CARACTERIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE CORPOS COM VALORIZAÇÃO

Maria Angela Miorim

Orientador
Prof. Dr. Antonio José Engler

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campinas, junho de 1980.

A meus pais
e irmãos.

INDICE

INTRODUÇÃO

Sabe-se que, dado um corpo K e um valor absoluto (ou uma valorização de Krull), v, de K em $\mathbb{R}_+$ (ou de K em $G \cup \{0\}$, onde G é um grupo totalmente ordenado), obtemos uma topologia τ_v, gerada por v. Um sistema fundamental de vizinhanças para um ponto x, na topologia τ_v, é dado pelos conjuntos da forma $U_\varepsilon(x) = \{y \in K/v(x-y) < \varepsilon\}$, com $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ (ou $\varepsilon \in G$). Tem-se também que K, com a topologia τ_v, é um corpo topológico. Uma pergunta natural é como voltar, ou seja, quais são as condições que uma topologia, em um corpo topológico, deve satisfazer para que ela seja gerada por um valor absoluto (ou uma valorização de Krull). Nesse trabalho, foram estudadas justamente essas condições.

Para isso, no parágrafo 1, foi feito um estudo sobre as propriedades da topologia de um corpo topológico. O parágrafo 2, que foi baseado em Kaplansky, I., ([6]), tem como principal resultado o teorema 20, onde é provado que todo corpo V-topológico, cujo conjunto dos elementos nilpotentes é aberto, tem sua topologia gerada por um valor absoluto. Como caso particular, no final do parágrafo, conclui-se que todo corpo localmente compacto tem sua topologia gerada por um valor absoluto. Historicamente essa foi a primeira situação estudada.

O principal resultado do parágrafo 3, teorema 3.17, é devido à Kowalsky, H.J. e Dürbaum, H., ([7]), que garante, que todo corpo

V-topológico, sem elementos nilpotentes, diferentes do zero, tem sua topologia gerada por uma valorização de Krull, que não é um valor absoluto. Entretanto, não usamos o original desse artigo e sim, uma versão simplificada escrita por Bernhard Heinemann, a quem agradecemos a gentileza de tê-la nos enviado.

§ 1. CORPOS TOPOLÓGICOS

Faremos neste parágrafo um estudo sobre a topologia de um corpo topológico, que é essencial quando estamos interessados em estudar algum aspecto topológico dentro da teoria de valorizações. Para isso, iniciaremos com a definição de corpo topológico, observaremos que a topologia fica perfeitamente determinada pelo sistema fundamental de vizinhanças do elemento neutro, veremos quais axiomas este sistema fundamental satisfaz e finalizaremos o parágrafo, verificando que se em um corpo K, tivermos uma classe de subconjuntos satisfazendo aos axiomas de um sistema fundamental de vizinhanças do elemento neutro, então esta classe define em K uma topologia, segundo a qual, K é um corpo topológico.

DEFINIÇÃO 1.1: Um *corpo topológico* é um conjunto K com uma estrutura de corpo e uma topologia, satisfazendo os seguintes axiomas:

a) A aplicação $a : K \times K \to K$ tal que $a(x,y) = x + y$, é contínua, onde a topologia em $K \times K$ é a topologia produto.

b) A aplicação $o : K \to K$ tal que $o(x) = -x$, é contínua.

c) A aplicação $p : K \times K \to K$ tal que $p(x,y) = xy$, é contínua, onde a topologia em $K \times K$ é a topologia produto.

d) A aplicação $i : K^{\bullet} \to K^{\bullet}$ tal que $i(x) = x^{-1}$, onde $K^{\bullet}$ denota o grupo multiplicativo dos elementos não nulos de K, é contínua.

Podemos simplificar os axiomas da definição 1.1, tomando-se no lugar de a) e b) um axioma equivalente, como mostra a próxima proposição:

PROPOSIÇÃO 1.2: Os axiomas a) e b) da definição 1.1 são equivalentes ao seguinte axioma:

A aplicação $s : K \times K \to K$ tal que $s(x,y) = x - y$, é contínua, onde a topologia considerada em $K \times K$ é a topologia produto.

DEMONSTRAÇÃO: Para mostrar que a) e b) implicam na continuidade da aplicação s, basta observar que a aplicação s é a composta das aplicações $(x,y) \to (x,-y)$ e $(x,y) \to x+y$ que são contínuas. Por outro lado, se a aplicação s é contínua, temos que a aplicação o é contínua, como composta das aplicações contínuas, $x \to (o,x)$ e s, e a aplicação a é contínua, como composta das aplicações contínuas, $(x,y) \to (x,-y)$ e s.∎

Façamos agora, algumas observações importantes sobre aplicações particulares de um corpo topológico. Para isso vamos considerar K

um corpo topológico e $a \in K$, um elemento qualquer de K.

OBSERVAÇÕES:

1) A aplicação $x \to a + x$ é um homeomorfismo de K sobre K.

De fato, a aplicação $x \to a + x$ é uma aplicação contínua de K em K, pois, fixado a, ela é a composta das aplicações contínuas: $x \to (a,x)$ e $(a,x) \to a + x$.

Por outro lado, temos que a inversa da aplicação $x \to a + x$ é a aplicação $x \to -a + x$, que é contínua. Portanto, a aplicação $x \to a + x$ é um homeomorfismo.

2) A aplicação $x \to -x$ é um homeomorfismo de K, cujo quadrado é a identidade.

3) Dado $a \neq 0$ a aplicação $x \overset{f}{\to} ax$ é um automorfismo do grupo aditivo de K.

De fato, a aplicação f é claramente bijetora e $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$. Por outro lado, a aplicação f é contínua, pois ela é a composta das aplicações contínuas $x \to (a,x)$ e $(a,x) \to ax$.

A inversa da aplicação f é a aplicação $x \to a^{-1}x$ que é contínua. Logo, f é um homeomorfismo de K sobre K.

Das observações anteriores, temos as seguintes propriedades:

I. Se A é aberto (resp. fechado) em K, então $-A$ é aberto (resp. fechado) e para todo $c \in K$, $c + A$ é aberto (resp. fechado), onde $-A = \{-a/a \in A\}$ e $c+A = \{c+a/a \in A\}$.

II. Se A é aberto, $A + B$ é aberto como reunião de abertos, onde $A + B = \{a + b/a \in A,\ b \in B\}$.

III. Se A é aberto (resp. fechado) em K, então A^{-1} é aberto (resp. fechado) e para todo $c \in K^{\bullet}$, cA é aberto (resp. fechado), onde $A^{-1} = \{a^{-1}/a \in A$ e $a \neq 0\}$ e $cA = \{ca/a \in A\}$.

IV. Se A é aberto e $0 \notin B$ temos que AB é aberto como reunião de abertos, onde $AB = \{ab/a \in A,\ b \in B\}$.

Para que a topologia em um corpo topológico fique completamente determinada , basta conhecermos o conjunto das vizinhanças do elemento neutro, como veremos a seguir.

Consideremos U, o conjunto das vizinhanças do elemento neutro, 0. Como a aplicação $x \to x + a$ é um homeomorfismo e leva o 0 em a, temos que

$$\mathsf{U}_a = \{a + U,\ U \in \mathsf{U}\},$$

onde U_a representa o conjunto das vizinhanças do elemento a.

Portanto, dado o conjunto U das vizinhanças de 0, temos as vizinhanças de todos os elementos de K, e portanto, a topologia em K fica completamente determinada. Isso acontece devido as relações

$$\mathsf{U}_a = a + \mathsf{U}.$$

Observemos também, que, como a aplicação $a \to ax$ é um homeomorfismo de K sobre K, para $a \neq 0$, e leva 0 em 0, temos que $a\mathcal{U}$ é uma vizinhança de 0, para todo $a \neq 0$ e $\mathcal{U} \in \mathrm{U}$.

Vejamos agora, quais são as propriedades satisfeitas por um sistema fundamental de vizinhanças do zero, em um corpo topológico.

PROPOSIÇÃO 1.3: Se K é um corpo topológico e se $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0, então $\mathcal{B}$ satisfaz:

i) $\bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} B \supset \{0\}$;

ii) $\forall B, C \in \mathcal{B}$, $\exists D \in \mathcal{B} / D \subseteq B \cap C$;

iii) $\forall B \in \mathcal{B}$, $\exists C \in \mathcal{B} / C - C \subseteq B$;

iv) $\forall B \in \mathcal{B}$, $\forall x, y \in K$, $\exists C \in \mathcal{B} / (x + C)(y + C) \subseteq xy + B$;

v) $\forall B \in \mathcal{B}$, $\forall x \in K^{\bullet}$, $\exists C \in \mathcal{B} / (x + C)^{-1} \subseteq x^{-1} + B$.

DEMONSTRAÇÃO: (i) Como $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do 0, temos que $0 \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Logo, $0 \in \bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ ou $\{0\} \subset \bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} B$;

(ii) Como $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do 0, temos por definição que $\exists D \in \mathcal{B}$ com $D \subseteq B \cap C$;

(iii) Sabemos que a aplicação s é contínua e $s(0,0) = 0$. Logo, dada $B \in \mathcal{B}$, existe $C' = C_1 \times C_2$, vizinhança de $(0,0)$, tal que $s(C') \subseteq B$, onde $s(C') = \{x - y / x \in C_1 \text{ e } y \in C_2\}$. Seja $C \subset C_1 \cap C_2$, então $C - C \subseteq C_1 - C_2 \subseteq B$;

(iv) Sendo que a aplicação p é contínua, dado $xy + B$ uma vizinhança de xy, existe $C' = (x + C_1) \times (y + C_2)$, vizinhança de (x,y), tal que $p(C') \subseteq xy + B$. Sendo $C \subset C_1 \cap C_2$, obtemos $(x+C)(y+C) \subseteq (x+C_1)(y+C_2) \subseteq xy + B$;

(v) Pela continuidade da aplicação i, temos que para toda $x^{-1} + B$, vizinhança de x^{-1}, existe $C' = x + C$, vizinhança de x, tal que $i(C') \subseteq x^{-1} + B$, logo, $(x + C)^{-1} \subset x^{-1} + B$. ∎

Já sabemos que, se $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0, então $\mathcal{B}$ satisfaz as condições de i) a v). Verifiquemos agora que o contrário também é verdadeiro, ou seja, se temos uma coleção de subconjuntos satisfazendo as condições de i) a v), essa coleção determina uma estrutura de corpo topológico para o qual é um sistema fundamental de vizinhanças do 0.

PROPOSIÇÃO 1.4 - Seja K um corpo, $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos $B, C, D, \ldots$, de K, não vazia ($\mathcal{B} \neq \emptyset$), satisfazendo as condições de i) a v) da proposição 1.3. Então, $\mathcal{B}$ determina uma topologia τ, em K, segundo a qual, K é um corpo topológico e $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para o 0.

DEMONSTRAÇÃO: 1 - Definição da Topologia. Consideremos os subconjuntos A de K que gozam da seguinte propriedade: para todo $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x + B \subset A$ (*). Verifiquemos que o conjunto τ, formado pelos conjuntos A, acima definidos, é uma topologia: dada uma família

$(A_\alpha)_{\alpha\in I}$, onde os $A_\alpha \in \tau$, $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ satisfaz a propriedade (*), pois, para todo $x \in \cup A_\alpha$ temos que $x \in A_\alpha$ para algum $\alpha \in I$, mas então $x + B \subset A_\alpha$ para algum α e portanto, $x + B \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$. Por outro lado, dados A_1 e $A_2 \in \tau$, seja $x \in A_1 \cap A_2$, então existem $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x + B_1 \subset A_1$ e $x + B_2 \subset A_2$. Logo, $x + B_1 \cap x + B_2 = x + (B_1 \cap B_2) \subset A_1 \cap A_2$. Como por ii) $\exists B' \subset \mathcal{B}$ tal que $B' \subset B_1 \cap B_2$, temos $x + B' \subset A_1 \cap A_2$ e portanto $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Portanto, τ é uma topologia onde os A definidos através de (*) são os abertos. Observemos que, se A é um aberto em τ, então $x + A$ também o é para todo $x \in K$.

2 - Verifiquemos agora que $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do zero, na topologia τ.

Na topologia τ, temos que o conjunto $\mathcal{U}$ de todas as vizinhanças do 0 é formado pelos subconjuntos V de K, para os quais existe $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset V$, ou seja,

$$\mathcal{U} = \{V \subset K / \exists B \in \mathcal{B} \text{ com } B \subset V\}.$$

Como 0 pertence a B para todo $B \in \mathcal{B}$ e para toda vizinhança V de 0, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset V$, temos que $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para o 0 na topologia τ.

3 - Mostremos agora que K, junto com a topologia τ, é um corpo topológico.

Verifiquemos inicialmente, que a aplicação s é contínua. Para isso, seja $(x_o,y_o) \in K \times K$ e $(x_o-y_o) + V$, uma vizinhança de $x_o - y_o$. Então, existe $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset V$ e $(x_o-y_o) + B \subset (x_o - y_o) + V$. Para esse B, por iii), $\exists\ C \in \mathcal{B}$ com $C - C \subseteq B$, logo $(x_o + C) - (y_o - C) =$ $= (x_o - y_o) + (C - C) \subseteq (x_o - y_o) + B \subset (x_o - y_o) + V$ e obtemos a continuidade de s.

Vejamos agora, que a aplicação p é contínua. De fato, seja $(x_o,y_o) \in K \times K$ e $x_o y_o + V$, uma vizinhança de $x_o y_o$. Logo existe $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset V$ e $x_o y_o + B \subset$ $\subset x_o y_o + V$, para B, por iv), existe $C \in B$ com $(x_o + C)(y_o + C) \subseteq x_o y_o + B$. Temos agora, $(x_o + C)(y_o + C) \subseteq x_o y_o + B \subset x_o y_o + V$ e p é contínua.

Para vermos a continuidade de i, tomemos $x_o \in K^{\bullet}$ e $x_o^{-1} + V$, uma vizinhança de x_o^{-1}. Como $V \in \mathcal{U}, \exists B \in \mathcal{B}$ com $B \subset V$ e por v) existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $(x_o + C)^{-1} \subseteq$ $\subseteq x_o^{-1} + B$. Como $(x_o + C)^{-1} \subseteq x_o^{-1} + B \subseteq x_o^{-1} + V$, obtemos a continuidade de i.

Portanto, K, com a topologia τ é um corpo topológico. ∎

OBSERVAÇÃO: Seja $\mathcal{U}$ o conjunto das vizinhanças de 0, então, pela observação 1-), o conjunto das vizinhanças de x, para todo $x \in K$, é o conjunto $x + \mathcal{U} = \{x + V / V \in \mathcal{U}\}$. Por outro lado, pela observação 3-) temos que se $U \in \mathcal{U}$, então $xU \in \mathcal{U}$ para todo $x \in K^{\bullet}$.

