Representações do grupo de Heisenberg e o teorema de Calderón-Vaillancourt

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Roberto Begazo Delgado e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 29 de maio de 1996

Prof. Dr. Milton C. Lopes Filho
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Begazo Delgado, Roberto Carlos

B393r Representações do grupo de Heisenberg e o teorema de Calderón-Vaillancourt / Roberto Carlos Begazo Delgado -- Campinas, [S.P. :s.n.], 1996.

Orientador : Milton Lopes

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Representações de grupos. 2. Operadores diferenciais parciais. 3. Análise harmônica. 4. Mecânica quantica. I. Lopes, Milton. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Tese defendida e aprovada em 29 de maio de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). SEVERINO TOSCANO MELO

Prof (a). Dr (a). FRANCESCO MERCURI

Prof (a). Dr (a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO

A mis padres Bessy y Víctor.
a mis hermanos Mariela y Vico.
a mis tíos y primos, es que
dedico este trabajo.

Agradecimentos

Ao **Prof. Dr. Milton Lopes**, pela sua confiança e orientação.

À UNICAMP pela oportunidade e à CAPES pelo suporte financeiro.

Ao Richard Mamani pelo apoio moral.

Ao Guillermo Lobos e ao Christian Figueroa pela ajuda na digitação.

Aos colegas da turma.

Conteúdo

Introdução

Consideremos $S(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Schwartz sobre o grupo (abeliano) $\mathbb{R}^n$. Sabemos que a transformada de Fourier é definida naturalmente sobre este espaço mediante a formula

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \, dx$$

onde a aplicação $x \longmapsto e^{ix \cdot \xi}$ é considerada uma representação unitaria de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{C}$. Para um grupo localmente compacto G é possivel dar uma definição analoga para a transformada de Fourier de funções sobre o grupo em termos das suas representações unitarias (ver [8]). Daqui, concluimos que existe uma forte relação entre a analise de Fourier (ou harmonica) e a teoria de representações de grupos.

Baseado em **[3]**, fatos e formulas básicas no estudo da analise harmonica sobre $\mathbb{R}^n$ tais como o espaço de Schwartz e o teorema de Plancherel serão analizados neste trabalho sob o ponto de vista da representação de um grupo muito especial: o grupo de Heisenberg (que será denotado H^n), um grupo de Lie nilpotente 2-step (ou quase abeliano) que representa o conjunto de simetrias natural de analise em espaços de fase e em mecanica quantica. Mas o assunto principal aqui será ver que sua estrutura está intimamente conectada com a teoria de operadores pseudo-diferenciais sobre $\mathbb{R}^n$ refletida na estimativa $(0,0)$ de Calderón e Vaillancourt.

No capítulo 1 primeiramente é descrito o grupo de Heisenberg, logo são dadas e estudadas as propriedades das representações do grupo e da sua algebra de Lie (denotadas por ρ) assim como se caracteriza o espaço $S(\mathbb{R}^n)$ em termos dessas representações.

Sobre $S(\mathbb{R}^n)$ são definidos os operadores

$$M_i : f \longmapsto x_i f \quad \text{(multiplicação por coordenadas) e}$$

$$\partial_{x_i} : f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{(diferenciaccão parcial)}$$

que são os operadores diferencias parciais básicos no sentido que a algebra que geram é a algebra de todos os operadores diferenciais parciais com coeficientes polinomiais. Por outro lado, estos operadores também fornecem a base para a mecanica quantica ja que eles satisfazem as relações de comutação canonica

$$[\partial_{x_i}, M_j] = \delta_{ij}$$

onde $[A, B] = AB - BA$ é o comutador e δ_{ij} é a delta de Kronecker.

Ainda no capítulo 1 veremos que estos operadores são imagens através da representação da algebra de Lie de H^n e no capítulo 2 que eles são os únicos operadores que satisfazem as relações de comutação canonica. Este importante resultado é estabelecido pelo teorema de Stone-von Neumann que como será mostrado é equivalente ao teorema de Plancherel.

No capítulo 3 é visto que todo operador continuo sobre $S(\mathbb{R}^n)$ (e em particular os operadores pseudo-diferenciais) podem ser considerados como elementos que provém, via ρ, de uma distribuição sobre H^n e em seguida discutimos o símbolo: um ente que facilita o estudo das propriedades analíticas dos operadores. Associado ao grupo H^n existe um espaço vetorial (que também é um grupo abeliano) munido de uma estrutura simplética natural (induzida pela estrutura da algebra deLie de H^n). Em termos desta estrutura é definido o símbolo isotrópico de uma distribuição sobre H^n e estudamos suas propriedades básicas que incluem um calculo simbólico. Logo de discutir o símbolo isotrópico, vemos como ele está relacionado com o símbolo usual (ou standard) na teoria de operadores pseudo-diferenciais.

No quarto e último capítulo, usando um argumento puramente algebrico, se deduz a estimativa $(0, 0)$ de Calderón-Vaillancourt em termos do símbolo isotrópico.

Capítulo 1

O Grupo de Heisenberg

Neste capítulo introduziremos a definição e propriedades básicas do grupo de Heisenberg, da sua álgebra de Lie e a estrutura das representações do grupo e da álgebra de Heisenberg em espaços de funções.

1.1 Descrição do grupo de Heisenberg

Seja X um espaço vetorial real de dimensão finita n e X^* o seu dual. Seja também $T \subseteq \mathbb{C}$ o grupo multiplicativo de numeros complexos com valor absoluto 1 e $e : \mathbb{R} \longmapsto T$ a aplicação exponencial dada por $e(t) = e^{2\pi it}$.

Definição 1.1.1 *O conjunto $H^n = X \times X^* \times T$ munido da operação*

$$H^n \times H^n \longmapsto H^n$$

$$((x_1, \xi_1, z_1), (x_2, \xi_2, z_2)) \longmapsto (x_1 + x_2, \xi_1 + \xi_2, z_1 z_2 e(\xi_1(x_2)))$$

é chamado o **Grupo de Heisenberg**.

Proposição 1.1.2 *O conjunto H^n com a operação definida acima é um grupo de Lie não abeliano.*

Demonstração: Da definição 1.1.1 é fácil verificar que H^n é um grupo: associatividade, existencia de elemento identidade $(0, 0, 1)$ e existencia de inverso multiplicativo para cada elemento de H^n; dado (x, ξ, z) em H^n então $(-x, -\xi, z^{-1}e(\xi(x))) \in H^n$ é seu inverso.

Ao mesmo tempo que H^n é um grupo, H^n é uma variedade diferenciável com a estrutura de variedade produto (pois X, X^* e T são variedades diferenciaveis) e

$$\dim H^n = \dim X + \dim X^* + \dim T = 2n + 1$$

Vejamos que a aplicação $\Psi : (a, b) \mapsto ab^{-1}$ de $H^n \times H^n$ em H^n é diferenciável.Agora, Ψ (aplicação entre variedades) será diferenciável se $\varphi_\circ \Psi_\circ \tau^{-1}$ (aplicação entre espaços euclideanos) é diferenciável onde φ e τ são cartas de H^n e $H^n \times H^n$ respectivamente definidas por:

$$\varphi : H^n \longmapsto U \subseteq I\!R^{2n+1}, U \text{ aberto}$$

$$(x, \xi, z) \mapsto (x, \xi, \arg(z))$$

$$\tau : \quad H^n \ \times \ H^n \quad \longmapsto \quad U \ \times \ U \ \subseteq \ I\!R^{2n+1} \times \ I\!R^{2n+1}$$

$$((x, \xi, z), (x', \xi', z')) \mapsto (\varphi(x, \xi, z), \varphi(x', \xi', z')) = ((x, \xi, \arg(z)), (x', \xi', \arg(z')))$$

Logo, $\varphi_\circ \Psi_\circ \tau^{-1} : U \times U \subseteq I\!R^{2n+1} \times I\!R^{2n+1} \longmapsto U \subseteq I\!R^{2n+1}$ é definida mediante

$$\varphi_\circ \Psi_\circ \tau^{-1}((x, \xi, \theta), (x', \xi', \theta')) = (x - x', \xi - \xi', \theta - \theta' + (\xi' - \xi)(x'))$$

Como esta aplicação é diferenciável, conclui-se que H^n é um grupo de Lie. Por último, seja $(x, \xi, z) \in H^n$. Se

$$(x, \xi, z)(x', \xi', z') = (x', \xi', z')(x, \xi, z), \forall (x', \xi', z') \in H^n,$$

então obtem-se que

$$\xi(x') = \xi'(x), \forall x' \in X, \forall \xi' \in X^*.$$

Mas a igualdade acima só é verificada se $x = 0$ e $\xi = 0$. Portanto,

$$\text{Centro de } H^n = \{(0, 0, z) : z \in T\} \subseteq H^n$$

e H^n é não abeliano com centro igual a T. $\square$

1.2 Representações do grupo de Heisenberg

Seja $S(X)$ o **espaço de Schwartz** de X: o espaço das funções (sobre X) C^∞ e rapidamente decrescentes a valores complexos. $S(X)$ é um espaço de Frechet com a topologia definida pelas seminormas

$$\|f\|_{(\alpha,\beta)} = \sup_{x \in X} |x^\alpha D^\beta f(x)|,$$

onde α e β são multiíndices de inteiros não negativos, $x = (x_1, ..., x_n)$ num sistema de coordenadas conveniente e

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f \quad \text{com} \quad D_i^{\alpha_i} f = \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial_{x_i^{\alpha_i}}} f.$$

Ver [2] para mais informação sobre $S(X)$.

Definamos sobre $S(X)$ os seguintes operadores:

Translação em posição: $(\rho(x')f)(x) = f(x - x'), x' \in X$.

Translação em frequencia: $(\rho(\xi)f)(x) = e(\xi(x))f(x), \xi \in X^*$.

Multiplicação por fase: $(\rho(z)f)(x) = zf(x), z \in T$.

Observação:

$\rho(x')(S(X)) \subseteq S(X)$, $\rho(\xi)(S(X)) \subseteq S(X)$ e $\rho(z)(S(X)) \subseteq S(X)$.

Definição 1.2.1 *Sejam G um grupo localmente compacto e V um espaço vetorial topologico localmente convexo, Hausdorff e completo. Uma* **representação** *do grupo G sobre V é um ho-*

momorfismo

$$\sigma : G \longmapsto GL(V)$$

de G no grupo de operadores lineares continuos e inversiveis sobre V com a seguinte condição de continuidade:

$$\forall v \in V, \text{ a aplicação } g \longmapsto \sigma(g)(v), \text{ de } G \text{ em } V \text{ é continua.}$$

A representação σ é chamada **unitaria** *se V é um espaço de Hilbert e os operadores $\sigma(g)$ são unitarios, para todo $g \in G$.*

A combinação dos três operadores definidos acima implicam a seguinte

Proposição 1.2.2 *A aplicação*

$$\rho : (x, \xi, z) \longmapsto \rho(x)\rho(\xi)\rho(z)$$

define uma representação de H^n sobre $S(X)$.

Demonstração: A forma explícita da aplicação ρ é

$$\left(\rho(x', \xi, z)f\right)(x) = ze(\xi(x - x'))f(x - x')$$

Desta fórmula se deduz que $\rho(h)^{-1} = \rho(h^{-1})$, $\forall\ h \in H^n$ e assim ρ leva H^n em $GL(S(X))$. Alem disto, tem-se também que

$$\rho(hh') = \rho(h)\rho(h'),\ h, h' \in H^n \text{ e } \rho((0, 0, 1)) = id_{S(X)}$$

Se $f \in S(X)$, vejamos que a aplicação $h \longmapsto \rho(h)f$, de H^n em $S(X)$ é continua. Como ρ é um homomorfismo de grupos, bastará verificar a continuidade na identidade de H^n. Seja h numa vizinhança de $(0, 0, 1)$ e primeiramente consideremos f em $C_c^\infty(X)$ (o conjunto das funções C^∞ com suporte compacto), então

$$\|\rho(h)f - \rho(0, 0, 1)f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in X} \left|D^\beta\left(\rho(h)f - f\right)(x)\right| = \sup_{x \in X} \left|\left(\rho(h)D^\beta f - D^\beta f\right)(x)\right| \underset{h \to (0,0,1)}{\longrightarrow} 0.$$

Como $C_c^\infty(X)$ é denso em $S(X)$, temos o desejado.

Seja $L^2(X)$ o espaço de Hilbert das funções sobre X a valores complexos e quadrado-integráveis com respeito à medida de Lebesgue. Lembrando que $S(X)$ é um subespaço denso de $L^2(X)$ temos a

Proposição 1.2.3 *A representação ρ se estende a uma representação unitaria de H^n sobre $L^2(X)$.*

Demonstração: Sendo $S(X)$ um subespaço de $L^2(X)$, $S(X)$ herda o produto interno de $L^2(X)$. Agora, para todo $h \in H^n$, $\rho(h)$ é uma isometria com respeito a este produto interno como se deduz do seguinte cálculo:

Seja $h = (x', \xi, z) \in H^n$, logo

$$\begin{aligned}
\|\rho(h)f\|^2_{L^2(X)} &= (\rho(h)f, \rho(h)f)_2 = \int_X |(\rho(h)f)(x)|^2\,dx \\
&= \int_X |f(x-x')|^2\,dx = \int_X |f(y)|^2\,dy, \quad y = x - x' \\
&= \|f\|^2_{L^2(X)}
\end{aligned}$$

Como $\rho(h)\rho(h^{-1}) = \rho(hh^{-1}) = \rho((0,0,1)) = id_{L^2(X)}$ (pela densidade de $S(X)$ em $L^2(X)$), $\rho(h)$ é um operador unitario sobre $L^2(X)$; i.é, $\rho(h)^* = \rho(h)^{-1}$. (Aqui, $\rho(h)^*$ denota o operador adjunto de $\rho(h)$). Pela proposição 1.2.2 a aplicação $h \mapsto \rho(h)$ de H^n em $U(L^2(X))$ (o grupo dos operadores unitarios sobre $L^2(X)$) é continua. $\blacksquare$

Portanto, ρ é a restrição a $S(X)$ de uma representação unitaria, que será denotada também por ρ, de H^n sobre $L^2(X)$. Em outras palavras, todo elemento de H^n pode ser visto como um operador unitario sobre $L^2(X)$.

Definição 1.2.4 *Seja σ uma representação unitaria de um grupo de Lie G sobre um espaço de Hilbert S. Diz-se que σ é* **irredutível** *se S não tem subespaços proprios invariantes sob $\sigma(g)$, para todo $g \in G$.*

Proposição 1.2.5 *A representação ρ é irredutível.*

Demonstração. Provaremos a irreducibilidade de ρ por contradição. Assim, suponha que existe um subespaço proprio, distinto do nulo, de $L^2(X)$ que seja $\rho(h)$-invariante, $\forall h \in H^n$. Seja V tal subespaço, então $V^\perp$ (o complemento ortogonal de V) é também $\rho(h)$-invariante, pois se $u \in V^\perp$, temos que

$$(\rho(h)(u), v)_2 = (u, \rho(h^{-1})(v))_2 = 0, \quad \forall v \in V.$$

Portanto,

$$L^2(X) = V \oplus V^\perp \quad \text{e} \quad \rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \quad \text{com} \quad \rho_1 = \rho_{|_V}, \rho_2 = \rho_{|_{V^\perp}}.$$

Sejam $f_1 \in V$ e $f_2 \in V^\perp$ vetores unitarios, então $(\rho_1(h)f_1, f_2) = 0, \forall h \in H^n$ ou equivalentemente

$$\int_X ze(\xi(x-x'))f_1(x-x')\overline{f_2(x)}dx = 0, \quad \text{se} \quad h = (x', \xi, z),$$

obtendo-se que

$$\int_X e(\xi(x))f_1(x-x')\overline{f_2(x)}dx = 0, \quad \forall x' \in X, \quad \forall \xi \in X^*.$$

Em particular $\int_X f_1(x-x')\overline{f_2(x)}e(-\xi(x))dx = 0$, onde o lado esquerdo da igualdade é a transformada de Fourier para $f_1(x-x')\overline{f_2(x)}$. Então $f_1(x-x')f_2(x) = 0$ em quase todo ponto x e para todo $x' \in X$. Assim, $f_1 \equiv 0$ em quase todo ponto se $f_2(x) \neq 0$ o que é uma contradição e está provada a irreducibilidade de ρ.$\square$

Vejamos algumas noções gerais sobre representações de grupos de Lie. Se G é um grupo de Lie, algumas vezes é conveniente estudar representações de G através do espaço $C_c^\infty(G)$ de funções C^∞ com suporte compacto sobre G. Como G é um grupo de Lie, G é localmente compacto: logo, existe sobre G uma medida de Borel dg invariante sob translação à esquerda chamada **medida de Haar** à esquerda. Esta medida é única a menos de uma constante multiplicativa positiva. (Ver [15]).

