

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Teorias de Gauge e Álgebras de Clifford

Autor: EDUARDO OUTEIRAL CORRÊA HOEFEL
Orientador: PROF. DR. JAYME VAZ JR.

Campinas, 13 de agosto de 2002

UNICAMP

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Teorias de Gauge e Álgebras de Clifford

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Eduardo Outeiral Corrêa Hoefel** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas. 13 de agosto de 2002.



Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
2. Prof. Dr. Márcio Antônio de Faria Rosa
3. Prof. Dr. Waldyr Alves Rodrigues Jr.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

Hoefel

UNIDADE B0
Nº CHAMADA T/UNICAMP
H671t
V _____ EX _____
TOMBO BCI 51415
PROC 16.837/02
C _____ DX _____
PREÇO R\$ 11,00
DATA 09/11/02
Nº CPD _____

CM00176326-1

BIB ID 266959

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Hoefel, Eduardo Outeiral Corrêa

H671t Teorias de Gauge e Álgebras de Clifford / Eduardo Outeiral
Corrêa Hoefel -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Jayme Vaz Júnior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Computação.

1. Física matemática. 2. Campos de calibre(Física). 3. Spinor,
Teoria de. 4. Monopolos magnéticos. 5. Instantons. I. Vaz Júnior,
Jayme. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Computação. III. Título.

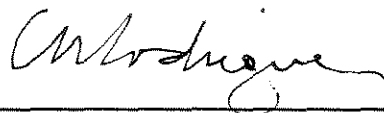
Dissertação de Mestrado defendida em 13 de agosto de 2002 e aprovada pela Banca
Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). JAYME VAZ JÚNIOR



Prof (a). Dr (a). MARCIO ANTONIO DE FARIA ROSA



Prof (a). Dr (a). WALDIR ALVES RODRIGUES JÚNIOR

Financiamento FAPESP, processo 00/00962-7

Aos meus avós Maria Dinah e Dorval Corrêa
e à memória de Maria da Cunha Hoefel

Agradeço à minha mulher Simone, pelo carinho, incentivo e coragem para enfrentar, ao meu lado, as dificuldades da vida; à minha mãe Bernadete por transmitir sabedoria e serenidade; ao meu pai Paulo por ensinar que não existem conquistas sem esforço.

Devo agradecer aos meus professores e colegas tanto da UFPR (Carlos Henrique, Alexandre Trovon, Décio Krause, Edson, Zeca, Fernando, Clezio, Jurandir, Gustavo, Miltom e muitos outros) quanto da Unicamp (Roldão, Rafaéis(mineiro e campineiro), Noan, Carlos, Daniel, Hugo, Fritz). Merecem agradecimento especial: meu orientador Jayme pela enorme paciência e pelo espírito alegre que dá ao trabalho e meu colega e amigo Ricardo Mosna pelas várias conversas, sempre interessantes e motivadoras, sugestões e correções no texto.

Agradeço a todos meus amigos, em especial às minhas irmãs Luciana e Mariana pela tolerância com as minhas chatices. Ao Sancho Pansa e ao Phie cujas patas sempre sujavam o carro depois dos passeios no Centro Politécnico.

Agradeço à FAPESP pelo suporte financeiro.

Finalmente um agradecimento especial à Camile que não pôde comparecer à defesa desta dissertação pois estava descansando do esforço que fez, na noite anterior, para deixar o ventre de minha irmã Mariana.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos uma descrição do formalismo matemático das teorias de gauge introduzindo os conceitos de grupos e álgebras de Lie, fibrados principais, conexões e curvatura. Em seguida introduzimos as álgebras de Clifford e os spinors, tais conceitos são utilizados no capítulo final onde apresenta-se algumas de suas aplicações em teorias de gauge. Uma aplicação é dada pelas formas diferenciais assumindo valores em uma álgebra de Clifford: mostra-se como as formas de conexão e curvatura são dadas por formas a valores em álgebras de bivectores, estas últimas são as álgebras de Lie dos grupos Spin. Outra aplicação consiste em mostrar, usando o Teorema de Periodicidade das álgebras de Clifford, como algumas transformações conformes do espaço-tempo são dadas pela ação do grupo $\text{Spin}(2,4)$ sobre paravetores $\mathbb{R} + \mathbb{R}^{4,1}$. Finalizamos mostrando a construção de monopolos e instantons através do teorema de inversão para spinors de Pauli e Dirac, vistos como elementos de sub-álgebras pares de álgebras de Clifford, e a estreita relação deste teorema com as fibrações de Hopf, ilustrando a relação existente entre Topologia e Física.

Abstract

This dissertation begins with a description of the mathematical formulation of gauge theories, introducing the concepts of Lie groups and Lie algebras, principal bundles, connection and curvature. Then, Clifford algebras and spinors are introduced. The final chapter presents some applications of Clifford algebras in gauge theories. The first application is given by Clifford algebra valued differential forms: we shown how the connection and curvature 2-forms are given by bivector algebra valued forms, bivector algebras are the Lie algebras of Spin groups. Another application consist of showing, through the Periodicity Theorem of Clifford algebras, how some conformal transformations of the space-time are given by the action of the $\text{Spin}(2,4)$ group over the paravectors $\mathbb{R} + \mathbb{R}^{4,1}$. In the last application, the construction of monopoles and instantons is presented through the Inversion Theorem for Pauli and Dirac spinors, considered as elements of the even sub-algebra of the Clifford algebra. The close relationship between this theorem and the Hopf fibrations is emphasized, illustrating the link between Topology and Physics.

Conteúdo

Introdução	x
1 Preliminares Matemáticos	1
1.1 Grupos e Álgebras de Lie	1
1.1.1 Grupos Clássicos	2
1.1.2 Ação de grupos de Lie em variedades	6
1.1.3 Campos de vetores invariantes à esquerda	7
1.2 Espaços Fibrados	16
1.2.1 Fibrados vetoriais	18
1.2.2 Fibrados principais	21
2 Conexões em Fibrados e Teorias de Gauge	27
2.1 Equações de Maxwell	27
2.2 Conexões em fibrados principais	32
2.2.1 Derivada exterior covariante e Curvatura	35
2.3 Teorias de gauge	39
2.4 Conexões em fibrados vetoriais	43
3 Álgebras de Clifford e Espinores	50
3.1 Conceitos Fundamentais	50
3.2 Periodicidade das Álgebras de Clifford	53
3.3 O grupo de Clifford	57
3.4 Espinores	61
4 Algumas Aplicações em Teorias de Gauge	65
4.1 Teorias de Gauge no fibrado de Clifford	65
4.1.1 A álgebra de Lie de $\text{Spin}(p, q)$	65
4.1.2 O fibrado de Clifford	68
4.1.3 Formas a Valores em Álgebras de Clifford	72

4.2	Teorema de periodicidade (1,1) e soluções invariantes por transformações conformes	76
4.2.1	Compactificação conforme	76
4.2.2	A ação de $\text{spin}(2,4)$	77
4.3	Construção de Monopolos e Instantons	81
4.3.1	Teorema de Inversão para Espinores de Pauli	82
4.3.2	Espinores de Pauli e Monopolos	85
4.3.3	Teorema de Inversão para Espinores de Dirac	89
4.3.4	Espinores de Dirac e Instantons	93
	Conclusão	94
	Bibliografia	96

Introdução

Nas últimas décadas do século XX viu-se uma notável e frutífera reaproximação da Matemática e da Física, mais especificamente nas áreas da geometria e topologia e na física de partículas e campos, graças aos trabalhos de vários eminentes cientistas, alguns dos quais agraciados com medalhas Fields como por exemplo Atiyah, Connes e Witten. Disso emergiu uma ativa área de pesquisa atual, até mesmo porque, em função da escassez de dados experimentais, a física de altas energias tem visto nessas áreas da Matemática uma espécie de laboratório para procurar desenvolver suas teorias. O objetivo desse trabalho, modesto é verdade, não só pela natureza de uma dissertação mas sobretudo pela sofisticação inerente às pesquisas atuais, é abordar alguns assuntos que se encontram nessa interface. Desses assuntos, nos pareceu oportuno e importante considerar as teorias de gauge, que sem dúvida são o principal paradigma da física de partículas e campos, e as álgebras de Clifford, que além da sua importância fundamental na descrição de partículas de spin $1/2$ como o elétron, mostrou-se fundamental na formulação da geometria não-comutativa de Connes, que é um ambicioso programa visando formular uma nova e mais abrangente base para a física e a geometria, aproveitando para ainda discutir algumas aplicações dessas álgebras de Clifford nas teorias de gauge.

Com relação às teorias de gauge, neste trabalho abordaremos alguns conceitos matemáticos que permitem descrever de maneira rigorosa os objetos estudados nessas teorias. É bem conhecido hoje em dia que a teoria de conexões em fibrados principais desempenha perfeitamente esse papel, embora a Teoria dos campos de Gauge tenha sido estudada, em seu início, a partir do trabalho de Yang e Mills publicado em 1954, independentemente da matemática das conexões em fibrados principais.

O fato de que o conceito de **simetria** é fundamental em teorias de gauge foi expresso pelo próprio Yang em seu artigo¹ intitulado ‘Magnetic

¹ Este artigo pode ser encontrado nos *Selected Papers* de C. N. Yang.

monopoles, fiber bundles and gauge fields’:

“Maxwell’s equations and the principles of quantum mechanics led to the idea of gauge invariance. Attempt to generalize this idea, motivated by physical concepts of phases, symmetry, and conservations laws, led to the theory of non-Abelian gauge fields.”

A simetria dos campos de gauge é descrita matematicamente por um grupo de Lie G denominado *grupo estrutural* do fibrado que descreve a teoria de gauge em questão. Em muitos casos, o grupo G é um grupo $\text{Spin}(p, q)$, o qual é construído a partir de uma álgebra de Clifford.

As álgebras de Clifford surgiram em 1878 através da unificação da álgebra dos quatérnions e da álgebra exterior de Grassmann em um único sistema algébrico. O sistema assim obtido é perfeitamente adaptado à descrição da geometria ortogonal de um espaço vetorial arbitrário de dimensão finita. Como a maioria das simetrias estudadas em teorias de gauge são dadas por transformações ortogonais, é natural que existam diversas aplicações de álgebras de Clifford em teorias de gauge. Estudar conexões em fibrados principais assim como as álgebras de Clifford e os spinors e apresentar algumas destas aplicações é o objetivo deste trabalho de mestrado.

No capítulo 1 são apresentados os conceitos matemáticos necessários para a compreensão da formalização das teorias de gauge. Assim, introduzimos um mínimo de grupos e álgebras de Lie, o conceito de espaço fibrado, fibrados principais e vetoriais incluindo alguns exemplos de fibrados. Em especial, apresentamos as fibrações de Hopf $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ e $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$, as quais serão usadas no capítulo final quando abordarmos a construção de monopolos e instantons.

O capítulo 2 introduz as teorias de gauge via conexões em fibrados principais. São apresentadas três definições equivalentes de conexão e comentamos sobre seu significado relacionando o conceito geométrico de “levantamento horizontal” ao conceito físico de “escolha de gauge”. Definimos a curvatura da conexão cujo significado físico é a intensidade do campo. Apresentamos o Lagrangiano de Yang-Mills e deduzimos a equação de Yang-Mills no vácuo a partir do princípio variacional. Finalizamos o capítulo com uma discussão sobre teorias de gauge formuladas via conexões em fibrados vetoriais, pois este conceito será necessário no capítulo final.

As álgebras de Clifford são introduzidas no capítulo 3. Merece destaque o teorema de periodicidade das álgebras de Clifford. Dentre as aplicações deste teorema está a classificação das álgebras de Clifford em termos de álgebras de matrizes sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ e o estudo das transformações conformes do

espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ através da ação do grupo $\text{Spin}(2, 4)$ sobre os paravetores de $\mathcal{Cl}_{4,1}$. Definidos os grupos $\text{Spin}(p, q)$, podemos apresentar o conceito de spinor. Spinors podem ser vistos como objetos contendo as informações sobre o sistema físico estudado e pertencendo a algum espaço que está submetido a ação de uma simetria; pode-se dizer que esta simetria fornece a “estrutura” do objeto estudado. Apresentamos a definição de spinors operatoriais. Em muitos casos, o espaço dos spinors operatoriais coincide com a sub-álgebra par de uma álgebra de Clifford. Utilizando tais spinors, as operações que associam suas grandezas observáveis (os covariantes bilineares) podem ser dadas de maneira bastante compacta, conforme visto no capítulo final.

No capítulo 4 são apresentadas algumas aplicações de álgebras de Clifford em teorias de gauge. Começamos definindo o fibrado de Clifford e mostrando como conexão e curvatura podem ser dadas em termos de formas que assumem valores em bi-vetores. As álgebras de Lie associadas aos grupos Spin são álgebras de bi-vetores. Comentamos sobre as diversas aplicações em física das formas a valores em álgebras de Clifford. Discutimos as transformações conformes do espaço-tempo através da ação do grupo $\text{Spin}(2, 4)$ sobre os paravetores de $\mathcal{Cl}_{4,1}$ e a possibilidade de aplicar os resultados obtidos para encontrar soluções invariantes por transformações conformes das equações de Yang-Mills. Finalmente estudamos a construção de monopolos e instantons usando spinors operatoriais. As operações que associam os covariantes bilineares ao spinor, quando restritas a spinors unitários, coincidem exatamente com as fibrações de Hopf: $S^3 \longrightarrow S^2$, no caso dos spinors de Pauli e $S^7 \longrightarrow S^4$, para os spinors de Dirac. O Teorema de Inversão, que permite obter o spinor a menos de uma fase a partir de seus covariantes bilineares é apresentado e verificamos como a expressão obtida dá exatamente as trivializações locais das fibrações de Hopf correspondentes. Com isso, calculamos as funções de transição cuja classe de homotopia permite classificar os fibrados em termos dos números inteiros, pois $\pi_1(S^1) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z}$. As fibrações de Hopf correspondem à classe 1 de homotopia. Este é apenas um exemplo do vasto campo de aplicações da topologia na Física de partículas e campos.

Capítulo 1

Preliminares Matemáticos

A idéia fundamental por trás das teorias de Gauge é a **simetria das interações**, ou seja, a invariância dos campos frente certas transformações. As simetrias são estudadas matematicamente pela teoria de grupos. Por essa razão, vamos iniciar esta dissertação com uma abordagem de grupos e álgebras de Lie.

1.1 Grupos e Álgebras de Lie

Definição 1.1.1 (Grupo de Lie) *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G que também está munida de uma estrutura de grupo tal que as operações*

- (i) $\cdot : G \times G \longrightarrow G$ dada por $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$
- (ii) $^{-1} : G \longrightarrow G$ dada por $g \mapsto g^{-1}$

são diferenciáveis.

Um exemplo imediato é o grupo $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$. A estrutura de variedade segue-se naturalmente pois $GL_n(\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^{n^2}$; as operações de multiplicação e inversão de matrizes são obviamente diferenciáveis, portanto $GL_n(\mathbb{R})$ é de fato um grupo de Lie. Nesta dissertação estaremos interessados apenas em grupos de Lie de matrizes, i.e. subgrupos de $GL_n(\mathbb{R})$.

1.1.1 Grupos Clássicos

O grupo ortogonal

Consideremos uma métrica g em $\mathbb{R}^n$ de assinatura (p, q) com $p + q = n$

$$g(v, w) = v^1 w^1 + \dots + v^p w^p - v^{p+1} w^{p+1} - \dots - v^{p+q} w^{p+q}$$

denotamos por $\mathbb{R}^{p,q}$ o espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, g)$.

Definimos o **grupo ortogonal**¹ $O(p, q)$ como sendo o conjunto das matrizes reais $n \times n$ que preservam g , ou seja

$$O(p, q) = \{T \in M_n(\mathbb{R}) : g(Tv, Tw) = g(v, w), \forall v, w \in \mathbb{R}^n\}.$$

Denotamos por $SO(p, q)$ o **grupo ortogonal especial**, constituído pelas matrizes de $O(p, q)$ que têm determinante igual a 1.

Considere a matriz da forma bilinear g em relação à base canônica

$$G = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

$T \in O(p, q)$ se, e somente se, $T^t G T = G$, portanto $\det T = \pm 1$.

Proposição 1.1.1 *O grupo ortogonal $O(p, q)$ e o grupo ortogonal especial $SO(p, q)$ são subgrupos de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$, ambos de dimensão $n(n-1)/2$.*

No caso em que a métrica g tem assinatura $(n, 0)$, denotamos o grupo ortogonal simplesmente por $O(n)$, o qual é constituído pelas matrizes T tais que

$$T^t T = I. \tag{1.1}$$

Usando o fato de que T é igual ao produto de rotações e reflexões, pode-se verificar que existe um caminho contínuo inteiramente contido em $O(n)$ ligando T à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

¹Tradicionalmente, no caso em que $pq \neq 0$, o grupo $O(p, q)$ é chamado de grupo pseudo-ortogonal; a terminologia usada acima ficando restrita aos casos em que $pq = 0$. No entanto, para simplificar a terminologia, seguiremos Benn e Tucker [3] e usaremos “grupo ortogonal” em ambos os casos.

onde o sinal do último elemento da matriz depende de $\det T = \pm 1$. Portanto $O(n)$ tem duas componentes conexas $O_+(n) = \{T \in O(n) : \det T = 1\}$ e $O_-(n) = \{T \in O(n) : \det T = -1\}$, em particular o grupo $SO(n) = O_+(n)$ é conexo.

No caso em que $pq \neq 0$, dado $T \in O(p, q)$, escrevendo na seguinte forma

$$T = \begin{pmatrix} A_p & B_{p,q} \\ C_{q,p} & D_q \end{pmatrix},$$

verifica-se [23] que o grupo $O(p, q)$ tem *quatro* componentes conexas descritas abaixo:

- (i) $O_+^\uparrow(p, q) : \det A_p > 0, \det D_q > 0;$
- (ii) $O_-^\uparrow(p, q) : \det A_p > 0, \det D_q < 0;$
- (iii) $O_+^\downarrow(p, q) : \det A_p < 0, \det D_q > 0;$
- (iv) $O_-^\downarrow(p, q) : \det A_p < 0, \det D_q < 0.$

Além do subgrupo $O_+^\uparrow(p, q)$, também denotado por $SO_+(p, q)$, o qual nada mais é do que a componente conexa contendo a identidade, merecem destaque os subgrupos $O^\uparrow(p, q) = O_+^\uparrow(p, q) \cup O_-^\uparrow(p, q)$ e $O_+(p, q) = O_+^\uparrow(p, q) \cup O_+^\downarrow(p, q)$.

O grupo unitário

Consideremos o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$. Denotamos por $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$. Note-se que ao espaço $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ pode ser dada uma estrutura de **variedade diferenciável real** difeomorfa a $\mathbb{R}^{2n^2}$. Denotamos por $GL_n(\mathbb{C})$ o grupo das matrizes complexas inversíveis, o qual é um aberto em $\mathbb{R}^{2n^2}$; analogamente ao caso real, as operações de multiplicação e inversão são diferenciáveis, portanto $GL_n(\mathbb{C})$ é um grupo de Lie.

Definição 1.1.2 Dizemos que uma matriz $T \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz **unitária** se $\langle Tz, Tw \rangle = \langle z, w \rangle$, $\forall z, w \in \mathbb{C}^n$.

Segue-se que uma matriz é unitária se, e somente se, $T^*T = TT^* = I$, onde T^* é a matriz complexa conjugada. O conjunto das matrizes unitárias forma um grupo que denotaremos $U(n)$, chamado **grupo unitário**. Note-se que, pela igualdade acima, $\det T$ é um número complexo unitário, $\forall T \in U(n)$. $SU(n) = \{T \in U(n) : \det T = 1\}$, é um subgrupo de $U(n)$ chamado **grupo unitário especial**.

Proposição 1.1.2 *Os grupos $U(n)$ e $SU(n)$ são subgrupos de Lie de $GL_n(\mathbb{C})$, sendo que $\dim U(n) = n^2$ e $\dim SU(n) = n^2 - 1$.*

Toda matriz $T \in U(n)$ é diagonalizável, portanto existe uma matriz unitária V tal que $T = V^{-1}DV$, onde D é uma matriz diagonal constituída pelos autovalores de T , ou seja, qualquer matriz $T \in U(n)$ é equivalente a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

assim, podemos definir um caminho contínuo contido em $U(n)$ ligando qualquer matriz $T \in U(n)$ à matriz identidade. Portanto, os grupos $U(n)$ e $SU(n)$ são conexos.

Quatérnios e o grupo simplético

A álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$ é uma álgebra de dimensão 4 sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$ com uma base $\{1, i, j, k\}$ (onde 1 é o elemento identidade da álgebra) que satisfaz às seguintes regras de multiplicação.

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

assim, um elemento arbitrário $q \in \mathbb{H}$ se escreve de maneira única como $q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$. Adição e multiplicação são definidas de modo a satisfazer as propriedades usuais de distributividade e associatividade. Definimos o conjugado de um quatérnio q como sendo o quatérnio $\bar{q} = a_0 1 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$. Vale observar que $\bar{q}q = q\bar{q} = \sum_0^3 a_i^2 \in \mathbb{R}$. Definimos a *norma* de um quatérnio q por: $N(q) = (q\bar{q})^{1/2}$. Assim como a norma de um número complexo corresponde à norma de um vetor em $\mathbb{R}^2$, vemos que a norma de um quatérnio corresponde à norma de um vetor em $\mathbb{R}^4$. Podemos ver que todo quatérnio não nulo é inversível

$$q \neq 0 \implies q \text{ é inversível: } q^{-1} = \frac{\bar{q}}{q\bar{q}}.$$

Considerando as matrizes de pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

verifica-se facilmente que a álgebra dos quatérnios é isomorfa à álgebra gerada pelas seguintes matrizes de $M_2(\mathbb{C})$

$$T_1 = I, \quad T_i = -\sqrt{-1}\sigma_1, \quad T_j = -\sqrt{-1}\sigma_2, \quad T_k = -\sqrt{-1}\sigma_3.$$

De fato, tais matrizes satisfazem as mesmas regras de multiplicação satisfeitas por $1, i, j, k$.

$\mathbb{H}$ pode ser considerado um espaço vetorial bidimensional à direita sobre $\mathbb{C}$. De fato: se identificarmos $k = -\sqrt{-1}$, temos que qualquer quatérnio $q = a_01 + a_1i + a_2j + a_3k$, se escreve de maneira única como: $q = 1(a_0 - a_3\sqrt{-1}) + j(a_2 - a_1\sqrt{-1})$, portanto $\mathbb{H}$ é um espaço vetorial à direita sobre $\mathbb{C}$. Mais explicitamente, temos o isomorfismo $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{H}$ dado por

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \end{pmatrix} \mapsto \alpha_1 - \beta_2i + \alpha_2j - \beta_1k. \quad (1.2)$$

Se $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{H}^n$ são vetores quaterniônicos, definimos seu produto simplético:

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \bar{q}_1p_1 + \dots + \bar{q}_np_n$$

O conjunto das matrizes $n \times n$ com coeficientes em $\mathbb{H}$ será denotado por $M_n(\mathbb{H})$. Como variedade diferenciável, o espaço $M_n(\mathbb{H})$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^{4n^2}$.

Definição 1.1.3 Uma matriz $T \in M_n(\mathbb{H})$ é dita *simplética* se $\langle T\mathbf{q}, T\mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$, $\forall \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}^n$

Segue-se que uma matriz $T \in M_n(\mathbb{H})$ é simplética se, e somente se, $T^*T = TT^* = I$, onde T^* é a matriz conjugada complexa. Portanto toda matriz simplética admite inversa, a qual é também uma matriz simplética. Segue-se que tais matrizes formam um grupo, chamado **grupo simplético**, que denotaremos por $\text{Sp}(n)$.

Proposição 1.1.3 O grupo $\text{Sp}(n)$ é um **grupo de Lie**, com dimensão igual a $2n^2 + n$.