Sendo que, no próximo parágrafo, trabalharemos com corpos topológicos cuja topologia é Hausdorff, daremos a seguir uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra.

PROPOSIÇÃO 1.5 - Para que a topologia em um corpo topológico K seja Hausdorff, é necessário e suficiente que para algum $\mathcal{B}$, sistema fundamental de vizinhanças do zero, temos $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \{0\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos inicialmente que se $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \{0\}$, então a topologia é Hausdorff.

Para isso, consideremos inicialmente $x \neq 0$, $x \in K$, então existe $B \in \mathcal{B}$, com $x \notin B$ e, por iii), temos que existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C - C \subseteq B$. Logo $C \cap (x + C) = \emptyset$, pois caso contrário, existe $y \in C$ e $y \in x + C$, logo $y = x + b$ para algum $b \in C$ e $x = x + b - b \in C - C \subset B$, mas como $x \notin B$, temos uma contradição.

Agora, dados $x, y \in K$, $x \neq y$, temos $x - y \neq 0$ e existe $C \in \mathcal{B}$ com $C \cap [(x - y) + C] = \emptyset$ e verifica-se que $x + C \cap y + C = \emptyset$.

Portanto a topologia é Hausdorff.

Por outro lado, suponhamos que exista $x \neq 0$ tal que x pertença a B para todo $B \in \mathcal{B}$. Então, como toda vizinhança de x é da forma $x + V$, para alguma vizinhança V de 0, temos que, para x e 0 não existem vizinhanças disjuntas e portanto temos uma contradição. ∎

Quando for conveniente podemos substituir os axiomas iii), iv) e v) por outros que lhes são equivalentes, como mostra a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 1.6 - Os axiomas iii), iv) e v) da proposição 1.3, podem ser substituídos pelos seguintes axiomas:

(iii_1) $\forall B \in \mathcal{B}, \exists C \in \mathcal{B} \;/\; C + C \subseteq B;$

(iii_2) $\forall B \in \mathcal{B}, \exists C \in \mathcal{B} \;/\; - C \subseteq B;$

(iv_1) $\forall B \in \mathcal{B}, \exists C \in \mathcal{B} \;/\; CC \subseteq B;$

(iv_2) $\forall B \in \mathcal{B}, \forall x \in K, \exists C \in \mathcal{B} \;/\; xC \subseteq B;$

(v_1) $\forall B \in \mathcal{B}, \exists C \in \mathcal{B} \;/\; (1 + C)^{-1} \subseteq 1 + B.$

DEMONSTRAÇÃO: (iii) $\Rightarrow$ (iii_2) pois, como para todo $B \in \mathcal{B}, \exists C \in \mathcal{B}$ com $C - C \subseteq B$ e $-C \subseteq C - C$, pois $0 \in C$, temos $-C \subseteq B$.

(iii) $\Rightarrow$ (iii_1) pois, como para todo $B \in \mathcal{B}$, $\exists C \in \mathcal{B}$ com $C - C \subseteq \mathcal{B}$ e para todo $C \in \mathcal{B}$, pela demonstração a cima, $\exists C_1 \in \mathcal{B}$ com $-C_1 \subseteq C$, se tomarmos $C_2 \subseteq C_1 \cap C$, temos $C_2 + C_2 \subseteq C + C_1 = C - (-C_1) \subseteq C - C \subseteq B$.

(iii_1)e(iii_2) $\Rightarrow$ (iii) pois, para todo $B \in \mathcal{B}$, $\exists C_1 \in \mathcal{B}$ com $C_1 + C_1 \subseteq B$, para esse C_1, $\exists C_2$ com $-C_2 \subseteq C_1$ e se $C \subseteq C_1 \cap C_2$, temos $C - C \subseteq C_1 - C_2 \subseteq C_1 + C_2 \subseteq B$.

(iv) $\Rightarrow$ (iv_1) pois, como temos que, para todo $B \in \mathcal{B}$, e para quaisquer $x, y \in K$, $\exists C \in \mathcal{B}$ com $(x+C)(y+C) \subseteq xy + B$, para $x = y = 0$, obtemos $CC \subseteq B$.

(iv) $\Rightarrow$ (iv_2). Sabemos que para todo $B \in \mathcal{B}$, e para quaisquer $x, y \in K$, $\exists C \in \mathcal{B}$ satisfazendo, $(x+C)(y+C) \subseteq$ $\subseteq xy + B$, tomando-se $y = 0$ obtemos $(x + C)\ (0 + C) \subseteq$

$\subseteq 0 + B$ ou $(x+C)C \subseteq B$. Como $xC \subseteq (x+C)C$, resulta finalmente $xC \subseteq B$.

(iv_1) e $(iv_2) \Rightarrow (iv)$. Sejam $x, y \in K$ e $B \in \mathcal{B}$.
Tomemos $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{B}$ tais que $B_1 + B_1 \subseteq B$, $B_2 + B_2 \subseteq$ $\subseteq B_1$ e $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, obtemos $B_3 + B_3 + B_3 \subseteq B_2 + B_2 +$ $+ B_1 \subseteq B_1 + B_1 \subseteq B$.
Sejam $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{B}$, tais que $xC_1 \subseteq B_3$, $yC_2 \subseteq B_3$ e $C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$, então $xC_3 \subseteq xC_1 \subseteq B_3$ e $yC_3 \subseteq$ $\subseteq yC_2 \subseteq B_3$.
Sejam $D_1, C \in \mathcal{B}$ tais que, $D_1 D_1 \subseteq B_3$ e $C \subseteq D_1 \cap C_3$, então $xC + yC + CC \subseteq xC_3 + yC_3 + D_1 D_1 \subseteq B_3 +$ $+ B_3 + B_3 \subseteq B$ e $xy + xC + yC + CC \subseteq xy + B$, ou seja $(x+C)(y+C) \subseteq xy + B$.

$(v) \Longrightarrow (v_1)$. Basta aplicar (v) para $x = 1$.

(iv_2) e $(v_1) \Rightarrow (v)$. Sejam $x \in K^*$, $C, B, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, tais que $x^{-1}B_1 \subseteq B$, $(1+B_2)^{-1} \subseteq 1 + B_1$ e $x^{-1}C \subseteq B_2$, para os quais obtemos $x^{-1}(1 + x^{-1}C)^{-1} \subseteq x^{-1}(1 + xB) = (x^{-1} + B)$ e assim $(x+C)^{-1} \subseteq x^{-1} + B$. ∎

§ 2. VALOR ABSOLUTO E V-TOPOLOGIA

Neste parágrafo, começamos definindo o que é um valor absoluto(1) de um corpo, damos alguns exemplos, algumas propriedades , classificamos os valores absolutos, para em seguida passar ao estudo da topologia gerada por eles.

Introduzimos os conceitos de V-topologia e elementos nilpotentes, para mostrar que, se a topologia de um corpo é uma V-topologia e o conjunto dos elementos nilpotentes é aberto, esta topologia é gerada por um valor absoluto. A seguir, mostramos que a topologia de um corpo localmente compacto satisfaz essas condições e apresentamos uma classificação desses corpos.

No decorrer do parágrafo denotaremos por $\mathbb{R}_+$, o conjunto dos números reais não negativos.

---

(1) Alguns autores usam, em lugar de valor absoluto, o termo valorização.

DEFINIÇÃO 2.1 - Seja K um corpo. Dizemos que uma aplicação φ, definida no corpo K e tomando valores em $\mathbb{R}_+$, é um *valor absoluto* de K, se:

a) $\varphi(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

b) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, para todos $x, y \in K$;

c) $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$, para todos $x, y \in K$.

Vejamos agora, alguns exemplos de valores absolutos:

1º) Seja $|\ |$, o *valor absoluto usual* nos reais, ou seja $|\ |$ é uma aplicação dos reais em $\mathbb{R}_+$, definida da seguinte forma:

$$|x| = x \quad \text{se} \quad x \geq 0$$

e

$$|x| = -x \quad \text{se} \quad x < 0$$

A aplicação $|\ |$, assim definida, é claramente um valor absoluto dos reais, no sentido da definição 2.1.

Na verdade, o nome valor absoluto, deve-se ao fato dessas aplicações satisfazerem as mesmas propriedades básicas do valor absoluto usual.

2º) Seja p um número inteiro primo fixo. Se x é um número racional, diferente de zero, podemos escrever x na forma:

$$x = p^{\alpha}\frac{a}{b} \quad , \text{ onde } \quad a,b \in \mathbb{Z},\ p \nmid a, \quad p \nmid b \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Definimos agora $|\ |_p$, a aplicação definida em $\mathbb{Q}$ e tomando valores em $\mathbb{R}_+$, da seguinte forma:

$$|0|_p = 0$$

e

$$|x|_p = e^{-\alpha} \quad \text{se} \quad x \neq 0 \text{ , onde } e \text{ representa a base do logaritmo neperiano.}$$

Pode-se verificar facilmente, que $|\ |_p$ assim definida é um valor absoluto de $\mathbb{Q}$. Esse valor absoluto é conhecido como o *valor absoluto p-ádico de* $\mathbb{Q}$.

3º) Seja K um corpo. Definimos o *valor absoluto trivial* de K, como sendo a aplicação φ_o, definida em K e tomando valores em $\mathbb{R}_+$, da seguinte forma:

$$\varphi_o(0) = 0$$

e

$$\varphi_o(x) = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in K \quad \text{e} \quad x \neq 0.$$

A aplicação φ_0, assim definida é claramente um valor absoluto de K, para qualquer corpo K, portanto, todo corpo possui pelo menos um valor absoluto.

A partir dos axiomas a), b) e c) da definição 2.1. temos que todo valor absoluto φ, de um corpo K, satisfaz as seguintes propriedades:

1 - $\varphi(x) = 1$, para toda raíz da unidade $x \in K$, em particular temos $\varphi(1) = \varphi(-1) = 1$.

2 - Para todos $x,y \in K$ temos, $\varphi(x-y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

3 - Para todos $x,y \in K$, com $y \neq 0$, temos, $\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)[\varphi(y)]^{-1}$.

4 - Para todos $x,y \in K$ temos, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x-y)$, onde $|\ |$ representa o valor absoluto usual.

Daremos agora uma classificação dos valores absolutos. Dizemos que um valor asboluto φ é *arquimediano* se para algum $m \in \mathbb{N}$, temos $\varphi(m.1) > 1$, onde $m.1$ significa m vezes a unidade 1 do corpo K. Caso isso não ocorra, ou seja, se para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $\varphi(m.1) \leq 1$, dizemos que o valor absoluto φ é *não arquimediano*.

Observemos que nos exemplos dados anteriormente, o 1º é arquimediano e o 2º e 3º são não arquimedianos.

Vamos, na próxima proposição, ver algumas caracterizações de valor absoluto não arquimediano, que são as vezes mais convenientes de serem usados.

PROPOSIÇÃO 2.2 - Consideremos φ uma aplicação definida no corpo K e tomando valores em $\mathbb{R}_+$, satisfazendo os axiomas a), b) e c), da definição 2.2. Então, as seguintes condições são equivalentes:

i) A aplicação φ é um valor absoluto não arquimediano;

ii) Para todo $x \in K$, se $\varphi(x) \leq 1$, então $\varphi(x+1) \leq 1$;

iii) Para todos $x, y \in K$, $\varphi(x+y) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$;

iv) Para todo número real, $\rho > 0$, φ^{ρ} é um valor absoluto de K, onde $\varphi^{\rho}(x) = (\varphi(x))^{\rho}$, para todo $x \in K$.

A demonstração da proposição 2.2 pode ser encontrada em ([4], (1.14)).

Vejamos a seguir, que todo valor absoluto em um corpo, define sobre ele uma topologia, que é Hausdorff.

Para isso, seja K um corpo, φ um valor absoluto de K e consideremos a aplicação:

$$d_{\varphi} : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{, definida por}$$

$$d_{\varphi}(x,y) = \varphi(x-y) \quad , \quad \text{para todos } x,y \in K$$

A aplicação d_φ, assim definida, é uma métrica em K. Portanto, d_φ define em K uma topologia, τ_φ, que é Hausdorff. Um sistema fundamental de vizinhanças abertas para cada ponto $x \in K$ é dado pelo conjunto:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in K / \varphi(y-x) < \varepsilon\} \quad , \text{com } \varepsilon > 0 .$$

Tomando-se $x = 0$ temos para um sistema fundamental de vizinhanças abertas para o 0 o conjunto:

$$B_\varepsilon(0) = \{y \in K / \varphi(y) < \varepsilon\} \; , \quad \text{com } \varepsilon > 0 .$$

Um corpo K, com uma topologia dada por um valor absoluto é um corpo topológico, como mostra a próxima proposição:

PROPOSIÇÃO 2.3 - Seja K um corpo e φ um valor absoluto em K. Então K, com a topologia gerada por φ, é um corpo topológico.

DEMONSTRAÇÃO: Lembremos inicialmente que como K é um espaço métrico, então $K \times K$ também o é com a métrica definida por:

$$d(p,q) = \text{máx}\{d\varphi(x,x_0) \,;\, d\varphi(y,y_0)\}, \quad \text{onde}$$

$$p = (x,y) \in K \times K \quad \text{e} \quad q = (x_0,y_0) \in K \times K .$$

Para provarmos que a aplicação subtração, s, definida em $K \times K$ e tomando valores em K, é contínua, basta observarmos que:

$$\varphi((x-y) - (x_o - y_o)) \leq \varphi(x-x_o) + \varphi(y-y_o).$$

A continuidade da aplicação produto, p, definida em $K \times K$ e tomando valores em K, segue de:

$$\varphi(xy - x_o y_o) \leq \varphi(x - x_o)\varphi(y - y_o) + \varphi(x - x_o)\varphi(y_o) + \varphi(y-y_o)\varphi(x_o).$$

Para vermos que a aplicação inversa, i, definida em $K^{\cdot}$ e tomando valores em $K^{\cdot}$, é contínua, basta observarmos que:

$$\varphi(x - x_o) < 1/2 \min\{\varphi(x_o), \varepsilon[\varphi(x_o)]^2\} \text{ e então } \varphi(x^{-1} - x_o^{-1}) < \varepsilon. \blacksquare$$

Agora, dado um valor absoluto em um corpo K, temos uma topologia, τ_φ, segundo o qual K é um corpo topológico e podemos portando definir conceitos topológicos. Definiremos aqui os conceitos de: sequência convergente, sequência de Cauchy e corpo completo, para podemos enunciar um resultado importante (teorema 2.8, a seguir), devido a Ostrowski, que nos garante que os únicos valores absolutos arquimedianos, à menos de equivalência, são essencialmente o valor absoluto usual dos complexos e suas restrições aos subcorpos dos complexos.

Como temos que, uma topologia gerada por um valor absoluto é discreta se, e somente se, o valor absoluto é trivial, de agora em diante consideraremos somente os valores absolutos não triviais.