Usando a lei de grupo em G pode-se criar uma estrutura de álgebra sobre $C_c^\infty(G)$.Dados

$f_1, f_2 \in C_c^\infty(G)$, definimos a convolução de f_1 e f_2 pela regra

$$f_1 * f_2(g') = \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}g') dg.$$

Observações:

(a) A operação $*$ está bem definida pois a aplicação $g \mapsto f_1(g)f_2(g^{-1}g')$ de G em $\mathbb{C}$ é integravel. (Ver [5], cap.XII sobre integração em espaços localmente compactos).

(b) $f_1 * f_2 \in C_c^\infty(G)$ e o espaço $C_c^\infty(G)$ com a operação $*$ forma uma álgebra.

Sabemos que a transformada de Fourier $\wedge : S(X) \longmapsto S(X^*)$ é definida por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_X f(x) e(-\xi(x)) dx, \quad f \in S(X).$$

onde as funções $x \mapsto e(-\xi(x))$ fornecem uma representação unitaria irredutível de X sobre $\mathbb{C}$. Seja σ uma representação unitaria irredutível de G sobre o espaço de Hilbert complexo S, então em analogia com a transformada de Fourier, para uma função $f \in C_c^\infty(G)$ pode-se definir uma transformação da seguinte forma:

$$\sigma(f) = \int_G f(g)\sigma(g) dg, \quad \sigma(g) \text{ operador unitario } \forall g \in G.$$

Lema 1.2.6 *O operador $\sigma(f)$ definido sobre S é limitado.*

Demonstração: Seja $v \in S$, então

$$\begin{aligned} \|\sigma(f)(v)\|_S \le \int_G |f(g)| \, \|\sigma(g)(v)\|_S \, dg &= \int_G | f(g) | \, \|v\|_S dg \\ &= \|v\|_S \cdot \int_G | f(g) | \, dg \end{aligned}$$

com $\int_G | f(g) | \, dg \le \infty$ pois $f \in C_c^\infty(G)$.$\square$

Definição 1.2.7 *A aplicação $f \longmapsto \sigma(f)$ é chamada a* **forma integrada** *de σ.*

Proposição 1.2.8 *A forma integrada de σ é um homomorfismo de álgebras: de $C_c^\infty(G)$, com seu produto convolução, na álgebra dos operadores limitados sobre S a qual denotamos por $\mathcal{B}(S)$.*

Demonstração: Sejam $f_1, f_2 \in C_c^\infty(G)$ e $v \in S$. Então

$$\begin{aligned}
\sigma(f_1 * f_2)(v) &= \int_G (f_1 * f_2)(g')\sigma(g')(v)dg' \\
&= \int_G \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}g')\sigma(g')(v)dgdg' \\
&= \int_G \int_G f_1(g) f_2(g^{-1}g')\sigma(g')(v)dg'dg \text{ (pelo teorema de Fubini).}
\end{aligned}$$

Pondo $g^{-1}g' = h$ temos $dh = d(g^{-1}g') = dg'$ ja que dg é invariante à esquerda.Logo,

$$\begin{aligned}
\sigma(f_1 * f_2)(v) &= \int_G \int_G f_1(g) f_2(h)\sigma(gh)(v)dhdg = \int_G \int_G f_1(g) f_2(h)\sigma(g)(\sigma(h)(v))dhdg \\
&= \int_G f_1(g) \int_G \sigma(g)\left(f_2(h)\sigma(h)(v)\right)dhdg \quad \text{(pois } \sigma(\text{g}) \text{ é linear)} \\
&= \int_G f_1(g)\sigma(g) \left(\int_G f_2(h)\sigma(h)(v)dh \right) dg.
\end{aligned}$$

A última expressão se deve ao fato de a integral comutar com aplicações lineares continuas. Finalmente

$$\sigma(f_1 * f_2)(v) = \sigma(f_1)\left(\int_G f_2(h)\sigma(h)(v)dh\right) = \sigma(f_1)\left(\sigma(f_2)(v)\right) = \sigma(f_1)\circ\sigma(f_2)(v)$$

Por conseguinte, $\sigma(f_1 * f_2) = \sigma(f_1)\sigma(f_2)$ e σ é um homomorfismo.$\square$

1.3 Representações da álgebra de Heisenberg

A cada grupo de Lie G está associado sua álgebra de Lie $\mathfrak{G}$ que é o espaço dos campos vetoriais invariantes à esquerda sobre G. O espaço $\mathfrak{G}$ é identificado a T_eG, o espaço tangente de G em e (o elemento identidade de G). Veremos que uma representação unitaria de G induz uma representação σ da sua álgebra de Lie $\Im$.

Sendo G uma variedade diferenciável, a qualquer campo vetorial sobre G podemos associar suas curvas integrais: se $x \in \Im$, as curvas integrais pasando por $e \in G$ são definidas pelo grupo a 1-parametro

$$t \longmapsto \exp tx, \ t \in I\!R$$

que é um homomorfismo diferenciável de grupos, onde exp é a aplicação exponencial de $\Im$ em G, a "ponte" que une um grupo de Lie com sua álgebra de Lie. Logo, $t \longmapsto \sigma(\exp tx)$, $t \in I\!R$ é um grupo a 1-parametro de operadores unitarios sobre S que tem associado um gerador infinitesimal $\sigma(x)$: um operador sobre S, em geral não limitado, definido por:

$$\sigma(x)(v) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left(\sigma(\exp tx)(v) - v\right) = \frac{d}{dt} \left(\sigma(\exp tx)(v)\right) |_{t=0}$$

sobre o dominio:

$$\mathcal{D}(\sigma(x)) = \left\{ v \in S : \lim_{t \to 0} t^{-1} \left(\sigma(\exp tx)(v) - v\right) \text{ existe sobre } S \right\} \subseteq S.$$

Vejamos duas propriedades importantes do operador S.

Lema 1.3.1 *O operador $\sigma(x)$ é anti-adjunto e densamente definido.*

Demonstração: Sejam $u, v \in \mathcal{D}(\sigma(x))$, então

$$\begin{aligned}
(\sigma(x)(u), v)_S &= \lim_{t \to 0} t^{-1} \left([\sigma(\exp tx) - id_S](u), v\right)_S \\
&= \lim_{t \to 0} t^{-1} \left(u, [\sigma(\exp tx)^* - id_S](v)\right) \\
&= \lim_{t \to 0} t^{-1} \left(u, [\sigma(\exp(-tx)) - id_S](v)\right) \\
&= \left(u, -\lim_{t \to 0} t^{-1} [\sigma(\exp tx)(v) - v]\right) = (u, -\sigma(x)(v))_S.
\end{aligned}$$

Logo, $\sigma(x)^* = -\sigma(x)$ e $\sigma(x)$ é anti-adjunto. Para ver que $\mathcal{D}(\sigma(x))$ é denso em S, seja $v \in S$ e consideremos os vetores $v_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\int_0^\varepsilon \sigma(\exp tx)(v)dt$ para $\varepsilon \neq 0$, para os quais obtemos

$$h^{-1}\left(\sigma(\exp hx)(v_\varepsilon) - v_\varepsilon\right) = \varepsilon^{-1}\left[h^{-1}\int_\varepsilon^{\varepsilon+h} \sigma(\exp tx)(v)dt - h^{-1}\int_0^h \sigma(\exp tx)(v)dt\right]$$

A expressão do lado direito tende a $\varepsilon^{-1}\left(\sigma(\exp \varepsilon x)(v) - v\right)$ quando $h \to 0$. Assim $v_\varepsilon \in \mathcal{D}(\sigma(x))$, $\forall \varepsilon \neq 0$ e $v_\varepsilon \to v$ em S quando $\varepsilon \to 0$.$\square$

Definição 1.3.2 *Um vetor $v \in S$ é chamado* **diferenciável** *para σ se a aplicação $g \longmapsto \sigma(g)(v)$, de G em S é diferenciável.*

O conjunto de vetores diferenciaveis para σ é um subespaço de S, que será denotado por S^∞: isto é

$$S^\infty = \{v \in S : g \longmapsto \sigma(g)(v) \text{ é diferenciável}, \forall g \in G\} \subseteq S$$

Lema 1.3.3 *O subespaço S^∞ é denso em S. Alem disso, S^∞ está contido nos dominios dos $\sigma(x)$ para $x \in \Im$ e é invariante sob os $\sigma(x)$.*

Demonstração: Seja $f \in C_c^\infty(G)$. Então $\sigma(f)(v)$ é diferenciável, $\forall v \in S$. De fato, $\sigma(g_0)\left(\sigma(f)(v)\right) = \sigma(g_0)\left(\int_G f(g)\sigma(g)(v)dg\right) = \int_G f(g)\sigma(g_0 g)(v)dg = \int_G f(g_0^{-1}h)\sigma(h)(v)dh$, onde $h = g_0 g$. Como $f \in C_c^\infty(G)$, esta integral pode ser diferenciada em g_0 sob a integral e $\sigma(f)(v)$ é diferenciável.

Tomemos uma sequencia de funções (f_n) em $C_c^\infty(G)$ tal que: (i) Se Ω é qualquer vizinhança de $e \in G$, então $\text{supp}(f_n) \subseteq \Omega$, para todo n suficientemente grande, onde $\text{supp}(f_n)$ indica o suporte de f_n e (ii) $\int_G f_n(g)dg = 1$, $\forall n$. Assim, se $v \in S$ temos

$$\begin{aligned}
\|\sigma(f_n)(v) - v\|_S &= \left\|\int_\Omega f_n(g)\sigma(g)(v)dg - v\int_\Omega f_n(g)dg\right\| \\
&\leq \int_G |f_n(g)|\,\|\sigma(g)(v) - v\|\,dg \\
&\leq \sup_{g\in\Omega}\|\sigma(g)(v) - v\|\int_\Omega |f_n(g)|\,dg \to 0, \text{ se } g \to e.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sigma(f_n)(v) \longrightarrow v$ com $\sigma(f_n)(v) \in S^\infty$ e S^∞ é denso em S. Agora, sejam $v \in S^\infty$ e $x \in \Im$. Vendo a sequencia de aplicações diferenciaveis

$$\begin{array}{ccccc} I\!R & \longmapsto & G & \longmapsto & S \\ \\ t & \longmapsto \exp tx & & \longmapsto \sigma(\exp tx)(v) \end{array}$$

temos que a aplicação $t \longmapsto \sigma(\exp tx)(v)$ é diferenciável. Em particular, existe $\frac{d}{dt}\left(\sigma(\exp tx)(v)\right)|_{t=0}$ e $v \in \mathcal{D}(\sigma(x))$ com o que $S^\infty \subseteq \mathcal{D}(\sigma(x))$. Por último, seja $u \in S^\infty$. Do diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G \times I\!R & \longmapsto & G & \longmapsto & S \\ \\ (g,t) & \longmapsto & g\exp tx \longmapsto \sigma(g\exp tx)(u) \end{array}$$

se deduz que a aplicação $\psi(g,t) = \sigma(g\exp tx)(v)$ é diferenciável junto com suas derivadas parciais $\frac{\partial\psi}{\partial t}(g,t) = \sigma(g\exp tx)\left(\sigma(x)(u)\right)$. Logo, para $t = 0$, a aplicação $\frac{\partial\Psi}{\partial t}(g,0) = \sigma(g)\left(\sigma(x)(u)\right)$ é diferenciável e $\sigma(x)(u) \in S^\infty$. Portanto, $\sigma(x)(S^\infty) \subseteq S^\infty$ e o lema está provado.$\square$

S^∞ é chamado o **espaço dos vetores diferenciáveis** para σ. Pode-se dar-lhe uma estrutura de espaço de Frechet. (Ver [14]).

Como $\sigma(x)$ leva S^∞ em S^∞, $\sigma(x)$ é um endomorfismo de S^∞ e tendo em conta que $End(S^\infty)$ é uma álgebra de Lie temos a

Proposição 1.3.4 *A aplicação $x \longmapsto \sigma(x)$ de $\Im$ em $End(S^\infty)$ é um homomorfismo de álgebras. Isto é,*

$$\sigma([x,y]_\Im) = [\sigma(x),\sigma(y)]_{End(S^\infty)} = \sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x);\, x,y \in \Im$$

onde $[\ ,\ ]$ *denota a operação colchete de Lie.*

Para a demonstração vamos precissar de uma representação muito importante do grupo G:

a representacão adjunta sobre a álgebra de Lie $\Im$.

Definição 1.3.5 *A* **representação adjunta** *Ad de G sobre sua álgebra de Lie $\Im$ é definida como segue: Para $g \in G$. $Ad(g)$ é a diferencial do automorfismo $\alpha_g : G \longmapsto G$, $\alpha_g(g') = gg'g^{-1}$. Ou seja,*

$$Ad(g) := Ad_g = d(\alpha_g)_e : T_eG \longmapsto T_eG \cong \Im.$$

A representação adjunta de G induz uma representação da sua álgebra de Lie $\Im$ em $End(\Im)$.

Definição 1.3.6 *A representação adjunta ad de $\Im$ é a diferencial de Ad. Isto é*

$$ad = d(Ad) : T_eG \cong \Im \longmapsto T_{Ad(e)}Aut(\Im) \cong End(\Im)$$

Assim, $ad(x) := ad_x$ $(x \in \Im)$ é uma transformação linear sobre $\Im$.Se demonstra que $ad_x(y) = [x, y]$. (Ver proposição 3.47 de [13]).