Como $\mathbb{H}$ é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial à direita, se $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^n$, podemos representar $q_i = 1z_i + jz_{n+i}$, onde $z_i, z_{n+i} \in \mathbb{C}$. Assim, temos uma correspondência natural de $\mathbb{H}^n$ em $\mathbb{C}^{2n}$, dada por:

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \mapsto \mathbf{q}' = (z_1, \dots, z_n, \dots, z_{2n})$$

tal aplicação define um isomorfismo entre $\mathbb{H}^n$ e $\mathbb{C}^{2n}$ como espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$. Assim, dada uma transformação linear T sobre $\mathbb{H}^n$, temos uma transformação correspondente² T' em $\mathbb{C}^{2n}$. Esta correspondência define um isomorfismo entre $\text{Sp}(n)$ e um subgrupo de $\text{GL}_{2n}(\mathbb{C})$. Com um pouco de conta, prova-se [6] a seguinte

Proposição 1.1.4 *O grupo $\text{Sp}(n)$ é isomorfo ao subgrupo de $\text{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ formado pelas matrizes unitárias que preservam a seguinte forma bilinear:*

$$\sum_{i=1}^n (x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i)$$

chamada forma simplética.

A matriz dos coeficientes da forma simplética na base canônica é:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

onde I é a matriz identidade $n \times n$. Portanto uma matriz $T \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ preserva a forma simplética se, e somente se, $T^t J T = J$. O conjunto de tais matrizes forma um grupo que se denota por $\text{Sp}_n(\mathbb{C})$. Obviamente pode-se dar uma definição análoga do grupo $\text{Sp}_n(\mathbb{R})$. É imediato ver que $\text{Sp}(n) \simeq \text{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \text{U}(2n)$.

1.1.2 Ação de grupos de Lie em variedades

Definição 1.1.4 *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. Uma ação de G sobre M é uma aplicação diferenciável $\sigma : G \times M \longrightarrow M$ que satisfaz às seguintes condições:*

- (i) $\sigma(e, p) = p \quad \forall p \in M$
- (ii) $\sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p)$.

onde $e \in G$ é o elemento identidade do grupo.

Definição 1.1.5 *Seja $\sigma : G \times M \longrightarrow M$ a ação de um grupo de Lie G em uma variedade M . Dizemos que a ação é*

- (a) **transitiva** se, para cada $p_1, p_2 \in M$, existe um elemento $g \in G$ tal que $\sigma(g, p_1) = p_2$;

²Note-se que toda transformação $\mathbb{H}$ -linear em $\mathbb{H}^n$ é $\mathbb{C}$ -linear, mas a recíproca não é válida em geral.

- (b) **livre** se todo elemento não trivial de G não tem pontos fixos, i.e., se existe um ponto $p \in M$ tal que $\sigma(g, p) = p$, então $g = e$;
- (c) **efetiva** se o único elemento que define a ação trivial é a identidade, i.e., se $\sigma(g, p) = p$ para todo $p \in M$, então g deve ser o elemento identidade e .

Definição 1.1.6 (subgrupo de isotropia) *Seja G um grupo de Lie que atua sobre uma variedade M . O subgrupo de isotropia de $p \in M$ é um subgrupo de G dado por*

$$H(p) = \{g \in G : \sigma(g, p) = p\}$$

$H(p)$ é também chamado **estabilizador** de p .

É fácil verificar que $H(p)$ é de fato um subgrupo de G , o qual, pela continuidade de σ , é fechado em G . Um teorema sobre grupos de Lie cuja demonstração³, um pouco longa, foge ao escopo dessa abordagem superficial sobre grupos de Lie, nos diz que, se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G , então H é um **subgrupo de Lie** de G . Segue-se que qualquer subgrupo de isotropia $H(p)$ é um subgrupo de Lie de G .

Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie de G . O conjunto quociente G/H admite uma estrutura diferenciável que faz de G/H uma variedade chamada **espaço homogêneo**.

Exemplo 1.1.1 *Pode-se provar [34] que*

$$O(n)/O(n-1) = SO(n)/SO(n-1) = S^{n-1}$$

$$U(n)/U(n-1) = SU(n)/SU(n-1) = S^{2n-1}$$

$$Sp(n)/Sp(n-1) = S^{4n-1}$$

ou seja, as esferas podem ser vistas como espaços homogêneos.

1.1.3 Campos de vetores invariantes à esquerda

Iniciaremos agora uma abordagem das **álgebras de Lie** associadas aos grupos de Lie. Lembramos que um *campo de vetores* sobre uma variedade M é definido como uma derivação: $v : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ou, equivalentemente, como uma seção do fibrado tangente: $v : M \rightarrow TM$. Dados dois

³Ver Spivak [28] vol. 1 cap. 10.

campos de vetores v, w em M , definimos seu **colchete de Lie** como sendo o campo $[v, w]$ dado por

$$[v, w](f) = v(wf) - w(vf), \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

Pode-se mostrar através de um cálculo direto que o colchete satisfaz às seguintes propriedades:

- (i) $[X, Y] = -[Y, X]$
- (ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ identidade de Jacobi
- (iii) $[fX, gY] = fg[X, Y] - f(Xg)Y + g(Yf)X$

Suponhamos que o campo v gera o fluxo ϕ_t e que o campo w gera o fluxo ψ_t , ou seja, para qualquer $f \in C^\infty(M)$

$$(vf)(p) = \left. \frac{d}{dt} f(\phi_t(p)) \right|_{t=0} \quad \text{e} \quad (wf)(p) = \left. \frac{d}{dt} f(\psi_t(p)) \right|_{t=0}.$$

Através de um cálculo simples, podemos verificar que

$$[v, w](f)(p) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left[f(\psi_s(\phi_t(p))) - f(\phi_t(\psi_s(p))) \right]_{t=s=0} \quad (1.3)$$

Definição 1.1.7 *Sejam a e g elementos de um grupo de Lie G . A **translação à direita** $R_a : G \rightarrow G$ e a **translação à esquerda** $L_a : G \rightarrow G$ de g por a são definidas por*

$$R_a g = ga$$

$$L_a g = ag$$

As aplicações R_a e L_a são difeomorfismos de G em G , logo suas derivadas induzem isomorfismos $L_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ag} G$ e $R_{a*} : T_g G \rightarrow T_{ga} G$. Consideraremos apenas as translações à esquerda. O estudo das translações à direita é equivalente.

Definição 1.1.8 *Seja X um campo de vetores sobre um grupo de Lie G . X é dito um **campo de vetores invariante à esquerda** se*

$$L_{a*} X|_g = X|_{ag} \quad \forall g \in G.$$

Um vetor $V \in T_e G$ define um único campo de vetores invariante à esquerda X_V sobre G dado por

$$X_V|_g = L_{g*} V \quad g \in G$$

de fato, $X_V|_{ag} = L_{ag*}V = (L_a L_g)_*V = L_{a*}L_{g*}V = L_{a*}X_V|_g$. Por outro lado, um campo de vetores invariante à esquerda X define um único vetor $V = X|_e \in T_e G$. Vamos denotar o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda sobre G por $\mathfrak{g}$. A aplicação $T_e G \longrightarrow \mathfrak{g}$ definida por $V \longmapsto X_V$ é um isomorfismo; segue-se que $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial isomorfo a $T_e G$.

Mostremos que para dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{g}$, o colchete $[X, Y]$ também pertence a $\mathfrak{g}$. De fato, para qualquer função diferenciável $f \in C^\infty(M)$, temos:

$$\begin{aligned} L_{a*}[X, Y]f &= [X, Y](f \circ L_a) = XY(f \circ L_a) - YX(f \circ L_a) \\ &= X(L_{a*}Yf) - Y((L_{a*}Xf)) = XYf - YXf \\ &= [X, Y]f. \end{aligned}$$

portanto $L_{a*}[X, Y] = [X, Y]$, i.e., $[X, Y] \in \mathfrak{g}$

Definição 1.1.9 (álgebra de Lie) *O espaço $\mathfrak{g}$ dos campos de vetores invariantes à esquerda em G com o colchete de Lie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é chamado álgebra de Lie do grupo G .*

A seguir mostraremos como construir a aplicação exponencial de $T_e G$ em G que é uma generalização, para grupos de Lie arbitrários, da exponencial de matrizes (ver pág. 10) usada no estudo de sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Definição 1.1.10 (subgrupo a 1-parâmetro) *Uma curva diferenciável $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ é chamada um subgrupo a 1-parâmetro de G se satisfaz à seguinte condição*

$$\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s).$$

isto é, ϕ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$ em G .

É imediato verificar que $\phi(0) = e$ e $\phi(t)^{-1} = \phi(-t)$. Dado um subgrupo a 1-parâmetro $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow G$, existe um campo de vetores X tal que

$$\frac{d\phi}{dt} = X(\phi).$$

Mostraremos agora que o campo X é invariante à esquerda. Considerando a aplicação derivada $\phi_* : T_t \mathbb{R} \longrightarrow T_{\phi(t)} G$ temos

$$\phi_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \frac{d\phi}{dt} \Big|_t = X|_g \quad \text{onde } g = \phi(t).$$

Seja $L_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $L_t(x) = t + x$, vemos que $(L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = \frac{d}{dt} \Big|_t$, logo

$$(\phi L_t)_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = \phi_* L_{t*} \frac{d}{dt} \Big|_0 = X \Big|_g$$

Observando a comutatividade⁴ $\phi L_t = L_g \phi$, onde $g = \phi(t)$ temos

$$\phi_* L_{t*} \frac{d}{dt} \Big|_0 = L_{g*} \phi_* \frac{d}{dt} \Big|_0 = L_{g*} X \Big|_e.$$

$$\implies L_{g*} X \Big|_e = X \Big|_g$$

logo, a todo subgrupo a 1-parâmetro está associado um campo de vetores invariante à esquerda. A recíproca também é verdadeira ([28] vol.1 cap. 10). Segue-se que existe uma correspondência biunívoca entre subgrupos a um parâmetro de G e campos de vetores invariantes à esquerda.

Definição 1.1.11 (aplicação exponencial) *Seja G um grupo de Lie e $V \in T_e G$. A aplicação exponencial $\exp : T_e G \longrightarrow G$ é definida por*

$$\exp(V) = \phi_V(1)$$

onde ϕ_V é o subgrupo a 1-parâmetro de G gerado pelo campo de vetores invariante à esquerda $X_V \Big|_g = L_{g*}(V)$.

Seja G um grupo de Lie de matrizes e $A \in T_e G$, nesse caso a aplicação exponencial é dada por

$$\exp(A) = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

pode-se provar com facilidade que essa série converge absoluta e uniformemente sobre qualquer conjunto limitado de matrizes. Dadas matrizes A, B tais que $AB = BA$, temos que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Dados $A, B \in \mathfrak{g}$, o colchete de Lie $[A, B] \in \mathfrak{g}$ coincide com o colchete usual da álgebra de matrizes $[A, B] = AB - BA$.

Agora vamos “calcular” as álgebras de Lie de alguns dos grupos clássicos vistos anteriormente. Para isso, precisamos de algumas propriedades da aplicação exponencial, pois esta nos dá a ligação entre o grupo de Lie e sua álgebra. Para tanto, precisamos da seguinte

⁴ $\phi L_t(x) = \phi(t + x) = \phi(t)\phi(x) = L_g \phi(x)$.

Proposição 1.1.5 Para qualquer matriz T ,

$$\det(\exp(T)) = e^{\text{tr}(T)}.$$

Seja $V \in \mathfrak{u}(n)$ um elemento qualquer da álgebra de Lie do grupo $U(n)$. Então $V = \gamma'(0)$, onde $\gamma(t)$ é uma curva passando pela identidade I , como $\gamma(t) \in U(n)$, temos para quaisquer $v, w \in \mathbb{C}^n$

$$\langle \gamma(t)v, \gamma(t)w \rangle = \langle v, w \rangle \implies \langle v, \gamma'(0)w \rangle + \langle \gamma'(0)v, w \rangle = 0.$$

Segue-se daí que $V = \gamma'(0)$ é uma matriz **anti-hermitiana complexa**, ou seja, $V = [V_{ij}]$ e $V_{ij} = -\overline{V_{ji}}$.

Dada uma matriz T anti-hermitiana, considere o caminho $\gamma(t) = \exp(tT)$. Logo

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} t^n T^n / n! \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} T^n / (n-1)! \\ &= T\gamma(t). \end{aligned}$$

Segue-se que para todo $v, w \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \gamma(t)v, \gamma(t)w \rangle &= \langle \gamma(t)v, \gamma'(t)w \rangle + \langle \gamma'(t)v, \gamma(t)w \rangle \\ &= \langle \gamma(t)v, T\gamma(t)w \rangle + \langle T\gamma(t)v, \gamma(t)w \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ou seja o produto interno acima é constante $\langle \gamma(t)v, \gamma(t)w \rangle = \langle v, w \rangle$. Logo $\gamma(t) \in U(n)$, $T \in \mathfrak{u}(n)$, e $\mathfrak{u}(n)$ é constituída precisamente das matrizes anti-hermitianas complexas.

Exatamente o mesmo raciocínio pode ser aplicado ao caso em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno euclidiano ou simplético. Concluimos que a álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ do grupo $O(n)$ consiste das matrizes **anti-simétricas** e a álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(n)$ de $\text{Sp}(n)$ das matrizes **anti-hermitianas quaterniônicas** $Q = [Q_{ij}]$ onde $Q_{ij} = -\overline{Q_{ji}}$; a barra indica conjugação quaterniônica.

Como $\text{SO}(n)$ é a componente conexa de $O(n)$ contendo a identidade, temos obviamente que $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$. Por outro lado, $\mathfrak{su}(n)$ é um subespaço de codimensão 1 de $\mathfrak{u}(n)$. De fato, $\mathfrak{su}(n)$ consiste das matrizes anti-

hermitianas complexas de **traço nulo**:

$$\begin{aligned} \text{Se } T \in \mathfrak{su}(n) &\implies \exp(T) \in \text{SU}(n) \implies \det(\exp(T)) = e^{\text{tr}(T)} = 1 \\ &\implies \text{tr}(T) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } \text{tr}(T) = 0 &\implies \det \gamma(t) = \det(\exp(tT)) = e^{\text{tr}(tT)} = e^{t \cdot \text{tr}(T)} = 1 \\ &\implies \gamma(t) \in \text{SU}(n). \end{aligned}$$

$$\therefore T \in \mathfrak{su}(n) \iff T \in \mathfrak{u}(n) \quad \& \quad \text{tr}(T) = 0.$$

Exemplo 1.1.2 (o grupo $\text{SU}(2)$) Fazendo algumas contas, pode-se verificar que as matrizes de $\text{SU}(2)$ são todas da forma $\begin{bmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{bmatrix}$ onde $u, v \in \mathbb{C}$ e $|u|^2 + |v|^2 = 1$. Tomando $u = u_1 + \sqrt{-1}u_2$ e $v = v_1 + \sqrt{-1}v_2$, a matriz acima pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes dadas na página 5

$$\begin{bmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{bmatrix} = u_1 T_1 + u_2 T_i + v_1 T_j + v_2 T_k$$

onde $(u_1)^2 + (u_2)^2 + (v_1)^2 + (v_2)^2 = 1$. Como a álgebra de tais matrizes é isomorfa à álgebra dos quatérnios, podemos abusar da notação e denotá-las por $1, i, j, k$. Assim, temos que

$$\text{SU}(2) = \{a1 + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$$

Portanto, $\text{SU}(2)$ pode ser identificado à esfera unitária S^3 de $\mathbb{R}^4$.

Pelo que vimos anteriormente, a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ do grupo $\text{SU}(2)$ é o espaço formado pelas matrizes 2×2 complexas anti-adjuntas e de traço nulo, isto é, as matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} -ib & -(c + \sqrt{-1}d) \\ c - \sqrt{-1}d & ib \end{bmatrix}$$

Segue-se que a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ é isomorfa ao espaço dos **quatérnios puros** $bi + cj + dk$, onde $b, c, d \in \mathbb{R}$ são números reais arbitrários.

Referenciais e equação de estrutura

Seja $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ uma base de $T_e G$ com $n = \dim G$. Essa base define n campos de vetores invariantes à esquerda linearmente independentes

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ que, em cada ponto $g \in G$, forma uma base para $T_g G$. Portanto o campo invariante à esquerda $[X_\mu, X_\nu]|_g$ pode ser decomposto em relação a essa base como

$$[X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda$$

onde os escalares $c_{\mu\nu}^\lambda$ são chamados **constantes de estrutura** do grupo G . Precisamos mostrar que $c_{\mu\nu}^\lambda$ são de fato constantes que independem de g . Com efeito, se aplicamos L_{g*} ao colchete $[X_\mu, X_\nu]|_e = c_{\mu\nu}^\lambda(e)X_\lambda|_e$, por linearidade temos

$$[X_\mu, X_\nu]|_g = c_{\mu\nu}^\lambda(e)X_\lambda|_g.$$

Tomamos a base $\{\theta^\mu\}$ dual de $\{X_\mu\}$, i.e., $\theta^\nu(X_\mu) = \delta_\mu^\nu$. Vamos mostrar que a base dual satisfaz a **equação estrutural de Maurer-Cartan**,

$$d\theta^\mu = -\frac{1}{2}c_{\nu\lambda}^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\lambda. \quad (1.4)$$

De fato, usando propriedades da diferencial exterior⁵ d , temos

$$\begin{aligned} d\theta^\mu(X_\nu, X_\lambda) &= X_\nu[\theta^\mu(X_\lambda)] - X_\lambda[\theta^\mu(X_\nu)] - \theta^\mu([X_\nu, X_\lambda]) \\ &= X_\nu[\delta_\lambda^\mu] - X_\lambda[\delta_\nu^\mu] - \theta^\mu(c_{\nu\lambda}^\kappa X_\kappa) = -c_{\nu\lambda}^\mu. \end{aligned}$$

Definição 1.1.12 (forma de Maurer-Cartan) Definimos a seguinte 1-forma com valores na álgebra de Lie: para cada $g \in G$ $\theta : T_g G \longrightarrow T_e G$

$$\theta : X \longmapsto (L_{g^{-1}})_* X = (L_g)^{-1}_* X \quad X \in T_g G$$

θ é chamada **1-forma canônica** ou **forma de Maurer-Cartan** em G .

Proposição 1.1.6

(a) A 1-forma canônica θ se decompõe como

$$\theta = V_\mu \otimes \theta^\mu$$

onde $\{V_\mu\}$ é uma base de $T_e G$ e $\{\theta^\mu\}$ sua base dual em $T_g^* G$.

(b) A 1-forma canônica θ satisfaz

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0$$

onde $d\theta = V_\mu \wedge d\theta^\mu$ e $[\theta \wedge \theta] = [V_\mu \wedge V_\nu] \otimes \theta^\mu \wedge \theta^\nu$.

⁵Ver Spivak [28] vol.1 cap.7, página 292 da segunda edição.

Demonstração: (a): Seja $Y = Y^\mu X_\mu \in T_g G$ um vetor qualquer. Lembrando que $X_\mu|_g = L_{g*} V_\mu$, temos

$$\theta(Y) = Y^\mu \theta(X_\mu) = Y^\mu (L_{g*})^{-1} [L_{g*} V_\mu] = Y^\mu V_\mu.$$

(b): Usando a equação estrutural de Maurer-Cartan (1.4)

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = -\frac{1}{2}V_\mu \otimes c_{\nu\lambda}{}^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\lambda + \frac{1}{2}c_{\nu\lambda}{}^\mu V_\mu \otimes \theta^\nu \wedge \theta^\lambda = 0.$$

■

Representação adjunta

Definição 1.1.13 Para qualquer $a \in G$ definimos um homomorfismo

$$\begin{aligned} \tau_a : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto aga^{-1} \end{aligned}$$

chamado *conjugação por a* .

Denotamos a aplicação induzida $\tau_{a*} : T_e G \longrightarrow T_e G$ por Ad_a , a qual é inversível, pois τ_a é um difeomorfismo. Identificando $T_e G$ com a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, obtemos uma aplicação

$$\text{Ad} : G \longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$$

chamada **representação adjunta** de G . É imediato verificar que: $\text{Ad}_a \text{Ad}_b = \text{Ad}_{ab}$ e $\text{Ad}_{a^{-1}} = \text{Ad}_a^{-1}$.

Tomando a derivada de Ad restrita a $T_e G = \mathfrak{g}$ obtemos a aplicação

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ V &\longmapsto \text{Ad}_* V. \end{aligned}$$

Teorema 1.1.1 Para todo $V \in \mathfrak{g}$, $\text{Ad}(\exp(V)) = \exp(\text{ad}(V))$.

Demonstração:

$$\text{ad}(V) = \text{Ad}_* V = \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(\exp(tV)) \right|_{t=0}$$

mas $\gamma(t) = \text{Ad}(\exp(tV))$ é um caminho em $\text{GL}(\mathfrak{g})$ passando pela identidade e $\gamma(t+s) = \text{Ad}(\exp((t+s)V)) = \text{Ad}(\exp(tV) \exp(sV)) = \gamma(t)\gamma(s)$, logo $\gamma(t)$ é um subgrupo a 1-parâmetro tal que $\gamma'(0) = \text{ad}(V)$. Assim, $\exp(\text{ad}(V)) = \gamma(1) = \text{Ad}(\exp(V))$. ■

Teorema 1.1.2 Para todo $A, B \in \mathfrak{g}$ $\text{ad}(A)(B) = [A, B]$.

Demonstração: Bleecker [4] pg. 20 ■

Se G é um grupo de matrizes, tome $g \in G$ e $X_V \in \mathfrak{g}$. Seja $\exp(tV)$ o subgrupo a 1-parâmetro gerado por $V \in T_e G$. A ação de ad_g sobre esse subgrupo nos dá $g \exp(tV) g^{-1} = \exp(tgVg^{-1})$, segue-se que

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g V &= \left. \frac{d}{dt} [\text{ad}_g \exp(tV)] \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} [\exp(tgVg^{-1})] \right|_{t=0} = gVg^{-1}. \end{aligned}$$

portanto, $V \mapsto gVg^{-1}$ é a aplicação adjunta para grupos de matrizes.

1.2 Espaços Fibrados

Agora passaremos ao estudo de certos tipos de variedades que são caracterizadas por se parecerem localmente com o produto cartesiano de duas variedades. Tais variedades são chamadas de **espaço fibrado** ou simplesmente **fibrado**. Nas aplicações às *Teorias de Gauge*, os fibrados vão servir para englobar numa só variedade os graus de liberdade “externos”, devidos ao espaço-tempo, e os graus de liberdade “internos” devido à estrutura do objeto estudado, i.e., suas propriedades de simetria.

Definição 1.2.1 Um **fibrado diferenciável** (E, π, M, F, G) consiste dos seguintes elementos:

- (i) Uma variedade diferenciável E chamada **espaço total**.
- (ii) Uma variedade diferenciável M chamada **espaço de base**.
- (iii) Uma variedade diferenciável F chamada **fibra** (ou **fibra típica**).
- (iv) Uma aplicação sobrejetora e diferenciável $\pi : E \rightarrow M$ chamada **projeção**. $\pi^{-1}(p) = F_p \cong F$ é chamada **fibra em p** .
- (v) Um grupo de Lie G chamado **grupo estrutural**, o qual age em F pela esquerda.
- (vi) Uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M com uma família de difeomorfismos $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$ tal que $\pi \phi_i(p, f) = p$. A aplicação ϕ_i é chamada **trivialização local** pois ϕ_i^{-1} leva $\pi^{-1}(U_i)$ sobre o produto cartesiano $U_i \times F$.

(vii) Fazendo $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$, a aplicação $\phi_{i,p} : F \longrightarrow F_p$ é um difeomorfismo. Em $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $t_{ij} = \phi_{i,p}^{-1} \phi_{j,p} : F \longrightarrow F$ deve ser um elemento de G . Então ϕ_i e ϕ_j estão relacionados por uma aplicação diferenciável $t_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ da seguinte maneira (ver diagrama 1.5)

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p)f).$$

$\{t_{ij}\}$ são chamadas **funções de transição**.

$$\begin{array}{ccc} & \pi(U_i \cap U_j) \subseteq E & \\ \phi_i \nearrow & & \searrow \phi_j^{-1} \\ (U_i \cap U_j) \times F & \xrightarrow{\phi_i^{-1} \circ \phi_j} & (U_i \cap U_j) \times F \\ (p, f) & \longrightarrow & (p, t_{ij}(p)f) \end{array} \quad (1.5)$$

frequentemente usaremos a notação $\pi : E \longrightarrow M$ para denotar o fibrado (E, π, M, F, G) , a fibra típica e o grupo estrutural ficarão claros pelo contexto.

