinear associada a um $\mathfrak{g}-$módulo V. Seja ϕ^α, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, a forma bilinear em $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ que é associada ao $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo V_α. Então, como pode ser visto na observação 2.3.16, temos que

$$\phi(a, b) = \phi^{\bar{0}}(a, b) - \phi^{\bar{1}}(a, b), \;\; \forall\, a, b \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}. \tag{3.3.1}$$

Defina

$$J^\alpha := \{a \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \,|\, \phi^\alpha(a, \mathfrak{g}_{\bar{0}}) = \{0\}\}; \quad \alpha \in \mathbb{Z}_2.$$

Como ϕ é par e não degenerada, segue da equação 3.3.1 que $J^{\bar{0}} \cap J^{\bar{1}} = \{0\}$. Sendo assim, [N. Bourbaki], parágrafo 6, proposição 6 diz que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ deve ser redutiva.

□

Corolário 3.3.3. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie simples cuja forma de Killing é não degenerada. Então, $\mathfrak{g}$ é clássica.

Demonstração. Como $\mathfrak{g}$ é simples, uma forma bilinear arbitrária é identicamente nula ou é não degenerada. Por outro lado, uma forma bilinear associada a um $\mathfrak{g}-$módulo é nula se e só se tal $\mathfrak{g}-$módulo for o trivial. Assim, uma vez que o $\mathfrak{g}-$módulo é não trivial, tais formas devem ser não degeneradas. Logo, pela proposição anterior $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é redutiva e portanto $\mathfrak{g}$ é clássica.

□

A seguinte proposição nos dá informações sobre a existência de uma forma bilinear invariante e não degenerada em uma super álgebra de Lie.

Proposição 3.3.4. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ uma super álgebra de Lie com $\mathbb{Z}-$graduação consistente, tal que

$$[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_0. \tag{3.3.2}$$

Suponha que nos é dada uma forma bilinear Ψ em $\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1$ que é $\mathfrak{g}_0-$invariante. Então, existe uma única extensão de Ψ para uma forma bilinear simétrica, par e $\mathfrak{g}-$invariante $\widetilde{\Psi}$, tal que os subespaços $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ são totalmente isotrópicos (isto é, $\widetilde{\Psi}(a, a) = 0, \; \forall a \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$). Além disso, se Ψ é não degenerada e se os $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulos $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ são fiéis, então $\widetilde{\Psi}$ também é não degenerada.

Demonstração. O fato que queremos que $\widetilde{\Psi}$ seja $\mathfrak{g}-$invariante e que os espaços $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ sejam totalmente isotrópicos, junto a equação (3.3.2) implicam que temos que defini-la satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\widetilde{\Psi}(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n) = \widetilde{\Psi}(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_n) = \widetilde{\Psi}(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_0) = \{0\},\ \forall\, n = \pm 1 \tag{3.3.3}$$

Além disso, também queremos que $\widetilde{\Psi}$ seja supersimétrica, ou seja,

$$\widetilde{\Psi}(x, y) = -\widetilde{\Psi}(y, x) = \Psi(x, y),\ \forall\, x \in \mathfrak{g}_{-1}\ y \in \mathfrak{g}_1. \tag{3.3.4}$$

Agora só nos falta ver como $\widetilde{\Psi}$ será definida em $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$. Estamos supondo que os elementos de $\mathfrak{g}_0$ podem ser escritos como

$$\sum_{i=1}^{k} [x_i, y_i],\ \text{ com }\ x_i \in \mathfrak{g}_{-1},\ y_i \in \mathfrak{g}_1. \tag{3.3.5}$$

Seja z um elemento qualquer de $\mathfrak{g}_0$. Como queremos que $\widetilde{\Psi}$ seja $\mathfrak{g}-$invariante, devemos ter que

$$\widetilde{\Psi}(\sum_{i=1}^{k} [x_i, y_i], z) = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{\Psi}(x_i, [y_i, z]). \tag{3.3.6}$$

Não é difícil de ver que esta equação realmente define uma forma bilinear simétrica em $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$, o que implica a supersimetria e a sua $\mathfrak{g}-$invariâcia. Por fim, suponha que Ψ é não degenerada e que a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ é fiel. Para provar que $\widetilde{\Psi}$ é não degenerada é suficiente ver que sua restrição a $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$ o é. Seja $z \in \mathfrak{g}_0$ tal que

$$\widetilde{\Psi}(\mathfrak{g}_0, z) = \{0\}.$$

Então, temos que

$$\Psi(\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_1, z]) = \widetilde{\Psi}([\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1], z) = \widetilde{\Psi}(\mathfrak{g}_0, z) = \{0\},$$

ou seja, $[\mathfrak{g}_1, z] = \{0\}$. Portanto, como a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ é fiel, segue que $z = 0$, como queríamos.

□

Proposição 3.3.5. Se $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie clássica tal que o centro de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é não trivial, então a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada.

Demonstração. Denote a forma de Killing por ϕ. Pelo corolário do teorema 3.2.13, $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}) = 1$ e existe $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\bar{0}})$ tal que

$$[z, x] = (-1)^r x,\ \forall\, x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^r,\ r = 1, 2.$$

Ou seja, para uma base qualquer de $\mathfrak{g}$ temos que

$$\mathrm{ad}(z) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_2 \end{array}\right),$$

onde I_r é a matriz identidade em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^r$, $r = 1, 2$. Logo,

$$\phi(z, z) = \mathrm{str}(\mathrm{ad}(z)\mathrm{ad}(z)) = -\dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) \neq 0,$$

e portanto pela proposição 3.2.5, temos que ϕ é não degenerada.

□

Lema 3.3.6. Sejam $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e $\mathfrak{i}$ um ideal graduado de $\mathfrak{g}$. Se ϕ (resp. ϕ') é a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ (resp. de $\mathfrak{i}$), então $\phi' = \phi|_{\mathfrak{i}}$.

Demonstração. Tome uma base de $\mathfrak{i}_\alpha$ e complete-a a uma base de $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Agora o resultado segue direto, basta ver como é a forma da matriz de um elemento de $\mathfrak{i}$ nesta base.

□

Proposição 3.3.7. Se $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie cuja forma de Killing é não degenerada, então toda derivação é uma derivação interna.

Demonstração. Seja $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ a super álgebra de Lie das derivações de $\mathfrak{g}$ e $\widetilde{\phi}$ a forma de Killing de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Sabemos que

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

é um homomorfismo de super álgebras de Lie. Como a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada, este homomorfismo deve ser injetivo e sendo assim a imagem $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ é isomorfa $\mathfrak{g}$. Logo, como a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada a de $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ também será. Além disso, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ é um ideal graduado de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, uma vez que

$$[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(D(x)),\ \forall\, D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}),\ x \in \mathfrak{g}.$$

De acordo com o lema anterior, a restrição de $\widetilde{\phi}$ a $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ é a forma de Killing de $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ e portanto tal restrição é não degenerada. Por outro lado, note que

$$\widetilde{\phi}(\mathrm{ad}(D(x)), \mathrm{ad}(y)) = \widetilde{\phi}([D, \mathrm{ad}(x)], \mathrm{ad}(y)) = \widetilde{\phi}(D, \mathrm{ad}[x, y]),\ \forall\, D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}),\ x, y \in \mathfrak{g}.$$

Agora considere

$$J = \{D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \,|\, \widetilde{\phi}(D, \mathrm{ad}(\mathfrak{g})) = \{0\}\}.$$

Veja que se $D \in J$, então $0 = \widetilde{\phi}(D, \mathrm{ad}[x, y]) = \widetilde{\phi}(\mathrm{ad}(D(x)), \mathrm{ad}(y))$ para quaisquer x, $y \in \mathfrak{g}$. Mas $\widetilde{\phi}$ restrita a $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ é não degenerada, logo

$$\mathrm{ad}(D(x)) = 0 \Rightarrow D(x) = 0.$$

Como a escolha de $x \in \mathfrak{g}$ foi arbitrária, segue que $D = 0$, e concluímos assim que $J = \{0\}$. Como $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \oplus J$, o resultado está provado.

□

Teorema 3.3.8. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie que não contém ideais abelianos não nulos. Suponha que exista uma forma bilinear ϕ homogênea, não degenerada e invariante em $\mathfrak{g}$. Então,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_n,$$

onde $\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_n$ são ideais simples, mutuamente ortogonais com respeito a forma bilinear ϕ. Além disso, se $\mathfrak{j}$ é um ideal graduado de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{j} = \mathfrak{i}_{r_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_{r_\ell}$, onde $\{r_1, \ldots, r_\ell\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{i}$ um ideal de $\mathfrak{g}$. Então, não é difícil de ver que

$$\mathfrak{i}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, \phi(x, \mathfrak{i}) = \{0\}\}$$

também é um ideal de $\mathfrak{g}$. Suponha que $\mathfrak{i}$ é simples. Note que $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ contido em $\mathfrak{i}$ e portanto este dever ser igual a $\{0\}$ ou $\mathfrak{i}$. Se o último caso é verdade, então $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{i}^\perp$

$$\phi(\mathfrak{g}, [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}]) = \phi([\mathfrak{g}, \mathfrak{i}], \mathfrak{i}) \subseteq \phi(\mathfrak{i}^\perp, \mathfrak{i}) = \{0\}.$$

Como ϕ é não degenerada, esta igualdade implica que $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = \{0\}$. Mas por hipótese $\mathfrak{g}$ não possui ideais não abelianos, logo temos uma contradição, ou seja, $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^{\perp} = \{0\}$. Assim, temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}^{\perp}.$$

Consequentemente, qualquer ideal de $\mathfrak{i}$ ou de $\mathfrak{i}^{\perp}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Isso mostra que $\mathfrak{i}^{\perp}$ não contém ideais graduados, abelianos e não nulos. Note que a restrição $\phi^{\perp}$ de ϕ a $\mathfrak{i}^{\perp}$ é não degenerada e sendo assim o par $(\mathfrak{i}^{\perp}, \phi^{\perp})$ satisfaz as mesmas condições satisfeitas pelo par $(\mathfrak{g}, \phi)$. Portanto, por indução temos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_n,$$

onde por construção, os ideais $\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_n$ são todos simples e mutuamente ortogonais com respeito a ϕ. Assim, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ e pela proposição 3.3.1, temos que ϕ é supersimétrica. Seja agora $\mathfrak{j}$ um ideal de $\mathfrak{g}$, então se $s \in \{1, \ldots, n\}$, a intersecção $\mathfrak{i}_s \cap \mathfrak{j}$ é um ideal de $\mathfrak{i}_s$ e portanto $\mathfrak{i}_s \cap \mathfrak{j} = \{0\}$ ou $\mathfrak{i}_s$. No primeiro caso temos que

$$\mathfrak{j} \subseteq \bigoplus_{k \neq s} \mathfrak{i}_k.$$

Se o segundo caso acontece segue que $\mathfrak{i}_s \subseteq \mathfrak{j}$, e isso implica que

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{i}_{r_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_{r_\ell},$$

onde $\{\mathfrak{i}_{r_1}, \ldots, \mathfrak{i}_{r_\ell}\}$ é o conjunto dos ideais que intersectam $\mathfrak{j}$. Em particular, um ideal simples de $\mathfrak{g}$ é igual a algum $\mathfrak{i}_r$.

□

Corolário 3.3.9. A forma de Killing de uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é não degenerada se e só se $\mathfrak{g}$ for escrita como uma soma direta de super álgebras de Lie cuja forma de Killing de cada um delas é não degenerada. Se este é o caso, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é redutiva e a representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é completamente redutível.

Demonstração. seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie cuja forma de Killing ϕ é não degenerada. Queremos aplicar o teorema 3.3.8, portanto temos que ver que $\mathfrak{g}$ não contém ideais abelianos não nulos. Se $\mathfrak{i}$ é um ideal graduado e abeliano de $\mathfrak{g}$, então completando uma base de $\mathfrak{i}$ a uma base de $\mathfrak{g}$, temos que nesta base

$$\mathrm{ad}(x) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \mathrm{ad}(y) = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & E \end{array}\right), \quad \forall x \in \mathfrak{i},\, y \in \mathfrak{g}.$$

Logo

$$\phi(\mathfrak{i}, \mathfrak{g}) = \{0\}$$

e como ϕ é não degenerada, segue que $\mathfrak{i} = \{0\}$, como queríamos. Podemos aplicar agora o teorema 3.3.8. Os ideais $\mathfrak{i}_r$ são mutuamente ortogonais com respeito a ϕ, logo a restrição de ϕ a qualquer um destes ideais é não degenerada. Sabemos pelo lema 3.3.6, que a restrição da forma de ϕ a $\mathfrak{i}_r$ é a forma de Killing de $\mathfrak{i}_r$. Em particular, do corolário 3.2.14 segue que as super álgebras de Lie $\mathfrak{i}_s$ são todas clássicas. Isto implica que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é uma álgebra de Lie redutiva (ver proposição 3.3.2) e que a representação desta em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é completamente redutível.

A recíproca segue direto do lema 3.3.6.

□

3.4 A decomposição em espaços de raízes de uma super álgebra de Lie cuja forma de Killing é não degenerada

Nesta seção vamos considerar uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tal que:

a) A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é redutiva.

b) A representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é completamente redutível

c) Existe uma forma bilinear ϕ em $\mathfrak{g}$ que é não degenerada, par, supersimétrica e invariante.

Note que as hipóteses a) e b) são validas se c) vale (veja o corolário 3.3.9).

Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Usando as mesmas notações introduzidas na subseção 3.2.2, iremos explorar a existência da forma bilinear ϕ para obter mais informações sobre as raízes de $\mathfrak{g}$, assim como da sua decomposição em espaços de raízes

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}^{\lambda}. \tag{3.4.1}$$

Lembre que para o caso em que estamos considerando nesta seção (ver a observação 3.2.15), temos que

$$\mathfrak{g}^{\lambda} = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, [h, x] = \lambda(h)x, \ \ \forall\, h \in \mathfrak{h}\}.$$

Como ϕ é $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$−invariante, para λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $\lambda + \mu \neq 0$ tome $x \in \mathfrak{g}^{\lambda}_{\alpha}$, $y \in \mathfrak{g}^{\mu}_{\beta}$, onde α, $\beta \in \mathbb{Z}_2$. Daí, para qualquer elemento $h \in \mathfrak{h}$

$$\phi(\alpha(h)x, y) = \phi([h, x], y) = -\phi([x, h], y) = -\phi(x, [h, y]) = -\phi(x, \lambda(h)y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda + \mu)(h)\phi(x, y) = 0 \Rightarrow \phi(\mathfrak{g}^{\lambda}_{\alpha}, \mathfrak{g}^{\mu}_{\beta}) = \{0\}.$$

Por outro lado, ϕ é par, então

$$\phi(\mathfrak{g}^{\lambda}_{\alpha}, \mathfrak{g}^{\lambda}_{\beta}) = \{0\}, \ \text{desde que} \ \ \alpha + \beta \neq \bar{0}.$$

Logo, unindo as duas informações acima temos que

$$\phi(\mathfrak{g}^{\lambda}_{\alpha}, \mathfrak{g}^{\mu}_{\beta}) = \{0\}, \ \text{se} \ \ \lambda + \mu \neq 0 \ \text{ ou se } \ \alpha + \beta \neq \bar{0}. \tag{3.4.2}$$

Como ϕ é não degenerada, segue da equação acima que para quaisquer $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, a restrição de ϕ a $\mathfrak{g}^{\lambda}_{\alpha} \times \mathfrak{g}^{-\lambda}_{\alpha}$ é não degenerada. Em particular, a restrição de ϕ a $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{0}_{\bar{0}}$ é não degenerada. Assim, como em álgebras de Lie, podemos definir uma forma bilinear simétrica e não degenerada em $\mathfrak{h}^*$ da seguinte forma: Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Então, existe um único elemento $h_\lambda \in \mathfrak{h}$ tal que

$$\lambda(h) = \phi(h_\lambda, h), \ \ \forall\, h \in \mathfrak{h}. \tag{3.4.3}$$

Se μ, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ definimos

$$(\lambda|\mu) = \phi(h_\lambda, h_\mu) = \lambda(h_\mu) = \mu(h_\lambda).$$

Seja agora $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ e tome $x \in \mathfrak{g}^{\lambda}_{\alpha}$, $y \in \mathfrak{g}^{-\lambda}_{\alpha}$. Então, $[x, y] \in \mathfrak{g}^{0}_{\bar{0}} = \mathfrak{h}$ e a invariância de ϕ implica que

$$\phi([x, y], h) = \lambda(h)\phi(x, y) = (h_\lambda, h)\phi(x, y) = (\phi(x, y)h_\lambda, h), \ \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Segue daí que

$$[x, y] = \phi(x, y)h_\lambda, \tag{3.4.4}$$

para quaisquer $x \in \mathfrak{g}_\alpha^\lambda$, $y \in \mathfrak{g}_\alpha^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_2$.

Estamos prontos agora para obter algumas propriedades sobre as raízes ímpares de $\mathfrak{g}$. Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^\lambda$, $y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\lambda}$. Usando as equações acima juntamente com a identidade de Jacobi, conseguimos concluir que

$$[[x, y], y] = [x, [x, y]] - [[x, y], x] = \phi(x, y)([x, h_\lambda] - [h_\lambda, x]) = -2(\lambda|\lambda)\phi(x, y)x. \tag{3.4.5}$$

Suponha que λ seja uma raiz ímpar tal que $(\lambda|\lambda) \neq 0$. Então, o lado direito da equação (3.4.5) é não nulo. Por outro lado, $[x, x] \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{2\lambda}$ e $\dim(\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{2\lambda}) \leq 1$ (isso pois $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é uma álgebra de Lie redutiva e portanto $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{2\lambda}$ é um espaço de raízes de alguma das componentes simples de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$). Isto implica no próximo resultado.

Lema 3.4.1. Seja λ uma raiz ímpar de $\mathfrak{g}$ tal que $(\lambda|\lambda) \neq 0$. Então, 2λ é uma raiz par de $\mathfrak{g}$ e

$$\dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}}^\lambda) = \dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\lambda}) = 1.$$

Uma pequena modificação nos argumentos acima nos fornecem o seguinte lema:

Lema 3.4.2. Sejam λ, μ duas raízes ímpares de $\mathfrak{g}$ tais que $\lambda \neq \pm\mu$. Se $(\lambda|\mu) \neq 0$, então $\lambda + \mu$ ou $\lambda - \mu$ é uma raiz par de $\mathfrak{g}$.

Demonstração. Escolha elementos $x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^\lambda$, $y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\lambda}$ tais que $\phi(x, y) \neq 0$ e seja z um elemento qualquer, não nulo, de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^\mu$. Daí, a identidade de Jacobi para x, y e z nos mostra que

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \Rightarrow -[[z, x], y] - [[z, y], x] = \phi(x, y)[h_\lambda, z],$$

ou seja,

$$[[z, x], y] + [[z, y], x] = -(\lambda|\mu)\phi(x, y)z. \tag{3.4.6}$$

Como o lado direito desta equação é não nulo, pelo menos um dos dois elementos $[z, x] \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\lambda+\mu}$ e $[z, y] \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\mu-\lambda}$ deve ser diferente de zero, ou seja, $\lambda + \mu$ ou $\lambda - \mu$ é uma raiz par de $\mathfrak{g}$.

$\square$

3.5 As super álgebras Clássicas

Nesta seção introduziremos algumas famílias de super álgebras de Lie clássicas. Será mostrado posteriormente que tais famílias percorrem todas as super álgebras de Lie clássicas cujo subespaço ímpar é não nulo. Nesta seção [CW] também foi usado como referência.

3.5.1 A super álgebra de Lie linear geral

Seja $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado. O ponto inicial para todas as construções desta seção é a super álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$, que foi definida anteriormente no exemplo 2.1.6. Lembre que $\mathfrak{gl}(V)_\xi$, $\xi \in \mathbb{Z}_2$ consiste de todas as funções lineares de V em V que são homogêneas de grau ξ, e também que o colchete é dado pelo super comutador, isto é

$$[T, S] = T \circ S - (-1)^{\xi\eta} S \circ T, \text{ se } T \in \mathfrak{g}(V)_\xi,\ S \in \mathfrak{g}(V)_\eta;\ \xi, \eta \in \mathbb{Z}_2.$$

Vimos também que se $V = \Bbbk^{m|n}$, então a super álgebra $\mathfrak{gl}(V)$ é denotada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,n)$ (ver subseção 2.3.4). Tomando

$$\mathfrak{gl}(m,n) = \mathfrak{gl}(m,n)_{-1} \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_{1},$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(m,n)_{-1} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \mid C \in M_{n\times m}(\Bbbk) \right\}; \\
\mathfrak{gl}(m,n)_{0} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \mid A \in M_{m\times m}(\Bbbk),\ D \in M_{n\times n}(\Bbbk) \right\}; \\
\mathfrak{gl}(m,n)_{1} &= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \mid B \in M_{m\times n}(\Bbbk) \right\},
\end{aligned}$$

definimos uma $\mathbb{Z}-$graduação consistente em $\mathfrak{gl}(m,n)$. Note que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(m,n)_{\bar{0}} &\cong \mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n); \\
\dim(\mathfrak{gl}(m,n)_{\pm 1}) &= m\,n.
\end{aligned}$$

Vamos agora descrever a estrutura de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo sobre $\mathfrak{g}_{\pm 1}$. Para isso, lembre que se V e W são módulos para álgebras de Lie $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ respectivamente, então o espaço vetorial $V \otimes W$ possui uma estrutura de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}-$módulo, onde a ação é dada por

$$(a,b)v \otimes w = (av) \otimes w + v \otimes bw.$$

Observe que este é o caso particular do produto tensorial do $\mathfrak{g}-$módulo V com o $\mathfrak{g}'-$módulo W (ver subseção 2.3.2) em que $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ são apenas álgebras de Lie, isto é $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \{0\} = \mathfrak{g}'_{\bar{1}}$.

Sabendo disso, tome $\Bbbk^m$ (vetores coluna) um $\mathfrak{gl}(m)-$módulo via ação natural e $(\Bbbk^n)^*$ (vetores linha) um $\mathfrak{gl}(n)-$módulo cuja ação de $B \in \mathfrak{gl}(n)$ em $w \in (\Bbbk^n)^*$ é dada por

$$Bw = -wB.$$

Assim $\phi : \Bbbk^m \otimes (\Bbbk^n)^* \longrightarrow \mathfrak{g}_1$ tal que

$$\phi(v \otimes w) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & vw \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

define um isomorfismo de $\mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n)-$módulos. Analogamente, mostra-se que os $\mathfrak{gl}(n) \oplus \mathfrak{gl}(m)-$módulos $\Bbbk^n \otimes (\Bbbk^m)^*$ e $\mathfrak{g}_{-1}$ também são isomorfos. Por fim veja que $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ são duais como $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo. De fato,

$$(\mathfrak{g}_1)^* \cong (\Bbbk^m \otimes (\Bbbk^n)^*)^* \cong \Bbbk^n \otimes (\Bbbk^m)^* \cong \mathfrak{g}_{-1}.$$

Finalmente, o super traço de um elemento $x = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathfrak{gl}(m,n)$ é dado por

$$\operatorname{str} \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \operatorname{tr}(A) - \operatorname{tr}(D).$$

É fácil ver que a função linear $(x,y) \longmapsto \operatorname{str}(xy)$, $x, y \in \mathfrak{gl}(m,n)$ é uma forma bilinear não degenerada, par, invariante e supersimétrica em $\mathfrak{gl}(m,n)$. Por outro lado, a forma de Killing de $\mathfrak{gl}(m,n)$ é dada por

$$(x,y) \longmapsto 2(n-m)\operatorname{str}(xy) - 2\operatorname{str}(x)\operatorname{str}(y).$$

A notação introduzida nesta subseção será usada no decorrer da seção. As álgebras que serão construídas são subálgebras de $\mathfrak{gl}(V)$ (resp. de $\mathfrak{gl}(m,n)$) ou quocientes destas álgebras por algum ideal de dimensão 1.

Observação 3.5.1. Considere $V' = V'_{\bar{0}} \oplus V'_{\bar{1}}$, onde $V'_{\bar{0}} = V_{\bar{1}}$ e $V'_{\bar{1}} = V_{\bar{0}}$. Note que a função

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{gl}(V) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V') \\ T & \longmapsto & \Pi \circ T \circ \Pi^{-1} \end{array}$$

onde $\Pi : V \longrightarrow V'$ é a função identidade (esquecendo a graduação de V) define um isomorfismo da super álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ para $\mathfrak{gl}(V')$. Assim, quando $V = \Bbbk^{m|n}$, obtemos um isomorfismo das super álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(m,n)$ e $\mathfrak{gl}(n,m)$.

3.5.2 A super álgebra de Lie linear especial

Nesta subseção discutiremos a super álgebra de Lie que é a "super versão"da álgebra de Lie linear especial de um espaço vetorial.

O super-traço é uma forma bilinear par e invariante em $\mathfrak{gl}(m,n)$, sendo assim concluímos que

$$\operatorname{str}([a,b]) = 0, \ \ \forall\, a,b \in \mathfrak{gl}(m,n).$$

Definimos a super álgebra de Lie linear especial por

$$\mathfrak{sl}(m,n) = \{a \in \mathfrak{gl}(m,n) \,|\, \operatorname{str}(a) = 0\}.$$

Note que $\mathfrak{sl}(m,n)$ é um ideal de $\mathfrak{gl}(m,n)$ de codimensão 1. De fato, veja primeiro que $\mathfrak{sl}(m,n) \neq \mathfrak{gl}(m,n)$ (por exemplo $x = \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & -I_n \end{array}\right) \in \mathfrak{gl}(m,n) \setminus \mathfrak{sl}(m,n)$, já que $\operatorname{str}(x) = m+n \neq 0$). Por outro lado temos que

$$\mathfrak{gl}(m,n)_{-1} \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_1 \subseteq \mathfrak{sl}(m,n) \Rightarrow \mathfrak{gl}(m,n)_{-1} \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_1 = \mathfrak{sl}(m,n)_{\bar{1}}.$$

Por fim vamos ver que

$$\mathfrak{sl}(m,n)_{\bar{0}} = \mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n) \oplus \Bbbk I_{m,n},$$

onde $I_{m,n} = \left(\begin{array}{c|c} nI_m & 0 \\ \hline 0 & mI_n \end{array}\right)$.

Com efeito, por definição obtemos que $\mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n) \oplus \Bbbk I_{m,n} \subseteq \mathfrak{sl}(m,n)_{\bar{0}}$. A outra continência segue do fato que $\mathfrak{gl}(m,n)_{-1} \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_1 = \mathfrak{sl}(m,n)_{\bar{1}}$, $\mathfrak{sl}(m,n) \neq \mathfrak{gl}(m,n)$ e

$$\dim(\mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n) \oplus \Bbbk I_{m,n}) = m^2 + n^2 - 1 = \dim(\mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n)) - 1.$$

Logo, a super álgebra de Lie especial é um ideal de codimensão 1 da super álgebra de lie geral, além disso, a $\mathbb{Z}-$graduação em $\mathfrak{sl}(m,n)$ induzida por $\mathfrak{gl}(m,n)$ é dada por

$$\mathfrak{sl}(m,n) = \mathfrak{gl}(m,n)_{-1} \oplus \mathfrak{sl}(m,n)_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{gl}(m,n)_1.$$

Observação 3.5.2. Sabemos que no caso não super a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$ é simples para qualquer $n \in \mathbb{N}$, contudo devemos observar que

$$\mathfrak{sl}(1,1) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{array} \right) \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk \right\}$$

é uma super álgebra de Lie nilpotente de dimensão 3, sendo que $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}] = 0$, $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = 0$ e $\mathfrak{g}'_{\bar{1}} = [\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, implicando assim que $\mathfrak{g}^3_{\bar{1}} \subseteq [\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}] = 0$. Logo, $\mathfrak{g}^3 = \{0\}$ e portanto $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

Suponha que $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m,n)$. Então, os $\mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n)-$módulos $\mathbb{k}^m \otimes (\mathbb{k}^n)^*$ e $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathbb{k}^n \otimes (\mathbb{k}^m)^*$ e $\mathfrak{g}_{-1}$) são isomorfos e além disso $\mathfrak{g}_1$ é dual a $\mathfrak{g}_{-1}$. A verificação desses fatos é feita exatamente como no caso $\mathfrak{gl}(m,n)$. Além do mais, o isomorfismo definido na observação 3.5.1 implica que $\mathfrak{sl}(m,n) \cong \mathfrak{sl}(n,m)$.

Por fim, note que se $m = n$, então $\mathbb{k}I_{2n}$ é um ideal graduado de $\mathfrak{sl}(n,n)$ e sendo assim podemos construir a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathfrak{sl}(n,n)/\mathbb{k}I_{2n}$. Veja que sua parte par $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(n) \oplus \mathfrak{sl}(n)$. Abaixo seguem algumas das propriedades de $\mathfrak{sl}(n,m)$

a) Se $n \neq m$, então $\mathfrak{sl}(n,m)$ é simples.

b) A super álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n,n)/\mathbb{k}I_{2n}$ é simples, desde que $n \geq 2$.

c) A parte par de $\mathfrak{sl}(1,1)/\mathbb{k}I_2$ é nula, pois $\mathfrak{sl}(1,1)_{\bar{0}} = \mathbb{k}\, I_2$.

d) A forma bilinear $(x,y) \longmapsto \mathrm{str}(xy)$ é invariante. No caso em que $n \neq m$, esta forma bilinear é não degenerada. Por outro lado, se $n = m$, $n \geq 1$, esta forma induz uma forma bilinear, par, invariante e não degenerada na super álgebra quociente $\mathfrak{sl}(n,n)/\mathbb{k}I_{2n}$.

A Forma de Killing de $\mathfrak{sl}(m,n)$ é dada por

$$(x,y) \longmapsto 2(n-m)\mathrm{str}(xy).$$

Em particular, as formas de Killing de $\mathfrak{sl}(n,n)$ e de $\mathfrak{sl}(n,n)/\mathbb{k}I_{2n}$ são identicamente nulas.

3.5.3 As subálgebras de $\mathfrak{gl}(V)$ que preservam uma forma bilinear não degenerada

Álgebras de Lie que preservam uma forma bilinear não-degenerada tem um papel importante na classificação das álgebras de Lie semissimples. A situação se repete no super contexto. No decorrer desta subseção F denotará uma forma bilinear homogênea e não degenerada em V.

a) As super álgebras de Lie simplética-ortogonais.

Suponha que F é par e super-simétrica em V, ou seja, $V_{\bar{0}}$ e $V_{\bar{1}}$ são ortogonais com relação a essa forma e a restrição de F a $V_{\bar{0}}$ (resp. $V_{\bar{1}}$) é uma forma simétrica (resp. anti-simétrica).

Como F restrita a $V_{\bar{1}}$ é uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada, sua matriz M é uma matriz anti-simétrica ($M = -M^t$) e inversível, dessa forma

$$\det(M) = \det(M^t) = \det(-M) = (-1)^n \det(M),$$

e portanto $\dim(V_{\bar{1}})$ deve ser par.

Considere em $\mathfrak{gl}(V)$ a subálgebra $\mathfrak{osp}(V) = \mathfrak{osp}(V)_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{osp}(V)_{\bar{1}}$, onde

$$\mathfrak{osp}(V)_s = \{A \in \mathfrak{gl}(V)_s \,|\, F(Ax,y) = -(-1)^{s|x|}F(x,Ay),\ \forall\, x,\, y \in V\}, \quad s \in \mathbb{Z}_2.$$

A super álgebra $\mathfrak{osp}(V)$ é chamada de *simplética-ortogonal*. Observe que sua parte par é isomorfa a $\mathfrak{so}(V_{\bar{0}}) \oplus \mathfrak{sp}(V_{\bar{1}})$. Daí o nome simplética-ortogonal. Se $V = \mathbb{k}^{\ell|2m}$, denotaremos $\mathfrak{osp}(V)$ por $\mathfrak{osp}(\ell, 2m)$. Observe que quando ℓ (resp. m) é zero, a super álgebra de Lie simplética-ortogonal se reduz a álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(2m)$ (resp. $\mathfrak{so}(\ell)$).

Similarmente, definimos a super álgebra de Lie $\mathfrak{spo}(V)$ como sendo a subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ que preserva uma forma bilinear não degenerada e antí-supersimétrica em V (note que nesse caso $\dim(V_{\bar{0}})$ deve ser par). Quando $V = \mathbb{k}^{2m|\ell}$, escrevemos $\mathfrak{spo}(2m,\ell)$ ao invés de $\mathfrak{spo}(V)$.

Observação 3.5.3. Uma forma bilinear supersimétrica (resp. antí-supersimétrica) B em $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ induz uma forma bilinear antí-supersimétrica (resp. supersimétrica) B' em $V' = V'_{\bar{0}} \oplus V'_{\bar{1}}$, onde $V'_{\bar{0}} = V_{\bar{1}}$ e $V'_{\bar{1}} = V_{\bar{0}}$. De fato, basta definir B' em V' por

$$B'(y,z) = B(z,y)\,, \quad \forall\, y,\, z \in V.$$

A restrição do isomorfismo definido na observação 3.5.1 é um isomorfismo entre as super álgebras de Lie $\mathfrak{osp}(V)$ (com respeito a B) e $\mathfrak{spo}(V')$ (com respeito a B'). Segue daí que $\mathfrak{osp}(\ell, 2m) \cong \mathfrak{spo}(2m, \ell)$.

Daremos agora uma realização matricial explicita das super álgebras de Lie simplética-ortogonais.

Suponha que $\mathfrak{g} = \mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$. Sabemos que em alguma base de V a matriz de F pode ser representada por

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & I_r & 0 & 0 & 0 \\ -I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Sendo assim, $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ consiste de todas as matrizes da forma

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} d & e & y_1^t & x_1^t & z_1^t \\ f & -d^t & -y^t & -x^t & -z^t \\ \hline x & x_1 & a & b & -v^t \\ y & y_1 & c & -a^t & -u^t \\ z & z_1 & u & v & 0 \end{array}\right), \tag{3.5.1}$$

onde b, c são matrizes anti-simétricas e e, f são matrizes simétricas.

A estrutura de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é dada como segue. Se $\mathbb{k}^{2m}$ (vetores coluna) é um $\mathfrak{sp}(2m)-$módulo via ação natural e $(\mathbb{k}^{2n+1})^*$ (vetores linha) é um $\mathfrak{so}(2n+1)-$módulo cuja ação de $B \in \mathfrak{so}(2n+1)$ em $w \in (\mathbb{k}^{2n+1})^*$ é dada por

$$Bw = -wB,$$

então o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é isomorfo a $\mathbb{k}^{2m} \otimes (\mathbb{k}^{2n+1})^*$. Para ver isso, note que se

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}_{\bar{1}},$$

então B determina C, e podemos escrever B como uma soma de matrizes da forma vw, com $v \in \mathbb{k}^{2n+1}$ e $w \in (\mathbb{k}^{2m})^*$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{spo}(2m, 2n)$. Da mesma forma que antes vemos a super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ consiste de todas as matrizes da forma (3.5.1), removendo a última linha e a última coluna. Além disso, verifica-se que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ e $\mathbb{k}^{2m} \otimes (\mathbb{k}^{2n})^*$ são isomorfos como $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulos.

Daqui para frente as linhas e colunas das matrizes como em (3.5.1) serão indexadas pelo conjunto finito $I(2m, \ell)$ (veja a equação (2.3.6)), onde $\ell = 2n$ ou $2n+1$.