Demonstração (proposição 1.3.4): O conjunto dos operadores anti-adjuntos sobre S é o espaço tangente na identidade sobre S do conjunto dos operadores unitarios sobre S. Isto nos sugere o uso da representação adjunta Ad de G. Agora $\sigma([x, y])(v) = \frac{d}{dt}(\sigma(\exp t[x, y])(v)) \mid_{t=0}$ mas $\exp(t[x, y]) = \exp(tad_x(y)) = \exp(tAd_g(y))$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma([x,y])(v) &= \frac{d}{dt}(\sigma(\exp tAd_g(y))(v)) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\sigma(\alpha_g(\exp ty))(v)) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\sigma(g(\exp ty)g^{-1})(v)) \mid_{t=0} \\
&= \sigma(g)\sigma(y)\sigma(g^{-1})(v)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
[\sigma(x),\sigma(y)](v) &= (\sigma(x)\sigma(y)-\sigma(y)\sigma(x))(v) \\
&= \frac{d}{dt}(\sigma(\exp tx)\sigma(y)\sigma(\exp(-tx))(v)) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\sigma(Ad_{\exp tx}(y))(v)) \mid_{t=0}
\end{aligned}
$$

Pela expansão de Taylor de $Ad_{\exp tx}$ temos $Ad_{\exp tx}(y) = y + t[x,y] + O(t^2)$, $t \to 0$. Então

$$
\begin{aligned}
t^{-1}\left[\sigma(Ad_{\exp tx}(y))(v) - \sigma(y)(v)\right] &= t^{-1}\left[\{\sigma(y) + t\sigma([x,y]) + \sigma(O(t^2))\}(v) - \sigma(y)(v)\right] \\
&= \{\sigma([x,y]) + \sigma(O(t))\}(v)
\end{aligned}
$$

Como $x \in \Im \longmapsto \sigma(x)(v) \in S$ é contínua, então $\lim_{t\to 0}\sigma(O(t))(v) = 0$ obtendo-se $[\sigma(x),\sigma(y)](v) = \sigma([x,y])(v)$.$\square$

$\Im$ é uma álgebra que em geral não é associativa mas a partir dela pode-se construir uma que seja associativa de modo que toda representação σ de $\Im$ se estende naturalmente a uma representação desta álgebra. Essa álgebra é a álgebra universal envelopante de $\Im$ que é denotada por $\mathcal{U}(\Im)$.

$\Im$ é um espaço vetorial real. Sejam $\mathcal{T}(\Im) = \bigoplus_{k=0}^{\infty}\Im^k$ a álgebra tensorial de $\Im$ donde $\Im^k = \Im \otimes \ldots \otimes \Im$ é o k-produto tensorial de $\Im$ e $\mathcal{I}(\Im)$ o ideal em $\mathcal{T}(\Im)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$; $x, y \in \Im$. Logo podemos definir o quociente $\mathcal{T}(\Im)/\mathcal{I}(\Im)$. Este quociente é $\mathcal{U}(\Im)$ que é uma álgebra associativa com unidade sobre $I\!R$. Se $\Psi : \mathcal{T}(\Im) \longmapsto \mathcal{U}(\Im)$ é o homomorfismo natural e pondo $\Phi = \Psi \mid_{\Im}$ temos

$$\Phi([x,y]) = \Phi(x)\Phi(y) - \Phi(y)\Phi(x)$$

O par $(\mathcal{U}(\Im), \Phi)$ é chamado **álgebra universal envelopante** de $\Im$.Tem-se que $\Im \subseteq \mathcal{U}(\Im)$ e a representação σ de $\Im$ sobre S^∞ se estende de maneira natural a uma representação de $\mathcal{U}(\Im)$

de tal forma que a imagen de $\mathcal{U}(\Im)$ por essa representação coincide com a álgebra associativa gerada pela imagem da representação de $\Im$. Assim obtemos um homomorfismo

$$\sigma : \mathcal{U}(\Im) \longmapsto End(S^\infty)$$

de álgebras associativas. Este homomorfismo, denotado tambem por σ, é chamado a **forma diferenciada** da representação σ de G.

Voltando ao grupo de Heisenberg temos que a sua álgebra de Lie, que denotaremos por ℓ_n, é dada por

$$\ell_n \cong T_{(0,0,1)}H^n = X \times X^* \times I\!R$$

Agora precisamos ver como está definido o colchete de Lie sobre ℓ_n e a aplicação exponencial de ℓ_n em H^n.

Proposição 1.3.7 *Dados* $(y_1, \eta_1, \tau_1), (y_2, \eta_2, \tau_2)$ *em* ℓ_n *tem-se que*

$$[(y_1, \eta_1, \tau_1), (y_2, \eta_2, \tau_2)] = (0, 0, \eta_1(y_2) - \eta_2(y_1)) \in \ell_n \quad \text{e}$$

$$\exp((y, \eta, \tau)) = (y, \eta, e(\tau + \frac{1}{2}\eta(y))) \in H^n$$

Demonstração: A tripla $(y_1, \eta_1, t_1) \in T_{(0,0,1)}H^n$ é a imagem de $(0, 0, 1)$ através de um campo vetorial (sobre H^n) invariante à esquerda. Seja X este campo, logo

$$\chi(h) = dL_h(\chi(\epsilon)), \qquad h = (x, \xi, z), \qquad \epsilon = (0, 0, 1)$$

onde L_h é a translação à esquerda sobre H^n.A representação matricial de dL_h que é uma aplicação linear é dada por

$$dL_h = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \xi & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I \text{ matriz identidade n} \times \text{n}.$$

Portanto,

$$\chi((x,\xi,z)) = dL_h((y_1,\eta_1,\tau_1)) = (y_1,\eta_1,\xi(y_1)+\tau_1).$$

Calculemos agora o fluxo Ψ^χ gerado por χ. Isto é, a curva integral $\Psi^\chi : IR \longmapsto H^n$ passando por $(0,0,1)$ tal que $\Psi(0) = (0,0,1)$ e $\Psi'(0) = \chi((0,0,1)) = (y_1,\eta_1,\tau_1)$. Este fluxo deve satisfazer a equação diferencial $\chi(\Psi^\chi(s)) = \frac{d}{ds}\Psi^\chi(s)$ que tem como solução

$$\Psi^\chi(s) = (sy_1, s\eta_1, e(s\tau_1 + \tfrac{s^2}{2}\eta_1(y_1))), s \in IR$$

Analogamente para (y_2,η_2,τ_2) o fluxo é $\Psi^\gamma(t)$ com γ campo vetorial invariante à esquerda tal que $(y_2,\eta_2,\tau_2) = \gamma(e)$. Logo,

$$\begin{aligned}
[(y_1,\eta_1,\tau_1),(y_2,\eta_2,\tau_2)] &= ad(\chi)\gamma = d(Ad)(\chi)\gamma \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Psi^\chi(s)\cdot\Psi^\gamma(t)\cdot\Psi^\chi(-s) \\
&= (0,0,\eta_1(y_2)-\eta_2(y_1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exp((y,\eta,\tau)) &= \Psi^\chi(1) \\
&= (y,\eta,e(\tau+\tfrac{1}{2}\eta(y)))
\end{aligned}$$

com o que a proposição fica demonstrada.□

Observação: A aplicação exp: $\ell_n \longmapsto H^n$ é sobrejetiva.

Achada a operação colchete de Lie para ℓ_n, vejamos que H^n é um grupo nilpotente.

Definição 1.3.8 *Um grupo de Lie G se diz que é* **nilpotente** *se sua álgebra de Lie $\Im$ é nilpotente.*

Definição 1.3.9 *Uma álgebra de Lie $\Im$ é nilpotente se, para cada $x \in \Im$, a transformação linear adx sobre $\Im$, definida por $adx(y) = [x,y]$ é nilpotente; i.é, se $(adx)^k = 0$ para algum k.*

Proposição 1.3.10 *O grupo de Heisenberg H^n é nilpotente 2-step; ou seja,*

$$(adx)^2 = 0, \quad x \in \ell_n.$$

Demontração: Segue da proposição 1.3.4.□

A estrutura multiplicativa de H^n pode ser expressada em termos da estrutura de ℓ_n como álgebra de Lie. Isto é feito mediante a fórmula de Campbell-Hausdorff.

Lema 1.3.11 *Para todo $a, b \in \ell_n$ temos:*

$$\exp a \exp b = \exp(a+b)\exp(\frac{1}{2}[a,b])$$

Demonstração: Segue sem dificuldades a partir da definição do colchete para ℓ_n e da operação de grupo sobre H^n.□

Seja lg: $H^n \longmapsto \ell_n$ uma aplicação inversa de exp. Considerando X como subconjunto de H^n temos que $x \in X$ pode ser identificado com $(x, 0, 1) \in H^n$ (ou seja, x está numa vizinhança de $(0, 0, 1)$ em H^n.) Assim, seja $\lg x = (x, 0, 0) \in \ell_n$ o gerador do grupo a 1- parametro

$$t \longmapsto \exp(t \lg x) = (tx, 0, 1) \in H^n$$

Similarmente para $\xi \in X^*$ seja $\lg \xi = (0, \xi, 0) \in \ell_n$ o elemento gerador do grupo a 1-parametro

$$t \longmapsto \exp(t \lg \xi) = (0, t\xi, 1) \in H^n$$

Pondo $\lg X = \{\lg x : x \in X\}$ e $\lg X^* = \{\lg \xi : \xi \in X^*\}$ temos o seguinte

Lema 1.3.12 *A álgebra de Lie ℓ_n decompõe-se em*

$$\ell_n = \lg X \oplus \lg X^* \oplus IR$$

Alem disso, para $x \in X$ e $\xi \in X^*$, se verificam as fórmulas:

(a) $[\lg \xi, \lg x] = (0, 0, \xi(x))$,

(b) $\exp(\lg \xi + \lg x) = (x, \xi, e(\frac{1}{2}\xi(x)))$

Demonstração: Consideremos os conjuntos $\lg X$ e $\lg X^*$ como subespaços de ℓ_n. Agora, existe uma identificação entre X com $\lg X$ e X^* com $\lg X^*$ e ja que a aplicação exp: $\ell_n \longmapsto H^n$ é sobre tem-se a decomposição

$$\ell_n = \lg H^n = \lg X \oplus \lg X^* \oplus IR$$

As formulas (a) e (b) seguem fácilmente da proposição 1.3.4.$\square$

Alem do mais tem-se o

Lema 1.3.13 *Para $f \in S^\infty \subsetneq L^2(X)$ obtem-se as seguintes formulas:*

(a) $(\rho(\lg x')f)(x) = \partial_{x'} f(x)$,

(b) $(\rho(\lg \xi)f)(x) = 2\pi i \xi(x) f(x)$

Demonstração: Da forma diferenciada de ρ temos

$$\begin{aligned}(a)\ \ (\rho(\lg x')f)(x) &= \lim_{t\to 0} t^{-1}\left[(\rho(\exp(t \lg x'))f)(x) - f(x)\right] \\ &= \lim_{t\to 0} t^{-1}\left[f(x - tx') - f(x)\right] \\ &= -\partial_{x'} f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\ \ (\rho(\lg \xi)f)(x) &= \lim_{t\to 0} t^{-1}\left[e(t\xi(x))f(x) - f(x)\right] \\ &= 2\pi i \xi(x) f(x).\square\end{aligned}$$

Observação: Notemos que $\rho(\ell_n)$ consiste precisamente dos operadores que satisfazem as relações de comutação canonica que são a base da mecanica quântica. Isto significa que o grupo H^n fornece um método eficiente de criar um calculo funcional para o processo classicamente conhecido como quantização. Neste processo interpreta-se funções de H^n em IR como observaveis clássicos (generalizados) e os operadores correspondentes em $U(L^2(X))$ como os observaveis quânticos associados.

O próximo resultado depende de um par de teoremas especializados da teoria de representações. Como a proposição em si não é essencial para nosso trabalho, damos uma demonstração incompleta citando referencias para os teoremas que necessitamos.

Proposição 1.3.14 **(a)** *$\rho(\mathcal{U}(\ell_n))$ é a álgebra de todos os operadores diferenciaveis com coeficientes polinomiais sobre X.*

(b) *O espaço de Schwartz $S(X)$ é justamente o espaço S^∞ de vetores diferenciaveis para ρ.*

Demonstração: **(a)** ℓ_n é um espaço vetorial de dimensão $2n+1 = \dim H^n$ e $\ell_n = \lg X \oplus \lg X^* \oplus IR$, logo uma base para ℓ_n é

$$\{\lg x_1, ..., \lg x_n, \lg \xi_1, ..., \lg \xi_n, 1\}$$

com $\{\lg x_1, ..., \lg x_n\}, \{\lg \xi_1, ..., \lg \xi_n\}$ e $\{1\}$ bases de $\lg X$, $\lg X^*$ e IR respectivamente. Pelo teorema Poincaré-Birkhoff-Witt (veja [12]) tem-se que os elementos da forma

$$(\lg x_1)^{m_1} \otimes \cdots \otimes (\lg x_n)^{m_n} \otimes (\lg \xi_1)^{m_{n+1}} \otimes \cdots \otimes (\lg \xi_n)^{m_{2n}} \otimes 1^{m_{2n-1}}$$

com os m_i inteiros não negativos forma uma base para $\mathcal{U}(\ell_n)$.Deste modo, se $Z \in \mathcal{U}(\ell_n)$, então

$$Z \;=\; \sum\nolimits_{m=(m_1,...,m_{2n-1})} a_{m_1...m_{2n-1}} (\lg x_1)^{m_1} \otimes \cdots \otimes (\lg x_n)^{m_n} \otimes$$

$$\otimes (\lg \xi_1)^{m_{n+1}} \otimes \cdots \otimes (\lg \xi_n)^{m_{2n}} \otimes 1^{m_{2n-1}}.$$

com os $a_{m_{i_1}\dots m_{i_{2n+1}}}$ em IR e se $f \in S^{\infty}$ então

$$\begin{aligned}
(\rho(Z)f)(x) &= \sum_m a_{m_1\dots m_{2n+1}}[\rho\{(\lg x_1)^{m_1} \otimes \cdots \otimes (\lg x_n)^{m_n} \otimes \\
&\quad \otimes (\lg \xi_1)^{m_{n+1}} \otimes \cdots \otimes (\lg \xi_n)^{m_{2n}} \otimes 1\} f](x) \\
&= \sum_m a_{m_1\dots m_{2n+1}}[\rho\{(\lg x_1)^{m_1})\dots\rho((\lg x_n)^{m_n}) \\
&\quad \rho((\lg \xi_1)^{m_{n+1}})\dots\rho((\lg \xi_n)^{m_{2n}})\rho(1)f](x) \\
&= \sum_m a_{m_1\dots m_{2n+1}}(-1)^{m_1+\dots m_n}\partial_{x_1}^{m_1}\cdots\partial_{x_n}^{m_n}[\rho((\lg \xi_1)^{m_{n+1}})\dots \\
&\quad \dots\rho((\lg \xi_n)^{m_{2n}})\rho(1)f](x) \\
&= \sum_m a_{m_1\dots m_{2n+1}}(-1)^{m_1+\dots+m_n}(2\pi i)^{m_{n+1}+\dots+m_{2n}+m_{2n+1}}\xi_1(x)^{m_{n+1}}\dots \\
&\quad \dots\xi_n(x)^{m_{2n}}(\partial_{x_1}^{m_1}\dots\partial_{x_n}^{m_n}f)(x).
\end{aligned}$$

A expressão acima define um operador diferencial com coeficientes polinomiais.

(b) Pela forma explícita de ρ, se $f \in S(X)$ então é imediato que $f \in S^{\infty}$. Ver [10] para a outra inclusão.

Capítulo 2

Teorema de Stone-von Neumann

Seja G um grupo localmente compacto, $\widehat{G}$ seu dual unitario, isto é, o conjunto de todas as representações unitarias irredutíveis de G. Um problema importante em análise harmônica é identificar $\widehat{G}$; (quando G é abeliano ou compacto. $\widehat{G}$ é conhecido). Para o grupo de Heisenberg H^n o teorema de Stone-von Neumann (que está nos fundamentos da mecanica quântica) dará resposta a esta questão.