Antes de explorarmos algumas propriedades dessa importante estrutura matemática chamada fibrado, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.2.1 (a): O produto cartesiano $E = M \times N$ de duas variedades M, N com a projeção $\pi : E = M \times N \longrightarrow M$ é um exemplo de fibrado com fibra típica N . Nesse caso, o grupo estrutural é o grupo trivial $G = e$ pois a única função de transição é a identidade. Logo, o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e o plano $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ são exemplos de fibrados.

(b): Seja M uma variedade diferenciável, considere $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ a reunião dos espaços tangentes a cada ponto de M e $\pi : TM \longrightarrow M$ dada por $\pi(v_p) = p$, para $v_p \in T_p M$. Então $\pi : TM \longrightarrow M$ é um fibrado. De fato, para cada vizinhança coordenada (U, x) de M , a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_U : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (p; a_1, \dots, a_n) &\mapsto \left(p; a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, a_n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right) \end{aligned}$$

é uma trivialização local de TM . Nesse caso, o grupo estrutural é o $GL_n(\mathbb{R})$ o qual age em $\mathbb{R}^n$ considerando os elementos de $GL_n(\mathbb{R})$ como transformações lineares, fixada uma certa base. Dadas duas vizinhanças coordenadas (U_1, x_1) e (U_2, x_2) , a função de transição t_{12} em $U_1 \cap U_2$ é dada por

$t_{12}(p) = D(x_1^{-1} \circ x_2)(p)$. Como $x_1^{-1} \circ x_2$ é um difeomorfismo, sua derivada é inversível, $t_{12}(p) = D(x_1^{-1} \circ x_2)(p) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. $\pi : TM \longrightarrow M$ é o velho conhecido fibrado tangente que tem grupo estrutural $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ e fibra típica $\mathbb{R}$.

Vamos analisar com um pouco mais de detalhe as **funções de transição**. Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado, tome um aberto $U_i \subseteq M$. A trivialização local $\phi_i^{-1} : \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F$ é um difeomorfismo. Tomando dois abertos $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ temos duas aplicações ϕ_i e ϕ_j em $U_i \cap U_j$. Seja $u \in E$ tal que, u pertence à fibra F_p onde $p \in U_i \cap U_j$. Cada trivialização ϕ_i^{-1} e ϕ_j^{-1} , leva o ponto u em elementos distintos da fibra típica F :

$$\phi_i^{-1}(u) = (p, f_i), \quad \phi_j^{-1}(u) = (p, f_j)$$

o papel da função transição $t_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ consiste em estabelecer uma relação entre esses dois elementos: $f_i = t_{ij}(p)f_j$.

Como $t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1}\phi_{j,p}$, pode-se verificar facilmente que as funções de transição satisfazem as **condições de cociclo**:

$$\begin{aligned} t_{ii}(p) &= e & p &\in U_i; \\ t_{ij}(p)t_{ji}(p) &= e & p &\in U_i \cap U_j; \\ t_{ij}(p)t_{jk}(p)t_{ki}(p) &= e & p &\in U_i \cap U_j \cap U_k. \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde e é o elemento identidade.

O próximo teorema nos mostra que, dada uma fibra típica e um grupo estrutural, as funções de transição nos permitem caracterizar os fibrados. Para a demonstração ver [7].

Teorema 1.2.1 *Seja F uma variedade diferenciável, G um grupo de Lie agindo em F pela esquerda e $\{U_i : i \in I\}$ uma cobertura aberta de uma variedade M . Suponha que para cada $i, j \in I$ com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$*

$$p \longmapsto t_{ij}(p)$$

é uma aplicação diferenciável de $U_i \cap U_j$ em G que satisfaz às condições de cociclo (1.6). Então existe um fibrado (E, π, M, F, G) tendo as aplicações t_{ij} como funções de transição. Qualquer outro fibrado sobre M com as mesmas funções de transição é isomorfo a E .

1.2.1 Fibrados vetoriais

Um **fibrado vetorial** $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado cuja fibra típica V é um espaço vetorial real ou complexo tal que as trivializações locais ϕ_i :

$U_i \times V \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ definem, em cada ponto $p \in U_i$, um isomorfismo entre V e a fibra $V_p = \pi^{-1}(p)$.

O cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ visto anteriormente é um exemplo de fibrado vetorial tendo $\mathbb{R}$ como fibra típica, o fibrado tangente TM é um fibrado vetorial cuja fibra típica é $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.2 (Morfismos) Se $\pi : E \longrightarrow M$ e $\pi' : E' \longrightarrow M'$ são fibrados vetoriais com fibras isomorfas a V e V' respectivamente e $f : M \longrightarrow M'$ é uma aplicação de classe C^r , então uma aplicação $F : E \longrightarrow E'$ de classe C^r é chamada um **morfismo de fibrado vetorial**, sobre f , se leva a fibra E_p linearmente sobre a fibra $E'_{f(p)}$ para cada $p \in M$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Caso f seja um difeomorfismo e F atue como um isomorfismo linear sobre cada fibra, dizemos que F é um **isomorfismo de fibrado vetorial**. Nesse caso dizemos que os fibrados E e E' são equivalentes.

Dada uma variedade M e um espaço vetorial V , podemos formar um fibrado vetorial com espaço total $M \times V$ e projeção dada por:

$$\begin{aligned} \text{proj} : M \times V &\rightarrow M \\ (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

Um fibrado da forma $(M \times V, \text{proj})$ será chamado de **fibrado vetorial local**.

Definição 1.2.3 Um fibrado vetorial E é dito **trivial** se for equivalente a um fibrado vetorial local; e é dito **não-trivial**, caso contrário.

Definição 1.2.4 (seções) Uma **seção** de um fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ é uma aplicação diferenciável $\sigma : M \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ \sigma(p) = p$, $\forall p \in M$. O conjunto de todas as seções sobre E é denotado por ΓE .

Suponha que $\phi_1 : U_1 \times V \longrightarrow \pi^{-1}(U_1)$ é uma trivialização local de um fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ de dimensão⁶ k . Assim, temos k seções

$$\sigma_i(p) = \phi_1(p, e_i), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad p \in U_1$$

⁶A dimensão de um fibrado é definida como sendo a dimensão de sua fibra típica.

do fibrado restrito $\pi|_{U_1} : \pi^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1$, chamadas de secções locais, onde $\{e_1, \dots, e_k\}$ é uma base fixada de V . Segue-se que $\{\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)\}$ é uma base para a fibra E_p . A aplicação

$$p \longmapsto \{\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)\}$$

é chamada de **referencial local** para E sobre U_1 . Qualquer seção $s \in \Gamma E$ tem uma expressão local

$$s(p) = s^1(p)\sigma_1(p) + \dots + s^k(p)\sigma_k(p), \quad p \in U_1$$

onde cada $s^i \in C^\infty(U_1)$.

Tomando outra trivialização $\phi_2 : U_2 \times V \longrightarrow \pi^{-1}(U_2)$ com $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, temos o referencial

$$p \longmapsto \{\xi_1(p), \dots, \xi_k(p)\}$$

seja $[g_j^i(p)]$ a matriz da função de transição $t_{12}(p)$ em relação à base $\{e_j\}$, facilmente verifica-se que $\xi_j = g_j^1\sigma_1 + \dots + g_j^k\sigma_k$, de fato:

$$\begin{aligned} \xi_j(p) &= \phi_2(p, e_j) = \phi_1 \circ (\phi_1^{-1} \circ \phi_2)(p, e_j) \\ &= \phi_1(p, t_{12}(p)e_j) = \phi_1(p, g_j^1 e_1 + \dots + g_j^k e_k) \\ &= g_j^1 \phi_1(p, e_1) + \dots + g_j^k \phi_1(p, e_k) \\ &= g_j^1 \sigma_1 + \dots + g_j^k \sigma_k \end{aligned}$$

O Teorema (1.2.1) nos permite efetuar várias construções com fibrados, basta tomar as funções de transição adequadas. Como exemplo, temos o **fibrado de homomorfismos** $\text{Hom}(E, E')$ entre dois fibrados E, E' sobre a mesma variedade de base M , cujas fibras são $L(E_p \rightarrow E'_p)$, os espaços vetoriais das transformações lineares entre as fibras de E e E' .

Exemplo 1.2.2 (construção de $\text{Hom}(E, E')$) *Aqui daremos um esboço da construção do fibrado de homomorfismos. Considere as funções de transição $\{g_{\alpha\gamma}\}$ de E e $\{g'_{\alpha\gamma}\}$ de E' sobre uma mesma cobertura $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ para M . Vamos aplicar o Teorema (1.2.1), tomando a fibra típica $L(V \rightarrow W)$, onde V e W são as fibras típicas de E e E' . Considerando que as trivializações locais nos dão um referencial local para o fibrado, as funções de transição nos dão a mudança de referencial. Para obtermos as funções de transição do fibrado de homomorfismos, basta considerarmos o efeito da mudança de referencial sobre uma transformação linear. Assim, as funções de transição $h_{\alpha\gamma}$ de $\text{Hom}(E, E')$ são definidas da seguinte forma:*

$$h_{\alpha\gamma}(p)A = g'_{\alpha\gamma}(p)Ag_{\gamma\alpha}(p), \quad \forall A \in L(V \rightarrow W)$$

é imediato verificar que $h_{\alpha\gamma}(p)$ satisfaz às condições de cociclo (1.6). Pelo Teorema (1.2.1) obtemos um fibrado vetorial denotado por $\text{Hom}(E, E')$.

De maneira inteiramente análoga, podemos construir o *fibrado soma direta* $E \oplus E'$, tomando as funções de transição

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \oplus g'_{\alpha\beta}(p) : \quad V \oplus W &\longrightarrow V \oplus W \\ (v \oplus w) &\longmapsto g_{\alpha\beta}(v) \oplus g'_{\alpha\beta}(w) \end{aligned}$$

o *fibrado produto tensorial* $E \otimes E'$, através das funções de transição

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \otimes g'_{\alpha\beta}(p) : \quad V \otimes W &\longrightarrow V \otimes W \\ (v \otimes w) &\longmapsto g_{\alpha\beta}(v) \otimes g'_{\alpha\beta}(w) \end{aligned}$$

o *fibrado produto exterior* $\Lambda^q E$ com

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}(p) = \Lambda^q g_{\alpha\beta}(p) : \quad \Lambda^q V &\longrightarrow \Lambda^q V \\ (v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) &\longmapsto (g_{\alpha\beta}(v_1) \wedge \cdots \wedge g_{\alpha\beta}(v_n)) \end{aligned}$$

e o *fibrado dual* E^* com

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}(p) = g_{\beta\alpha}(p)^* : \quad V^* &\longrightarrow V^* \\ \phi &\longmapsto \phi \circ g_{\beta\alpha}(p). \end{aligned}$$

1.2.2 Fibrados principais

Um **fibrado principal** é um fibrado cuja fibra F é idêntica ao grupo estrutural G . Um fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ também é denotado por $P(M, G)$. As funções de transição atuam sobre a fibra pela esquerda como em qualquer fibrado. Num fibrado principal, podemos também definir uma ação de G sobre F *pela direita*. De fato seja $\phi_i : U_i \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ uma trivialização local. Dado $u \in \pi^{-1}(U_i)$ onde $u = \phi_i(p, g_i)$, a ação pela direita de G em $\pi^{-1}(U_i)$ é definida como

$$ua = \phi_i(p, g_i a), \quad \forall a \in G$$

essa definição é independente da trivialização local: se $p \in U_i \cap U_j$,

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a).$$

Assim, a ação pela direita está bem definida sem referência a trivializações locais. Tal ação será denotada por $P \times G \longrightarrow P$ ou $(u, a) \longmapsto ua$ a qual é transitiva sobre cada fibra $\pi^{-1}(p)$, pois esta última é difeomorfa a G . Segue-se que se $\pi(u) = p$, então $\pi^{-1}(p) = \{ua : a \in G\}$.

Dada uma seção⁷ $s_i(p)$ sobre U_i , definimos uma trivialização local $\phi_i : U_i \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ como segue. É imediato verificar que para $u \in \pi^{-1}(p)$ existe um *único* elemento $g_u \in G$ tal que $u = s_i(p)g_u$, assim definimos ϕ_i pondo: $\phi_i(p, g) = s_i(p)g$, segue-se que, em relação a essa trivialização, a seção $s_i(p)$ é expressa como

$$s_i(p) = \phi_i(p, e).$$

Esta trivialização é chamada de **trivialização local canônica**. Se $p \in U_i \cap U_j$, duas seções $s_i(p)$ e $s_j(p)$ estão relacionadas pelas funções de transição $t_{ij}(p)$

$$\begin{aligned} s_i(p) &= \phi_i(p, e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)e) = \phi_j(p, t_{ji}(p)) \\ &= \phi_j(p, e)t_{ji}(p) = s_j(p)t_{ji}(p). \end{aligned}$$

Vejamos agora alguns exemplos de fibrados principais.

Exemplo 1.2.3 (fibrado dos referenciais) *Seja TM o fibrado tangente de uma variedade M . Tomamos $LM = \bigcup_{p \in M} L_p M$ onde $L_p M$ é o conjunto dos referenciais em p , i.e., das bases de $T_p M$. Considere uma vizinhança coordenada (x^μ, U_i) de M . Um referencial $u = (X_1, \dots, X_m)$ em $p \in U_i$ se expressa como*

$$X_\alpha = X^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p \quad 1 \leq \alpha \leq m$$

como $\{X_\alpha\}$ são linearmente independentes, (X^μ_α) é uma matriz de $GL_m(\mathbb{R})$. Definimos a trivialização local $\phi_i : U_i \times GL_m(\mathbb{R}) \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ fazendo $\phi_i(p, (X^\mu_\alpha)) = u$, onde u é o referencial dado acima.

Se $u = (X_1, \dots, X_m)$ é um referencial em $T_p M$, definimos $\pi_L : LM \longrightarrow M$ pondo $\pi_L(u) = p$. A ação pela direita de $a = (a^i_j) \in GL_m(\mathbb{R})$ sobre o referencial $u = (X_1, \dots, X_m)$ é dada por $(u, a) \longmapsto ua$, onde ua é um novo referencial em p dado por

$$Y_\beta = X_\alpha \cdot a^\alpha_\beta.$$

Por outro lado, as funções de transição devem ser dadas pela ação à esquerda do grupo na fibra. De fato, sejam (x^μ, U_i) e (y^μ, U_j) duas vizinhanças coordenadas. Para cada $p \in U_i \cap U_j$, temos

$$X_\alpha = X^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p = \tilde{X}^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Big|_p$$

⁷Uma seção num fibrado principal é definida de modo inteiramente análogo ao caso de um fibrado vetorial.

onde $(X^\mu_\alpha), (\tilde{X}^\mu_\alpha) \in \text{GL}_m(\mathbb{R})$ e, pela regra da cadeia, $X^\mu_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \Big|_p \tilde{X}^\nu_\alpha$, temos que as funções de transição $t_{ij}^{I'}(p)$ são as seguintes

$$t_{ij}^{I'}(p) = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \Big|_p \right) \in \text{GL}_m(\mathbb{R}).$$

Assim, construímos um fibrado principal LM com grupo estrutural $\text{GL}_m(\mathbb{R})$ e variedade de base M .

Para o próximo exemplo, precisamos de um resultado sobre espaços homogêneos cuja demonstração pode ser encontrada em [34] pg. 120

Teorema 1.2.2 *Sejam H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G , $G/H = \{gH : g \in G\}$ o conjunto das classes laterais à esquerda de H e $\pi : G \longrightarrow G/H$ a projeção canônica $\pi(g) = gH$. Então G/H admite uma única estrutura de variedade diferenciável tal que:*

- a) π é diferenciável;
- b) *Existem seções locais diferenciáveis de G/H em G ; i.e., se $gH \in G/H$, existe uma vizinhança W de gH e uma aplicação $\sigma : W \longrightarrow G$ tal que $\pi \circ \sigma = I_W$.*

Exemplo 1.2.4 *Sejam H e G como no teorema acima. Mostraremos que G é um fibrado principal com fibra H e espaço de base G/H . Defina a ação pela direita de H em G por $g \longmapsto ga$, $g \in G, a \in H$. Temos claramente que $\pi(g) = \pi(ga)$. Para definir trivializações locais, tome uma seção local s sobre U_i dada pelo item b) do teorema acima. Definimos $\phi_i : U_i \times H \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$*

$$\phi_i(gH, h) = s(gH)h \quad \text{onde } gH \in U_i \subseteq G/H \text{ e } h \in H$$

observando que $s(gH) \in \pi^{-1}(gH)$, temos que $s(gH) = ga$, para algum $a \in H$. Segue-se que $s(gH)^{-1}g = a^{-1}g^{-1}g = a^{-1} \in H$ portanto ϕ_i tem inversa diferenciável

$$\phi^{-1}(g) = (gH, s(gH)^{-1}g).$$

Portanto $\pi : G \longrightarrow G/H$ é um fibrado principal. O Exemplo 1.1.1 nos fornece alguns fibrados principais sobre esferas

$$\text{O}(n)/\text{O}(n-1) = \text{SO}(n)/\text{SO}(n-1) = S^{n-1}$$

$$\text{U}(n)/\text{U}(n-1) = \text{SU}(n)/\text{SU}(n-1) = S^{2n-1}$$

$$\text{Sp}(n)/\text{Sp}(n-1) = S^{4n-1}.$$

Fibrado vetorial associado a um fibrado principal

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$, pelo teorema 1.2.1 é trivial ver que existe um fibrado principal com grupo estrutural $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$) e as mesmas funções de transição do fibrado vetorial dado.

Abaixo veremos como associar um fibrado vetorial a um fibrado principal dado a partir de uma representação de seu grupo estrutural.

Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ uma representação de G em um espaço vetorial V . Consideremos a ação à direita de G sobre o produto $P \times V$ dada por,

$$(x, v)g = (xg, \rho(g)^{-1}v),$$

onde $(x, v) \in P \times V$ e $g \in G$. Seja $E = P \times V/G$ o espaço quociente pela ação de G .

Dado $[p, f] \in E$, definimos $\pi_E : E \longrightarrow M$ por $\pi_E([p, f]) = \pi(p)$ onde π é a projeção de $P(M, G)$. Como a ação pela direita de G no fibrado principal preserva as fibras, segue-se que π_E está bem definida.

Seja $\psi : U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ uma trivialização local do fibrado principal $P(M, G)$. Considere a seção $\sigma(x) = \psi(x, e)$ associada a essa trivialização. Definimos $\phi : U \times V \longrightarrow \pi_E^{-1}(U)$ por $\phi(x, v) = [\sigma(x), v]$. ϕ é um homeomorfismo, lembrando que E está munido da topologia quociente. Podemos introduzir uma estrutura natural de variedade diferenciável em E de modo que as aplicações ϕ sejam difeomorfismos. Com isso, a projeção $\pi_E : E \longrightarrow M$ é diferenciável.

Para verificarmos que $\pi_E : E \longrightarrow M$ é de fato um fibrado vetorial, precisamos introduzir uma estrutura de espaço vetorial na fibra $\pi_E^{-1}(x)$ e mostrar que as trivializações locais são isomorfismos lineares em cada ponto. Observando que $\pi_E^{-1}(x) = \{[p, v] : v \in V\}$, definimos $[p, v] + [p, u] = [p, v + u]$ e $\alpha \cdot [p, v] = [p, \alpha v]$, onde $u, v \in V, p \in \pi^{-1}(x)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Verifica-se facilmente que tais operações estão bem definidas. Tomando a trivialização local $\phi(x, v) = [\sigma(x), v]$, vemos que, fixado x , ela nos dá um isomorfismo de espaço vetorial entre V e $\pi_E^{-1}(x)$. Concluimos que $\pi_E : E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial com fibra típica V tendo a representação $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ como grupo estrutural. Tal fibrado será chamado de **fibrado vetorial associado** ao fibrado principal $P(M, G)$. O fibrado vetorial associado também pode ser denotado por $P \times_G V$.

Fibrações de Hopf

Daremos agora dois exemplos de fibrados principais onde o espaço total, o grupo estrutural e a variedade de base são esferas. Tais fibrados são

chamados de *fibrações de esferas por esferas* [29]. Essas fibrações serão utilizadas no último capítulo para apresentarmos os potenciais de gauge que descrevem monopolos (primeira fibração de Hopf) e instantons (segunda fibração de Hopf). Veremos então como a estrutura de tais fibrações pode ser dada pelo teorema de inversão para espinores de Pauli e de Dirac, o qual permite reobter, a menos de uma fase, o espinor a partir de seus covariantes bilineares ([16] cap. 11).

Considere o conjunto $\mathbb{C}^2 - \{0\} = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : (z_0, z_1) \neq (0, 0)\}$, definimos uma relação de equivalência dada por

$$(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1) \Leftrightarrow (z_0, z_1) = \lambda(w_0, w_1), \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ não nulo.}$$

A reta projetiva complexa $\mathbb{CP}^1$ é definida como o quociente $(\mathbb{C}^2 - \{0\}) / \sim$.

Consideremos o plano complexo compactificado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o qual pode ser identificado à esfera S^2 através da projeção estereográfica. Observamos que $\mathbb{CP}^1$ é difeomorfo à esfera S^2 . De fato, basta tomar a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow S^2 \\ [(z_0, z_1)] &\longmapsto z_1/z_0 \end{aligned}$$

onde $z_1/z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$ e $[(0, z)] \mapsto z/0 = \infty$. Esta aplicação está bem definida e é um difeomorfismo.

Assim, podemos definir a **fibração de Hopf** $S^3 \longrightarrow S^2$ com fibra típica S^1 . Observando que $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$, definimos

$$\begin{aligned} S^1 &\text{-----} S^3 \longrightarrow S^2 \\ (z_0, z_1) &\longmapsto [(z_0, z_1)]. \end{aligned}$$

Note-se que, se (z_0, z_1) e (z'_0, z'_1) são levados no mesmo ponto, então $(z_0, z_1) = \lambda(z'_0, z'_1)$, onde $|\lambda| = 1$. Portanto, a imagem inversa de um ponto em S^2 é obtida a partir de qualquer ponto na imagem inversa multiplicando-o por $e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), ou seja a fibra típica deste fibrado é de fato S^1 .

Fazendo $(z_0, z_1) = (w_1 + iw_2, w_3 + iw_4)$ e usando a projeção estereográfica a partir do pólo Sul $(0, 0, -1)$, temos que

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{z_1 \overline{z_0}}{|z_0|^2} = \frac{1}{1 + x_3} (x_1 + ix_2)$$

onde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Segue-se que $1 + x_3 = a|z_0|^2$ e $x_1 + ix_2 = az_1 \overline{z_0}$, $a \in \mathbb{R}$. Para determinar a , observamos que $x_3 = a|z_0|^2 - 1 = (a - 1)|z_0|^2 - |z_1|^2$; por outro lado, a fibração de Hopf leva $(1, 0) \mapsto [(1, 0)] \in S^2$, mas $[(1, 0)] = (0, 0, 1)$, segue-se que: $1 = a - 1 \implies a = 2$.

Concluimos que, em termos das coordenadas $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in S^3$ e $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, a fibração de Hopf $S^3 \longrightarrow S^2$ é dada por

$$\begin{cases} x_1 = 2(w_1 w_3 + w_2 w_4), \\ x_2 = 2(w_1 w_4 - w_2 w_3), \\ x_3 = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - w_4^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

A próxima fibração de Hopf é $S^7 \longrightarrow S^4$ com fibra típica $S^3 \simeq \text{SU}(2)$. Nesse caso, consideramos a reta projetiva quaterniônica $\mathbb{H}P^1$ definida como o quociente $(\mathbb{H}^2 - \{0\})/\sim$

$$(q_1, q_2) \sim (p_1, p_2) \Leftrightarrow (q_1, q_2) = \lambda(p_1, p_2), \quad \lambda \in \mathbb{H} \text{ não nulo.}$$

O espaço quaterniônico compactificado $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ pode ser identificado à esfera S^4 através da projeção estereográfica. Observamos que $\mathbb{H}P^1$ é difeomorfo à esfera S^4 . De fato, basta tomar a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{H}P^1 &\longrightarrow S^4 \\ [(q_1, q_2)] &\longmapsto q_2/q_1 \end{aligned}$$

onde $q_2/q_1 \in \mathbb{H} \cup \{\infty\} \simeq S^4$ e $[(0, q)] \mapsto q/0 = \infty$. Esta aplicação está bem definida e é um difeomorfismo.