DEFINIÇÃO 2.4 - Uma sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos em um corpo topológico, K, é chamada *convergente* para x, se ela converge para x com respeito a topologia do corpo K, ou seja, se para toda vizinhança aberta V de x existe um índice $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_o$ tem-se que $x_n \in V$. Em particular, dizemos que a sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é *φ-convergente* para x, se ela converge para x com respeito a topologia τ_φ, ou seja, para toda vizinhança fundamental $B_\varepsilon(x)$, existe um índice $n_o \in \mathbb{N}$, tal que para $n > n_o$ tem-se $x_n \in B_\varepsilon(x)$.

DEFINIÇÃO 2.5 - Uma sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos em um espaço métrico K, é chamada uma *sequência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, para todos $m,n \geq n_o$. Em particular, se K é um corpo, φ um valor absoluto sobre K e $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos em K, dizemos que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência *φ-Cauchy*, se ela é uma sequência de Cauchy com respeito a d_φ, isto é, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x_n - x_m) < \varepsilon$, para todos $m,n \geq n_o$.

DEFINIÇÃO 2.6 - Um corpo K, com um valor absoluto φ, é chamado *φ-completo* se toda sequência φ-Cauchy em K é φ-convergente.

Antes de enunciar o teorema, devido a Ostrowski, damos uma definição do que são chamados valores absolutos equivalentes, que é necessária na compreensão do Teorema.

DEFINIÇÃO 2.7 - Dois valores absolutos φ e ψ, em um corpo K, são ditos equivalentes se $\varphi = \psi^\rho$, para algum número real $\rho > 0$.

TEOREMA 2.8 - (OSTROWSKI): Todo corpo φ-completo K, onde φ é um valor absoluto arquimediano é isomorfo aos reais com o valor absoluto $|\ |_{\mathbb{R}}^{\rho}$ ou aos Complexos com o valor absoluto $|\ |_{\mathbb{C}}^{\rho}$ para algum $\rho > 0$. (onde $|\ |_{\mathbb{R}}$ representa o valor absoluto usual nos reais e $|\ |_{\mathbb{C}}$ o valor absoluto usual nos complexos).

OBSERVAÇÃO: O isomorfismo aqui significa que existe uma aplicação $\lambda:K \to \mathbb{R}$ (ou $\lambda:K \to \mathbb{C}$) onde $|\ |_{\mathbb{R}}^{\rho} \circ \lambda = \varphi$ (ou $|\ |_{\mathbb{C}}^{\rho} \circ \lambda = \varphi$), λ é um homomorfismo bijetor de K em $\mathbb{R}$ (ou de K em $\mathbb{C}$) e as aplicações λ e sua inversa λ^{-1} são contínuas; onde as topologias consideradas são as geradas pelos valores absolutos.

A demonstração do Teorema 2.8 pode ser encontrada em ([4] , (2.10)).

Estamos agora interessados em encontrar quais são os corpos topológicos cuja topologia é gerada por um valor absoluto. Veremos que uma condição essencial para que isso ocorra, é que o corpo seja V-topológico. Essa condição é satisfeita por todos os corpos topológicos gerados por um valor absoluto, como veremos a seguir. Para isso, introduziremos as noções de conjunto limitado e corpo V-topológico.

DEFINIÇÃO 2.9 - Dizemos que um conjunto A em um corpo topológico é *limitado* se, para toda vizinhança U do elemento neutro, 0, existe uma vizinhança W, de 0, tal que $AW \subset U$.

DEFINIÇÃO 2.10 - Um corpo topológico, não discreto e Hausdorff, é chamado V-*topológico* se, para toda vizinhança V, de 0, o conjunto $(K \setminus V)^{-1}$ é limitado.

PROPOSIÇÃO 2.11 - Todo corpo topológico, onde a topologia foi gerada por um valor absoluto, é um corpo V-topológico.

DEMONSTRAÇÃO: Usaremos para a prova, vizinhanças pertencentes ao sistema fundamental de vizinhanças de 0, pois, depois disso é imediata a prova para vizinhanças quaisquer do 0 .

Seja $V = B_{\varepsilon}(0) = \{y \in K / \varphi(y) < \varepsilon\}$ e seja $U = B_{\delta}(0) = \{z \in K / \varphi(z) < \delta\}$. Então, existe uma vizinhança $W = B_{\varepsilon\delta}(0) = \{a \in K / \varphi(a) < \varepsilon\delta\}$ tal que $(K \setminus V)^{-1}W \subset U$. De fato, se $b \in (K \setminus V)^{-1}$ então $\varphi(b^{-1}) = \varphi(b)^{-1} > \varepsilon$ e então $\varphi(b) < \varepsilon^{-1}$. Logo, dado $b \in (K \setminus V)^{-1}$ e $a \in W$, temos que $\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) < \varepsilon^{-1}\varepsilon\delta = \delta$ e portanto $ba \in U$.∎

Além da propriedade V, veremos que toda topologia gerada por um valor absoluto possui o que chamamos de elementos nilpotentes, e mais tarde mostraremos que essa é outra propriedade necessária para que um corpo topológico seja gerado por um valor absoluto.

Por isso, passamos agora a definir o que entendemos por elementos nilpotentes, inversamente nilpotentes e neutros.

DEFINIÇÃO 2.12 - Um elemento a, em um corpo topológico, é chamado *nilpotente* se a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, *inversamente nilpotente* se a sequência $(a^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, e *neutro* se não é nem nilpotente, nem inversamente nilpotente.

PROPOSIÇÃO 2.13 - Se K é um corpo topológico onde a topologia é dada por um valor absoluto não trivial, φ, então K possui elementos nilpotentes, diferentes do zero.

DEMONSTRAÇÃO: Se $x \in K^{\cdot}$ e $\varphi(x) < 1$, então x é um elemento nilpotente. De fato, como $\varphi(x) \in \mathbb{R}_+$ e $0 < \varphi(x) < 1$, então $[(\varphi(x))^n]_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, na topologia usual dos reais, mas então, como $[(\varphi(x))^n]_{n \in \mathbb{N}} = [\varphi(x^n)]_{n \in \mathbb{N}}$, temos que $[\varphi(x^n)]_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, e isso, pela definição de convergência, é equivalente a dizer que $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é φ-convergente para zero. ∎

Já sabemos que se a topologia em K é dada por um valor absoluto então ela é do tipo V e K possui elementos nilpotentes, $\neq 0$. Além disso, veremos agora que o conjunto M dos elementos nilpotentes é aberto e limitado. Veremos também que o produto de um elemento nilpotente, por um elemento nilpotente ou neutro, é ainda nilpotente. Quando terminarmos isso, estaremos prontos para demonstrar quais corpos topológicos são gerados por valores absolutos pois, para que isso ocorra será necessário que o corpo topológico satisfaça as cinco condições acima.

Mostremos em primeiro lugar que se a topologia em K, for gerada por um valor absoluto, então o conjunto dos elementos nilpotentes é aberto e limitado.

PROPOSIÇÃO 2.14 - Seja K um corpo e φ um valor absoluto em K. Então o conjunto dos elementos nilpotentes de K, com relação a topologia dada por φ, é aberto e limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Seja M o conjunto dos elementos nilpotentes de K. Então $M = B_1(0)$, pois se $x \in M$ então a sequência $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0, ou seja, para toda $B_\varepsilon(0)$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_o$ temos, $x^n \in B_\varepsilon(0)$. Logo para $B_1(0)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, temos $x^n \in B_1(0)$ ou seja $\varphi(x^n) < 1$, mas $\varphi(x^n) = (\varphi(x))^n < 1$ e então $\varphi(x) < 1$, logo $x \in B_1(0)$. Por outro lado, se $x \in B_1(0)$ temos que $0 \leq \varphi(x) < 1$, logo $[(\varphi(x))^n]_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero e como $(\varphi(x))^n = \varphi(x^n)$ temos $[\varphi(x^n)]_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 e então, pela definição de convergência, temos que $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ φ-converge para zero e $x \in M$. Logo, como M é um elemento do sistema fundamental de vizinhanças abertas de 0, M é aberto.

Para mostrarmos que M é limitado, seja $\mathcal{U} = B_\varepsilon(0)$ uma vizinhança aberta do sistema fundamental de vizinhanças de 0, então existe $V = B_\varepsilon(0)$ tal que $MV \in \mathcal{U}$ pois se $x \in MV$ então $x = zy$ com $z \in M$ e $y \in V$, mas então $\varphi(x) = \varphi(z)\varphi(y) < 1\varepsilon = \varepsilon$, logo $x \in \mathcal{U}$ e M é limitado. ∎

Vejamos agora, que em uma topologia dada por um valor absoluto, o produto de um elemento nilpotente por um nilpotente ou neutro, é nilpotente.

PROPOSIÇÃO 2.15 - Seja K um corpo, com a topologia dada por um valor absoluto φ. Então, se $a \in K$ é nilpotente e $b \in K$ é nilpotente ou neutro, então ba é nilpotente.

DEMONSTRAÇÃO: Seja A o conjunto dos elementos neutros e observemos que $A = \{x \in K \,/\, \varphi(x) = 1\}$, pois se $\varphi(x) = 1$ então $(\varphi(x))^n = 1$ para qualquer n, e então x não é nem nilpotente e nem inversamente nilpotente e portanto $x \in A$. Por outro lado, se $x \in A$ então suponhamos que

a) $0 \leq \varphi(x) < 1$ então $[(\varphi(x))^n]_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 e como $(\varphi(x))^n = \varphi(x^n)$, pela definição de convergência, $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ φ-converge para 0, o que é um absurdo pois $x \in A$.

b) Se $\varphi(x) > 1$ então $\varphi(x)^{-1} < 1$ e analogamente teremos $(x^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ φ-converge para 0, o que é um absurdo. Logo $\varphi(x) = 1$.

Agora se $a \in M$ e se $b \in M$ ou $b \in A$, então $\varphi(a) < 1$ e $\varphi(b) < 1$ ou $\varphi(b) = 1$, logo $\varphi(ba) = \varphi(b)\,\varphi(a) < 1$ e portanto $ba \in M$. ∎

Vejamos alguns casos particulares do conjunto A, dos elementos neutros:

a) Se $K = \mathbb{R}$ e $\varphi = |\ |$, o valor absoluto usual dos reais, então, $A = \{-1, +1\}$.

b) Se $K = \mathbb{C}$ e $\varphi = |\ |_{\mathbb{C}}$, o valor absoluto usual dos complexos, então, $A = \{x + yi \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$.

OBSERVAÇÕES: 1 - Seja K um corpo, φ um valor absoluto em K e A o conjunto dos elementos neutros em K, então K/A é isomorfo à um subgrupo de $\mathbb{R}_+$, pois, pelo teorema do isomorfismo, como φ é um homomorfismo e $A = \text{Ker } \varphi$, temos $K/A \simeq \varphi(K) \subset \mathbb{R}_+$. Para o caso particular em que $K = \mathbb{R}$ e $\varphi = |\ |$, o valor absoluto usual dos reais temos $A = \{+1, -1\}$ e $\mathbb{R}/A \simeq \mathbb{R}_+$. No caso em que $K = \mathbb{C}$ e $\varphi = |\ |_{\mathbb{C}}$, o valor absoluto usual dos complexos, temos $A = \{x + yi \ / \ x^2 + y^2 = 1\}$ e $\mathbb{C}/A \simeq \mathbb{R}_+$.

2 - Como veremos no próximo parágrafo, na linguagem dos anéis de valorização, se φ é um valor absoluto não-arquimediano de K, então o conjunto dos elementos nilpotentes ou neutros é o anel de valorização de φ, o conjunto M é o único ideal maximal desse anel e o conjunto dos elementos neutros é o grupo multiplicativo das unidades do anel de valorização.

Como observamos anteriormente, para que um corpo topológico seja gerado por um valor absoluto, ele deverá satisfazer cinco condições. Mas, na verdade, são necessárias somente três: que seja V-topológico, que tenha elementos nilpotentes, $\neq 0$, e que o conjunto dos elementos nilpotentes seja aberto, pois, as outras condições são obtidas à partir dessas.

Antes de mostramos que realmente podemos reduzir as condições, daremos uma definição equivalente de corpos V-topológicos, que facilitará as demonstrações desses resultados. Para isso, definiremos primeiramente, o que entendemos por um conjunto limitado fora do zero.

DEFINIÇÃO 2.16 - Seja K um corpo topológico, dizemos que um subconjunto B de K é *limitado fora do zero*, se existe uma vizinhança V do zero, que é disjunta de B, ou seja, $B \cap V = \emptyset$.

Veremos agora, a definição equivalente de V-topologia.

PROPOSIÇÃO 2.17 - K é um corpo V-topológico se e somente se para cada subconjunto B de K, limitado fora do zero, o conjunto B^{-1} é limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos K um corpo V-topológico e seja $B \subset K$ um subconjunto de K, limitado fora do zero, logo pela definição 2.16, existe V, vizinhança de 0, com $B \cap V = \emptyset$. Para essa vizinhança V temos, por hipótese que, $(K \setminus V)^{-1}$ é limitado, ou seja, para toda vizinhança U de 0, existe uma vizinhança W de 0, com

$W(K \setminus V)^{-1} \subset \mathcal{U}$. Como $B^{-1} \subset (K \setminus V)^{-1}$, pois $B^{-1} \cap V^{-1} = \emptyset$, temos: $WB^{-1} \subset W \ (K \setminus V)^{-1} \subset \mathcal{U}$, ou seja, $WB^{-1} \subset \mathcal{U}$ e portanto B^{-1} é limitado.

Seja $\mathcal{U}$, uma vizinhança qualquer de 0, temos então que: $(K \setminus \mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$, portanto $K \setminus \mathcal{U}$ é limitado fora do zero e, pela hipótese, $(K \setminus \mathcal{U})^{-1}$ é limitado.∎

Vejamos agora que, se o conjunto M dos elementos nilpotentes, em um corpo V-topológico, é aberto, então M é limitado e portanto essa é uma das condições que será considerada implicitamente.

PROPOSIÇÃO 2.18 - Se o conjunto M, dos elementos nilpotentes, de um corpo V-topológico, é aberto, então M é limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Se M é aberto, temos que, como o 0 é um elemento nilpotente e $M \cap M^{-1} = \emptyset$, M^{-1} é limitado fora do zero e portanto, pela proposição 2.17, M é limitado.∎

Outra condição que será considerada implicitamente, pois pode ser obtida das outras é a que afirma que o produto de um elemento nilpotente por um neutro ou nilpotente é ainda nilpotente. Como vemos na seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 2.19 - Se K é um corpo V-topológico com o conjunto M, dos elementos nilpotentes, aberto e se a é um elemento nilpo tente, b um elemento nilpotente ou neutro então ba é nilpotente.