2.1 A Restrição Polarizada.

Consideremos $f \in C_c^\infty(H^n)$. Definamos a translação à esquerda sobre $C_c^\infty(H^n)$ por

$$L_h f(h') = f(h^{-1}h'), \quad h, h' \in H^n$$

para a qual temos o seguinte:

Lema 2.1.1 *Da forma integrada para ρ temos a relação:*

$$\rho(L_z f) = z\rho(f), \qquad z \in T \subseteq H^n$$

Demonstração:

$$\rho(L_z f) = \int_{H^n} L_z f(h)\rho(h)dh = \int_{H^n} f(z^{-1}h)\rho(h)dh$$

Pondo $z^{-1}h = h'$ temos $dh' = dh$. Logo

$$\begin{aligned} \rho(L_z f) &= \int_{H^n} f(h')\rho(zh')dh' &= \int_{H^n} f(h')z\rho(h')dh' \\ &= z\int_{H^n} f(h')\rho(h')dh &= z\rho(f). \end{aligned}$$

Definimos para $f \in C_c^\infty(H^n)$

$$^\circ f = \int_T z^{-1} L_z f dz$$

onde dz é a medida de Lebesgue sobre T com massa total igual a 1 (i.é, $\int_T dz = 1$). É claro que $^\circ f \in C_c^\infty(H^n)$.

Um resultado imediato é o seguinte

Lema 2.1.2 *Para a definição dada acima verificam-se as formulas:*

(a) $\rho(^\circ f) = \rho(f)$.

(b) $L_z(^\circ f) = z(^\circ f)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} (a)\ \rho(^\circ f) &= \int_{H^n} (^\circ f)(h)\rho(h)dh &= \int_{H^n} \rho(h)\left(\int_T z^{-1}L_z f(h)dz\right)dh \\ &= \int_T z^{-1}\left(\int_{H^n} \rho(h)L_z f(h)dh\right)dz &= \int_T z^{-1}\rho(L_z f)dz \end{aligned}$$

e pelo lema 2.1.1 obtem-se que

$$\rho(^\circ f) = \rho(f)\int_T dz = \rho(f)$$

$$\begin{aligned}(b)L_z(^\circ f)(h) &= (^\circ f)(z^{-1}h) = \int_T w^{-1}L_w f(z^{-1}h)dw, \quad w \in T \\ &= \int w^{-1}f((zw)^{-1}h)dw = \int_T zu^{-1}f(u^{-1}h)du, \quad u = zw \\ &= z(^\circ f)(h). \square\end{aligned}$$

A igualdade (b) do lema 2.1.2 nos leva a definir o conjunto

$$C_c^\infty(H^n, \epsilon) = \{f \in C_c^\infty(H^n) : L_z(f) = zf, \; z \in T\}$$

que é um subespaço de $C_c^\infty(H^n)$. Notando que $^\circ f \in C_c^\infty(H^n, \epsilon)$, então temos o

Lema 2.1.3 *A aplicação $^\circ : f \longmapsto (^\circ f)$ é uma projeção de $C_c^\infty(H^n)$ sobre $C_c^\infty(H^n, \epsilon)$; isto é, $^\circ$ é um operador linear sobre $C_c^\infty(H^n)$ com $^\circ(^\circ f) = (^\circ f)$. Alem disso, $Im(^\circ) = C_c^\infty(H^n, \epsilon)$ e $Ker(^\circ)$ são ideais (de convolução) em $C_c^\infty(H^n)$.*

Demonstração: É obvio que $^\circ(\alpha f_1 + f_2) = \alpha(^\circ f_1) +^\circ f_2$, para $f_1, f_2 \in C_c^\infty(H^n)$ e $\alpha \in I\!R$. Da definição de $^\circ$ e com o auxilio do teotema de Fubini obtem-se sem maiores problemas que $^\circ(^\circ f) =^\circ f$, se $f \in C_c^\infty(H^n)$. Mas, se $f \in C_c^\infty(H^n, \epsilon)$ temos $^\circ f = \int_T z^{-1}L_z f dz = \int_T z^{-1}zfdz = f$ e $f \in Im(^\circ)$ com o que $C_c^\infty(H^n, \epsilon) = Im(^\circ)$.Não é difícil ver que $Im(^\circ)$ e $Ker(^\circ)$ são ideais em $C_c^\infty(H^n)$. Portanto

$$C_c^\infty(H^n) = C_c^\infty(H^n, \epsilon) \oplus Ker(^\circ). \square$$

Observação: A formula (a) do lema 2.1.2 implica que $Ker(^\circ) \subseteq Ker(\rho)$. Logo, existe uma única transformação linear φ de $C_c^\infty(H^n)/Ker(^\circ)$ no espaço dos operadores limitados sobre $L^2(X)$ tal que $\varphi_\circ\pi = \rho$ donde π é a projeção canônica de $C_c^\infty(H^n)$ sobre $C_c^\infty(H^n)/Ker(^\circ)$. Alem disso, $Im(\varphi) = Im(\rho)$ e pelo 2° teorema do isomorfismo temos que

$$C_c^\infty(H^n)/Ker(^\circ) \cong C_c^\infty(H^n, \epsilon)$$

Isto significa que ρ se fatora através da projeção $^{\circ}$, de modo que, em diante, para nosso estudo de ρ será suficiente considerar funções em $C_c^\infty(H^n,\epsilon)$.

T é um subgrupo fechado de H^n, logo existem **cross-sections** das T-classes (à esquerda) em H^n. Ou seja, existem aplicações contínuas ψ de $H^n/T \cong X \times X^*$ em H^n de modo que $p_\circ\psi(\overline{x}) = \overline{x}$, para todo $\overline{x}$ em H^n/T donde p é a projeção de H^n sobre H^n/T. (Veja [9] sobre fibrados e cross-sections). Assim, para conhecer f em $C_c^\infty(H^n,\epsilon)$ somente necesitamos conhecela sobre uma cross- section de T em H^n. Uma cross-section conveniente para alguns de nossos propósitos é a que definimos a seguir

Definição 2.1.4 *O conjunto* $\Gamma = \{(x,\xi,1) : x \in X,\ \xi \in X^*\} \subseteq H^n$ *(que é a imagem da aplicação* $H^n/T \longmapsto H^n$, $(x,\xi) \mapsto (x,\xi,1)$ *) é chamado a* **restrição polarizada.** *Esta restrição será usada para transferir funções em* $C_c^\infty(H^n,\epsilon)$ *a funções sobre* $X \times X^*(\cong X \oplus X^*)$.

Lema 2.1.5 *A aplicação* $r : C_c^\infty(H^n,\epsilon) \longmapsto C_c^\infty(X \oplus X^*)$ *definida por*

$$r(f)(x,\xi) = f((x,\xi,1)), \quad f \in C_c^\infty(H^n,\epsilon)$$

é um isomorfismo (de espaços vetoriais topológicos).

Demonstração: Que r e r^{-1} são contínuas segue fácilmente e assim r é um homeomorfismo.$\square$

Por transporte de estrutura podemos definir um produto de convolução (transferido de $C_c^\infty(H^n,\epsilon)$) para funções em $C_c^\infty(X \oplus X^*)$.

Definição 2.1.6 *Para* f_1 *e* f_2 *em* $C_c^\infty(X \oplus X^*)$ *definimos*

$$f_1 \# f_2 = r(r^{-1}(f_1) * r^{-1}(f_2))$$

e assim $C_c^\infty(X \oplus X^*)$ *converte-se em uma álgebra de convolução.*

Lema 2.1.7 *A formula explícita para* $f_1 \# f_2$ *é*

$$f_1 \# f_2(x',\xi') = \int\limits_{X \oplus X^*} f_1(x,\xi) f_2(x'-x,\xi'-\xi)\epsilon(\xi(x'-x))dxd\xi$$

Demonstração: Como $r^{-1}(f_2) \in C_c^{\infty}(H^n, e)$ temos

$$\begin{aligned}
f_1 \# f_2(x', \xi') &= r(r^{-1}(f_1) * r^{-1}(f_2))(x', \xi') = r^{-1}(f_1) * r^{-1}(f_2)(x', \xi', 1) \\
&= \int_{H^n} r^{-1}(f_1)(x, \xi, 1) r^{-1}(f_2)((x, \xi, 1)^{-1}(x', \xi', 1)) dx d\xi dz \\
&= \int_{H^n} r^{-1}(f_1)(x, \xi, 1) r^{-1}(f_2)(x' - x, \xi' - \xi, e(\xi(x - x'))) dx d\xi dz \\
&= \int_{X \oplus X^*} f_1(x, \xi) f_2(x' - x, \xi' - \xi) e(\xi(x' - x)) dx d\xi . \square
\end{aligned}$$

Observação: O produto de convolução sobre $C_c^{\infty}(H^n, e)$ transferido a Γ é a convolução sobre $X \oplus X^*$.

Uma formula explícita que será muito importante no resto do capítulo é a da forma integrada de ρ.

Lema 2.1.8 *Para f em $C_c^{\infty}(H^n, e)$ e ϕ em $S(X)$ temos*

$$(\rho(f)\phi)(x') = \int_X K_\rho(f)(x', u)\phi(u) du$$

onde $K_\rho(f)(x', u) = (\mathcal{F}_2^{-1} r(f))(x' - u, u)$ e $\mathcal{F}_2^{-1} : S(X \oplus X^*) \longmapsto S(X \oplus X)$ é a transformada de Fourier parcial (na segunda variavel) que é definida por

$$(\mathcal{F}_2^{-1} F)(x, x') = \int_{X^*} F(x, \xi) e(\xi(x')) d\xi, \quad F \in S(X \oplus X^*)$$

Demonstração: Da forma integrada de ρ e lema 2.1.5 obtemos

$$
\begin{aligned}
(\rho(f)\phi)(x') &= \int_{H^n} f(x,\xi,1)(\rho(x,\xi,1)\phi)(x')dxd\xi dz \\
&= \int_{X\oplus X^*} r(f)(x,\xi)(\rho(x)\rho(\xi)\phi)(x')dxd\xi \\
&= \int_{X\oplus X^*} r(f)(x,\xi)e(\xi(x'-x))\phi(x'-x)dxd\xi \\
&= \int_X \left(\int_{X^*} r(f)(x'-u,\xi)e(\xi(u))d\xi\right)\phi(u)du, \ \ x'-x=u \\
&= \int_X \mathcal{F}_2^{-1}r(f)(x'-u,u)\phi(u)du \\
&= \int_X K_\rho(f)(x',u)\phi(u)du.
\end{aligned}
$$

Observação: $\rho(f)$ é um operador integral com kernel $K_\rho(f) \in S(X\oplus X)$. Logo, a ação de $\rho(f)$ sobre $S(X)$ é dada pelo kernel $K_\rho(f)$ e temos uma correspondencia 1-1 entre o conjunto dos operadores integrais com kernel e $S(X\oplus X)$.

2.2 O teorema de Stone-von Neumann

Neste paragrafo veremos que ρ é a única representação unitaria irredutível de H^n.

Definição 2.2.1 *Seja G um grupo de Lie e sejam σ_1 e σ_2 duas representações de G sobre V_1 e V_2 (espaços de Hilbert) respectivamente. Então σ_1 e σ_2 se dizem* **unitariamente equivalentes** *se existe um operador unitario A de V_1 sobre V_2 tal que*

$$A\sigma_1(g) = \sigma_2(g)A, \quad \forall g \in G$$

A noção de equivalencia de representações é reflexiva, simétrica e transitiva. Logo, pode-se decompor o conjunto de todas as representações de G em classes de equivalencia. Este conjunto é $\widehat{G}$, o dual (unitario) de G. Se G é abeliano, tem-se que $\widehat{G}$ é o conjunto dos caracteres sobre G. (Veja [6]).

Definição 2.2.2 *Seja G um grupo abeliano. Um* **carácter** *sobre G é um homomorfismo continuo λ de G em T (nosso círculo unitario).*

Observação: Se G é localmente compacto com centro Z e σ é uma representação irredutível de G sobre um espaço vetorial S, então para todo $z \in Z$, $\sigma(z)$ comuta com todos os $\sigma(g)$, $g \in G$. Pelo lema de Schur (ver [10]) temos que

$$\sigma(z) = \lambda_\sigma(z) \cdot id_S$$

onde λ_σ é um carácter sobre o centro Z, chamado **carácter central** de σ.

Teorema 2.2.3 (Stone-von Neumann). *A representação ρ, a menos de equivalencia unitaria, é a única representação unitaria irredutível de H^n com carácter central a identidade; i.é*

$$\rho(z)f = \lambda_\rho(z)f = zf, \quad z \in T$$

A demonstração deste importante teorema será uma consecuencia de uma variante do teorema de Stone von-Neumann (que abreviaremos por S-vN), o teorema forte de S-vN.

Seja

$$S(H^n, \epsilon) = \{f \in S(H^n) : L_z(f) = zf, \ z \in T\}$$

Como $C_c^\infty(H^n, \epsilon) \subseteq S(H^n, \epsilon)$, então as formulas desenvolvidas para $C_c^\infty(H^n, \epsilon)$ em seção 2.1 se estendem a $S(H^n, \epsilon)$ pois $C_c^\infty(H^n)$ é denso em $S(H^n)$.Analogamente

$$L^2(H^n, \epsilon) = \left\{f \in L^2(H^n) : L_z(f) = zf, \ z \in T\right\}$$

Teorema 2.2.4 (Forte de S-vN). *A aplicação*

$$\rho : S(H^n, \epsilon) \longmapsto End(S(X))$$

$$f \quad \longmapsto \quad K_\rho(f)$$

é um isomorfismo da álgebra de convolução $S(H^n, e)$ na álgebra dos operadores integrais sobre $S(X)$ com kernels em $S(X \oplus X)$. Alem disto, ρ se estende a um isomorfismo isomêtrico

$$\rho : L^2(H^n, e) \longmapsto H.S(L^2(X))$$

de $L^2(H^n, e)$ com a álgebra $H.S(L^2(X))$ de todos os operadores Hilbert-Schmidt sobre $L^2(X)$ com kernels em $L^2(X \oplus X)$.

Observações:

(a) $H.S(L^2(X)) = \left\{ \int_X K(x, y)\phi(y)dy,\ \phi \in L^2(X) \text{ e } K \in L^2(X \oplus X) \right\}$

(b) $H.S(L^2(X))$ é um ideal fechado em $B(L^2(X))$, a algebra dos operadores limitados sobre $L^2(X)$.

(c) Se $A \in H.S(L^2(X))$ então A é um operador compacto. (Veja [8]).

Demonstração: Pelo teorema de Plancherel, a transformada de Fourier $\hat{\ }_2^{-1} : S(X \oplus X^*) \longmapsto S(X \oplus X)$ se estende a um isomorfismo unitario de $L^2(X \oplus X^*)$ em $L^2(X \oplus X)$. Assim

$$\begin{aligned}
\|\rho(f)\|^2_{H.S(L^2(X))} &= \|K_\rho(f)\|^2_{L^2(X)} = \|\hat{\ }_2^{-1} r(f)\|^2_{L^2(X \oplus X)} = \|r(f)\|^2_{L^2(X \oplus X^*)} \\
&= \int_{X \oplus X^*} |r(f)(x, \xi)|^2 \, dx d\xi = \int_{H^n} |zf(x, \xi, z)|^2 \, dx d\xi dz \\
&= \|f\|^2_{L^2(H^n, e)}
\end{aligned}$$

e ρ é um isometria.$\square$

Agora, vamos à demonstração do teorema de S-vN. Mas antes definiremos uma funcão que fornece uma ligação entre o trabalho abstracto de representações e espaços concretos de funções.

Definição 2.2.5 *Novamente, seja σ uma representação unitaria de um grupo de Lie G sobre um espaço de Hilbert S. Para arbitrarios $u, v \in S$, a função $g \longmapsto (\sigma(g)u, v)$ $(g \in G)$ denotada por $\varphi_{u,v}$ é chamada um* **elemento matricial** *da representação σ.*

Observação: $\varphi_{u,v} \in C^{\infty}(G)$.