Assim, podemos definir a **fibração de Hopf** $S^7 \longrightarrow S^4$ com fibra típica S^3 . Observando que $S^7 = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2 : |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1\}$, definimos

$$\begin{aligned} S^3 \text{ ----- } S^7 &\longrightarrow S^4 \\ (q_1, q_2) &\longmapsto [(q_1, q_2)]. \end{aligned}$$

Lembrando que o grupo $\text{SU}(2) \simeq S^3$ é idêntico ao grupo dos quatérnios unitários (ver página 12), temos que, analogamente à fibração de Hopf sobre S^2 , a fibra típica da fibração de Hopf $S^7 \longrightarrow S^4$ é S^3 . Para $(q_1, q_2) \in S^7$ usando a projeção estereográfica, temos que

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{q_2 \bar{q}_1}{|q_1|^2} = \frac{1}{1 + x_5} (x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k)$$

onde $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$. Analogamente à expressão (1.7), temos que a fibração de Hopf $S^7 \longrightarrow S^4$ é dada em termos de coordenadas cartesianas por

$$\begin{cases} x_1 = 2\text{Re}(q_2 \bar{q}_1), \\ x_2 = 2\text{Re}(q_2 \bar{q}_1 i), \\ x_3 = 2\text{Re}(q_2 \bar{q}_1 j), \\ x_4 = 2\text{Re}(q_2 \bar{q}_1 k), \\ x_5 = |q_1|^2 - |q_2|^2. \end{cases} \quad (1.8)$$

Capítulo 2

Conexões em Fibrados e Teorias de Gauge

Neste capítulo descreveremos como as conexões em fibrados principais constituem-se num objeto matemático adequado para uma descrição precisa das teorias de gauge. Este fato é surpreendente, pois a teoria de fibrados e as teorias de gauge foram desenvolvidas de maneira totalmente independente; esta última a partir dos trabalhos, em 1954, do físico chinês C. N. Yang que, no seus tempos de estudante, frequentou as aulas de geometria diferencial do professor S. S. Chern, um dos responsáveis pelo desenvolvimento da teoria de fibrados. Ironicamente, Yang só reconheceu a interligação entre as duas teorias cerca de vinte anos depois da publicação de seu primeiro trabalho com R. L. Mills¹.

2.1 Equações de Maxwell

A teoria de Yang-Mills é uma generalização, com grupo de simetria não-abeliano, do eletromagnetismo que, por sua vez, é uma teoria de gauge sobre o grupo abeliano $U(1)$. Assim sendo, iniciaremos com uma exposição sobre as equações de Maxwell escrevendo-as em termos de formas diferenciais.

Tomando um sistema de unidades em que a velocidade da luz $c = 1$, os campos magnético e elétrico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, x^1, x^2, x^3)$ e $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, x^1, x^2, x^3)$ podem ser expressos em termos de um potencial escalar ϕ e um potencial

¹A esse respeito, vale a pena ler a entrevista de Yang em *The Mathematical Intelligencer* Vol 15 No. 4, 1993.

vetor $\mathbf{A}$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi.$$

Considere as conhecidas equações de Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \mathbf{j}. \quad (2.4)$$

Estas últimas equações são invariantes por transformações de gauge dos potenciais

$$\begin{cases} \phi \longmapsto \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A} \longmapsto \mathbf{A} + \nabla \Lambda \end{cases}.$$

A seguir mostraremos de forma resumida como, usando o formalismo das **formas diferenciais**, as equações de Maxwell podem ser escritas como duas equações envolvendo uma 2-forma F chamada *2-forma de Faraday* e uma 1-forma J chamada *corrente*; veremos como a invariância de gauge aparece naturalmente dentro desse formalismo.

Considere o espaço-tempo de Minkowski; $\mathbb{R}^{3,1} = (\mathbb{R}^4, \eta)$, onde η é a métrica cuja matriz em relação à base canônica é $\text{diag}[-1, 1, 1, 1]$; com as coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) ou (t, x, y, z) . Os campos elétrico e magnético são representados como 1-formas e 2-formas em $\mathbb{R}^{3,1}$

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

Podemos combinar os dois campos num campo eletromagnético unificado F , uma 2-forma em $\mathbb{R}^{3,1}$

$$F = B + E \wedge dt.$$

Explicitando as componentes do campo eletromagnético em termos das coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^{3,1}$

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

temos

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Primeiro par de equações

Denotando por d_S a diferencial exterior em relação às coordenadas espaciais de $\mathbb{R}^{3,1}$, temos que

$$\begin{aligned} dF &= dB + dE \wedge dt \\ &= d_S B + dt \wedge \partial_t B + d_S E \wedge dt \\ &= d_S B + (\partial_t B + d_S E) \wedge dt \end{aligned}$$

segue-se que

$$dF = 0 \iff \begin{cases} d_S B = 0 \\ \partial_t B + d_S E = 0 \end{cases}$$

mas $d_S B = (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz$ e $d_S E = (\partial_y E_z - \partial_z E_y) dy \wedge dz + (\partial_z E_x - \partial_x E_z) dz \wedge dx + (\partial_x E_y - \partial_y E_x) dx \wedge dy$. Portanto, $dF = 0$ é equivalente ao primeiro par das equações de Maxwell.

Operador estrela de Hodge

Podemos combinar a corrente $\mathbf{j}$ e a densidade de carga ρ num único campo $\mathbf{J} = \rho \partial_t + j_x \partial_x + j_y \partial_y + j_z \partial_z$, o qual corresponde, no espaço-tempo de Minkowski, à seguinte 1-forma

$$J(v) = \eta(\mathbf{J}, v) \quad J = -\rho dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz$$

Para escrever o segundo par de equações de Maxwell usando formas diferenciais, precisamos introduzir o **operador estrela de Hodge**.

Seja (M, g) uma n -variedade orientada semi-riemanniana com métrica g . Sobre cada vizinhança coordenada (U, x^μ) de M , definimos uma forma

$$\text{vol} = \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

chamada forma volume. Pode-se mostrar² que estas formas coincidem nas interseções das vizinhanças coordenadas, portanto existe uma **forma volume** vol bem definida globalmente em M .

A métrica g nos permite associar a cada campo de vetores v em M uma 1-forma $f_v(\cdot) = g(v, \cdot)$, ou seja, temos uma correspondência biunívoca entre 1-formas e campos de vetores dada pela métrica. Assim, dadas duas 1-formas ω e μ , definimos seu produto interno da seguinte maneira: sejam v e w os campos de vetores associados a ω e μ , então

$$\langle \omega, \mu \rangle \stackrel{\text{def}}{=} g(v, w).$$

A partir daí podemos definir naturalmente o produto interno de p -formas:

$$\langle e^1 \wedge \cdots \wedge e^p, f^1 \wedge \cdots \wedge f^p \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det[\langle e^i, f^j \rangle]$$

onde cada entrada da matriz no lado direito da definição é um produto interno de 1-formas.

Agora estamos em condições de fazer a seguinte definição:

Definição 2.1.1 (Operador estrela de Hodge) *Seja M uma variedade n dimensional orientada semi-riemanniana. Definimos o operador estrela de Hodge*

$$\star : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$$

como sendo a única aplicação linear de p -formas em $(n-p)$ -formas tal que para cada $\omega, \mu \in \Omega^p(M)$,

$$\omega \wedge \star \mu = \langle \omega, \mu \rangle \text{vol}$$

*$\star \mu$ é frequentemente chamado **dual** de μ .*

Suponhamos que $e^1, \dots, e^n$ formam uma base ortonormal positivamente orientada de 1-formas sobre alguma vizinhança coordenada de M , então

$$\langle e^\mu, e^\nu \rangle = 0 \quad \text{se } \mu \neq \nu, \text{ e } \quad \langle e^\mu, e^\mu \rangle = \epsilon(\mu)$$

²Ver Baez [2] página 82.

onde $\epsilon(\mu) = \pm 1$. Vejamos como calcular o dual de Hodge de uma p -forma: para cada p inteiros distintos $1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n$

$$\star(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}) = \pm e^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge e^{i_n}$$

onde: $\{i_{p+1}, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_p\}$. O sinal $\pm$ é dado por

$$\text{sign}(i_1, \dots, i_n) \epsilon(i_1) \dots \epsilon(i_p).$$

onde $\text{sign}(i_1, \dots, i_n)$ é a assinatura da permutação $(1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots, i_n)$.

Segundo par de equações

Pode-se mostrar com alguns cálculos simples que o segundo par das equações de Maxwell é equivalente à seguinte equação de formas diferenciais

$$\star d \star F = J$$

Concluimos que as equações de Maxwell podem ser dadas pelas seguintes equações em formas diferenciais

$$\begin{cases} dF = 0 \\ \star d \star F = J. \end{cases} \quad (2.5)$$

Transformações de gauge no eletromagnetismo

As equações de Maxwell na forma diferencial, além de se mostrarem como um caso particular das equações de Yang-Mills (conforme veremos a seguir), nos permitem provar de modo natural a invariância por transformações de gauge.

De fato, combinamos os potenciais escalar ϕ e vetor $\mathbf{A}$, num único campo vetorial $\phi \partial_t + a_x \partial_x + a_y \partial_y + a_z \partial_z$ ao qual corresponde a 1-forma

$$\Gamma = -\phi dt + a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

verifica-se facilmente que:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= d(-\phi dt + a_x dx + a_y dy + a_z dz) \\ &= -d_S \phi \wedge dt - \partial_t A \wedge dt + d_S A \\ &= -(d_S \phi + \partial_t A) \wedge dt + d_S A \end{aligned}$$

mas as igualdades $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$ expressam-se em formas diferenciais como $E = -(d_S \phi + \partial_t A)$ e $B = d_S A$. Segue-se que

$$d\Gamma = B + E \wedge dt = F.$$

Vemos assim que os potenciais escalar e vetor ficam combinados numa 1-forma Γ , a qual satisfaz $F = d\Gamma$. Esta 1-forma será frequentemente denotada por A e chamada de *potencial vetor*, desde que não haja risco de confusão com o potencial vetor definido anteriormente.

Uma transformação de gauge dos potenciais

$$\begin{cases} \phi \longmapsto \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A} \longmapsto \mathbf{A} + \nabla \Lambda \end{cases}$$

em termos de formas diferenciais é dada simplesmente por

$$\Gamma \longmapsto \Gamma + d\Lambda.$$

Sabemos que, para qualquer forma diferencial ω , $d(d\omega) = 0$; costumamos escrever esta identidade na forma $d^2 = 0$. A invariância de gauge segue-se naturalmente deste fato, pois

$$F_1 = d(\Gamma + d\Lambda) = d\Gamma + d(d\Lambda) = d\Gamma = F$$

ou seja, o campo eletromagnético e portanto as equações de Maxwell, ficam invariantes por transformações de gauge.

2.2 Conexões em fibrados principais

Conexão é o conceito matemático fundamental para se estudar teorias de gauge. Do ponto de vista do físico, a conexão é o potencial que está causando uma distorção no espaço de estados (fibrado) que descreve os graus de liberdade internos do objeto físico estudado. Do ponto de vista geométrico, supondo que estamos percorrendo um caminho no espaço de base do fibrado, a conexão nos fornece uma maneira de identificar as diferentes fibras percorridas, tal identificação é chamada de transporte paralelo.

Primeiramente precisamos definir o que seja uma **forma diferencial a valores vetoriais**.

Definição 2.2.1 *Seja V um espaço vetorial (frequentemente V será a álgebra de Lie associada ao grupo estrutural de algum fibrado principal) com uma base $\{v_1, \dots, v_m\}$. Se $\alpha^1, \dots, \alpha^m \in \Lambda^k(M)$ são formas diferenciais ordinárias, então a aplicação $x \longmapsto \alpha^1(x)v_1 + \dots + \alpha^m(x)v_m \in \Lambda^k(T_x M, V)$ é chamada uma **forma a valores em V** . O espaço das k -formas a valores em V é denotado por $\Lambda^k(M, V)$.*

Podemos definir a diferencial exterior de tais formas; para $\alpha = \alpha^1 v_1 + \cdots + \alpha^m v_m \in \Lambda^k(M, V)$, temos: $d\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (d\alpha^1)v_1 + \cdots + (d\alpha^m)v_m \in \Lambda^{k+1}(M, V)$.

Conexões podem ser definidas, pelo menos, de três modos distintos que apresentaremos a seguir. As três definições dadas são equivalentes, a demonstração de sua equivalência pode ser encontrada em Bleecker [4] cap. 1. No que segue, vamos considerar um fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ com grupo G , $\dim M = n$.

Definição 2.2.2 (Conexão, primeira definição) *Uma conexão associa a cada $p \in P$ um subespaço $H_p \subseteq T_p P$ tal que, para $V_p = \{X \in T_p P : \pi_*(X) = 0\}$, temos $T_p P = H_p \oplus V_p$. A conexão deve satisfazer duas condições:*

1. H_p depende diferenciavelmente de p , no sentido de que existem n campos de vetores definidos numa vizinhança U de p que geram H_q para cada $q \in U$;
2. $R_{g*}(H_p) = H_{pg}$.

V_p é chamado **subespaço vertical** de $T_p P$ ao passo que H_p é o **subespaço horizontal** (dado pela conexão).

Esta primeira definição tem um significado geométrico importante. Como $V_p = \ker(\pi_*|_p)$, temos para cada $p \in P$ um isomorfismo $\pi_* : H_p \longrightarrow T_p M$ que varia diferenciavelmente com o ponto p . Assim, um campo vetorial X em M pode ser “levantado”, através dos isomorfismos, a um campo vetorial horizontal $\tilde{X}$ em P , onde $\tilde{X}_p \in H_p$. Logo, as curvas integrais do campo X podem ser levantadas a curvas integrais de $\tilde{X}$. Tal levantamento é único e, pelo item 2 da definição acima, $R_{g*}\tilde{X}_p = \tilde{X}_{pg}$. Portanto, se $\tilde{\gamma}$ é a curva integral de $\tilde{X}$ passando por $u \in \pi^{-1}(x)$, $R_g \circ \tilde{\gamma}$ é a curva integral passando por ug .

O levantamento horizontal de curvas define um “transporte paralelo” em P , isto é, uma maneira de identificar as fibras percorridas quando seguimos um caminho no espaço de base do fibrado. O transporte paralelo caracteriza a conexão do ponto de vista geométrico. Como de praxe, a descrição precisa das idéias aqui esboçadas pode ser encontrada no livro do Spivak [28].

A seguir veremos duas definições de conexão, ambas dadas em termos de formas diferenciais a valores em $\mathfrak{g}$, que são úteis do ponto de vista da realização de cálculos que seriam impossíveis se utilizássemos apenas a primeira definição.

Definição 2.2.3 (Conexão, segunda definição) *Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G . Uma conexão é uma 1-forma ω a valores em $\mathfrak{g}$ definida em P satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *seja $A \in \mathfrak{g}$ e $A^\sharp$ o campo de vetores em P definido por*

$$A^\sharp_p = \left. \frac{d}{dt}(p \exp(tA)) \right|_{t=0}$$

*então $\omega(A^\sharp_p) = A$. $A^\sharp$ é chamado **campo fundamental**.*

2. *para $g \in G$, $\omega_{pg}(R_g X) = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega_p(X)$ para todo $g \in G$, $p \in P$ e $X \in T_p P$. Mais simplesmente, podemos escrever³ $R_g^* \omega = \text{Ad}_{g^{-1}} \omega$.*

ω é chamada **1-forma de conexão**.

Vemos assim a conexão como uma forma definida globalmente no fibrado P . Esta definição será útil do ponto de vista teórico, pois o fato de estar definida globalmente facilitará a definição de conceitos importantes como a curvatura e a demonstração de propriedades como a equação estrutural. No entanto, precisamos dar uma definição que esteja mais de acordo com o conceito físico de **campo de gauge**, esta é a razão da próxima definição.

Definição 2.2.4 (Conexão, terceira definição) *Uma conexão associa a cada trivialização local $T_u : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ uma 1-forma ω_u a valores em $\mathfrak{g}$ definida em U . Se T_v é outra trivialização local e $g_{uv} : U \cap V \rightarrow G$ é a função de transição de T_u para T_v , então as 1-formas devem estar relacionadas por*

$$\omega_v(Y_x) = L_{g_{uv}(x)}^{-1*}(g_{uv*}(Y_x)) + \text{Ad}_{g_{uv}(x)^{-1}}(\omega_u(Y_x))$$

para todo $Y_x \in T_x M$ e $x \in U \cap V$.

Uma trivialização local T_u é chamada **escolha de gauge** e as 1-formas ω_u são chamadas **potenciais de gauge**. A expressão dada na definição acima nos mostra como o potencial de gauge se transforma mediante uma **transformação de gauge** dada por $x \mapsto g_{uv}(x)$.

³ $T^* \omega$ denota o **pull-back** da k -forma ω pela transformação T , definido por $T^* \omega(X_1, \dots, X_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(T_*(X_1), \dots, T_*(X_k))$.

No caso em que G é um grupo de matrizes, tome uma curva γ tal que $\gamma'(0) = Y_x$, assim temos

$$\begin{aligned} L_{g_{uv}(x)*}^{-1}(g_{uv*}(Y_x)) &= L_{g_{uv}(x)^{-1}*} \left(\frac{d}{dt}(g_{uv}(\gamma(t))) \right) \\ &= \frac{d}{dt} g_{uv}(x)^{-1} g_{uv}(\gamma(t)) \\ &= g_{uv}(x)^{-1} dg_{uv}(Y_x) \end{aligned}$$

onde dg_{uv} é o diferencial da aplicação g_{uv} que assume valores no espaço das matrizes, o qual contém G .

Na seção 1.1.3 página 14 vimos a expressão para a representação adjunta no caso de um grupo de matrizes, logo: $\text{Ad}_{g_{uv}(x)^{-1}} \omega_u(Y_x) = g_{uv}^{-1}(x) \omega_u(Y_x) g_{uv}(x)$. Segue-se que, no caso em que G é um grupo de matrizes, a transformação de gauge de ω_u para ω_v pode ser expressa como:

$$\omega_v = g_{uv}^{-1} dg_{uv} + g_{uv}^{-1} \omega_u g_{uv}. \quad (2.6)$$

2.2.1 Derivada exterior covariante e Curvatura

A curvatura da conexão, que será definida a seguir, pode ser pensada como a distorção produzida no fibrado pelo campo externo. Do ponto de vista físico, ela pode ser identificada com a intensidade do campo de gauge.

Definição 2.2.5 (Colchete de formas a valores em $\mathfrak{g}$) *Considere uma variedade N e uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sejam $\phi \in \Lambda^i(N, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Lambda^j(N, \mathfrak{g})$, definimos $[\phi, \psi] \in \Lambda^{i+j}(N, \mathfrak{g})$ pondo*

$$\begin{aligned} [\phi, \psi](X_1, \dots, X_{i+j}) \\ = \frac{1}{i!j!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} [\phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}), \psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)})] \end{aligned}$$

onde σ percorre todas as permutações de $\{1, 2, \dots, i+j\}$; $(-1)^{\sigma}$ é a paridade da permutação σ ; $[\ , \]$ no lado direito da expressão é o colchete de Lie da álgebra $\mathfrak{g}$ e $X_1, \dots, X_{i+j}$ são campos de vetores arbitrários em N .

Seja $\{E_1, \dots, E_j\}$ uma base para $\mathfrak{g}$ com constantes de estrutura $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ dadas por $[E_{\alpha}, E_{\beta}] = \sum c_{\alpha\beta}^{\gamma} E_{\gamma}$, para $\phi \in \Lambda^i(N, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Lambda^j(N, \mathfrak{g})$ dadas por $\phi = \sum \phi^{\alpha} \otimes E_{\alpha}$ e $\psi = \sum \psi^{\beta} \otimes E_{\beta}$, é fácil verificar que

$$[\phi, \psi] = \sum_{\alpha, \beta} (\phi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta}) \otimes [E_{\alpha}, E_{\beta}] = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} c_{\alpha\beta}^{\gamma} (\phi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta}) \otimes E_{\gamma}.$$

segue-se imediatamente que

$$d[\phi, \psi] = [d\phi, \psi] + (-1)^i [\phi, d\psi].$$

Dada uma 1-forma de conexão ω num fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$ com grupo G , podemos escrever cada $X \in T_p P$ como $X = X^V + X^H$ onde X^V é vertical (i.e. $\pi_*(X^V) = 0$) e X^H é horizontal (i.e. $\omega(X^H) = 0$).

Definição 2.2.6 (derivada exterior covariante) *Seja $\phi \in \Lambda^k(P, \mathfrak{g})$, definimos a derivada exterior covariante de ϕ , denotada por $D^\omega \phi$ da seguinte maneira:*

$$D^\omega \phi(X_1, \dots, X_{k+1}) = d\phi(X_1^H, \dots, X_{k+1}^H).$$

Quando a conexão ω estiver clara pelo contexto, escreveremos $D\phi$.

Definição 2.2.7 (curvatura) *A curvatura da conexão $\omega \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ é definida por*

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} D\omega \in \Lambda^2(P, \mathfrak{g}).$$

Quando ω é considerada um potencial, Ω é chamada intensidade do campo associado a ω .

A equação estrutural

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

nos permitirá escrever uma expressão para a intensidade do campo que é mais familiar para os físicos. Para demonstrar a equação estrutural, precisaremos de alguns resultados preliminares

Lema 2.2.1 *Dado um campo vetorial X em M , existe um único campo vetorial $\tilde{X}$ em P tal que $\omega(\tilde{X}) = 0$ e $\pi_*(\tilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$ para todo $p \in P$. O campo $\tilde{X}$ é chamado **levantamento horizontal** de X .*

Demonstração: Grosseiramente, podemos definir $\tilde{X}_p$ para cada $p \in P$ através do isomorfismo $\pi_* : H_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$ que está variando diferenciavelmente com o ponto p , pois a conexão é diferenciável. Uma demonstração rigorosa deste fato pode ser encontrada em Spivak [28] vol. 2 cap. 8. ■

Observamos que $\pi_*(R_{g*}\tilde{X}_p) = (\pi \circ R_g)_*(\tilde{X}_p) = \pi_*(\tilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$, portanto temos por unicidade que $R_{g*}\tilde{X}_p = \tilde{X}_{pg}$, i.e., $R_{g*}\tilde{X} = \tilde{X}$.

Lema 2.2.2 *Se $A, B \in \mathfrak{g}$, então $[A, B]^\sharp = [A^\sharp, B^\sharp]$, considerando o colchete de campos vetoriais em P .*

Demonstração: Aqui usaremos o fato de que o colchete $[X, Y]$ é igual à derivada de Lie do campo Y pelo fluxo de X , i.e., $[X, Y]_p = \frac{d}{dt} \varphi_{t*}^{-1}(Y_{\varphi_t(p)})$, onde φ_t é o fluxo de X .

Seja $\phi_t : P \rightarrow P$ dado por $\phi_t(p) = p \exp(tA)$, então ϕ_t é o fluxo gerado pelo campo $A^\sharp$. Assim temos que

$$\begin{aligned} [A^\sharp, B^\sharp]_p &= \frac{d}{dt} \phi_{t*}^{-1}(B^\sharp_{\phi_t(p)}) = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \phi_t(p) \exp(sB) \exp(tA)^{-1} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} p \exp(tA) \exp(sB) \exp(tA)^{-1} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} p \exp(s \text{Ad}_{\exp tA} B) \\ &= \frac{d}{ds} p \exp\left(s \frac{d}{dt} [\text{Ad}_{\exp tA} B]\right) = \frac{d}{ds} p \exp(s[A, B]) = [A, B]^\sharp_p. \end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que, para $A, B \in \mathfrak{g}$, $[A, B] = \frac{d}{dt} (\text{Ad}_{\exp tA} B)$ ver Bleeker [4] cap. 0. ■

Lema 2.2.3 *Se $A \in \mathfrak{g}$ e X é um campo vetorial em M , então $[A^\sharp, \tilde{X}] = 0$, onde $\tilde{X}$ é o levantamento horizontal de X .*

Demonstração: Definindo ϕ_t como no lema anterior temos, pelo comentário após o lema 2.2.1, $\phi_{t*}^{-1}(\tilde{X}) = \tilde{X}$. Então

$$[A^\sharp, \tilde{X}] = \frac{d}{dt} \phi_{t*}^{-1}(\tilde{X}) = 0. \quad \blacksquare$$

Agora estamos em condições de demonstrar o seguinte

Teorema 2.2.1 (Equação estrutural) *A curvatura é uma 2-forma dada por $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$.*

Demonstração: $\frac{1}{2}[\omega, \omega](Y, Z) = [\omega(Y), \omega(Z)]$. Assim, basta provar a equação

$$d\omega(Y^H, Z^H) = d\omega(Y, Z) + [\omega(Y), \omega(Z)]$$

Por linearidade, é suficiente considerar três casos:

Caso 1 (Y e Z são horizontais). Nesse caso, $\omega(Y) = \omega(Z) = 0$, $Y^H = Y$ e $Z^H = Z$.