Não é difícil de provar que

a) As super álgebras de Lie simplética-ortogonais são simples.

b) A forma bilinear $(x, y) \longmapsto \operatorname{str}(x, y)$ é não degenerada e invariante.

c) A Forma de Killing de $\mathfrak{spo}(2m, \ell)$ é dada por

$$(x, y) \longmapsto 2(2m - \ell)\operatorname{str}(xy).$$

Vale enfatizar que os casos em que $m = 1$ e $m = 2$, não são excluídos. Como $\mathfrak{so}(1) = \{0\}$, temos que $\mathfrak{osp}(1, 2n)_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(2n)$. O caso $m = 2$ merece uma atenção maior. Como a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ tem dimensão 1, vemos que $\mathfrak{osp}(2, 2n)_{\bar{0}}$ tem um centro de dimensão 1. Logo, pelo corolário do teorema 3.2.13, $\mathfrak{osp}(2, 2n)_{\bar{1}}$ se decompõe como uma soma direta de dois $\mathfrak{osp}(2, 2n)_{\bar{0}}-$submódulos irredutíveis. Esta decomposição nos fornece uma $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathfrak{osp}(2, 2n)$ que é consistente com a $\mathbb{Z}_2-$graduação. No que segue, se nos referirmos a $\mathfrak{osp}(2, 2n)$ como uma super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada, estamos considerando tal graduação como discutido acima.

b) A Super Álgebra de Lie $\mathfrak{p}(n)$

Suponha que F é não degenerada, ímpar e supersimétrica. Como F é não degenerada e ímpar, concluímos que $\dim(V_{\bar{0}}) = \dim(V_{\bar{1}}) = n$, além disso, para alguma base de V a matriz de F se escreve como

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right).$$

Definimos a subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, n)$ que preserva a forma F por $\widetilde{\mathfrak{p}}(n)$. Explicitamente temos que

$$\widetilde{\mathfrak{p}}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -A^t \end{array}\right) \mid B^t = B,\ C^t = -C \right\}.$$

A super álgebra comutador $[\widetilde{\mathfrak{p}}(n), \widetilde{\mathfrak{p}}(n)]$ será denotada por $\mathfrak{p}(n)$. Note que

$$\mathfrak{p}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -A^t \end{array}\right) \mid \operatorname{tr}(A) = 0,\ B^t = B,\ C^t = -C \right\}, \tag{3.5.2}$$

e que a $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathfrak{gl}(n, n)$ induz uma $\mathbb{Z}-$graduação de $\mathfrak{p}(n)$ que é consistente com sua $\mathbb{Z}_2-$graduação. Além do mais

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{p}(n)_{\bar{0}} & \cong & \mathfrak{sl}(n); \\ \mathfrak{p}(n)_{\bar{1}} & \cong & S^2(\mathbb{k}^n) \oplus \wedge^2((\mathbb{k}^n)^*); \\ \dim(\mathfrak{p}(n)_{\pm 1}) & = & (n/2)(n \mp 1), \end{array}$$

onde os isomorfismos em questão podem ser definidos da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{p}(n)_{\bar{0}} & \longrightarrow & \mathfrak{sl}(n) \\ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & -A^t \end{array}\right) & \longmapsto & A \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} S^2(\mathbb{k}^n) \oplus \wedge^2((\mathbb{k}^n)^*) & \longrightarrow & \mathfrak{p}(n)_{\bar{1}}. \\ (v \odot w, \lambda \wedge \gamma) & \longmapsto & \left(\begin{array}{c|c} 0 & vw^t + wv^t \\ \hline \lambda^t\gamma - \gamma^t\lambda & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Aqui $v \odot w$ denota o produto tensorial simétrico entre v, $w \in \mathbb{k}^n$ (vetores coluna), a ação de $\mathfrak{sl}(n)$ em $S^2(\mathbb{k}^n)$ é dada por

$$x(v \odot w) = (xv) \odot w + v \odot (xw), \quad x \in \mathfrak{gl}(n),$$

e para qualquer $\mu \in (\mathbb{k}^n)^*$ (vetor linha de $\mathbb{k}^n$) temos que

$$x(\mu) = -\mu \circ x, \ \ \forall\, x \in \mathfrak{gl}(n).$$

Finalmente, não é difícil mostrar que se $n \geq 3$, então a super álgebra de Lie $\mathfrak{p}(n)$ é simples e não existe nenhuma forma bilinear invariante não nula em $\mathfrak{p}(n)$.

3.5.4 A super álgebra de Lie $\mathfrak{q}(n)$

Suponha que $\dim(V_{\bar{0}}) = \dim(V_{\bar{1}}) = n$ e considere uma função linear ímpar $P : V \longrightarrow V$ tal que $P^2 = -I_{2n}$. Note que para alguma base de V a matriz de P é da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right).$$

Logo, o subespaço

$$\widetilde{\mathfrak{q}}(n) = \{T \in \mathfrak{gl}(n,n) \,|\, [T,P] = 0\}$$

é uma subálgebra $\mathbb{Z}_2-$graduada de $\mathfrak{sl}(n,n)$ que consiste de todas as matrizes da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right), \quad A,\, B \in \mathfrak{gl}(n). \tag{3.5.3}$$

Se $\widehat{\mathfrak{q}}(n) = [\widetilde{\mathfrak{q}}(n), \widetilde{\mathfrak{q}}(n)]$ (a álgebra comutador de $\widetilde{\mathfrak{q}}(n)$), então

$$\widehat{\mathfrak{q}}(n) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right) \,|\, A \in \mathfrak{gl}(n),\ B \in \mathfrak{sl}(n) \right\}$$

e $\Bbbk I_{2n}$ é um ideal graduado de $\widehat{\mathfrak{q}}(n)$. Portanto, podemos construir a super álgebra de Lie quociente

$$\mathfrak{q}(n) = \widehat{\mathfrak{q}}(n)/\Bbbk I_{2n}.$$

A parte par desta super álgebra é isomorfa a $\mathfrak{sl}(n)$, onde o isomorfismo em questão pode ser definido por

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{q}(n)_{\bar{0}} & \longrightarrow & \mathfrak{sl}(n) \\ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) + \Bbbk\, I_{2n} & \longmapsto & A - \dfrac{\mathrm{tr}(A)}{n} I_n \end{array}$$

e visto como um $\mathfrak{q}(n)_{\bar{0}}-$módulo temos que $\mathfrak{q}(n)_{\bar{1}}$ é isomorfo ao módulo adjunto, onde tal isomorfismo de $\mathfrak{q}(n)_{\bar{0}}-$módulos pode ser definido por

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{q}(n)_{\bar{1}} & \longrightarrow & \mathfrak{sl}(n) \\ \left(\begin{array}{c|c} o & B \\ \hline B & 0 \end{array}\right) + \Bbbk\, I_{2n} & \longmapsto & B \end{array}$$

Além disso, pode-se mostrar que se $n \geq 3$, então $\mathfrak{q}(n)$ é uma super álgebra de Lie simples.

3.5.5 Comentários sobre as super álgebras de Lie excepcionais

Juntamente com as super álgebras de Lie que foram discutidas nas últimas subseções existem algumas super álgebras que são chamadas de excepcionais. No exemplo 2.1.12, introduzimos as álgebras $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (lembre que $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são elementos de $\Bbbk$ tais que $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$). A álgebra de Lie de $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$ e ad' (a representação da álgebra de Lie no subespaço ímpar) é o produto tensorial das três representações fundamentais de dimensão 2 de $\mathfrak{sl}(2)$. Isto implica que

$$\dim(\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)) = 17.$$

Não é difícil ver que a forma de Killing de $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é igual a zero e que esta super álgebra de Lie é simples se e só se $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são todos não nulos. Neste caso existe uma forma bilinear não degenerada, invariante, consistente e supersimétrica em $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Algumas das álgebras $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são isomorfas. De fato, sejam $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ duas triplas em $\mathbb{k}$ tais que $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$. Então, $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $\Gamma(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ são isomorfas se e só se existe um elemento não nulo $\tau \in \mathbb{k}$ e uma permutação π do conjunto $\{1, 2, 3\}$, tal que $\sigma_i = \tau\sigma_{\pi(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Este resultado mostra essencialmente, que as álgebras $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ formam uma família a $1-$parâmetro.

Por fim, vamos dar uma breve descrição das duas super álgebras de Lie excepcionais que restam, são elas denotadas por Γ_2 e Γ_3.

A álgebra de Lie de Γ_2 é igual a $\mathfrak{sl}(2) \times G_2$ e ad' é o produto tensorial da representação fundamental de dimensão 2 de $\mathfrak{sl}(2)$ com a representação fundamental de dimensão 7 de G_2. Consequentemente, temos que

$$\dim(\Gamma_2) = 31.$$

(A álgebra Γ_2 pode ser construída explicitamente usando os octonions.)

A álgebra de Lie de Γ_3 é igual a $\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{so}(7)$ e ad' é o produto tensorial da representação fundamental de dimensão 2 de $\mathfrak{sl}(2)$ com a representação fundamental de dimensão 8 de $\mathfrak{so}(7)$. Portanto, concluímos que

$$\dim(\Gamma_3) = 40.$$

(A álgebra Γ_3 pode ser construída explicitamente usando álgebras de Clifford.)

Vale observar que as formas de Killing de Γ_2 e Γ_3 são não degeneradas.

3.5.6 A decomposição em espaço de raízes de uma super álgebra de Lie clássica

Na seção anterior foram descritas as seguintes super álgebras de Lie clássicas:

$\mathfrak{sl}(m, n)$ com n, $m \geq 1$ e $n \neq m$;

$\mathfrak{sl}(n, n)/\mathbb{k}I_{2n}$ com $n \geq 2$;

$\mathfrak{osp}(m, 2r)$ com m, $r \geq 1$;

$\mathfrak{p}(n)$ com $n \geq 3$;

$\mathfrak{q}(n)$ com $n \geq 3$;

$\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ com $\sigma_i \in \mathbb{k}$, $\sigma_i \neq 0$, $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$;

Γ_2, Γ_3.

No que segue $\mathfrak{g}$ será uma das super álgebras de Lie listadas acima. Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Vamos obter agora algumas propriedades da decomposição em espaços de raízes

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \left(\bigoplus_{\lambda \in \Phi_{\bar{0}}} \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\lambda} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Phi_{\bar{1}}} \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{\lambda} \right) \tag{3.5.4}$$

de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$. Lembre que quaisquer duas subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ são conjugadas uma da outra por meio de um automorfismo da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e portanto nossos resultados não dependem da escolha de $\mathfrak{h}$.

Por definição, o conjunto $\Phi_{\bar{0}}$ das raízes pares é o conjunto de raízes da álgebra de Lie redutiva $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ (lembre que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é redutiva pois $\mathfrak{g}$ é clássica), além do mais, o conjunto $\Phi_{\bar{1}}$ das raízes ímpares é apenas o conjunto dos pesos da representação ad' de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Como em todos os casos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e a representação ad' são conhecidas explicitamente, nós podemos usar a teoria sobre representações das álgebra de Lie semissimples para obter o sistema de raízes $\Phi = \Phi_{\bar{0}} \cup \Phi_{\bar{1}}$ e os espaços de pesos $\mathfrak{g}^\lambda$ de $\mathfrak{g}$.

As álgebras $\mathfrak{q}(n)$, $n \geq 3$ têm um papel especial. Para estas álgebras, a representação ad' é equivalente a representação adjunta de $\mathfrak{sl}(n)$. Isto implica que

$$\Phi_{\bar{1}} = \{0\} \cup \Phi_{\bar{0}}, \quad \text{se} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{q}(n).$$

Na proposição que segue estas álgebras serão desconsideradas.

Proposição 3.5.4. Seja $\mathfrak{g}$ uma das super álgebra de Lie clássica listadas acima. Considere as raízes e a decomposição em espaços de raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito a uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$.

a) Se $\mathfrak{g}$ não é igual a uma das álgebras $\mathfrak{q}(n)$, $n \geq 3$, então

$$0 \notin \Phi_{\bar{1}} \quad \text{e} \quad \Phi_{\bar{0}} \cap \Phi_{\bar{1}} = \emptyset.$$

Em particular, isso implica que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^0 = \{0\}$, ou seja, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}^0 = \mathfrak{g}^0$.

b) Se $\mathfrak{g}$ não é igual a uma das álgebras $\mathfrak{sl}(2,2)/\Bbbk I_4$, $\mathfrak{p}(4)$ ou $\mathfrak{q}(n)$, $n \geq 3$, então

$$\dim(\mathfrak{g}^\lambda) = 1, \quad \forall\, \lambda \in \Phi$$

c) Suponha que $\mathfrak{g}$ não é igual a uma das álgebras $\mathfrak{p}(3)$ ou $\mathfrak{q}(n)$, $n \geq 3$. Considere duas raízes λ e μ de $\mathfrak{g}$ que são proporcionais, isto é,

$$\mu = r\lambda, \quad \text{para algum} \quad r \in \Bbbk.$$

Se λ e μ são ambas pares ou ambas ímpares, então $r = \pm 1$. Se λ é ímpar e μ é par, então $r = \pm 2$.

d) Suponha que $\mathfrak{g}$ não é igual a uma das álgebras $\mathfrak{p}(n)$ ou $\mathfrak{q}(n)$, $n \geq 3$, então existe uma forma bilinear não degenerada, par, supersimétrica e invariante em $\mathfrak{g}$. Segue também que

$$-\Phi_\alpha = \Phi_\alpha, \ \alpha \in \mathbb{Z}_2.$$

e) Suponha que $\mathfrak{g}$ não é igual a uma das álgebras $\mathfrak{sl}(2,2)/\Bbbk I_4$, $\mathfrak{p}(n)$ ou $\mathfrak{q}(n)$, $n \geq 3$. Sejam α, $\beta \in \mathbb{Z}_2$. Se $\lambda \in \Phi_\alpha$, $\mu \in \Phi_\beta$ e $\lambda + \mu \in \Phi_{\alpha+\beta}$, então

$$[\mathfrak{g}_\alpha^\lambda, \mathfrak{g}_\beta^\mu] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}^{\lambda+\mu}.$$

Demonstração. As afirmações a), b) e c) segue pela inspeção caso a caso. A afirmação d) já foi provada em seções anteriores. Finalmente, vamos provar e). Já sabemos da seção 3.2.2 que

$$[\mathfrak{g}_\alpha^\lambda, \mathfrak{g}_\beta^\mu] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}^{\lambda+\mu},$$

e segue também do item b) desse resultado que

$$\dim(\mathfrak{g}^\nu) = 1, \ \forall\, \nu \in \Phi.$$

Portanto, só nos resta provar que $[\mathfrak{g}_\alpha^\lambda, \mathfrak{g}_\beta^\mu] \neq \{0\}$. Já é sabido que isso é verdade desde que α e β não sejam ambos iguais a $\bar{1}$. Suponha então que $\alpha = \beta = \bar{1}$. Por d), existe uma forma bilinear não degenerada, consistente, supersimétrica e invariante em $\mathfrak{g}$, denote-a por ϕ. Escolha elementos não nulos

$$x_\lambda \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^\lambda, \;\; y_\mu \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}^\mu, \;\;\; e_{-\lambda-\mu} \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{-\lambda-\mu}.$$

Seja $h_{\lambda+\mu}$ um elemento de $\mathfrak{h}$ que corresponde a raiz $\lambda+\mu$, como na equação (3.4.3). Usando a equação (3.4.4) e também a invariância de ϕ, concluímos que

$$[e_{-\lambda-\mu}, [x_\lambda, y_\mu]] = \phi(x_\lambda, [e_{-\lambda-\mu}, y_\mu])h_{\lambda+\mu}. \tag{3.5.5}$$

Como $-\lambda-\mu \in \Phi_{\bar{0}}$, $\mu \in \Phi_{\bar{1}}$, $-\lambda \in \Phi_{\bar{1}}$, temos que $[e_{-\lambda-\mu}, y_\mu]$ é um elemento não nulo de $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\lambda}$, pois pelo item b), temos que $\dim(\mathfrak{g}^{-\lambda-\mu}) = \dim(\mathfrak{g}^\mu) = 1$ e já sabemos que para estas raízes a igualdade

$$[\mathfrak{g}_{-\lambda-\mu}, \mathfrak{g}_\mu] = \mathfrak{g}_{-\lambda}$$

é válida. Mas a restrição de ϕ a $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^\lambda \times \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\lambda}$ é não degenerada (ver seção 3.4). Assim, como $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^\lambda$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^{-\lambda}$ têm dimensão 1, podemos concluir que

$$\phi(x_\lambda, [e_{-\lambda-\mu}, y_\mu]) \neq 0.$$

Por outro lado, $\lambda+\mu$ é uma raiz par e portanto diferente de zero, o que implica que $h_{\lambda+\mu} \neq 0$. Logo, pela equação (3.5.5) temos que

$$[x_\lambda, y_\mu] \neq 0,$$

como queríamos.

□

3.6 Classificação das super álgebras de Lie clássicas

Na seção anterior descrevemos algumas famílias de super álgebras de Lie clássicas. Mostraremos agora que (a menos de isomorfismo) não existe nenhuma outra super álgebra de Lie clássica. Como uma consequência da nossa prova, também obteremos uma classificação de um tipo especial de super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas transitivas e irredutíveis. (ver proposição 3.6.7 abaixo).

Teorema 3.6.1. Uma super álgebra de Lie clássica ou é uma álgebra de Lie simples ou é isomorfa a alguma das seguintes super álgebras de Lie clássicas:

$\mathfrak{sl}(m,n)$ com n, $m \geq 1$ e $n \neq m$;

$\mathfrak{sl}(n,n)/\Bbbk I_{2n}$ com $n \geq 2$;

$\mathfrak{osp}(m, 2r)$ com m, $r \geq 1$;

$\mathfrak{p}(n)$ com $n \geq 3$;

$\mathfrak{q}(n)$ com $n \geq 3$;

$\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ com $\sigma_i \in \Bbbk$, $\sigma_i \neq 0$, $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$;

Γ_2, Γ_3.

Observação 3.6.2. Entre as super álgebras listadas no teorema 1 existem os seguintes isomorfismos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(m,n) &\cong \mathfrak{sl}(n,m), \ \ \forall\, n,m \geq 1; \\ \mathfrak{sl}(2,1) &\cong \mathfrak{osp}(2,2); \\ \mathfrak{osp}(4,2) &\cong \Gamma(-2,1,1). \end{aligned}$$

Além desses isomorfismos temos também os isomorfismos entre algumas das álgebras $\Gamma(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ (ver subseção 3.5.5).

O teorema 3.6.1 e os resultados da seção 3.5 implicam no

Corolário 3.6.3. Uma super álgebra de Lie simples cuja forma de Killing é não degenerada é isomorfa a uma álgebra de Lie simples ou a uma das seguintes super álgebras de Lie:

$\mathfrak{sl}(m,n)$ com n, $m \geq 1$ e $n \neq m$;

$\mathfrak{osp}(m,2r)$ com m, $r \geq 1$, $m \neq 2r+2$;

Γ_2, Γ_3.

O seguinte resultado é um subproduto da demonstração do teorema 3.6.1:

Proposição 3.6.4. Sejam $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e ρ uma representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em um espaço vetorial $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Suponha que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ não é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)\times\mathfrak{sl}(2)\times\mathfrak{sl}(2)$. Então, existe a menos de um fator constante, no máximo uma função bilinear $\varphi : \mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ tal que o espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$, equipado com a multiplicação dada por $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, ρ e φ (ver capítulo 2), se torna uma super álgebra de Lie clássica.

A demonstração do teorema 3.6.1 é bastante longa, portanto iremos dividi-la em diversas partes.

3.6.1 Uma observação preliminar

Nesta subseção chamaremos a atenção para alguns processos que nos permitem construir uma "nova"super álgebra de Lie a partir de uma previamente dada. Será mostrado que ambas as álgebras obtidas por esse processo são isomorfas. Obviamente, a classificação das super álgebras de Lie clássicas será feita a menos de isomorfismo, sendo assim temos que entender tal processo para evitar contar duas vezes algumas álgebras. Para referências posteriores, segue o próximo resultado.

Lema 3.6.5. Sejam $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie (cuja multiplicação é denotada por $[\ ,\ ]$), c um elemento não nulo de $\mathbb{k}$ e τ um automorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Defina uma nova super álgebra de Lie $\mathfrak{g}'$, a qual possui o mesmo espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado subjacente de $\mathfrak{g}$ mas sua multiplicação $[\ ,\ ]'$ é dada por

$$[q_1,q_2]' = [q_1,q_2];$$

$$[q,x]' = [\tau^{-1}(q),x];$$

$$[x,q]' = [x,\tau^{-1}(q)];$$

$$[x_1,x_2]' = (1/c^2)\tau\left([x_1,x_2]\right);$$

para quaisquer q, q_1, $q_2 \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e x, x_1, $x_2 \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$. Então, $\mathfrak{g}'$ é uma super álgebra de Lie e a função linear

$$f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$$

definida por

$$\begin{array}{rcl} f(q) & = & \tau(q), \text{ se } q \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \\ f(x) & = & cx, \text{ se } x \in \mathfrak{g}_{\bar{1}} \end{array}$$

é um isomorfismo de super álgebras de Lie.

Deve-se notar que as representações de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ nos subespaços ímpares de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ não são necessariamente equivalentes. Além do mais, o lema mostra que um "reescalonamento"da multiplicação $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ leva a um isomorfismo de super álgebras de Lie.

No que segue, $\mathfrak{g}$ denotará uma super álgebra de Lie clássica com subespaço ímpar não nulo. Vamos diferenciar alguns casos, dependendo se a álgebra de Lie (redutiva) $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é simples ou não e se a representação ad' de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é irredutível ou não.

3.6.2 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ não é simples e ad' é irredutível

Como ad' é irredutível, o centro de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ deve ser trivial (veja o corolário 3.2.14). Assim, $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ pode ser escrito com um produto direto de duas álgebras de Lie semissimples $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2$,

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \times \mathfrak{g}_{\bar{0}}^2.$$

Estamos supondo que ad' é irredutível, e além disso, ad' é fiel (ver lema 3.2.4). Portanto, para $i = 1, 2$, existe um $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$módulo irredutível e fiel V_i tal que o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é isomorfo ao $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \times \mathfrak{g}_{\bar{0}}^2-$módulo $V_1 \otimes V_2$. No que segue, identificaremos $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ com $V_1 \otimes V_2$.

A simplicidade de $\mathfrak{g}$ implica pelo lema 3.2.4 que

$$[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \mathfrak{g}_{\bar{0}}.$$

Observe que a função

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \\ (u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2) & \longmapsto & \pi_1([u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2]) \end{array}$$

(aqui π_1 é a projeção de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$) é bilinear e se fixarmos um par $(u_2, v_2) \in V_2 \times V_2$ temos que a função $P_{(u_2,v_2)} : V_1 \times V_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ tal que $P_{(u_2,v_2)}(u_1, v_1) = \pi_1([u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2]),\ \forall\, u_1,\, v_1 \in V_1$ é bilinear, além disso, todas as funções dessa forma são iguais a menos de uma constante multiplicativa. Para ver isso, observe primeiro existe um par (u_2, v_2) tal que a função $P = P_{(u_2,v_2)}$ é não nula (pois $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$), e graças a identidade de Jacobi o subespaço gerado pela imagem desta função é um ideal de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ (que podemos supor que é uma álgebra de Lie simples). Fixe agora uma base $\{e_1, ..., e_m\}$ de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ e escreva

$$P = \sum_j c_j e_j,$$

onde c_j é uma forma bilinear (invariante) em V_1 para todo $j = 1, \ldots, m$. Dado outro u_2', considere a função P' correspondente ao par (u_2', v_2) (é o mesmo v_2). Então, $P' = \sum_j c_j' e_j$, com c_j' forma bilinear (invariante) em V_1 para todo $j = 1, \ldots, m$. Como V_1 é um $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1-$módulo irredutível e as formas c_j são invariantes, vemos que $c_j' = a_j c_j$ para algum escalar $a_j \in \Bbbk$ e para todo $j = 1, \ldots, m$. Precisamos mostrar que todos os a_j são iguais (isso implica que variando o u_2 obtemos múltiplos da P original, aí fazemos o mesmo para v_2). Para mostrar isso, considere $Q = P' - a_1 P$ que é igual à função P'' associada ao par $(u_2 - a_1u_2', v_2)$ e, portanto, Q ou é zero, ou é "sobrejetora"(isto é, o subespaço gerado pela sua imagem é todo $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$). Agora,

$$Q(u_1, v_1) = \sum_{j>1}(a_1 - a_j)c_j(u_1, v_1)e_j \,,$$

que certamente não é "sobrejetora"(pois e_1 não está no subespaço gerado pela sua imagem). Logo, Q é zero. Como P é "sobre", para todo $j = 1, \ldots, m$ existe (u_1, v_1) tal que $c_j(u_1, v_1) \neq 0$. Isso implica $a_j = a_1$ para todo j, e portanto que P' é múltipla de P, como queríamos. Digamos que $P' = k_{u_2', v_2}P$, para algum $k_{u_2', v_2} \in \Bbbk$. Sabendo disso definimos a seguinte forma bilinear não degenerada e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2-$invariante:

$$\begin{aligned} \psi_2 : V_2 \times V_2 &\longrightarrow \Bbbk. \\ (u_2', v_2') &\longmapsto k_{u_2', v_2'} \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Podemos repetir o mesmo argumento se fixarmos as entradas em V_1. Isso mostra que existe, para $i = 1, 2$, uma forma bilinear não degenerada $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$invariante ψ_i em V_i e uma função bilinear não nula e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$invariante

$$P_i : V_i \times V_i \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}^i$$

tal que

$$[u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2] = \psi_2(u_2, v_2)P_1(u_1, v_1) + \psi_1(u_1, v_1)P_2(u_2, v_2), \tag{3.6.2}$$

para quaisquer $u_i,\, v_i \in V_i;\ i = 1, 2$. Sabemos que ψ_i é determinada a menos de um fator constante não nulo, uma vez que o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$módulo dual irredutível de V_i é dado, em particular, ψ_i deve ser simétrica ou antí-simétrica. Como a função produto $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é simétrica segue que as funções ψ_2 e P_1 são ambas simétricas ou ambas anti-simétricas. Note que a mesma afirmação vale para ψ_1 e P_2.

Se $Q_i \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^i$, então denotaremos por $\widetilde{Q_i}$ a correspondente ação do elemento Q_i no $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$módulo V_i, isto é, $\widetilde{Q_i}(v) = Q_iv$ (ação de Q_i em v), $\forall\, v \in V_i$. Vamos explorar a identidade de Jacobi para três elementos ímpares:

$$[[u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2], w_1 \otimes w_2] + [[w_1 \otimes w_2, u_1 \otimes u_2], v_1 \otimes v_2] + [[w_1 \otimes w_2, v_1 \otimes v_2], u_1 \otimes u_2] = 0\,, \tag{3.6.3}$$

para quaisquer $u_i,\, v_i,\, w_i \in V_i;\ i = 1, 2$. Distinguiremos nosso estudo em dois casos.

a) Suponha que

$$\dim(V_i) \geq 3, \text{ para } i = 1, 2. \tag{3.6.4}$$

Inserindo a expressão (3.6.2) em (3.6.3), vemos que existe constantes $\omega_i,\, \sigma_i,\, \tau_i \in \Bbbk$ tais que para quaisquer $u_i,\, v_i,\, w_i \in V_i\,;\ i = 1, 2$

$$\widetilde{P_i(u_i, v_i)}w_i = \omega_i\psi_i(u_i, v_i)w_i + \sigma_i\psi_i(v_i, w_i)u_i + \tau_i\psi_i(w_i, u_i)v_i. \tag{3.6.5}$$

Então, deduzimos que (3.6.2) é satisfeita se e só se

$$\omega_1 + \omega_2 = \sigma_1 + \tau_2 = \sigma_2 + \tau_1 = 0.$$

Por outro lado, a forma bilinear ψ_i é $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$invariante, em particular, devemos quer que

$$\psi_i(\widetilde{P_i(u_i, v_i)}w_i, \bar{w}_i) + \psi_i(w_i, \widetilde{P_i(u_i, v_i)}\bar{w}_i) = 0, \ \ \forall\, u_i,\, v_i,\, w_i,\, \bar{w}_i \in V_i;\ i = 1, 2.$$

Usando a equação (3.6.5) temos que essa condição é satisfeita se e só se

$$\omega_i = \sigma_i + \tau_i = 0, \ \ i = 1, 2.$$

Segue daí que

$$\widetilde{P_i(u_i, v_i)}w_i = \sigma\left(\psi_i(v_i, w_i)u_i - \psi_i(w_i, u_i)v_i\right), \ \forall\, u_i,\, v_i,\, w_i \in V_i;\ i = 1, 2 \qquad (3.6.6)$$

e algum elemento não nulo $\sigma \in \Bbbk$. Note que, P_i é simétrica (resp. antí-simétrica) se e só se ψ_i é antí-simétrica (resp. simétrica). Assim, uma das formas bilineares ψ_i é simétrica enquanto a outra é antí-simétrica.

Sem perda de generalidade, suponha que ψ_1 é simétrica e que ψ_2 é antí-simétrica. Então, sabemos que as funções lineares $\widetilde{P_i(u_i, v_i)}$; $u_i,\, v_i \in V_i$; $i = 1$ (resp. $i = 2$), geram um subespaço de $\mathfrak{gl}(V_i)$, o qual é igual a álgebra de Lie ortogonal $\mathfrak{so}(\psi_1)$ (resp. simplética $\mathfrak{sp}(\psi_2)$). Mas sabemos que ψ_i é $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$invariante e que a representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i$ em V_i é fiel. Portanto, a representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ em V_1 (resp. de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2$ em V_2) é um isomorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ (resp. $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2$) na álgebra ortogonal $\mathfrak{so}(\psi_1)$ (resp. $\mathfrak{sp}(\psi_2)$).

As equações (3.6.2) e (3.6.6) mostram que a função multiplicação $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é fixa a menos de um fator constante, uma vez que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \times \mathfrak{g}_{\bar{0}}^2$ e que os $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$módulos V_i são dados. Tendo em vista o lema 3.6.5, isso implica que a super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ deve ser isomorfa a álgebra orto-simplética $\mathfrak{osp}(n, 2r)$ com $n \geq 3$ e $r \geq 2$.

b) Vamos considerar agora o caso em que a condição (3.6.4) não é válida. Como o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$módulo V_i é fiel, concluímos que (pelo menos) um dos espaços V_i possui dimensão igual a 2 e que a álgebra de Lie correspondente é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$. Sem perda de generalidade, suponha que

$$\dim(V_2) = 2, \ \ \mathfrak{g}_{\bar{0}}^2 = \mathfrak{sl}(V_2)$$

e que V_2 é o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2-$módulo natural. Sabemos que existe uma forma bilinear não degenerada, antí-simétrica e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2-$invariante ψ_2 em V_2 e uma função não nula e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2-$invariante

$$P_2 : V_2 \times V_2 \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}^2.$$

Ambas ψ_2 e P_2 são fixadas a menos de um fator constante, em particular, temos que

$$\widetilde{P_2(u_2, v_2)}w_2 = \sigma\left(\psi_2(v_2, w_2)u_2 - \psi_2(w_2, u_2)v_2\right), \ \ \forall\, u_2,\, v_2,\, w_2 \in V_2,$$

onde σ é algum elemento não nulo de $\Bbbk$.

Portanto, as funções ψ_2 e P_2 na equação (3.6.2) são conhecidas. Concluímos assim que a forma bilinear ψ_1 é simétrica, isto é, que o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1-$módulo V_1 é ortogonal; além disso, a função P_1 é antí-simétrica.

Agora, não é difícil de mostrar que a identidade de Jacobi (3.6.3) é válida se e só se a função $3-$linear $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1-$invariante

$$\widehat{P}_1 : V_1 \times V_1 \times V_1 \longrightarrow V_1 \qquad (3.6.7)$$

definida por

$$\widehat{P}_1(u_1, v_1, w_1) = \widetilde{P_1(u_1, v_1)}w_1 - \sigma\left(\psi_1(v_1, w_1)u_1 - \psi(w_1, u_1)v_1\right), \ \ \forall u_1,\, v_1,\, w_1 \in V_1 \qquad (3.6.8)$$

é totalmente antí-simétrica.

No caso $\widehat{P}_1 = 0$ nós voltamos na equação (3.6.6) e concluímos que $\mathfrak{g}$ deve ser isomorfa a uma álgebra orto-simplética $\mathfrak{osp}(n, 2)$ com $n \geq 3$. Mas $\widehat{P}_1$ não necessariamente é nula. Contudo, temos que $\widehat{P}_1 = 0$ se $n \leq 3$. Sobre as nossas suposições, o caso em que $n = 2$ é impossível, para $n = 3$ nós obtemos a álgebra $\mathfrak{osp}(3, 2)$.

Vamos considerar o caso $n = 4$. Então, $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ é uma álgebra de Lie semissimples que possui uma representação fiel, ortogonal e irredutível de dimensão 4. Segue daí que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \cong \mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2) \cong \mathfrak{so}(4)$ e que V_1 é o $\mathfrak{so}(4)-$módulo natural. Este é um dos casos (excepcionais) em que $\widehat{P}_1$ não é igual a zero. Contudo, este caso foi tratado no exemplo 2.1.12: Sabemos que $\mathfrak{g}$ é isomorfa a uma das super álgebras de Lie excepcionais $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (que incluem $\mathfrak{osp}(4, 2)$).

Assim, podemos supor agora que

$$\dim(V_1) \geq 5 \tag{3.6.9}$$

e que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ é simples (o caso onde $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ não é simples recai no caso **a)**).

Sobre estas suposições a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada. De fato, não é difícil de ver que a restrição da forma de Killing de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2$ é igual a $1 - (1/4)\dim(V_1)$ vezes a forma de Killing de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2$, sendo assim, a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é não nula e portanto é não degenerada (ver proposição 3.2.5). Portanto, podemos aplicar os resultados da subseção 3.4. Vamos usar a notação introduzida naquela seção. Seja μ um dos dois pesos do $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^2-$módulo V_2. Então, os pesos de ad' são exatamente as formas lineares do tipo $\alpha = (\widetilde{\alpha}, \pm\mu)$, onde $\widetilde{\alpha}$ é um peso do $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1-$módulo V_1. Vamos normalizar a forma bilinear invariante ϕ de $\mathfrak{g}$ de tal forma que

$$(\mu|\mu) = -1.$$

Se $\widetilde{\alpha} \neq 0$, então 2α não é uma raiz de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, e sendo assim, o lema 3.4.1 implica que $(\alpha|\alpha) = 0$, isto é, que

$$(\widetilde{\alpha}|\widetilde{\alpha}) = 1. \tag{3.6.10}$$

Esta equação mostra que a restrição de ϕ a $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ é um múltiplo racional positivo da forma de Killing de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$.

Suponha que $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ são dois pesos do $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1-$módulo V_1. Então,

$$\alpha = (\widetilde{\alpha}, \mu)\,, \quad \beta = (\widetilde{\beta}, \mu)$$

são dois pesos de ad' e temos que

$$(\alpha|\beta) = (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) + (\mu|\mu) = (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) - 1.$$

Pois da equação (3.6.10) esta expressão será nula se e só se $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} \neq 0$.

Agora, seja $\widetilde{\alpha} \neq \pm\widetilde{\beta}$, então $\alpha + \beta$ não é uma raiz de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e sendo assim $\alpha - \beta = (\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}, 0)$ deve ser uma raiz de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ (ver lema 3.4.2). Com isso mostramos o

Lema 3.6.6. Se $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ são dois pesos do $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1-$módulo V_1 tais que $\widetilde{\alpha} \neq \pm\widetilde{\beta}$, então $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta}$ é uma raiz de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$.