Demonstração (teorema 2.2.3): Seja ρ' outra representação unitaria irredutivel de H^n, então deve-se provar que ρ' é equivalente a ρ. Suponha o contrario; i.é que ρ' não é equivalente a ρ. Pelo teorema 2.2.4, $S(H^n, \epsilon)$ é levado pela representação ρ no conjunto dos operadores integrais com kernels em $S(X \oplus X)$. Logo, se $f \in S(H^n, \epsilon)$, então f é um elemento matricial de ρ e portanto f é representado por zero pela representação ρ', o que é uma contradição. Assim, ρ é a única representação unitaria irredutivel de H^n; i.é

$$\widehat{H} = \{[\rho]\}, \text{ onde } [\rho] \text{ denota a classe de equivalencia de } \rho. \square$$

Observação: O teorema de S-vN afirma então que os operadores $\rho(\lg x)$ e $\rho(\lg \xi)$ (veja lema 1.3.6), de momento e posição, são, a menos de equivalencia unitaria, a única realização das relações de comutação canonica da mecanica quântica.

Temos visto assim que o teorema de Plancherel implica o teorema de S-vN.

Alem da unicidade de ρ, teorema forte de S-vN implica que ρ é uma representação quadrado-integravel.

Definição 2.2.6 *Dizemos que σ é quadrado-integravel se todos os seus elementos matriciais pertencem a $L^2(G)$.*

Corolário 2.2.7 *A representação ρ é quadrado-integravel.*

Observação: Quadrado-integrabilidade é uma coisa natural para incluir na descrição de ρ pelo teorema de Moore-Wolf.(Veja [7]).

Reciprocamente, unicidade mais quadrado-integrabilidade de ρ implicam que $\rho : L^2(H^n, \epsilon) \longmapsto H.S.(L^2(X))$ é uma isometria. Disto e da formula $K_\rho(f)(x, u) = (\hat{}_2^{-1} r(f))(x-u, u)$, não é difícil ver que $\hat{}_2^{-1}$ (e daqui $\hat{}$ e $\hat{}^{-1}$) é unitario. Isto significa que o grupo de Heisenberg também nos leva à prova do teorema de Plancherel.

Em resumo, sobre L^2 temos a seguinte equivalencia:

$$
\begin{aligned}
\text{Teorema forte de SvN} &= \{\text{unicidade} + \text{quadrado integrabilidade de } \rho\} \\
&\Leftrightarrow \rho : L^2(H^n, \epsilon) \mapsto H.S.(L^2(X)) \text{ isomorfismo isometrico} \\
&\Leftrightarrow \hat{} : L^2(X) \mapsto L^2(X^*) \text{ isomorfismo unitario} \\
&= \text{Teorema de Plancherel.}
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

O Símbolo Isotrópico

Um dos temas mais importantes na teoria de equações diferenciais parciais foi desenvolver um cálculo operacional explícito para tratar varias classes gerais de equações lineares. Existe um tipo de cálculo baseado na teoria de operadores pseudo-diferenciais (abreviado OPD 's), uma teoria que está desenvolvida em grande parte dentro da teoria de análise de Fourier abeliana; logo não é surprendente que esta teoria possa ser estudada usando o grupo de Heisenberg. Agora, um dos aspectos mais importantes na teoria de OPD 's é a aplicação símbolo que se ajusta muito bem no ambito da teoria de grupos. Neste capítulo será mostrado que a aplicação símbolo e o cálculo simbólico, que serão definidos aqui para o grupo de Heisenberg, estão intimamente relacionados à aplicação símbolo e cálculo simbólico usuais da teoria de OPD's.

3.1 Operadores Pseudo-diferenciais

Consideremos um operador diferencial parcial linear de ordem m definido sobre o espaço euclideano n-dimensional IR^n:

$$(Pf)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha f(x).$$

Ao operador P associamos-lhe o polinomio

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha,$$

com $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in I\!R^n$ e $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$

Definição 3.1.1 *O polinomio $p(x,\xi)$ é chamado o* **símbolo** *de P.*

Sabemos que $(D_{x_j}f)\hat{}(\xi) = \xi_j\widehat{f}(\xi)$ e $(x_j\ f\ )\hat{}(\xi) = -D_{\xi_j}\widehat{f}(\xi)$ onde $\widehat{f}(\xi)$ denota a transformada de Fourier de $f(x)$. Portanto, quando P é um operador com coeficientes constantes, seu símbolo é um polinomio em $\xi : p(x,\xi) = \sum_{\alpha\leq m} a_\alpha\xi^\alpha$, com os a_α constantes e não é difícil ver que $(Pf)\hat{}(\xi) = p(\xi)\widehat{f}(\xi)$. Daqui, o operador diferencial é convertido numa operação algébrica: multiplicação pelo polinomio $p(\xi)$. Este é o maior motivo porque a transformada de Fourier é um instrumento efetivo para o estudo de equações diferenciais parciais (abreviado EDP's) lineares com coeficientes constantes. Mas para EDP's com coeficientes variaveis a situação não é tão simples. Por exemplo, consideremos o operador P dado por $(Pf\ )(x) = D_x^2 f(x) + x^2 f(x)$, cujo símbolo tem coeficientes polinomiais em $I\!R$. Então, $(Pf)\hat{}(\xi) = \xi^2\widehat{f}(\xi) + D_\xi^2\widehat{f}(\xi)$ em $I\!R$ e $(Pf)\wedge(\xi)$ tem a mesma forma que $(Pf)(x)$. Logo, neste caso a situação não é simplificada usando a transformada de Fourier. Como $(D_x^\alpha f)\wedge(\xi) = (2\pi i)^\alpha\,\xi^\alpha\widehat{f}(\xi)$, então pela fórmula de inversão de Fourier temos

$$D_x^\alpha f(x) = \int_{I\!R^n} e^{2\pi i(x,\xi)}\xi^\alpha\widehat{f}(\xi)d\xi$$

Portanto, usando o símbolo $p(x,\xi)$, o operador $(Pf)(x)$ pode ser escrito na forma

$$(Pf)(x) = \int_{I\!R^n} e^{2\pi i(x,\xi)}p(x,\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi$$

Definição 3.1.2 *Para uma função geral $p(x,\xi)$ (i.é, se $p(x,\xi)$ não é um polinomio) dizemos que P dado pela última expressão acima é um* **operador pseudo-diferencial** *com símbolo $p(x,\xi)$.*

Exemplo: A tranformada de Hilbert

$$(Hf)(x) = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y}dy$$

que pode ser escrita na forma

$$(Pf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x\cdot\xi}(-\pi i sgn(\xi))\hat{f}(\xi)d\xi$$

é um operador pseudo-diferencial com símbolo $p(\xi) = -\pi i sgn(\xi)$. (Ver [4]).

Consequentemente, o objetivo da teoria dos OPD's é converter a teoria de EDP's lineares com coeficientes variaveis numa teoria algebrica dos símbolos correspondentes através da transformada de Fourier.

Agora veremos que existe uma relação entre operadores sobre $S(X)$ (em particular OPD's sobre $S(X)$) e distribuições sobre H^n.

Sejam $S^*(H^n, \epsilon)$ e $S^*(X \times X)$ os espaços duais de $S(H^n, \epsilon)$ e $S(X \times X)$ respectivamente. Então

Lema 3.1.3 *O conjunto $S^*(H^n, \epsilon)$ é o espaço das distribuições D sobre H^n tal que $L_z(D) = zD$, $z \in T$ e $r(D)$ são distribuições temperadas.*

Demonstração: De fato, toda forma linear sobre $S(H^n, \epsilon)$ é um funcional linear contínuo sobre $C_c^\infty(H^n, \epsilon)$. Agora, a translação à esquerda definida para funções sobre H^n pode ser estendida para distribuições da seguinte forma:

$$L_z(D)(f) = D(L_z(f)); \quad D \in S^*(H^n, \epsilon), \quad f \in C_c^\infty(H^n, \epsilon)$$

Se $h = z \in T$ temos

$$L_z(D)(f) = D(L_z f) = D(zf) = zD(f)$$

Finalmente, a aplicação $r : S(H^n, \epsilon) \longmapsto S(X \times X^*)$ também se estende a uma aplicação, de novo denotada r, de $S^*(H^n, \epsilon)$ em $S^*(X \times X^*)$. Com isso, se $D \in S^*(H^n, \epsilon)$ então $r(D) \in S^*(X \times X^*)$ e $r(D)$ é uma distribuição temperada.$\Box$

O teorema de Stone-von Neumann diz que $S(H^n, e)$ é levado pela representaçãao ρ na álgebra de todos os operadores continuos sobre $S(X)$ com kernels em $S(X \times X)$. Isto implica o seguinte resultado

Lema 3.1.4 *A representação ρ se estende a um isomorfismo linear*

$$\rho : S^*(H^n, e) \longmapsto S^*(X \times X)$$

$$D \quad \longmapsto \quad K_\rho(D)$$

Demonstração: A transformada de Fourier sobre $S(X)$ pode ser estendida ao espaço das distribuições temperadas sobre X.Assim,

$$K_\rho(D)(f) = [\mathcal{F}_2^{-1}(r(D))](f) = r(D)(\mathcal{F}_2(f)), \; f \in S(X \times X)$$

onde $\mathcal{F}_2^{-1}$ é a transformada de Fourier parcial introduzida no lema 2.1.8.Como não é possivel convoluir dois elementos arbitrarios de $S^*(H^n, e)$, então devemos fazer alguma restrição. Seja $\mathsf{A} \subseteq S^*(H^n, e)$ qualquer subálgebra de convolução (por exemplo, distribuições de suporte compacto, $L^1(H^n, e)$). Assim, para D_1 e D_2 em A temos

$$\rho(D_1 * D_2) = \rho(D_1) \# \rho(D_2)$$

onde # seria o produto de convolução sobre a subálgebra $\rho(\mathsf{A}) \subseteq S^*(X \times X)$.$\square$

Observações:

(a) O teorema do Kernel de Schwartz (veja [11] para este e os outros aspectos de teoria de distribuições tratados nesta parte) identifica o espaço $S^*(X \times X)$ com o espaço de todas as aplicações continuas de $S(X)$ em $S^*(X)$; i.é,

$$S^*(X \times X) \cong Hom(S(X), S^*(X))$$

Daqui, todo operador contínuo sobre $S(X)$, ou de $S(X)$ em $S^*(X)$ pode ser visto como que provém, via ρ, de uma distribuição sobre H^n. Em particular, os operadores pseudo-diferenciais sobre $S(X)$. Portanto, podemos considerar a álgebra de todos os operadores limitados sobre $S(X)$ como sendo uma certa álgebra de distribuições sobre H^n.

(b) $K_\rho(D_1 * D_2) = K_\rho(D_1) \circ K_\rho(D_2)$, se $D_1, D_2 \in \mathsf{A} \subseteq S^*(H^n, e)$.

3.2 A Restrição Isotrópica

Existe uma outra cross-section de T em H^n que vai ser a peça chave para definir o símbolo de um OPD no sentido de Heisenberg (ou seja, sob o ponto de vista das distribuições sobre H^n): o símbolo isotrópico.

Definição 3.2.1 *A cross-section definida por*

$$\exp(lgX \oplus \lg X^*) = \left\{(x, \xi, e(\frac{1}{2}\xi(x))) : x \in X,\ \xi \in X^*\right\} \subseteq H^n$$

é chamada a **restrição isotrópica**.

Observação: Pondo $W = \lg X \oplus \lg X^*$ temos que W é um espaço vetorial real, um subespaço de ℓ_n e $\exp W$ é a restrição isotrópica.

Como foi visto no capítulo 1, existem isomorfismos lineares $X \longmapsto \lg X$ e $X^* \longmapsto \lg X^*$. Logo, existe um isomorfismo linear

$$X \oplus X^* \longmapsto \lg X \oplus \lg X^* = W$$

$$(x, \xi) \quad \longmapsto \quad (\lg x, \lg \xi)$$

que será usado para transferir funções sobre $X \oplus X^*$ a funções sobre W ou viceversa.

Definição 3.2.2 *Seja V um espaço vetorial. Uma* **forma simplética** *sobre V é uma forma bilinear $\sigma : V \times V \longmapsto \mathbb{R}$ que é anti-simétrica $(\sigma(u,v) = -\sigma(v,u))$ e não degenerada; i.é, se $\sigma(u,v) = 0$ para todo $v \in V$, então $u = 0$.*

A operação colchete de Lie em ℓ_n induz uma forma simplética $\langle\ ,\ \rangle$ sobre W da seguinte maneira:

$$\langle(\lg x, \lg \xi), (\lg x', \lg \xi')\rangle = [(\lg x, \lg \xi), (\lg x', \lg \xi')] = \xi(x') - \xi'(x)$$

Assim o par $(W, \langle\ ,\ \rangle)$ é um espaço vetorial simplético com $\dim W = 2n$.

Observação: Um espaço vetorial simplético é um caso especial de uma variedade simplética (ver [16]) que é o objeto básico da mecanica classica.

Agora, como no capítulo 2, será suficiente considerar funções em $S(H^n, \epsilon)$ sobre $\exp W$.

Lema 3.2.3 *A aplicação $s : S(H^n, \epsilon) \longmapsto S(W)$ dada por*

$$s(f)(w) = f(\exp w), \quad f \in S(H^n, \epsilon)$$

define um isomorfismo.

Demontração: Basta considerar $C_c^\infty(W)$.

É possivel comparar a aplicação r do lema 2.2.5 e a aplicação do lema anterior.

Lema 3.2.4 *Para f em $S(H^n, \epsilon)$ temos*

$$r(f)(x, \xi) = \epsilon(\frac{1}{2}\xi(x))s(f)(\lg x, \lg \xi)$$

Demonstração: De (b) do lema 1.3.5, lema 2.2.5 e (b) do lema 2.1.2 obtem-se:

$$\begin{aligned} e(\tfrac{1}{2}\xi(x))s(f)(\lg x, \lg \xi) &= e(\tfrac{1}{2}\xi(x))f(\exp(\lg x + \lg \xi)) \\ &= e(\tfrac{1}{2}\xi(x))f(x, \xi . e(\tfrac{1}{2}\xi(x))) \\ &= r(f)(x, \xi). \square \end{aligned}$$

Novamente, como no capítulo anterior, podemos transportar a estrutura de álgebra de convolução sobre $S(H^n, \epsilon)$ a $S(W)$.

Definição 3.2.5 *Para f_1 e f_2 em $S(W)$ definimos*

$$f_1 \natural f_2 = s(s^{-1}(f_1) * s^{-1}(f_2))$$

o produto de convolução sobre $S(W)$.

Será muito interessante dar uma formula explícita para esta convolução, mas antes uma observação importante.

Lema 3.2.6 *Todo elemento de H^n pode ser escrito como um par*

$$(\exp w, z) = \exp w \cdot (0, 0, z), \quad w \in W, \quad z \in T.$$

A lei de grupo em H^n toma então a forma

$$(\exp w, z)(\exp w', z') = \left(\exp(w + w'), \ zz'\epsilon(\frac{1}{2}\langle w, w' \rangle)\right)$$

Demonstração: Seja $h = (x, \xi, z')$ um elemento de H^n. De (b) do lema 1.3.5 vemos que

$$\begin{aligned}
(x, \xi, z') &= (x, \xi, 1) \cdot (0, 0, z') \\
&= (x, \xi, e(\tfrac{1}{2}\xi(x))) \cdot (0, 0, e(-\tfrac{1}{2}\xi(x))) \cdot (0, 0, z') \\
&= (x, \xi, e(\tfrac{1}{2}\xi(x))) \cdot (0, 0, z), \ z = z'e(-\tfrac{1}{2}\xi(x)) \\
&= \exp w \cdot (0, 0, z), w = (\lg x, \lg \xi) \\
&= (\exp w, z)
\end{aligned}$$

Se $w = (\lg x, \lg \xi)$ e $w' = (\lg x', \lg \xi')$, então $w + w' = (\lg(x + x'), \lg(\xi + \xi'))$ e $\langle w, w' \rangle = \xi(x') - \xi'(x)$. Logo

$$\Big(\exp(w + w'),\ zz'e(\tfrac{1}{2}\langle w, w' \rangle)\Big) = \exp(w + w') \cdot (0, 0, zz'e(\tfrac{1}{2}\langle w, w' \rangle))$$

$$= \Big(x + x', \xi + \xi', e(\tfrac{1}{2}(\xi + \xi')(x + x')) \cdot (0, 0, zz'e(\tfrac{1}{2}\xi(x') - \tfrac{1}{2}\xi'(x))\Big)$$

$$= (x, \xi, e(\tfrac{1}{2}\xi(x))) \cdot (0, 0, z) \cdot (x', \xi', e(\tfrac{1}{2}\xi'(x'))) \cdot (0, 0, z')$$

$$= (\exp w, z) \cdot (\exp w', z'). \square$$

Isto é, a lei de grupo sobre H^n fica expressada em termos da estrutura de W como espaço vetorial simplético.