Caso 2 (Y e Z são verticais). Tomamos $Y = A_p^\sharp$ e $Z = B_p^\sharp$ onde $A, B \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned} d\omega(Y, Z) &= A^\sharp[\omega(B^\sharp)] - B^\sharp[\omega(A^\sharp)] - \omega([A^\sharp, B^\sharp]) = -\omega([A^\sharp, B^\sharp]) = \\ &= -\omega([A, B]^\sharp) = -[A, B] = -[\omega(A^\sharp), \omega(B^\sharp)] = -[\omega(Y), \omega(Z)]. \end{aligned}$$
 onde usamos o fato de que $\omega(B^\sharp) = B = \text{constante}$. A equação é verificada nesse caso, pois ambos os lados se anulam.

Caso 3 (Y vertical e Z horizontal). Podemos supor que $Z_p = \tilde{X}_p$ onde $\tilde{X}$ é o levantamento horizontal de algum campo vetorial X em M , e $Y = A_p^\sharp$ para algum $A \in \mathfrak{g}$. $d\omega(Y, Z) = A^\sharp[\omega(\tilde{X}) - \tilde{X}[\omega(A^\sharp)]] - \omega([A^\sharp, \tilde{X}])$ pois, $\omega(\tilde{X}) = 0$, $\omega(A^\sharp) = A = \text{constante}$ e pelo lema anterior. A equação é verificada nesse caso, pois ambos os lados se anulam. ■

Como corolário da equação estrutural, obtemos a **identidade de Bianchi**

$$D\Omega = 0.$$

Mostraremos a identidade $d\Omega = [\Omega, \omega]$ (a identidade de Bianchi segue-se daí pois ω se anula sobre campos horizontais): $d\Omega = d(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = d^2\omega + \frac{1}{2}([d\omega, \omega] - [\omega, d\omega]) = [d\omega, \omega] = [d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \omega] = [\Omega, \omega]$. Aqui usamos o fato de que $[[\omega, \omega], \omega] = 0$, pela *identidade de Jacobi* para colchetes de Lie.

Agora vamos estudar a curvatura definida localmente no espaço de base através de uma trivialização local, ver como ela se comporta mediante uma transformação de gauge e analisar o caso em que G é um grupo de matrizes.

Teorema 2.2.2 Para todo $g \in G$, $R_g^*\Omega = \text{Ad}_{g^{-1}}\Omega$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} R_g^*\Omega &= R_g^*(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = d(R_g^*\omega) + \frac{1}{2}[R_g^*\omega, R_g^*\omega] \\ &= d(\text{Ad}_{g^{-1}}\omega) + \frac{1}{2}[\text{Ad}_{g^{-1}}\omega, \text{Ad}_{g^{-1}}\omega] = \text{Ad}_{g^{-1}}(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}}\Omega. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

O potencial de gauge ω_u está relacionado à 1-forma de conexão ω por $\omega_u = \sigma_u^*\omega \in \Lambda^1(U, \mathfrak{g})$, onde σ_u é a seção local $\sigma_u : U \rightarrow P$ associada à trivialização local T_u . A intensidade do campo associado a ω_u é $\Omega_u \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_u^*\Omega$. Observamos que $\Omega_u = \sigma_u^*\Omega = \sigma_u^*(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = d(\sigma_u^*\omega) + \frac{1}{2}[\sigma_u^*\omega, \sigma_u^*\omega] = d\omega_u + \frac{1}{2}[\omega_u, \omega_u]$. Ou seja, a intensidade do campo é escrita em termos do potencial de gauge da seguinte maneira

$$\Omega_u = d\omega_u + \frac{1}{2}[\omega_u, \omega_u].$$

Se N é uma variedade e G é um grupo de Lie de matrizes, então para $\varphi \in \Lambda^i(N, \mathfrak{g})$ e $\psi \in \Lambda^j(N, \mathfrak{g})$ pode-se verificar facilmente (ver [4]) que $[\varphi, \psi] = \varphi \wedge \psi - (-1)^{ij} \psi \wedge \varphi$, onde φ e ψ são consideradas matrizes de formas e $\varphi \wedge \psi$ é uma multiplicação matricial onde as entradas são multiplicadas através de $\wedge$. Segue-se que se G é um grupo de matrizes, então

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \quad \text{e} \quad \Omega_u = d\omega_u + \omega_u \wedge \omega_u \quad (2.7)$$

Teorema 2.2.3 (transformação de gauge dos campos locais) *Sejam T_u e T_v duas trivializações locais com função de transição $g_{uv} : U \cap V \rightarrow G$. Então, em $U \cap V$, $\Omega_v = \text{Ad}_{g_{uv}^{-1}} \Omega_u$. No caso de um grupo de matrizes, $\Omega_v = g_{uv}^{-1} \Omega_u g_{uv}$.*

Demonstração: ver [4] pg. 40. ■

Para concluir, observamos que tomando a intensidade do campo Ω_u , a **identidade de Bianchi** fica dada por $d\Omega_u = [\Omega_u, \omega_u]$. No caso de um grupo de matrizes, temos $d\Omega_u = \Omega_u \wedge \omega_u - \omega_u \wedge \Omega_u$.

2.3 Teorias de gauge

Aqui mostraremos como as equações de Maxwell são um caso particular de equações de campo formuladas em termos dos potenciais de gauge, mais especificamente, das equações de Yang-Mills. Para tanto, é interessante estabelecermos uma nova notação para os termos abordados na seção anterior.

Denotaremos por F a expressão local da curvatura Ω dada por uma trivialização local qualquer σ , ou seja, $F = \sigma^* \Omega$. O potencial associado será denotado por $A = \sigma^* \omega$. Como vimos anteriormente, o campo F é expresso em termos de A por

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A].$$

e a identidade de Bianchi se escreve como $dF = [F, A]$. Em termos de um sistema de coordenadas (U, x) de M , o potencial A e o campo F ficam dados por $A = A_\mu dx^\mu$ e $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$. Lembrando as propriedades do diferencial exterior: $d\eta(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta[X, Y]$, temos que

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= F(\partial_\mu, \partial_\nu) = dA(\partial_\mu, \partial_\nu) + [A_\mu, A_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \underbrace{A[\partial_\mu, \partial_\nu]}_{=0} + [A_\mu, A_\nu] \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \end{aligned}$$

No caso em que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de matrizes, a expressão acima fica dada em termos das entradas por⁴

$$F_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_{\nu}^j - \partial_\nu A_{\mu}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu}^k.$$

Vale a pena ressaltar que, pelo teorema 2.2.3, se em relação a cartas distintas U e V o campo é dado por F_u e F_v , então

$$F_v = g_{uv}^{-1} F_u g_{uv}.$$

Considere uma forma η a valores em $\mathfrak{g}$ definida localmente no espaço de base M , definimos a derivada exterior covariante associada ao potencial A pondo

$$D\eta = d\eta + [A, \eta].$$

Como $dF = [F, A]$, temos que $DF = dF + [A, F] = dF - [F, A]$, portanto

$$DF = 0 \quad (\text{identidade de Bianchi})$$

A identidade de Bianchi, obtida a partir de propriedades puramente geométricas das conexões em fibrados, generaliza a primeira das equações de Maxwell (2.5) vistas anteriormente. A segunda equação em (2.5) é generalizada pela equação de Yang-Mills $\star D\star F = J$; onde J é uma 1-forma a valores em $\mathfrak{g}$ chamada **corrente** e o operador $\star$ é definido de modo natural para formas a valores vetoriais. A equação de Yang-Mills descreve a dinâmica do campo, ou seja, é obtida a partir do princípio da ação estacionária aplicado a uma densidade lagrangeana adequada.

A seguir mostraremos como obter a equação de Yang-Mills para uma teoria de gauge cujo grupo estrutural G é um grupo de matrizes e o espaço de base é $M = \mathbb{R}^{3,1}$ (espaço de Minkowski).

Em analogia com o eletromagnetismo, a Lagrangeana de Yang-Mills é a 4-forma dada por

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{2} \text{tr}(F \wedge \star F).$$

escrevendo em coordenadas locais, temos $\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \text{vol.}$

⁴Durante um semestre em que estava lecionando Relatividade Geral, Yang percebeu que esta expressão é exatamente igual à expressão para o tensor de curvatura de Riemann em termos dos símbolos de Christoffel e a partir daí passou a investigar as relações entre Teorias de Gauge e Geometria.

Integrando sobre M , obtemos a **ação de Yang-Mills**

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(F \wedge \star F).$$

Vamos primeiramente assumir que essa integral converge, posteriormente mostraremos como aplicar o princípio da ação no caso em que tal integral não seja convergente (ver página 41). Vamos considerar uma variação do potencial dada por $A_s = A + s\delta A$, onde $\delta A \in \Lambda^1(M, \mathfrak{g})$ e s é um parâmetro real. Assim, a variação do campo (curvatura) fica dada por

$$\begin{aligned} \delta F &= \left. \frac{d}{ds} (dA_s + A_s \wedge A_s) \right|_{s=0} \\ &= d \left(\frac{d}{ds} A_s \right) + \left(\frac{d}{ds} A_s \right) \wedge A + A \wedge \left(\frac{d}{ds} A_s \right) \Big|_{s=0} \\ &= d\delta A + \delta A \wedge A + A \wedge \delta A \\ &= d\delta A + [A, \delta A] \\ &= D\delta A. \end{aligned}$$

ou seja, a variação do campo é igual à derivada exterior covariante da variação do potencial. Não é difícil verificar que $\text{tr}(\omega \wedge \mu) = (-1)^{pq} \text{tr}(\mu \wedge \omega)$. Como $[\omega, \mu] = \omega \wedge \mu - (-1)^{pq} \mu \wedge \omega$, segue-se que $\text{tr}([\omega, \mu]) = 0$. E daí concluímos que

$$\text{tr}(D\omega) = \text{tr}(d\omega + [A, \omega]) = d \text{tr}(\omega).$$

Se ω é uma p -forma e μ uma q -forma a valores em $\mathfrak{g}$ com $p+q=3$, então $0 = \int_M d \text{tr}(\omega \wedge \mu) = \int_M \text{tr}(D(\omega \wedge \mu))$. Segue-se daí que

$$\int_M \text{tr}(D\omega \wedge \mu) = (-1)^{p+1} \int_M \text{tr}(\omega \wedge D\mu).$$

Agora temos condições de encontrar a variação da ação de Yang-Mills

$$\begin{aligned} \delta S_{YM} &= \frac{1}{2} \delta \int_M \text{tr}(F \wedge \star F) = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(\delta F \wedge \star F + F \wedge \star \delta F) \\ &= \int_M \text{tr}(\delta F \wedge \star F) = \int_M \text{tr}(D\delta A \wedge \star F) \\ &= \int_M \text{tr}(\delta A \wedge D \star F) \end{aligned} \tag{2.8}$$

em (2.8) usamos o fato de que, para $\omega, \eta \in \Lambda^2(M, \mathfrak{g})$, $\text{tr}(\omega \wedge \star \eta) = \text{tr}(\eta \wedge \star \omega)$. De fato: por linearidade, podemos supor que $\omega = A \otimes \tilde{\omega}$ e $\eta = B \otimes \tilde{\eta}$;

onde $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\eta}$ são 2-formas ordinárias em M e $A, B \in \mathfrak{g}$; logo $\text{tr}(\omega \wedge \star \eta) = \text{tr}(AB \otimes \tilde{\omega} \wedge \star \tilde{\eta}) = \text{tr}(AB) \otimes \langle \tilde{\omega}, \tilde{\eta} \rangle \text{vol} = \text{tr}(BA) \otimes \langle \tilde{\eta}, \tilde{\omega} \rangle \text{vol} = \text{tr}(\eta \wedge \star \omega)$.

Pelo princípio da ação estacionária, $\delta S_{YM} = 0$ para qualquer variação δA do potencial, mas isto ocorre se, e somente se, a equação de Yang-Mills for verificada

$$D \star F = 0.$$

Se A_U é o potencial em relação a uma trivialização (ou gauge) local, e A_V em relação a outro gauge, vimos que a transformação de gauge do campo é dada por $F_V = g_{uv}^{-1} F_U g_{uv}$. O lagrangeano fica invariante por transformações de gauge:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM}(A_V) &= \frac{1}{2} \text{tr}(F_V \wedge \star F_V) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(g_{uv}^{-1} F_U g_{uv} \wedge g_{uv}^{-1} (\star F_U) g_{uv}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr}(F_U \wedge \star F_U) \\ &= \mathcal{L}_{YM}(A_U) \end{aligned}$$

A invariância das equações de Yang-Mills frente a transformações de gauge segue-se diretamente da invariância do seu lagrangeano.

Ainda resta uma observação sobre a convergência da integral S_{YM} (ação). Como estamos tomando um espaço de base $\mathbb{R}^{3,1}$ não compacto, a integral S_{YM} pode não convergir. Porém, podemos considerar variações δA de suporte compacto, i.e., nulas fora de algum conjunto compacto, de forma que a integral δS_{YM} (variação da ação) é convergente e concluir, pelo que vimos acima, que para variações δA com suporte compacto o princípio da ação $\delta S_{YM} = 0$ é equivalente à equação de Yang-Mills. Tomando uma **partição da unidade** sobre $\mathbb{R}^{3,1}$, concluímos que tal equivalência é válida para variações arbitrárias.

Exemplo 2.3.1 *O eletromagnetismo é uma teoria de gauge tendo $U(1)$ como grupo estrutural. Considere o fibrado trivial $\mathbb{R}^{3,1} \times U(1)$. Nesse caso, temos um potencial $A = A_\mu dx^\mu$ definido em todo o espaço de base $\mathbb{R}^{3,1}$, o qual é uma 1-forma a valores em $\mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$.*

Conforme vimos anteriormente, o potencial se transforma mediante uma transformação de gauge g da seguinte maneira

$$A'_\mu = g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu g^{-1}.$$

Como $U(1)$ é um grupo comutativo, temos que

$$A'_\mu = A_\mu + g\partial_\mu g^{-1}.$$

Fazendo $g = e^{-if}$, com f função real: $g\partial_\mu g^{-1} = e^{-if}i(\partial_\mu f)e^{if} = i\partial_\mu f$. Portanto $A'_\mu = A_\mu + i\partial_\mu f$, isto é

$$A' = A + idf$$

que é exatamente a transformação de gauge do potencial eletromagnético (a menos do fator i) vista anteriormente (ver página 31). Em $u(1)$ o comutador $[\cdot, \cdot]$ é identicamente nulo, segue-se que o campo (curvatura) é dado por $F = dA$ e a derivada exterior covariante se reduz a $D\eta = d\eta$, portanto as equações de Yang-Mills reduzem-se às equações de Maxwell.

No caso de uma teoria de gauge com grupo estrutural $SU(2)$, temos o potencial dado por

$$A = A_\mu^\alpha T_\alpha dx^\mu$$

onde $T_\alpha = -i\sigma_\alpha$, pois a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ é gerada pelas matrizes $-i\sigma_\alpha$, onde σ_α são as matrizes de Pauli. Pelas propriedades destas últimas, temos que

$$[T_\alpha, T_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma.$$

O campo em termos do potencial é dado por

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha \\ F_{\mu\nu}^\alpha &= \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma. \end{aligned}$$

Vemos assim que, contrariamente ao caso do eletromagnetismo onde a expressão para o campo em termos do potencial é linear, numa teoria de gauge com o grupo não comutativo $SU(2)$, aparece um termo quadrático no campo e as correspondentes identidade de Bianchi e equação de Yang-Mills são equações não-lineares nesse caso.

2.4 Conexões em fibrados vetoriais

As conexões em fibrados vetoriais generalizam a derivação de um campo vetorial segundo uma dada direção do espaço. Até aqui, as teorias de gauge foram apresentadas através do conceito de conexão em fibrados principais. A seguir veremos brevemente como o potencial de gauge pode ser abordado através das conexões em fibrados vetoriais. O conceito fundamental que relaciona as duas formulações é o Transporte Paralelo.

Definição 2.4.1 Dado um fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$, uma conexão de Koszul ∇ em E é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \text{vect}(M) \times \Gamma E &\longrightarrow \Gamma E \\ (X, \sigma) &\longmapsto \nabla_X \sigma \end{aligned}$$

que satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\nabla_{(X+Y)} \sigma = \nabla_X \sigma + \nabla_Y \sigma$
2. $\nabla_X (\sigma + \xi) = \nabla_X \sigma + \nabla_X \xi$
3. $\nabla_{fX} \sigma = f \nabla_X \sigma$
4. $\nabla_X f \sigma = X(f) \sigma + f \nabla_X \sigma$ “regra de Leibniz”

onde $f \in C^\infty(M)$ e $\text{vect}(M)$ é o espaço dos campos de vetores tangentes a M , i.e., $\text{vect}(M) = \Gamma(TM)$.

Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial de dimensão m sobre uma variedade n -dimensional M e $1 \leq q \leq n$. Considere o fibrado $\text{Hom}(\Lambda^q TM; E)$, cuja fibra $\text{Hom}(\Lambda^q TM; E)_r$ sobre $r \in M$ consiste do espaço das aplicações lineares de $\Lambda^q T_r M$ em E_r , i.e., aplicações q -lineares alternadas de $T_r M \times \cdots \times T_r M$ a valores em E_r . Assim podemos definir as formas a valores num fibrado E ou formas E -vetoriais.

Definição 2.4.2 (Formas E -vetoriais) Uma q -forma E -vetorial é uma seção do fibrado $\text{Hom}(\Lambda^q TM; E)$. O conjunto de q -formas E -vetoriais será denotado por $\Omega^q(M; E)$.

$$\Omega^q(M; E) = \Gamma(\text{Hom}(\Lambda^q TM; E)), \quad q = 1, 2, \dots, n; \quad \Omega^0(M; E) = \Gamma E$$

A ação de q -formas E -vetoriais sobre o produto “cunha” de q campos vetoriais em M será denotada da maneira usual

$$\mu \cdot X_1 \wedge \cdots \wedge X_q \in \Omega^0(M; E).$$

Considere uma carta (U, x) em M e um referencial $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ para o fibrado cotangente $(TU)^*$. Se $\{s_1, \dots, s_m\}$ é um referencial local para E sobre U , então μ tem expressão local

$$\mu|_U = \sum_{j=1}^m \sum_I s_j h_I^j (dx^{i(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{i(q)})$$

onde usamos o multi-índice $I = (1 \leq i(1) < \dots < i(q) \leq n)$ e h_I^j são funções diferenciáveis em U . Como

$$\sum_I h_I^j (dx^{i(1)} \wedge \dots \wedge dx^{i(q)}) \in \Omega^q(M)$$

é interessante escrever $\mu \in \Omega^q(M; E)$ da seguinte maneira

$$\mu|_U = \sum_{j=1}^m s_j \wedge \eta^j = \sum_{j=1}^m \eta^j \wedge s_j, \quad \eta^j \in \Omega^q(M).$$

Podemos definir o produto “cunha” entre uma q -forma E -vetorial $\mu \in \Omega^q(M; E)$ e uma p -forma diferencial ordinária $\omega \in \Omega^p M$. Primeiro definimos localmente:

$$\omega \wedge \mu|_U \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m (\omega \wedge \eta^j) \wedge s_j, \quad \mu|_U \wedge \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^m s_j \wedge (\eta^j \wedge \omega),$$

esta definição independe do referencial local para E , portanto pode ser estendida para todo o fibrado.

Definição 2.4.3 (derivada exterior covariante) *Uma derivada exterior covariante sobre um fibrado $\pi : E \rightarrow M$ é uma aplicação*

$$d^E : \Omega^p(M; E) \rightarrow \Omega^{p+1}(M; E), \quad p = 0, 1, \dots, n$$

linear sobre os escalares e que satisfaz à “regra de Leibniz”: Para toda forma E -vetorial μ e toda forma diferencial ω em M

$$d^E(\mu \wedge \omega) = d^E \mu \wedge \omega + (-1)^{\deg \mu} \mu \wedge d\omega$$

Teorema 2.4.1 (Conexão e Derivada Exterior Covariante)

Dada uma conexão de Koszul ∇ num fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$, existe uma única derivada exterior covariante d^E tal que:

$$d^E \sigma \cdot X = \nabla_X \sigma$$

para todo campo vetorial X e toda $\sigma \in \Gamma E = \Omega^0(M; E)$.

Vale a pena mencionar que para toda $\mu \in \Omega^1(M; E)$ e todo par X, Y de campos vetoriais,

$$\begin{aligned} d^E \mu \cdot X \wedge Y &= \nabla_X (\mu \cdot Y) - \nabla_Y (\mu \cdot X) - \mu \cdot [X, Y] \\ &= d^E(\mu \cdot Y) \cdot X - d^E(\mu \cdot X) \cdot Y - \mu \cdot [X, Y]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Seja $\{s_1, \dots, s_m\}$ um referencial local para o fibrado $\pi : E \longrightarrow M$. Como $d^E s_i \in \Omega^1(M; E)$ para cada i , então deve existir uma matriz $m \times m$ de 1-formas $\varpi_i^j \in \Omega^1 M$ tal que:

$$d^E s_i = \sum_{j=1}^m s_j \wedge \varpi_i^j \quad (2.10)$$

as 1-formas $\{\varpi_i^j\}$ são chamadas **formas de conexão** relativas ao referencial $\{s_1, \dots, s_m\}$.

Considere duas trivializações locais Φ_U e $\Phi_{U'}$ com $U \cap U' \neq \emptyset$ às quais estão associados os referenciais $\{s_1, \dots, s_m\}$ e $\{t_1, \dots, t_m\}$. Vamos denotar por $\{\hat{\omega}_j^i\}$ as formas de conexão relativas ao referencial $\{t_1, \dots, t_m\}$. Seja g_j^i o elemento (i, j) da matriz da função de transição $g_{UU'}$ em relação à uma base fixa da fibra típica V , temos facilmente $t_j = g_j^1 s_1 + \dots + g_j^m s_m$, segue-se daí a seguinte identidade matricial

$$\hat{\omega} = g^{-1} dg + g^{-1} \varpi g \quad (2.11)$$

a qual significa que $\sum_j g_j^i \hat{\omega}_k^j = dg_k^i + \sum_j \varpi_j^i g_k^j$. A expressão acima deve ser comparada com (2.6).

Símbolos de Christoffel

Considerando o fibrado tangente TM de alguma variedade M , definimos os símbolos de Christoffel através das 1-formas de conexão

$$\Gamma_{\mu i}^j = \varpi_i^j(\partial_\mu)$$

onde os vetores ∂_μ são dados por uma carta local x^μ . Note-se que

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_i = d^{TM} \partial_i \cdot \partial_\mu = \sum_j \partial_j \wedge \varpi_i^j \cdot \partial_\mu = \sum_j \Gamma_{\mu i}^j \partial_j.$$

Curvatura

Considerando a derivada exterior de formas diferenciais ordinárias d , sabemos que $dd\omega = 0$ para qualquer forma $\omega \in \Omega(M)$. No caso da derivada exterior covariante ocorre frequentemente que $d^E d^E \sigma \neq 0$, pois aqui não podemos usar a mudança na ordem da derivação, em outras palavras, a derivada covariante não comuta. Intuitivamente, a curvatura é uma grandeza que

mede o quanto $d^F d^F$ deixa de se anular, i.e., o quanto a derivada covariante deixa de comutar.