Lembre que o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1-$módulo V_1 é ortogonal e que estamos supondo que a desigualdade (3.6.9) é válida. Portanto, de acordo com o lema A.3.2 (ver também a observação A.3.3) do apêndice só temos as seguintes possibilidades:

a) $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \cong \mathfrak{so}(n)$ para algum $n \geq 5$, e V_1 é o $\mathfrak{so}(n)-$módulo natural.

a') $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \cong \mathfrak{so}(8)$ e V_1 realiza uma das duas representações spin de dimensão 8 de $\mathfrak{so}(8)$.

b) $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \cong G_2$ e V_1 é o G_2-módulo fundamental de dimensão 7.

c) $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1 \cong \mathfrak{so}(7)$ e V_1 realiza a representação spin de dimensão 8 de $\mathfrak{so}(7)$.

Note que a representação natural $\rho(\lambda_1)$ e as duas representações spinoriais $\rho(\lambda_3)$ e $\rho(\lambda_4)$ de $\mathfrak{so}(8) \cong D_4$ são conectadas por um automorfismo apropriado da álgebra de Lie D_4. Portanto, tendo em vista o lema 3.6.5, o caso **a')** recai no caso **a)**.

Em todos esses casos existe uma e, a menos de um fator constante, somente uma função bilinear $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^1-$invariante $P_1 : V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}^1$ que é não nula. A equação (3.6.8), deixa claro que para pelo menos uma escolha do fator livre, a função $\widehat{P}_1$ será totalmente antí-simétrica. Mais uma vez, portanto, a função multiplicação $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é fixada a menos de um fator constante, se nos são dados a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e os $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^i-$módulos V_i. Consequentemente (lembre o lema 3.6.5) a super álgebra de Lie deve ser isomorfa a uma das álgebras $\mathfrak{osp}(n,2)$ com $n \geq 5$, ou Γ_2, Γ_3.

3.6.3 A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ não é simples e ad' não é irredutível

Podemos tratar este caso por um processo que é completamente análogo ao usado na subseção anterior. Contudo, modificaremos os argumentos na intenção de provar a seguinte proposição mais geral:

Proposição 3.6.7. Seja $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -1} \mathfrak{g}_i$ uma super álgebra de Lie transitiva, irredutível e $\mathbb{Z}-$graduada consistentemente satisfazendo as seguintes condições:

a) As representações de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ são duais uma a outra.

b) O subespaço $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$ gera a álgebra $\mathfrak{g}$.

Então, a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathfrak{g}$ é isomorfa a uma das seguintes super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas:

$\mathfrak{sl}(m,n)$ com $m > n \geq 1$;

$\mathfrak{sl}(n,n)/\Bbbk\, I_{2n}$ com $n \geq 2$;

$\mathfrak{osp}(2,2r)$ com $r \geq 1$.

(Lembre que as super álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(2,1)$ e $\mathfrak{osp}(2,2)$ são isomorfas.)

Primeiramente vamos mostrar que esta proposição resolve a parte do teorema 3.6.1 que foi mencionada na introdução desta seção. Seja $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_0$. Como a representação ad' é completamente redutível mas não irredutível (por hipótese), podemos deduzir da proposição 3.2.8 que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ se decompõe numa soma direta de dois $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$submódulos irredutíveis $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ tais que

$$[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_0. \tag{3.6.11}$$

Além disso, sabemos que $\{g_i \mid -1 \leq i \leq 1\}$ é uma graduação transitiva da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que é consistente com a $\mathbb{Z}_2-$graduação (ver proposição 3.2.8, observação 3.2.10 e lema 3.2.7)

Logo, resta mostrar que os $\mathfrak{g}_0-$módulos $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ são duais um ao outro. Mas isso segue da equação (3.6.11) e da nossa suposição que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ (redutiva) não é simples. De fato, podemos argumentar diretamente (usando o corolário 3.2.14 ou a proposição 3.3.5) ou também podemos usar a proposição 3.1.10.

Demonstração. (Da proposição 3.6.7) Por hipótese a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$grudada $\mathfrak{g}$ é transitiva e irredutível, e além disso, a representação de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ são duais uma a outra. Segue daí que ambas representações são irredutíveis e fieis (ver lema 3.1.7) e que a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathfrak{g}$ é bitransitiva (ver 3.1.3).

Por outro lado, veja que (ver proposição 3.1.9) a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ é redutiva (mas não abeliana) e que o seu centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ tem no máximo dimensão 1. Além do mais, se $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)) = 1$, então existe um único elemento $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ tal que para todo $j \geq -1$

$$[z, x] = jx, \quad \text{se } x \in \mathfrak{g}_j. \tag{3.6.12}$$

Como o subespaço $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$ gera a álgebra $\mathfrak{g}$ concluímos que

$$[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_0. \tag{3.6.13}$$

Depois destas preliminares podemos distinguir em dois casos.

a)$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ não é simples.

Neste caso $\mathfrak{g}_0$ pode ser escrita como um produto direto

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \times \mathfrak{g}_0^1 \times \mathfrak{g}_0^2$$

onde $\mathfrak{g}_0^1$ e $\mathfrak{g}_0^2$ são duas álgebras de Lie semissimples. Os $\mathfrak{g}_0^1 \times \mathfrak{g}_0^2-$ módulos $\mathfrak{g}_{-1}$ e $\mathfrak{g}_1$ são irredutíveis, fieis e duais um ao outro. Logo, existe para $i = 1, 2$, dois $\mathfrak{g}_0^i-$módulos irredutíveis e fieis U_i e V_i tais que os $\mathfrak{g}_0^1 \times \mathfrak{g}_0^2-$módulos $\mathfrak{g}_{-1}$ e $U_1 \otimes U_2$ ($\mathfrak{g}_1$ e $V_1 \otimes V_2$) são isomorfos. Além disso, os dois $\mathfrak{g}_0^i-$módulos U_i e V_i são duais um ao outro, isto é, existe, para $i = 1, 2$, uma forma bilinear não degenerada $\mathfrak{g}_0^i-$invariante ψ_i em $U_i \times V_i$. Sabemos que ψ_i é fixada a menos de um fator constante, uma vez que os dois $\mathfrak{g}_0^i-$módulos irredutíveis e duais U_i e V_i nos são dados.

No que segue iremos identificar $\mathfrak{g}_{-1}$ com $U_1 \otimes U_2$ e $\mathfrak{g}_1$ com $V_1 \otimes V_2$. A equação (3.6.13) implica que existe, para $i = 1, 2$, uma função bilinear não nula e $\mathfrak{g}_0^i-$invariante

$$P_i : U_i \times V_i \longrightarrow \mathfrak{g}_0^i$$

tal que

$$\begin{aligned} [u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2] &= \psi_2(u_2, v_2)P_1(u_1, v_1) + \psi_1(u_1, v_1)P_2(u_2, v_2) \\ &+ \psi_1(u_1, v_1)\psi_2(u_2, v_2)F \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

para quaisquer $u_i \in U_i$, $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$, e onde F é um elemento escolhido apropriadamente em $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$, tal que $F \neq 0$ se $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \neq \{0\}$. É conveniente definir uma constante $\eta \in \Bbbk$ por

$$\begin{aligned} \eta &= 0, \quad \text{se } \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) = \{0\} \\ F &= \eta z, \quad \text{se } \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \neq \{0\} \end{aligned}$$

(ver equação (3.6.12)). Note que $\eta = 0$ se e só se $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) = \{0\}$. Para qualquer $Q_i \in \mathfrak{g}_0^i$ denote por $\widetilde{Q}_i$ (resp. $\widehat{Q}_i$) a correspondente ação do elemento Q_i no $\mathfrak{g}_0^i-$módulo U_i (resp. V_i). A identidade de Jacobi para dois elementos de $\mathfrak{g}_{-1}$ e um elemento de $\mathfrak{g}_1$ é equivalente a

$$[[u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2], \bar{u}_1 \otimes \bar{u}_2] + [[\bar{u}_1 \otimes \bar{u}_2, v_1 \otimes v_2], u_1 \otimes u_2] = 0 \tag{3.6.15}$$

para quaisquer $u_i, \bar{u}_i \in U_i$ e $v_i \in V_i$; $i = 1, 2$. Inserindo a expressão (3.6.14) em (3.6.15) vemos primeiramente que existe algumas constantes σ_i, $\tau_i \in \Bbbk$ tais que

$$\widetilde{P_i(u_i, v_i)}\bar{u}_i = \sigma_i\psi_i(u_i, v_i)\bar{u}_i + \tau_i\psi_i(\bar{u}_i, v_i)u_i, \quad \forall\, u_i,\, \bar{u}_i \in U_i,\, v_i \in V_i;\ i = 1, 2. \tag{3.6.16}$$

Então, deduzimos que (3.6.15) é satisfeita se e só se

$$\sigma_1 + \sigma_2 - \eta = \tau_i + \tau_2 = 0. \tag{3.6.17}$$

Por outro lado, a forma bilinear ψ_i é $\mathfrak{g}_0^i-$invariante, em particular, devemos ter que

$$\psi_i(\widetilde{P_i(u_i, v_i)}\bar{u}_i, \bar{v}_i) + \psi_i(\bar{u}_i, \widehat{P}_i(u_i, v_i)\bar{v}_i) = 0, \quad \forall\, u_i,\, \bar{u}_i \in U_i,\, v_i,\, \bar{v}_i \in V_i;\ i = 1, 2.$$

Isso implica que

$$\widehat{P}_i(u_i, v_i)\bar{v}_i = -\sigma_i\psi_i(u_i, v_i)\bar{v}_i - \tau_i\psi_i(u_i, \bar{v}_i)v_i, \quad \forall\, u_i \in U_i,\, v_i,\, \bar{v}_i \in V_i;\ i = 1, 2. \tag{3.6.18}$$

Agora não é difícil verificar que para quaisquer $u_i \in U_i$, v_i, $\bar{v}_i \in V_i$ e $i = 1, 2$ temos

$$\begin{aligned}[u_1 \otimes u_2, [v_1 \otimes v_2, \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2]] &= [[u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2], \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2] + [[u_1 \otimes u_2, \bar{v}_1 \otimes \bar{v}_2], v_1 \otimes v_2] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.6.19}$$

Isso significa que

$$[\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]] = \{0\}. \tag{3.6.20}$$

Mas a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathfrak{g}$ e transitiva, e sendo assim, a equação (3.6.15) implica que

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \{0\}.$$

Como o subespaço $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$ gera a álgebra $\mathfrak{g}$ concluímos que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1.$$

Vamos observar agora que para quaisquer módulos de dimensão finita de uma álgebra de Lie semissimples temos que

$$\mathrm{tr}(\widetilde{P_i(u_i, v_i)}) = -\mathrm{tr}(\widehat{P}_i(u_i, v_i)) = 0, \quad \forall\, u_i \in U_i,\, v_i \in V_i;\ i = 1, 2.$$

Se tomarmos

$$n_i = \dim(U_i) = \dim(V_i), \quad i = 1, 2$$

esta condição é equivalente a

$$n_i\sigma_i + \tau_i = 0, \ \ i = 1, 2. \tag{3.6.21}$$

Considerando as dimensões n_1, n_2 fixadas, podemos reescrever as equações (3.6.17) e (3.6.21) exigindo que exista um elemento não nulo $\tau \in \Bbbk$ tal que

$$\begin{gathered}\sigma_1 = \frac{\tau}{n_1}, \qquad \tau_1 = -\tau \\ \sigma_2 = -\frac{\tau}{n_2}, \qquad \tau_2 = \tau \\ \eta = \frac{n_2 - n_1}{n_2 n_1}\tau. \end{gathered} \tag{3.6.22}$$

Note que $\eta = 0$ se e só se $n_1 = n_2$.

É fácil der que, para $i = 1, 2$, as funções $\widetilde{P}_i(u_i, v_i)$ (resp. $\widehat{P}_i(u_i, v_i)$), $u_i \in U_i$, $v_i \in V_i$, geram o subespaço $\mathfrak{sl}(U_i)$ de $\mathfrak{gl}(U_i)$ (resp. $\mathfrak{sl}(V_i)$ de $\mathfrak{gl}(V_i)$). Por outro lado, a álgebra $\mathfrak{g}_0^i$ é semissimples e os $\mathfrak{g}_0^i-$módulos U_i e V_i são fieis. Tudo isso implica que a representação de $\mathfrak{g}_0^i$ em U_i (resp. V_i) é um isomorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0^i$ em $\mathfrak{sl}(U_i)$ (resp. $\mathfrak{sl}(V_i)$).

As equações (3.6.14), (3.6.16), (3.6.18) e (3.6.22) mostram que a função multiplicação $\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_0$ é fixada a menos de um fator constante, uma vez que as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_0^i$ e os $\mathfrak{g}_0^i-$módulos duais U_i e V_i são dados. Tendo em vista o lema 3.6.5, isto implica que a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathfrak{g}$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(n_1, n_2)$ se $n_1 \neq n_2$, mas isomorfa a $\mathfrak{sl}(n_1, n_1)/\Bbbk\, I_{2n_1}$ se $n_1 = n_2$. Note que de acordo com nossas suposições $n_1 \geq n_2 \geq 2$.

b) $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ é simples

Por hipótese sabemos que

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \times \mathfrak{g}_0^1,$$

onde $\mathfrak{g}_0^1 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0^1]$ é uma álgebra de Lie simples. Escolha uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}_0$ assim como um sistema fundamental de raízes simples de $\mathfrak{g}_0$ com respeito a $\mathfrak{h}$. Considere também ϕ uma forma bilinear simétrica, invariante e não degenerada em $\mathfrak{g}_0$. Usaremos as noções introduzidas no apêndice. Em particular, temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \times \mathfrak{h}^1$, onde $\mathfrak{h}^1$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_0^1$. Além disso, definiremos, para cada raiz $\alpha \in \mathfrak{g}_0$, o elemento $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ por

$$\alpha(h') = \phi(h_\alpha, h'), \ \ \forall\, h' \in \mathfrak{h}$$

e escolha vetores raízes $e_{\pm\alpha}$ associado as raízes $\pm\alpha$ satisfazendo

$$[e_{-\alpha}, e_\alpha] = h_\alpha, \ \ \forall\, \alpha \in \Phi.$$

Seja λ (resp. μ) o peso máximo (resp. mínimo) do $\mathfrak{g}_0-$módulo $\mathfrak{g}_{-1}$ (resp. $\mathfrak{g}_1$) e $x_\lambda \in \mathfrak{g}_{-1}$ (resp. $y_\mu \in \mathfrak{g}_1$) um vetor de peso associado a ele. Tome

$$[x_\lambda, y_\mu] = h,$$

sabemos que (ver proposição 3.1.10)

$$\mu = -\lambda$$

e que

$$h \in \mathfrak{h}, \quad h \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$$

Lema 3.6.8. Temos que

$$\lambda(h) = 0. \tag{3.6.23}$$

Demonstração. Note que, $[x_\lambda, x_\lambda] = 0$. Por outro lado é fácil de ver que

$$[y_{-\lambda}, [x_\lambda, x_\lambda]] = 2\lambda(h)x_\lambda,$$

logo a equação (3.6.23) é válida.

□

Lema 3.6.9. Se α é uma raiz positiva de $\mathfrak{g}_0$, então

$$\alpha(h)(\alpha|\lambda)(\alpha|2\lambda - \alpha) = 0. \tag{3.6.24}$$

Demonstração. Considere o elemento

$$a = [[e_{-\alpha}, x_\lambda], [e_{-\alpha}, x_\lambda]].$$

Note que, $a = 0$. Por outro lado é fácil verificar que

$$[e_\alpha, [e_\alpha, [y_{-\lambda}, a]]] = 2\alpha(h)(\alpha|2\lambda - \alpha)(\alpha|\alpha)x_\lambda.$$

Isso implica na equação (3.6.24).

□

Lema 3.6.10. Sejam α e β duas raízes diferentes e positivas de $\mathfrak{g}_0$. Suponha que $\alpha - \beta$ não é uma raiz de $\mathfrak{g}_0$. Então,

$$(\alpha + \beta)(h)(\alpha|\lambda)(\beta|\lambda) = (\alpha|\beta)\alpha(h)(\beta|\lambda) = (\alpha|\beta)\beta(h)(\alpha|\lambda). \tag{3.6.25}$$

Demonstração. Considere o elemento

$$b = [x_\lambda, [e_{-\alpha}[e_{-\beta}, x_\lambda]]].$$

Sabemos que $b = 0$. Por outro lado, não é difícil de mostrar que

$$[e_\beta, [e_\alpha, [y_{-\lambda,b}]]] = -\left((\alpha + \beta)(h)(\alpha|\alpha) - (\alpha|\beta)\alpha(h)\right)(\beta|\lambda)x_\lambda.$$

Isso implica na primeira igualdade da equação (3.6.25). A segunda igualdade é deduzida da primeira intercambiando α e β.

□

Corolário 3.6.11. Sejam α e β duas raízes positivas de $\mathfrak{g}_0$ e suponha que $\alpha + \beta$ é uma raiz enquanto que $\alpha - \beta$ não é. Então,

$$\alpha(h)(\beta|\lambda) = \beta(h)(\alpha|\lambda). \tag{3.6.26}$$

Demonstração. Nossas hipótese implicam que $(\alpha|\beta) \neq 0$. Assim, o resultado desejado segue do lema anterior.

□

Lembre que

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \times \mathfrak{h}^1\,, \quad \mathfrak{h}^* = (\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0))^* \times \left(\mathfrak{h}^1\right)^*.$$

Denote por h^1 a componente de h em $\mathfrak{h}^1$ e por λ^1 a componente de λ em $(\mathfrak{h}^1)^*$.

Lema 3.6.12. Existe um único elemento não nulo $c \in \mathbb{k}$, tal que

$$\tau(h^1) = c(\tau|\lambda^1), \quad \forall\, \tau \in \left(\mathfrak{h}^1\right)^*. \tag{3.6.27}$$

Demonstração. Como a representação de $\mathfrak{g}_0$ em $\mathfrak{g}_{-1}$ é fiel, sabemos que $\lambda^1 \neq 0$. Assim, existe uma raiz simples α de $\mathfrak{g}_0^1$ tal que

$$(\alpha|\lambda^1) \neq 0.$$

Se o elemento c existe, então para todos eles devemos ter que

$$\alpha(h^1) = c(\alpha|\lambda^1). \tag{3.6.28}$$

Consequentemente, definimos o elemento $c \in \Bbbk$ pela equação (3.6.28). Seja γ uma raiz simples qualquer de $\mathfrak{g}_0^1$ que é diferente de α. Então, existe uma sequência finita

$$\alpha = \beta_0,\ \beta_1, \ldots,\ \beta_p = \gamma$$

de raízes simples distintas β_q de $\mathfrak{g}_0^1$, para as quais os vértices no diagrama de Dynkin formam uma cadeia conexa. Mostraremos por indução que

$$\beta_q(h^1) = c(\beta_q|\lambda^1), \ \text{ se } \ 0 \leq q \leq p. \tag{3.6.29}$$

Por definição, a equação (3.6.29) é válida se $q = 0$. Seja $1 \leq r \leq p$ e suponha que (3.6.29) é satisfeita se $0 \leqq\leq r-1$. Sabemos que

$$\beta = \sum_{s=1}^{r} \beta_s$$

é uma raiz positiva de $\mathfrak{g}_0^1$, além disso, $\alpha + \beta$ é uma raiz de $\mathfrak{g}_0^1$ mas $\alpha - \beta$ não é. Usando o corolário 3.6.11 assim como a nossa hipótese de indução, é fácil ver que a equação (3.6.29) é válida para $q = r$.

Assim, mostramos que a equação (3.6.27) é válida se τ é uma raiz simples de $\mathfrak{g}_0^1$. Isso implica que (3.6.27) é válida em geral.

Agora, veja que $c \neq 0$. De fato, suponha que $c = 0$. Então, a equação (3.6.27) implica que $h^1 = 0$, e sendo assim, que $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$. Mas esse não é o caso.

□

Corolário 3.6.13. O centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ de $\mathfrak{g}_0$ não é igual a $\{0\}$.

Demonstração. Suponha o contrário. Então, a equação (3.6.27) diz que

$$\tau(h) = c(\tau|\lambda), \quad \forall\, \tau \in \mathfrak{h}^*.$$

Tendo em vista o lema 3.6.8, isso implica que $c(\lambda|\lambda) = 0$, o que é uma contradição.

□

Suponha agora que α e β são duas raízes diferentes e positivas de $\mathfrak{g}_0^1$ e que $\alpha - \beta$ não é uma raiz. Usando a equação (3.6.27), deduzimos da equação (3.6.25) que

$$\big((\alpha + \beta|\lambda^1) - (\alpha|\beta)\big)\,(\alpha|\lambda^1)(\beta|\lambda^1) = 0. \tag{3.6.30}$$

Por outro lado, as equações (3.6.24) e (3.6.27) combinadas nos fornecem

$$(\gamma|\lambda^1)(\gamma|2\lambda^1 - \gamma) = 0 \tag{3.6.31}$$

para toda raiz positiva γ de $\mathfrak{g}_0^1$. Assim, a equação (3.6.30) pode ser reescrita da forma

$$(\alpha - \beta|\alpha - \beta)(\alpha|\lambda^1)(\beta|\lambda^1) = 0.$$

Por hipótese, α e β são duas raízes diferentes, sendo assim, $(\alpha - \beta|\alpha - \beta) \neq 0$. Logo, provamos o

Lema 3.6.14. Suponha que α e β duas raízes positivas e diferentes de $\mathfrak{g}_0$ tais que $\alpha - \beta$ não é uma raiz. Então, $(\alpha|\lambda^1) = 0$ ou $(\beta|\lambda^1) = 0$.

Corolário 3.6.15. O peso λ^1 de $\mathfrak{g}_0^1$ é fundamental e pertence em um dos vértices extremos do diagrama de Dynkin.

Demonstração. Seja α uma raiz simples de $\mathfrak{g}_0^1$ tal que $(\alpha|\lambda^1) \neq 0$ e seja β uma raiz simples de $\mathfrak{g}_0^1$ que é diferente de α. Então, $\alpha - \beta$ não é uma raiz de $\mathfrak{g}_0^1$ e consequentemente $(\beta|\lambda^1) = 0$. Por outro lado, a equação (3.6.31) mostra que
$$2\frac{(\lambda^1|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} = 1.$$
Assim, λ^1 é um peso fundamental de $\mathfrak{g}_0^1$.

Note que, λ^1 e α pertencem ao mesmo vértice ν do diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}_0^1$. Suponha agora que ν não é extremo. Escolha dois vértices diferentes ν' e ν'' do diagrama de Dynkin que são vizinhos de ν. Seja β e γ duas raízes simples de $\mathfrak{g}_0^1$ que pertencem a ν' e ν'', respectivamente. Então, $\alpha+\beta$ e $\alpha+\gamma$ são duas raízes diferentes e positivas de $\mathfrak{g}_0^1$ e $(\alpha+\beta)-(\alpha+\gamma)$ não é uma raiz. Por outro lado, $(\alpha+\beta|\lambda\ 1)$ e $(\alpha+\gamma|\lambda^1)$ são ambos iguais a $(\alpha|\lambda^1)$ e portanto diferentes de zero. Isso contrária o lema 3.6.14.

□

Lema 3.6.16. A condição no lema 3.6.14 implica que
$$\mathfrak{g}_0^1 \cong A_n \ \text{ e } \ \lambda^1 = \lambda_1 \ \text{ ou } \ \lambda^1 = \lambda_n$$
ou então
$$\mathfrak{g}_0^1 \cong \mathfrak{sp}(n) \ \text{ e } \ \lambda^1 = \lambda_1,$$
onde $n \geq 1$ em ambos os casos. (Ver apêndice para a enumeração dos pesos fundamentais λ_i.)

Demonstração. Sabemos do corolário 3.6.15, que λ^1 é um peso fundamental de $\mathfrak{g}_0^1$ que pertence a um dos vértices extremos do diagrama de Dynkin.

Seja $(\mathfrak{g}_0^1, \lambda^1)$ um par consistindo de uma raiz simples da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0^1$ e de um peso fundamental como descrito acima. Seja α uma raiz simples de $\mathfrak{g}_0^1$ que corresponde a λ^1, isto é,
$$(\alpha|\lambda^1) \neq 0$$
e seja θ a raiz de altura máxima de $\mathfrak{g}_0^1$. Se o par $(\mathfrak{g}_0^1, \lambda^1)$ não é mencionado na afirmação do lema 3.6.16, então podemos exclui-lo aplicando o lema 3.6.14: Escolhe-se $\beta = \theta$ ou $\beta = \theta - \alpha$.

Agora estamos prontos para completar a prova da proposição 3.6.7. Para as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_0^1$ e os $\mathfrak{g}_0^1-$módulos (duais e irredutíveis), usaremos que existe uma forma bilinear não degenerada e $\mathfrak{g}_0^1-$invariante ψ em $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, assim como, uma função bilinear não nula e $\mathfrak{g}_0^1-$invariante $P : \mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_0^1$; além disso, ambas ψ e P são únicas a menos de um fator constante (ver lema 3.6.16).

Segundo o corolário 3.6.15, temos que
$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0) \times \mathfrak{g}_0^1,$$
onde o centro $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ de $\mathfrak{g}_0$ possui dimensão 1. Seja z o elemento de $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$ que foi introduzido na equação (3.6.12). Então, existem elementos não nulos σ, $\tau \in \Bbbk$ tais que
$$[x, y] = \sigma P(x, y) + \tau\psi(x, y)z\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{g}_{-1},\, y \in \mathfrak{g}_1.$$
Lembre que para qualquer elemento $Q \in \mathfrak{g}_0^1$, $\widetilde{Q}$ é denota a ação do elemento Q_i no $\mathfrak{g}_0^1-$módulo $\mathfrak{g}_{-1}$. Então, a identidade de Jacobi para dois elementos de $\mathfrak{g}_{-1}$ e um elemento de $\mathfrak{g}_1$ é equivalente a pedir que, para todo $y \in \mathfrak{g}_1$, a função bilinear
$$(x, \bar{x}) \longmapsto \sigma\widetilde{P(x, y)}\bar{x} - \tau\psi(x, y)\bar{x}, \ \text{ com } \ x,\, \bar{x} \in \mathfrak{g}_{-1}$$

seja antí-simétrica.

Note que, para cada $\sigma \in \Bbbk$ existe pelo menos um elemento $\tau \in \Bbbk$ tal que este critério é satisfeito. Assim, mostramos que a função multiplicação $\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_0$ da nossa super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq -1} \mathfrak{g}_i$ é fixada a menos de um fator constante, uma vez que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0^1$ e que os $\mathfrak{g}_0^1-$módulos $\mathfrak{g}_\pm$ são escolhidos conforme o lema 3.6.16. Segue agora do corolário 3.1.6, que a super álgebra de Lie $\mathbb{Z}-$graduada $\mathfrak{g}$ é isomorfa a uma das super álgebras de Lie $\mathbb{Z}-$graduadas $\mathfrak{sl}(n+1,1)$ ou $\mathfrak{osp}(2,2n)$ com $n \geq 1$. (Ao invés de invocar o corolário 3.1.6, podemos argumentar mais diretamente: Primeiro construímos a função P explicitamente e então verificamos que $[\mathfrak{g}_{-1}, [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]] = \{0\}$.)

□

Assim, finalizamos a demonstração da proposição 3.6.7. □

Observação 3.6.17. Se queremos provar somente o teorema 3.6.1, a discussão desta subseção seria bastante simplificada. De fato, neste caso saberíamos que o centro de $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ não é trivial e portanto que a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada (ver proposição 3.3.5). Mas então é fácil ver que a diferença de quaisquer dois pesos diferentes do $\mathfrak{g}_0-$módulo $\mathfrak{g}_{-1}$ é uma raiz de $\mathfrak{g}_0$ (ver lema 3.4.2). Assim, de acordo com o lema A.3.2 (no apêndice), isso implica que o lema 3.6.16 acima é válido.

3.6.4 A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é simples

Nós vamos agora resolver a parte restante do teorema 3.6.1. Denote por ϕ (resp. $\widetilde{\phi}$) a forma de Killing da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ (resp. da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$) e por ℓ o índice da representação ad' de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ (ver apêndice). Por definição, temos que

$$\phi(q, q') = (1-\ell)\widetilde{\phi}(q, q'), \quad \forall\, q,\, q' \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}. \tag{3.6.32}$$

Como sabemos (ver proposição 3.2.5), a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ ou é não degenerada ou igual a zero. Tendo em vista a equação (3.6.32) isso significa que ou a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada (e portanto $\ell \neq 1$) ou então temos que $\ell = 1$ (e a forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é igual a zero). Assim, isso nos leva a distinguir os seguintes casos:

a) A forma de Killing de $\mathfrak{g}$ é não degenerada.

Neste caso podemos usar as notações e aplicar os resultados da subseção 3.4. Seja λ qualquer peso não nulo da representação ad'. Como a restrição de ϕ a $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é um múltiplo não nulo de $\widetilde{\phi}$, concluímos que $(\lambda|\lambda) \neq 0$. Pelo lema 3.4.1, isso implica que 2λ é uma raiz de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e que o espaço de peso associado a λ tem dimensão 1. Segue do lema A.3.2 (ver também a equação (3.2.4)) que

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} \cong \mathfrak{sp}(2n)\,, \quad \mathrm{ad}' \cong \rho(\lambda_1)$$

para algum $n \geq 1$. Mas sabemos que quaisquer duas funções bilineares e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariantes $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ são proporcionais. Portanto, mostramos que $\mathfrak{g}$ deve ser isomorfa a $\mathfrak{osp}(1,2n)$ (ver lema 3.6.5).

b) A representação ad' é irredutível e $\ell = 1$.

Como o índice ℓ da representação irredutível ad' é igual a 1, concluímos da subseção A.3.3 do apêndice, que ad' deve ser equivalente a representação adjunta de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Além disso, sabemos que a função multiplicação $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é simétrica e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$invariante. Assim, precisamos solucionar o seguinte problema: Encontrar todas as álgebras de Lie simples $\mathfrak{s}$ tais que a representação adjunta $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$ de $\mathfrak{s}$ está contida no produto tensorial simétrico de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$ com ele mesmo.

Vamos verificar que a nossa exigência é satisfeita se e só se $\mathfrak{s} \cong A_n$, com $n \geq 2$ e que além disso, neste caso o produto tensorial simétrico de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$ com ele mesmo contém $\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}$ somente uma vez. De fato, este resultado pode ser lido nas tabelas em [31] de [M. Scheunert]. Por outro lado, podemos usar também uma versão da formula de Steinberg para a decomposição do produto tensorial de duas representações irredutíveis (ver em [32] de [M. Scheunert]).

Portanto, pelo lema 3.6.5, concluímos que $\mathfrak{g}$ deve ser isomorfa a álgebra $\mathfrak{q}(n+1)$.

c) A representação ad' é redutível e $\ell = 1$.

Neste caso (ver proposição 3.2.8), sabemos que $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ se decompõe numa soma direta de dois $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$submódulos irredutíveis $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^1$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^2$,

$$\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}^1 \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}^2.$$

Ainda mais, a equação $[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ (ver lema 3.2.4) implica que os $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulos $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^i$, $i = 1, 2$, são não triviais.

Denote por ℓ_i; $i = 1, 2$, o índice da representação de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ em $\mathfrak{g}_{\bar{1}}^i$. Então,

$$\ell_1 + \ell_2 = \ell = 1 \ \text{ e } \ \ell_1, \ell_2 > 0.$$

Assim, nos indeparamos com o seguinte problema:

Seja $\mathfrak{s}$ uma álgebra de Lie simples. Encontrar todos os pares de representações irredutíveis não triviais de $\mathfrak{s}$ cuja soma dos índices é igual a 1.

No que segue, nós investigaremos separadamente todas as álgebras de Lie simples. Usando a tabela 2 da subseção A.3.3, do apêndice, daremos todos os "pares admissíveis"de representações irredutíveis (em termos dos pesos máximos) e discutiremos quais destes pares nos levam a uma super álgebra de Lie simples.

Caso A_n, $n \geq 1$.

Este caso é o mais complicado. O peso máximo dos pares de representações admissíveis são os seguintes:

1)	$2\lambda_1$,	λ_{n-1} ;	$n \geq 2$
1′)	$2\lambda_n$,	λ_2 ;	$n \geq 2$
2)	$2\lambda_1$,	λ_2 ;	$n \geq 2$
2′)	$2\lambda_n$,	λ_{n-1} ;	$n \geq 2$
3)	λ_3 ,	λ_3 ;	$n = 5$
4)	λ_1 ,	λ_3 ;	$n = 7$
4′)	λ_7 ,	λ_5 ;	$n = 7$
5)	λ_1 ,	λ_5 ;	$n = 7$
5′)	λ_7 ,	λ_5 ;	$n = 7$

As "possibilidades com linha são conectadas com as sem linha"por um automorfismo de A_n. Pelo lema 3.6.5, os casos com linha podem, portanto, serem desconsiderados.

1) O produto tensorial de $\rho(2\lambda_1)$ com $\rho(\lambda_{n-1})$ contém a representação adjunta de A_n exatamente uma vez. De acordo com o lema 3.6.5, a super álgebra de Lie correspondente $\mathfrak{s}$ é isomorfa a $\mathfrak{p}(n+1)$.

2) Podemos supor que $n \neq 3$, pois o caso $n = 3$ é incluído em 1). Então, o produto tensorial de $\rho(2\lambda_1)$ com $\rho(\lambda_2)$ não contém a representação adjunta e portanto, este caso não nos leva a uma super álgebra de Lie simples.

3) O produto tensorial de $\rho(\lambda_3)$ com ele próprio contém a representação adjunta exatamente uma vez, na parte simétrica. A última propriedade implica que este caso não nos leva a uma super álgebra de Lie simples.

4, 5) O produto tensorial de $\rho(\lambda_1)$ com $\rho(\lambda_3)$ ou com $\rho(\lambda_5)$ não contém a representação adjunta e portanto, este caso não nos leva a uma super álgebra de Lie simples.

Caso C_n, $n \geq 2$.

Existe apenas um par de representações admissíveis; os correspondentes peso máximo e posto desta representação são

$$\lambda_2 \quad , \quad \lambda_2 \quad ; \quad n = 3.$$

O produto tensorial de $\rho(\lambda_2)$ com ele próprio contém a representação adjunta exatamente uma vez, na parte antí-simétrica. Sabemos que $\rho(\lambda_2)$ é uma sub-representação de $\bigwedge^2 \rho(\lambda_1)$, sendo assim, a construção para a função multiplicação $\mathfrak{g}_{\bar{1}} \times \mathfrak{g}_{\bar{1}} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é direta. Uma vez que isso é feito, é fácil ver que a identidade de Jacobi para três elementos ímpares não é satisfeita.

Podemos ver na tabela 2 do apêndice que para os casos B_n, $n \geq 3$; D_n, $n \geq 4$; E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2 não existe nenhum par de representações admissíveis. Assim, concluímos a demonstração do teorema 3.6.1.

Capítulo 4

Super álgebras de Lie Básicas e subálgebras de Borel

Neste capítulo começaremos introduzindo alguns conceitos bastante importantes para a teoria das super álgebras de Lie básicas, como subálgebras de Borel, sistemas de raízes positivas e sistemas fundamentais. Apresentaremos os principais resultados sobre as super álgebras de Lie básicas e descreveremos em detalhes as estruturas das super álgebras do tipo $\mathfrak{gl}$ e $\mathfrak{osp}$. Um fato diferente que existe no super contexto é que as subálgebras de Borel, os sistemas positivos, ou os sistemas fundamentais de uma super álgebra de Lie básica de dimensão finita podem não ser conjugados sobre a ação do grupo de Weyl correspondente; para ser mais preciso, eles se relacionam um com o outro por meio de reflexões pares e ímpares. Desenvolveremos também uma teoria de peso máximo para as super álgebras de Lie básicas. Os resultados que serão apresentados neste capítulo foram retirados de [CW].