Lema 3.2.7 *Para f_1 e f_2 em $S(W)$ temos*

$$f_1 \natural f_2(w') = \int_W f_1(w) f_2(w'-w) e(\tfrac{1}{2}\langle w, w'\rangle)\, dw$$

onde dw é a medida de Lebesgue sobre W.

Demonstração:

$$\begin{aligned} f_1 \natural f_2(w') &= s(s^{-1}(f_1) * s^{-1}(f_2))(w') = s^{-1}(f_1) * s^{-1}(f_2)(\exp w') \\ &= \int_{H^n} s^{-1}(f_1)(\exp w') s^{-1}(f_2)((\exp w)^{-1} \exp w')\, d(\exp w) \end{aligned}$$

Pela formula de Campbell-Hausdorff, tem-se que

$$(\exp w)^{-1} \exp w' = \exp(-w) \exp w' = \exp(-w + w') \cdot \exp(\frac{1}{2}[-w, w'])$$

$$= \exp(-w + w') \cdot e(\frac{1}{2}\langle w', w\rangle)$$

e como $s^{-1}(f_2) \in S(H^n, e)$ obtemos

$$\begin{aligned} f_1 \natural f_2(w') &= \int_W f_1(w) f_2(w'-w) e(-\tfrac{1}{2}(\langle w', w\rangle)\, dw \\ &= \int_W f_1(w) f_2(w'-w) e(\tfrac{1}{2}\langle w, w'\rangle)\, dw \\ &= \int_W f_1(w'-w) f_2(w) e(\tfrac{1}{2}\langle w', w\rangle)\, dw. \square \end{aligned}$$

Notemos que a convolução obtida usando a reatrição isotrópica é ligeiramente diferente daquela usando a restrição polarizada.

3.3 O Símbolo Isotrópico

O símbolo isotrópico que discutiremos neste paragrafo é o símbolo associado à restrição isotrópica $\exp W$, e será definido via a transformada de Fourier simplética sobre W.

Definição 3.3.1 *Para $f \in S(W)$ definimos a* **transformada de Fourier simplética** $\widehat{\ }$: $S(W) \longmapsto S(W)$ *como*

$$\widehat{f}\,(w') = 2^{-n} \int_W f(w) e(\tfrac{1}{2}\langle w, w'\rangle)\, dw$$

Observações:

(a) A normalização de dw pelo fator 2^{-n} diante da integral acima faz de $\widehat{\ }$ um operador unitario.

(b) Como é definida mediante uma forma simplética e não, como é usual, por uma forma simétrica, a aplicação $\widehat{\ }$ tem ordem 2 e não ordem 4: i.é,$(\widehat{f}\,)\widehat{\ } = f$.

A seguir, algumas propriedades importantes de $\widehat{\ }$.

Lema 3.3.2 *Se $f, g \in S(W)$ temos que*

(a) $\widehat{f} = f \natural 2^{-n}$; *i.é, a transformada de Fourier $\widehat{\ }$ é dada pela convolução à direita com a função constante 2^{-n}.*

(b) $(f \natural g)\widehat{\ } = f \natural \widehat{g}$

(c) $(2^{-n} \natural f \natural 2^{-n})(w) = f(-w)$.

Demonstração: **(a)** De fato, da definição de $\natural$

$$(f \natural 2^{-n})(w') = \int_W f(w) 2^{-n} e(\tfrac{1}{2}\langle w, w'\rangle)\, dw = \widehat{f}\,(w')$$

(b) Usando (a) temos

$$(f \natural g)\widehat{\ } = (f \natural g) \natural 2^{-n} = f \natural (g \natural 2^{-n}) = f \natural \widehat{g}$$

(c) $(2^{-n} \natural f \natural 2^{-n})(w') = (2^{-n} \natural \widehat{f}\,)(w') = \int_W 2^{-n}\, \widehat{f}\,(w) e(\tfrac{1}{2}\langle w', w\rangle)\, dw$

$= (\widehat{f})^{\frown}(-w').\square$

Por continuidade, $\frown$ pode ser estendida para $S^*(W)$. Assim

Definição 3.3.3 *Para uma distribuição temperada D sobre W, definimos*

$$\widehat{D}\,(f) = D(\widehat{f}),\ D \in S^*(W),\ f \in S(W)$$

Esta extensão, também denotada por $\frown$, é o **símbolo isotrópico** *de D.*

Observação: Como $D \in S^*(W)$, então $s^{-1}(D) \in S^*(H^n, e)$ e $\rho(s^{-1}(D))$ é um operador. Veremos na seção (3.4) que o símbolo de D é esencialmente o símbolo de $\rho(s^{-1}(D))$ como operador pseudo-diferencial.

Tendo os símbolos, queremos uma forma de combina-los, ou seja, um cálculo simbólico. Isto é, queremos saber o que é $(D\natural E)^{\frown}$ em termos de $\widehat{D}$ e $\widehat{E}$ para D e E em $S^*(W)$. O proposito do cálculo simbólico é descrever propriedades dos operadores em termos dos seus símbolos, uma das quais será vista no capítulo 4.

Tomemos $X = IR^n$ e demos coordenadas a $W = \lg IR^n \oplus \lg IR^{n*}$.

Lema 3.3.4 *Sejam X_j e Y_j os elementos de $\ell_n = \lg I\!R^n \oplus \lg I\!R^{n*} \oplus I\!R$ tal que*
$\exp(\sum_{j=1}^n p_j X_j) = ((p_1, ..., p_n), (0, ..., 0), 1)$ *e*
$\exp(\sum_{j=1}^n q_j Y_j) = ((q_1, ..., q_n), (0, ..., 0), 1)$
Então $X_j \in \lg I\!R^n$ e $Y_j \in \lg I\!R^{n*}$ e juntos os X_j's com os Y_j's formam uma base para W.

Observação: Pelo lema anterior, um elemento w de W pode ser escrito como

$$w = (p, q) = \sum_{j=1}^n p_j X_j + \sum_{j=1}^n q_j Y_j \quad \text{com} \quad p = (p_1, ..., p_n) \text{ e } q = (q_1, ..., q_n).$$

Lema 3.3.5 *Nessas coordenadas a transformada de Fourier $\frown$ se transforma em*

$$\widehat{f}\,(p', q') = 2^{-n} \int\limits_W f(p, q) e(\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_j' q_j - q_j' p_j))\, dp dq$$

onde $dp = dp_1...dp_n$ e similarmente para dq.

Demonstração: Segue da definição da transformada de Fourier simplética $\widehat{\ }$. $\square$

Corolário 3.3.6 *Verificam-se as fórmulas:*

(a) $\partial_{p'_j} \widehat{f} = (\pi i q_j f)^\frown$.

(b) $\partial_{q'_j} \widehat{f} = -(\pi i p_j f)^\frown$,

(c) $\pi i p'_j \widehat{f} = -(\partial_{q_j} f)^\frown$,

(d) $\pi i q'_j \widehat{f} = (\partial_{p_j} f)^\frown$.

Sejam D e E distribuições de suporte compacto sobre W. Como toda distribuição pode ser aproximada por uma sequencia de funções continuas, consideremos D e E como funções (de suporte compacto) e o resultado final será válido então para distribuições. Seja $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ um multiíndice de inteiros não negativos ao qual associamos as quantidades

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \; p^\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}, \; \partial_p^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{p_1}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial_{p_n}^{\alpha_n}}$$

Lema 3.3.7 *Sejam D e E funções de suporte compacto sobre W. Então $\widehat{D}$ e $\widehat{E}$ são holomorfas (sobre W_{IC}, a complexificação de W). Alem disso, existe uma constante M tal que*

$$\left|\partial_q^\beta \partial_p^\alpha \widehat{D}(w)\right| \leq K(w) M^{|\alpha|+|\beta|}$$

onde $K(w)$ é uma função polinomial. Uma estimativa similar vale para $\widehat{E}$.

Demonstração: Seja $\operatorname{supp} D = \{w \in W : |w| \leq \delta\}$, onde $|w| = (|p|^2 + |q|^2)^{\frac{1}{2}}$. Sendo $\widehat{D}$ a transformada de Fourier de uma função com suporte compacto, o teorema classico de Paley-Wiener (veja [2]) diz que $\widehat{D}$ é holomorfa (sobre W_{IC}) e para todo $N \in IN$ existem constantes $c_N < \infty$ tal que

$$\left|\widehat{D}(w)\right| \leq c_N (1 + |w|)^{-N} e^{\delta \; Im w}, \quad w \in W_{IC}$$

e similarmente para $\widehat{E}$ .Portanto, das formulas do corolario 3.3.7 e a estimativa para $\widehat{D}$ temos

$$\begin{aligned}
|\, \partial_q^\beta \partial_p^\alpha\, \widehat{D}\,(w)\,| &= |\,(\pi i)^{|\beta|} p^\beta (\pi i)^{|\alpha|} q^\alpha\, \widehat{D}\,(w)\,| \\
&= (\pi i)^{|\alpha + \beta|} p^\beta q^\alpha\, |\widehat{D}\,(w)\,| \\
&\leq (\pi i)^{|\alpha|+|\beta|} p^\beta q^\alpha c_N (1+ |\, w\,|)^{-N} \quad = \quad K(w) M^{|\alpha|+|\beta|},
\end{aligned}$$

onde $K(w) = p^\beta q^\alpha c_N (1 + |w|)^{-N}$, $M = \pi i$ e $K(w) \longrightarrow 0$ para $N \to \infty$.□

Agora, estamos prontos para expressar $(D \natural E)^\frown$ em termos de $\widehat{D}$ e $\widehat{E}$.

Proposição 3.3.8 *Para D e E em $C_c^\infty(W)$ temos*

$$(D\natural E)^\frown(p,q) = 2^n \left[\widehat{D}\,(p,q)\, \widehat{E}\,(p,q) + \frac{i}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\, \widehat{D}}{\partial_{p_j}} \frac{\partial\, \widehat{E}}{\partial_{q_j}} - \frac{\partial\, \widehat{E}}{\partial_{p_j}} \frac{\partial\, \widehat{D}}{\partial_{q_j}} + \ldots \right]$$

Demonstração: De (b) do lema 3.3.2 e da definição de $\natural$ obtem-se

$$\begin{aligned}
(D\natural E)^\frown(p',q') &= (D\natural\, \widehat{E})(p',q') \\
&= \int_W D(p,q)\, \widehat{E}\,(p'-p, q'-q) e(\tfrac{1}{2}\langle (p,q),(p',q')\rangle)\, dpdq \\
&= \int_W D(p,q) \left[\sum_{\alpha,\beta} \partial_q^\alpha \partial_p^\beta\, \widehat{E}\,(p',q') \frac{(-1)^{|\alpha|-|\beta|}}{\alpha!\beta!} p^\beta q^\alpha \right] e(\tfrac{1}{2}\langle (p,q),(p',q')\rangle)\, dpdq
\end{aligned}$$

onde a expressão entre colchetes é a expansão de Taylor para $\widehat{E}\,(p'-p, q'-q)$. Logo

$$
\begin{aligned}
(D\natural E)^\frown(p',q') &= \sum_{\alpha,\beta}\int_W D(p,q)\partial_q^\alpha\partial_p^\beta\,\widehat{E}\,(p',q')\frac{(-1)^{|\alpha|-|\beta|}}{\alpha!\beta!}p^\beta q^\alpha e(\tfrac{1}{2}\langle(p,q),(p',q')\rangle)\,dpdq \\
&= \sum_{\alpha,\beta}\partial_q^\alpha\partial_p^\beta\,\widehat{E}\,(p',q')\frac{(-1)^{|\alpha|-|\beta|}}{\alpha!\beta!}\left(\int_W D(p,q)p^\beta q^\alpha e(\tfrac{1}{2}\langle(p,q),(p',q')\rangle)\,dpdq\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente, pelo corolario 3.3.7 e lema 3.3.8

$$
\begin{aligned}
(D\natural E)^\frown(p',q') &= \sum_{\alpha,\beta}\partial_q^\alpha\partial_p^\beta\,\widehat{E}\,(p',q')\frac{(-1)^{|\alpha|-|\beta|}}{\alpha!\beta!}\left(2^n\partial_q^\beta\partial_p^\alpha\,\widehat{D}\,(p',q')(\pi i)^{-|\alpha|-|\beta|}(-1)^{-|\beta|}\right) \\
&= 2^n\sum_{\alpha,\beta}\frac{i^{|\alpha|-|\beta|}}{\pi^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!\beta!}\left(\partial_p^\alpha\partial_q^\beta\,\widehat{D}\,(p',q')\right)\left(\partial_p^\beta\partial_q^\alpha\,\widehat{E}\,(p',q')\right)
\end{aligned}
$$

Pela estimativa do lema 3.3.8 a soma acima converge absolutamente e desenvolvendo-a nos seus primeiros termos vemos que

$$
\begin{aligned}
(D\natural E)^\frown(p,q) &= 2^n\left[\widehat{D}\,(p,q)\,\widehat{E}\,(p,q)+\tfrac{i}{\pi}\textstyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial\widehat{D}}{\partial_{p_j}}\frac{\partial\widehat{E}}{\partial_{q_j}}-\tfrac{i}{\pi}\sum_{j=1}^n\frac{\partial\widehat{E}}{\partial_{p_j}}\frac{\partial\widehat{D}}{\partial_{q_j}}+\ldots\right] \\
&= 2^n\left[\widehat{D}\,(p,q)\,\widehat{E}\,(p,q)+\tfrac{i}{\pi}\textstyle\sum_{j=1}^n\frac{\partial\widehat{D}}{\partial_{p_j}}\frac{\partial\widehat{E}}{\partial_{q_j}}-\frac{\partial\widehat{E}}{\partial_{p_j}}\frac{\partial\widehat{D}}{\partial_{q_j}}+\ldots\right].=
\end{aligned}
$$

Observações:

(a) O segundo termo da expressão do lado direito da igualdade da proposição anterior é o colchete de Poisson de $\widehat{D}$ e $\widehat{E}$ que é denotado por $\{\,\widehat{D}.\widehat{E}\,\}$ e os termos restantes são possivelmente os analogos de ordem superior deste colchete.

(b) Como foi dito, este resultado vale para distribuições. Assim, se D e E são distribuições de suporte compacto sobre W, então

$$(D\natural E)^\frown=2^n\left[\widehat{D}\widehat{E}+\frac{i}{\pi}\{\widehat{D}.\widehat{E}\,\}+\ldots\right]$$

Vejamos a relação entre o símbolo isotrópico e o símbolo usual na teoria de OPD's.