Considere um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ com uma conexão. Tomando $\sigma \in \Omega^0(M; E)$, temos que a aplicação $\sigma \mapsto d^F(d^F \sigma)$ é $C^\infty(M)$ -linear, de fato: para qualquer função diferenciável h , usando a regra de Leibniz

$$\begin{aligned} d^F(d^F(h\sigma)) &= d^F(hd^F\sigma + dh \wedge \sigma) \\ &= hd^F(d^F\sigma) + dh \wedge d^F\sigma - dh \wedge d^F\sigma + d(dh) \wedge \sigma \\ &= hd^F(d^F\sigma). \end{aligned}$$

Segue-se que $d^F(d^F\sigma)$ é uma 2-forma E -vetorial que varia linearmente em relação a σ , portanto existe uma 2-forma $\mathfrak{R} \in \Omega^2(M; \text{Hom}(E; E))$ chamada **curvatura da conexão** tal que

$$d^F(d^F\sigma) = \mathfrak{R} \wedge \sigma \quad \forall \sigma \in \Omega^0(M; E). \quad (2.12)$$

Tomando um referencial local $\{s_1, \dots, s_m\}$ para E , $\mathfrak{R}$ é expresso em relação a ele pela matriz $m \times m$ de 2-formas ordinárias $\{R_i^j\}$ chamada **formas de curvatura** definida por:

$$d^F(d^F s_i) = \sum_{j=1}^m R_i^j \wedge s_j.$$

Vejamos como relacionar as formas de curvatura com as formas de conexão $\{\varpi_i^j\}$ definidas em (2.10). A regra de Leibniz nos dá:

$$\begin{aligned} d^F(d^F s_i) &= d^F\left(\sum_j s_j \wedge \varpi_i^j\right) = \sum_j (d^F s_j \wedge \varpi_i^j + s_j \wedge d\varpi_i^j) \\ \sum_k R_i^k \wedge s_k &= \sum_{j,k} s_k \wedge \varpi_j^k \wedge \varpi_i^j + \sum_k s_k \wedge d\varpi_i^k \end{aligned}$$

portanto temos

$$R_i^j = \sum_k \varpi_k^j \wedge \varpi_i^k + d\varpi_i^j,$$

de maneira mais compacta, podemos escrever simplesmente

$$R = d\varpi + \varpi \wedge \varpi$$

onde R é a matriz $[R_i^j]$, ϖ a matriz $[\varpi_i^j]$ e o produto $\wedge$ denotado na expressão acima é um produto matricial. Esta última expressão deve ser comparada com (2.7) página 38.

Verifica-se facilmente, usando (2.9) e (2.12), que

$$\mathfrak{R} \wedge \sigma \cdot X \wedge Y = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X,Y]} \sigma.$$

Transformações de Gauge

Um fibrado cujo grupo estrutural é o grupo G será chamado de G -fibrado.

Definição 2.4.4 (G -conexão) *Uma conexão de Koszul ∇ num G -fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ é dita uma **G -conexão** se a matriz de conexão associada (2.10), quando vista como uma 1-forma em M a valores em $\mathbb{K}^{m \times m}$, assume valores em $L(G)$, a álgebra de Lie de G .*

Note-se que esta definição está bem colocada pois, por (2.11), se as formas de conexão em relação a um referencial assumem valores em $L(G)$, então o mesmo acontece em relação a qualquer outro referencial.

Considerando uma trivialização local Φ_α do fibrado numa vizinhança do ponto $r \in M$, podemos fazer G agir sobre a fibra E_r , a qual é isomorfa ao espaço V da seguinte forma:

$$g\Phi_\alpha^{-1}(r, v) = \Phi_\alpha^{-1}(r, gv)$$

mas esta ação depende da trivialização local; de fato, tomando outra trivialização Φ_β com funções de transição $g_{\beta\alpha}(r)$ temos

$$g\Phi_\beta^{-1}(r, w) = \Phi_\beta^{-1}(r, g_{\beta\alpha}(r)gg_{\alpha\beta}(r)w),$$

mas $g_{\beta\alpha}(r)gg_{\alpha\beta}(r)w \in G$, logo faz sentido dizer que uma transformação linear $T : E_r \longrightarrow E_r$ é dada pelo grupo G , ou “mora” em G , embora não de uma forma canônica.

Uma **Transformação de Gauge** é uma aplicação C^∞ que a cada ponto $r \in M$ da variedade de base associa uma transformação linear T_r na fibra E_r que “mora” em G . Mais precisamente, uma transformação de gauge $T \in \Gamma(\text{End}(E))$ é uma seção do fibrado dos endomorfismos tal que $T(r)$ mora em G para todo $r \in M$. O conjunto de todas as transformações de gauge de E formam um grupo denotado por $\mathcal{G}$.

Cada **transformação de gauge** $g \in \mathcal{G}$ induz uma transformação $\nabla \longmapsto \nabla^g$ para cada G -conexão ∇ , dada por

$$\nabla_X^g \sigma = g(\nabla_X(g^{-1}\sigma)).$$

Verificar que ∇^g satisfaz as propriedades de conexão é um cálculo rotineiro. Para verificar que ela de fato é uma G -conexão, i.e., que suas formas de conexão “moram” em $L(G)$, tomamos um referencial local $\{s_1, \dots, s_m\}$; sejam $\{(\omega^g)_i^j\}$ as formas da conexão ∇^g e $[g_{ij}]$ a matriz da transformação de gauge g em relação a esse referencial. Pode-se mostrar, com algumas contas, que

$\sum_j g_{kj} \omega_i^j = dg_{ki} + \sum_j (\omega^g)_j^k g_{ji}$, usando a notação de matrizes temos que $g\omega = dg + \omega^g g$, esta última expressão é equivalente a

$$\omega^g = g dg^{-1} + g \omega g^{-1}. \quad (2.13)$$

Esta é a conhecida condição de gauge para o potencial, segue-se daí que se ω “mora” em $L(G)$, o mesmo ocorre com ω^g . Concluimos então que ∇^g é uma G -conexão.

Sejam d^F e $d^{F,g}$ as derivadas exteriores covariantes associadas a ∇ e ∇^g ,

$$\begin{aligned} d^{F,g}(d^{F,g}\sigma) &= d^{F,g}(gd^F(g^{-1}\sigma)) = gd^F(d^F(g^{-1}\sigma)) \\ \implies \mathfrak{R}^{\nabla^g} \wedge \sigma &= g(\mathfrak{R}^{\nabla} \wedge g^{-1}\sigma) \end{aligned}$$

Esta última expressão nos diz como a curvatura muda por uma transformação de gauge. Em termos de matrizes temos $R^g = gRg^{-1}$, comparar com o teorema 2.2.3.

Portanto, vimos como apresentar os conceitos de conexão, curvatura e transformação de gauge no contexto dos fibrados vetoriais. As equações de Yang-Mills podem agora ser introduzidas de maneira inteiramente análoga àquela desenvolvida anteriormente para fibrados principais.

Capítulo 3

Álgebras de Clifford e Spinors

As álgebras de Clifford são construídas para facilitar o estudo das transformações ortogonais, permitindo-nos construir os grupos Pin e Spin (grupos de recobrimento do grupo ortogonal e subgrupos) e definir os **spinors**. Ou seja, as álgebras de Clifford se constituem numa ferramenta muito útil no tratamento de questões relacionadas à simetria. É natural, portanto, que tenham aplicações em teorias de gauge.

3.1 Conceitos Fundamentais

Seja V um espaço vetorial real munido de uma forma bilinear simétrica não-degenerada g . Tomando uma base $\{e_i\}$ para V , o **produto tensorial** $V \otimes V$ é um espaço vetorial tal que as expressões da forma $e_i \otimes e_j$ formam uma base e, para $u, v \in V$, temos $u \otimes v = u^i v^j e_i \otimes e_j$. Uma definição rigorosa do produto tensorial, no entanto, deve ser dada de maneira independente da base escolhida, para tal definição pode-se consultar [3] ou [12]. Podemos estender naturalmente o produto para r cópias do espaço V :

$$T_r(V) = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V = \otimes^r V.$$

Tomando a soma direta de todos os espaços $T_r(V)$ para todo $r \in \mathbb{N}$, onde $T_0(V) = \mathbb{R}$, obtemos uma álgebra associativa com unidade

$$T(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T_r(V)$$

denominada **álgebra tensorial**. Seja J o ideal de $T(V)$ gerado pelo conjunto $A = \{x \otimes x - g(x, x)|x \in V\}$, i.e., $J = T(V) \otimes A \otimes T(V)$. A **álgebra de Clifford** associada ao espaço V é denotada por $\mathcal{Cl}(V, g)$ e definida como o quociente

$$\mathcal{Cl}(V, g) = T(V)/J.$$

Dada uma base $\{e_i\}_{i=1}^n$ para o espaço real V com a métrica g , a álgebra de Clifford associada a V é a álgebra associativa gerada pelos vetores da base $\{e_i\}_{i=1}^n$ satisfazendo à seguinte regra de multiplicação:

$$e_i e_j + e_j e_i = 2g(e_i, e_j).$$

A definição dada pelo quociente, no entanto, é independente da base escolhida. Assim, é mais conveniente supormos que a base $\{e_i\}_{i=1}^n$ é ortonormal, nesse caso temos $e_i e_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ e $e_i e_j + e_j e_i = 0$, se $i \neq j$. Um produto de k vetores distintos $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ é chamado de k -vetor e denotado por $e_{i_1, \dots, i_k} = e_{i_1} \cdots e_{i_k}$. Qualquer elemento $A \in \mathcal{Cl}(V, g)$ pode ser escrito como combinação linear de k -vetores com $1 \leq k \leq n$. Denotando por $\Lambda_k(V)$ o espaço vetorial dos k -vetores, temos que a álgebra de Clifford se escreve como soma direta:

$$\mathcal{Cl}(V, g) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda_k(V)$$

onde $\Lambda_0(V) = \mathbb{R}$, logo $A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \cdots + \langle A \rangle_n$, onde $\langle \rangle_k$ denota a projeção de $\mathcal{Cl}(V, g)$ em $\Lambda_k(V)$. O conjunto de todos os produtos, $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ com $i_1 < \cdots < i_k$ para todo $k = 1, \dots, n$, e a unidade $1 \in \mathbb{R}$ forma uma base para $\mathcal{Cl}(V, g)$. Pode-se verificar que $\dim \mathcal{Cl}(V, g) = 2^{n-1}$. Quando não houver risco de confusão, denotaremos a álgebra de Clifford simplesmente por $\mathcal{Cl}(V)$.

Dados $A_r \in \Lambda_r(V)$ e $B_s \in \Lambda_s(V)$, definimos o **produto exterior**:

$$A_r \wedge B_s \stackrel{\text{def}}{=} \langle A_r B_s \rangle_{r+s}$$

e o **produto interno**:

$$A_r \bullet B_s \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} & \text{se } r, s > 0 \\ 0 & \text{se } r = 0 \text{ ou } s = 0. \end{cases}$$

¹Nessa dissertação, estamos considerando apenas as chamadas álgebras de Clifford Universais. Pode-se definir álgebras sobre um espaço n -dimensional que satisfaz às regras do produto de Clifford e que têm dimensão inferior a 2^n , ver [32].

Outra operação importante é a **contração**, à esquerda e à direita, definida a seguir:

$$A_r \rfloor B_s \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A_r \bullet B_s & r \leq s \\ 0 & r > s \end{cases}, \quad B_s \lceil A_r \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} B_s \bullet A_r & r \leq s \\ 0 & r > s \end{cases}.$$

Os produtos se estendem por bilinearidade para toda a álgebra $\mathcal{Cl}(V)$. Para dois vetores $u, v \in V$, verifica-se com facilidade que $u \rfloor v = (uv + vu)/2 = g(u, v)$ e $u \wedge v = (uv - vu)/2$. Observando que o produto $\wedge$ é associativo, podemos dispensar os parênteses e escrever $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda_k(V)$, $v_i \in V$.

A seguir vamos definir algumas involuções dentro da álgebra de Clifford. As definições são feitas primeiramente sobre os k -vetores e estendidas por linearidade para toda a álgebra.

- Reversão $\sim$:
 $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)^\sim = v_k \wedge \cdots \wedge v_1 = (-1)^{k(k-1)/2} v_1 \wedge \cdots \wedge v_k.$
- Involução graduada $\widehat{}$:
 para qualquer k -vetor A_k , $\widehat{A_k} = (-1)^k A_k.$
- Conjugação de Clifford $\bar{}$:
 composição da reversão com a involução graduada, $\bar{A} = A^\sim \widehat{}.$

As álgebras de Clifford $\mathcal{Cl}(V)$ admitem uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação natural

$$\mathcal{Cl}(V) = \mathcal{Cl}^+(V) \oplus \mathcal{Cl}^-(V)$$

onde $\mathcal{Cl}^+(V) = \{A \in \mathcal{Cl}(V) | \widehat{A} = A\}$ é o espaço dos multivetores pares e $\mathcal{Cl}^-(V) = \{A \in \mathcal{Cl}(V) | \widehat{A} = -A\}$, dos multivetores ímpares. Note-se que, além de ser um subespaço, $\mathcal{Cl}^+(V)$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{Cl}(V)$, chamada **sub-álgebra par**.

Agora enumeramos algumas propriedades das operação de contração e produto exterior cuja verificação é rotineira.

Proposição 3.1.1 *Sejam $A \in \mathcal{Cl}(V)$, $A_r \in \Lambda_r(V)$, $B_s \in \Lambda_s(V)$ e $v \in V$*

1. $A_r \rfloor B_s = (-1)^{r(s-1)} B_s \lceil A_r$ e $A_r \wedge B_s = (-1)^{rs} B_s \wedge A_r$;
2. $v \rfloor A = \frac{1}{2}(vA - \widehat{A}v)$ e $v \wedge A = \frac{1}{2}(vA + \widehat{A}v)$;
3. $u \rfloor (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_i (-1)^{i+1} g(u, v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge \underline{v_i} \wedge \cdots \wedge v_k.$

onde $\underline{v_i}$ indica que o elemento v_i está ausente da expressão.

Álgebras de Clifford complexas

A rigor, podemos definir álgebras de Clifford para espaços vetoriais sobre qualquer corpo F . Neste estudo, estamos interessados apenas em espaços reais ou complexos. Seja (V, g) um espaço real e $V' = \mathbb{C} \otimes V$ o seu complexificado com a métrica g' estendida para V' por bilinearidade. Prova-se [32] que a álgebra de Clifford complexa $\mathcal{Cl}(V', g')$ é isomorfa à complexificação da álgebra real $\mathcal{Cl}(V, g)$, i.e.

$$\mathcal{Cl}(V', g') \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(V, g).$$

Assim, uma vez estabelecida a classificação das álgebras de Clifford reais, a das álgebras complexas segue-se diretamente.

3.2 Periodicidade das Álgebras de Clifford

Vamos denotar por $\mathcal{Cl}_{p,q}$ a álgebra de Clifford do espaço² $\mathbb{R}^{p,q}$, i.e. $\mathcal{Cl}_{p,q} = \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$. O Teorema³ a seguir estabelece isomorfismos importantes entre diferentes álgebras de Clifford.

Teorema 3.2.1 *Se $p > 0$ ou $q > 0$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{p+1,q+1} &\simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} \\ \mathcal{Cl}_{q+2,p} &\simeq \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}; \\ \mathcal{Cl}_{q,p+2} &\simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}. \end{aligned}$$

Além dos isomorfismos acima, temos ainda informação sobre os antiautomorfismos das álgebras de Clifford. Denotando a reversão $\sim$ por 1 e a conjugação $\bar{}$ por -1 temos a seguinte correspondência entre os antiautomorfismos

$$(\mathcal{Cl}_{p+1,q+1}, \varepsilon) \simeq (\mathcal{Cl}_{p,q}, -\varepsilon) \otimes (\mathcal{Cl}_{1,1}, \varepsilon) \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Como consequência desse importante teorema, podemos determinar qualquer álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{p,q}$ a partir das álgebras $\mathcal{Cl}_{0,1}$, $\mathcal{Cl}_{1,0}$, $\mathcal{Cl}_{1,1}$, $\mathcal{Cl}_{0,2}$ e $\mathcal{Cl}_{2,0}$. Mas pode-se verificar sem grande dificuldade que

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{0,1} &\simeq \mathbb{C}, \\ \mathcal{Cl}_{1,0} &\simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \\ \mathcal{Cl}_{1,1} &\simeq \mathcal{Cl}_{2,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{R}), \\ \mathcal{Cl}_{0,2} &\simeq \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Como ilustração, mostraremos um dos isomorfismos acima.

²Ver página 2.

³Para a demonstração, ver [3].

Exemplo 3.2.1 ($\mathcal{Cl}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$)

$\mathbb{H}$ é a álgebra dos quatérnios gerada por i, j, k (ver página 4). Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^{0,2}$

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -1, \quad g(e_1, e_2) = g(e_2, e_1) = 0.$$

Os elementos de $\mathcal{Cl}_{0,2}$ são $\psi = a + be_1 + ce_2 + de_1e_2$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Das regras do produto de Clifford, segue-se que

$$(e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_1e_2)^2 = -1, \quad e_1e_2 = -e_2e_1.$$

Um isomorfismo entre $\mathcal{Cl}_{0,2}$ e $\mathbb{H}$ pode ser dado, por exemplo, pela seguinte correspondência

$$1 \mapsto 1, \quad e_1 \mapsto i, \quad e_2 \mapsto j, \quad e_1e_2 \mapsto k.$$

Vejamos mais algumas consequências do teorema 3.2.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{0,4} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} &\simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{q+2,p} \simeq \mathcal{Cl}_{p,q+4} \\ \mathcal{Cl}_{4,0} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} &\simeq \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{q,p+2} \simeq \mathcal{Cl}_{p+4,q} \end{aligned}$$

e daí segue-se que

$$\mathcal{Cl}_{p,q+8} \simeq \mathcal{Cl}_{0,4} \otimes \mathcal{Cl}_{0,4} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{Cl}_{0,8} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}.$$

Usando o fato de que $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(m, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(mn, \mathbb{R})$ (ver [3]) e $\mathcal{Cl}_{1,1} \simeq \mathcal{Cl}_{2,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$, podemos determinar a álgebra $\mathcal{Cl}_{0,8}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}_{0,8} &\simeq \mathcal{Cl}_{0,4} \otimes \mathcal{Cl}_{0,4} \simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \simeq \\ &\simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \simeq \mathcal{Cl}_{2,2} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \end{aligned}$$

portanto

$$\mathcal{Cl}_{0,8} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \otimes \mathcal{Cl}_{2,0} \simeq \mathcal{M}(2^4, \mathbb{R}) = \mathcal{M}(16, \mathbb{R}).$$

Com isso mostramos que a periodicidade módulo 8 de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é dada por

$$\mathcal{Cl}_{p,q+8} \simeq \mathcal{M}(16, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{Cl}_{p,q}.$$

A partir desses isomorfismos podemos classificar todas as álgebras de Clifford sobre espaços de dimensão finita.

Teorema 3.2.2 (Classificação das álgebras de Clifford reais)

Se $n = p + q$ e $[n/2] = (\text{parte inteira de } n/2)$, $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é dada por

$p - q \bmod 8$	$\mathcal{Cl}_{p,q}$
0	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{R})$
1	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{R})$
2	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{R})$
3	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{C})$
4	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1}, \mathbb{H})$
5	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2^{[n/2]-1}, \mathbb{H})$
6	$\mathcal{M}(2^{[n/2]-1}, \mathbb{H})$
7	$\mathcal{M}(2^{[n/2]}, \mathbb{C})$

Embora forneça uma classificação completa das álgebras de Clifford, o teorema 3.2.2 não mostra como construir explicitamente os isomorfismos. Vejamos alguns exemplos úteis de isomorfismos entre álgebras de Clifford e álgebras de Matrizes.

Exemplo 3.2.2 (A álgebra de Pauli) A álgebra $\mathcal{Cl}_3$ é também conhecida como álgebra de Pauli. Pelo teorema 3.2.2, tal álgebra é isomorfa à álgebra das matrizes complexas 2×2 . Podemos construir um isomorfismo explícito através das matrizes de Pauli:

$$e_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Basta relembrar as regras de multiplicação das matrizes de Pauli para ver que esta aplicação é de fato um isomorfismo. Pode-se verificar facilmente que a operação de reversão $\sim$ em $\mathcal{Cl}_3$ corresponde à conjugação hermitiana de matrizes 2×2 complexas.

Como $e_1 e_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $e_2 e_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $e_1 e_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, os elementos de $\mathcal{Cl}_3^+$ correspondem às matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix}.$$

Assim, temos o isomorfismo de espaço vetorial ⁴ $\mathcal{Cl}_3^+ \simeq \mathbb{C}^2$. Denotando o pseudoescalar $e_1 e_2 e_3$ por I , é imediato ver que $I^2 = -1$ e $\tilde{I} = -I$.

⁴Esse é apenas um isomorfismo de espaço vetorial, como álgebras de Clifford, temos o seguinte isomorfismo $\mathcal{Cl}_3^+ \simeq \mathbb{H}$.

Exemplo 3.2.3 (A álgebra $\mathcal{Cl}_4$) Sabemos que a álgebra $\mathcal{Cl}_4$ do espaço euclidiano 4-dimensional é isomorfa à $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})$. Tal isomorfismo pode ser dado explicitamente por

$$\begin{aligned} e_0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & e_1 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ e_2 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix}, & e_3 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Não é difícil verificar que tais matrizes satisfazem às regras do produto de Clifford. Observamos também que a reversão $\sim$ em $\mathcal{Cl}_4$ corresponde à transposta conjugada de matrizes 2×2 quaterniônicas.

Analogamente ao caso da álgebra de Pauli, verifica-se que os elementos de $\mathcal{Cl}_4^+$ correspondem às matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos o isomorfismo de espaço vetorial $\mathcal{Cl}_4^+ \simeq \mathbb{H}^2$. Nessa álgebra, escrevemos o pseudoescalar como $e_5 = e_0 e_1 e_2 e_3$, para o qual vale $e_5^2 = 1$ e $\tilde{e}_5 = e_5$.

O centro de uma álgebra $\mathcal{A}$ é definido como o conjunto dos elementos $z \in \mathcal{A}$ tais que $za = az$, $\forall a \in \mathcal{A}$. Verifica-se facilmente que o centro de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é dado por

$$\text{Cen}(\mathcal{Cl}_{p,q}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \mathbb{R} \oplus \Lambda_n(\mathbb{R}^{p,q}), & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Lembrando a definição de sub-álgebra par da página 51, temos mais um resultado importante sobre a estrutura das álgebras de Clifford

Teorema 3.2.3 $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{q,p-1} \simeq \mathcal{Cl}_{p,q-1} \simeq \mathcal{Cl}_{q,p}^+$.

Assim, a classificação das sub-álgebras pares é obtida diretamente do teorema 3.2.2.

Para concluir, observamos que a classificação das álgebras de Clifford complexas é mais simples do que no caso real. Denotamos por $\mathcal{Cl}_n(\mathbb{C})$ a álgebra de Clifford complexa sobre o espaço $\mathbb{C}^n$ munido da forma bilinear

$$g(z, w) = z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n$$

note-se que $\mathcal{Cl}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}(\mathbb{R}^{p,q})$, para quaisquer p, q com $p + q = n$. Segue-se dos isomorfismos já vistos que

$$\begin{aligned}\mathcal{Cl}_{n+2}(\mathbb{C}) &\simeq \mathcal{Cl}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{Cl}_2(\mathbb{C}), \\ \mathcal{Cl}_1(\mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \\ \mathcal{Cl}_2(\mathbb{C}) &\simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Com isso, fica fácil verificar o próximo

Teorema 3.2.4 (Classificação das álgebras de Clifford complexas)
A menos de isomorfismo, as álgebras de Clifford complexas são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{Cl}_{2k} &\simeq \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}), \\ \mathcal{Cl}_{2k+1} &\simeq \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

3.3 O grupo de Clifford

Agora mostraremos como as álgebras de Clifford são utilizadas para a construção explícita de grupos de recobrimento do grupo ortogonal e subgrupos.