Para o principal objetivo deste texto, trabalharemos com uma subálgebra de Borel (resp. sistema positivo/fundamental) fixada (resp. fixado), sendo assim, a maioria dos resultados apresentados neste capítulo têm caracter somente informativo para nós. Por isso, e também devido ao tamanho da dissertação, iremos omitir tais demonstrações.

4.1 Estruturas das super álgebras de Lie básicas

Seja $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie clássica, dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie *básica* se esta admite uma forma bilinear não degenerada, invariante, supersimétrica e par. Na tabela abaixo listamos todas super álgebras de Lie Básicas.

Super álgebras de Lie Básicas
Todas as álgebras de Lie simples;
$\mathfrak{sl}(m,n)$ com n, $m \geq 1$ e $n \neq m$;
$\mathfrak{sl}(n,n)/\Bbbk I_{2n}$ com $n \geq 2$;
$\mathfrak{osp}(m,2r)$ com m, $r \geq 1$;
$\Gamma(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ com $\sigma_i \in \Bbbk$, $\sigma_i \neq 0$, $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$;
Γ_2, Γ_3.

A partir de agora suporemos que a super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é básica e usaremos a notação introduzida na subseção 3.2.2.

Definição 4.1.1. O *grupo de Weyl* de uma uma super álgebra de Lie básica será denotado por W e definido como sendo sendo o grupo de Weyl da álgebra de Lie redutiva $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$.

O próximo teorema mostra que as estruturas das super álgebras de Lie básicas são similares as das álgebras de Lie semissimples.

Teorema 4.1.2. Sejam $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan.

1) Temos uma decomposição em espaços de raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}^{\alpha} \right), \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}.$$

2) $\dim(\mathfrak{g}^{\alpha}) = 1$, para $\alpha \in \Phi$.

3) $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] \subseteq \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$, para α, β, $\alpha+\beta \in \Phi$.

4) Φ, $\Phi_{\bar{0}}$ e $\Phi_{\bar{1}}$ são invariantes sobre a ação do grupo de Weyl W em $\mathfrak{h}^*$.

5) Existe uma forma bilinear $(\ |\ )$ não degenerada, invariante, supersimétrica e par em $\mathfrak{g}$.

6) $(\mathfrak{g}^{\alpha}|\mathfrak{g}^{\beta}) = \{0\}$ a menos que $\alpha = -\beta \in \Phi$.

7) A restrição da forma bilinear a $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ é não degenerada e $W-$invariante.

8) Se $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, então $[x,y] = (x|y)h_{\alpha}$, onde o elemento h_{α} é dado pelo isomorfismo definido pela equação (3.4.2).

9) $\Phi = -\Phi$, $\Phi_{\bar{0}} = -\Phi_{\bar{0}}$ e $\Phi_{\bar{1}} = -\Phi_{\bar{1}}$.

10) Seja $\alpha \in \Phi$. Então, então $k\alpha \in \Phi$ para algum inteiro $k \neq \pm 1$ se e só se α é uma raiz ímpar tal que $(\alpha|\alpha) \neq 0$; neste caso, devemos ter que $k = \pm 2$.

Demonstração. A parte 7) segue pela invariância dos conjuntos de pesos para os $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulos $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$, respectivamente, sobre a ação do grupo de Weyl W. Para os demais itens, ver a seção 3.4 e subseção 3.5.6.

□

Note que, como $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $\dim(\mathfrak{g}^{\alpha}) = 1$ para cada $\alpha \in \Phi$, então, pelo teorema 4.1.2, existe $i \in \mathbb{Z}_2$ tal que $\mathfrak{g}^{\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_i$. Portanto, Φ é a união disjunta de $\Phi_{\bar{0}}$ e $\Phi_{\bar{1}}$, e temos que

$$\Phi_i = \{\alpha \in \Phi \,|\, \mathfrak{g}^{\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_i\}, \quad i \in \mathbb{Z}_2.$$

Uma raíz $\alpha \in \Phi$ é chamada de *isotrópica* se $(\alpha|\alpha) = 0$. Observe que uma raíz isotrópica deve ser necessariamente uma raíz ímpar. Denotamos o conjunto das raízes ímpares e isotrópicas por

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\bar{1}} &:= \{\alpha \in \Phi_{\bar{1}} \,|\, (\alpha|\alpha) = 0\} \\ &= \{\alpha \in \Phi_{\bar{1}} \,|\, 2\alpha \notin \Phi\}. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

A segunda equação acima segue pelo teorema 4.1.2 (10). Também introduziremos o seguinte conjunto de raízes:

$$\bar{\Phi}_{\bar{0}} = \{\alpha \in \Phi_{\bar{0}} \,|\, \alpha/2 \in \Phi\}. \tag{4.1.2}$$

4.1.1 Formas bilineares invariantes em $\mathfrak{gl}$ e $\mathfrak{osp}$.

Em contraste com as álgebras de Lie semissimples, a forma de Killing de uma super álgebra de Lie básica pode ser nula (ver seção 3.5), e sempre que esta é não nula, ela pode não ser positiva definida no espaço vetorial real gerado por Φ. Nesta subseção, daremos uma pequena descrição de uma forma bilinear invariante, não degenerada, par e supersimétrica em uma super álgebra de Lie do tipo $\mathfrak{gl}$ ou $\mathfrak{osp}$.

O super traço str sobre a super álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m,n)$ dá origem a uma forma bilinear não degenerada e supersimétrica

$$\begin{aligned} (\ ,\ ) : \mathfrak{gl}(m,n) \times \mathfrak{gl}(m,n) &\longrightarrow \mathbb{k}, \\ (a,b) &\longmapsto \mathrm{str}(ab) \end{aligned}$$

É fácil verificar que essa forma é invariante e que sua restrição a subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ das matrizes diagonais, é uma forma bilinear não degenerada e simétrica em $\mathfrak{h}$:

$$(E_{i,i}, E_{j,j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{1} \leq i = j \leq \bar{1} \\ -1 & \text{se } 1 \leq i = j \leq n \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

onde $i, j \in I(m,n)$. Lembre que $I(m,n)$ é definido como em (2.3.6). Denote por $\{\delta_i, \epsilon_j\}_{i,j}$ a base dual para $\{E_{\bar{i},\bar{i}}, E_{j,j}\}_{i,j}$, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Usando a forma bilinear $(\ ,\ )$ podemos identificar δ_i com $(E_{\bar{i},\bar{i}}, \cdot)$ e $\epsilon_j = -(E_{j,j}, \cdot)$. Por convenção usaremos a notação

$$\epsilon_{\bar{i}} := \delta_i, \ \text{ para } \ 1 \leq i \leq m.$$

A forma $(\ ,\ )$ em $\mathfrak{h}$ induz uma forma bilinear não degenerada em $\mathfrak{h}^*$, que também será denotada por $(\ ,\ )$. Então, para $i, j \in I(m,n)$, temos que

$$(\epsilon_{ii}, \epsilon_{jj}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{1} \leq i = j \leq \overline{m} \\ -1 & \text{se } 1 \leq i = j \leq n \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Tal forma bilinear em $\mathfrak{gl}(2n,\ell)$ restringe a uma forma bilinear não degenerada, invariante e supersimétrica na super álgebra $\mathfrak{osp}(2n,\ell)$, que será denotada também por $(\ ,\ )$. Além disso, a restrição desta forma a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{osp}(2n,\ell)$ continua não degenerada. Isso nos permite identificar uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ com o seu dual $\mathfrak{h}^*$, e também obter uma forma bilinear em $\mathfrak{h}^*$.

4.1.2 Sistema de raízes e o grupo de Weyl de $\mathfrak{gl}$(m,n)

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,n)$ e $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan das matrizes diagonais. Seu sistema de raízes $\Phi = \Phi_{\bar{0}} \cup \Phi_{\bar{1}}$ é dado por

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{0}} &= \{\epsilon_i - \epsilon_j \,|\, i \neq j \in I(m,n),\ \ i,j > 0,\ \text{ou}\ \ i,j < 0\}, \\ \Phi_{\bar{1}} &= \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j) \,|\, i,j \in I(m,n),\ \ i < 0 < j\}. \end{aligned}$$

Um vetor raiz é um vetor não nulo em $\mathfrak{g}^\alpha$ para $\alpha \in \Phi$. Observe que $E_{i,j}$ é um vetor raiz correspondendo a raiz $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, para $i \neq j \in I(m,n)$.

O grupo de Weyl de $\mathfrak{gl}(m,n)$, que é por definição o grupo de Weyl da subálgebra $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{gl}(m) \oplus \mathfrak{gl}(n)$, é isomorfo a $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$, onde $\mathfrak{S}_n$ denota o grupo simétrico de n elementos.

4.1.3 Sistema de raízes e o grupo de Weyl de $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$

Agora, descreveremos o sistema de raízes para as super álgebras de Lie orto-simpléticas $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$, a qual é definida na forma matricial como em (3.5.1). Lembre que as linhas e colunas das matrizes são indexadas por $I(2m, 2n+1)$. A subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ das matrizes diagonais tem uma base dada por

$$\begin{aligned} H_i &:= E_{\bar{i},\bar{i}} - E_{\overline{m+i},\overline{m+i}},\ \ 1 \leq j \leq m, \\ H_j &:= E_{j,j} - E_{n+j,n+j},\ \ 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

e essa é a *subálgebra de Cartan padrão* para $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$. Seja $\{\delta_i,\ \epsilon_j \,|\, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ a base dual correspondente em $\mathfrak{h}^*$. Com respeito a $\mathfrak{h}$, o sistema de raízes $\Phi = \Phi_{\bar{0}} \cup \Phi_{\bar{1}}$ para $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ é

$$\{\pm\delta_i \pm \delta_j,\ \pm 2\delta_p,\ \pm\epsilon_k \pm \epsilon_\ell, \pm\epsilon_q,\} \cup \{\pm\delta_p \pm \epsilon_q,\ \pm\delta_p\},$$

onde $1 \leq i < j \leq m$, $1 \leq k < \ell \leq n$, $1 \leq p \leq m$ e $1 \leq q \leq n$.

Os vetores raiz para $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ podem ser escolhidos explicitamente como segue em (4.1.3)-(4.1.10) $(1 \leq i \neq j \leq m,\ \ 1 \leq k \neq \ell \leq n)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\epsilon_k} : E_{2n+1,\,k+n} - E_{k,\,2n+1}\,, &\quad \mathfrak{g}^{-\epsilon_k} : E_{2n+1,\,k} - E_{k+n,\,2n+1}; && (4.1.3) \\ \mathfrak{g}^{2\delta_i} : E_{\bar{i},\,\overline{i+m}}\,, &\quad \mathfrak{g}^{-2\delta_i} : E_{\overline{i+m},\,\bar{i}}; && (4.1.4) \\ \mathfrak{g}^{\delta_i+\delta_j} : E_{\bar{i},\,\overline{j+m}} - E_{\bar{j},\,\overline{i+m}}\,, &\quad \mathfrak{g}^{-\delta_i-\delta_j} : E_{\overline{j+m},\,\bar{i}} - E_{\overline{i+m},\,\bar{j}}; && (4.1.5) \\ \mathfrak{g}^{\delta_i-\delta_j} : E_{\bar{i},\,\bar{j}} - E_{\overline{j+m},\,\overline{i+m}}\,, &\quad \mathfrak{g}^{\epsilon_k-\epsilon_\ell} : E_{k,\,\ell} - E_{\ell+n,\,k+n}; && (4.1.6) \\ \mathfrak{g}^{\epsilon_k+\epsilon_\ell} : E_{k,\,\ell+n} - E_{\ell,\,k+n}\,, &\quad \mathfrak{g}^{-\epsilon_k-\epsilon_\ell} : E_{k+n,\,\ell} - E_{\ell+n,\,k}; && (4.1.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\delta_i+\epsilon_k} : E_{k,\,\overline{i+m}} + E_{\bar{i},\,k+n}\,, &\quad \mathfrak{g}^{-\delta_i-\epsilon_k} : E_{k+n,\,\bar{i}} - E_{\overline{i+m},\,k}; && (4.1.8) \\ \mathfrak{g}^{\delta_i-\epsilon_k} : E_{k+n,\,\overline{i+m}} + E_{\bar{i},\,k}\,, &\quad \mathfrak{g}^{-\delta_i+\epsilon_k} : E_{k,\,\bar{i}} - E_{\overline{i+m},\,k+n}; && (4.1.9) \\ \mathfrak{g}^{\delta_i} = E_{2n+1,\,\overline{i+m}} + E_{\bar{i},\,2n+1}\,, &\quad \mathfrak{g}^{-\delta_i} : E_{2n+1,\,\bar{i}} - E_{\overline{i+m},\,2n+1}. && (4.1.10) \end{aligned}$$

O grupo de Weyl de $\mathfrak{osp}(nm, 2n+1)$, que é por definição, o grupo de Weyl de $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2n+1)$, é isomorfo a $(\mathbb{Z}_2^m \rtimes \mathfrak{S}_m) \times (\mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n)$.

4.1.4 Sistema de raízes e o grupo de Weyl de $\mathfrak{spo}(2m, 2n)$

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{spo}(2m, 2n)$. A subálgebra de Lie abeliana $\mathfrak{h}$ gerada por $\{H_{\bar{i}}, H_j \,|\, 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ é uma subálgebra de Cartan para $\mathfrak{spo}(2m, 2n)$. Novamente, é conveniente, usar a notação $\epsilon_{\bar{i}} = \delta_j$, para $1 \leq i \leq m$. Com respeito a $\mathfrak{h}$, o sistema de raízes $\Phi = \Phi_{\bar{0}} \cup \Phi_{\bar{1}}$ é dado por

$$\{\pm\delta_i \pm \delta_j,\ \pm 2\delta_p,\ \pm\epsilon_k \pm \epsilon_\ell\} \cup \{\pm\delta_p \pm \epsilon_q\},$$

onde $1 \leq i < j \leq m$, $1 \leq k < \ell \leq n$, $1 \leq p \leq m$ e $1 \leq q \leq n$.

Os vetores raízes de $\mathfrak{spo}(2m, 2n)$ são dados por (4.1.4)-(4.1.9).

O grupo de Weyl de $\mathfrak{spo}(2m, 2n)$, que por definição é o grupo de Weyl da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{sp}(2m) \oplus \mathfrak{so}(2n)$ é igual a $(\mathbb{Z}_2^m \rtimes \mathfrak{S}_m) \times \left(\mathbb{Z}_2^{n-1} \rtimes \mathfrak{S}_n\right)$.

4.2 Sistemas positivos não conjugados e reflexões ímpares

Nesta seção, sistemas de raízes positivos, sistemas fundamentais, e diagramas de Dynkin para super álgebras de Lie básicas serão definidos e classificados, juntamente com as subálgebras de Borel. Em contraste com as álgebras de Lie semissimples, os sistemas fundamentais para uma super álgebra de Lie podem não ser conjugados sobre a ação do grupo de Weyl.

4.2.1 Sistemas positivos e sistemas fundamentais

Seja Φ um sistema de raízes de uma super álgebra de Lie básica $\mathfrak{g}$ para uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ dada, e seja E o espaço vetorial racional gerado por Φ. Temos que $E \otimes_{\mathbb{Q}} \Bbbk = \mathfrak{h}^*$, para $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{gl}(m, n)$. Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m, n)$ o espaço $E \otimes_{\mathbb{Q}} \Bbbk$ é um subespaço de $\mathfrak{h}^*$ de codimensão um.

Suporemos que uma ordem total $\geq$ em E como acima é sempre compatível com a estrutura de espaço vetorial racional, isto é, $v \geq w$ e $v' \geq w'$ implica que $v + v' \geq w + w'$, $-w \geq -v$ e $cv \geq cw$ para $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Tome por exemplo a ordem lexicográfica (ver [S. Martin]).

Um *sistema positivo* Φ^+ é um subconjunto de Φ consistindo precisamente de todas as raízes $\alpha \in \Phi$ satisfazendo $\alpha > 0$, para alguma ordem em E. Dado um sistema positivo Φ^+, definimos o *sistema fundamental* $\Pi \subseteq \Phi^+$ como sendo o conjunto das raízes $\alpha \in \Phi^+$ que não podem ser escritas como uma soma de duas raízes em Φ^+. Nos referiremos aos elementos em Φ^+ por *raízes positivas* e aos elementos de Π por *raízes simples*. Analogamente, denotaremos por Φ^- o conjunto de raízes negativas. Seja $\Phi_i^+ = \Phi^+ \cap \Phi_i$ e $\Phi_i^- = \Phi^- \cap \Phi_i$, para $i \in \mathbb{Z}_2$. Pelo teorema 4.1.2 (9), temos que $\Phi^- = -\Phi^+$ e $\Phi_i^- = -\Phi_i^+$, para $i \in \mathbb{Z}_2$. Assim,

$$\Phi^+ = \Phi_{\bar{0}}^+ \cup \Phi_{\bar{1}}^+.$$

Proposição 4.2.1. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica com uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos sistemas positivos para $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e o conjunto dos sistemas fundamentais para $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Demonstração. Segue da definição de um sistema fundamental que este existe e é único para um sistema positivo dado. Por outro lado, uma raiz positiva, se não for simples, pode ser escrita como uma soma de duas raízes positivas. Continuando dessa forma, qualquer raíz positiva é uma combinação $\mathbb{Z}_+-$linear de raízes simples, e sendo assim, um sistema positivo é determinado por seu sistema fundamental.

$\square$

Defimos

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^-} \mathfrak{g}^\alpha. \tag{4.2.1}$$

Então, $\mathfrak{n}^\pm$ são subálgebras nilpotentes de $\mathfrak{g}$ e obtemos uma decomposição triangular

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+. \tag{4.2.2}$$

A subálgebra solúvel $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ é chamada de *subálgebra de Borel* de $\mathfrak{g}$ (correspondendo a Φ^+). Temos também que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{b}_{\bar 1}$, onde $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_i$ para $i \in \mathbb{Z}_2$.

4.2.2 Sistemas positivo e fundamental para $\mathfrak{gl}(m,n)$

Lembre que o sistema de raízes Φ para $\mathfrak{gl}(m,n)$ e a subálgebra de Cartan padrão $\mathfrak{h}$ são descritos na seção 4.1.2. A subálgebra das matrizes triangulares superiores é a *subálgebra de Borel padrão* de $\mathfrak{g}$ que contém $\mathfrak{h}$, e o *sistema padrão de raízes positivas* correspondente de Φ é dado por $\{\epsilon_i - \epsilon_j \,|\, i,j \in I(m,n),\ i<j\}$. Levando em conta que $\epsilon_{\bar i} = \delta_i$, o sistema fundamental padrão para $\mathfrak{gl}(m,n)$ é

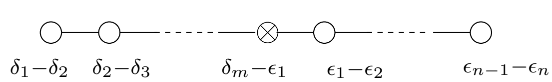
$$\{\delta_i - \delta_{i+1},\, \epsilon_j - \epsilon_{j+1} \,|\, 1 \le i \le m-1,\ 1 \le j \le n-1\},$$

cujos vetores raiz correspondentes são $e_i := E_{i,i+1}$, para $i \in I(m-1,n-1)$ e $e_{\overline{m}} := E_{\overline{m},1}$. As corraízes simples são $h_j := E_{j,j} - E_{j+1,j+1}$, para $j \in I(m-1,n-1)$ e $h_{\overline{m}} := E_{\overline{m},\overline{m}} + E_{11}$. Denote por $f_i := E_{i+1,i}$ para $i \in I(m-1,n-1)$, e $f_{\overline{m}} := E_{1,\overline{m}}$. (Aqui estamos fazendo um abuso de notação de forma que $i+1$ significa $\overline{\iota+1}$, para $i = \bar\iota$ com $1 \le \iota \le m-1$). Então, $\{e_i,\, h_i,\, f_i \,|\, i \in I(m,n-1)\}$ é um conjunto de *geradores de Chevalley* para $\mathfrak{sl}(m,n)$.

Note que

$$\begin{array}{rcl} (\delta_i - \delta_{i+1}, \delta_i - \delta_{i+1}) & = & 2, \quad 1 \le i \le m-1; \\ (\delta_m - \epsilon_1, \delta_m - \epsilon_1) & = & 0; \\ (\epsilon_j - \epsilon_{j+1}, \epsilon_i - \epsilon_{j+1}) & = & -2, \quad 1 \le j \le n-1. \end{array}$$

Assim, $\delta_m - \epsilon_1$ é uma raíz isotrópica simples. Seguindo a convenção usual para álgebras de Lie, desenharemos agora o *Diagrama de Dynkin padrão* correspondendo a este sistema fundamental simples:



(4.2.3)

Aqui, o circulo branco denota uma raíz simples e par α tal que $\frac{1}{2}\alpha$ não é uma raiz. Na notação introduzida em [Kac 1], $\otimes$ denota uma raiz isotrópica ímpar e simples.

Agora, vamos classificar todos os possíveis sistemas positivos para $\mathfrak{gl}(m,n)$, levando em conta que $\epsilon_{\bar i} = \delta_i$, para $1 \le i \le m$. Se ignorarmos a paridade das raízes por um momento, o sistema de raízes de $\mathfrak{gl}(m,n)$ é o mesmo sistema de raízes de $\mathfrak{gl}(m+n)$. Assim, por definição, seus sistemas positivos (resp. sistemas fundamentais) são descritos exatamente da mesma forma, e existem ao todo $(m+n)!$ deles.

Segue assim que um sistema fundamental para $\mathfrak{gl}(m,n)$ consiste de $(m+n-1)$ raízes $\epsilon_{i_1}-\epsilon_{i_2}$, $\epsilon_{i_2}-\epsilon_{i_3},\ldots,\epsilon_{i_{m+n-1}}-\epsilon_{i_{m+n}}$, onde $\{i_1,i_2,\ldots,i_{m+n}\}=I(m,n)$. Então, nós restauramos a paridade das raízes simples em um sistema fundamental de $\mathfrak{gl}(m,n)$. O diagrama de Dynkin correspondente fica da forma

$$\underset{\epsilon_{i_1}-\epsilon_{i_2}}{\odot} - \underset{\epsilon_{i_2}-\epsilon_{i_3}}{\odot} - \cdots - \underset{\epsilon_{i_k}-\epsilon_{i_{k+1}}}{\odot} - \odot - \cdots - \underset{\epsilon_{i_{m+n-1}}-\epsilon_{i_{m+n}}}{\odot} \tag{4.2.4}$$

onde o circulo com um ponto no meio pode ser tanto um circulo branco quanto um $\otimes$, dependendo se a raiz simples correspondente é par ou ímpar.

Para enunciarmos o teorema de classificação dos sistemas de raízes positivos é conveniente introduzirmos a noção de $\epsilon\delta-$sequência. A *$\epsilon\delta-$sequência* para um sistema fundamental como o de 4.2.4 é obtida modificando a sequência $\epsilon_{i_1}\epsilon_{i_2}\ldots\epsilon_{i_{m+n}}$ para a notação $\epsilon\delta$, através da identificação $\epsilon_{\overline{i}}=\delta_i$, e depois removendo os índices. É claro que uma $\epsilon\delta-$sequência possui m δ's e n ϵ's. Em geral, existem sistemas positivos para Φ que não são conjugados um ao outro pela ação do grupo de Weyl, ao contrário do caso de algebra de Lie semissimples.

Exemplo 4.2.2. A subálgebra de Borel padrão de $\mathfrak{gl}(m,n)$ corresponde ao sistema positivo

$$\Phi=\{\epsilon_i-\epsilon_j\,|\,i,j\in I(m,n),\ i<j\},$$

que por sua vez possui possui o seguinte sistema fundamental padrão

$$\Pi=\{\epsilon_{\overline{1}}-\epsilon_{\overline{2}},\ldots,\epsilon_{\overline{m-1}}-\epsilon_{\overline{m}},\epsilon_{\overline{m}}-\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{n-1}-\epsilon_n\}.$$

Agora, vamos construir a $\epsilon\delta-$sequência para tal sistema fundamental. Primeiramente tome a sequência de ϵ's que neste caso é dada por $\epsilon_{\overline{1}}\epsilon_{\overline{2}}\ldots\epsilon_{\overline{m}}\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n$. Agora, fazendo a identificação $\epsilon_{\overline{i}}=\delta_i$, a nossa sequência fica da forma $\delta_1\delta_2\ldots\delta_m\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_n$ e finalmente, retirando os índices temos que a $\epsilon\delta-$sequência associada a este sistema fundamental é dada por

$$\underbrace{\delta\ldots\delta}_{m}\underbrace{\epsilon\ldots\epsilon}_{n}.$$

Se fizermos a mesma construção para a subálgebra de Borel padrão oposta (isto é, raízes positivas se tornam negativas) teremos a correspondente $\epsilon\delta-$sequência da forma $\underbrace{\epsilon\ldots\epsilon}_{n}\underbrace{\delta\ldots\delta}_{m}$

Exemplo 4.2.3. As três $W-$classes de conjugação dos sistemas fundamentais para $\mathfrak{gl}(1,2)$ correspondem as três sequências $\delta\epsilon\epsilon$, $\epsilon\delta\epsilon$ e $\epsilon\epsilon\delta$ respectivamente.

4.2.3 Sistemas positivo e fundamental para $\mathfrak{spo}(2m,2n+1)$

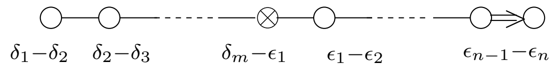
Descreveremos os sistemas positivo/fundamental e os diagramas de Dynkin para a super álgebra de Lie $\mathfrak{spo}(2m,2n+1)$, cujo sistema de raízes foi descrito na subseção 4.1.3. O sistema padrão positivo $\Phi^+=\Phi_{\overline{0}}^+\cup\Phi_{\overline{1}}^+$ correspondendo a *subálgebra de Borel padrão* de $\mathfrak{spo}(2m,2n+1)$ é

$$\{\delta_i\pm\delta_j,\,2\delta_p,\,\epsilon_k\pm\epsilon_\ell,\,\epsilon_q\}\cup\{\delta_p\pm\epsilon_q,\,\delta_p\},$$

onde $1\leq i<j\leq m$, $1\leq k<\ell\leq n$, $1\leq p\leq m$ e $1\leq q\leq n$. O sistema fundamental Π de Φ^+ contém uma raíz ímpar $\delta_m-\epsilon_1$, e este é dado por

$$\Pi=\{\delta_i-\delta_{i+1},\,\delta_m-\epsilon_1,\,\epsilon_k-\epsilon_{k+1},\,\epsilon_n\,|\,1\leq i\leq m-1,\ 1\leq k\leq n-1\}.$$

O *diagrama de Dynkin padrão* correspondente para $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ é



(4.2.5)

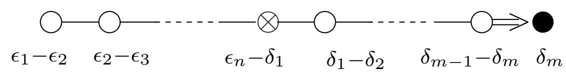
Outro sistema de raízes positivas frequentemente usado para $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ é dado por

$$\{\delta_i \pm \delta_j,\, 2\delta_p,\, \epsilon_k \pm \epsilon_\ell,\, \epsilon_q\} \cup \{\epsilon_q \pm \delta_p,\, \delta_p\},$$

onde $1 \leq i < j \leq m$, $1 \leq k < \ell \leq n$, $1 \leq p \leq m$ e $1 \leq q \leq n$, com o seguinte sistema fundamental

$$\{\epsilon_k - \epsilon_{k+1},\, \epsilon_n - \delta_1,\, \delta_i - \delta_{i+1},\, \delta_m \,|\, 1 \leq i \leq m-1,\ 1 \leq k \leq n-1\}.$$

O diagrama de Dynkin correspondente é



(4.2.6)

onde na notação introduzida em [Kac 1], o circulo preto denota uma raiz simples, ímpar e não isotrópica, que é o caso de δ_m, pois $(\delta_m, \delta_m) = 1$.

Agora, vamos classificar todos os possíveis sistemas fundamentais de $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ com respeito a uma dada subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ e tendo em mente que $\epsilon_{\bar{i}} = \delta_i$. Note que $2\epsilon_{\overline{p}} \in \Phi^+$ se e só se $\epsilon_{\overline{p}} \in \Phi^+$, e que $\pm 2\epsilon_{\overline{p}}$, por definição, nunca está em um sistema fundamental. Portanto, afim de classificar os sistemas positivos e fundamentais em Φ, é suficiente considerar o subconjunto $\widetilde{\Phi} := \Phi \setminus \{\pm 2\epsilon_{\overline{p}} \,|\, 1 \leq p \leq m\}$. Ignorando a paridade das raízes, $\widetilde{\Phi}$ pode ser identificado com o sistema de raízes da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2m+2n+1)$, cujos sistemas fundamentais são completamente conhecidos, graças a transitividade da ação do grupo de Weyl de $\mathfrak{so}(2m+2n+1)$ (que é $\cong \mathbb{Z}_2^{m+n} \rtimes \mathfrak{S}_{m+n}$). O número de classes de $W-$conjugação de conjugação de sistemas fundamentais para $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ é $|W(\mathfrak{so}(2m+2n+1))|/|W| = \binom{m+n}{m}$. Aqui, $W(\mathfrak{so}(2m+2n+1))$ denota o grupo de Weyl da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2m+2n+1)$.

A $\epsilon\delta-$sequência associada a um sistema fundamental (ou a um diagrama de Dynkin) para $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ é definida como em $\mathfrak{gl}(m, n)$.

4.2.4 Sistemas positivo e fundamental para $\mathfrak{spo}(2m, 2n)$

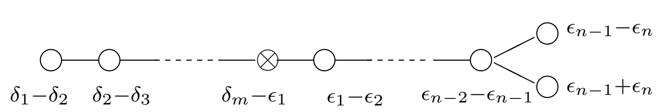
Agora nós consideraremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{spo}(2m, 2n)$, cujo sistema de raízes foi descrito na subseção 4.1.4. O sistema padrão positivo $\Phi^+ = \Phi_{\bar{0}}^+ \cup \Phi_{\bar{1}}^+$ correspondendo a subálgebra de Borel padrão é

$$\{\delta_i \pm \delta_j,\, 2\delta_p,\, \epsilon_k \pm \epsilon_\ell\} \cup \{\delta_p \pm \epsilon_q\},$$

onde $1 \leq i < j \leq m$, $1 \leq k < \ell \leq n$, $1 \leq p \leq m$ e $1 \leq q \leq n$, com o sistema fundamental sendo

$$\Pi = \{\delta_i - \delta_{i+1},\, \delta_m - \epsilon_1,\, \epsilon_k - \epsilon_{k+1},\, \epsilon_{n-1} + \epsilon_n \,|\, 1 \leq i \leq m-1,\ 1 \leq k \leq n-1\}.$$

O diagrama de Dynkin padrão correspondente para $\mathfrak{spo}(2m, 2n+1)$ é dado por



(4.2.7)

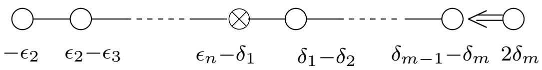
Outro sistema de raízes positivas muito usado em Φ é dado por

$$\{\delta_i \pm \delta_j,\, 2\delta_p,\, \epsilon_k \pm \epsilon_\ell\} \cup \{\epsilon_q \pm \delta_p\},$$

onde $1 \leq i < j \leq m$, $1 \leq k < \ell \leq n$, $1 \leq p \leq m$ e $1 \leq q \leq n$, com o sistema fundamental sendo

$$\{\epsilon_k - \epsilon_{k+1},\, \epsilon_n - \delta_1,\, \delta_i - \delta_{i+1},\, 2\delta_m \,|\, 1 \leq i \leq m-1,\ 1 \leq k \leq n-1\}.$$

O diagrama de Dynkin correspondente é



(4.2.8)

Como já tinhamos observado acima, existem (pelo menos) dois diagramas de Dynkin para $\mathfrak{spo}(2m, 2n)$ que têm formas diferentes. A classificação de todos os sistemas fundamentais para Φ de $\mathfrak{spo}(2m, 2n)$ é dividida nos dois casos abaixo. Como antes, temos $\epsilon_{\bar{i}} = \delta_i$.

1) Primeiramente, nós vamos classificar os sistemas fundamentais Π em Φ que não contém nenhuma raiz longa (isto é, uma raiz da forma $\pm 2\epsilon_{\overline{p}}$). Com a paridade ignorada, o subconjunto $\widetilde{\Phi} := \Phi \backslash \{\pm 2\epsilon_{\overline{p}} \,|\, 1 \leq p \leq m\}$ pode ser identificado com o sistema de raízes da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2m + 2n)$, cujos sistemas fundamentais são completamente conhecidos, novamente graças a transitividade da ação do grupo de Weyl de $\mathfrak{so}(2m+2n)$ (que é $\mathbb{Z}_2^{m+n-1} \rtimes \mathfrak{S}_{m+n}$). Observe que sistema positivo Φ^+ para Φ, que corresponde a Π, é completamente determinado pelo sistema positivo $\widetilde{\Phi} \cap \Phi^+$ de $\widetilde{\Phi}$ (e vice versa). Concluímos assim que os sistemas fundamentais para Φ que não contêm nenhuma raiz longa são exatamente os sistemas fundamentais para $\widetilde{\Phi}$. Contudo, nem todo sistema fundamental para $\widetilde{\Phi}$ da origem a um sistema fundamental de Φ. Para ser preciso, um sistema fundamental de Φ não pode conter um par de raízes da forma $\{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_{\overline{p}},\, \pm\epsilon_i \mp \epsilon_{\overline{p}}\}$, $i \neq \overline{p}$ e $1 \leq p \leq m$. Segue daí que existem $\frac{n}{(m+n)}|W(\mathfrak{so}(2m + 2n))|$ tais sistemas fundamentais de Φ, e sendo assim, o número de classes de $W-$conjugação para $\mathfrak{g}$, neste caso é $\frac{n}{(m+n)}|W(\mathfrak{so}(2m + 2n))|/|W| = \binom{m+n-1}{m}$.

2)Agora, iremos classificar os sistemas fundamentais Π que contém alguma raiz longa. Neste caso considere $\widehat{\Phi} := \Phi \cup \{2\epsilon_j,\, 1 \leq j \leq n\}$. Com a paridade ignorada, $\widehat{\Phi}$ pode ser identificado com o sistema de raízes de $\mathfrak{sp}(2m+2n)$, cujos sistemas fundamentais são completamente descritos. Observe que o sistema positivo Φ^+ para Φ que corresponde a Π é completamente determinado pelo sistema positivo $\widehat{\Phi}^+$ de $\widehat{\Phi}$ que contém Φ^+. Concluímos assim que os sistemas fundamentais para Φ, que contém alguma raiz longa são exatamente os sistemas fundamentais para $\widehat{\Phi}$, cuja raiz longa é da forma $\pm 2\epsilon_{\overline{p}}$. Segue daí que o número de classes de $W-$conjugação de tais sistemas para $\mathfrak{g}$ é $\frac{m}{m+n}|W(\mathfrak{sp}(2m + 2n))|/|W| = \binom{m+n-1}{n}$.

A $\epsilon\delta-$*sequência* para $\mathfrak{spo}(2m, 2n)$ associada a um sistema positivo é determinada como segue. Primeiro obtemos uma sequência de ϵ's e δ's assim como fizemos para $\mathfrak{spo}(2m, 2n + 1)$. Se esta sequência tem um ϵ como seu ultimo membro, então ela é a $\epsilon\delta-$sequência. Se o ultimo membro da sequência é um δ, então a $\epsilon\delta-$sequência é obtida desta sequência anexando um sinal ao ultimo ϵ.

Exemplo 4.2.4. Para $\mathfrak{spo}(4, 4)$, as $\epsilon\delta-$sequências $\epsilon\delta\delta\epsilon$, $\epsilon\delta\epsilon\delta$ e $\epsilon\delta(-\epsilon)\delta$ são distintas.