3.4 Relação com o símbolo usual

Vimos na seção 3.1 que operadores pseudo-diferenciais sobre $S(X)$ são definidos mediante símbolos. Se $\sigma(x,\xi)$ é um símbolo, então o correspondente operador P_σ é definido como

$$(P_\sigma f)(x) = \int_{X^*} \sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)e(\xi(x))\,d\xi, \quad f \in S(X)$$

Para fazer P_σ um operador pseudo-diferencial são colocadas condições sobre σ. Estas condições estão referidas ao tamanho das suas derivadas e um conjunto (de condições) ampliamente estudado tem sido

$$\left|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\mu|\alpha|-\nu|\beta|}$$

onde $0 \leq \mu \leq \nu \leq 1$ mas $\mu\nu < 1$ e $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ para $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ num sistema de coordenadas conveniente. As classes originais de OPD's satisfaziam a expressão acima com $\nu = 0$ e $\mu = 1$. No quarto capítulo será visto um teorema de limitação para OPD's sobre $L^2(X)$ com símbolos satisfazendo as condições acima para $\mu = \nu = 0$ e $m = 0$.

Pelas observações feitas no final da seção 3.1 podemos escrever

$$P_\sigma = \rho(s^{-1}(D)), \text{ para alguma distribuicção } D \text{ sobre } W$$

e nesta seção nos ocuparemos da relação entre D e σ. Para isso, consideremos nosso espaço vetorial X da seção 1.1 e lembremos algumas noções básicas.

Se $K \in S^*(X \oplus X)$ (i.é, se K é um kernel de Schwartz), então K define uma aplicação

$$T_K : S(X) \longmapsto S^*(X)$$

pela regra

$$T_K(f)(g) = K(g \otimes f), \; f, g \in S(X)$$

onde $g \otimes f(x, x') = g(x) f(x')$ é o produto (tensorial) de f e g. É claro que $g \otimes f \in S(X \oplus X)$ e assim T_K está bem definida. Pelo teorema do kernel de Schwartz (veja [11]), T_K pode ser escrita mediante

$$T_K(f)(g) = \int_{X \oplus X} K(x, x') g(x) f(x') \, dx dx'$$

Seja $A : S(X) \longmapsto S(X)$ uma aplicação contínua. Como $S(X)$ pode ser mergulhado em $S^*(X)$, então podemos considerar A como uma aplicação de $S(X)$ em $S^*(X)$. Assim, associamos a A uma distribuição D_A sobre $X \oplus X$. Portanto, pelas considerações vistas acima

$$D_A(g \otimes f) = A(f)(g) = \int_X A(f)(x) g(x) \, dx$$

Para um kernel dado K, calcularemos o símbolo de K (que será denotado por $\sigma(K)$) no sentido usual de OPD's. Nos referiremos a ele como o símbolo polarizado, que definirá uma distribuição sobre $X \oplus X^*$.

Lema 3.4.1 *Se $K \in S(X \oplus X)$ e $\sigma(K) \in S(X \oplus X^*)$, então*

$$\sigma(K)(x, \xi) = e(-\xi(x))(\hat{\ }_2 K)(x, \xi))$$

Demonstração: Seja $P_\sigma : S(X) \longmapsto S(X)$ um operador pseudo-diferencial com símbolo $\sigma(K)$. Associamos a P_σ uma distribuição sobre $X \oplus X$; logo

$$\int_{X \oplus X} K(x, x') g(x) f(x') \, dx dx' = P_\sigma(f)(g) = \int_X P_\sigma(f)(x) g(x) \, dx$$

Lembrando a definição de P_σ, temos

$$\begin{aligned}
\int_{X \oplus X} K(x, x') f(x') g(x) \, dx dx' &= \int_X P_\sigma(f)(x) g(x) \, dx \\
&= \int_{X \oplus X} \sigma(K)(x, \xi) e(\xi(x)) \hat{f}(\xi) g(x) \, dx d\xi \\
&= \int_{X \oplus X \oplus X^*} \sigma(K)(x, \xi) e(\xi(x)) e(-\xi(x')) f(x') g(x) \, dx dx' d\xi
\end{aligned}$$

Daqui, $K(x,x') = \int_{X^*} \sigma(K)(x,\xi)e(\xi(x-x'))\,d\xi$. Pondo $x' = x - u$ tem-se que $K(x, x-u) = \int_{X^*} \sigma(K)(x,\xi)e(\xi(u))\,d\xi$ e invertendo a transformada de Fourier nos da

$$
\begin{aligned}
\sigma(K)(x,\xi) &= \int_X K(x,x-u)e(-\xi(u))\,du = e(-\xi(x))\int_X K(x,x-u)e(\xi(x-u))\,du \\
&= e(-\xi(x))\int_X K(x,x')e(\xi(x'))\,dx' = e(-\xi(x))(\hat{\ }_2 K)(x,\xi). \square
\end{aligned}
$$

Corolário 3.4.2 *A aplicação*

$$
\begin{aligned}
\sigma : S^*(X \oplus X) &\longmapsto S^*(X \oplus X^*) \\
K \quad &\longmapsto \quad \sigma(K)
\end{aligned}
$$

define un isomorfismo linear.

Apliquemos o lema 3.4.1 ao kernel $K_\rho(f)$ para f em $S(H^n,\epsilon)$. Queremos comparar $\sigma(K_\rho(f))$ com $(s(f))^\frown$. Observemos que $\sigma(K_\rho(f))$ é uma função sobre $X \oplus X^*$ e $(s(f))^\frown$ uma função sobre W.

Proposição 3.4.3 *Para $f \in S(H^n,\epsilon)$ temos a relação*

$$
\sigma(K_\rho(f))(x,\xi) = 2^n \left(s(\,f\,)e(-\frac{1}{2}q(p))\right)^\frown (2\lg x, 2\lg \xi),\ (p,q) = (\lg x', \lg \xi')
$$

Demontração: Usando a identificação $X \oplus X^* \longmapsto W$ temos

$$\begin{aligned}
\sigma(K_\rho(f))(x,\xi) &= e(-\xi(x)) \int_X K_\rho(f)(x,u)e(\xi(u))\, du \\
&= e(-\xi(x)) \int_{X \oplus X^*} r(f)(x-u,\xi')e(\xi'(u)+\xi(u))\, du d\xi' \\
&= \int_{X \oplus X^*} r(f)(x',\xi')e(-\xi'(x'))e(\xi'(x)-\xi(x'))\, dx'd\xi' \\
&= \int_W s(f)(p,q)e(-\tfrac{1}{2}q(p))e(\langle (p,q),(\lg x,\lg \xi)\rangle)\, dpdq \\
&= 2^n \left(s(\ f\ )e(-\tfrac{1}{2}q(p)) \right)^\frown (2\lg x, 2\lg \xi). \square
\end{aligned}$$

Observação: Invertendo a relação da proposição anterior.

$$s(f)(p,q)e(-\tfrac{1}{2}q(p)) = \int_W \left(\sigma(K_\rho(\ f\ )) \circ \lg^{-1} \right)(\lg x, \lg \xi)e(\frac{1}{2}\langle (\lg x, \lg \xi),(2p,2q)\rangle)\, dp'dq'$$

onde $(p',q') = (\lg x, \lg \xi)$. Logo,

$$s(f)(p,q) = 2^n e(\tfrac{1}{2}q(p)) \left(\sigma(K_\rho(\ f\ )) \circ \lg^{-1} \right)^\frown (2p,2q)$$

e assim obtemos a função f tal que $K_\rho(f)$ tem símbolo polarizado σ.

Capítulo 4

O Teorema de Calderón-Vaillancourt

Os propósitos de um cálculo simbólico são, entre outros, descrever propriedades de operadores em termos dos seus símbolos e neste capítulo veremos um exemplo desta classe de resultados: a estimativa $(0,0)$ de Calderón e Vaillancourt para operadores pseudo-diferenciais sobre $L^2(X)$.

4.1 Preliminares

Nesta seção trataremos alguns aspectos de natureza geral que serão úteis para o objetivo deste capítulo.

Definição 4.1.1 *Seja V um espaço de Hilbert com produto interno $(\ ,\ )$. Um operador A sobre V é chamado* **Hilbert-Schmidt** *se*

$$\|A\|_2 = \sum_n \|Ae_n\|^2 < \infty$$

para qualquer base ortonormal (e_n) de V, onde $\|\ \|$ denota a norma sobre V e $\|\ \|_2$ a norma sobre $\mathcal{H.S.}(V)$, o espaço de todos os operadores Hilbert-Schmidt sobre V.

Observação: A norma $\|\ \|_2$ é induzida pelo produto interno

$$(A, B)_2 = \sum_n (Ae_n, Be_n)$$

que faz de $\mathcal{H.S.}(V)$ um espaço de Hilbert.

Seja σ uma representação unitaria de um grupo localmente compacto G sobre V.

Lema 4.1.2 *A aplicação $\sigma \otimes \sigma^*$ dado por*

$$\sigma \otimes \sigma^*(g)(T) = \sigma(g)T\sigma(g)^{-1}, \quad g \in G, \quad T \in H.S.(V)$$

define uma representação unitaria de G sobre $\mathcal{H.S.}(V)$.

Demonstração: É consequencia do fato de σ ser uma representação unitaria.$\square$

Seja u um vetor unitario (fixo) sobre V e ponhamos $T_{vu}(x) = (x, u)v$. Verifica-se que $T_{vu} \in H.S.(V)$.

Lema 4.1.3 *A aplicação $\alpha : v \longmapsto T_{vu}$ é uma imersão isometrica de V em $\mathcal{H.S.}(V)$.*

Demonstração: Segue usando a definição da norma sobre $\mathcal{H.S.}(V)$.$\square$

Lembrando que $\varphi_{u,u}(g) = (u, \sigma(g)u)$ é o elemento matricial de σ respeito a u temos a

Proposição 4.1.4 *Se* $\operatorname{supp} f$ *é disjunto com o conjunto onde $\varphi_{u,u}$ se anula, então verificam-se as relações*

(a) $\alpha\left(\sigma(g)(v)\right) = \varphi_{u,u}(g)^{-1}\sigma \otimes \sigma^*\left(\alpha(v)\right)T_{uu}$

(b) $\alpha\left(\sigma(f)\right) = \sigma \otimes \sigma^*(\varphi_{u,u}^{-1}f)\left(\alpha(v)\right)T_{uu}, \quad f \in C_c^\infty(G)$

e a estimativa

$$\|\sigma(f)\| \leq \left\|\sigma \otimes \sigma^*(\varphi_{u,u}^{-1}f)\right\|$$

onde $\|\ \ \|$ indica a norma de operadores e $\varphi_{u,u}^{-1}\, f$ é a função (em $C_c^\infty(G)$) dada por $\varphi_{u,u}^{-1}f(g) = \dfrac{f(g)}{(u, \sigma(g)u)}$, $g \in \operatorname{supp} f$.

Demonstração: Integrando ambos lados de (a) obtemos

$$\alpha\left([\int_G f(g)\sigma(g)\,dg](v)\right) = \left([\int_G f(g)\varphi_{u,u}(g)^{-1}(\sigma \otimes \sigma^*)(g)\,dg](\alpha(v))\right)T_{uu}$$

de onde resulta (b). A estimativa segue de (b) e dos fatos de α ser isométrica e $\|T_{uu}\|_2 = 1$.□

Observação: Se u é um vetor diferenciável (veja definição 1.3.3), a estimativa da proposição anterior permanecerá válida se em lugar de f colocamos uma distribuição de suporte compacto; i.é

$$\|\sigma(D)\| \leq \left\|\sigma \otimes \sigma^*(\varphi_{u,u}^{-1} D)\right\|$$

Logo, temos a norma de $\sigma(D)$ estimada em termos da norma de $\sigma \otimes \sigma^*(\varphi_{u,u}^{-1} D)$.

Particularizemos as estimativas obtidas para $G = H^n$ e $\sigma = \rho$.

Sejam L e R as ações à esquerda e direita de H^n sobre $L^2(H^n, \epsilon)$ que são dadas por

$$L_h f(h') = f(h^{-1}h') \text{ e } R_h f(h') = f(h'h), \ f \in L^2(H^n, \epsilon)$$

Lema 4.1.5 *A representação $\rho \otimes \rho^*$ de H^n sobre $H.S.(L^2(X))$ pode ser realizada como a ação $L \otimes R$, de H^n sobre $L^2(H^n, e)$, que é definida por*

$$(L \otimes R)_h f(h') = f(h^{-1}h'h)$$

Demonstração: Resulta do teorema forte de Stone-von Neumann (teorema 2.2.3).□

Por sua vez, a ação $L \otimes R$ (que também é uma representação de H^n) pode ser transferida a uma ação $\widetilde{L} \otimes \widetilde{R}$ de H^n sobre $L^2(W)$, com $\widetilde{L}$ e $\widetilde{R}$ as ações sobre $L^2(W)$ dadas por

$$\widetilde{L}_h(s(f)) = s(L_h f), \ f \in S(H^n, \epsilon)$$

e similarmente para $\widetilde{R}$.

Lema 4.1.6 *Para $f \in L^2(W)$ tem-se*

$$(\widetilde{L} \otimes \widetilde{R})_{\exp w} f(u') = e(\langle w, u' \rangle) f(u'), \ w, u' \in W$$

onde $\exp$ *é a aplicação exponencial de* $W \subseteq \ell_n$ *em* H^n.

Demontração: Das definições de s e $L \otimes R$, a formula de Campbell-Hausdorff e o fato que $s^{-1}(f) \in L^2(H^n, \epsilon)$ temos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{L} \otimes \widetilde{R})_{\exp w} f(w') &= s\left((L \otimes R)_{\exp w} s^{-1}(\ f\ )\right)(w') = (L \otimes R)_{\exp w} s^{-1}(f)(\exp w') \\
&= s^{-1}(f)\left(\exp(-w)(\exp w')(\exp w)\right) = s^{-1}(f)\left(\exp w' e(-\langle w, w' \rangle)\right) \\
&= \epsilon(\langle w, w' \rangle) s^{-1}(f)(\exp w') = \epsilon(\langle w, w' \rangle) f(w'). \square
\end{aligned}$$

Estendamos $\widetilde{L} \otimes \widetilde{R}$ a uma ação de $S(H^n, \epsilon)$ sobre $L^2(W)$.

Lema 4.1.7 *Se* $f, g \in S(W)$, *então*

$$(\widetilde{L} \otimes \widetilde{R})_{s^{-1}(g)} f(w') = 2^n \ \widehat{g}\ (2w') f(w')$$

onde $\widehat{g}$ *é a transformada de Fourier simplética de* g *(definição 3.3.1).*

Demonstração: Da forma integrada para uma representação e do lema 4.1.6 temos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{L} \otimes \widetilde{R})_{s^{-1}(g)} f(w') &= s\left((L \otimes R)_{s^{-1}(g)} s^{-1}(\ f\ )\right)(w') = (L \otimes R)_{s^{-1}(g)} s^{-1}(f)(\exp w') \\
&= \int_{H^n} s^{-1}(g)(\exp w)(L \otimes R)_{\exp w} s^{-1}(f)(\exp w')\, d(\exp w) \\
&= \int_W g(w)(\widetilde{L} \otimes \widetilde{R})_{\exp w} f(w')\, dw \\
&= f(w') \int_W \epsilon(\langle w, w' \rangle) g(w)\, dw \\
&= f(w') 2^n \ \widehat{g}\ (2w'). \square
\end{aligned}$$

Observação: Da proposição 4.1.4 se deduz para o par (H^n, ρ) a seguinte estimativa

$$\left\|\rho(s^{-1}(g)\right\| \leq \left\|(\tilde{L}\otimes\tilde{R})(\varphi_{u,u}^{-1}s^{-1}(g))\right\|, \quad g \in S(W).$$

Para finalizar esta seção, uma estimativa que nos levará ao resultado desejado.