DEMONSTRAÇÃO: Seja b um elemento nilpotente ou neutro. Temos então que b^{-1} é inversamente nilpotente ou neutro, logo, o conjunto $C = \{b^{-n}/n \in \mathbb{N}\}$ é disjunto de M, ou seja $C \cap M = \emptyset$. Portanto, C é limitado fora do zero e $C^{-1} = \{b^n/n \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Se a é um elemento nilpotente, temos que $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero e portanto $((ba)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (b^n a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero. De fato, como C^{-1} é limitado, dado U, vizinhança do 0, existe V, vizinhança do 0, com $C^{-1}\, V \subset U$ e como $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, para V, existe um $n_o > 0$, tal que para todo $n > n_o$ temos que $a^n \in V$, então para $n > n_o$ temos $b^n a^n \in U$, ou seja, $(b^n a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, mas então ba é nilpotente.∎

Estamos agora em condições de caracterizar quais os corpos topológicos que são gerados por um valor absoluto. Veremos no próximo teorema que se um corpo topológico é uma V-topologia, possui elementos nilpotentes e o conjunto dos elementos nilpotentes é aberto, então ele certamente é gerado por um valor absoluto. No próximo parágrafo, verificaremos que a última condição não é necessária, ou seja, para que um corpo topológico seja gerado por um valor absoluto, será necessário somente que seja uma V-topologia que possua elemento nilpotente, diferente do 0 .

TEOREMA 2.20 - Se em um corpo V-topológico K, o conjunto M, dos elementos nilpotentes de K, é aberto, então a topologia de K é gerada por um valor absoluto.

DEMONSTRAÇÃO: Observemos inicialmente que:

i) O conjunto A, dos elementos neutros, é fechado para inversos, pois se $a \in A$, suponhamos que $a^{-1} \notin A$ então ou a^{-1} é nilpotente e $((a^{-1})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, o que implica que $(a^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero e então a é inversamente nilpotente, o que é uma contradição, ou a^{-1} é inversamente nilpotente, e então a é nilpotente que é uma contradição. Logo $a^{-1} \in A$ sempre que $a \in A$.

ii) O conjunto A é fechado para multiplicação, pois se $a \in A$ e $b \in A$, suponhamos que $ab \notin A$, então ab é nilpotente ou ab é inversamente nilpotente. Se ab for nilpotente e como $a^{-1} \in A$, temos, pela proposição 2.19 que $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = b$ é nilpotente, o que é uma contradição. Se ab é inversamente nilpotente, temos então que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ é nilpotente e como $b \in A$, novamente pela proposição 2.19, temos $b(a^{-1}b^{-1}) = (bb^{-1})a^{-1} = a^{-1}$ é nilpotente, mas então a é inversamente nilpotente, o que é uma contradição. Portanto, concluímos que $ab \in A$ sempre que $a \in A$ e $b \in A$.

Temos assim que A é um subgrupo de $K^{\cdot}$ e $K^{\cdot}/A$ é um gru po (onde $K^{\cdot}$ representa o grupo multiplicativo dos elementos não nulos de K).

Podemos ordenar $K^{\cdot}/A$, colocando:

$\bar{a} \geq \bar{b}$ sempre que ab^{-1} é nilpotente ou neutro.

Pode-se verificar facilmente que a relação "$\geq$" assim definida, não depende da escolha dos representantes das classes de equivalência, ou seja, está bem definida e que realmente é uma ordem, compatível com a operação de $K^{\cdot}/A$.

A ordenação é arquimediana, pois se a é nilpotente e b um elemento qualquer, temos que $(a^n b^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0. De fato, como a é nilpotente, $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0, ou seja, para qualquer vizinhança U de 0, existe $n_o > 0$, $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_o$, temos $a^n \in U$. Como para todo $b \neq 0$ temos que Ub é vizinhança de 0, então para essa vizinhança existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_1$ temos $a^n \in Ub$ ou seja $a^n b^{-1} \in U$ e portanto $(a^n b^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0.

Sabemos que M é uma vizinhança de 0, então para essa vizinhança, existe n_2 tal que para todo $n > n_2$ temos $a^n b^{-1} \in M$, ou seja, $a^n b^{-1}$ é nilpotente. Então $\bar{a}^n \geq \bar{b}$ para n suficientemente grande $(n > n_2)$ e a ordem é arquimediana.

Temos então que $K^{\cdot}/A$ é ordem-isomorfo a um subgrupo do grupo aditivo $\mathbb{R}$, dos números reais (veja [1], teor. 3.4)

Suponhamos que seja ordem - isomorfo pela aplicação φ.

Seja θ a aplicação quociente, ou seja, θ é uma aplicação definida no conjunto $K^{\cdot}$ e tomando valores em $K^{\cdot}/A$, definida por $\theta(a) = \bar{a} = aA$ e seja φ o isomorfismo definido em $K^{\cdot}/A$ e tomando valores em $\mathbb{R}$, que preserva a ordem.
Seja agora $\psi = \varphi \circ \theta$, a aplicação composta das aplicações θ e φ e definimos a seguinte aplicação em K:

$$v(0) = 0$$

e

$v(a) = e^{-\psi(a)}$ onde $\psi(a)$ é a imagem de a pela aplicação ψ e e é a base do logaritmo neperiano.

Temos que v assim definida satisfaz:

1 - $v(x) = 0$ se e somente se $x = 0$.

2 - $v(ab) = e^{-\psi(ab)} = e^{-(\psi(a)+\psi(b))} = e^{-\psi(a)} \cdot e^{-\psi(b)} =$
$= v(a)\, v(b)$, para todo $a,b \in K$.

Podemos definir de maneira natural, uma topologia, τ_v, obtida da aplicação v, onde um sistema fundamental de vizinhanças abertas de 0 é dados pelos conjuntos da forma:

$$B_\varepsilon(0) = \{y \in K / v(y) < \varepsilon\} \quad ,\text{com} \quad \varepsilon > 0 .$$

Verificaremos agora que a topologia τ_v coincide com a topologia original do corpo K, que chamaremos τ.

(a) Mostremos inicialmente que toda vizinhança $B_\varepsilon(0)$ contêm uma vizinhança, da topologia original, U.

Para isso, dado $B_\varepsilon(0)$, consideremos b tal que $v(b) > \varepsilon^{-1}$. Para esse b existe uma vizinhança U tal que bU é vizinhança de 0 e está contida em M. (Isto segue do fato de M ser uma vizinhança de 0 e do item (iv_2) da proposição 1.6).

Agora, se $y \in U$ então by é nilpotente, logo $\bar{b} \geq \overline{y^{-1}}$ e como aplicação φ preserva a ordem temos $\varphi(\bar{b}) \geq \varphi(\overline{y^{-1}})$ e então $\psi(b) \geq \psi(y^{-1})$, ou seja, $e^{-\psi(b)} \leq e^{-\psi(y^{-1})}$ e portanto $v(b) \leq v(y^{-1})$. Por outro lado, $v(y^{-1}) \geq v(b) > \varepsilon^{-1}$, logo $v(y^{-1}) > \varepsilon^{-1}$ e $v(y) < \varepsilon$ resultando $y \in B_\varepsilon(0)$ e $U \subset B_\varepsilon(0)$.

(b) Mostremos agora que toda vizinhança fundamental U de 0, na topologia τ', contêm $B_\varepsilon(0)$ para algum ε.

Como o conjunto M dos elementos nilpotentes é limitado temos que para qualquer vizinhança U de 0, existe uma vizinhança V de 0 tal que $MV \subset U$, então se $x \in V$, $x \neq 0$, temos $Mx \subset U$.

Consideremos então $B_{v(x)}(0)$.

Se $a \in B_{v(x)}(0)$ então $v(a) < v(x)$, $\psi(a) > \psi(x)$ $\varphi(\bar{a}) > \varphi(\bar{x})$ e portanto $\bar{a} > \bar{x}$ e ax^{-1} é nilpotente, digamos que $ax^{-1} = t$ onde $t \in M$, então $a = tx$ logo $a \in U$

e temos $B_{v(x)}(0) \subset U$, como queríamos.

De (a) e (b) temos que as topologias coincidem.

Para completarmos o teorema, falta a verificação do item c) da definição 2.1, o que será feito trocando-se nossa função por uma potência especial, conforme veremos a seguir:

LEMA 2.21 - (ARTIN): Seja v uma aplicação em um corpo K, a qual é um valor absoluto exceto pela possível falha do item c) da definição 2.1.

Suponhamos que a adição é contínua na topologia dada por v. Então para algum número positivo σ, v^{σ} é um valor absoluto que define a mesma topologia que v.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos inicialmente o conjunto $D = \{1 + v(a)/v(1+a)$, onde $a \in K\}$. Logo D é um conjunto limitado fora do zero. De fato, suponhamos que isso não aconteça, então, como $D \subset \mathbb{R}$, para toda vizinhança de zero $B_{\varepsilon}(0)$, na topologia usual da reta, temos que $D \cap B_{\varepsilon}(0) \neq \emptyset$. Mas então existe uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que a sequência $(1 + v(a_n)/v(1+a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero, mas isso é equivalente a dizer que a sequência $[(1+v(a_n))(v(1+a_n)^{-1}]_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero e então $[v(1+a_n)^{-1} + v(a_n)v(1+a_n)^{-1}]_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero. Logo as sequências $(v(1+a_n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v(a_n)v(1+a_n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergem para zero, o que implica que as sequências $((1+a_n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e

$(a_n(1+a_n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergem para zero. A soma das duas porém é 1, ou seja, $((1+a_n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}} + (a_n(1+a_n)^{-1})_{n \in \mathbb{N}} = 1$, o que é um absurdo, pois como as duas sequências convergem para zero e a adição é uma função contínua, a soma deveria convergir para zero.

Logo, o conjunto D é limitado fora do zero e como ele é formado por elementos positivos, temos que D é limitado inferiormente, suponhamos que $D > N$, ou seja, para todo $d \in D$, $d > N$, então $D^{-1} \leq M = N^{-1}$ temos então que $v(1+a)/1+v(a) \leq M$ e $v(1+a) \leq M(1+v(a))$. Substituindo a por a/b temos que $v(a+b) \leq M(v(a)+v(b))$ e então $v(a+b) \leq 2M \ \text{máx}\{v(a), v(b)\}$.

Escolhemos agora σ tão pequeno, tal que $(2M)^{\sigma} \leq 2$. (Ou seja, $\sigma \leq \log 2/\log 2M$) temos então que $(v(a+b))^{\sigma} \leq (2M)^{\sigma} \cdot \text{máx}\{(v(a))^{\sigma}, (v(b))^{\sigma}\} \leq 2 \cdot \text{máx}\{(v(a))^{\sigma}, (v(b))^{\sigma}\}$.

Vamos mostrar agora que:

a) As topologias dadas por v e v^{σ} coincidem, e

b) v^{σ} é um valor absoluto.

Para provarmos a) consideremos $\beta_{\varepsilon}(x) = \{y \in K/v(x-y) < \varepsilon\}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x na topologia dada por v e $\beta^{\sigma}_{\delta}(x) = \{z \in K/v^{\sigma}(x-z) < \delta\}$ um sistema fundamental de vizinhanças abertas de x na topologia dada por v^{σ}. Agora se $y \in \beta_{\varepsilon}(x)$ então $v(x-y) < \varepsilon$ e então $v^{\sigma}(x-y) = (v(x-y))^{\sigma} < \varepsilon^{\sigma}$ e portanto $y \in B^{\sigma}_{\varepsilon^{\sigma}}(x)$. Por outro lado, se $z \in \beta^{\sigma}_{\delta}(x)$ temos $v^{\sigma}(x-z) = (v(x-z))^{\sigma} < \delta$ e então $v(x-z) < \delta^{1/\sigma}$, logo $z \in \beta_{\delta^{1/\sigma}}(x)$.

Vamos provar agora b) ou seja que v^σ é um valor absoluto. As condições a) e b) da definição 2.1 são satisfeitas claramente. Passamos portanto a prova do item c. Provaremos inicialmente que $v^\sigma(a_1+\ldots+a_n) \le n \max\limits_i v^\sigma(a_i)$ se $n = 2^k$ é uma potência de 2. Vamos provar por indução sobre k.

Se $k = 1$, temos que $v^\sigma(a_1+a_2) \le 2\max\{v^\sigma(a_1), v^\sigma(a_2)\}$. Suponhamos válido para $n=2^{k-1}$, temos então $v^\sigma(a_1+a_2+\ldots+a_n) \le$

$$\le 2 \max\{v^\sigma(a_1+\ldots+a_{\frac{n}{2}}), v^\sigma(a_{\frac{n}{2}+1},\ldots,a_n)\} \le$$

$$2 \max\{2^{k-1} \max\{v^\sigma(a_1),\ldots,v^\sigma(a_{\frac{n}{2}})\}, 2^{k-1} \max\{v^\sigma(a_{\frac{n}{2}+1},\ldots,a_n)\}=$$

$= 2^k \max\{v^\sigma(a_1),\ldots,v^\sigma(a_n)\} = n \max\{v^\sigma(a_1),\ldots,v^\sigma(a_n)\}$. Temos em particular, $v^\sigma(n) = v^\sigma(1+\ldots+1) \le n$, para n potência de 2.

Vamos mostrar agora que $v^\sigma(x) \le 2x$ para todo inteiro positivo x.

Suponhamos $2^k \le x < 2^{k+1}$ e escrevemos $x = (x-2^k) + 2^k$, então se $v^\sigma(2^k) \ge v^\sigma(x-2^k)$, $v^\sigma(x) \le 2 \max\{v^\sigma(2^k), v^\sigma(x-2^k)\} \le$ $\le 2v^\sigma(2^k) \le 2\cdot 2^k \le 2x$, logo $v^\sigma(x) \le 2x$. Por outro lado, se $v^\sigma(x-2^k) \ge v^\sigma(2^k)$, vamos mostrar por indução que $v^\sigma(x) \le 2x$. Para $x = 1$ temos que $v^\sigma(1) = 1 \le 2$. Suponhamos válido para todo $r < x$, então como,

$v^\sigma(x) \le 2 \max\{v^\sigma(x-2^k), v^\sigma(2^k)\} \le 2\, v^\sigma(x-2^k)$ e $0 \le x-2^k < x$

temos $2v^\sigma(x-2^k) \leq 2\cdot 2(x-2^k) = 2(2x - 2^{k+1}) \leq 2(2x-x) = 2x$; e portanto $v^\sigma(x) \leq 2x$.