Considere um vetor $u \in \mathbb{R}^{p,q}$ tal que $g(u, u) \neq 0$ (um tal vetor é chamado não-isotrópico). Qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^{p,q}$, pode ser decomposto num vetor paralelo e outro perpendicular a u , ou seja $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$, basta tomar

$$v_{\perp} = v - \frac{g(v, u)}{g(u, u)}u, \quad \text{e} \quad v_{\parallel} = \frac{g(v, u)}{g(u, u)}u.$$

Denotando por S_u a reflexão ortogonal em relação ao hiperplano perpendicular ao vetor u , temos que

$$S_u(v) = v - 2 \frac{g(v, u)}{g(u, u)}u.$$

Vale lembrar que $\det S_u = -1$. Vejamos como expressar a reflexão em termos do produto de Clifford:

$$\begin{aligned}S_u(v) &= v - \frac{vu + uv}{g(u, u)}u = v - (vu + uv)u^{-1} = v - v - uvu^{-1} \\ &\implies S_u(v) = -uvu^{-1} = \hat{u}vu^{-1}.\end{aligned}$$

Enunciamos um teorema importante cuja demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 3.3.1 (Cartan-Dieudonné) *Qualquer transformação ortogonal $T \in O(p, q)$ pode ser escrita como um produto de reflexões em relação a hiperplanos perpendiculares a vetores não isotrópicos.*

A partir dessas idéias, lembrando que nosso objetivo é estudar transformações ortogonais através das álgebras de Clifford, chegamos a uma definição natural⁵.

Definição 3.3.1 (Grupo de Clifford) *O grupo de Clifford $\Gamma_{p,q}$ é o grupo gerado pelos vetores não isotrópicos de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, ou seja*

$$\Gamma_{p,q} \stackrel{\text{def}}{=} \{v_1 \cdots v_k \in \mathcal{C}\ell_{p,q} : v_i \text{ é não isotrópico}\}.$$

Consideremos a seguinte representação do grupo de Clifford

$$\widehat{ad} : \Gamma_{p,q} \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}\ell_{p,q}), \quad \widehat{ad}(A)v = \widehat{A}vA^{-1}$$

chamada representação adjunta contorcida. Observamos que $\widehat{ad}(A)$ é uma transformação ortogonal quando restrita a $\mathbb{R}^{p,q}$, assim podemos redefinir o contradomínio de $\widehat{ad}$

$$\widehat{ad} : \Gamma_{p,q} \longrightarrow O(p, q).$$

Note-se que $\widehat{ad}(u) = S_u$ para qualquer u não-isotrópico. Portanto, pelo teorema de Cartan-Dieudonné, dado $T \in O(p, q)$ temos que $T = S_{u_1} \cdots S_{u_k} = \widehat{ad}(u_1) \cdots \widehat{ad}(u_k) = \widehat{ad}(u_1 \cdots u_k)$. Portanto $\widehat{ad}$ é sobrejetora, isto é

$$\widehat{ad}(\Gamma_{p,q}) = O(p, q).$$

Além disso, $\ker \widehat{ad} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$. De fato, dado $A \in \Gamma_{p,q}$, $A = A_+ + A_-$, onde $A_{\pm} \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\pm}$. $A \in \ker \widehat{ad} \implies \widehat{A}xA^{-1} = x, \forall x \in \mathbb{R}^{p,q} \implies \pm A_{\pm}x = xA_{\pm}, \forall x$. Usando a proposição 3.1.1: $x \rfloor A_{\pm} = \frac{1}{2}(xA_{\pm} + A_{\pm}x) = 0 \forall x$, logo $A_{\pm} = 0$. Segue-se que A é par e comuta com todos os vetores, i.e. A é par e $A \in \text{Cen}(\mathcal{C}\ell_{p,q})$. Por (3.3), $A \in \mathbb{R}$. Mas A é inversível, logo $A \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Concluimos daí que

$$\frac{\Gamma_{p,q}}{\mathbb{R} - \{0\}} \simeq O(p, q),$$

donde $\Gamma_{p,q}$ é um recobrimento de $O(p, q)$.

⁵Em Benn-Tucker [3] o leitor encontrará uma definição ligeiramente diferente para o grupo de Clifford. A terminologia adotada nesta dissertação está de acordo com Lounesto [16].

Como $\widehat{ad}(u)$ é uma reflexão:

$$\det \widehat{ad}(v_1 \cdots v_k) = (-1)^k$$

assim, considerando o subgrupo dos elementos pares $\Gamma_{p,q}^+ = \Gamma_{p,q} \cap \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ temos que

$$\frac{\Gamma_{p,q}^+}{\mathbb{R} - \{0\}} \simeq \text{SO}(p, q).$$

Observação: O grupo de Clifford $\Gamma_{p,q}$ pode ser definido como o grupo dos elementos $s \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ que têm paridade definida e tais que $sxs^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}$ (ver [16] pg. 220), ou seja:

$$\Gamma_{p,q} = \{s \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \cup \mathcal{C}\ell_{p,q}^- \mid \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}, \quad sxs^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q}\}.$$

Grupos Pin e Spin

Para obtermos recobrimentos **duplos**, cujo núcleo é o grupo $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$, dos grupos ortogonais e de alguns subgrupos, consideramos uma norma $N : \mathcal{C}\ell_{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $N(A) = \langle \bar{A}A \rangle_0$ e tomamos o subgrupo dos elementos unitários do grupo de Clifford.

Observando que $N(AB) = N(A)N(B)$, $\forall A, B \in \Gamma_{p,q}$ definimos os grupos Pin e Spin

$$\begin{aligned} \text{Pin}(p, q) &= \{A \in \Gamma_{p,q} : N(A) = \pm 1\} \\ \text{Spin}(p, q) &= \{A \in \Gamma_{p,q}^+ : N(A) = \pm 1\} \end{aligned}$$

segue-se imediatamente que

$$\begin{aligned} \widehat{ad} : \text{Pin}(p, q) &\longrightarrow \text{O}(p, q) \quad \text{com} \quad \ker \widehat{ad}|_{\text{Pin}(p, q)} = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2 \\ \widehat{ad} : \text{Spin}(p, q) &\longrightarrow \text{SO}(p, q) \quad \text{com} \quad \ker \widehat{ad}|_{\text{Spin}(p, q)} = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

portanto

$$\frac{\text{Pin}(p, q)}{\mathbb{Z}_2} \simeq \text{O}(p, q) \quad \frac{\text{Spin}(p, q)}{\mathbb{Z}_2} \simeq \text{SO}(p, q).$$

Concluimos daí que $\text{Pin}(p, q)$ e $\text{Spin}(p, q)$ são os recobrimentos duplos de $\text{O}(p, q)$ e $\text{SO}(p, q)$, respectivamente.

Podemos também utilizar a norma $\widehat{N} : \mathcal{C}\ell_{p,q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\widehat{N}(A) = \langle \bar{A}A \rangle_0$, onde $\bar{A}$ é a conjugação de Clifford definida na página 51. Observamos que $\widehat{N}(A_k) = (-1)^k N(A_k)$, para qualquer k -vetor A_k . Normalizando

o grupo de Clifford em relação a essa norma, também obtemos os grupos Pin e Spin .

Restringindo-nos a certos subgrupos de $\text{Pin}(p, q)$ e $\text{Spin}(p, q)$, obtemos recobrimentos duplos de alguns subgrupos importantes de $\text{O}(p, q)$ e $\text{SO}(p, q)$. De fato, consideremos os subgrupos

$$\begin{aligned}\text{Pin}_+(p, q) &= \{A \in \Gamma_{p, q} : N(A) = 1\}, \\ \widehat{\text{Pin}}_+(p, q) &= \{A \in \Gamma_{p, q} : \widehat{N}(A) = 1\}, \\ \text{Spin}_+(p, q) &= \{A \in \Gamma_{p, q}^+ : N(A) = 1\}.\end{aligned}$$

Dado um elemento qualquer $A_k = v_1 \cdots v_k \in \Gamma_{p, q}$ tal que $N(A_k) = 1$, temos $\|v_1\| \cdots \|v_k\| = N(v_1) \cdots N(v_k) = N(A_k) = 1$, logo devemos ter um número par de vetores v_i com $\|v_i\| < 0$ (i.e., com $S_{v_i} \in \text{O}_-(p, q)$). Logo $T = \widehat{ad}(A_k) = S_{v_1} \cdots S_{v_k} \in \text{O}_+(p, q)$. Se, por outro lado, tivermos $\widehat{N}(A_k) = 1$, então $(-\|v_1\|) \cdots (-\|v_k\|) = 1$ e assim devemos ter um número par de vetores v_i com $\|v_i\| > 0$ (i.e., com $S_{v_i} \in \text{O}^\downarrow(p, q)$). Nesse caso, $T = \widehat{ad}(A_k) \in \text{O}^\uparrow(p, q)$. Concluimos daí que

$$\begin{aligned}\widehat{ad}(\text{Pin}_+(p, q)) &= \text{O}_+(p, q), \\ \widehat{ad}(\widehat{\text{Pin}}_+(p, q)) &= \text{O}^\uparrow(p, q).\end{aligned}$$

Ainda temos que $\text{Spin}_+(p, q) = \text{Pin}_+(p, q) \cap \widehat{\text{Pin}}_+(p, q)$, logo:

$$\widehat{ad}(\text{Spin}_+(p, q)) = \text{O}_+^\uparrow(p, q) = \text{SO}_+(p, q)$$

e daí vêm os seguintes recobrimentos duplos

$$\begin{aligned}\text{Pin}_+(p, q)/\mathbb{Z}_2 &= \text{O}_+(p, q), \\ \widehat{\text{Pin}}_+(p, q)/\mathbb{Z}_2 &= \text{O}^\uparrow(p, q), \\ \text{Spin}_+(p, q)/\mathbb{Z}_2 &= \text{SO}_+(p, q).\end{aligned}$$

Para o caso em que $n = p + q \leq 5$ temos como caracterizar os grupos $\text{Spin}_+(p, q)$ e $\text{Pin}(p, q)$ através do seguinte resultado [32].

Proposição 3.3.1 *Se $n = p + q \leq 5$, então*

$$\begin{aligned}\text{Spin}_+(p, q) &= \{R \in \mathcal{C}\ell_{p, q}^+ : R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1\} \\ \text{Pin}(p, q) &= \{R \in \mathcal{C}\ell_{p, q} : \hat{R} = \pm R, \quad R\tilde{R} = \tilde{R}R = \pm 1\}\end{aligned}$$

Exemplo 3.3.1 (Os grupos $\text{Spin}(3)$ e $\text{Spin}(4)$) *Pela proposição 3.3.1 temos que o grupo $\text{Spin}(3)$ é composto dos elementos $R \in \mathcal{Cl}_3^+$ tais que $R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1$. Mas $\mathcal{Cl}_3^+ = \mathcal{Cl}_{0,2} = \mathbb{H}$, onde os bivectores correspondem aos números quaterniônicos puros e a operação de reversão corresponde à conjugação quaterniônica. Segue-se que $\text{Spin}(3)$ pode ser identificado ao grupo dos quaterniões unitários $\text{Sp}(1)$ o qual nada mais é do que o grupo $\text{SU}(2)$, conforme vimos no exemplo 1.1.2. Assim temos a identificação*

$$\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2).$$

Por outro lado, temos, $\text{Spin}(4) = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$. De fato, considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) &\longrightarrow \text{SO}(4) \\ (p, q) &\longmapsto T_{(p,q)} \end{aligned}$$

onde $T_{(p,q)}$ é dado pelo produto quaterniônico $T_{(p,q)}(x) = pxq^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$. Segue-se do teorema de Cartan-Dieudonné, que a aplicação acima é um epimorfismo de grupo com núcleo igual a $\mathbb{Z}_2$ (ver Porteous [21] pg. 182). Ou seja, $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ é um recobrimento duplo simplesmente conexo de $\text{SO}(4)$, portanto $\text{Spin}(4) = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$.

3.4 Spinors

Spinors são bem conhecidos por descreverem o estado de partículas em mecânica quântica. Na teoria de Pauli, por exemplo, o estado do elétron é descrito por um spinor que pode ser pensado como um elemento de $\mathbb{C}^2$ e, na teoria de Dirac, pode ser pensado como um elemento de $\mathbb{C}^4$. Cabe mencionar, no entanto, que spinor não é um conceito exclusivamente quântico e está presente na mecânica clássica [32]. A principal propriedade definidora dos spinors é o tipo de transformação que estes sofrem quando o sistema físico é submetido à ação de uma simetria (representação de grupo) que pode ser um elemento de $\text{SO}(3)$ na teoria de Pauli ou de $\text{SO}_+(1,3)$ na teoria de Dirac. A representação de grupos simplesmente conexos têm, de certa forma, propriedades melhores do que de grupos que não são simplesmente conexos⁶. Por essa razão, vamos considerar representações de grupos de recobrimento Spin_+ dos grupos de simetria. Dito isso, definimos⁷

⁶Para uma discussão sobre esse ponto, ver [2] página 179.

⁷No que segue, apresentaremos duas definições não equivalentes de spinor. Para distinguí-las, usaremos a terminologia não-usual de spinors clássicos e algébricos.

Definição 3.4.1 (spinor clássico) *Um spinor clássico é um elemento do espaço de representação irredutível de $\text{Spin}_+(p, q)$.*

Observando que $\text{Spin}_+(p, q)$ é um conjunto de geradores de $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$, vemos que as representação irredutíveis de $\text{Spin}_+(p, q)$ são obtidas restringindo as representação irredutíveis de $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$. Pelo teorema 3.2.3 temos uma classificação de todas as sub-álgebras pares como álgebra de matrizes ou como soma direta de duas álgebras de matrizes. Portanto, podemos fazer uma caracterização completa dos spinors clássicos. No caso em que $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ = \mathcal{M}(m, \mathbb{K})$; onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$; um spinor clássico é um elemento de $\mathbb{K}^m$. Quando $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ = \mathcal{M}(l, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{M}(l, \mathbb{K})$, novamente um spinor clássico é um elemento de $\mathbb{K}^l$ mas nesse caso temos duas representações irredutíveis ρ_+ e ρ_- não-equivalentes associadas aos subespaços $\mathcal{M}(l, \mathbb{K}) \oplus \{0\}$ e $\{0\} \oplus \mathcal{M}(l, \mathbb{K})$. Elementos do espaço de representação de $\rho_+ \oplus \rho_-$ são chamados de bi-spinors. O espaço dos bi-spinors carrega uma representação *reduzível* $\text{Spin}_+(p, q)$.

Exemplo 3.4.1 ($\mathcal{Cl}_{3,0}$ e $\mathcal{Cl}_{1,3}$) *Como $\mathcal{Cl}_{3,0}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, um spinor clássico associado à álgebra $\mathcal{Cl}_{3,0}$ é um quatérnio.*

Como $\mathcal{Cl}_{1,3}^+ \simeq \mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, temos que um spinor clássico associado à álgebra real do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}$ é um elemento de $\mathbb{C}^2$.

Exemplo 3.4.2 ($\mathcal{Cl}_4(\mathbb{C})$) *Como $\mathcal{Cl}_4^+(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{Cl}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, temos que um spinor clássico associado à álgebra complexificada do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{Cl}_4(\mathbb{C})$ é um elemento de $\mathbb{C}^2$. Por outro lado, um bi-spinor é um elemento de $\mathbb{C}^4$ que é exatamente o espaço dos spinors de Dirac da Mecânica Quântica Relativista.*

Vejamos agora outra definição de spinor. Considerando a representação regular $L : \mathcal{Cl}_{p,q} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{Cl}_{p,q})$ dada por $L(A)B = AB$, temos que L deixa, em geral, vários subespaços invariantes. Estes são chamados de ideais à esquerda. Os **ideais à esquerda minimais** são exatamente aqueles subespaços invariantes $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{Cl}_{p,q}$ tal que $L : \mathcal{Cl}_{p,q} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{I})$ é uma representação irredutível. Uma álgebra da forma $\mathcal{M}(m, \mathbb{K})$ é uma álgebra simples, ao passo que $\mathcal{M}(m, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ é uma álgebra semi-simples⁸. Agora estamos em condições de dar a seguinte

Definição 3.4.2 (spinor algébrico) *Um elemento de um ideal à esquerda minimal de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é dito um spinor algébrico se $\mathcal{Cl}_{p,q}$ for simples e um semi-spinor algébrico se $\mathcal{Cl}_{p,q}$ for semi-simples.*

⁸Para uma discussão mais detalhada de tais conceitos, ver [3] apêndice A.

Observamos que um ideal à esquerda minimal em $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ pode ser dado pelo espaço das matrizes cujas entradas são nulas com exceção da primeira coluna. Tal espaço é obviamente isomorfo a $\mathbb{K}^n$. No caso de uma álgebra da forma $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, um ideal $\mathcal{I}$ se decompõe como $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$, nesse caso, um ideal minimal deve necessariamente ser da forma $\mathcal{J} \oplus \{0\}$ ou $\{0\} \oplus \mathcal{J}$, onde $\mathcal{J}$ é um ideal minimal em $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

Exemplo 3.4.3 ($\mathcal{Cl}_3$ e $\mathcal{Cl}_4$) $\mathcal{Cl}_3 \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$: nesse caso, um spinor algébrico é um elemento de $\mathbb{C}^2$.

$\mathcal{Cl}_4 \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{H})$: aqui um spinor algébrico é um elemento de $\mathbb{H}^2$. Note-se que em ambos os casos o espaço dos spinors é isomorfo à subálgebra par.

Exemplo 3.4.4 ($\mathcal{Cl}_4(\mathbb{C})$) $\mathcal{Cl}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$, um spinor algébrico é um elemento de $\mathbb{C}^4$ que é exatamente o espaço dos spinors de Dirac da Mecânica Quântica Relativista.

Spinors Operatoriais

Nas duas definições apresentadas até aqui, os spinors são vistos como objetos que estão sujeitos a operações de uma “maneira passiva”. Por exemplo, no caso dos spinors de Pauli; vistos como elementos de $\mathbb{C}^2$ ou $\mathcal{Cl}_3 f$, onde $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; tomando o isomorfismo $\mathbb{C}^2 \simeq \mathcal{Cl}_3^+$, podemos considerar os spinors como elementos da subálgebra par. Isso nos permite dar um caráter ativo ao spinor. De fato, fazendo o spinor $\Phi \in \mathcal{Cl}_3^+$ agir através da operação $J = \Phi e_3 \tilde{\Phi}$ obtemos, de uma só vez, as grandezas observáveis associadas ao spin: $J_i = \langle J e_i \rangle_0 = \phi^\dagger \sigma_i \phi$, onde $\phi \in \mathbb{C}^2$ representa o spinor de Pauli no sentido usual, ver Lounesto [16] pg. 63.

Para dar ao spinor este caráter ativo, vamos definir os **spinors operatoriais** como elementos da sub-álgebra par $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$ ou de alguma sub-álgebra dela. Para tanto, ao invés de tomarmos um subespaço de representação regular irredutível (i.e. um ideal minimal à esquerda), definimos os spinors operatoriais como elementos de um espaço de representação *graduada* irredutível de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ que, em muitos casos, é a própria sub-álgebra par $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$.

Dado $a \in \mathcal{Cl}_{p,q}$, temos $a = a_+ + a_- \in \mathcal{Cl}_{p,q}^+ \oplus \mathcal{Cl}_{p,q}^-$. Vamos escrever a representação $\rho : \mathcal{Cl}_{p,q} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{Cl}_{p,q}^+)$ como $\rho(a) = \rho_+(a_+) + \rho_-(a_-)$, onde as representações $\rho_\pm$ são definidas do seguinte modo:

$$\rho_+(a_+)(\phi) = a_+ \phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{Cl}_{p,q}^+$$

e, para definir ρ_- , tomamos um elemento ímpar $\kappa \in \mathcal{Cl}_{p,q}^-$ e fazemos

$$\rho_-(a_-)(\phi) = a_- \phi \kappa, \quad \forall \phi \in \mathcal{Cl}_{p,q}^+.$$

Se escolhermos κ tal que $\kappa^2 = 1$, então⁹ é fácil verificar que $\rho = \rho_+ + \rho_-$ é uma representação de $\mathcal{Cl}_{p,q}$.

A questão agora é saber se a representação ρ é redutível ou não. Suponha que exista um elemento par $\eta_1 \in \mathcal{Cl}_{p,q}^+$ tal que

$$(\eta_1)^2 = 1 \text{ e } \eta_1 \kappa = \kappa \eta_1.$$

Nesse caso temos, $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ = +\mathcal{Cl}_{p,q}^+ \oplus -\mathcal{Cl}_{p,q}^+$, onde $\pm \mathcal{Cl}_{p,q}^+ = \mathcal{Cl}_{p,q}^+ \frac{1}{2}(1 \pm \eta_1)$. Verifica-se facilmente que as sub-álgebras $\pm \mathcal{Cl}_{p,q}^+$ são invariantes pela ação de ρ .

Se existir ainda outro elemento par η_2 tal que $(\eta_2)^2 = 1$, $\eta_2 \eta_1 = \eta_1 \eta_2$ e $\eta_2 \kappa = \kappa \eta_2$, então encontramos outras sub-álgebras invariantes por ρ :

$$\pm \pm \mathcal{Cl}_{p,q}^+ = \mathcal{Cl}_{p,q}^+ \frac{1}{2}(1 \pm \eta_1) \frac{1}{2}(1 \pm \eta_2).$$

Continuando esse processo, quando não existirem mais elementos satisfazendo essas condições, temos uma *representação irredutível*. Com isso, fica justificada a próxima definição:

Definição 3.4.3 (spinor operatorial) *Os elementos de um espaço de representação graduada irredutível de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ são chamados de spinors operatoriais.*

Exemplo 3.4.5 *Vejamos como no caso das álgebras $\mathcal{Cl}_3$ e $\mathcal{Cl}_4$ o espaço dos spinors operatoriais é a própria sub-álgebra par.*

Seja $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ uma base ortonormal, e_3 é um elemento ímpar cujo quadrado é igual a 1. Em $\mathcal{Cl}_3$ não existem elementos pares (além de ± 1) que quadram 1, portanto a sub-álgebra par $\mathcal{Cl}_3^+ \simeq \mathcal{Cl}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ é um espaço de representação graduada irredutível de $\mathcal{Cl}_3$. Portanto, os spinors operatoriais de Pauli são elementos da forma $a + a_{12}e_1e_2 + a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3$.

Seja $\{e_0, e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ uma base ortonormal, e_3 é um elemento ímpar cujo quadrado é igual a 1. Em $\mathcal{Cl}_4$ os elementos pares (além de ± 1) que quadram 1 são $\pm e_5 = \pm e_0e_1e_2e_3$, mas e_5 não comuta com e_3 . Portanto a sub-álgebra par $\mathcal{Cl}_4^+ \simeq \mathbb{H}^2$ é um espaço de representação graduada irredutível de $\mathcal{Cl}_4$.

⁹Existem exatamente dois casos onde não existe um elemento ímpar com essa propriedade: $\mathcal{Cl}_{0,1} \simeq \mathbb{C}$ e $\mathcal{Cl}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$.

Capítulo 4

Algumas Aplicações de Álgebras de Clifford em Teorias de Gauge

4.1 Teorias de Gauge no fibrado de Clifford

Conforme vimos no capítulo 2, o potencial de gauge é definido como uma conexão num fibrado principal, a qual é dada por uma 1-forma a valores na álgebra de Lie do grupo estrutural. Tal definição pode ser levada naturalmente para o contexto de fibrados vetoriais (Cap. 2 pg. 42). Mostraremos a seguir como qualquer álgebra de Lie de dimensão finita pode ser representada numa álgebra de bi-vetores, esta última é a álgebra de Lie de um grupo Spin. Nesse sentido, formas a valores numa álgebra de Lie podem ser pensadas como formas a valores numa álgebra de bi-vetores. Introduziremos o fibrado de Clifford sobre uma variedade pseudo-riemanniana e mostraremos como o potencial(derivada covariante) e o campo(curvatura), que são formas a valores na álgebra de bi-vetores, agem neste fibrado através de comutadores na álgebra de Clifford.

4.1.1 A álgebra de Lie de $\text{Spin}(p, q)$

O grupo de Clifford e seus subgrupos estudados no capítulo anterior são grupos de Lie, como pode ser facilmente verificado lembrando que toda álgebra de Clifford é isomorfa a uma álgebra de matrizes.