Note que se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, m)$, então uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{gl}(m, n)$ também é uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$, além disso, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$, onde $\mathfrak{h}$ denota uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

4.2.5 Classes de conjugação de sistemas fundamentais

Descreveremos agora a classificação das classes de $W-$conjugação dos sistemas fundamentais para as super álgebras de Lie que foram discutidas nas ultimas subseções via $\epsilon\delta-$sequências.

Proposição 4.2.5. Sejam Φ um sistema de raízes e W o grupo de Weyl para uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do tipo $\mathfrak{gl}$ ou $\mathfrak{osp}$. Então, as classes de $W-$conjugação de sistemas fundamentais em Φ estão em correspondência biunívoca com as $\epsilon\delta-$sequências. Em particular, existem $\binom{m+n}{m}$ classes de $W-$conjugação de sistemas fundamentais para $\mathfrak{gl}(m,n)$ e $\mathfrak{osp}(2m,2n+1)$, enquanto que existem $\binom{m+n}{m}+\binom{m+n-1}{n}$ classes de $W-$conjugação de sistemas fundamentais para $\mathfrak{osp}(2m,2n)$.

Observação 4.2.6. Os sistemas fundamentais e positivos para as super álgebras de Lie excepcionais também foram completamente listados em [Kac 1].

A partir da classificação dos sistemas fundamentais e positivos obtemos os seguintes resultados:

Proposição 4.2.7. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica, excluindo $\mathfrak{sl}(n,n)/\mathbb{k}\, I_{2n}$ e $\mathfrak{gl}(m,n)$. Seja também $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Então, qualquer sistema fundamental para o sistema de raízes de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ forma uma base de $\mathfrak{h}^*$. Para $\mathfrak{gl}(m,n)$, qualquer sistema fundamental é linearmente independente em $\mathfrak{h}^*$.

Lema 4.2.8. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica. Sejam também Π o sistema fundamental em um sistema positivo Φ^+, e α uma raiz ímpar e isotrópica em Φ^+. Então, existe $w \in W$ tal que $w(\alpha) \in \Pi$.

4.3 Reflexões ímpares e reflexões reais

Nesta seção, junto com as reflexões reais associadas a raízes pares como em álgebras de Lie semissimples, introduziremos as reflexões ímpares associadas a raízes simples, ímpares e isotrópicas. Ambas reflexões, pares e ímpares, permutam os sistemas fundamentais de um sistema de raízes.

Vimos que devido a existência de raízes ímpares, os sistemas fundamentais de um sistema de raízes Φ nem sempre são $W-$conjugados. Lembre que uma raíz $\alpha \in \Phi$ é isotrópica se $(\alpha|\alpha) = 0$, e uma raiz isotrópica deve ser ímpar. O seguinte lema tem um papel fundamental para a teoria de representações de super álgebras de Lie.

Lema 4.3.1. Sejam $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica e Π um sistema fundamental de um sistema positivo Φ^+. Seja também α uma raiz ímpar e isotrópica. Então,

$$\Phi^+_\alpha := \{-\alpha\} \cup \Phi^+ \setminus \{\alpha\} \tag{4.3.1}$$

é um novo sistema positivo cujo sistema simples fundamental correspondente Π_α é dado por

$$\Pi_\alpha = \{\beta \in \Pi \,|\, (\beta|\alpha) = 0,\, \beta \neq \alpha\} \cup \{\beta + \alpha \,|\, \beta \in \Pi,\, (\beta|\alpha) \neq 0\} \cup \{-\alpha\}. \tag{4.3.2}$$

4.3.1 Reflexões ímpares

Seja $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, onde $\mathfrak{n}^+$ corresponde ao sistema positivo Φ^+. Então, a nova subálgebra de Borel correspondendo a Φ^+_α como em (4.3.2), para uma raiz simples, ímpar e isotrópica α é dada por

$$\mathfrak{b}^\alpha := \mathfrak{h}\left(\bigoplus_{\beta\in\Phi^+_\alpha} \mathfrak{g}^\beta\right). \tag{4.3.3}$$

Observe que o lema 4.3.1 implica que $\mathfrak{b}_{\bar{0}} = \mathfrak{b}^\alpha_{\bar{0}}$. O processo de obter Π_α (resp. Φ^+_α ou $\mathfrak{b}^\alpha$) a partir de Π (resp. de Φ^+ ou $\mathfrak{b}$) será chamado de *reflexão ímpar* (com respeito a raiz α) e será denotado por r_α. Escreveremos

$$r_\alpha(\Pi) = \Pi_\alpha\,, \quad r_\alpha(\Phi^+) = \Phi^+_\alpha\,, \quad r_\alpha(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^\alpha. \tag{4.3.4}$$

Note que $r_{-\alpha}r_\alpha = 1$.

4.3.2 Reflexões reais

Pelo teorema 4.1.2, uma super álgebra de Lie básica $\mathfrak{g}$ admite uma forma bilinear não degenerada, par e supersimétrica $(\,|\,)$ que se restringe a uma forma não degenerada $(\,|\,)$ em $\mathfrak{h}$ e em $\mathfrak{h}^*$. Para uma raiz par (que é automaticamente não isotrópica), definimos a *reflexão real* r_α como sendo a função linear em $\mathfrak{h}^*$ dada por

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{(\lambda|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha\,, \quad \forall\,\lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Em particular, r_α preserva Φ, $\Phi_{\bar{0}}$ e $\Phi_{\bar{0}}$. O grupo gerado pelas reflexões reais r_α, para $\alpha \in \Phi_{\bar{0}}$, é precisamente o grupo de Weyl de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ (e portanto, por definição, é o grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$).

Para uma raiz simples e par α, devemos ter que $\alpha/2 \in \Phi$, isto é, $\alpha \in \bar{\Phi}_{\bar{0}}$ como definido em (4.1.2). Neste caso, (4.3.4) pode ser compreendida com Φ_α^+ como em (4.3.1), $\mathfrak{b}^\alpha$ como em (4.3.3) e Π_α como a imagem de Π sobre r_α.

Para uma raiz ímpar α tal que $2\alpha \in \Phi$, definimos a reflexão r_α como sendo a reflexão real $r_{2\alpha}$ associada a raiz 2α. Neste caso, é entendido que $\Pi_\alpha = r_\alpha(\Pi)$, e que

$$\Phi_\alpha^+ = \{-\alpha,\, -2\alpha\} \cup \Phi^+ \setminus \{\alpha,\, 2\alpha\} \tag{4.3.5}$$

é o novo sistema positivo associado a Π_α.

4.3.3 Reflexões e sistemas fundamentais

Proposição 4.3.2. Para dois sistemas fundamentais Π e Π' de uma super álgebra de Lie básica $\mathfrak{g}$, existe uma sequência consistindo de reflexões reais e reflexões ímpares $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tal que $r_k \ldots r_2 r_1(\Pi) = \Pi'$.

4.4 Teoria de peso máximo

Nesta seção classificaremos os módulos irredutíveis de dimensão finita para certas super álgebras de Lie solúveis, incluindo todas subálgebras de Borel. Isso será usado para desenvolver uma teoria de peso máximo para as super álgebras de Lie básicas.

4.4.1 Representações de super álgebras de Lie solúveis

Assim como em álgebras de Lie, uma super álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$ é chamada de *solúvel* se $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$ para algum $n \geq 1$, onde definimos indutivamente $\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$ e $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$.

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ uma super álgebra de Lie solúvel de dimensão finita tal que $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subseteq [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$. Dado $\lambda \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^*$ com $\lambda([\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]) = 0$, definimos o $\mathfrak{g}-$módulo $\mathbb{k}_\lambda = \mathbb{k}v_\lambda$ de dimensão 1, por

$$\begin{aligned} xv_\lambda &= \lambda(x)v_\lambda, \quad \forall\, x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}, \\ yv_\lambda &= 0, \quad \forall\, y \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}. \end{aligned}$$

Existe um isomorfismo linear canônico $(\mathfrak{g}_{\bar{0}}/[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}])^* \cong \{\lambda \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^* \,|\, \lambda([\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]) = 0\}$.

Lema 4.4.1. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ uma super álgebra de Lie solúvel de dimensão finita tal que $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subseteq [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$. Então, todo $\mathfrak{g}-$módulo irredutíveis de dimensão finita possui dimensão 1. Uma lista completa dos $\mathfrak{g}-$módulos irredutíveis de dimensão finita é dada por $\mathbb{k}_\lambda$, para $\lambda \in (\mathfrak{g}_{\bar{0}}/[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}])^*$.

Demonstração. Por construção, qualquer $\Bbbk_\lambda$ é um $\mathfrak{g}-$módulo. Observe também que qualquer $\mathfrak{g}-$módulo de dimensão 1 é isomorfo a $\Bbbk_\lambda$ para algum $\lambda \in (\mathfrak{g}_{\bar{0}}/[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}])^*$, pois λ é um homomorfismo e portanto par (lembre que $\Bbbk_{\bar{1}} = \{0\}$). Sendo assim, basta provarmos que todo todo $\mathfrak{g}-$módulo irredutível de dimensão finita possui dimensão 1.

A subálgebra par $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é solúvel, pois, $\mathfrak{g}$ é solúvel e obviamente $\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}^{(n)}$ para todo n. Aplicando o teorema de Lie para $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, temos que existe um vetor não nulo $v_\lambda \in V$ tal que $xv_\lambda = \lambda(x)v_\lambda$, $\forall\, x \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Aqui, $\lambda \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^*$ e $\lambda([\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]) = \{0\}$. Agora, pela reciprocidade de Frobenius temos que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \Bbbk_\lambda, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}}(\Bbbk_\lambda, V)$, sendo assim, a irredutibilidade de V implica que deve existir um homomorfismo sobrejetivo de $\mathfrak{g}$-módulos de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \Bbbk_\lambda \cong \wedge(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) \otimes \Bbbk_\lambda$ em V. Assim, para provar que V possui dimensão 1, é suficiente provar que $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \Bbbk_\lambda$ tem uma série de composição com fatores de composição de dimensão 1. Vamos construir explicitamente tal série de composição.

Suponha que $\dim(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) = n$. Pelo teorema de Lie, o $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulo $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ possui uma base ordenada $\{y_j \mid j = 1, \ldots, n\}$, tal que para todo $1 \leq i \leq n$

$$(\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_{\bar{0}}))(y_i) \subseteq \sum_{j=1}^{n} \Bbbk y_j\,, \quad (\mathrm{ad}[\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}])(y_i) \subseteq \sum_{j=i+1}^{n} \Bbbk y_j\,. \tag{4.4.1}$$

Seja $B_1 = \{1, y_1\}$, e defina indutivamente $B_k = \{B_{k-1}, B_{k-1}y_k\}$, para $2 \leq k \leq n$, onde $B_{k-1}y_k = \{by_k \mid b \in B_{k-1}\}$. Assim, $B_n v_\lambda$ é uma base ordenada para $U(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}_{\bar{0}}} \Bbbk_\lambda$, de cardinalidade 2^n. Denote esta base ordenada por $\{v_i, \ldots, v_{2^n}\}$ e considere $V_i = \bigoplus_{j=1}^{2^n} \Bbbk\, v_j$. Graças a (4.4.1), temos uma filtração de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}-$módulos

$$V = V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots \supseteq \cdots \supseteq V_{2^n} \supseteq \{0\}.$$

Note também que, para $1 \leq k, \ell \leq n$ e $i_1 < \cdots < i_\ell \leq n$,

$$y_k y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_\ell} v_\lambda = \begin{cases} [y_k, y_{i_1}] y_{i_2} \cdots y_{i_\ell} v_\lambda - y_{i_1} y_{i_k} y_{i_2} \cdots y_{i_\ell} v_\lambda, & \text{se } k \neq i_1, \\ \\ \frac{1}{2}[y_k, y_{i_1}] y_{i_2} \cdots y_{i_\ell} v_\lambda, & \text{se } k = i_1 \end{cases} \tag{4.4.2}$$

Usando a hipótese $[\mathfrak{g}_{\bar{1}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}] \subseteq [\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{0}}]$, segue de (4.4.1) e (4.4.2) que todo y_k deixa V_i invariante, e dessa forma cada V_i é um $\mathfrak{g}-$módulo. Logo, a filtração acima é uma série de composição com fatores de composição de dimensão 1, como queríamos.

□

4.4.2 Teoria de peso máximo para super álgebras de Lie básicas

Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica. Sejam também $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Cartan padrão e Φ o sistema de raízes. Seja $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ uma subálgebra de Borel de $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{b}$ e Φ^+ o sistema de raízes positivo associado. Note que a condição do lema 4.4.1 é satisfeita para a super álgebra de Lie solúvel $\mathfrak{b}$, pois temos que $\mathfrak{b}_{\bar{1}} = \mathfrak{n}_{\bar{1}}^+$, e

$$[\mathfrak{b}_{\bar{1}}, \mathfrak{b}_{\bar{1}}] = [\mathfrak{n}_{\bar{1}}^+, \mathfrak{n}_{\bar{1}}^+] \subseteq \mathfrak{n}_{\bar{0}}^+ = [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_{\bar{0}}^+] \subseteq [\mathfrak{b}_{\bar{0}}, \mathfrak{b}_{\bar{0}}].$$

Seja V uma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{g}$. Então, pelo lema 4.4.1 V contém um $\mathfrak{b}-$módulo de dimensão 1 que é da forma $\Bbbk_\lambda = \Bbbk v_\lambda$, para $\lambda \in \mathfrak{h}^* \cong (\mathfrak{b}/[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}])^*$. Isto é,

$$hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda, \;\; \forall\, h \in \mathfrak{h} \;\; \text{e} \;\; xv_\lambda = 0, \;\; \forall\, x \in \mathfrak{n}^+.$$

Daí, pelo teorema de PBW e pela irredutibilidade de V, obtemos que $V = U(\mathfrak{n}^-)v_\lambda$ e portanto temos uma decomposição em espaços de pesos

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V^\mu \,, \tag{4.4.3}$$

onde o espaço de $\mu-$peso V^μ é dado por

$$V^\mu := \{v \in V \,|\, hv = \mu(h)v \,, \ \ \forall\, h \in \mathfrak{h}\}.$$

Por (4.4.3), $V^\mu = \{0\}$ a menos que $\lambda - \mu$ seja uma combinação $\mathbb{Z}_+-$linear de raízes positivas. O peso λ é chamado de *peso* $\mathfrak{b}-$*máximo* de V, o espaço $\Bbbk v_\lambda$ é chamado de *espaço de peso* $\mathfrak{b}-$*máximo*, e o vetor v_λ é chamado de um *vetor de peso* $\mathfrak{b}-$*máximo* para V. Quando não há motivos para confusão, nós simplesmente dizemos peso máximo, tirando o $\mathfrak{b}$ (no próximo capítulo trabalharemos somente com a subálgebra de Borel padrão, então não haverá motivos para confusão). Assim, provamos o seguinte resultado:

Proposição 4.4.2. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica com uma subálgebra de Borel $\mathfrak{b}$. Então, todo $\mathfrak{g}-$módulo irredutível de dimensão finita é um módulo de peso $\mathfrak{b}-$máximo.

Capítulo 5

Super álgebras de funções

Neste capítulo classificaremos os módulos irredutíveis de dimensão finita das super álgebras de funções para o caso em que $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie básica ou $\mathfrak{sl}(n,n)$, $n \geq 1$. Mostraremos que todas elas são (produtos tensoriais de) módulos de avaliação generalizados e são parametrizados por um certo conjunto de funções com suporte finito. Além disso, para o caso em que a parte par de $\mathfrak{g}$ for uma álgebra de Lie semissimples, mostraremos que tais módulos são de fato (produtos tensorial de) módulos de avaliação. Por outro lado, se a parte par de $\mathfrak{g}$ não for semissimples, introduziremos uma generalização natural de um módulo de Kac e mostraremos que todos módulos irredutíveis de dimensão finita são quocientes de tais módulos de Kac. As referências para esse capítulo foram [Sav] e [NSS].

A partir de agora usaremos a notação introduzida na seção A.1. Trataremos por álgebra, uma álgebra comutativa e associativa. Se quisermos nos referir a uma álgebra que não satisfaça essas condições, deixaremos explicito dizendo exatamente que álgebra é essa (por exemplo: álgebra de Lie, álgebra universal envelopante). Todas as super álgebras de Lie denotadas por $\mathfrak{g}$ possuem dimensão finita.

5.1 Definições básicas

Nesta seção introduziremos as definições fundamentais para o desenvolvimento da teoria, assim como, o principal objeto de estudo deste trabalho: as super álgebras de funções.

Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e A uma álgebra. Considere o espaço vetorial $\mathfrak{g} \otimes A$ equipado com a $\mathbb{Z}_2-$graduação

$$(\mathfrak{g} \otimes A)_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \otimes A, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_2$$

e cuja multiplicação é obtida estendendo por linearidade o colchete que é definido pontualmente por

$$[x_1 \otimes f_1, x_2 \otimes f_2] = [x_1, x_2] \otimes f_1 f_2,$$

para elementos quaisquer $x_1,\ x_2 \in \mathfrak{g}$, $f_1,\ f_2 \in A$. Isso faz de $\mathfrak{g} \otimes A$ uma super álgebra de Lie. De fato,

Anti-simetria:

$$\begin{aligned}
[x_1 \otimes f_1, x_2 \otimes f_2] &= [x_1, x_2] \otimes f_1 f_2 \\
&= (-1)^{|x_1||x_2|}[x_2, x_1] \otimes f_2 f_1 \\
&= (-1)^{|x_1 \otimes f_1||x_2 \otimes f_1|}[x_2, x_1] \otimes f_2 f_1 \\
&= (-1)^{|x_1 \otimes f_1||x_2 \otimes f_1|}[x_2 \otimes f_2, x_1 \otimes f_1].
\end{aligned}$$

Identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned}
[x_1 \otimes f_1, [x_2 \otimes f_2, x_3 \otimes f_3]] &= [x_1 \otimes f_1, [x_2, x_3] \otimes f_2 f_3] \\
&= [x_1, [x_2, x_3]] \otimes f_1 f_2 f_3 \\
&= ([[x_1, x_2], x_3] + (-1)^{|x_1||x_2|}[x_2, [x_1, x_3]]) \otimes f_2 f_1 f_3 \\
&= [[x_1, x_2], x_3] \otimes f_1 f_2 f_3 + (-1)^{|x_1 \otimes f_1||x_2 \otimes f_2|}[x_2, [x_1, x_3]] \otimes f_1 f_2 f_3 \\
&= [[x_1 \otimes f_1, x_2 \otimes f_2], x_3 \otimes f_3] + \\
&\quad (-1)^{|x_1 \otimes f_1||x_2 \otimes f_2|}[x_2 \otimes f_2, [x_1 \otimes f_1, x_3 \otimes f_3]].
\end{aligned}$$

Chamamos de uma *super álgebra de funções* qualquer super álgebra da forma $\mathfrak{g} \otimes A$. A motivação para esse nome vem do caso em que A é uma álgebra de funções em uma variedade algébrica X.

Definição 5.1.1. Seja V um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo e denote por Ω o conjunto de todos os ideais J de A que satisfazem $(\mathfrak{g} \otimes J)V = \{0\}$. Definimos o ideal

$$\mathrm{Ann}_A(V) := \sum_{J \in \Omega} J.$$

Dito de outra forma $\mathrm{Ann}_A(V)$ é o maior ideal I de A com a propriedade $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$.

Lema 5.1.2. Se $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie tal que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (note que $\mathfrak{sl}(n,n)$, $n \geq 1$ satisfaz tal propriedade) e V é um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo, então

$$\mathrm{Ann}_A(V) = \{f \in A \,|\, (\mathfrak{g} \otimes f)V = 0\}.$$

Demonstração. Seja $I = \{f \in A \,|\, (\mathfrak{g} \otimes f)V = 0\}$. Note que se J é um ideal de A com a propriedade $(\mathfrak{g} \otimes J)V = 0$, então $J \subseteq I$. Logo, resta provar que I é um ideal de A. Obviamente I é um subespaço de A. Para mostrar que I é um ideal, tome $f \in I$, $g \in A$ e veja que, como $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, temos que

$$(\mathfrak{g} \otimes fg)V = [\mathfrak{g} \otimes f, \mathfrak{g} \otimes g]V = (\mathfrak{g} \otimes f)(\mathfrak{g} \otimes g)V + (\mathfrak{g} \otimes g)(\mathfrak{g} \otimes f)V = 0.$$

Assim, $fg \in I$. Portanto, I é um ideal de A.

□

Definição 5.1.3. Seja V um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo. Definimos o *suporte* de V por

$$\mathrm{Supp}_A(V) := \mathrm{Supp}(\mathrm{Ann}_A(V)).$$

Se $\mathrm{Ann}_A(V)$ é um ideal radical, dizemos que V tem *suporte reduzido.*

5.2 Módulos quase-finitos e de peso máximo

A menos que seja dito o contrário, nesta seção suporemos que A é uma álgebra e que a super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é básica ou $\mathfrak{sl}(n,n)$, $n \geq 1$. Para tais super álgebras de lie, tome a decomposição triangular

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$$

(ver o capítulo anterior) para algum sistema fundamental fixo. Considere também $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ a subálgebra de Borel associada.

Observe que se $\mathfrak{a}$ é uma super álgebra de Lie abeliana, então $\mathfrak{a}\otimes A$ também será. De fato,

$$[\mathfrak{a}\otimes A, \mathfrak{a}\otimes A] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\otimes AA = \{0\}.$$

Em particular, se tomarmos $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}$, onde $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, temos que $\mathfrak{h}\otimes A$ é uma álgebra de Lie abeliana.

No decorrer do texto identificaremos a super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com a subálgebra $\mathfrak{g}\otimes \mathbb{k}$ de $\mathfrak{g}\otimes A$.

Definição 5.2.1. Seja V um $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo. Dizemos que V é um *módulo de peso* se sua restrição a $\mathfrak{g}$ for um módulo de peso. Ou seja, se

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V^\lambda, \quad \text{onde} \quad V^\lambda = \{v\in V \mid hv = \lambda(h)v, \forall\, h\in\mathfrak{h}\}.$$

As funções lineares $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ para as quais $V^\lambda\neq\{0\}$ são chamadas de pesos de V, o subespaço V^λ é chamado de espaço de peso associado ao peso λ e um elemento não nulo $v\in V^\lambda$ é chamado de vetor de peso associado ao peso λ.

Veja que como estamos identificando $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{k}$, temos por definição que

$$hv := (h\otimes 1)v, \ \ \forall\, h\in\mathfrak{h}.$$

Definição 5.2.2. Um $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo de peso V é dito *quase-finito* se a dimensão de todo espaço de peso for finita.

Definição 5.2.3. Seja V um $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo. Um vetor $v\in V\setminus\{0\}$ é dito um *vetor de m-peso máximo* $\psi\in(\mathfrak{h}\otimes A)^*$, se

$$(h\otimes a)v = \psi(h\otimes a)v, \ \forall\, h\otimes a\in\mathfrak{h}\otimes A \ \ \text{e} \ \ (\mathfrak{n}^+\otimes A)v = 0. \tag{5.2.1}$$

Dizemos que V é um $\mathfrak{g}\otimes A-$*módulo de* m-*peso máximo* se existe um elemento não nulo $v\in V$ que além de satisfazer (5.2.1), também possui a propriedade de gerar V, ou seja,

$$U(\mathfrak{g}\otimes A)v = V.$$

Observação 5.2.4. Seja V um $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo e $\alpha\in\mathfrak{h}^*$ é uma raiz da super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $x_\alpha\otimes a\in\mathfrak{g}^\alpha\otimes A$ e $v\in V^\lambda$ para algum peso $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, então para qualquer $h\in\mathfrak{h}$ temos que

$$\begin{aligned} h(x_\alpha\otimes a)v &= (x_\alpha\otimes a)hv + [h, x_\alpha\otimes a]v \\ &= \lambda(h)(x_\alpha\otimes a)v + \alpha(h)(x_\alpha\otimes a)v \\ &= (\lambda+\alpha)(h)(x_\alpha\otimes a)v. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$(\mathfrak{g}^\alpha\otimes A)V^\lambda\subseteq V^{\lambda+\alpha}. \tag{5.2.2}$$

Sejam $\{x_{-\alpha_1},\dots,x_{-\alpha_s}, x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_s}, h_1,\dots,h_n\}$ e $\{x_{-\alpha_{s+1}},\dots,x_{-\alpha_n}, x_{\alpha_{s+1}},\dots,x_{\alpha_n}\}$ bases de $\mathfrak{g}_{\bar 0}$ e $\mathfrak{g}_{\bar 1}$ respectivamente, onde $x_{\alpha_i}\in\mathfrak{g}^{\alpha_i}$, $h_j\in\mathfrak{h}$, para $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq k$. Seja $\{a_i\mid i\in I\}$ uma base de A. Assim, pelo teorema de PBW os monômios da forma

$$x = (x_{-\alpha_1}\otimes a_{i_1})^{p_{1i_1}}\dots(h_1\otimes a_{i_1})^{q_{1i_1}}\dots(x_{\alpha_n}\otimes a_{i_n})^{r_{ni_n}}, \tag{5.2.3}$$

com $p_{ij}, q_{ij} \geq 0$, $0 \leq r_{ij} \leq 1$ e $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$, formam uma base para $U(\mathfrak{g} \otimes A)$. Logo, graças a relação (5.2.2), concluímos que $xv \in V^{\mu}$, onde

$$\mu = \lambda + ((r_{nm} + \ldots + r_{n1})\alpha_n + \ldots + (p_{1m} + \ldots + p_{11})(-\alpha_1)).$$

Assim, as relações (5.2.2) e (5.2.3) implicam que se V é um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo gerado por um vetor de peso $v \in V$, então

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V^{\mu},$$

ou seja, V é um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo de peso.

Em particular, todo $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo de m-peso máximo é gerado por um vetor de m-peso e portanto tais módulos são módulos de peso.

Note que se λ é o peso máximo de um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo V de m-peso máximo $\psi \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$, então $\lambda = \psi|_{\mathfrak{h}}$. Além disso, $\dim V^{\lambda} = 1$. De fato, se $v \in V$ é um vetor de m-peso máximo $\psi \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$, segue que para qualquer $w \in V^{\lambda}$, existe $x \in U(\mathfrak{g} \otimes A)$ tal que $xv = w$. Mas o teorema de PBW junto com a observação 5.2.4, implicam que podemos escrever $x \in U(\mathfrak{h} \otimes A)$. Logo, $w = xv = \psi(x)v$, sendo assim $\dim(V^{\lambda}) = 1$.

Lema 5.2.5. Todo $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita é um módulo de m-peso máximo.

Demonstração. Considerando V como um $\mathfrak{h}-$módulo vemos que V é um $\mathfrak{h}-$módulo de peso. Além disso, deve existir um peso máximo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, pois a dimensão de V é finita. Como estamos supondo que λ é o peso máximo de V, a observação 5.2.4 implica que

$$(\mathfrak{n}^+ \otimes A)V^{\lambda} = \{0\}$$

e também que podemos considerar V^{λ} como um $\mathfrak{h} \otimes A-$módulo. Sendo assim, como a álgebra de Lie $\mathfrak{h} \otimes A$ é abeliana, existe um elemento não nulo $w \in V^{\lambda}$ tal que $(\mathfrak{h} \otimes A)w = \Bbbk\, w$. Segue agora que w deve gerar V pois tal $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo é irredutível. Logo, V é de m-peso máximo.

□

Seja $\psi \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$ e considere a subálgebra de Borel $\mathfrak{b} \otimes A$ agindo em $\Bbbk$ como segue

$$(h \otimes a)k = \psi(h \otimes a)k\,, \quad \forall\, h \otimes a \in \mathfrak{h} \otimes A \ \text{ e } \ (\mathfrak{n}^+ \otimes A)k = 0, \ \forall\, k \in \Bbbk.$$

Dessa forma $\Bbbk$ é um $\mathfrak{b} \otimes A-$módulo, denote esse módulo por $\Bbbk_{\psi}$. Tomando o $U(\mathfrak{g} \otimes A)-$módulo induzido

$$M(\psi) = U(\mathfrak{g} \otimes A) \otimes_{U(\mathfrak{b} \otimes A)} \Bbbk_{\psi},$$

temos que por construção, tal módulo é de m-peso máximo ψ.

Veremos que um módulo como $M(\psi)$ possui um único submódulo próprio maximal (com a propriedade de ser próprio). Antes disso precisamos do seguinte lema:

Lema 5.2.6. Seja V é um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo de peso, isto é,

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V^{\mu}.$$

Se $U \subseteq V$ é um submódulo de V, então

$$U = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (U \cap V^{\mu})$$

Demonstração. Seja $v \in U$, então

$$v = u_1 + \cdots + u_s$$

onde $0 \neq u_j \in V^\mu$, para $j = 1, \ldots, s$, além disso, os pesos μ_j são dois a dois distintos. Como temos aí uma quantidade finita de pesos, existe $h \in \mathfrak{h}$ tal que $\mu_j(h) \neq 0$ para todo j. Aplicando reiteradamente h em v, obtemos as decomposições

$$h^k v = \mu_1(h)^k u_1 + \cdots + \mu_s(h)^k u_s$$

em que a matriz quadrada formada pelos coeficientes de $\{v, hv, \ldots, h^{s-1}v\}$ é inversível. Portanto, esse conjunto é linearmente independente no subespaço gerado po $\{u_1, \ldots, u_s\}$ e daí segue que cada u_j é combinação linear das imagens de v pelas iteradas de h e, como $v \in U$, conclui-se que $u_j \in U$ para $j = 1, \ldots, s$. Isso mostra que

$$U = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (U \cap V^\mu)$$

e, como a inclusão contrária é imediata, o lema está demonstrado.

□

Proposição 5.2.7. Todo $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo de m-peso máximo possui único submódulo próprio maximal (com a propriedade de ser próprio) e portanto único quociente irredutível.

Demonstração. Seja V um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo de m-peso máximo. Então, pelo que já foi visto anteriormente, V é um módulo de peso, ou seja,

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V^\mu.$$

Considere $W \subseteq V$, o subespaço gerado por todos submódulos próprios de V. Note que W também é um submódulo próprio de V. Com efeito, se $V' \subseteq V$ é um submódulo próprio, então

$$V' \subseteq \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V^\mu.$$

De fato, pelo lema anterior,

$$V' = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (V' \cap V^\mu)$$

e se $V' \cap V^\lambda \neq \{0\}$, então $v \in V'$. No entanto, por construção, $V = U(\mathfrak{g} \otimes A)v$ e daí que $V' = V$, contradizendo o fato que V' é próprio. Isso mostra portanto que

$$V' \subseteq \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V^\mu.$$

Logo,

$$W \subseteq \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V^\mu$$

isto é, W é um submódulo próprio de V. Por construção, este submódulo é único e maximal (com relação a propriedade de ser próprio). Por fim, o $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo quociente V/W é irredutível, pois se U é um submódulo de V/W, então $\pi^{-1}(U)$ é um submódulo de V, onde

$$\pi : V \longrightarrow V/W$$

é a projeção canônica. Pela definição de W, temos que $\pi^{-1}(U) \subseteq W$ ou $\pi^{-1}(U) = V$, ou seja, $U = 0$ ou V/W, mostrando assim que V/W é um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível.

□

Definição 5.2.8. Se $N(\psi)$ denota o único submódulo próprio maximal de $M(\psi)$, definimos

$$V(\psi) := M(\psi)/N(\psi).$$

Note que qualquer $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de m-peso máximo, e portanto, pelo lema 5.2.5, qualquer $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita, é isomorfo a $V(\psi)$ para algum $\psi \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$.

Lema 5.2.9. Seja V um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo de m-peso máximo $\psi \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$. Então, $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}\otimes A}(V) \cong \Bbbk$.

Demonstração. Seja $v \in V$ um vetor de m-peso máximo ψ. Em particular, v é um vetor de peso máximo $\lambda = \psi|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$. Assim, se $\phi \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}\otimes A}(V)$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{n}^+ \otimes A\right) \phi(v) &= \phi\left((\mathfrak{n}^+ \otimes A)v\right) = 0; \\ (h \otimes a)\phi(v) &= \phi\left((h \otimes a)v\right) = \psi(h \otimes a)\phi(v), \ \forall\, h \otimes a \in \mathfrak{h} \otimes A; \\ U\left(\mathfrak{g} \otimes A\right) \phi(v) &= \phi\left(U(\mathfrak{g} \otimes A)v\right) = \phi(V). \end{aligned}$$

Logo, $\phi(V)$ é um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo de m-peso máximo, com m-peso máximo ψ e um vetor de m-peso máximo $\phi(v)$. Mas como $\dim(V^\lambda) = 1$, segue que $\phi(v) = cv$, para algum $c \in \Bbbk$. Portanto,

$$\phi(w) = cw, \ \forall\, w \in V.$$

Como a escolha de ϕ foi arbitrária, temos que $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}\otimes A}(V) = \Bbbk\,\mathrm{id} \cong \Bbbk$.

□

Proposição 5.2.10. Seja V um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de m-peso máximo. Considere $\rho : U(\mathfrak{g} \otimes A) \longrightarrow \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ a representação correspondente da álgebra envelopante. Sejam $f \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$ e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. Então, existe $x \in U(\mathfrak{g} \otimes A)$, tal que $xv_i = f(v_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. Em particular, se V tem dimensão finita temos $\rho(U(\mathfrak{g} \otimes A)) = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$.

Demonstração. Como V é um $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo de m-peso máximo, o lema 5.2.9 garante que $\mathrm{End}_{U(\mathfrak{g}\otimes A)}(V) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}\otimes A}(V) \cong \Bbbk$. Portanto, o resultado segue diretamente da proposição 2.3.17.

□

Sejam $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2$ super álgebras de Lie básicas, ou $\mathfrak{sl}(n,n)$, $n \geq 1$ e A^1, A^2 álgebras (lembre que estamos considerando que as álgebras são comutativas e associativas). Para cada $i = 1, 2$, considere uma decomposição triangular $\mathfrak{n}^{i,-} \oplus \mathfrak{h}^i \oplus \mathfrak{n}^{i,+}$ de $\mathfrak{g}^i$. Defina as seguintes subálgebras de $\widetilde{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g}^1 \otimes A^1) \oplus (\mathfrak{g}^2 \otimes A^2)$

$$\widetilde{\mathfrak{h}} = \left(\mathfrak{h}^1 \otimes A^1\right) \oplus \left(\mathfrak{h}^2 \otimes A^2\right), \quad \widetilde{\mathfrak{n}}^{\pm} = \left(\mathfrak{n}^{\pm,1} \otimes A^1\right) \oplus \left(\mathfrak{n}^{\pm,2} \otimes A^2\right).$$

Se V^i é um $\mathfrak{g}^i \otimes A^i-$módulo, então podemos considerar o $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo $V = V^1 \otimes V^2$ que é definido na subseção 2.3.2. Além disso, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2.11. Se com as notações acima V^i é um $\mathfrak{g}^i \otimes A^i-$módulo irredutível de m-peso máximo $\psi_i \in (\mathfrak{h}^i \otimes A^i)^*$ para cada $i = 1, 2$, então V é um $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo irredutível de m-peso máximo $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \in (\widetilde{\mathfrak{h}})^*$, onde $\Psi_i \in (\widetilde{\mathfrak{h}})^*$ é a extensão natural de ψ_i para $\widetilde{\mathfrak{h}}$, isto é,

$$\Psi_i(h_1 \otimes a_1, h_2 \otimes a_2) = \psi_i(h_i \otimes a_i), \ \forall\, (h_1 \otimes a_1, h_2 \otimes a_2) \in \widetilde{\mathfrak{h}} \text{ e } i = 1, 2.$$

Demonstração. Pelo teorema 2.3.18 temos que V é $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo irredutível. Considere agora para $i=1,2$, um vetor de m-peso máximo $v^i \in V^i$ gerando V^i e veja que

$$\begin{aligned} U(\widetilde{\mathfrak{g}})(v^1 \otimes v^2) &= U(\mathfrak{g}^1 \otimes A^1)v^1 \otimes U(\mathfrak{g}^2 \otimes A^2)v^2 \\ &= V^1 \otimes V^2; \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{n}}^+(v^1 \otimes v^2) &= \big((\mathfrak{n}^{1,+} \otimes A^1)v^1\big) \otimes v^2 + v^1 \otimes \big((\mathfrak{n}^{2,+} \otimes A^2)v^2\big) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Finalmente, considere um elemento qualquer $\widetilde{h} = (h_1 \otimes a_1, h_2 \otimes a_2) \in \widetilde{\mathfrak{h}}$, então

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(v^1 \otimes v^2) &= \big((h_1 \otimes a_1)v^1\big) \otimes v^2 + v^1 \otimes \big((h_2 \otimes a_2)v^2\big) \\ &= \psi_1(h_1 \otimes a_1)v^1 \otimes v^2 + \psi_2(h_2 \otimes a_2)v^1 \otimes v^2 \\ &= \Psi_1(\widetilde{h})v^1 \otimes v^2 + \Psi_2(\widetilde{h})v^1 \otimes v^2 \\ &= \Psi(\widetilde{h})v^1 \otimes v^2. \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Assim, expressões (5.2.4), (5.2.5) e (5.2.6) acima nos mostram que $v^1 \otimes v^2 \in V$ é um vetor de m-peso máximo $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ que gera V. Logo, V é um $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo de m-peso máximo $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$.