Agora lembrando que $v^\sigma(a_1 + \ldots + a_n) \leq n \max\limits_i v^\sigma(a_i)$ para todo n potência de 2, e tomando a expansão de $(1+x)^{n-1}$, onde n é uma potência de 2, temos para todo $x \in K$.

$$v^\sigma((1+x)^{n-1}) = v^\sigma(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1,i}\, x^i) \leq$$

$$\leq n \max_i v^\sigma(C_{n-1,i}\, x^i) \leq n \max_i v^\sigma(C_{n-1,i}) v^\sigma(x^i) \leq$$

$$\leq n \max_i 2\, C_{n-1,i}\, v^\sigma(x^i) = 2n \max_i C_{n-1,i}\, v^\sigma(x^i) \leq$$

$$\leq 2n\,(1 + v^\sigma(x))^{n-1}.$$

Extraindo-se a raíz $n-1$ e tomando-se o limite quando n tende para o infinito, deduzimos que $v^\sigma(1+x) \leq 1 + v^\sigma(x)$. Se tomarmos $x = a/b$, teremos

$$v^\sigma(a+b) \leq v^\sigma(a) + v^\sigma(b).$$

Isto completa a prova do Teorema 2.20 e do Lema 2.21.∎

Para as demonstrações do Teorema 2.20 e do Lema 2.21, foi empregada a mesma técnica usada por Kaplansky em [6], nos Teoremas 1 e 3 e no Lema 1.

Observemos que, conforme ([4], (1.14)), se v^σ for não arqui mediano, temos que v é um valor absoluto, contudo se v^{σ} for ar arquimediano isso pode não ocorrer.

Observemos também, que o Teorema 2.20 não nos diz nada sobre o tipo do valor absoluto. Podemos então tirar as seguintes conclusões:

a) φ é não arquimedina se, e somente se, K é desconexo.

b) φ é arquimediana se, e somente se, K é conexo.

Para provarmos os ítens a) e b), basta mostrarmos que se φ é não arquimediana então K é desconexo e que se φ é arquimediana então K é conexo, pois, as outras afirmações seguem imediatamente dessas.

Suponhamos inicialmente que φ é não arquimediana, então as vizinhanças $U_{\varepsilon}(x) = \{y \in K/\varphi(x-y) < \varepsilon\}$ são abertas e fechadas. Realmente, se $z \in U_{\varepsilon}(x)$ então $U_{\varepsilon/2}(z) \subset U_{\varepsilon}(x)$, pois se $w \in U_{\varepsilon/2}(z)$ temos $\varphi(w-z) < \varepsilon/2$ e $\varphi(w-x) \leq \max\{\varphi(w-z) ; \varphi(z-x)\} < \varepsilon$ e então $w \in U_{\varepsilon}(x)$, logo $U_{\varepsilon}(x)$ é aberto. Por outro lado, para mostrarmos que $U_{\varepsilon}(x)$ é fechado basta mostrarmos que o conjunto $\{y \in K/\varphi(x-y) \geq \varepsilon\}$ é aberto e isto segue de fato de que para qualquer $z \in \{y \in K/\varphi(x-y) \geq \varepsilon\}$ temos que $U_{\varepsilon}(z) \subset \{y \in K/\varphi(x-y) \geq \varepsilon\}$. Realmente, se $w \in U_{\varepsilon}(z)$, então $\varphi(w-z) < \varepsilon$ e como $\varphi(w-x) \leq$ $\leq \max\{\varphi(w-z) ; \varphi(z-x)\}$ e $\varphi(w-z) \neq \varphi(z-x)$, então $\varphi(w-x) =$ $= \varphi(z-x) \geq \varepsilon$ e $\varphi(w-x) \geq \varepsilon$, portanto $w \in \{y \in K/\varphi(x-y) \geq \varepsilon\}$. Logo, K é desconexo.

Agora, se φ é arquimediana, pelo Teorema de Ostrowiski,(2.8), K é isomorfo aos reais ou aos complexos, com o valor absoluto $|\ |_{\mathbb{R}}^{\rho}$ ou $|\ |_{\mathbb{C}}^{\rho}$, e portanto, K é conexo.

Vejamos agora um exemplo de um corpo topológico que não é V-topológico.

Para isso, seja $K = \mathbb{Q}$ e consideremos a classe de subconjuntos $\{V_n \ / \ n \geq 1\}$, onde

$$V_n = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ |x|_p \leq e^{-n} \quad e \quad |x|_q \leq e^{-n}\}$$

A classe $\{V_n\}$ satisfaz todas as condições da proposição 1.4, logo determina uma topologia de corpo topológico sobre $\mathbb{Q}$, onde $\{V_n / n \geq 1\}$ é um sistema fundamental para as vizinhanças de 0 . A topologia determinada por $\{V_n / n \geq 1\}$ é Hausdorff pois, $0 \in V_n$, para todo $n \geq 1$ e se $x \in \cap V_n$ então $|x|_p \leq e^{-n}$ e $|x|_q \leq e^{-n}$ para todo $n \geq 1$ e isso só é verdade para $x = 0$.

Mas essa topologia não é uma V-topologia.

Realmente, dado V_n, para todo $n \geq 1$, temos que $(\mathbb{Q} \setminus V_n)^{-1}$ não é limitado, pois, como $(\mathbb{Q} \setminus V_n)^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ |x|_p < e^n$ ou $|x|_q < e^n\}$ e dado V_K, para todo V_a temos que

$$(\mathbb{Q} \setminus V_n)^{-1} V_a \not\subset V_K .$$

Para isso, basta tomarmos $x_o \in (\mathbb{Q} \setminus V_n)^{-1}$ tal que $|x_o|_p < e^n$,

$|x_o|_q > e^{-K+3a}$ e $y_o \in V_a$ tal que $e^{-3a} < |y_o|_q \leq e^{-a}$, então

$$|x_o y_o|_q = |x_o|_q \, |y_o|_q > e^{-K+3a} \cdot e^{-3a} = e^{-K} \qquad \text{e}$$

portanto $x_o y_o \notin V_K$.

A seguir, daremos uma demonstração do Teorema de Portrjagin-Van Dantzig - Jacobson, que nos garante que todo corpo localmente compacto tem sua topologia gerada por um valor absoluto. Isto será feito mostrando que todo corpo localmente compacto satisfaz as condições do teorema 2.20 o que concluirá o que desejamos. Para isso veremos primeiramente algumas proposições necessárias.

PROPOSIÇÃO 2.22 - Toda vizinhança com fecho compacto, em um corpo topológico, é limitada.

DEMONSTRAÇÃO: Seja U uma vizinhança com fecho compacto $\overline{U}$. Para toda vizinhança V, de 0, e para todo $x \in \overline{U}$, existe V_x, vizinhança de 0, tal que $(x+V_x)\,V_x \subseteq V$ (por iv) prop. 1.3). Para cada $x \in \overline{U}$, consideremos $U_x = x + V_x$ temos então que $\{U_x / x \in \overline{U}\}$ é uma cobertura de $\overline{U}$ e como $\overline{U}$ é compacto, existe uma subcobertura finita $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ de $\overline{U}$. Seja $W' = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ e $W = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$ então $WW' \subset V$ e como $U \subset \overline{U} \subset W'$, temos $WU \subset WW' \subset V$, ou seja, U é limitado.■

Antes de continuarmos as proposições, daremos a definição do que entendemos por um corpo localmente compacto.

DEFINIÇÃO 2.23 - Um *corpo localmente compacto* é um corpo topológico K, cuja topologia é Hausdorff e tal que todo ponto de K admite uma vizinhança aberta cujo fecho é compacto.

Veremos a seguir, que o conjunto dos elementos nilpotentes, em um corpo localmente compacto, é aberto. Isto será feito mostrando a existência de uma vizinhança de 0, formada por elementos nilpotentes.

PROPOSIÇÃO 2.24 - Se um corpo topológico K admite uma vizinhança de 0 consistindo de elementos nilpotentes então o conjunto dos elementos nilpotentes de K é aberto.

DEMONSTRAÇÃO: Seja x um elemento nilpotente de K e $\mathcal{U}$ a vizinhança de 0, formada de elementos nilpotentes. Como $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0, temos que para $\mathcal{U}$, existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_o$, $x^n \in \mathcal{U}$.

Consideremos $N > n_o$, então $x^N \in \mathcal{U}$ e existe uma vizinhança V de x com $V^N \subset \mathcal{U}$.

Realmente, vamos mostrar por indução que: dado qualquer aberto W, se $x^n \in W$ para algum n, então existe V vizinhança de x com $V^n \subset W$. Se $x \in W$ então $V = W$ satisfaz a condição. Suponhamos que para todo $r \leq n$ e todo aberto W com $x^r \in W$, existe uma vizinhança V de x com $V^r \subset W$ e vamos mostrar que isso é válido para $n + 1$.

De fato, seja W um aberto e suponhamos que $x^{n+1} \in W$, então pela continuidade do produto, existem vizinhanças V_1 de x^n e V_2 de x com $V_1 V_2 \subset W$. Pela hipótese de indução como $x^n \in V_1$ existe V_3 com $x \in V_3$ e $V_3^n \subset V_1$, seja $V \subset V_2 \cap V_3$, então $x \in V$ e $VV^n \subset V_2 V_3^n \subset V_2 V_1 \subset W$. Temos então que existe V vizinhança de x com $V^N \subset U$. Se $y^N \in V^N$ então y^N é nilpotente e portanto y é nilpotente, logo, V é uma vizinhança de x formada de elementos nilpotentes e portanto o conjunto dos nilpotentes é aberto.∎

PROPOSIÇÃO 2.25 - Se K é um corpo localmente compacto então K possui uma vizinhança de 0, consistindo de elementos nilpotentes.

DEMONSTRAÇÃO: Seja U, uma vizinhança aberta de 0, com fecho compacto , $\bar{U}$, e suponhamos $1 \notin \bar{U}$. Pela proposição 2.22 podemos encontrar uma vizinhança V com $V \subseteq U$ e $VU \subseteq U$. Logo, $V^2 \subset U$ pois $V^2 = VV \subset VU \subset U$ e, em geral $V^n \subset U$.

Seja $W = V \cup V^2 \cup V^3 \cup \ldots$, então $W^2 \subset W$. De fato, se $x \in W^2$ então $x = ab$ com $a \in W$ e $b \in W$ então $a \in V^n$ para algum n e $b \in V^m$ para algum m, logo $ab \in V^n V^m = V^{n+m} \subset W$.

Temos que W é aberto como união de abertos V^n (V^n é aberto pois é o produto de vizinhanças abertas). Como $W \subset U$ então W tem fecho compacto $\bar{W}$, pois, $\bar{W} \subset \bar{U}$ e $\bar{U}$ é compacto.

Seja $x \in W$, então,como $x^n \in W \subset \bar{W}$ para todo n, exis te $a \in \overline{W}$, ponto limite de $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Suponhamos $a \neq 0$, temos que $\overline{W}a$ é um conjunto fechado (pela obs. III, pag. 4) não contendo a, pois $1 \notin \overline{W}$.

Seja Y uma vizinhança de a cujo fecho é disjunto de $\overline{W}a$, ou seja, $\overline{Y} \cap \overline{Wa} = \emptyset$. Para cada $p \in \overline{W}$ podemos encontrar vizinhanças $t(p)$ e $t(a)$, de p e a, tal que $t(p)\, t(a)$ é disjunto de Y (pela continuidade do produto).

Então, como $\overline{W}$ é compacto, existe um número finito de $t(p)$ que cobrem $\overline{W}$.

Seja X a intersecção dos $t(a)$ correspondentes aos $t(p)$ da cobertura finita de $\overline{W}$, então $\overline{W}X$ é disjunto de Y. Mas isso contradiz o fato que existem inteiros m,n $(n > m)$ com $x^m \in X$ e $x^n \in Y$. Portanto, $a = 0$ e W é uma vizinhança de elementos nilpotentes.$_\blacksquare$

Das proposições 2.24 e 2.25 temos satisfeitas uma das condições do Teorema 2.20. Falta mostrar portanto, que a topologia, em um corpo localmente compacto, é do tipo V, para isso veremos as seguintes proposições.

PROPOSIÇÃO 2.26 - Se K é um corpo localmente compacto então K satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade.

DEMONSTRAÇÃO: É suficiente mostrar que 0, possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável . Para isso, seja $x \neq 0$, um elemento nilpotente e $\mathcal{U}$ uma vizinhança aberta de 0, com fecho $\overline{\mathcal{U}}$, compacto.

Vamos mostrar que o conjunto $\{x^n \mathcal{U} / n \geq 1\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0. Pela obs. III, pag. 4, como $x^n \neq 0$ e $\mathcal{U}$ é aberto temos $x^n\mathcal{U}$ aberto, para todo n. Como $0 \in \mathcal{U}$, temos que $0 \in x^n\mathcal{U}$, para todo n. Seja V uma vizinhança de 0, como $\mathcal{U}$ é limitado (prop. 2.22), existe W vizinhança de 0 com $\mathcal{U}W \subset V$. Como x é nilpotente, para W, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para $r \geq n_o$, $x^r \subset W$. Seja $N > n_o$, então $\mathcal{U}x^N \subset \mathcal{U}W \subset V$. Logo, $\{x^n\mathcal{U}/n \geq 1\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para o 0.■

PROPOSIÇÃO 2.27 - Seja K um corpo topológico satisfazendo o 1º axioma da enumerabilidade e L um conjunto não limitado em K. Então L contém uma sequência totalmente não limitada.

OBSERVAÇÕES: 1 - Um conjunto em um corpo topológico é dito totalmente não limitado se todo subconjunto infinito é não limitado.

2 - Uma sequência, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em um corpo topológico é chamada limitada, se o conjunto $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ for limitado, não limitada, se o conjunto $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ for não limitado e totalmente não limitada, se o conjunto $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ for totalmente não limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ um sistema fundamental de vizinhanças de O. Como L é um conjunto não limitado, existe uma vizinhança V de O tal que para todo i, temos $L\mathcal{U}_i \not\subset V$. Assim para cada i escolhemos $a_i \in \mathcal{U}_i$ e $b_i \in L$ com $a_i b_i \notin V$. Logo $\{b_i / i \in \mathbb{N}\}$ é totalmente não limitado. De fato, seja $\{b_{i_j}\}$ um subconjunto infinito de $\{b_i / i \in \mathbb{N}\}$, então como K satisfaz o 1º axioma da enumerabilidade podemos supor $\mathcal{U}_1 \supset \mathcal{U}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{U}_n \supset \ldots$ temos então que se $i_j = t$ para algum i_j então $b_{i_j} a_t \notin V$. Por outro lado, se para algum t, $i_j \neq t$, para todo i_j, então existe $i_{j_o} > t$ tal que $\mathcal{U}_{i_{j_o}} \subset \mathcal{U}_t$ e como $a_{i_{j_o}} \in \mathcal{U}_{i_{j_o}} \subset \mathcal{U}_t$ temos $b_{i_{j_o}} a_{i_{j_o}} \not\subset V$. ∎

PROPOSIÇÃO 2.28 - Todo corpo métrico K, satisfazendo a condição abaixo, é um corpo V-topológico.

Condição: Se, para toda sequência $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ não tendo subsequência convergente então $(a_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ converge para O.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar inicialmente que B é um conjunto limitado se, e somente se, toda sequência $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, de elementos de B, é limitada. De fato, se B é um conjunto limitado então para toda vizinhança V de O, existe uma vizinhança W de O, tal que $BW \subset V$, logo para toda sequência $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ em B, temos $\{b_i / i \in \mathbb{N}\} W \subset BW \subset V$ portanto $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada para toda sequência de elementos de B. Por outro lado, suponhamos que toda sequência $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de B, é limitada. Se B não é limitado, então pelo lema anterior, tem sequência totalmente não limitada. o que é uma contradição. Logo B é limitado.