Proposição 4.1.8 *Para $g \in S(W)$ temos*

$$\left\|\rho(s^{-1}(g)\right\| \leq 2^n \left\|\left(gs(\varphi_{u,u}^{-1})\right)^{\frown}\right\|_\infty$$

onde $\| \quad \|_\infty$ é a norma do supremo usual para funções sobre W e u é qualquer vetor unitario no espaço de ρ.

Demonstração: Segue combinando proposição 4.1.4 com o resultado do lema 4.1.6.$\square$

Observação: Novamente, a última estimativa é válida para distribuições de suporte compacto sobre W; i.é

$$\left\|\rho(s^{-1}(D)\right\| \leq 2^n \left\|\left(s(\varphi_{u,u}^{-1})D\right)^{\frown}\right\|_\infty$$

4.2 Limitação em L^2 e Compacidade

Um primeiro resultado sobre limitação e compacidade de operadores através de certas condições impostas aos seus respectivos símbolos é o que nos fornece o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1 **(a)** *Para qualquer distribuição de suporte compacto D sobre W, existe uma constante c_K tal que*

$$\left\|\rho(s^{-1}(D)\right\| \leq c_K 2^n \left\|\widehat{D}\right\|_\infty$$

(b) *Se $\widehat{D}$ se anula no ∞, então $\rho(s^{-1}(D)$ é um operador compacto.*

Demonstração: **(a)** Tomando $u(x) = 2^{\frac{n}{4}} e^{-\pi x^2}$ temos que $u \in L^2(X)$ e é unitario. O correspondente elemento matricial para este u é dado por

$$\varphi_{u,u}(h) = (u, \rho(h)u) = (u, \rho((\exp w)\cdot(0,0,z))u) = z(u, \rho(\exp w)u) = ze^{-\frac{\pi}{2}|w|^2}$$

Assim, tornamos concreta a estimativa da proposição 4.1.8. Alem disso, $\varphi_{u,u}$ é diferenciável e não se anula em parte alguma. Logo, existe uma função diferenciável v_K de suporte compacto tal que $v_K s(\varphi_{u,u}) = 1$. Então

$$\left(s(\varphi_{u,u}^{-1})D\right)^{\frown} = \widehat{D} \natural (s(\varphi_{u,u}^{-1}))^{\frown} = \widehat{D} \natural \widehat{v}_K$$

Portanto

$$\left\|\left(s(\varphi_{u,u}^{-1})D\right)^{\frown}\right\|_\infty \leq \left\|\widehat{D}\right\|_\infty \left\|\widehat{v}_K\right\|_1$$

onde $\| \quad \|_1$ é a norma em L^1.Finalmente, disto e da proposição 4.1.8

$$\left\|\rho(s^{-1}(D)\right\| \leq c_K 2^n \left\|\widehat{D}\right\|_\infty \cdot c_K = \left\|\widehat{v}_K\right\|_1$$

e parte (a) fica provada.

(b) Sendo D de suporte compacto. então pode ser aproximada por funções diferenciais f_i de suporte compacto de forma que $\widehat{f_i}$ convirja uniformemente a $\widehat{D}$ sobre conjuntos compactos e uniformemente sobre W se $\widehat{D}$ se anula no ∞. De (a) vemos que $\rho(s^{-1}(f_i))$ tende para $\rho(s^{-1}(D))$ na norma de operadores pois

$$\left\|\rho(s^{-1}(f_i)) - \rho(s^{-1}(D))\right\| \leq c_K 2^n \left\| \widehat{f_i} - \widehat{D}\right\|_\infty$$

Mas os operadores $\rho(s^{-1}(f_i))$ são operadores integrais com funções de Schwartz como seus kernels, logo são compactos (ver capítulo 2) e assim $\rho(s^{-1}(D))$ é também compacto.$\square$

Teorema 4.2.1 abarca muitos operadores mas quiséssemos um teorema mais abrangente. Então, estendamos este resultado para distribuições de suporte não compacto.

Se definimos

$$L_w f(w') = f(w' - w), \; f \in S(W)$$

que é a translação (abeliana) de f por w teremos que

Lema 4.2.2 *Se $f \in S(W)$, então*

$$\left\|\rho(s^{-1}(L_w f))\right\| = \left\|\rho(s^{-1}(f))\right\|$$

Demonstração: Como $L_w(f) \in W$, então $s^{-1}(L_w(f)) \in S(H^n, \epsilon)$; assim, pelo teorema forte de S-vN temos

$$\left\|\rho\left(s^{-1}(L_w f)\right)\right\|^2_{H.S.(L^2(X))} = \left\|s^{-1}(L_w f)\right\|^2_{L^2(H^n,\epsilon)} = \int\limits_{X \oplus X^*} \left|s^{-1}(L_w f)\left(x, \xi, e(\frac{1}{2}(\xi(x))\right)\right|^2 dx d\xi$$

$$= \int\limits_{X \oplus X^*} \left|s^{-1}(L_w f)\left(\exp(\lg x, \lg \xi)\right)\right|^2 dx d\xi = \int\limits_{W} |L_w f(w')|^2 \, dw', \quad w' = (\lg x, \lg \xi)$$

$$= \|L_w f(w')\|^2_{L^2(W)} = \|f\|^2_{L^2(W)} = \left\|s^{-1}(f)\right\|^2_{L^2(H^n,\epsilon)} = \left\|\rho\left(s^{-1}(f)\right)\right\|^2_{H.S.(L^2(X))} .\square$$

Para uma distribuição D esta translação é naturalmente definida por

$$L_w(D)(f) = D(L_w(f)), D \in S^*(W), f \in S(W)$$

Pelo lema 4.2.2, uma maneira de ir mais alem de distribuições de suporte compacto seria coonsiderar distribuições D_i, todas suportadas num mesmo conjunto compacto K, translada-las por elementos w_i e formar combinações lineares; i.é, tem-se contruido uma nova distribuição que é $\sum\limits_i a_i L_{w_i}(D_i)$.

Lema 4.2.3 *Para distribuições D_i de suporte compacto fixo K, verifica-se que*

$$\left\|\rho\left(s^{-1}(\sum a_i L_{w_i}(D_i))\right)\right\| \leq c_K 2^n (\sum |a_i| \left\|\widehat{D_i}\right\|_\infty).$$

Demonstração: Pelo lema 4.2.2 e parte (a) do teorema 4.2.1 obtemos

$$\left\|\rho\left(s^{-1}(\sum a_i L_{w_i}(D_i))\right)\right\| = \left\|\rho\left(\sum s^{-1}(a_i L_{w_i}(D_i))\right)\right\| \leq \sum \left\|\rho\left(a_i s^{-1}(L_{w_i}(D_i))\right)\right\|$$

$$= \sum |a_i| \left\| \rho\left(s^{-1}(D_i)\right)\right\| \leq \sum |a_i| \left(c_K 2^n \left\|\widehat{D_i}\right\|_{\infty}\right) = c_K 2^n \left(\sum |a_i| \left\|\widehat{D_i}\right\|_{\infty}\right). \square$$

Determinemos os símbolos que correspondem aos operadores do tipo no lema 4.2.3. Para isso usemos as coordenadas $w = (p, q)$ da seção 3.3. e introduzcamos os operadores

$$\Delta_p = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{p_j}, \quad \Delta_q = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{q_j}, \quad \Delta_w = \Delta_p + \Delta_q$$

Lema 4.2.4 *Seja $D \in S^*(W)$ de modo que $\widehat{D}$ seja uma função diferenciável. Tomemos uma função v em $C_c^\infty(W)$. Então temos as estimativas*

$$(1 + |w|^2)^k \left\|(L_w(v)D)^\frown\right\|_\infty \leq C \max_{|\alpha| + |\beta| \leq 2k} \left\|\partial_q^\alpha \partial_p^\beta \widehat{D}\right\|_\infty$$

onde $w = (p, q)$ e o número C depende de v e k, mas não de w.

Demonstração: Como a transformada de Fourier leva multiplicação em convolução, temos

$$(L_w(v)D)^\frown (w') = \widehat{D} \natural (L_w(v))^\frown (w') = \int_W \widehat{D}\,(w' - u)\,(L_w(v))^\frown (u) e(\frac{1}{2}\langle w', u\rangle)\, du$$

$$= 2^{-n} \int_W \widehat{D}\,(w' - u)\, \widehat{v}\,(u) e(\frac{1}{2}\langle w, u\rangle)\, du$$

Agora, integração por partes mostra que o lado direito da igualdade acima é igual a

$$2^{-n}(1 + |w|^2)^{-k}\pi^{-2k} \int_W e(\frac{1}{2}\langle w, u\rangle) \left[(\pi^2 - \Delta_u)^k\, \widehat{v}\,(u)\, \widehat{D}\,(w' - u)\right] du$$

Desenvolvendo o termo $(\pi^2 - \Delta_u)^k \left(\widehat{v}\,(u)\, \widehat{D}\,(w' - u)\right)$ teremos que sua norma L^1 é limitada por uma expressão do tipo $C \max_{|\alpha|+|\beta| \leq 2k} \left\|\partial_q^\alpha \partial_p^\beta \widehat{D}\right\|_\infty$ e o lema está provado. $\square$

Observação: O lema acima diz que as normas $\|(L_w(v)D)^\frown\|_\infty$ decrecem mais rapido que qualquer polinomio em w.

Como W é um espaço vetorial real, então tem uma ordem natural de lattice.

Definição 4.2.5 *Sejam Z o anel dos numeros inteiros e V um espaço vetorial real de dimensão n. Se $v_1, ..., v_r$ são vetores linearmente independentes em V, o grupo abeliano*

$$Zv_1 + ... + Zv_r = L$$

é chamado uma **lattice** *em V. Se $r = n$, então dizemos que L é uma lattice total em V.*

Definição 4.2.6 *Seja L uma lattice (total) em V. O conjunto*

$$P = \{r_1 v_1 + ... + r_n v_n : r_i \in R,\ 0 \leq r_i < 1\}$$

é chamado um **paralelepípedo** (*ou* **dominio) fundamental** *de L.*

Vamos agora a enunciar e demonstrar o objetivo deste capítulo.

Teorema 4.2.7 (Calderón-Vaillancourt). *Consideremos D em $S^*(W)$. Se $\widehat{D}$ e todas as suas derivadas são limitadas, então $\rho(s^{-1}(D))$ é um operador limitado sobre $L^2(X)$. Se adicionalmente, $\widehat{D}$ se anula no ∞, então $\rho(s^{-1}(D))$ é compacto.*

Demonstração: A estrategia para demontrar o teorema será expressar D em termos de distribuições de suporte compacto para logo usar teorema 4.2.1.Seja $\Lambda \subseteq W$ a lattice gerada pelos pontos (p, q) com p_j e q_j inteiros para todo j; i.é

$$\Lambda = \left\{ (p, q) = \sum_{j=1}^{n} p_j X_j + \sum_{j=1}^{n} q_j Y_j : p_j, q_j \in Z \right\}$$

Seja $\mathcal{K}$ um dominio fundamental para Λ em W. Ou seja

$$\mathcal{K} = \left\{ (p, q) = \sum_{j=1}^{n} p_j X_j + \sum_{j=1}^{n} q_j Y_j : 0 \leq p_j, q_j < 1 \right\}$$

Os $l + \mathcal{K}$, $l \in \Lambda$ cobrem todo o espaço W e são disjuntos dois a dois.

Se v_K é a funcão característica de K e μ é uma função suave, positiva e de suporte compacto (sobre W) com integral total igual a $1 = 2^n \widehat{\mu}(0)$, então a função

$$\nu = \mu \natural v_K$$

é também suave, positiva e de suporte compacto e a coleção

$$\{L_l(\nu) : l \in \Lambda\}$$

forma uma partição da unidade. Isto é, $0 \leq L_l(\nu)(l') < 1$ e $\sum_{l \in \Lambda} L_l(\nu)(l') = 1$, $l' \in \Lambda$. Devido a esta último fato se deduz que

$$D = \sum_l L_l(\nu)D = \sum_l L_l(\nu L_{-l}(D))$$

com $L_l(\nu)D$ sendo distribuições de suporte compacto. Pela parte (a) do teorema 4.2.1 e lema 4.2.4, os operadores $\rho\left(s^{-1}(L_l(\nu)D)\right)$ são limitados (sobre $L^2(X)$). Agora, pelo lema 4.2.3, a serie (de operadores limitados)

$$\sum_l \rho\left(s^{-1}(L_l(\nu)D)\right)$$

é absolutamente convergente. Logo, é convergente com limite igual a $\rho(s^{-1}(D))$ e por conseguinte $\rho(s^{-1}(D))$ é limitado sobre $L^2(X)$.

Se $\widehat{D}$ se anula no ∞, então $(L_l(\nu)D)^\frown$ também se anulará no ∞ para todo l e assim $\rho\left(s^{-1}(L_l(\nu)D)\right)$ é compacto por (b) de teorema 4.2.1. Daqui, sendo $\rho(s^{-1}(D))$ uma soma de operadores compactos (na topologia da norma) temos portanto que é compacto. Isto completa o teorema.$\square$

Em outras palavras, este teorema quer dizer: um operador pseudo-diferencial sobre $S(X)$ se estende a um operador limitado sobre $L^2(X)$ se o símbolo e todas as derivadas do símbolo são limitadas.

Observação: Já que o centro T de H^n é levado por ρ a operadores escalares ($\rho(z)f = zf$), então $\rho \otimes \rho^*$ na realidade é uma representação do grupo abeliano H^n/T ($\cong W$) cuja teoria de representação é mais simples que a do H^n. Como representações de grupos abelianos são completamente analizaveis por meio da transformada de Fourier e notando que o símbolo isotrópico é esencialmente a transformada de Fourier, era previssivel que uma estimativa como a da proposição (4.1.4) implique um resultado como a estimativa $(0,0)$ de Calderón e Vaillancourt.

Referências

[1] ABRAHAM, MARSDEN, RATIU: Manifolds, Tensor Analysis and Applications, *Addison-Wesley Publishing Company, 1983.*

[2] L. HORMANDER: Linear Partial Operators, *Springer Verlag, Berlín, 1964.*

[3] R. HOWE: Quantum Mechanics and Partial Differential Equations, *J. Functional Anal., 38 (1980), 188-254.*

[4] KUMANO-GO: Pseudo-differential Operators, *The MIT Press, 1981.*

[5] S. LANG: Real Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[6] L. LOOMIS: Abstract Harmonic Analysis, *Van Nostrand, Princeton, N.J.*

[7] C. MOORE and J. WOLF: Square Integrable Representations of Nilpotent Groups, *Trans. Amer. Math. Soc. 185 (1973), 445-462.*

[8] M. REED and B. SIMON: Functional Analysis I, *Academic Press, New York, 1972.*

[9] N. STEENROD: The Topology of Fibre Bundles, *Princeton Univ. Press, 1951.*

[10] M. TAYLOR: Noncommutative Harmonic Analysis, *Amer. Math. Soc., number 22, Providence, R.I.*

[11] F. TREVES: Topological Vectorial Spaces, Distributions and Kernels, *Academic Press, New York, 1967.*

[12] V. VARADARAJAN: Lie Groups, Lie Algebras and their Representations, *Prentice Hall, New Yersey, 1974.*

[13] F. WARNER: Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups, *Scott, Foresman and Company, Illinois, 1971.*

[14] G. WARNER: Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups, *Springer, New York, 1972.*

[15] A. WEIL: L 'integration dans les groups topologiques et ses applicationes, *Hermann París. 1938.*

[16] A. WEINSTEIN: Lectures on Sympletic Manifolds, *Amer. Math. Soc., number 29, Providence, R.I.. 1977.*