□

Proposição 5.2.12. Todo $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo irredutível de dimensão finita é da forma $V^1 \otimes V^2$, onde V^i é um $\mathfrak{g}^i \otimes A^i-$módulo irredutível, para $i = 1, 2$.

Demonstração. Suponha que V é um $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo irredutível de dimensão finita. Pelo lema 5.2.5, temos que V é um módulo de m-peso máximo. Então, $V \cong V(\Psi)$, para algum $\Psi \in \left(\widetilde{\mathfrak{h}}\right)^* \cong (\mathfrak{h}^1 \otimes A^1)^* \oplus (\mathfrak{h}^2 \otimes A^2)^*$ (esse isomorfismo é dado por $\Psi \mapsto \psi_1 + \psi_2$, onde $\psi_i = \Psi|_{\mathfrak{h}^i \otimes A^i}$). Note agora que pela proposição 5.2.11, $V(\psi_1) \otimes V(\psi_2)$ é um $\widetilde{\mathfrak{g}}-$módulo irredutível (de dimensão finita) cujo m-peso máximo é $\Psi_1 + \Psi_2$, onde Ψ_i é a extensão natural de ψ_i a $\widetilde{\mathfrak{h}}$, ou seja, $\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi$. Logo, $V(\Psi) \cong V(\psi_1) \otimes V(\psi_2)$, demonstrando assim o resultado.

□

Proposição 5.2.13. O produto tensorial de dois $\mathfrak{g} \otimes A-$módulos irredutíveis de m-peso máximo com suportes disjuntos é irredutível.

Demonstração. Suponha que V^1 e V^2 são $\mathfrak{g} \otimes A-$módulos irredutíveis de m-peso máximo com suportes disjuntos. Considere $I_i = \mathrm{Ann}_A(V^i)$ e $\rho_i : \mathfrak{g} \otimes A \longrightarrow \mathrm{End}(V^i)$ a correspondente representação sobre V^i, para $i = 1, 2$. A representação $\rho_1 \otimes \rho_2$ se fatora da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{g} \otimes A & \overset{\Delta}{\hookrightarrow} & (\mathfrak{g} \otimes A) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A) & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & (\mathfrak{g} \otimes A/I_1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A/I_2) \\ x \otimes a & \longmapsto & (x \otimes a,\, x \otimes a) & \longmapsto & (x \otimes (a + I_1),\, x \otimes (a + I_2)). \end{array} \tag{5.2.7}$$

No sentido que

$$\rho_1 \otimes \rho_2(x \otimes a) = \overline{\rho_1 \otimes \rho_2} \circ \pi \circ \Delta(x \otimes a),$$

onde $\overline{\rho_1 \otimes \rho_2}$ é a representação de $(\mathfrak{g} \otimes A/I_1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A/I_2)$ em $V^1 \otimes V^2$, induzida pela ação de $(\mathfrak{g} \otimes A) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A)$ sobre $V^1 \otimes V^2$, ou seja,

$$\overline{\rho_1 \otimes \rho_2}(x \otimes (a + I_1), y \otimes (b + I_2))(v \otimes w) = (x \otimes a, y \otimes b)(v \otimes w).$$

Note que $\overline{\rho_1 \otimes \rho_2}$ está bem definida, pois $I_i = \mathrm{Ann}_A(V^i)$, $i = 1, 2$.

Como os suportes de I_1 e I_2 são disjuntos, temos pelo lema A.1.5 que $I_1 \cap I_2 = I_1 I_2$. Portanto, $A/I_1I_2 \cong (A/I_1) \oplus (A/I_2)$. Com efeito, sobre estas condições o lema A.1.5 implica que $A = I_1 + I_2$, daí

$$A/I_1 = (I_1 + I_2)/I_1 \cong I_2/(I_1 \cap I_2).$$

Analogamente $A/I_2 \cong I_1/(I_1 \cap I_2)$. Assim

$$\begin{array}{rcl} A/(I_1I_2) & = & (I_1 + I_2)/(I_1I_2) \\ & \cong & (I_1/(I_1 \cap I_1I_2)) \oplus (I_2/(I_2 \cap I_1I_2)) \\ & = & (I_1/I_1 \cap I_2) \oplus (I_2/I_1 \cap I_2) \\ & \cong & (A/I_1) \oplus (A/I_2). \end{array}$$

Dessa forma, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \otimes A \arrow[r, hook, "\Delta"] \arrow[d, two heads, "\tilde{\pi}"'] & (\mathfrak{g} \otimes A) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A) \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ \mathfrak{g} \otimes A/I_1I_2 \arrow[r, "\cong"] & (\mathfrak{g} \otimes A/I_1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A/I_2) \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde $\tilde{\pi}(x \otimes a) = x \otimes (a + I_1I_2)$ e a função $\mathfrak{g} \otimes A/I_1I_2 \longrightarrow (\mathfrak{g} \otimes A/I_1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A/I_2)$ é o isomorfismo obtido através de $A/I_1I_2 \cong (A/I_1) \oplus (A/I_2)$. Denotaremos tal isomorfismo por ϕ. Como o diagrama acima é comutativo temos que

$$\pi \circ \Delta = \tilde{\pi} \circ \phi.$$

Portanto, a função $\pi \circ \Delta$ é sobrejetiva, ou seja, a decomposição (5.2.7) é sobrejetiva. Além disso, a proposição 5.2.11 garante que $V^1 \otimes V^2$ é irredutível como módulo sobre $(\mathfrak{g} \otimes A/I_1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A/I_2)$. Logo, $V^1 \otimes V^2$ também será um módulo irredutível sobre $\mathfrak{g} \otimes A$.

□

Corolário 5.2.14. Sejam $\psi_1, \ldots, \psi_n \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$ e $I_i = \mathrm{Ann}_A(V(\psi_i))$. Suponha que $\mathrm{Supp}_A(I_i) \cap \mathrm{Supp}_A(I_j) = \emptyset$ se $i \neq j$. Então,

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i\right) \cong \bigotimes_{i=1}^{n} V(\psi_i).$$

Demonstração. Basta provarmos o resultado para $n = 2$, pois o caso geral segue por indução. Se v^i é um vetor de m-peso máximo de $V(\psi_i)$ para cada $i = 1, 2$, então

$$\begin{array}{rcl} (\mathfrak{n}^+ \otimes A)(v^1 \otimes v^2) & = & ((\mathfrak{n}^+ \otimes A)v^1) \otimes v^2 + v^1 \otimes ((\mathfrak{n}^+ \otimes A)v^2) \\ & = & 0; \end{array} \tag{5.2.8}$$

$$\begin{array}{rcl} (h \otimes a)(v^1 \otimes v^2) & = & \big((h \otimes a)v^1\big) \otimes v^2 + v^1 \otimes \big((h \otimes a)v^2\big) \\ & = & \psi_1(h \otimes a)v^1 \otimes v^2 + \psi_2(h \otimes a)v^1 \otimes v^2 \\ & = & (\psi_1 + \psi_2)(h \otimes a)v^1 \otimes v^2, \ \forall\, h \otimes a \in \mathfrak{h} \otimes A; \end{array} \tag{5.2.9}$$

$$\begin{array}{rcl} U(\mathfrak{g} \otimes A)(v^1 \otimes v^2) & = & U((\mathfrak{g} \otimes A/I_1) \oplus (\mathfrak{g} \otimes A/I_2))(v^1 \otimes v^2) \\ & = & (U(\mathfrak{g} \otimes A/I_1)v^1) \otimes (U(\mathfrak{g} \otimes A/I_2)v^2) \\ & = & V(\psi_1) \otimes V(\psi_2); \end{array} \tag{5.2.10}$$

Logo, as expressões (5.2.8), (5.2.9) e (5.2.10) implicam que $V(\psi_1)\otimes V(\psi_2)$ é um $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo de m-peso máximo $\psi_1+\psi_2$, gerado por $v^1\otimes v^2$. Assim, somente nos resta provar que $V(\psi_1)\otimes V(\psi_2)$ é irredutível, mas isso segue da proposição 5.2.13, uma vez que, por construção cada $V(\psi_i)$ é irredutível para $i=1,2$.

□

Corolário 5.2.15. O produto tensorial de $\mathfrak{g}\otimes A-$módulos irredutíveis de dimensão finita com suporte disjuntos é irredutível.

Demonstração. Segue diretamente do lema 5.2.5 e da proposição 5.2.13.

□

Lema 5.2.16. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie e V um $\mathfrak{g}-$módulo irredutível tal que $\mathfrak{i}v=\{0\}$, para algum ideal $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$ e $v\in V\setminus\{0\}$. Então, $\mathfrak{i}V=\{0\}$.

Demonstração. Seja
$$W=\{w\in V\,/\,\mathfrak{i}w=0\}.$$
Por hipótese, $v\in W$ então $W\neq 0$. Sejam $w\in W$, $x\in\mathfrak{g}$ e $i\in\mathfrak{I}$ daí $i(xw)=(ix)w=jw=0$ pois $ix=j\in\mathfrak{i}$, logo W é um submódulo de V. Como V é irredutível, temos que $W=V$, como queríamos.

□

Lema 5.2.17. Seja $\psi\in(\mathfrak{h}\otimes A)^*$ e I é um ideal de A. Então, $\psi(\mathfrak{h}\otimes I)=\{0\}$ se e só se $(\mathfrak{g}\otimes I)V(\psi)=\{0\}$.

Demonstração. Se $(\mathfrak{g}\otimes I)V(\psi)=\{0\}$, em particular $0=(h\otimes a)V(\psi)=\psi(h\otimes a)V(\psi)$ para qualquer $h\otimes a\in\mathfrak{h}\otimes I$. Logo, $\psi(\mathfrak{h}\otimes I)=\{0\}$. Vamos agora provar a outra direção.

Considere $\psi\in(\mathfrak{h}\otimes A)^*$ e suponha que $\psi(\mathfrak{h}\otimes I)=\{0\}$. Seja $v\in V(\psi)$ um vetor de m-peso máximo que gera $V(\psi)$. Note que, como I é um ideal de A, $\mathfrak{g}\otimes I$ é um ideal de $\mathfrak{g}\otimes A$, sendo assim, pelo lema 5.2.16 basta provarmos que $(\mathfrak{g}\otimes I)v=0$. Pelo fato de v ser um vetor de peso máximo, temos $(\mathfrak{n}^+\otimes I)v=\{0\}$, e por hipótese $0=(h\otimes a)V(\psi)=\psi(h\otimes a)V(\psi)$ para qualquer $h\otimes a\in\mathfrak{h}\otimes I$, ou seja, $(\mathfrak{h}\otimes I)v=\{0\}$.

Lembre que para $\alpha=\sum n_i\alpha_i$, onde $n_i\in\mathbb{N}$ e α_i é uma raiz simples de $\mathfrak{g}$, a altura de α é
$$\mathrm{ht}(\alpha):=\sum n_i.$$
Vamos provar por indução sobre a altura de α que $(\mathfrak{g}^{-\alpha}\otimes I)v=\{0\}$. Se $\mathrm{ht}(\alpha)=0$, então $\alpha=0$ e como $\mathfrak{g}^0=\mathfrak{h}$ (ver proposição 3.5.4, item a), temos $(\mathfrak{g}^{-\alpha}\otimes I)v=(\mathfrak{h}\otimes I)v=\{0\}$. Suponha agora que o resultado é válido se $\mathrm{ht}(\alpha)\leq m$, para algum $m\geq 0$. Fixe $\alpha\in\Phi^+$ com $\mathrm{ht}(\alpha)=m+1$. Daí
$$\begin{aligned}(\mathfrak{n}^+\otimes A)(\mathfrak{g}^{-\alpha}\otimes I)v &= (\mathfrak{n}^+\otimes A)(\mathfrak{g}^{-\alpha}\otimes I)v\\ &= ([\mathfrak{n}^+,\mathfrak{g}^{-\alpha}]\otimes AI)v\\ &= ([\mathfrak{n}^+,\mathfrak{g}^{-\alpha}]\otimes I)v\\ &= \{0\},\end{aligned}\tag{5.2.11}$$
onde a última igualdade segue pela hipótese de indução, uma vez que um elemento de $[\mathfrak{n}^+,\mathfrak{g}^{-\alpha}]$ está em $\mathfrak{g}^\gamma$, com $\gamma\in\Phi^-$ e $\mathrm{ht}(\gamma)<\mathrm{ht}(\lambda)$ ou $\gamma\in\Phi^+$. Assim, $(\mathfrak{g}^{-\alpha}\otimes I)v=\{0\}$, pois supondo que existe um elemento não nulo $w=(x_{-\alpha}\otimes a)v$, para algum $x_{-\alpha}\otimes a\in\mathfrak{g}^{-\alpha}\otimes I$, pela observação 5.2.4, temos que $w\in V(\psi)^{\mu+\alpha}$, onde $\mu=\psi|_{\mathfrak{h}}$ e, além disso, como $V(\psi)$ é um módulo irredutível temos também que w gera $V(\psi)$. Logo, pela equação (5.2.11), w é um vetor de m-peso máximo, o que é uma contradição uma vez que por construção o m-peso máximo é de $V(\psi)$ é ψ e $\mathrm{ht}(\alpha)>0$.

□

O próximo resultado nos dará uma caracterização dos $\mathfrak{g} \otimes A-$módulos quase-finitos de m-peso máximo.

Teorema 5.2.18. Seja $V = V(\psi)$ um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de m-peso máximo $\psi \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$. Então, as seguintes condições são equivalentes:

a) V é um módulo quase-finito.

b) Existe um ideal I de codimensão finita de A tal que $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$.

c) Existe um ideal I de codimensão finita de A tal que $\psi(\mathfrak{h} \otimes I) = 0$.

Se A é finitamente gerada, então as condições acima também são equivalentes a:

d) O módulo V tem suporte finito.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Seja $\lambda = \psi|_{\mathfrak{h}}$ o peso máximo de V. Para cada raiz positiva α de $\mathfrak{g}$, considere a seguinte função linear:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha : A & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V^\lambda \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha}, V^{\lambda-\alpha}). \\ a & \longmapsto & \varphi_\alpha(a)(v \otimes u) \longmapsto (u \otimes a)v \end{array}$$

Defina $I_\alpha := \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha)$. Note que I_α é um subespaço de A de codimensão finita, pois

$$A/I_\alpha = A/\mathrm{Ker}(\varphi_\alpha) \cong \mathrm{Im}(\varphi_\alpha) \subseteq \mathrm{Hom}(V^\lambda \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha}, V^{\lambda-\alpha}),$$

e $\dim(\mathrm{Hom}(V^\lambda \otimes \mathfrak{g}^{-\alpha}, V^{\lambda-\alpha})) < \infty$, uma vez que $\dim(V^\lambda) = 1$, $\dim(\mathfrak{g}^{-\alpha}) \leq \dim(\mathfrak{g}) < \infty$ e $\dim(V^{\lambda-\alpha}) < \infty$, sendo V um módulo quase-finito. Temos também que I_α é um ideal de A. Com efeito, como $\alpha \neq 0$ podemos escolher $h \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(h) \neq 0$. Então, para quaisquer $g \in A$, $f \in I_\alpha$, $v \in V^\lambda$ e $u \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ temos que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (h \otimes g)(u \otimes f)v \\ & = & [h \otimes g, u \otimes f]v + (u \otimes f)(h \otimes g)v \\ & = & ([h,u] \otimes gf)v + (u \otimes f)(h \otimes g)v \\ & = & -\alpha(h)(u \otimes gf)v + (u \otimes f)(h \otimes g)v. \end{array}$$

Como $v \in V^\lambda$, a observação 5.2.4, implica que $(h \otimes g)v \in V^\lambda$ e portanto $(h \otimes g)v = kv$ para algum $k \in \mathbb{k}$. Agora, como $f \in I_\alpha = \mathrm{Ker}(\varphi_\alpha)$ temos que

$$(u \otimes f)(h \otimes g)v = k(u \otimes f)v = k\,(\varphi_\alpha(f)(v \otimes u)) = 0.$$

Logo, o fato que $\alpha(h) \neq 0$ implica que $(u \otimes gf)v = 0$. Como as escolhas de $v \in V^\lambda$ e de $u \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ foram arbitrárias, segue que $gf \in I_\alpha$. Portanto, I_α é um ideal de A.

Seja $I = I_{\alpha_1} \cap I_{\alpha_2} \cap \ldots \cap I_{\alpha_n}$, onde $\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$ são as raízes positivas de $\mathfrak{g}$. Portanto,

$$\dim(A/I) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(A/I_{\alpha_i}) < \infty,$$

ou seja, I é um ideal de A de codimensão finita. Em particular, isso implica que $\mathfrak{g} \otimes I$ é um ideal de $\mathfrak{g} \otimes A$. Vamos provar agora que $(\mathfrak{g} \otimes I)v = \{0\}$.

Seja $u \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ para alguma raiz positiva α, assim se $f \in I$, temos que $(u \otimes f)v = f(v \otimes u) = 0$, o que implica $(\mathfrak{n}^- \otimes I)v = \{0\}$. Por outro lado, do fato que λ é um peso máximo de V, temos $(\mathfrak{n}^+ \otimes A)v = 0$. Finalmente, veja que $\mathfrak{h} \otimes I \subseteq [\mathfrak{n}^+ \otimes A, \mathfrak{n}^- \otimes I]$, Logo, $(\mathfrak{h} \otimes I)v = 0$. Concluímos assim que $(\mathfrak{g} \otimes I)v = 0$. Portanto, como $\mathfrak{g} \otimes I$ é um ideal de $\mathfrak{g} \otimes A$, segue do lema 5.2.16 que $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Suponha que (b) seja verdade e tome v um vetor de peso máximo de V. Então, para todo $h \otimes f \in \mathfrak{h} \otimes I$, $\psi(h \otimes f)v = (h \otimes f)v = 0$. Logo, $\psi(\mathfrak{h} \otimes I) = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Suponha (c) válido. O lema 5.2.17 implica que $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$ pois $\psi(\mathfrak{h} \otimes I) = 0$ por hipótese. Assim, podemos considerar V como um $\mathfrak{g} \otimes (A/I)-$módulo, onde a ação de $\mathfrak{g} \otimes (A/I)$ sobre V é induzida pela ação de $\mathfrak{g} \otimes A$. Daí

$$\begin{aligned} V(\psi) &= U(\mathfrak{g} \otimes A)v \\ &\cong U(\mathfrak{g} \otimes (A/I))v \\ &\cong U(\mathfrak{n}^- \otimes (A/I))v, \end{aligned}$$

onde os isomorfismos são devido ao teorema de PBW. Considere agora $\{x_{-\alpha_1}, \ldots, x_{-\alpha_n}\}$ uma base de $\mathfrak{n}^-$ e $\{a_1, \ldots, a_m\}$ uma base de A/I. Assim $\{x_{-\alpha_i} \otimes a_j \,|\, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ é uma base de $\mathfrak{n}^- \otimes (A/I)$, daí pelo teorema de PBW os monômios da forma

$$(x_{-\alpha_1} \otimes a_1)^{k_{11}} \ldots (x_{-\alpha_1} \otimes a_m)^{k_{1m}} \ldots (x_{-\alpha_n} \otimes a_1)^{k_{n1}} \ldots (x_{-\alpha_n} \otimes a_m)^{k_{nm}}$$

com $k_{ij} \geq 0$ formam uma base para $U(\mathfrak{n}^- \otimes (A/I))$. Sabemos que

$$(x_{-\alpha_1} \otimes a_1)^{k_{11}} \ldots (x_{-\alpha_n} \otimes a_m)^{k_{nm}} v \in V_\mu$$

onde $\mu = \lambda - ((k_{11} + \ldots k_{1m})\alpha_1 + \ldots + (k_{n1} + \ldots k_{nm})\alpha_n)$. Por outro lado, se γ é um peso arbitrário de V, então $\gamma = \lambda - (l_1\alpha_1 + \ldots + l_n\alpha_n)$ com $l_i \geq 0$. Assim, qualquer elemento da base de V_γ é da forma $(x_{-\alpha_1} \otimes a_1)^{k_{11}} \ldots (x_{-\alpha_n} \otimes a_m)^{k_{nm}} v$, onde $k_{i1} + \ldots + k_{im} = l_i$, pois $V(\psi) \cong U(\mathfrak{n}^- \otimes (A/I))v$. Mas k_{ij} é um inteiro não negativo e portanto a quantidade de combinações de m números dessa forma tais que sua soma é l_i é no máximo $(l_i)^m$, ou seja, a quantidade de tais combinações é finita. Logo, $\dim(V_\gamma) < \infty$, para qualquer peso γ. Segue então que $V(\psi)$ é um módulo quase-finito.

Vamos provar agora que (b) $\Leftrightarrow$ (d). Temos por definição que $\mathrm{Supp}_A(V) = \mathrm{Supp}(\mathrm{Ann}_A(V))$. Como $I = \mathrm{Ann}_A(V)$ é o maior ideal de A que satisfaz $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$, (b) é verdade se e só se $\mathrm{Ann}_A(V)$ tem codimensão finita. Como A é finitamente gerado, segue do corolário A.1.4 que $\mathrm{Ann}_A(V)$ tem codimensão finita se e só se este tem suporte finito.

$\square$

Corolário 5.2.19. Considere V um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita. Então, existe um ideal I de A de codimensão finita tal que $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$.

Demonstração. Como V é um módulo irredutível de dimensão finita, o lema 5.2.5 implica que $V = V(\psi)$ para algum $\psi \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$. Logo, o resultado desejado segue diretamente do teorema 5.2.18.

$\square$

5.3 Módulos de avaliação generalizados

Nesta seção, iremos supor que A é uma álgebra finitamente gerada.

Sejam $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell \in \mathrm{MaxSpec}(A)$, tais que $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ se $i \neq j$, e tome $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}_+$. Considere, o seguinte homomorfismo de álgebras:

$$\begin{aligned} \Theta : \mathfrak{g} \otimes A &\longrightarrow (\mathfrak{g} \otimes A/\mathfrak{m}_1^{n_1}) \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g} \otimes A/\mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}) \\ x \otimes a &\longmapsto (x \otimes (a + A/\mathfrak{m}_1^{n_1}), \ldots, x \otimes (a + A/\mathfrak{m}_\ell^{n_\ell})) \end{aligned}$$

e, pelo corolário A.1.6 temos que $\mathrm{Ker}(\Theta) = \mathfrak{g} \otimes (\mathfrak{m}_1^{n_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}) = \mathfrak{g} \otimes \Pi_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i^{n_i}$. Portanto,

$$(\mathfrak{g} \otimes A)/\left(\mathfrak{g} \otimes \Pi_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i^{n_i}\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} \left(\mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}_i^{n_i})\right), \tag{5.3.1}$$

onde o isomorfismo acima é o induzido por Θ e será denotado por $\bar{\Theta}$. Definimos a *função de avaliação generalizada* pela seguinte composição:

$$\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{m}_l^{n_\ell}} : \mathfrak{g} \otimes A \twoheadrightarrow (\mathfrak{g} \otimes A)/\left(\mathfrak{g} \otimes \Pi_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i^{n_i}\right) \overset{\bar{\Theta}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{\ell} \left(\mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}_i^{n_i})\right). \tag{5.3.2}$$

Se $n_1 = \cdots = n_\ell = 1$, então chamamos tal composição de *função de avaliação*. Se $M = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell\} \subseteq \mathrm{MaxSpec}(A)$, onde $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ se $i \neq j$, denotaremos a função $\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell}$ por ev_M.

Sempre que considerarmos um conjunto M como acima estamos supondo que seus elementos são disjuntos dois a dois.

Definição 5.3.1. Sejam $\mathfrak{m}_i, \ldots, \mathfrak{m}_\ell \in \mathrm{MaxSpec}(A)$ dois a dois distintos, $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}_+$ e V_i um $\mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}_i^{n_i})-$módulo de dimensão finita cuja representação correspondente é dada por ρ_i. Então, a composição

$$\mathfrak{g} \otimes A \xrightarrow{\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}}} \bigoplus_{i=1}^{\ell} \left(\mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}_i^{n_i})\right) \xrightarrow{\otimes_{i=1}^{\ell} \rho_i} \mathrm{End}\left(\bigotimes_{\mathrm{i=1}}^{\ell} \mathrm{V_i}\right)$$

é chamada de uma *representação de avaliação generalizada* de $\mathfrak{g} \otimes A$ e será denotada por

$$\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}}(\rho_1, \ldots, \rho_\ell).$$

O módulo correspondente a esta representação é chamado de *módulo de avaliação generalizado* e o denotaremos por

$$\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}}(V_1, \ldots, V_\ell).$$

Se $n_1 = \cdots = n_\ell = 1$, chamamos tais representações e seus módulos correspondentes de *representações de avaliação* e *módulos de avaliação*, respectivamente.

Se $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(A)$, então temos que $A/\mathfrak{m}$ é um corpo. Considere o seguinte isomorfismo de corpos:

$$\begin{aligned} \mathbb{k} &\longrightarrow A/\mathfrak{m}, \\ \lambda &\longmapsto \lambda \bar{1} \end{aligned}$$

onde $\bar{1}$ é a imagem do elemento unidade de A pela projeção canônica. Seja $\sigma : A/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathbb{k}$ o isomorfismo inverso. Assim, temos uma identificação natural dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}) &\longrightarrow \mathfrak{g}, \\ x \otimes \bar{a} &\longmapsto \sigma(\bar{a})x \end{aligned}$$

onde $\bar{a}$ denota a imagem de $a \in A$ pela projeção canônica em $A/\mathfrak{m}$. Sendo assim, se $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ é uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$, podemos pensar em ρ como uma representação de $\mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m})$, via essa identificação, ou seja, $\rho(x \otimes \bar{a}) = \rho(\sigma(\bar{a})x)$. Portanto, se $M = \{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_\ell\} \subseteq \mathrm{MaxSpec}(A)$ e para cada $\mathfrak{m}_i \in M$ $\rho_{\mathfrak{m}_i} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{V}_{\mathfrak{m}_\mathrm{i}})$ é uma representação de dimensão finita de $\mathfrak{g}$. Podemos pensar em tais representações como representações de $\mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}_i)$, como discutido acima, e então considerar $\mathrm{ev}_M(\rho_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in M} = \mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_\ell}(\rho_{\mathfrak{m}_1}, \dots, \rho_{\mathfrak{m}_\ell})$.

Exemplo 5.3.2. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie qualquer e $A = \mathbb{C}[t]$ o anel de polinômios do corpo dos números complexos. Sabemos que se $\mathfrak{m}$ é um ideal máximal em $\mathbb{C}[t]$, então este é gerado por um polinômio irredutível, isto é, um polinômio da forma $(t - z)$ para $z \in \mathbb{C}$. A função

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[t]/\mathfrak{m} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \overline{p(t)} & \longmapsto & p(z) \end{array}$$

define um isomorfismo. Portanto, a função de avaliação associada a este isomorfismo é dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ev}_\mathfrak{m} : \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t] & \longrightarrow & \mathfrak{g} \otimes (\mathbb{C}[t]/\mathfrak{m}) \cong \mathfrak{g}. \\ x \otimes p(t) & \longmapsto & p(z)x \end{array}$$

Observação 5.3.3. Note que

$$\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1^{n_1}, \dots, \mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}}(\rho_1, \dots, \rho_\ell) = \bigotimes_{i=1}^{\ell} \mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_i^{n_i}}(\rho_i).$$

Ou seja, representações de avaliação generalizadas são produtos tensoriais de representações de avaliação generalizadas. Logo, Se $M_1, \dots, M_n$ são conjuntos dois a dois disjuntos de $\mathrm{MaxSpec}(A)$, o produto tensorial entre representações de avaliação generalizadas $\mathrm{ev}_{M_1}(\rho_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in M_1}, \dots, \mathrm{ev}_{M_n}(\rho_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in M_n}$ é novamente uma representação de avaliação generalizada.

Proposição 5.3.4. Suponha que $\mathfrak{g}$ é básica ou $\mathfrak{sl}(n, n)$, $n \geq 1$. Então,

a) Um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita é um módulo de avaliação generalizado se e só se este tem suporte finito.

b) Um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita é um módulo de avaliação se e só se este tem suporte finito e reduzido.

Demonstração. Seja ρ uma representação irredutível de $\mathfrak{g} \otimes A$. Suponha que ρ é uma representação de avaliação generalizada, ou seja, $\rho = \mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1^{n_1}, \dots, \mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}}(\rho_1, \dots, \rho_\ell)$ para $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_\ell \in \mathrm{MaxSpec}(A)$ dois a dois distintos, $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_+$ e representações $\rho_1, \dots, \rho_\ell$. Seja

$$I = \prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i^{n_i}.$$

Note que $\mathrm{Supp(I)} = \{\mathfrak{m}_\mathrm{i}, \dots, \mathfrak{m}_\ell\}$ e $\rho(\mathfrak{g} \otimes I) = 0$, ou seja, $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(\rho)$, portanto $\mathrm{Ann}_A(\rho)$ tem suporte finito. Logo, por definição ρ tem suporte finito. Suponha agora que ρ é uma representação de avaliação, isto é, $n_1 = \cdots = n_\ell = 1$, dessa forma $\prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i$ é um ideal radical, pois $\sqrt{I} = \cap_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_\ell = I$. Assim, provamos uma das direções de (a) e (b). Reciprocamente, suponha que um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita possua suporte finito, ou seja, que $\rho(\mathfrak{g} \otimes I) = 0$, onde I é um ideal de A com suporte finito. Se Supp(I) $= \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell\}$, então $\sqrt{I} = \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_\ell$ e como A é finitamente gerado e portanto Noetheriano, segue do lema A.1.7 que I contém uma potência do seu radical, ou seja, $\prod_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i^n \subseteq I$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, podemos fatorar ρ da seguinte maneira:

$$\mathfrak{g} \otimes A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} (\mathfrak{g} \otimes A)/(g \otimes \Pi_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i^n) \xrightarrow{\bar{\Theta}} \bigoplus_{i=1}^{\ell} (\mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}_i^n))$$

(no sentido que $x \otimes a$ agindo em um elemento é a mesma coisa que $\bar{\Theta} \circ \pi(x \otimes a)$ agindo nesse elemento). Daí, como ρ é irredutível, o lema 5.2.12 garante que existem representações ρ_i das super álgebras $\mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}_i^n)$, para $i = 1, \ldots, \ell$, tais que $\rho = \otimes_{i=1}^{\ell} \mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_i^n} = \mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1^n, \ldots, \mathfrak{m}_\ell^n}(\rho_1, \ldots, \rho_\ell)$. Portanto, ρ é uma representação de avaliação generalizada. Se $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$ para algum ideal radical, então podemos tomar $n = 1$ acima e concluir que ρ é uma representação de avaliação. Completamos assim a prova na direção que faltava, de ambos os itens.

□

Observação 5.3.5. Na proposição 4.9 de [NSS], é provado que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, $M \subseteq \mathrm{MaxSpec}(A)$ é um subconjunto finito e $\rho_\mathfrak{m} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{V}_\mathfrak{m})$ é uma representação irredutível de dimensão finita para cada $\mathfrak{m} \in M$, então a representação de avaliação $\mathrm{ev}_M(\rho_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in M}$ é uma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{g} \otimes A$. Contudo, isso não é necessariamente verdade no super contexto.

Daremos uma caracterização para as classes de isomorfismos das representações de avaliação de $\mathfrak{g} \otimes A$. Para fixar notação, denote por $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ o conjunto das classes de isomorfismo das representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{g}$. Por conveniência, a classe da representação trivial será denotada por 0.

Definição 5.3.6. Seja $\Psi : \mathrm{MaxSpec}(A) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ uma função. O suporte de Ψ, denotado por $\mathrm{Supp}(\Psi)$ é o conjunto de todos elementos $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(A)$ para os quais $\Psi(\mathfrak{m}) \neq 0$. Sabendo disso, defina

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = \{\Psi : \mathrm{MaxSpec}(A) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathfrak{g}) \,|\, \mathrm{Supp}(\Psi) < \infty\}.$$

Observe que se $\rho \cong \rho'$, então $\mathrm{ev}_\mathfrak{m}(\rho) \cong \mathrm{ev}_\mathfrak{m}(\rho')$. De fato, seja $\varphi : V \longrightarrow V'$ um isomorfismo entre as representações $\rho : \mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ e $\rho' : \mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(V')$. Então, $\varphi \circ \rho(x \otimes \bar{a}) = \rho'(x \otimes \bar{a}) \circ \varphi$ para qualquer elemento $x \otimes \bar{a} \in \mathfrak{g} \otimes (A/\mathfrak{m})$, onde $\bar{a}$ é a imagem de $a \in A$ pela projeção canônica em $A/\mathfrak{m}$. Assim, note que para qualquer elemento $x \otimes a \in \mathfrak{g} \otimes A$ vale o seguinte:

$$\varphi \circ \mathrm{ev}_\mathfrak{m}(\rho)(x \otimes a) = \varphi \circ \rho(x \otimes \bar{a}) = \rho'(x \otimes \bar{a}) \circ \varphi = \mathrm{ev}_\mathfrak{m}(\rho')(x \otimes a) \circ \varphi,$$

ou seja, as representações $\mathrm{ev}_\mathfrak{m}(\rho)$ e $\mathrm{ev}_\mathfrak{m}(\rho')$ são isomorfas. Portanto, para $[\rho] \in \mathcal{R}(\mathfrak{g})$ podemos definir $\mathrm{ev}_\mathfrak{m}[\rho] = [\mathrm{ev}_\mathfrak{m}(\rho)]$. Para um subconjunto finito $M \subseteq \mathrm{MaxSpec}(A)$ e representações $\rho_\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ com $\mathfrak{m} \in M$, defina $\mathrm{ev}_M([\rho_\mathfrak{m}])_{\mathfrak{m} \in M} = [\mathrm{ev}_M(\rho_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in M}]$.

Definição 5.3.7. Se $\Psi \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$, então definimos

$$\mathrm{ev}_\Psi := \mathrm{ev}_M(\Psi(\mathfrak{m}))_{\mathfrak{m} \in M}$$

onde $M = \mathrm{Supp}(\Psi)$. Se $\Psi \equiv 0$, defina ev_Ψ como sendo a classe de isomorfismo da representação trivial.