Mostremos agora, que dado um conjunto B em K, limitado fora do zero, toda sequência de elementos de B^{-1} é limitada. De fato, seja $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, uma sequência de elementos em B, então $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada fora do zero. Se $(b_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ não é limitada, então, pelo lema 2.27 é possível encontrar uma subsequência $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $(b_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$, totalmente não limitada. Então $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ não tem subsequência convergente (pois toda sequência convergente é limitada). Então, pela condição do lema, temos que $(c_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ converge para 0, mas então, como $c_i^{-1} = (b_{i_j}^{-1})^{-1} = b_{i_j}$, temos $(b_{i_j})_{i_j \in \mathbb{N}}$ converge para 0, mas isso é uma contradição pois $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é limitada fora do zero. Logo, para toda sequência $(b_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos em um conjunto B^{-1}, onde B é limitado fora do zero, é limitada. Pela primeira parte da demonstração temos que B^{-1} é limitado e portanto K é do tipo V. ∎

PROPOSIÇÃO 2.29. Se K é um corpo localmente compacto, então, satisfaz a seguinte condição:

Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $a_n \in K$, não tem subsequência convergente então, $(a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma sequência de elementos em K, não tendo subsequência convergente. Logo, a sequência $(a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$, não pode ter ponto limite, diferente de 0, pois, se existe $b \neq 0$ tal que b é ponto de $(a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ e, se $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ é um sistema fundamental de vizinhanças de b, para todo $\mathcal{U}_i$, existe n_i com com $a_{n_i}^{-1} \in \mathcal{U}_i$ resultando $a_{n_i} \in \mathcal{U}_i^{-1}$, mas $\mathcal{U}_i^{-1}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de b^{-1} e portanto, a sequência $(a_{n_i})_{n_i \in \mathbb{N}} \subset (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para b^{-1}, o que é uma contradição. Portanto, basta mostrar que 0 é um ponto limite da sequência $(a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$. Conforme 2.25, seja $y \neq 0$ um elemento de K tal que $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0 e seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança aberta, com fecho compacto $\mathcal{U}'$, de 0. Se infinitos $a_n y^j$ para $n = 1,2,\ldots$ e j fixo estão em $\mathcal{U}'$, então os correspondentes a_n estão no conjunto compacto $\mathcal{U}'y^{-1}$ e então a_n tem um ponto limite, o que seria uma contradição. Portanto, podemos tomar uma subsequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $b_n y^n \in K \setminus \mathcal{U}'$. Agora como $(y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0, podemos determinar para cada n um inteiro k_n tal que $b_n y^{k_n} \in K \setminus \mathcal{U}'$ mas $b_n y^{k_n+1} \in \mathcal{U}'$, temos que $k_n \geq n$ e portanto se n tende para o infinito, k_n também. Pela compacidade de $\mathcal{U}'$ podemos concluir que $(b_n y^{k_n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para z (pois caso contrário existe uma subsequência convergindo para z e o raciocínio é o mesmo). Então, $(b_n y^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $zy^{-1} = w \in K \setminus \mathcal{U}'$ e portanto $zy^{-1} \neq 0$.

De $(y^{-k_n} b_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para w^{-1} e $(y^{k_n})_{k_n \in \mathbb{N}}$ convergir para 0, temos que (b_n^{-1}) converge para 0 e portanto 0 é ponto limite de (a_n^{-1}). ∎

Das proposições 2.26, 2.27, 2.28 e 2.29 temos que todo corpo localmente compacto é V-topológico e todas as condições do Teorema 2.20 estão satisfeitos. Resumiremos a seguir as conclusões acima enunciando o Teorema de Pontrjagin - Van Dantzig - Jacobson.

TEOREMA 2.30 - Se K é um corpo localmente compacto então a topologia em K é gerada por um valor absoluto.

Para finalizar o parágrafo, damos à seguir, duas caracterizações dos corpos localmente compactos, cujas demonstrações podem ser encontradas em Bourbaki, [2], e cuja terminologia é introduzida no próximo parágrafo.

PROPOSIÇÃO 2.31 - Seja K um corpo, v uma valorização de Krull, não trivial, A_v o anel da valorização v e M_v o ideal maximal de A_v. Para que K, com a topologia τ_v, seja localmente compacto, é necessário e suficiente que:

1 - K seja completo;

2 - v é discreta (ou seja, existe um isomorfismo de Γ sobre $\mathbb{Z}$);

3 - A_v/M_v seja finito.

Sendo assim, A_v é compacto.

PROPOSIÇÃO 2.32 - Seja K um corpo localmente compacto, não discreto e a topologia de K é gerada por uma valorização não discreta v, temos a seguinte classificação:

1 - Se K tem característica 0 e se v é um valor absoluto arquimediano, então K é isomorfo a um dos corpos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, onde $\mathbb{H}$ representa o corpo dos quatérnios;

2 - Se K é de característica 0 e se v é um valor absoluto não arquimediano, então K é uma extensão finita sobre um corpo p-ádico $\mathbb{Q}_p$.

3 - Se K é de característica $p \neq 0$ então K é isomorfo à uma extensão finita do corpo, $\mathbf{F}_q((t))$, das séries formais sobre o corpo finito $\mathbf{F}_q$, onde q é uma potência de p.

§ 3. VALORIZAÇÃO DE KRULL E V-TOPOLOGIA

Vimos no parágrafo anterior, que um corpo V-topológico, tal que o conjunto dos elementos nilpotentes é aberto, tem sua topologia gerada por um valor absoluto. Neste parágrafo, verificaremos que os corpos V-topológicos, sem elementos nilpotentes diferentes de 0, são gerados por uma valorização de Krull, que não é um valor absoluto. Para isso, começamos definindo o que é uma valorização de Krull, damos alguns exemplos e algumas propriedades para em seguida passar ao estudo da topologia gerada por uma valorização de Krull. Veremos que analogamente ao § 2, a topologia gerada por uma valorização de Krull satisfaz a condição de V-topologia. Finalizaremos o parágrafo observando que, para que um corpo K seja gerado por um valor absoluto é necessário somente que seja uma V-topologia e que tenha elementos nilpotentes diferentes de 0 .

DEFINIÇÃO 3.1 - Seja K um corpo. Dizemos que uma aplicação sobrejetora v, definida no corpo K e tomando valores em $G \cup \{0\}$, onde G é um grupo abeliano multiplicativo totalmente ordenado, $x.0 = 0.x = 0$ para todo $x \in G$ e $0 < x$ para todo $x \in G$, é uma *valorização de Krull*, ou simplesmente uma *valorização*, de K, se:

a) $v(x) = 0$ se e somente se $x = 0$;

b) $v(xy) = v(x)v(y)$, para todos $x,y \in K$;

c) $v(x+y) \leq \text{máx}\{v(x), v(y)\}$, para todos $x,y \in K$.

OBSERVAÇÃO: O grupo G é chamado o grupo de valores da valorização v.

Vejamos alguns exemplos de valorizações de Krull:

1 - Seja K um corpo. Definimos a valorização trivial de K, sendo a aplicação v_o, definida em K e tomando valores em $G \cup \{0\}$, onde $G = \{1\}$, como sendo:

$$v_o(0) = 0$$

e

$$v_o(x) = 1, \text{ para todo } x \in K \text{ e } x \neq 0.$$

2 - Seja K um corpo e $G = \{2^i 3^j / i,j \in \mathbb{Z}\}$, ordenado totalmente pela relação:

$$2^i 3^j \leq 2^{i_1} 3^{j_1} \iff i < i_1, \text{ ou } i = i_1 \text{ e } j \leq j_1.$$

Definimos uma valorização v de $K(x,y)$ em $G \cup \{0\}$, da seguinte forma:

$$v(0) = 0$$

e

$$v(f(x,y)) = \min\{2^i 3^j / a_{ij} \neq 0\} \text{ onde } f(x,y) = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{n} a_{ij}x^i y^j$$

3 - Todo valor absoluto não arquimediano, em um corpo K, é um caso particular de valorização de Krull, onde o grupo multiplicativo totalmente ordenado é um subgrupo do conjunto dos números reais estritamente positivo.
Por exemplo, no valor absoluto p-ádico temos que o grupo $G = \{e^{-\alpha} \text{ com } \alpha \in \mathbf{Z}\}$.

Reunimos na próxima proposição algumas consequências imediatas da Definição 3.1 que serão frequentemente usadas nas manipulações com valorizações.

PROPOSIÇÃO 3.2 - Seja v, uma valorização de Krull, em um corpo K. Então:

i) $v(x) = 1$, para toda raíz da unidade $x \in K$, em particular $v(1) = v(-1) = 1$.

ii) $v(-x) = v(x)$, para todos $x \in K$.

iii) $v(x-y) \leq \text{máx}\{v(x), v(y)\}$, para todos $x,y \in K$.

iv) $v(xy^{-1}) = v(x)[v(y)]^{-1}$, para todos $x,y \in K$ com $y \neq 0$.

v) Se $v(x) \neq v(y)$ então $v(x+y) = \text{máx}\{v(x), v(y)\}$.

DEMONSTRAÇÃO:

(i) Provemos inicialmente que $v(1) = 1$. Temos $v(1) = v(1.1) = v(1)v(1)$ como $v(1) \neq 0$, então $v(1) = 1$. Agora, seja $x^n = 1$ com $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e suponhamos que $v(x) \neq 1$, então $v(1) = v(x^n) = v(x)^n \neq 1$, o que é uma contradição. Logo $v(x) = 1$.

(ii) Como $v(-x) = v(-1.x)$ e $v(-1) = 1$, temos $v(-x) = v(x)$.

(iii) Sendo $v(-y) = v(y)$ e $v(x-y) = v(x + (-y))$ então $v(x-y) \leq \text{máx}\{v(x), v(y)\}$.

(iv) Como $v(x) = v(xy^{-1})\, v(y)$, para $y \neq 0$, temos $v(xy^{-1}) = v(x)[v(y)]^{-1}$.

(v) Suponhamos $v(x) < v(y)$ então $v(y) = v(y+x-x) \leq \text{máx}\{v(y+x), v(x)\}$ e como $v(y+x) > v(x)$ pois, caso contrário teríamos $v(y) \leq v(x)$, concluímos que $v(y) \leq v(y+x) \leq \text{máx}\{v(y), v(x)\} = v(y)$ e como G é totalmente ordenado, temos pela propriedade anti-simétrica que $v(y+x) = v(y) = \text{máx}\{v(x), v(y)\}$. ∎

A próxima proposição nos garante que para toda valorização de Krull existe um anel local, a ela associado.

PROPOSIÇÃO 3.3 - Seja K um corpo, v uma valorização de Krull em K e consideremos $A_v = \{x \in K / v(x) \leq 1\}$ e $M_v = \{x \in K / v(x) < 1\}$. Então, A_v é um subanel local, com elemento unidade, de K, cujo corpo de frações é K e onde M_v é seu único ideal máximal.

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos inicialmente que A_v é um subanel de K, com elemento unidade. Para isso, sejam $x,y \in A_v$, então:
$v(x \pm y) \leq \max\{v(x), v(y)\} \leq 1$ e $v(xy) = v(x)\, v(y) \leq 1.1 = 1$, logo $x \pm y$ e $xy \in A_v$, para todos $x,y \in A_v$, o que mostra que A_v é um subanel de K.

Também, como $v(1) = 1$, segue que $1 \in A_v$.

Veremos agora que K é o corpo de frações de A_v. Se $x \in K$ e $x \in A_v$ então $x = \frac{x}{1}$ e portanto x está no corpo de frações de A_v. Por outro lado, se $x \in K \setminus A_v$ então $v(x) > 1$ e $v(x^{-1}) = [v(x)]^{-1} < 1$, donde $x^{-1} \in A_v$ e como $x = \frac{1}{x^{-1}}$ segue que x está no corpo de frações de A_v.

Vamos, agora verificar que A_v é um anel local cujo único ideal máximal é M_v.

Sejam $x,y \in M_v$, então:

$v(x \pm y) \leq \max\{v(x), v(y)\} < 1$ e portanto $x \pm y \in M_v$. Se $a \in A_v$ e $x \in M_v$ então $v(ax) = v(a)v(x) \leq 1v(x) < 1$ e portanto $ax \in M_v$. Logo M_v é um ideal de A_v. O fato que M_v é o único ideal máximal de A_v seguirá de (e é equivalente a): $A_v \setminus M_v = U_v$ onde U_v é o conjunto das unidades de A_v. Pois, uma vez que nenhum ideal próprio pode conter unidades, todos os ideais próprios de A_v estarão contidos em $A_v \setminus U_v = M_v$. E de fato:

$x \in U_v \iff x \in A_v$ e $x^{-1} \in A_v \iff v(x) \leq 1$ e $v(x^{-1}) \leq 1 \iff$

$\iff v(x) \leq 1$ e $v(x) = [v(x^{-1})]^{-1} \geq 1 \iff v(x) = 1 \iff x \in A_v \setminus M_v$. ∎

OBSERVAÇÕES:

1 - O anel A_v é chamado o *anel da valorização* v, o ideal M_v é chamado *ideal da valorização* v. O anel quociente A_v/M_v é um corpo, (pois, M_v é um ideal maximal de A_v) que será chamado o *corpo das classes residuais de* v e será denotado por K_v.

2 - O anel A_v satisfaz a seguinte condição:
se $x \in K \setminus A_v$ então $x^{-1} \in A_v$. De fato,
se $x \notin A_v$ então $v(x) > 1$ e então como
$v(x^{-1}) = [v(x)]^{-1}$ temos $v(x^{-1}) < 1$ e $x^{-1} \in A_v$.

Vimos acima que: dada uma valorização de Krull, v, existe um anel de valorização a ela associado. O inverso também é verdadeiro, à menos de equivalência, ou seja, dado um anel de valorização existe uma valorização a ele associada, essa valorização é única a menos de equivalência. Para isso, damos a seguir a definição do que entendemos por um anel de valorização e por valorizações equivalentes.

DEFINIÇÃO 3.4 - Um subanel A, de um corpo K, é chamado um *anel* *de valorização* de K se $x \in A$ ou $x^{-1} \in A$ para todo $x \in K^{\cdot}$.

DEFINIÇÃO 3.5 - Duas valorizações v e v', em um corpo K, são chamadas *equivalentes* se $A_v = A_{v'}$, ou seja, se os anéis de valorização a elas associadas, são iguais.

Vejamos agora, que dado um anel de valorização existe uma única valorização a ele associada, ã menos de equivalência.

PROPOSIÇÃO 3.6 - Seja A um anel de valorização em um corpo K . Então existe uma valorização v de K, para a qual A é o anel de valorização associado. Essa valorização é única ã menos de equivalência.

DEMONSTRAÇÃO: Um anel de valorização A sempre tem um único ideal máximal P, onde $P = \{ a \in A/a^{-1} \notin A\}$, representa o conjunto das não unidades de A (isto pode ser encontrado em [1],pag. 66). Seja U o conjunto das unidades do anel A, ou seja,
$U = \{a \in A/a^{-1} \in A\}$, então a valorização v definida abaixo é uma valorização para a qual A é o anel de valorização associado. Seja v definida em K e tomando valores em $K/U \cup \{0\}$, onde K/U é ordenado por $aU < bU \iff ab^{-1} \in P$, onde:

$$v(0) = 0$$

e

$$v(a) = aU \quad , \quad \text{para todo} \quad a \in K^{\cdot}$$

A aplicação v assim definida é uma valorização, cujo anel de valorização associado é A. Realmente, v é sobrejetora e

a) $v(a) = 0$ se e somente se $a = 0$

b) $v(ab) = abU = abUU = aUbU = v(a)v(b)$ para todos $a,b \in K$.

c) Sejam $a,b \in K$ com $v(a) \leq v(b)$ então $ab^{-1} \in P \subset A$ e então $1 + ab^{-1} \in A$. Logo, $v(a+b) = v(b(1 + ab^{-1})) = v(b)v(1 + ab^{-1})$ e como $x \in A$ se e somente se $v(x) \leq 1$, temos $v(a+b) \leq v(b) = \text{máx}\{v(a), v(b)\}$.

Como $A_v = \{x \in K/v(x) \leq 1\}$ e como $v(x) \leq 1 \iff xU \leq U \iff x \in P$ ou $x \in U \iff x \in A$, temos $A = A_v$. ∎

Das proposições 3.3 e 3.6 concluímos que: existe uma correspondência um-a-um entre as valorizações de Krull e os anéis de valorização, à menos de equivalência. De agora em diante, salvo menção em contrário, trabalharemos com classes de equivalência de valorizações.

Vamos, a seguir, verificar que toda valorização de Krull em um corpo K, define sobre K uma topologia Hausdorff e que K, com essa topologia, é um corpo topológico.

Seja K um corpo e v uma valorização de Krull em K, consideremos a coleção de subconjuntos da forma:

$$\mathcal{U}_g(y) = \{x \in K/v(x-y) < g\} \text{ para todo } g \in G,$$

onde G denota o grupo de valores da valorização v.

Em particular, para $y = 0$, temos $\mathcal{U}_g = \mathcal{U}_g(0) = \{x \in K / v(x) < g\}$. A classe $\{\mathcal{U}_g(0)/g \in G\}$ satisfaz todas as condições da proposição 1.4 e portanto, determina uma topologia, τ_v, em K, segundo a qual K é um corpo topológico e $\{\mathcal{U}_g(0)/g \in G\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para o 0.

Realmente, a condição i) é satisfeita trivialmente. As condições ii) e iii) seguem imediatamente do fato de $\{\mathcal{U}_g(0)/g \in G\}$, ser um conjunto ordenado pela inclusão. Para mostrarmos a condição iv) basta tomarmos $\mathcal{U}_h$ tal que $h \leq \min\{g/v(x), g/v(y), 1, g\}$. Então para $\forall \mathcal{U}_g$ e $\forall x, y \in K$ temos que $(x + \mathcal{U}_h)(y + \mathcal{U}_h) \subseteq xy + \mathcal{U}_g$. Para provarmos a condição v), tomemos $g < v(x)^{-1}$, então para $h = gv(x)^2$ temos $v(x+a) = \max\{v(x), v(a)\} = v(x)$ e $v(\frac{-a}{x(x+a)}) = v(a)\, v(x)^{-2} < g$. Portanto, para $\forall \mathcal{U}_g$ e $\forall x \in K^{\cdot}$, com $g < v(x)^{-1}$, existe $h = gv(x)^2$ tal que $(x + \mathcal{U}_h)^{-1} \subseteq x^{-1} + \mathcal{U}_g$. Agora, se $g \geq v(x)^{-1}$, tomo $g_1 < v(x)^{-1} \leq g$, então $\mathcal{U}_{g_1} \subset \mathcal{U}_g$ e $x^{-1} + \mathcal{U}_{g_1} \subset x^{-1} + \mathcal{U}_g$, logo, pelo que foi feito anteriormente, $\exists h = g_1 v(x)^2$ com $(x + \mathcal{U}_h)^{-1} \subset x^{-1} + \mathcal{U}_{g_1}$ e a condição v) está verificada. Portanto, a classe $\{\mathcal{U}_g(0)/g \in G\}$, determina uma topologia, τ_v, em K. Esta topologia é Hausdorff. De fato, se $x \in \mathcal{U}_g$, para todo $g \in G$, então $v(x) < g$, para todo $g \in G$, mas isso equivale a $x = 0$.

Concluímos portanto, que dada uma valorização de Krull em um corpo K, ela determina sobre K uma topologia, segundo a qual K é um corpo topológico.

O nosso próximo objetivo será determinar quais são os corpos topológicos que tem sua topologia gerada por uma valorização de Krull. Para isso veremos inicialmente algumas proposições necessárias.

PROPOSIÇÃO 3.7 - Um subconjunto M de um corpo topológico K é limitado se e somente se para toda vizinhança U do 0 existe $x \in K^{\bullet}$ tal que $xM \subseteq U$.

DEMONSTRAÇÃO: Se M é limitado então para toda vizinhança U de 0, existe V, vizinhança de 0, com $VM \subseteq U$, logo é imediato que existe $x \in K^{\bullet}$ com $xM \subseteq U$, basta tomarmos $x \in V^{\bullet}$. Por outro lado, seja U uma vizinhança de 0 e tomemos V_1 tal que $V_1V_1 \subset U$. Seja $x \in K^{\bullet}$ com $xM \subseteq V_1$ e V tal que $x^{-1}V \subseteq V_1$, então $VM = x^{-1} V xM \subseteq V_1V_1 \subseteq U$. ∎

PROPOSIÇÃO 3.8 - Se M_1, M_2 são subconjuntos limitados de um corpo topológico K então $M_1 \pm M_2$, M_1M_2 , $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ são limitados. Em particular, todo conjunto finito é limitado. Além disso, todo subconjunto de um conjunto limitado é limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Mostremos inicialmente que $M_1 \pm M_2$ é limitado. Dado U uma vizinhança de 0 então, existe U' tal que $U' \pm U' \subseteq U$. Como M_1 é limitado para U' existe V_1 com $V_1M_1 \subseteq U'$ e como M_2 é limitado, existe V_2 com $V_2M_2 \subseteq U'$. Seja $V \subseteq V_1 \cap V_2$, en tão $V(M_1 \pm M_2) = VM_1 \pm VM_2 \subseteq V_1M_1 \pm V_2M_2 \subseteq U' \pm U' \subseteq U$ e portanto $M_1 \pm M_2$ são limitados. Vamos mostrar agora que M_1M_2 é limitado. Para isso, como M_2 é limitado, dado U, existe W com $WM_2 \subseteq U$ e como M_1 é limitado, dado W, existe V com $VM_1 \subseteq$ $\subseteq W$. Logo, $VM_1M_2 \subseteq WM_2 \subseteq U$ e portanto, M_1M_2 é limitado. Para verificarmos que $M_1 \cup M_2$ é limitado, consideremos U uma vizinhança qualquer de 0, logo existem V_1 e V_2 com $V_1M_1 \subseteq U$ e $V_2M_2 \subseteq U$. Seja $V \subset V_1 \cap V_2$, então $V(M_1 \cup M_2) \subseteq$ $\subseteq VM_1 \cup VM_2 \subseteq V_1M_1 \cup V_2M_2 \subseteq U$ e portanto $M_1 \cup M_2$ é limitado. Verifica-se de maneira análoga que $M_1 \cap M_2$ é limitado. Para mostrarmos que todo conjunto finito é limitado basta mostrarmos que todo conjunto unitário é limitado e lembrarmos que a união finita de limitados é limitado. O fato de um conjunto unitário ser limitado segue imediatamente do item iv_2) da proposição 1.6. Agora, se $A \subset M$ e M é limitado então dado U, existe V com $VM \subseteq U$ mas então $VA \subseteq VM \subseteq U$ e portanto A é limitado. ∎

PROPOSIÇÃO 3.9 - Seja $\mathbf{U}$ um sistema fundamental de vizinhanças para o 0, que determina uma topologia de Hausdorff sobre o corpo topológico K, então existe $U \in \mathbf{U}$ tal que $(K \setminus U) \cup (K \setminus U)^{-1} = K^{\cdot}$.

DEMONSTRAÇÃO: É claro que para todo $V \in \mathbf{U}$, temos, $(K \setminus V) \cup (K \setminus V)^{-1} \subset K^{\cdot}$.

Suponhamos por absurdo que para todo $V \in \mathbf{U}$, $K^{\cdot} \not\subset (K \setminus V) \cup (K \setminus V)^{-1}$, ou seja, existe $x_V \in K^\cdot$ com $x_V \notin (K \setminus V) \cup (K \setminus V)^{-1}$, logo, $x_V \notin (K \setminus V)$ e $x_V \notin (K \setminus V)^{-1}$. Mas, para todo $U \in \mathbf{U}$, existe V com $VV \subseteq U$, então, $1 = x_V\, x_V^{-1} \in VV \subseteq U$ e $1 \in U$, para todo $U \in \mathbf{U}$, o que é uma contradição pois estamos com um espaço Hausdorff. Logo existe $U \in \mathbf{U}$ com $(K \setminus U) \cup (K \setminus U)^{-1} = K^\cdot$. ∎

Queremos encontrar condições para que um corpo topológico tenha sua topologia gerada por uma valorização de Krull. Faremos isso encontrando um anel de valorização que gera essa topologia, o que é equivalente, pelo que foi visto anteriormente. Iniciaremos a procura das condições verificando que, se um corpo é limitado (e daremos a definição abaixo), existe uma estrutura aproximada de anel (e que chamaremos de quase anel) que gera a topologia do corpo.

DEFINIÇÃO 3.10 - Um corpo topológico K é *limitado* quando possui um sistema fundamental de vizinhanças do 0, que contém uma vizinhança limitada.

PROPOSIÇÃO 3.11 - Seja K um corpo topológico e U um subconjunto de K. Então as seguintes condições são equivalentes:

a) U é aberto, limitado e $0 \in U$;

b) $\{xU / x \in K^\cdot\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas do 0.

Nesse caso, dizemos que U gera a topologia.

DEMONSTRAÇÃO:

a) $\Longrightarrow$ b) Temos que $x\mathcal{U}$ com $x \in K^{\cdot}$ são abertos e $0 \in x\mathcal{U}$ para todo $x\mathcal{U}$. Por outro lado, seja V uma vizinhança qualquer do 0, então existe $x \in K^{\cdot}$ tal que $x\mathcal{U} \subseteq V$ assim $\{x\mathcal{U}/x \in K^{\cdot}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas do 0.

b) $\Longrightarrow$ a) Pois $\mathcal{U}=1.\mathcal{U}$ é uma vizinhança aberta do 0 e portanto $\mathcal{U}$ é aberto. Pela proposição 3.7 é imediato que $\mathcal{U}$ é limitado. $_\blacksquare$

Temos pela proposição 3.11, que se K é um corpo topólogico limitado e $\mathcal{U}$ a vizinhança limitada então $\{x\mathcal{U}/x \in K^{\cdot}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para o 0 para a topologia de K.

DEFINIÇÃO 3.12 - Um subconjunto Q de um corpo K é chamado um *quase anel* se satisfaz:

1 - 0 e 1 estão em Q;

2 - Q é multiplicativamente fechado;

3 - $K^{\cdot} = Q^{\cdot}(Q^{\cdot})^{-1}$;

4 - Existe $z \in Q^{\cdot}$ com $z(Q \pm Q) \subseteq Q$;

Se além disso Q satisfaz:

5 - Para todo $x \in K^{\cdot}$, $x \in Q$ ou $x^{-1} \in Q$, então Q é chamado um *quase anel de valorização*.

Observemos que se em 4-) tivermos $z = 1$ então Q é um anel de valorização.

A próxima proposição nos garante que a condição de limitado faz com que um corpo topológico tenha um quase anel limitado que gera a sua topologia.

PROPOSIÇÃO 3.13 - Se K é um corpo topológico limitado então existe um quase anel limitado Q que gera a topologia de K.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{U}$ a vizinhança limitada e $Q = \{x \in K / x\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}\}$. Vamos mostrar que Q é um quase anel, diferente de K, e que é uma vizinhança limitada. Portanto pela proposição 3.11, Q gera a topologia de K.

Como $\mathcal{U}$ é limitada existe V com $V\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$, portanto $V \subseteq Q$ e Q pertence ao conjunto das vizinhanças de 0. Por outro lado, como $Q\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ para todo $u \subset \mathcal{U}^{\bullet}$, $uQ \subset Q\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ e $Q \subset u^{-1}\mathcal{U}$ e como $u^{-1}\mathcal{U}$ é limitado temos Q limitado.

Mostremos agora que Q é um quase anel:

1 - 0 e 1 estão em Q ;

2- Q é multiplicativamente fechado pois, $Q\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ então $(QQ)\mathcal{U} = Q(Q\mathcal{U}) \subseteq Q\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$ e $QQ \subseteq Q$;

3 - Seja $x \in K^{\bullet}$ então existe V com $xV^{\bullet} \subseteq Q^{\bullet}$.
Seja $u \in V^{\bullet} \cap Q^{\bullet}$ então $x \in Q^{\bullet}u^{-1} \subseteq Q^{\bullet}(Q^{\bullet})^{-1}$, logo $K^{\bullet} \subseteq Q^{\bullet}(Q^{\bullet})^{-1}$.

4 - Como Q é uma vizinhança de 0 então existe V com $V \pm V \subseteq Q$ (por iii) prop. 1.3 e iii_1) prop. 1.6). Como Q é limitado então existe $z \in Q^{\cdot}$ com $zQ \subseteq V$, então $z(Q \pm Q) \subseteq zQ \pm zQ \subseteq V \pm V \subseteq Q$. Como 0 e 1 estão em Q temos $z(0+1) \in Q$ e então $z \in Q$. $Q \subsetneq K$ pois K não é limitado. ∎

Concluímos então que a condição de limitado nos garante a existência de um quase anel que gera a topologia. Como estamos interessados em um anel de valorização que gera a topologia, precisamos de condições mais fortes que a de limitado. Veremos a seguir que, se um corpo K é V-topológico, ele é limitado e o quase anel que gera a topologia de K satisfaz uma condição aproximada de quase anel de valorização.

PROPOSIÇÃO 3.14 - Toda V-topologia é limitada.