Proposição 5.3.8. A função $\Psi \longmapsto \mathrm{ev}_\Psi$ de $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ a valores nas classes de isomorfismo das representações de avaliação de $\mathfrak{g} \otimes A$ é injetora.

Demonstração. Suponha que $\Psi \neq \Psi' \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$. Então, existe $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(A)$ tal que $\Psi(\mathfrak{m}) \neq \Psi'(\mathfrak{m})$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\Psi(\mathfrak{m}) \neq 0$. Seja

$$n = (\dim(\mathrm{ev}_\Psi))/(\dim(\Psi(\mathfrak{m})), \quad n' = (\dim(\mathrm{ev}_{\Psi'}))/(\dim(\Psi'(\mathfrak{m})),$$

onde a dimensão da classe de isomorfismo de uma representação é simplesmente a dimensão de qualquer representante dessa classe e $n' = \dim(\mathrm{ev}_{\Psi'})$ se $\Psi'(\mathfrak{m}) = 0$. Observe que pela observação 5.3.3, n e n' são inteiros positivos. Suponha agora que $\mathrm{Supp}(\Psi) \cup \mathrm{Supp}(\Psi') = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k\}$, onde $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1$ e considere ideal de A dado por

$$I = \mathfrak{m}_2 \cdots \mathfrak{m}_k.$$

Assim, $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \otimes I$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g} \otimes A$ tal que $\mathrm{ev}_\mathfrak{m}(\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{g}$ e $\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_j}(\mathfrak{a}) = \{0\}$ se $j = 2, \ldots, k$. Então,

$$\mathrm{ev}_\Psi|_\mathfrak{a} = \underbrace{\Psi(\mathfrak{m}) \oplus \cdots \oplus \Psi(\mathfrak{m})}_{n \text{ vezes}}, \quad \mathrm{ev}_{\Psi'}|_\mathfrak{a} = \underbrace{\Psi'(\mathfrak{m}) \oplus \cdots \oplus \Psi'(\mathfrak{m})}_{n' \text{ vezes}}.$$

Mas $\Psi(\mathfrak{m}) \neq \Psi'(\mathfrak{m})$, sendo assim $\mathrm{ev}_\Psi \neq \mathrm{ev}_{\Psi'}$. Note que estamos usando que a restrição da classe de isomorfismo de uma representação é a classe de isomorfismo da restrição de qualquer representante desta classe, e que a soma direta das classes de isomorfismo é a classe de isomorfismo da soma direta de quaisquer representantes de cada classe.

□

Proposição 5.3.9. Suponha que $\mathfrak{g}$ é básica ou $\mathfrak{sl}(n,n)$, $n \geq 1$. Então, A representação ev_Ψ é irredutível para todo $\Psi \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$. Logo, a função $\Psi \longmapsto \mathrm{ev}_\Psi$ é uma bijeção entre $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ e o conjunto das classes de isomorfismo das representações de avaliação irredutíveis de $\mathfrak{g} \otimes A$.

Demonstração. Seja $\Psi \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ tal que $\mathrm{Supp}(\Psi) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell\}$ e para cada $i = 1, \ldots, \ell$, $\Psi(\mathfrak{m}_i) = [\rho_{\mathfrak{m}_i}]$, onde $\rho_{\mathfrak{m}_i}$ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$. Assim, se $M = \mathrm{Supp}(\Psi)$ temos que

$$\mathrm{ev}_\Psi = \mathrm{ev}_M(\Psi(\mathfrak{m}))_{\mathfrak{m} \in M} = \mathrm{ev}_M([\rho_\mathfrak{m}])_{\mathfrak{m} \in M} = [\mathrm{ev}_M(\rho_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in M}]$$

e pela observação 5.3.3, $\mathrm{ev}_M(\rho_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in M} = \bigotimes_{i=1}^k \mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_i}(\rho_{\mathfrak{m}_i})$. Por outro lado, cada $\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_i}(\rho_{\mathfrak{m}_i})$ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g} \otimes A$ e $\mathrm{Supp}(\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_\mathrm{i}}(\rho_\mathrm{i})) \cap \mathrm{Supp}(\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_\mathrm{j}}(\rho_\mathrm{j})) = \emptyset$ se $i \neq j$, uma vez que por construção $\mathrm{Supp}(\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_\mathrm{i}}(\rho_\mathrm{i})) = \mathfrak{m}_\mathrm{i}$. Logo, o corolário 5.2.15 junto com a proposição 5.3.8 garantem o resultado desejado.

□

5.3.1 Representações de avaliação das álgebras de Lie redutivas

Definição 5.3.10. Suponha que $\mathfrak{z}$ é uma álgebra de Lie abeliana de dimensão finita. Defina $\mathcal{L}(\mathfrak{z})$ como sendo o conjunto dos funcionais lineares em $\mathfrak{z} \otimes A$ com suporte finito. Equivalentemente

$$\mathcal{L}(\mathfrak{z}) = \{\theta \in (\mathfrak{z} \otimes A)^* \mid \theta(\mathfrak{z} \otimes I) = 0 \text{ para algum ideal } I \text{ de } A \text{ com suporte finito}\}.$$

Para $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(A)$ tome

$$\mathcal{L}_\mathfrak{m}(\mathfrak{z}) = \{\theta \in (\mathfrak{z} \otimes A)^* \mid \theta(\mathfrak{z} \otimes \mathfrak{m}^\ell) = 0 \text{ para } \ \ell \gg 0\}$$

o subespaço dos funcionais lineares de $(\mathfrak{l} \otimes A)^*$ que se anulam em $\mathfrak{z} \otimes \mathfrak{m}^\ell$ para algum ℓ suficientemente grande. Note que também podemos ver tal conjunto como sendo o conjunto dos funcionais cujo suporte é $\{\mathfrak{m}\}$.

Lema 5.3.11. Por conveniência de notação denote MaxSpec(A) por Max. Então,

$$\bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}} \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{z}) \cong \mathcal{L}(\mathfrak{z}).$$

Demonstração. Usaremos as seguintes notações: $\mathcal{L}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{L}_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{z})$ e $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{z})$. Veja que $\mathcal{L}_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathcal{L}$ pois $\mathrm{Supp}(\mathfrak{m}^{\ell}) = \{\mathfrak{m}\}$ para qualquer $\ell > 0$, então podemos definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}} \mathcal{L}_{\mathfrak{m}} &\longrightarrow \mathcal{L}. \\ (\theta_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}} &\longmapsto \sum_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}} \theta_{\mathfrak{m}} \end{aligned}$$

Qualquer elemento da imagem de φ pode ser escrito como uma soma finita $\sum_{i=1}^{n} \theta_{\mathfrak{m}_i}$, onde $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ se $i \neq j$ e $\theta_{\mathfrak{m}_i} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{m}_i}$. Para cada $i = 1, \ldots, n$ tome $\ell_i \in \mathbb{N}$ tal que $\theta_{\mathfrak{m}_i}(\mathfrak{z} \otimes \mathfrak{m}_i^{\ell_i}) = 0$ e considere $I = \Pi_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^{\ell_i}$. Então, podemos fatorar $\sum_{i=1}^{n} \theta_{\mathfrak{m}_i}$ como

$$\mathfrak{z} \otimes A \twoheadrightarrow (\mathfrak{z} \otimes A)/(\mathfrak{z} \otimes I) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathfrak{z} \otimes A/\mathfrak{m}_i^{\ell_i}) \rightarrow \mathbb{k},$$

(no sentido que $\sum_{i=1}^{n} \theta_{\mathfrak{m}_i}(x\otimes a) = \sum_{i=1}^{n} \theta_{\mathfrak{m}_i}(x\otimes(a+\mathfrak{m}_1^{\ell_1})+\cdots+x\otimes(a+\mathfrak{m}_n^{\ell_n}))$ para qualquer $x\otimes a \in \mathfrak{z}\otimes A$) onde $\theta_{\mathfrak{m}_i}$ é não nulo somente no i-ésimo termo da soma. Logo, $\varphi((\theta_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}\in \mathrm{M}}) \neq 0$ se $(\theta_{\mathfrak{m}})_{m\in \mathrm{M}} \neq 0$, mostrando assim que φ é injetiva.

Se $\theta \in \mathcal{L}$ então podemos fatorá-lo como

$$\mathfrak{z} \otimes A \twoheadrightarrow \mathfrak{z} \otimes A/I,$$

para algum ideal I de A com suporte finito. O fato que o suporte de I é finito junto com o lema A.1.7, implicam que existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^{\ell} \subseteq I$, onde $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ são ideais maximais distintos de A. Assim, θ pode se fatorar por $(\mathfrak{z} \otimes A) \big/ \left(\mathfrak{z} \otimes \left(\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^{\ell}\right)\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathfrak{z} \otimes A/\mathfrak{m}_i^{\ell})$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, considere $\theta_i = \theta \circ \pi_i$, onde $\pi_i : \mathfrak{z} \otimes A \twoheadrightarrow \mathfrak{z} \otimes A/\mathfrak{m}_i^{\ell}$ é a projeção canônica. Note que cada $\theta_i \in \mathcal{L}_{\mathfrak{m}_i}$ e que $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = \theta$. Logo, φ é sobrejetiva e portanto um isomorfismo.

□

Classificaremos agora as representações de avaliação de dimensão finita de $\mathfrak{l}\otimes A$, onde $\mathfrak{l}$ é uma álgebra de Lie redutiva. Lembre que como $\mathfrak{l}$ é redutiva, podemos decompô-la como $\mathfrak{l} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{z}$, onde $\mathfrak{s} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ e $\mathfrak{z}$ é o centro de $\mathfrak{l}$. Com essa notação temos o seguinte resultado:

Proposição 5.3.12. Todas as representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{l}\otimes A \cong (\mathfrak{z}\otimes A)\oplus(\mathfrak{s}\otimes A)$ são da forma $\theta \otimes \rho$, onde $\theta \in (\mathfrak{z} \otimes A)^*$ e ρ é uma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{s} \otimes A$.

Demonstração. Seja $\widetilde{\rho}$ uma representação irredutível e de dimensão finita de $\mathfrak{l}$ em um espaço vetorial V. Como $\mathfrak{z}$ é o centro de $\mathfrak{l}$ temos que para qualquer elemento $z \otimes f \in \mathfrak{z} \otimes A$, $\widetilde{\rho}(z \otimes f)$ comuta com $\widetilde{\rho}(x \otimes g)$ para qualquer $x \otimes g \in \mathfrak{s} \otimes A$. Assim, pelo lema de Schur $\widetilde{\rho}(z \otimes f)v = \lambda_{z\otimes f}v$, onde $\lambda_{z\otimes f} \in \mathbb{k}$ para todo $z \otimes f \in \mathfrak{z} \otimes A$. Defina $\theta \in (\mathfrak{z} \otimes A)^*$ tal que $\theta(z \otimes f) = \lambda_{z\otimes f}$, para todo $z \otimes f \in \mathfrak{z} \otimes A$. Dessa forma, concluímos que a representação $\widetilde{\rho}$ é irredutível se e só sua restrição a $\mathfrak{s} \otimes A$ for irredutível, denote essa restrição por ρ. Vamos considerar agora a representação de dimensão 1 de $\mathfrak{z} \otimes A$ em $\mathbb{k}w$ dada por

$$(z \otimes f)w = \theta(z \otimes f)w, \quad \forall\, z \otimes f \in \mathfrak{z} \otimes A.$$

Observe que $\widetilde{\rho} \cong \theta \otimes \rho$. De fato, um calculo direto mostra que a função linear $\varphi : \mathbb{k}w \otimes V \longrightarrow V$ tal que $\varphi(w \otimes v) = v$ é um isomorfismo de representações. Portanto, provamos o proposto.

□

Proposição 5.3.13. A função

$$\begin{array}{rcl}(\mathfrak{z}\otimes A)^* \times \mathcal{E}(\mathfrak{s}) & \longrightarrow & \mathcal{R}(\mathfrak{l}\otimes A),\\ (\theta,\Psi) & \longmapsto & \theta\otimes \mathrm{ev}_\Psi\end{array}$$

é uma bijeção, onde $\mathcal{R}(\mathfrak{l}\otimes A)$ é o conjunto das classes de isomorfismo de $\mathfrak{l}\otimes A-$módulos irredutíveis de dimensão finita. Além disso, $\theta\otimes \mathrm{ev}_\Psi$ é um módulo de avaliação generalizado se e só se $\theta\in\mathcal{L}(\mathfrak{z})$. Portanto, a função

$$(\theta,\Psi) \longmapsto \theta\otimes \mathrm{ev}_\Psi$$

é uma bijeção entre $\mathcal{L}(\mathfrak{z})\times\mathcal{E}(\mathfrak{s})$ e o conjunto das classes de isomorfismo de $\mathfrak{l}\otimes A-$módulos de avaliação generalizados, irredutíveis de dimensão finita.

Demonstração. Pela proposição 5.3.12, todas as representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{l}\otimes A\cong(\mathfrak{z}\otimes A)\oplus(\mathfrak{s}\otimes A)$ são da forma $\theta\otimes\rho$, onde $\theta\in(\mathfrak{z}\otimes A)^*$ e ρ é uma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{s}\otimes A$. Por outro lado, como ρ é irredutível pelo corolário 5.2.19, $\rho(\mathfrak{s}\otimes I)V=0$ (aqui V é o espaço correspondente da representação ρ) para algum ideal I de A de codimensão finita. Seja $J=\sqrt{I}$ (o radical de I). Vamos mostrar que $\rho(\mathfrak{s}\otimes J)V=0$. Por motivos de notação vamos considerar V como um $\mathfrak{s}\otimes A-$módulo, onde a ação é a induzida por ρ. Pelo lema 5.2.16, basta provarmos que $(\mathfrak{s}\otimes J)v=0$ para algum vetor v não nulo de V. Considerando V como um $(\mathfrak{s}\otimes(A/I))-$módulo vamos ver que $(\mathfrak{s}\otimes(J/I))v=0$, onde $v\in V\setminus\{0\}$. Como A é finitamente gerada e portanto Noetheriana, o lema A.1.7 implica que I contém alguma potência de J. Isso implica que $\mathfrak{s}\otimes(J/I)$ é solúvel, já que

$$(\mathfrak{s}\otimes(J/I))^n=(\mathfrak{s})^n\otimes(J^n/I),$$

e $J^n\subseteq I$ para algum $n\in\mathbb{N}$. Logo, existe um vetor não nulo $v\in V$ e $\gamma\in(\mathfrak{s}\otimes J)^*$ tal que

$$xv=\gamma(x)v,\quad \forall\, x\in\mathfrak{s}\otimes J.$$

Provaremos que $\gamma=0$. Sabemos que γ é um homomorfismo de álgebras, em particular, uma representação de dimensão 1 de $\mathfrak{s}\otimes J$. Logo, o núcleo de γ é um ideal de codimensão no máximo 1 de $\mathfrak{s}\otimes J$. Como $\mathfrak{s}$ é semissimples e um ideal de $\mathfrak{s}\otimes J$ é da forma $\mathfrak{i}\otimes\mathfrak{m}$ onde $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{m}$ são ideais de $\mathfrak{s}$ e de J respectivamente, segue que $\mathfrak{s}\otimes J$ não possui ideais de codimensão 1, pois $\mathrm{codim}(\mathfrak{i}\otimes\mathfrak{m})=\mathrm{codim}(\mathfrak{i})\mathrm{codim}(\mathfrak{m})$ e $\mathfrak{s}$ não tem ideais de codimensão 1, sendo esta semissimples. Logo, o núcleo de γ é de fato $\mathfrak{s}\otimes J$ e portanto $\gamma=0$. Acabamos de provar que $(\mathfrak{s}\otimes J)v=0$, como queríamos. Assim, pela proposição 5.3.4 (b), segue que ρ é uma representação de avaliação irredutível de $\mathfrak{s}\otimes A$ e dessa forma a proposição 5.3.9 garante que a função $\Psi\mapsto\mathrm{ev}_\Psi$ é uma bijeção entre $\mathcal{E}(\mathfrak{s})$ e a classe de isomorfismos das representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{s}\otimes A$. Portanto provamos a primeira bijeção.

Se $\theta\in(\mathfrak{z}\otimes A)^*$ e $\Psi\in\mathcal{E}(\mathfrak{s})$, então $\mathrm{Ann}_A(\theta\otimes\mathrm{ev}_\Psi)=\mathrm{Ann}_A(\theta)\cap\mathrm{Ann}_A(\mathrm{ev}_\Psi)$. Logo

$$\mathrm{Supp}_A(\theta\otimes\mathrm{ev}_\Psi)=\mathrm{Supp}_A(\theta)\cup\mathrm{Supp}_A(\mathrm{ev}_\Psi).$$

Dessa forma, temos que $\theta\otimes\mathrm{ev}_\Psi$ tem suporte finito se e só se θ tem suporte finito, pois $\mathrm{Supp}_A\mathrm{ev}_\Psi=\mathrm{Supp}_A\Psi$ é finito por construção. Pela parte (a) da proposição 5.3.4 segue o nosso resultado.

□

Para $\mathfrak{m}\in\mathrm{MaxSpec}(A)$, temos as seguintes projeções:

$$\cdots\twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}^3\twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}^2\twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}\to 0.$$

Essas projeções implicam na sequência de injeções

$$\cdots \hookleftarrow (A/\mathfrak{m}^3)^* \hookleftarrow (A/\mathfrak{m}^2)^* \hookleftarrow (A/\mathfrak{m})^* \hookleftarrow 0.$$

A partir destas injeções podemos ver $(A/\mathfrak{m}^k)^*$ como um subespaço de $(A/\mathfrak{m}^\ell)^*$, para $k \leq \ell$. Daremos agora, com o próximo lema, uma descrição concreta para $\mathcal{L}(\mathfrak{z})$.

Lema 5.3.14. Seja $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}(A)$, então $\mathcal{L}_\mathfrak{m}(\mathfrak{z}) \cong \bigcup_{\ell=1}^\infty (\mathfrak{z} \otimes (A/\mathfrak{m}^\ell))^*$. Portanto,

$$\mathcal{L}(\mathfrak{z}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{MaxSpec}(A)} \left(\bigcup_{\ell=1}^\infty \left(\mathfrak{z} \otimes \left(A/\mathfrak{m}^\ell\right)\right)^* \right)$$

Demonstração. Segue do comentário acima, pois dado $\theta \in \mathcal{L}_m(X, \mathfrak{z})$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $\theta(\mathfrak{z} \otimes \mathfrak{m}^\ell) = 0$. Tome então $\tilde{\theta} \in (\mathfrak{z} \otimes (A/\mathfrak{m}^\ell))^*$ tal que $\tilde{\theta}(x \otimes (a + \mathfrak{m}^\ell)) = \theta(x \otimes a)$. Reciprocamente se $\tilde{\theta} \in (\mathfrak{z} \otimes (A/m^\ell))^*$ para algum $\ell \in \mathbb{N}$, associe-o a $\theta \in (\mathfrak{z} \otimes A)^*$ tal que $\theta(x \otimes a) = \tilde{\theta}(x \otimes (a + \mathfrak{m}^\ell))$, isto é, $\theta = \widetilde{\theta} \circ \pi$, onde π é a projeção canônica de A em $A/\mathfrak{m}^\ell$. Tal função define o isomorfismo que queremos. A segundo isomorfismo segue diretamente do fato que $\mathcal{L}(\mathfrak{z}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}\in \mathrm{MaxSpec}(A)} \mathcal{L}_\mathfrak{m}(\mathfrak{z})$.

$\square$

5.4 Módulos de Kac e seus quocientes irredutíveis

Por definição, uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é clássica se a representação da parte par $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ na parte ímpar $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ é completamente redutível. Mais especificamente, vimos que tal representação ou é irredutível, ou é a soma direta de duas representações irredutíveis. Dizemos que uma super álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é de tipo I se o segundo caso for verdade, ou seja, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, onde $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$ (note que para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, n)$, $n \geq 1$, esta $\mathbb{Z}-$graduação foi dada na seção 3.5). Caso contrário dizemos que $\mathfrak{g}$ é de tipo II. Nesta seção vamos supor que $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie básica do tipo I, ou $\mathfrak{sl}(n, n)$, $n \geq 1$ e que A é uma álgebra finitamente gerada.

Definição 5.4.1. Seja K um $\mathfrak{g}_0 \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita. Suponha que $\mathfrak{g}_1 \otimes A$ age trivialmente sobre K. Defina o seguinte módulo induzido:

$$\bar{V}(K) = U(\mathfrak{g} \otimes A) \otimes_{U((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)\otimes A)} K.$$

Observe que um $\mathfrak{g} \otimes A-$submódulo de $\bar{V}(K)$ é próprio se e só se este intersecta K trivialmente. Isso garante que existe um único $\mathfrak{g} \otimes A-$submódulo próprio maximal $N(K)$ de $\bar{V}(K)$. Definimos

$$V(K) = \bar{V}(K)/N(K).$$

Segue pela definição de $V(K)$ que este é um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível e que $V(K_1) \cong V(K_2)$ como $\mathfrak{g} \otimes A-$módulos se e só se $K_1 \cong K_2$ como $\mathfrak{g}_0 \otimes A-$módulos.

Lema 5.4.2. Suponha que K é um $\mathfrak{g}_0 \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita e que I é um ideal de A. Então, $(\mathfrak{g}_0 \otimes I)K = 0$ se e só se $(\mathfrak{g} \otimes I)V(K) = 0$. Em particular

a) $\mathrm{Ann}_A(K) = \mathrm{Ann}_A V(K)$;

b) $\mathrm{Supp}_A(K) = \mathrm{Supp}_A V(K)$;

c) $V(K)$ é um módulo de avaliação (resp. módulo de avaliação generalizado) se e só se K o for.

Demonstração. Note que se $(\mathfrak{g} \otimes I)V(K) = 0$, em particular $(\mathfrak{g}_0 \otimes I)V(K) = 0$ que por sua vez implica que $(\mathfrak{g}_0 \otimes I)1 \otimes_{((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1) \otimes A)} K = 0$. Logo,

$$0 = (\mathfrak{g}_0 \otimes I)1 \otimes_{((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1) \otimes A)} K = 1 \otimes_{((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1) \otimes A)} (\mathfrak{g}_0 \otimes I)K,$$

e portanto $(\mathfrak{g}_0 \otimes I)K = 0$. Resta agora mostrarmos a outra implicação.

Seja I um ideal de A tal que $(\mathfrak{g}_0 \otimes I)K = 0$. Vamos provar que $(\mathfrak{g} \otimes I)\bar{V}(K)$ é um submódulo próprio de $\bar{V}(K)$ implicando que $(\mathfrak{g} \otimes I)V(K) = 0$ pela construção de $V(K)$. A parte de ser submódulo segue diretamente do fato que $\mathfrak{g} \otimes I$ é um ideal de $\mathfrak{g} \otimes A$, vamos ver agora que este é um submódulo próprio. Considere a filtração canônica de $U(\mathfrak{g} \otimes A)$ (ver subseção 2.2.2) e tome

$$U_+(\mathfrak{g} \otimes A) = \bigoplus_{i>0} U^i(\mathfrak{g} \otimes A),$$

onde $U^i(\mathfrak{g} \otimes A)$ denota o i-ésimo termos da filtração canônica da álgebra envelopante. Note que $U_+(\mathfrak{g} \otimes A)$ é uma subálgebra de $U(\mathfrak{g} \otimes A)$ e $U(\mathfrak{g} \otimes A) = 1 \oplus U_+(\mathfrak{g} \otimes A)$. Em particular, $U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) = 1 \oplus U_+(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)$ e portanto podemos decompor $\bar{V}(K)$, como espaço vetorial, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{V}(K) &= 1 \otimes K \oplus U_+(\mathfrak{g} \otimes A) \otimes K \\ &= 1 \otimes K \oplus U_+((\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1) \otimes A) \otimes K \\ &\cong 1 \otimes K \oplus U_+(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes K \end{aligned}$$

onde o isomorfismo segue pelo teorema de PBW.

Provaremos primeiro que $(\mathfrak{g}_0 \otimes I)\bar{V}(K) \subseteq (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)\bar{V}(K)$. Pelo teorema de PBW sabemos que $U_+(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)$ é gerado por elementos da forma

$$(u_1 \otimes f_1)(u_2 \otimes f_2) \cdots (u_k \otimes f_k), \quad u_i \in \mathfrak{g}_{-1}, \ f_i \in A, \quad i = 1, \ldots, k, \quad k \in \mathbb{N}_+. \tag{5.4.1}$$

Seja agora $u \in \mathfrak{g}_0$ e $f \in I$, então

$$(u \otimes f)(u_1 \otimes f_1)(u_2 \otimes f_2) \cdots (u_k \otimes f_k) = [u \otimes f, u_1 \otimes f_1](u_2 \otimes f_2) \cdots (u_k \otimes f_k) +$$

$$(u_1 \otimes f_1)[u \otimes f, u_2 \otimes f_2](u_3 \otimes f_3) \cdots (u_k \otimes f_k) + \cdots + (u_1 \otimes f_1) \cdots (u_{k-1} \otimes f_{k-1})[u \otimes f, u_k \otimes f_k] +$$

$$(u_1 \otimes f_1) \cdots (u_k \otimes f_k)(u \otimes f) \subseteq (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) + U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_0 \otimes I)$$

Daí, segue que $(\mathfrak{g}_0 \otimes I)U_+(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \subseteq (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) + U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_0 \otimes I)$. Assim,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{g}_0 \otimes I)\bar{V}(K) &= (\mathfrak{g}_0 \otimes I)(1 \otimes K) + (\mathfrak{g}_0 \otimes I)(U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes K) \\ &\subseteq (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes K + U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_0 \otimes I) \otimes K \\ &= (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes K \\ &= (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)\bar{V}(K) \end{aligned}$$

como queríamos.

Provaremos agora que $(\mathfrak{g}_1 \otimes I)\bar{V}(K) \subseteq (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)\bar{V}(K)$. Com o mesmo raciocínio usado acima mostra-se que

$$(\mathfrak{g}_1 \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \subseteq U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_0 \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) + U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_1 \otimes I).$$

Então

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{g}_1 \otimes I)\bar{V}(K) &= (\mathfrak{g}_1 \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes K \\
&\subseteq U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_0 \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes K + U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_1 \otimes I) \otimes K \\
&= U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_0 \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes K \\
&= U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_0 \otimes I)\bar{V}(K) \\
&\subseteq U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)(\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)\bar{V}(K) \\
&= (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A)\bar{V}(K) \\
&= (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)\bar{V}(K),
\end{aligned}$$

provando o proposto.

Logo, temos que

$$(\mathfrak{g} \otimes I)\bar{V}(K) = (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)\bar{V}(K) + (\mathfrak{g}_0 \otimes I)\bar{V}(K) + (\mathfrak{g}_1 \otimes I)\bar{V}(K) = (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)\bar{V}(K).$$

Mas $\bar{V}(K) \cong U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes M$ como espaços vetoriais, sendo assim temos que

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)\bar{V}(K) &\cong (\mathfrak{g}_{-1} \otimes I)U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes A) \otimes K \\
&\cong U(\mathfrak{g}_{-1} \otimes I) \otimes K
\end{aligned}$$

é um submódulo próprio de $\bar{V}(K)$.

Por fim, os itens (a) e (b) seguem das definições e o item (c) segue diretamente do item (b) juntamente da proposição 5.3.4 (a). □

Proposição 5.4.3. O módulo $V(K)$ é de dimensão finita se e só se K é um módulo de avaliação generalizado.

Demonstração. Suponha que $V(K)$ tem dimensão finita. O corolário 5.2.19 implica que $(\mathfrak{g}\otimes I)V(K) = 0$ para algum ideal I de A de codimensão finita e portanto, graças ao lema A.1.3, de suporte finito, implicando que $V(K)$ tem suporte finito. Assim, pela proposição 5.3.4 (a), $V(K)$ é um módulo de avaliação generalizado, e pelo lema 5.4.2, K também é.

Reciprocamente, suponha que K é um módulo de avaliação generalizado. Então, pela proposição 5.3.4 (a), K tem suporte finito e portanto existe um ideal I de A de suporte finito tal que $(\mathfrak{g} \otimes I)K = 0$. Como A é finitamente gerada, o lema A.1.3 implica que I deve ter codimensão finita. Observe também que $(\mathfrak{g} \otimes I)V(K) = 0$, pelo lema 5.4.2. Agora, pela definição 5.4.1 temos que $V(K)$ é um quociente de $U(\mathfrak{g}\otimes(A/I))\otimes_{U((\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1)\otimes(A/I))}K$, que como espaço vetorial é isomorfo a $U(\mathfrak{g}_{-1}\otimes(A/I))\otimes_{\Bbbk}K$. Finalmente, veja que $\mathfrak{g}_{-1} \otimes (A/I)$ é ímpar (por definição da $\mathbb{Z}_2-$graduação de $\mathfrak{g} \otimes A$) e de dimensão finita (pois $\mathfrak{g}$ e A/I são), portanto o teorema de PBW implica que este espaço vetorial deve ter dimensão finita. Logo, $V(K)$ tem dimensão finita.

□

Lema 5.4.4. Sejam K_1, K_2 $(\mathfrak{g}_0\otimes A)-$módulos de avaliação generalizados com suportes disjuntos. Então, $V(K_1 \otimes K_2) \cong V(K_1) \otimes V(K_2)$.

Demonstração. Sobre nossas hipóteses, existem ideais I_1 e I_2 com suportes disjuntos tais que $(\mathfrak{g}_0 \otimes I_i)K_i = 0$, para $i = 1, 2$. Seja $I = I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$ (isso pelo lema A.1.5) e considere $K = K_1 \otimes K_2$ (como $(\mathfrak{g}_0 \otimes A)-$módulo). Assim, $(\mathfrak{g}_0 \otimes I)K = 0$ e portanto pelo lema 5.4.2 temos que $(\mathfrak{g} \otimes I)V(K) = 0$.

Analogamente prova-se que $(\mathfrak{g} \otimes I_i)V(K_i) = 0$ para $i = 1, 2$. Considere então $V(K)$, $V(K_1)$ e $V(K_2)$ como módulos para $(\mathfrak{g} \otimes (A/I))$, $(\mathfrak{g} \otimes (A/I_1))$ e $(\mathfrak{g} \otimes (A/I_2))$ respectivamente. Temos assim que

$$\begin{aligned}
\bar{V}(K) &= U(\mathfrak{g} \otimes (A/I)) \otimes_{U((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)\otimes(A/I))} K \\
&\cong U(\mathfrak{g} \otimes (A/I_1 \oplus A/I_2)) \otimes_{U((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)\otimes(A/I_1 \oplus A/I_2))} (K_1 \otimes K_2) \\
&\cong (U(\mathfrak{g} \otimes (A/I_1))U(\mathfrak{g} \otimes (A/I_2))) \otimes_{U((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)\otimes(A/I_1))U((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)\otimes(A/I_2))} (K_1 \otimes K_2) \\
&\cong (U(\mathfrak{g} \otimes (A/I_1)) \otimes_{U((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)\otimes(A/I_1))} K_1) \otimes (U(\mathfrak{g} \otimes (A/I_2)) \otimes_{U((\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)\otimes(A/I_2))} K_2) \\
&= \bar{V}(K_1) \otimes \bar{V}(K_2).
\end{aligned}$$

Assim, o $(\mathfrak{g} \otimes (A/I))-$submódulo próprio maximal de $\bar{V}(K)$ é $N(K_1) \otimes N(K_2)$, onde $N(K_i)$ é o $(\mathfrak{g} \otimes (A/I_i))-$submódulo próprio maximal de $\bar{V}(K_i)$ para $i = 1, 2$. Portanto, $V(K) = (\bar{V}(K_1) \otimes \bar{V}(K_2))/(N(K_1) \otimes N(K_2)) \cong (\bar{V}(K_1)/N(K_1)) \otimes (\bar{V}(K_2)/N(K_2)) = V(K_1) \otimes V(K_2)$. Provando assim o que queríamos.

□

Corolário 5.4.5. Sejam $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell \in \mathrm{MaxSpec}(A)$ distintos dois a dois, $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$, e para cada $i = 1, \ldots, \ell$ considere V_i um $(\mathfrak{g}_0 \otimes (A/\mathfrak{m}_i^{n_i}))-$módulo irredutível de dimensão finita. Então, temos que

$$V(\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_1^{n_1},\ldots,\mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}}(V_1, \ldots, V_\ell)) \cong \bigotimes_{i=1}^{\ell} V(\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}_i^{n_i}}(V_i)).$$

Assim, se K é um $(\mathfrak{g}_0 \otimes A)-$módulo de avaliação generalizado, então $V(K)$ é um produto tensorial de módulos da forma $V(K')$, onde K' é um $(\mathfrak{g}_0 \otimes A)-$módulo de avaliação generalizado associado a um único ideal. Em particular, este é o caso se $V(K)$ tem dimensão finita.

Demonstração. Já sabemos $\mathrm{ev}_{m_1^{n_1},\ldots,m_\ell^{n_\ell}}(V_1, \ldots, V_\ell) \cong \bigotimes_{i=1}^{\ell} \mathrm{ev}_{m_i^{n_i}}(V_i)$, então a primeira parte da demonstração segue do lema 5.4.4, por indução. Em particular se $V(K)$ tem dimensão finita, a proposição 5.4.3 assegura que K é um módulo de avaliação generalizado e portanto fica demonstrado a última afirmação.

□

5.5 Classificação dos módulos irredutíveis de dimensão finita

Nesta seção nós classificaremos os módulos irredutíveis de dimensão finita para as super álgebras de funções para o caso em que $\mathfrak{g}$ é básica ou $\mathfrak{sl}(n, n)$, $n \geq 1$ e que A é uma álgebra finitamente gerada. Sendo assim, nesta seção iremos supor que $\mathfrak{g}$ e A estão sobre estas hipóteses.

Suponha primeiramente que $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie de tipo II, ou seja, que a representação ad' é irredutível. Assim, pelo corolário 3.2.14, o centro de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ deve ser trivial, implicando que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é semissimples, uma vez que estamos assumindo $\mathfrak{g}$ clássica e portanto $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ redutiva. Observe que as super álgebras excepcionais são de tipo II.

Teorema 5.5.1. Se $\mathfrak{g}$ é do tipo II (e portanto $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é semissimples), então temos a seguinte bijeção:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathcal{R}(\mathfrak{g} \otimes A), \\
\Psi &\longmapsto \mathrm{ev}_\Psi
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

onde $\mathcal{R}(\mathfrak{g} \otimes A)$ é o conjunto das classes de isomorfismo das representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{g} \otimes A$. Em particular, todas as representações irredutíveis de dimensão finita são representações de avaliação.

Demonstração. Pela proposição 5.3.9 temos que a função 5.5.1 é injetiva. Se nós provarmos agora que para qualquer $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo V, $(\mathfrak{g}\otimes J)V=0$ para algum ideal radical J de A de codimensão finita, então pelo lema A.1.3 tal radical tem suporte finito e pela proposição 5.3.4 (b) fica provado que V é um $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo de avaliação e portanto que a função 5.5.1 é sobrejetiva.

Pelo corolário 5.2.19, temos que $(\mathfrak{g}\otimes I)V=0$ para algum ideal I de A de codimensão finita. Seja $J=\sqrt{I}$. Vamos mostrar que $(\mathfrak{g}\otimes J)V=0$. Pelo lema 5.2.16, basta provarmos que $(\mathfrak{g}\otimes J)v=0$ para algum vetor v não nulo de V.

Consideremos V como um $(\mathfrak{g}\otimes(A/I))-$módulo. Vamos ver que $(\mathfrak{g}\otimes(J/I))v=0$, onde $v\in V\setminus\{0\}$. Como A é finitamente gerado e portanto Noetheriano, o lema A.1.7 implica que I contém alguma potência de J. Note que $\mathfrak{g}\otimes(J/I)$ é solúvel já que

$$(\mathfrak{g}\otimes(J/I))^n=\mathfrak{g}^n\otimes(J^n/I),$$

e $J^n\subseteq I$ para algum $n\in\mathbb{N}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[(\mathfrak{g}\otimes(J/I))_{\bar{1}},(\mathfrak{g}\otimes(J/I))_{\bar{1}}] &= [\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]\otimes(J^2/I)\\
&\subseteq \mathfrak{g}_0\otimes(J^2/I)\\
&= [\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]\otimes(J^2/I)\\
&= [(\mathfrak{g}\otimes(J/I))_{\bar{0}},(\mathfrak{g}\otimes(J/I))_{\bar{0}}],
\end{aligned}$$

daí, pelo lema 4.4.1 temos que V possui um subespaço $(\mathfrak{g}\otimes(J/I))-$invariante de dimensão 1. Logo, existe um vetor não nulo $v\in V$ e $\theta\in(\mathfrak{g}\otimes J)^*$ tal que

$$\mu v=\theta(\mu)v,\quad \forall\,\mu\in\mathfrak{g}\otimes J.$$

Provaremos agora que $\theta=0$. Se $\mu\in\mathfrak{n}^\pm\otimes J$, então $\theta(\mu)^m v=\mu^m v=0$ para m suficientemente grande, já que V é de dimensão finita e portanto possui um número finito de espaços de peso. Assim, $\theta(\mathfrak{n}^\pm\otimes J)=0$. Falta ver agora que $\theta(\mathfrak{h}\otimes J)=0$. Seja θ' a restrição de θ a $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes J$. Então, como θ' é um homomorfismo de álgebras, em particular ele é uma representação de dimensão 1 de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes J$. Logo, o núcleo de θ' é um ideal de codimensão no máximo 1 de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes J$. Como $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ é semissimples e um ideal de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes J$ é da forma $\mathfrak{i}\otimes\mathfrak{m}$ onde $\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{m}$ são ideais de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e de J respectivamente, segue que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes J$ não possui ideais de codimensão 1, pois $\mathrm{codim}(\mathfrak{i}\otimes\mathfrak{m})=\mathrm{codim}(\mathfrak{i})\mathrm{codim}(\mathfrak{m})$ e $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ não tem ideais de codimensão 1, sendo este semissimples. Logo, o núcleo de θ' é de fato $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes J$ e portanto $\theta'=0$. O resultado segue agora do fato que $\mathfrak{h}\otimes J\subseteq\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes J$.

□

Vamos supor agora que $\mathfrak{g}$ é uma super álgebra de Lie básica de tipo I, ou $\mathfrak{sl}(n,n)$, $n\geq 0$. Seja $\mathfrak{s}=[\mathfrak{g}_{\bar{0}},\mathfrak{g}_{\bar{0}}]$ a parte semissimples de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ e $\mathfrak{z}$ seu centro. Portanto, $\mathfrak{g}_{\bar{0}}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{z}$. Sabemos que $\mathfrak{g}$ possui uma $\mathbb{Z}-$graduação

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1$$

tal que $\mathfrak{g}_{\bar{0}}=\mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{g}_{\bar{1}}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1$. Para tais super álgebras podemos tomar o sistema positivo de raízes Φ^+ sendo $\Phi_0^+\cup\Phi_1$, onde Φ_0^+ denota o sistema de raízes positivas pares e Φ_1 denota as raízes ímpares α tais que $\mathfrak{g}^\alpha\subseteq\mathfrak{g}_1$. Assim, temos que $\mathfrak{g}_1$, (resp. $\mathfrak{g}_{-1}$) é a soma dos espaços de raízes positivas (resp. negativas) e ímpares.

Teorema 5.5.2. Seja $\mathfrak{g}$ uma super álgebra de Lie básica do tipo I, ou $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,n)$, $n\geq 0$. Então, todo $\mathfrak{g}\otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita é da forma $V(K)$, onde K é um $\mathfrak{g}_{\bar{0}}\otimes A-$módulo de avaliação generalizado irredutível. Portanto, temos a seguinte bijeção:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}(\mathfrak{z}) \times \mathcal{E}(\mathfrak{s}) & \longrightarrow & \mathcal{R}(\mathfrak{g} \otimes A), \\ (\theta, \Psi) & \longmapsto & V(\theta \otimes \mathrm{ev}_\Psi) \end{array} \tag{5.5.2}$$

onde $\mathcal{R}(\mathfrak{g} \otimes A)$ é o conjunto das classes de isomorfismo dos $\mathfrak{g} \otimes A-$módulos irredutíveis de dimensão finita.

Demonstração. Seja V um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de dimensão finita. Então, já vimos que V é um módulo de m-peso máximo, logo $V = V(\psi)$ para algum $\psi \in (\mathfrak{h} \otimes A)^*$. Tome v um vetor de m-peso máximo e defina

$$K = U(\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A)v.$$

Como K é um subespaço de $V = U(\mathfrak{g} \otimes A)v$, e este tem dimensão finita, K também deve ter. Note que $[\mathfrak{g}_1 \otimes A, \mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A] \subseteq [\mathfrak{g}_1 \otimes A]$, e como $(\mathfrak{g}_1 \otimes A)v = 0$ temos que $(\mathfrak{g}_1 \otimes A)K = 0$. De fato, vamos provar por indução sobre o comprimento de um elemento em $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A)$. Sabemos que todos os elementos de $U(\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A)$ são gerados por monômios da forma $(u_1 \otimes f_1) \cdots (u_k \otimes f_k)$, com $u_i \otimes f_i \in \mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A$ e $k \in \mathbb{N}$. Seja $u \in \mathfrak{g}_1$ e $f \in A$ e tome um elemento $(u_1 \otimes f_1)$ de comprimento 1 de $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A$, assim

$$(u \otimes f)(u_1 \otimes f_1) = [u \otimes f, u_1 \otimes f_1] + (u_1 \otimes f_1)(u \otimes f),$$

onde, no lado direito todos os elementos da soma terminam com um elemento de $\mathfrak{g}_1 \otimes A$ e estes elementos agem trivialmente em v. Suponha por indução que se o elemento tem comprimento menor do que n é possível escreve-lo como uma soma onde cada elemento da soma termina com um elemento de $\mathfrak{g}_1 \otimes A$. Dessa forma vemos que

$$(u \otimes f)(u_1 \otimes f_1) \cdots (u_n \otimes f_n) = [u \otimes f, u_1 \otimes f_1](u_2 \otimes f_2) \cdots (u_n \otimes f_n),$$

e portanto o lado direito da equação pode ser escrito da forma desejada, já que tal elemento satisfaz nossa hipótese de indução. Logo, $(\mathfrak{g}_1 \otimes A)K = 0$.

Vamos ver agora que K é um $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A-$módulo irredutível. Seja $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{n}_{\bar{0}}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\bar{0}}^-$ a decomposição triangular induzida por $\mathfrak{g}$, isto é, $\mathfrak{n}_{\bar{0}}^+$, $(\mathfrak{n}_{\bar{0}}^-)$ é a soma dos espaços de raízes positivas (resp. negativas) pares e $\mathfrak{h}$ é a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Então, temos que

$$K = U(\mathfrak{n}_{\bar{0}}^- \otimes A)v.$$

Seja $w \in K$ um vetor de peso. Como $V(\psi)$ é um $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo irredutível de m-peso máximo, pela proposição 5.2.10, existe $x \in U(\mathfrak{g} \otimes A)$ tal que $xw = v$, além disso, pelo teorema de PBW podemos supor que $x \in U(\mathfrak{n}_{\bar{0}}^+ \otimes A)$, já que $(\mathfrak{g}_1 \otimes A)K = 0$. Assim, K não possui subespaços $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A-$invariantes e portanto é um $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A-$módulo irredutível, como queríamos.

Veja que $V(\psi)$ é um módulo quase-finito, sendo este de dimensão finita. Logo pelo teorema 5.2.18, $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$ para algum ideal I de A de codimensão finita, e portanto de suporte finito pelo lema A.1.3. Dessa forma, como $(\mathfrak{g} \otimes I)V = 0$, temos que $(\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes I)V = 0$, em particular, $(\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes I)K = 0$, já que $K \subseteq V (= U(\mathfrak{g} \otimes A)v)$, daí pela proposição 5.3.4 (a), segue que K é um $\mathfrak{g}_{\bar{0}} \otimes A-$módulo de avaliação generalizado.

Note $V \cong V(K)$. Com efeito, a função

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U(\mathfrak{g} \otimes A)v & \longrightarrow & V(K) \\ uv & \longmapsto & u \otimes v \end{array} \tag{5.5.3}$$

é um homomorfismo injetor de $\mathfrak{g} \otimes A-$módulos, logo $V \cong \varphi(V)$, mas $V(K)$ é irredutível como $\mathfrak{g} \otimes A-$módulo, então $\varphi(V) = V(K)$ e portanto a função 5.5.3 é de fato um isomorfismo de $\mathfrak{g} \otimes A-$módulos. Finalmente, note que devido a proposição 5.3.13 a função 5.5.2 é uma bijeção.

$\square$

Note que os teoremas 5.5.2 e 5.5.1 classificam completamente os módulos irredutíveis de dimensão finita para as super álgebras de funções sobre uma super álgebra de Lie básica ou $\mathfrak{sl}(n,n)$, $n \geq 0$.

Apêndice A

A.1 Alguns resultados sobre álgebras comutativas

Esta seção tem por objetivo expor as definições e os resultados (sem demonstrações) sobre álgebras comutativas que serão usados neste trabalho. As definições e resultados podem ser encontrados em [Ati].

Definição A.1.1. O *espectro maximal* de uma álgebra A é o conjunto de todos seus ideais maximais. Denotaremos por $\mathrm{maxSpec}(A)$ tal conjunto.

Definição A.1.2. Seja I um ideal de uma álgebra A. Defina o conjunto

$$\mathrm{Supp}(I) := \{\mathfrak{m} \in \mathrm{maxSpec}(A) \,|\, I \subseteq \mathfrak{m}\}.$$

Tal conjunto é denominado o *suporte* do ideal I.

Sabemos que existe uma bijeção entre o conjunto dos ideais maximais de A que contém I e o conjunto dos ideais maximais de A/I. Portanto, os conjuntos $\mathrm{Supp}(I)$ e $\mathrm{maxSpec}(A/I)$ tem a mesma quantidade de elementos.

Proposição A.1.3. Se A é uma álgebra, então

a) Todo ideal de codimensão finita de A tem suporte finito.

b) Se A é finitamente gerada, então todo ideal de A com suporte finito tem codimensão finita.

Corolário A.1.4. Seja A uma álgebra finitamente gerada. Então, um ideal de A tem codimensão finita se e só se este ideal tem suporte finito.

Lema A.1.5. Suponha que I, J são ideais de uma álgebra A, com suportes disjuntos. Então, $A = I + J$ e $IJ = I \cap J$.

Corolário A.1.6. Sejam $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell \in \mathrm{MaxSpec}(A)$, tais que $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ se $i \neq j$ e $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}_+$. Então,

$$\mathrm{Supp}\left(\Pi_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i^{n_i}\right) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_\ell\},$$

em particular,

$$\Pi_{i=1}^{\ell} \mathfrak{m}_i^{n_i} = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cap \ldots, \cap \mathfrak{m}_\ell^{n_\ell}.$$

Lema A.1.7. Em um anel Noetheriano todo ideal contém uma potência do seu radical.

A.2 O teorema sobre a densidade de Jacobson

Nessa seção iremos somente enunciar o teorema sobre a densidade de Jacobson. Esse teorema pode ser encontrado em [W. Hungerford]

Teorema A.2.1. Seja R um anel com unidade, V um $R-$módulo semissimples e $R' = \mathrm{End}_R(V)$. Para $f \in \mathrm{End}_{R'}(V)$ e $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$, existe $r \in R$ tal que $r(v_i) = f(v_i)$ para $i = 1, \ldots, n$. Se V é finitamente gerado sobre R', então a função

$$\begin{aligned} R &\longrightarrow \mathrm{End}_{R'}(V), \\ r &\longmapsto r \end{aligned}$$

onde $r(v) = rv$, é sobrejetiva.

A.3 Álgebras de Lie redutivas e semissimples

Nesta seção exporemos os resultados e as notações que foram usados neste texto sobre álgebras de Lie redutivas e semissimples e sobre suas representações. As principais referências desta seção foram [Hum], [S. Martin] e [M. Scheunert].

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutiva. Então, $\mathfrak{g}$ é igual ao produto direto do seu centro $\mathfrak{h}^0$ com a álgebra derivada $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, onde a última é semissimples.

Escolha uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Sabemos que

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0 \times \mathfrak{h}',$$

onde $\mathfrak{h}'$ é a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}'$. O espaço dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$ e o produto direto $(\mathfrak{h}^0)^* \times (\mathfrak{h}')^*$ serão identificados por meio do isomorfismo canônico.

Seja ρ uma representação completamente redutível de dimensão finita de $\mathfrak{g}$. Observe que a restrição de ρ a $\mathfrak{h}$ também é completamente redutível. Para cada elemento $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, defina

$$V^\lambda = \{v \in V \mid \rho(h)v = \lambda(h)v, \ \forall\, h \in \mathfrak{h}\}. \tag{A.3.1}$$

Então, temos que

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V^\lambda.$$

As funções lineares $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ com $V^\lambda \neq \{0\}$ são chamadas de pesos da representação ρ (com respeito a $\mathfrak{h}$). Se λ é um peso de ρ, então V^λ é chamado de espaço de peso associado a λ e, qualquer elemento não nulo de V^λ é chamado de um vetor de peso associado a λ.

Vamos aplicar estas convenções a representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, temos que

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}.$$

Os pesos não nulos da representação adjunta de $\mathfrak{g}$ são chamados de raízes de $\mathfrak{g}$ (com respeito a $\mathfrak{h}$). Se α é uma raiz de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}^\alpha$ é chamado de espaço de raiz associado a α e, qualquer elemento não nulo de $\mathfrak{g}^\alpha$ é chamado de um vetor raiz associado a α. Note que as raízes de $\mathfrak{g}$ se anulam no centro $\mathfrak{h}^0$ de $\mathfrak{g}$. Assim, sobre a identificação canônica de $(\mathfrak{h}')^*$ com um subespaço de $\mathfrak{h}^*$, as raízes de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$ são apenas as raízes de $\mathfrak{g}'$ com respeito a $\mathfrak{h}'$. Sabemos também que para qualquer raiz α

$$\dim(\mathfrak{g}^\alpha) = 1.$$

Seja ϕ uma forma bilinear simétrica, invariante e não degenerada em $\mathfrak{g}$. É fácil mostrar que $\mathfrak{h}^0$ e $\mathfrak{g}'$ são ortogonais com respeito a ϕ.

A invariância de ϕ implica que para quaisquer λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$

$$\phi(\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu) = \{0\}, \text{ se } \lambda + \mu \neq 0,$$

consequentemente, a restrição de ϕ a $\mathfrak{g}^\lambda \times \mathfrak{g}^{-\lambda}$ é não degenerada. Em particular, a restrição de ϕ a $\mathfrak{h}$ é não degenerada. Segue daí que para todo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ existe um único elemento $h_\lambda \in \mathfrak{h}$ tal que

$$\lambda(h) = \phi(h_\lambda, h), \;\; \forall h \in \mathfrak{h}.$$

Se λ é um elemento arbitrário de $\mathfrak{h}^*$ temos que

$$[x, y] = \phi(x, y)h_\lambda, \;\; \forall\, x \in \mathfrak{g}^\lambda \; y \in \mathfrak{g}^{-\lambda}.$$

Frequentemente, será conveniente escolher, para toda raiz α de $\mathfrak{g}$ um vetor raiz $e_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ tal que

$$[e_{-\alpha}, e_\alpha] = h_\alpha, \;\; \forall\, \alpha \in \mathfrak{h}^*.$$

A restrição de ϕ a $\mathfrak{h}$ induz uma forma bilinear $(\,|\,)$ não degenerada e simétrica em $\mathfrak{h}^*$ que é dada por

$$(\lambda|\mu) = \phi(h_\lambda, h_\mu) = \lambda(h_\mu) = \mu(h_\lambda), \;\; \forall\, \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Note que os subespaços $(\mathfrak{h}^0)^*$ e $(\mathfrak{h}')^*$ são ortogonais com relação a $(\,|\,)$. Lembre que $(\alpha|\alpha) \neq 0$, para qualquer raiz α de $\mathfrak{g}$, além disso, se α e β são duas raízes de $\mathfrak{g}$, então $2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha)$ é um inteiro que não depende da escolha de ϕ.

Sejam $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ um sistema fundamental de raízes simples de $\mathfrak{g}'$ com respeito a $\mathfrak{h}'$ (em particular, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ é uma base para $(\mathfrak{h}')^*$). Os elementos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $(\mathfrak{h}')^*$ que são definidos por

$$2\frac{(\lambda_i|\alpha_k)}{(\alpha_k|\alpha_k)} = \delta_{ik}, \;\; 1 \leq i, j \leq n$$

são chamados de pesos fundamentais de $\mathfrak{g}'$ (com respeito a $\mathfrak{h}'$ e correspondendo ao sistema $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$). A definição das funções lineares λ_i não depende da escolha de ϕ e $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ é uma base de $(\mathfrak{h}')^*$.

Vamos novamente identificar $(\mathfrak{h}')^*$ com um subespaço de $\mathfrak{h}^*$, então $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ é também chamado de um sistema fundamental de raízes simples de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$ e $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ são os pesos fundamentais correspondentes de $\mathfrak{g}$.

Seja ρ uma representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ e seja ρ' a restrição de ρ a $\mathfrak{g}'$. Então, ρ' também é irredutível, além disso, os elementos de $\mathfrak{h}^0$ são representados por múltiplos escalares da identidade (pelo lema de Schur). Sendo assim, os pesos da representação ρ são os elementos de $\mathfrak{h}^*$ da forma $\lambda = (\mu, \lambda')$, onde μ é um elemento fixo de $(\mathfrak{h}^0)^*$ e λ' percorre todos os pesos de ρ'. O peso $\lambda = (\mu, \lambda')$ é chamado de peso máximo (res. peso mínimo) de ρ se e só se λ' é o peso máximo (resp. mínimo) de ρ'.

Estas observações são o suficiente para mostrar como as noções gerais da teoria de álgebras de Lie semissimples e suas representações são generalizados para o caso em que a álgebra de Lie é redutiva.

A.3.1 Comentários sobre álgebras de Lie semissimples e suas representações

No que segue $\mathfrak{g}$ será uma álgebra de Lie semissimples. Escolha alguma forma bilinear invariante e não degenerada ϕ em $\mathfrak{g}$ (por exemplo a forma de Killing). Sejam $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ um sistema fundamental de raízes simples de $\mathfrak{g}$ com respeito a $\mathfrak{h}$ e $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ o correspondente sistema fundamental de pesos.

Uma função linear $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ é chamada de dominante se ela tem a forma

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i,$$

onde cada c_i é um inteiro não negativo.

As representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathfrak{g}$ são caracterizadas (a menos de isomorfismo) por seu peso máximo. Um elemento $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ é o peso máximo de alguma representação irredutíveis de dimensão finita e $\mathfrak{g}$ se e só se ele é dominante. Se λ é dominante, então representação irredutível de $\mathfrak{g}$ correspondente a ele será denotada por $\rho(\lambda)$.

Para toda raiz α de $\mathfrak{g}$ definimos a reflexão s_α de $\mathfrak{h}^*$ por

$$s_\alpha(\mu) = \mu - 2\frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}\alpha, \ \ \forall\, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Novamente, s_α independe da escolha de ϕ. Se α percorre todas as raízes de $\mathfrak{g}$, as reflexões s_α geram um grupo finito de isometrias de $\mathfrak{h}^*$ (com respeito a $(\ |\ )$). Este grupo de chamado de grupo de Weyl.

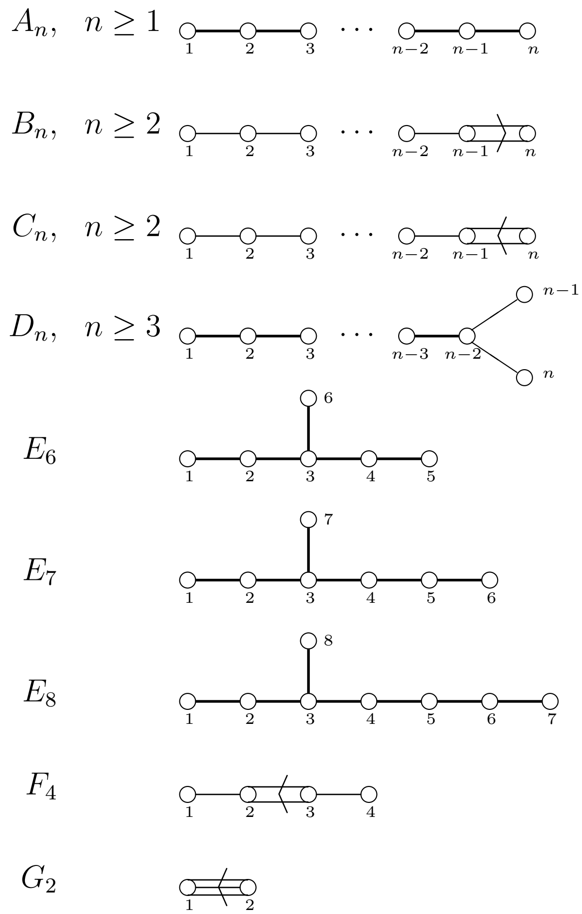
Lema A.3.1. **a)** O grupo de Weyl permuta os pesos de qualquer representação irredutível de dimensão finita de $\mathfrak{g}$.

b) Para uma álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$, o grupo de Weyl age transitivamente nas raízes que possuem a mesma comprimento.

Suponha que nos é dada uma representação irredutível de dimensão finita ρ de $\mathfrak{g}$. Se ρ é equivalente a sua representação dual, dizemos que ρ é auto-dual. Este é o caso se e só se existe uma forma bilinear invariante e não nula (e portanto não degenerada) Ψ no espaço de representação de ρ. Sabemos que Ψ (se existe) é única a menos de fator constante. Em particular, Ψ ou é simétrica ou anti-simétrica.

A.3.2 Álgebras de Lie simples

Na tabela abaixo estão especificados os diagramas de Dynkin das álgebras de Lie simples (de dimensão finita). A enumeração dos vertices é dada como em [Hum].



Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples. A representação $\rho(\lambda_1)$ de $\mathfrak{g}$ é chamada natural (ou elementar, no caso das excepcionais). No caso em que $\mathfrak{g}$ é uma das álgebras A_n, B_n, C_n ou D_n esta é a representação natural da realização canônica da algebra (pro exemplo se $\mathfrak{g} = A_n$, então $\rho(\lambda_1)$ é a representação natural de $\mathfrak{sl}(n+1)$ em $\mathbb{k}^{n+1}$), para G_2 esta é a representação de dimensão 7 obtida pelo fato de G_2 ser a álgebra das derivações da álgebra não associativa dos octonions.

Na tabela abaixo descrevemos as representações fundamentais em termos da elementar para as álgebras de Lie clássicas.

A_n, $n \geq 1$	$\bigwedge^m \rho(\lambda_1) \cong \rho(\lambda_m)$	$1 \leq m \leq n$
B_n, $n \geq 2$	$\bigwedge^m \rho(\lambda_1) \cong \rho(\lambda_m)$	$1 \leq m \leq n-1$
	$\bigwedge^n \rho(\lambda_1) \cong \rho(2\lambda_n)$	
C_n, $n \geq 2$	$\bigwedge^m \rho(\lambda_1) \cong \rho(\lambda_m) \oplus \bigwedge^{m-2} \rho(\lambda_1)$	$2 \leq m \leq n$
D_n, $n \geq 3$	$\bigwedge^m \rho(\lambda_1) \cong \rho(\lambda_m)$	$1 \leq m \leq n-2$
	$\bigwedge^{n-1} \rho(\lambda_1) \cong \rho(\lambda_{n-1} + \lambda_n)$	
	$\bigwedge^n \rho(\lambda_1) \cong \rho(2\lambda_{n-1}) \oplus \rho(2\lambda_n)$	

Aqui, $\bigwedge^m \rho(\lambda_1)$ denota o produto exterior de m copias da representação $\rho(\lambda_1)$.

A representação adjunta de $\mathfrak{g}$ é irredutível (pois $\mathfrak{g}$ é simples). Logo, $\mathfrak{g}$ possui uma (única) raiz de altura máxima, a qual é dominante. Se todas as raízes de $\mathfrak{g}$ tem o mesmo comprimento (que é o caso de A_n, B_n e E_r), então nenhuma outra raiz dominante existe.

Suponha agora que $\mathfrak{g}$ possui raízes com comprimentos diferentes (que é o caso de B_n, C_n com $n \geq 2$, F_4 e G_2). Então, a raiz de altura máxima é uma raiz longa. Dentre as raízes curtas, existe uma única de altura máxima, e esta é dominante. Nenhuma outra raiz é dominante. Na tabela abaixo listamos as raízes dominantes de todas as álgebras de Lie simples.

Álgebra	raiz de altura máxima	raiz dominante adicional
A_n, $n \geq 1$	$\lambda_1 + \lambda_n$	
B_n, $n \geq 3$	λ_2	λ_1
C_n, $n \geq 2$	$2\lambda_1$	λ_2
D_n, $n \geq 4$	λ_2	
E_6	λ_6	
E_7	λ_6	
E_8	λ_1	
F_4	λ_4	λ_1
G_2	λ_2	λ_1

O próximo lema é devido a [Kac 1].

Lema A.3.2. Usando a mesma notação introduzida nas seções anteriores, seja ρ uma representação irredutível de dimensão finita e fiel de uma álgebra de Lie semissimples $\mathfrak{g}$. Sejam também Ω o conjunto de todos os pesos de ρ e λ o peso máximo.

a) Suponha que 2λ é uma raiz de $\mathfrak{g}$. Então,

$$\mathfrak{g} \cong C_n, \;\; \lambda = \lambda_1, \quad \text{para algum } \; n \geq 1.$$

b) Suponha que $\lambda - \tau$ é uma raiz de $\mathfrak{g}$ para todo peso $\tau \in \Omega$, $\tau \neq \lambda$. Então, os seguintes casos são possíveis:

$\mathfrak{g}$	λ
A_n, $n \geq 2$	λ_1, λ_n
C_n, $n \geq 1$	λ_1.

c) Suponha que $\lambda - \tau$ é uma raiz de $\mathfrak{g}$ para todo peso $\tau \in \Omega$, $\tau \neq \pm\lambda$. Então, os seguintes casos são possíveis:

$\mathfrak{g}$	λ
A_2	λ_1, λ_2
A_3	λ_1, λ_2, λ_3
A_n, $n \geq 4$	λ_1, λ_n
B_3	λ_1, λ_3
B_n, $n \geq 4$	λ_1
C_1	λ_1, $2\lambda_1$
C_2	λ_1, λ_2
C_n, $n \geq 3$	λ_1
D_4	λ_1, λ_3, λ_4
D_n, $n \geq 5$	λ_1
G_2	λ_1
$A_1 \times A_1$	(λ_1, λ_1).

Observação A.3.3. A lista no item c) do lema acima pode ser descrita como segue. Ela contém:

As álgebras $\mathfrak{sl}(n)$, $n \geq 3$, combinadas com suas representações naturais e com as representações duais das representações naturais.

Álgebras $\mathfrak{sp}(2r)$, $r \geq 1$, e as álgebras $\mathfrak{so}(m)$, $m \geq 3$, combinadas com suas representações naturais.

A álgebra $\mathfrak{so}(7)$ combinada com a sua representações spinorial de dimensão 8.

A álgebra $\mathfrak{so}(8)$ combinada com as duas representações spinoriais de dimensão 8.

A álgebra G_2 combinada com a sua representação fundamental de dimensão 7.

A.3.3 O índice de uma representação

Nesta seção $\mathfrak{g}$ denotará uma álgebra de Lie simples (sobre um corpo algebricamente fechado). Suponha também que todas as representações de $\mathfrak{g}$ são de dimensão finita.

Lembre que se ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$, então podemos associar a ρ uma forma bilinear invariante

ϕ_ρ em $\mathfrak{g}$, que é definida por

$$\phi_\rho(q,q') = \mathrm{tr}(\rho(q),\rho(q')), \quad \forall\, q,\, q' \in \mathfrak{g}.$$

A forma de Killing ϕ de $\mathfrak{g}$ é obtida se escolhemos ρ como sendo a representação adjunta de $\mathfrak{g}$.

Sabemos que, como $\mathfrak{g}$ é simples, quaisquer duas formas bilineares invariantes em $\mathfrak{g}$ são proporcionais, sendo assim, existe um elemento $\ell_\rho \in \Bbbk$, tal que

$$\phi_\rho = \ell_\rho \phi.$$

O elemento ℓ_ρ é chamado de *índice* da representação ρ.

Abaixo iremos listar algumas das propriedades do índice.

a) Se ρ é a soma direta de duas representações ρ_1 e ρ_2, então

$$\ell_\rho = \ell_{\rho_1} + \ell_{\rho_2}. \tag{A.3.2}$$

b) Se ρ é o produto tensorial de duas representações ρ_1 e ρ_2, cujas dimensões são n_1 e n_2, respectivamente, então

$$\ell_\rho = n_2\ell_{\rho_1} + n_1\ell_{\rho_2}.$$

c) Seja ρ uma representação de dimensão n de $\mathfrak{g}$.

1) O índice de $\bigwedge^m(\rho)$, $1 \leq m \leq n-1$, (o produto exterior de m cópias de ρ) é igual a $\binom{n-2}{m-1}\ell_\rho$.

2) O índice de $S^m(\rho)$, $m \geq n-1$, (o produto tensorial simétrico de m cópias de ρ) é igual a $\binom{n+m}{m-1}\ell_\rho$.

d) O índice da representação ρ é igual ao índice da representação dual de ρ.

e) Suponha que a representação ρ é irredutível. Seja C o elemento Casimir que é construído por meio da forma de Killing ϕ. Lembre que C é um elemento do centro da álgebra envelopante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Assim, a imagem de C pela extensão canônica de ρ a $U(\mathfrak{g})$ tem a forma $c_\rho\mathrm{id}$, para algum elemento $c_\rho \in \Bbbk$. Segue daí que

$$\ell_\rho \dim(\mathfrak{g}) = c_\rho \dim(\rho). \tag{A.3.3}$$

f) Usando a notação introduzida nas seções anteriores e supondo que a forma bilinear $(\ |\ )$ em $\mathfrak{h}^*$ foi construída a partir da forma de Killing ϕ de $\mathfrak{g}$. Suponha ρ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$. Se λ é o peso máximo de ρ e σ é a metade da soma de todas as raízes positivas (que é igual a soma dos pesos fundamentais), então

$$c_\rho = (\lambda|\lambda + 2\sigma). \tag{A.3.4}$$

Usando as equações (A.3.2), (A.3.3) e (A.3.4), assim como a formula da dimensão de Weyl (ver [S. Martin]), podemos calcular o índice de qualquer representação ρ de $\mathfrak{g}$. Em particular, concluímos:

g) O índice ℓ_ρ de qualquer representação ρ de $\mathfrak{g}$ é um número racional positivo que é não nulo se e só se a representação ρ é fiel.

Neste trabalho precisamos saber, para qualquer álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$, quais das representações irredutíveis ρ de $\mathfrak{g}$ possui índice $\ell_\rho \leq 1$. A tabela abaixo nos da uma lista destas álgebras

Álgebra	Condição sobre o posto	Peso máximo da representação	índice ℓ_ρ
A_n	$n \geq 1$	$\lambda_1, \ \lambda_n$	$\frac{1}{2(n+1)}$
	$n \geq 2$	$2\lambda_1, \ 2\lambda_n$	$\frac{n+3}{2(n+1)}$
	$n \geq 2$	$\lambda_2, \ \lambda_{n-1}$	$\frac{n-1}{2(n+1)}$
	$3 \leq n \leq 7$	$\lambda_3, \ \lambda_{n-2}$	$\frac{(n-1)(n-2)}{4(n+1)}$
B_n	$n \geq 2$	λ_1	$\frac{1}{2n-1}$
	$2 \leq n \leq 6$	λ_n	$\frac{2^{n-3}}{2n-1}$
C_n	$n \geq 2$	λ_1	$\frac{1}{2(n+1)}$
	$n \geq 3$	λ_2	$\frac{n-1}{n+1}$
	$n = 2, 3$	λ_n	$\frac{1}{2n(n+1)}\binom{2n}{n-1}$
D_n	$n \geq 4$	λ_1	$\frac{1}{2(n-1)}$
	$4 \leq n \leq 7$	$\lambda_{n-1}, \ \lambda_n$	$\frac{2^{n-5}}{n-1}$
E_6		$\lambda_1, \ \lambda_5$	$\frac{1}{4}$
E_7		λ_1	$\frac{1}{3}$
F_4		λ_1	$\frac{1}{3}$
G_2		λ_1	$\frac{1}{4}$

Tabela 2: Todas as representações irredutíveis ρ com $0 < \ell_\rho < 1$

A consequência é a seguinte: Para qualquer representação irredutível ρ de $\mathfrak{g}$, o índice ℓ_ρ e a dimensão $\dim(\rho)$ de ρ satisfazem as seguintes condições:

$\ell_\rho < 1$ se e só se $\dim(\rho) < \dim(\mathfrak{g})$;

$\ell_\rho > 1$ se e só se $\dim(\rho) > \dim(\mathfrak{g})$;

$\ell_\rho = 1$ se e só se ρ é equivalente a representação adjunta de $\mathfrak{g}$.

Na tabela 2, estão listados para qualquer álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$, os pesos máximos de todas as representações irredutíveis não triviais de $\mathfrak{g}$ cujo índice é estritamente menor do que 1.

Referências Bibliográficas

[Ati] M. Atiyah, I. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley (1969).

[CW] S.-J. Cheng and W. Wang, Dualities and Representations of Lie Superalgebras, Graduate studies in mathematics. (2012).

[Hum] J. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, GTM9 Springer (1972).

[Kac 1] V. Kac, Lie superalgebras, Adv. in Math. 26 (1977), 8-96.

[Kac 2] V. G. Kac, A sketch of Lie superalgebras theory. Comm. Math. Phys. 53 (1977), 31-64.

[Kac 3] V. G. Kac, Representations of classical Lie superalgebras. In Differential geometrical methods in mathematical physics, II, Lecture Notes in Math. 676, Springer-Verlag, Berlin 1978, 597-626.

[M. Scheunert] The Theory of Lie Superalgebras, Lecture Notes in Mathematics (1978), 1-261.

[Mus] Ian M. Musson, Lie Superalgebras and Enveloping Algebras, Graduate studies in mathematics. (2012), 1-88.

[N. Bourbaki] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chap. I ; Hermann, Paris (1960)

[NSS] E. Neher, A. Savage, and P. Senesi. Irreducible finite-dimensional representations of equivariant map algebras. Trans. Amer. Math. Soc. (to appear). Preprint available at arXiv:0906.5189v3 [math.RT].

[Sav] A. Savage, *Equivariant map superalgebras*, arXiv:1202.4127 [math.RT].

[S. Martin] San Martin, Luis Antonio B. Álgebras de Lie. Campinas: UNICAMP, (1999).

[W. Hungerford] Thomas W. Hungerford, Algebra, Graduate studies in mathematics. (1973).