DEMONSTRAÇÃO: Pela proposição 3.9, existe $\mathcal{U}$ com $(K \setminus \mathcal{U}) \cup (K \setminus \mathcal{U})^{-1} = K^{\cdot}$. Como $\mathcal{U}^{\cdot} \not\subseteq (K \setminus \mathcal{U})$ então $\mathcal{U}^{\cdot} \subseteq (K \setminus \mathcal{U})^{-1}$ e como $(K \setminus \mathcal{U})^{-1}$ é limitado temos $\mathcal{U}^{\cdot}$ limitado. Como $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\cdot} \cup \{0\}$ temos $\mathcal{U}$ limitado. ∎

PROPOSIÇÃO 3.15 - Seja K um corpo e Q um quase anel que gera uma V-topologia em K, então Q satisfaz:

"Existe $c \in Q^{\cdot}$ tal que para todo $x \in K^{\cdot}$ temos, $x \in Q$ ou $x^{-1} \in c^{-1}Q$".

DEMONSTRAÇÃO: Como Q é uma vizinhança de 0 e K é um corpo V-topológico então $(K \setminus Q)^{-1}$ é limitado, logo, existe V com $V(K \setminus Q)^{-1} \subseteq Q$. Seja $c \neq 0$ e $c \in V \cap Q$ então temos que $c \in Q^{\cdot}$ e $(K \setminus Q)^{-1} \subseteq c^{-1}Q$. Agora seja $x \in K^{\cdot}$ e $x \notin Q$ então $x \in K \setminus Q$ e $x^{-1} \in (K \setminus Q)^{-1} \subseteq c^{-1}Q$ e então $x^{-1} \in c^{-1}Q$. ∎

Pela proposição acima estamos nos aproximando do nosso objetivo que é o de éncontrar um anel de valorização que gera a topologia, isto será resolvido se a V-topologia não possui elementos nilpotentes. Antes de verificarmos essa afirmação, mostramos a seguinte proposição, que será usada na prova da afirmação.

PROPOSIÇÃO 3.16 - Seja τ uma V-topologia em um corpo K e Q o quase anel que gera essa topologia, então se $x \in Q^{\cdot}$ não é um elemento nilpotente, $\{x^{-n}/n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Como $x \in Q^{\cdot}$ e x não é nilpotente temos que existe $\mathcal{U}$ com $\{x^n/n \in \mathbb{N}\} \subseteq K \setminus \mathcal{U}$. Realmente, como $\{yQ/y \in K^{\cdot}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para o 0, suponhamos que para todo $y \in K^{\cdot}$ temos $\{x^n/n \in \mathbb{N}\} \cap yQ \neq \emptyset$, então existe N com com $x^N \in yQ$ mas como $x \in Q$ temos, $x^r \in yQ$ para todo $r \geq N$, o que é um absurdo pois x não é nilpotente. Logo existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de 0 com $\{x^n/n \in \mathbb{N}\} \subset K \setminus \mathcal{U}$. Portanto, $\{x^n/n \in \mathbb{N}\}$ é limitado fora do zero e pela proposição 2.16 temos $\{x^{-n}/n \in \mathbb{N}\}$ limitado. ∎

TEOREMA 3.17 - Se K é um corpo V-topólogico sem elementos nilpotentes $\neq 0$, então a topologia em K é gerada por uma valorização de Krull, que não é um valor absoluto.

DEMONSTRAÇÃO: Pela proposição 3.14 temos que a V-topologia é limitada e pela proposição 3.13 existe um quase anel Q, limitado, que gera a topologia. Então pela proposição 3.15 existe $c \in Q^{\cdot}$ tal que para todo $x \in K^{\cdot}$, temos $x \in Q$ ou $x^{-1} \in c^{-1}Q$ ou equivalentemente $(K \setminus Q)^{-1} \subseteq c^{-1}Q$. Consideremos então

$$\tilde{Q}_n = \{x \in K/xQ \subset Qc^{-n}\} \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$\tilde{Q} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}_n = \{x \in K/xQ \subseteq Q\{c^{-n}/n \in \mathbb{N}\}\}$$

Vamos mostrar que $\tilde{Q}$ é um quase anel de valorização limitado. Como Q é multiplicativamente fechado temos que $QQ \subset Qc^{-0} = Q$ e portanto $Q \subset \tilde{Q}$ e como Q é uma vizinhança do 0 temos que $\tilde{Q}$ é uma vizinhança de 0.

Como $1 \in Q$ temos que $\tilde{Q} \subseteq Q\{c^{-n}/n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Qc^{-n}$. Pela proposição 3.16 temos que $\{c^{-n}/n \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Como Q é limitado e $\tilde{Q} \subseteq Q\{c^{-n}/n \in \mathbb{N}\}$, temos pela proposição 3.8 que $\tilde{Q}$ é limitado. Pela proposição 3.11 temos que $\tilde{Q}$ gera a topologia do corpo K. Vamos mostrar agora que $\tilde{Q}$ é multiplicativamente fechado. Para isso, sejam $x, y \in \tilde{Q}$ então $xQ \subseteq Qc^{-r}$ e $yQ \subseteq Qc^{-s}$ com

$r,s \in \mathbb{N}$. Então $(xy)Q = x(yQ) \subseteq xQc^{-s} \subseteq Qc^{-r}c^{-s} = Qc^{-(r+s)}$ e portanto $xy \in \tilde{Q}$. Vamos mostrar agora que $\tilde{Q}$ satisfaz as outras condições de quase-anel, mas antes observemos que se $r \leq s$ então $Qc^{-r} \subset Qc^{-s}$. Realmente, como $qc^{-r} = qc^{(s-r)}c^{-s} = (qc^{s-r})c^{-s}$ e como $q \in Q$ e, por $s-r \geq 0$, como $c \in Q$ então $c^{s-r} \in Q$ temos $qc^{-r} \in Qc^{-s}$. Agora, é claro que como $Q \subset \tilde{Q}$, 0 e 1 estão em $\tilde{Q}$. Para mostrarmos que existe $z \in \tilde{Q}$ com $z(\tilde{Q} \pm \tilde{Q}) \subseteq \tilde{Q}$ consideremos z tal que $z(Q \pm Q) \subseteq Q$, então se $a,b \in \tilde{Q}$ temos $aQ \subset Qc^{-r}$ e $bQ \subset Qc^{-s}$, tomemos $r \leq s$, então pela observação acima $Qc^{-r} \subset Qc^{-s}$ e $z(a \pm b)Q = z(aQ \pm bQ) \subseteq z(Qc^{-r} \pm Qc^{-s}) \subseteq$ $\subseteq z(Qc^{-s} \pm Qc^{-s}) = z(Q \pm Q)c^{-s} \subseteq Qc^{-s}$ e portanto $z(\tilde{Q} \pm \tilde{Q}) \subseteq \tilde{Q}$. Falta mostrar somente que $K^{\cdot} = \tilde{Q}^{\cdot}(\tilde{Q}^{\cdot})^{-1}$. Para isso seja $x \in K^{\cdot}$ então existe V com $xV^{\cdot} \subseteq \tilde{Q}$, tomemos $u \in V^{\cdot} \cap \tilde{Q}^{\cdot}$ então $x \in \tilde{Q}^{\cdot}u^{-1} \subseteq \tilde{Q}^{\cdot}(\tilde{Q}^{\cdot})^{-1}$ e portanto $K^{\cdot} \subseteq \tilde{Q}^{\cdot}(\tilde{Q}^{\cdot})^{-1}$. Como é claro que $K^{\cdot} \supseteq \tilde{Q}^{\cdot}(\tilde{Q}^{\cdot})^{-1}$ temos a igualdade e portanto $\tilde{Q}$ é um quase anel. Na verdade $\tilde{Q}$ é um quase anel de valorização pois: como $Q \subset \tilde{Q}$ temos $(K \setminus \tilde{Q}) \subseteq (K \setminus Q)$ e $(K \setminus \tilde{Q})^{-1} \subseteq (K \setminus Q^{-1}) \subseteq c^{-1}Q$ e como $c^{-1}QQ \subseteq c^{-1}Q = Qc^{-1}$ então $c^{-1}Q \subset \tilde{Q}$ e $\tilde{Q}$ é um quase anel de valorização.

Consideremos agora o anel Q^*, gerado por $\tilde{Q}$, ou seja,

$$Q^* = \{a_1 \pm \ldots \pm a_n / n \geq 1, \ \ a_i \in \tilde{Q}\}$$

Vamos mostrar que Q^* é um anel de valorização. Seja $a \in Q^*$, então a pode ser escrito como $a = a_1 \pm \ldots \pm a_{2^n}$ (acrescentamos

0 se for necessário). Seja $z \in \tilde{Q}$ tal que $z(\tilde{Q} \pm \tilde{Q}) \subseteq \tilde{Q}$, então $\tilde{Q} \pm \tilde{Q} \subseteq z^{-1}\tilde{Q}$ e portanto $a \in z^{-n}\tilde{Q}$, logo $Q^* \subset \{z^{-n}/n \in \mathbb{N}\}\tilde{Q}$. Como $\tilde{Q} \subset Q^*$ temos Q^* uma vizinhança de 0 e como $z \in Q$ temos $\{z^{-n}/n \in \mathbb{N}\}$ limitado. Como $\tilde{Q}$ é limitado e $\{z^{-n}/n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, temos Q^* limitado e pela proposição 3.11, Q^* gera a topologia de K. Como $\tilde{Q} \subseteq Q^*$ verifica-se de maneira análoga, a que foi feito para $\tilde{Q}$, que Q^* é um anel de valorização e portanto a topologia em K é gerada por uma valorização de Krull.

É imediato, à partir da proposição 2.13, que essa valorização não é um valor absoluto.∎

Para finalizar o parágrafo, vamos verificar a observação do parágrafo 2, que dizia que para que um corpo topológico fosse gerado por um valor absoluto era necessário somente que a topologia fosse do tipo V e que possuísse elementos nilpotentes diferentes do 0. Faremos isso mostrando que se existir elementos nilpotentes diferentes de 0 então o conjunto dos elementos nilpotentes é aberto e portanto a condição do conjunto dos elementos nilpotentes ser aberto não é necessária pois, isso vem imediatamente do fato de existir elementos nilpotentes diferentes de 0 .

PROPOSIÇÃO 3.18 - Seja τ uma topologia limitada e t um elemento nilpotente diferente do 0 . Então existe uma vizinhança limitada do 0, consistindo de elementos nilpotentes.

DEMONSTRAÇÃO: Seja Q o quase anel que gera a topologia τ e t um elemento nilpotente de K, diferente de 0. Consideremos $\mathcal{U} = tQ \cap Q$. Como Q é aberto e $t \neq 0$ temos tQ aberto e portanto $tQ \cap Q$ é aberto e como $0 \in Q$ temos $0 \in \mathcal{U}$. Logo $\mathcal{U}$ é uma vizinhança aberta do 0. Como Q é limitado, xQ com $x \in K^{\cdot}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças para o 0, conforme proposição 3.11. Como, dado xQ existe n, com $t^n \in xQ$, temos $t^nQ \subset xQ$ e portanto $\{t^nQ/n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para o 0, nessa topologia. Como para todo xQ temos $t^nQ \subset xQ$ então $t^nQ \cap Q \subset xQ \cap Q \subset xQ$, logo $\{t^nQ \cap Q/n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para o 0. Vamos agora mostrar por indução sobre n que, $(tQ \cap Q)^n \subseteq t^nQ \cap Q$. Para $n = 1$, isso é verdadeiro. Suponhamos válido para n, então
$(tQ \cap Q)^{n+1} = (tQ \cap Q)^n(tQ \cap Q) \subseteq (t^n Q \cap Q)(tQ \cap Q) \subseteq (t^nQtQ) \cap \cap Q = (t^{n+1}QQ) \cap Q \subseteq t^{n+1}Q \cap Q$. Temos também que, $(tQ \cap Q)^{n+m} = (tQ \cap Q)^n(tQ \cap Q)^m \subseteq (t^nQ \cap Q)Q^m \subseteq (t^nQ \cap Q)Q \subseteq t^nQ \cap Q$.

Vamos mostrar que $tQ \cap Q$ é a vizinhança de elementos nilpotentes procurada. Realmente, se $x \in tQ \cap Q$ então $x^n \in (tQ \cap Q)^n \subseteq t^nQ \cap Q$ e para todo $s \geq n$ temos $x^s \in t^nQ \cap Q$, logo para todo $t^nQ \cap Q$, existe n tal que $x^s \in t^nQ \cap Q$ para todo $s \geq n$, ou seja, x^n converge para 0 e x é um elemento nilpotente. ∎

Reuniremos no próximo teorema as conclusões acima:

TEOREMA 3.19 - Se K é um corpo V-topológico com elementos nilpotentes, diferentes de 0, então a topologia de K é gerada por um valor absoluto.

DEMONSTRAÇÃO: Como K é um corpo V-topológico temos pela proposição 3.14 que K é um corpo topológico limitado. Então, pela proposição 3.18 temos que existe uma vizinhança limitada de 0, consistindo de elementos nilpotentes. Pela proposição 2.23, o conjunto dos elementos nilpotentes de K é aberto. Portanto, pelo teorema 2.20 temos que a topologia de K é gerada por um valor absoluto. ∎

BIBLIOGRAFIA

[1] BACHMAN, G. - Introduction to p-Adic Numbers and Valuation Theory. Academic Press, New York and London. 1964.

[2] BOURBAKI, N. - Algèbre Commutative. cap. 6. Hermann. Paris. 1964.

[3] BOURBAKI, N. - Elements of Mathematics, General Toplogy, cap. 3. Hermann. Paris. 1966.

[4] ENDLER, O. - Valuation Theory. Springer-Verlag. Berlin. 1972.

[5] JACOBSON, N. - Totally disconnected locally compact rings. American Journal of Mathematics, 58 (1936), 433 - 449.

[6] KAPLANSKY, I. - Topological methods in valuation theory. Duke Math. J., 14 (1947), 527 - 541.

[7] KOWALSKY, H.J.; DÜRBAUM, H. - Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien. Journal f.d. reine u. angew. Math., 191 (1953), 135 - 152.

[8] PRESTEL, A. - Model theoretic methods in the theory of topological fields. Journal f.d. reine u. angew. Math., 299/300 (1978), 318 - 341.

[9] RIBENBOIM, P. - Théorie des Valuation. Les Presses de L'Université de Montreál. 1964.

[10] VAN DER WAERDEN, B. L. - Modern Algebra (English translation), vol. I. Frederick Ungar Publishing Co. New York. 1964.

[11] WIESLAW, W. - On topological fields. Colloquium Mathematicum, 29 (1974), 119 - 146.

[12] ZARISKI, O. ; SAMUEL, P. - Commutative Algebra, vol. II. Van Nostrand. Princeton . 1960.

[13] ZELINSKY, I. - Topological characterization of fields with valuations. Bulletin of the American Mathematical Society, 54 (1948), 1145 - 1150.