Denotamos por $\mathcal{C}\ell_{p,q}^*$ o grupo dos elementos inversíveis da álgebra de Clifford. A álgebra de Lie deste grupo é a própria álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q}$

com o colchete dado pelo comutador $[a, b] = ab - ba$. A aplicação *exponencial* é definida para $a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, fazendo¹

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Como $(\exp a)^{-1} = \exp(-a)$, temos $\exp(a) \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^*$. A série acima nos dá portanto a aplicação exponencial $\exp : \mathcal{L}(\mathcal{C}\ell_{p,q}^*) = \mathcal{C}\ell_{p,q} \longrightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}^*$.

A álgebra de Lie do grupo de Clifford $\Gamma_{p,q} \leq \mathcal{C}\ell_{p,q}^*$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Para determinar $\mathcal{L}(\Gamma_{p,q})$, observamos que $X \in \mathcal{L}(\Gamma_{p,q})$ se, e somente se, $\gamma(t) = \exp(tX)$ é uma curva em $\Gamma_{p,q}$; se, e somente se, $\exp(tX)$ tem paridade definida e

$$f(t) = \exp(tX)v \exp(-tX) = \text{Ad} \exp(tX)(v) \in \mathbb{R}^{p,q}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{p,q}.$$

Mas $\exp(tX)$ tem paridade definida se, e somente se, X for par. Pelas propriedades da aplicação adjunta, ver página 14, temos que $\text{Ad}(\exp(tX)) = \exp(\text{ad}(tX))$ e $\text{ad}(X)(v) = Xv - vX$. Portanto

$$f(t) = \exp(\text{ad}(tX))(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\text{ad}(X))^n(v),$$

logo $f(t) \in \mathbb{R}^{p,q} \iff \text{ad}(X)(v) = Xv - vX \in \mathbb{R}^{p,q}$. Mas $vX = v \rfloor X + v \wedge X = -X \rfloor v + X \wedge v$, pois X é par. Assim $Xv - vX = 2X \rfloor v$.

Portanto

$$X \in \mathcal{L}(\Gamma_{p,q}) \iff \hat{X} = X \text{ e } X \rfloor v \in \mathbb{R}^{p,q}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{p,q},$$

com isso, fica fácil ver que X deve ser uma soma de escalar com bivector, ou seja²:

$$\mathcal{L}(\Gamma_{p,q}) = \mathbb{R} \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q}).$$

Agora podemos calcular a álgebra de Lie de $\text{Spin}(p, q)$. Podemos nos restringir à sua componente conexa à identidade $\text{Spin}_+(p, q)$. Basta observar que um vetor $X \in \mathcal{L}(\Gamma_{p,q})$ está em $\mathcal{L}(\text{Spin}(p, q))$ se, e somente se, $N(\exp(tX)) = 1$. Mas $X = a + B \in \mathbb{R} \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q})$, logo $N(\exp(tX)) =$

¹ A convergência uniforme desta série segue-se da convergência uniforme da exponencial de matrizes.

² Vale lembrar que, nesta dissertação, estamos considerando o grupo de Clifford definido segundo Lounesto [16]. No caso do grupo de Clifford definido por Benn e Tucker [3], a álgebra de Lie correspondente é $\text{Cen}(\mathcal{C}\ell_{p,q}) \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q})$.

$\exp(t\tilde{X})\exp(tX) = \exp t(a - B)\exp t(a + B) = \exp(2ta) = 1 \iff a = 0$.
Portanto

$$\mathcal{L}(\text{Spin}(p, q)) = \Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q}). \quad (4.1)$$

Assim, provamos que as álgebras de Lie dos grupos Spin são as álgebras de bivectores da álgebra de Clifford com o colchete dado pelo comutador³. Vale a pena observar que $\mathcal{L}(\text{Spin}(p, q)) = \mathfrak{so}(p, q)$, pois $\text{Spin}(p, q)$ é o recobrimento duplo de $\text{SO}(p, q)$.

O teorema de Ado, ver [26] página 281, afirma que toda álgebra de Lie de dimensão finita admite uma representação fiel em dimensão finita, em outras palavras, toda álgebra de Lie de dimensão finita⁴ é isomorfa a alguma subálgebra de Lie de uma álgebra de matrizes.

A partir deste resultado importante podemos mostrar que toda álgebra de Lie é isomorfa a uma subálgebra de $\mathfrak{so}(n, n) = \mathcal{L}(\text{Spin}(n, n)) = \Lambda_2(\mathbb{R}^{n,n})$. Portanto, **toda álgebra de Lie pode ser representada numa álgebra de bivectores.**

Observação: No artigo “*Lie groups as Spin groups*” [10], Chris Doran et Al. concluíram erroneamente, a partir deste fato, que todo grupo de Lie pode ser representado como um grupo Spin (i.e., é isomorfo a um subgrupo de um grupo Spin). O grupo de recobrimento universal $\widetilde{\text{SL}}_m(\mathbb{R})$ de $\text{SL}_m(\mathbb{R})$ não admite representação fiel em dimensão finita. Um isomorfismo entre álgebras de Lie não implica, em geral, num isomorfismo entre os grupos correspondentes. Esta implicação é verdadeira no caso de grupos simplesmente conexos (ver [34] pg. 101), mas infelizmente os grupos $\text{Spin}_+(n, n)$ não são simplesmente conexos em geral, ver Lounesto [16] página 220 (por exemplo: o grupo $\text{Spin}_+(3, 3)$ não é simplesmente conexo).

Exemplo 4.1.1 A álgebra de Lie do grupo $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2)$ é formada pelos quatérnios “puros”, ou seja, é a álgebra gerada por i, j, k , a qual é isomorfa à álgebra de bivectores de $\mathcal{Cl}_3$.

No caso do grupo $\text{Spin}(4) = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$, observando que a álgebra de bivectores de $\mathcal{Cl}_4$ é obtida a partir de $\mathcal{Cl}_4^+$ sem escalares e pseudoescalares e lembrando do isomorfismo $\mathcal{Cl}_4 \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ dado no exemplo 3.2.3, a álgebra

³Esse fato nos garante que o comutador de dois bivectores também é um bivector. Isso também pode ser verificado diretamente através de um cálculo simples.

⁴Nesta dissertação, quando aparecer álgebra de Lie, leia-se: de dimensão finita.

de bivectores é representada pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} \text{Im}(q_1) & \text{Im}(q_2) \\ \text{Im}(q_2) & \text{Im}(q_1) \end{pmatrix}.$$

Em outros termos, a álgebra de bivectores é dada por pares de números quaterniônicos puros os quais formam precisamente a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ do grupo $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$.

Do que foi discutido acima, concluímos que o potencial de gauge; uma 1-forma a valores numa álgebra de Lie; pode ser visto como uma 1-forma a valores numa álgebra de bivectores onde o colchete de Lie é dado pelo comutador na álgebra de Clifford. Este fato nos permite obter simplificações análogas àquela apresentada no exemplo 2.3.1 onde o potencial de gauge para uma teoria com grupo $\text{SU}(2)$ assume valores na álgebra gerada por $-i\sigma_j$ (que é a mesma álgebra gerada pelos quatérnios puros) e as propriedades algébricas das matrizes de Pauli σ_j nos permitiram obter uma expressão mais simples para o campo F .

4.1.2 O fibrado de Clifford

Vejamos uma situação interessante onde aparecem as 1-formas a valores em $\Lambda_2(V)$. Vimos na seção 2.4 como o potencial de gauge pode ser introduzido no contexto de fibrados vetoriais através de uma conexão de Koszul ∇ e como o campo, ou curvatura, R é dado por uma 2-forma a valores em $\text{End}(E)$.

Seja M uma variedade pseudo-riemanniana e ∇ uma conexão no seu fibrado tangente TM , então a 2-forma R de curvatura é dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Dizemos que uma conexão em TM tem **torção nula** quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

e se a conexão satisfizer

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

dizemos que a conexão é **compatível com a métrica**. Agora enunciamos um fato bem conhecido (ver, Manfredo [9]).

Teorema 4.1.1 (conexão de Levi-Civita) *Dada uma variedade pseudo-riemanniana M , existe uma única conexão ∇ tal que*

- (i) ∇ é compatível com a métrica;
- (ii) ∇ tem torção nula.

tal ∇ é chamada *conexão de Levi-Civita*.

A partir de fibrados vetoriais dados, podemos construir novos fibrados através de operações como *soma direta* e *produto exterior*, conforme visto no Capítulo 1. Da mesma maneira, a partir do fibrado tangente TM , podemos construir o **fibrado de Clifford** sobre M cuja fibra em cada ponto $m \in M$ é a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(T_m M)$ dada pela métrica de M e cujas funções de transição são aquelas dos fibrados soma direta e produto exterior, pois $\mathcal{Cl}(T_m M) = \Lambda_0(T_m M) \oplus \Lambda_1(T_m M) \oplus \cdots \oplus \Lambda_n(T_m M)$ como espaços vetoriais.

Dada uma conexão qualquer ∇ em TM , podemos estendê-la para uma conexão em $\mathcal{Cl}(M)$; basta definir ∇ para seções da forma $f e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$, onde $f \in C^\infty(M)$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial local em TM . Assim, definimos

$$\begin{aligned} \nabla_X(f e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) &= X(f) e_1 \wedge \cdots \wedge e_k + f(\nabla_X e_1) \wedge \cdots \wedge e_k + \cdots \\ &\quad \cdots + f e_1 \wedge \cdots \wedge (\nabla_X e_k). \end{aligned}$$

Note-se que esta conexão satisfaz a regra de Leibniz em relação ao produto exterior: $\nabla_X(A \wedge B) = (\nabla_X A) \wedge B + A \wedge (\nabla_X B)$. Existe uma única conexão que concide com a conexão de TM e satisfaz a regra de Leibniz, portanto a conexão acima está bem definida independentemente do referencial.

Quanto ao comportamento de ∇ em relação ao produto de Clifford, pode-se verificar facilmente a seguinte

Proposição 4.1.1 *Para qualquer $X \in \Gamma(TM)$*

$$\nabla_X(AB) = (\nabla_X A)B + A(\nabla_X B), \quad \forall A, B \in \Gamma(\mathcal{Cl}(M))$$

se, e somente se, ∇ é compatível com a métrica.

No que segue, consideraremos a conexão de Levi-Civita. Portanto a igualdade acima será sempre válida. Vamos tomar um *referencial ortogonal* $\{e_1, \dots, e_n\}$ localmente definido em TM . Sejam c_{ij}^k suas constantes de estrutura dadas por $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ e sejam ϖ_j^k as formas de conexão, definidas em (2.10), relativas a este referencial. Vamos denotar por Γ_{ij}^k os coeficientes das formas de conexão, ou seja

$$\nabla_{e_i} e_j = e_k(\varpi_j^k \cdot e_i) = \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Como a conexão tem torção nula, segue-se imediatamente que

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = c_{ij}^k.$$

A conexão de Levi-Civita pode ser expressa em termos da métrica g e do colchete por uma expressão que está na página 55 de Manfredo [9], a qual, em termos de coeficientes, fica dada por

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (e_j(g_{ik}) + e_i(g_{kj}) - e_k(g_{ji}) - c_{jki} - c_{ikj} - c_{jik})$$

onde os índices são abaixados através da métrica⁵ g_{ij} . Como estamos tomando um referencial ortonormal, esta expressão simplifica-se bastante:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (c_{kji} + c_{kij} + c_{ijk})$$

onde usamos o fato de que as constantes de estrutura são anti-simétricas nos dois primeiros índices. Com isso, concluímos que

$$\Gamma_{ikj} = -\Gamma_{ijk}.$$

Formas de conexão

Vejamos agora como as formas de conexão, que no capítulo 2 formavam uma 1-forma a valores numa álgebra de Lie de matrizes (página 47), podem ser vistas aqui como uma 1-forma a valores numa álgebra de bi-vetores.

$$\begin{aligned} (\varpi \cdot e_i)e_k &= \Gamma_{ik}{}^p e_p = \Gamma_{ikp} e^p = \frac{1}{2} (\Gamma_{ikp} e^p - \Gamma_{iqk} e^q) \\ &= \frac{1}{2} \Gamma_{iqp} (\delta_k^q e^p - \delta_k^p e^q) = \frac{1}{2} \Gamma_{iqp} [e_k](e^q \wedge e^p) \\ &= \frac{1}{4} \Gamma_{iqp} (e_k(e^q \wedge e^p) - (e^q \wedge e^p)e_k) \quad \text{proposição 3.1.1} \\ &= e_k \left(\frac{1}{4} \Gamma_{iqp} e^q \wedge e^p \right) - \left(\frac{1}{4} \Gamma_{iqp} e^q \wedge e^p \right) e_k, \end{aligned}$$

Definindo o bivetor

$$\mathbf{\Gamma}_i = -\frac{1}{4} \Gamma_{iqp} e^q \wedge e^p$$

temos que

$$\nabla_{e_i} e_k = (\varpi \cdot e_i)e_k = (\mathbf{\Gamma}_i e_k - e_k \mathbf{\Gamma}_i) = [\mathbf{\Gamma}_i, e_k].$$

⁵Por exemplo: $e_i = g_{ij} e^j$. Pode-se também levantar índices $e^i = g^{ij} e_j$, onde $[g^{ij}]$ é a matriz inversa de $[g_{ij}]$.

Pela proposição 4.1.1, temos que $\nabla_{e_i}(e^i \cdots e^j) = [\Gamma_i, e^i \cdots e^j]$ logo, dado $A = A_{i,\dots,s} e^i \cdots e^s \in \mathcal{C}\ell(M)$, segue-se que

$$\nabla_{e_i} A = e_i(A) + [\Gamma_i, A]$$

onde, $e_i(A) = e_i(A_{i,\dots,s}) e^i \cdots e^s$.

Concluindo, mostramos que existe uma 1-forma Γ , definida localmente em função do referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$, a valores na álgebra de bi-vetores, dada por $\Gamma(e_j) = \Gamma_j$ e tal que, para todo $X = f_1 e^1 + \cdots + f_n e^n$

$$\nabla_X A = X(A) + [\Gamma(X), A]. \quad (4.2)$$

Formas de Curvatura

A curvatura da conexão pode ser expressa em termos dos bi-vetores Γ_i conforme veremos a seguir.

Vamos relembrar algumas simetrias do tensor curvatura de Riemann $R_{ijkl} = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$, ([9] pg. 91):

$$\begin{aligned} (i) \quad & R_{ijkl} = -R_{jikl}, \\ (ii) \quad & R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \\ (iii) \quad & R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0. \end{aligned}$$

Agora introduzimos a 2-forma de curvatura

$$\mathcal{R}_{ij} = -\frac{1}{2} R_{ijkl} e^k \wedge e^l,$$

a anti-simetria dos dois últimos índices nos permite demonstrar, de modo completamente análogo às formas de conexão Γ_i , que

$$R(e_i, e_j)e_k = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{ij}e_k - e_k\mathcal{R}_{ij}).$$

Usando a proposição 4.1.1, verifica-se facilmente que a expressão acima generaliza-se para qualquer $A \in \Gamma(\mathcal{C}\ell(M))$, ou seja: $R(e_i, e_j)A = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{ij}A - A\mathcal{R}_{ij})$.

A curvatura da conexão ∇ em $\mathcal{C}\ell(M)$ é dada por

$$R(e_i, e_j)A = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} A - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} A - \nabla_{[e_i, e_j]} A,$$

como ∇ é uma extensão da conexão em TM , R também é uma extensão da curvatura de Riemann em TM . A igualdade obtida acima se escreve como

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i - c_{ij}^m \nabla_m)A = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_{ij}A - A\mathcal{R}_{ij}), \quad \forall A \in \Gamma(\mathcal{C}\ell(M)).$$

Note-se que $\mathcal{R}_{ij}$ é o único bi-vetor com essa propriedade. Pois qualquer outro multivetor satisfazendo a igualdade acima deve diferir de $\mathcal{R}_{ij}$ por um elemento do centro de $\mathcal{Cl}(M)$. Mas o centro de uma álgebra de Clifford não contém bi-vetores.

Agora estamos em condições de expressar $\mathcal{R}_{ij}$ em termos dos Γ_i , de fato:

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i - c_{ij}{}^m \nabla_m) e_k = \nabla_i (\Gamma_j e_k - e_k \Gamma_j) - \nabla_j (\Gamma_i e_k - e_k \Gamma_i) - c_{ij}{}^m (\Gamma_j e_k - e_k \Gamma_j),$$

usando a proposição 4.1.1, segue que

$$\begin{aligned} \nabla_i (\Gamma_j e_k - e_k \Gamma_j) &= (\nabla_i \Gamma_j) e_k + \Gamma_j (\nabla_i e_k - e_k \nabla_i) \\ &\quad - (\Gamma_i e_k - e_k \Gamma_i) \Gamma_j - e_k (\nabla_i \Gamma_j), \end{aligned}$$

com isso, obtemos facilmente

$$\begin{aligned} (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i - c_{ij}{}^m \nabla_m) e_k &= \\ &= (\nabla_i \Gamma_j - \nabla_j \Gamma_i + \Gamma_j \Gamma_i - \Gamma_i \Gamma_j - c_{ij}{}^m \Gamma_m) e_k - \\ &\quad - e_k (\nabla_i \Gamma_j - \nabla_j \Gamma_i + \Gamma_j \Gamma_i - \Gamma_i \Gamma_j - c_{ij}{}^m \Gamma_m). \end{aligned}$$

Mas a expressão entre parênteses multiplicando e_k é um bi-vetor, pois $\nabla_i \Gamma_j = e_i (\Gamma_j) + \Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i$, por (4.2), e o colchete de bivectores é um bivetor. Pela unicidade discutida anteriormente, temos que

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}_{ij} = \nabla_i \Gamma_j - \nabla_j \Gamma_i + \Gamma_j \Gamma_i - \Gamma_i \Gamma_j - c_{ij}{}^m \Gamma_m.$$

Assim, obtemos uma expressão para a 2-forma de curvatura em termos da 1-forma de conexão inteiramente análoga àquela para a curvatura de Riemann em termos dos símbolos de Christoffel.

4.1.3 Formas a Valores em Álgebras de Clifford

Vimos no **Capítulo 2** a definição de formas a valores num fibrado vetorial ou formas E -vetoriais. Esta definição pode naturalmente estender-se para as formas a valores em álgebras de Clifford, ou seja, formas a valores no fibrado de Clifford. Este último, por sua vez, não precisa necessariamente ser obtido a partir do fibrado tangente de uma variedade pseudo-riemanniana. Podemos considerar, mais geralmente, o fibrado de Clifford obtido a partir de um fibrado vetorial qualquer $\pi : E \rightarrow M$ munido de uma métrica g .

Obtemos assim o fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(E)$ cuja fibra em cada ponto $p \in M$ é $\mathcal{Cl}(E|_p, g)$. Uma forma a valores em uma álgebra de Clifford é definida então como uma forma a valores num fibrado $\mathcal{Cl}(E)$.

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal definido localmente no fibrado (E, g) , então uma forma a valores em $\mathcal{Cl}(E)$ é dada localmente por uma combinação linear de expressões do tipo

$$e_{i_1} \cdots e_{i_k} f(x) dx^{i_1} \cdots dx^{i_k}$$

onde $x = (x^1, \dots, x^m)$ é um sistema local de coordenadas em M .

Dimakis e Müller-Hoissen [8] deram a tais objetos o nome de **clifformas**. Sejam $A(x)dx^{i_1} \cdots dx^{i_k}$ e $B(x)dx^{j_1} \cdots dx^{j_l}$ duas clifformas, onde $A(x), B(x)$ são seções de $\mathcal{Cl}(E)$, definimos seu produto de Clifford da maneira natural

$$(A(x)dx^{i_1} \cdots dx^{i_k})(B(x)dx^{j_1} \cdots dx^{j_l}) = A(x)B(x)dx^{i_1} \cdots dx^{i_k} dx^{j_1} \cdots dx^{j_l}$$

onde $A(x)B(x)$ é o produto de Clifford em cada fibra de $\mathcal{Cl}(E)$ e $dx^{i_1} \cdots dx^{i_k} dx^{j_1} \cdots dx^{j_l}$ é o produto exterior usual de formas diferenciais ordinárias. Da mesma maneira, as operações definidas numa álgebra de Clifford; como produto interno, contração e produto exterior; podem ser levadas para as clifformas.

As formas de conexão e curvatura vistas acima são exemplos de aplicações das clifformas em teorias de gauge. Tais formas ainda aplicam-se em muitas outras situações, algumas das quais comentaremos brevemente. O leitor interessado pode consultar Dimakis e Müller-Hoissen [8].

Identidade de Bianchi

Suponhamos que o fibrado $\pi : E \rightarrow M$ esteja munido de uma conexão dada pelas 1-formas de conexão ω^{ij} e cuja curvatura é dada pelas 2-formas R^{ij} . Tomando um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, definimos as seguintes formas a valores em $\mathcal{Cl}(E)$

$$\omega = \frac{1}{4} e_i \wedge e_j \omega^{ij} \quad \text{e} \quad R = \frac{1}{4} e_i \wedge e_j R^{ij}$$

segue-se que a identidade de Bianchi $dR_j^i + \omega_k^i \wedge R_j^k - \omega_j^k \wedge R_k^i = 0$ se escreve em termos de clifformas como

$$dR + \omega \wedge R - R \wedge \omega = 0.$$

Além disso, a clifforma R pode ser expressa em termos de ω através da seguinte expressão

$$R = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Geometria dos grupos de Lie

Seja G um grupo de Lie conexo, um co-referencial $\{\theta^\mu\}$ invariante à esquerda deve satisfazer à equação de Maurer-Cartan (1.4)

$$d\theta^\mu = -\frac{1}{2}c_{\nu\lambda}{}^\mu \theta^\nu \wedge \theta^\lambda.$$

Sejam X_μ os campos invariantes à esquerda correspondentes. Tomando uma métrica g invariante à esquerda em G temos o fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(TG)$ e definimos

$$\theta = \theta^\mu X_\mu \quad \text{e} \quad C^\nu = \frac{1}{4}c_{\mu\lambda}{}^\nu X^\mu \wedge X^\lambda$$

então a equação de Maurer-Cartan é dada por

$$d\theta = (\theta^2 \bullet C^\mu) X_\mu$$

onde $\bullet$ é o produto interno definido na página 50. No caso em que g é a métrica de Cartan-Killing, a equação assume uma forma ainda mais simples

$$d\theta = \theta^2 \bullet C$$

onde $C = \frac{1}{3}C^\mu \wedge X_\mu$.

Este resultado aplica-se no estudo das **teorias de Kaluza-Klein**. Tais teorias interpretam simetrias de gauge “internas” como isometrias de um espaço-tempo aumentado. Conforme mostrado em [8], as cliffformas permitem obter de modo simples a expressão para a curvatura em teorias de Kaluza-Klein onde o espaço é dado por $M \times G$ sendo M uma variedade n -dimensional e G um grupo de Lie m -dimensional conexo que age como um grupo de isometrias sobre $M \times G$.

No que segue precisaremos da seguinte definição: seja $\{\vartheta^1, \dots, \vartheta^n\}$ o co-referencial dual a $\{e_1, \dots, e_n\}$ no fibrado $\pi : E \longrightarrow M$, definimos a seguinte cliffforma

$$\vartheta = e_j \vartheta^j.$$

Lagrangianos de Gauss-Bonnet

Considerando a seguinte n -cliffforma a valores em n -vetores

$$\mathcal{L}_p = \kappa_p (R \wedge)^p \vartheta^{n-2p}$$

onde

$$\kappa_p = (-1)^q 4^p / (n - 2p)!,$$

ou seja

$$\mathcal{L}_p = \kappa_p 4^{-p} R^{I_1 I_2} \wedge \dots \wedge R^{I_{2p-1} I_{2p}} \wedge \vartheta^{I_{2p+1}} \wedge \dots \wedge \vartheta^{I_n} e_{I_1, \dots, I_n}.$$

$\mathcal{L}_p$ é chamado forma de Gauss-Bonnet.

Combinações lineares de $\mathcal{L}_p$ com $p \geq 0$ são generalizações interessantes do Lagrangiano de Einstein-Hilbert $\mathcal{L}_1$ da relatividade geral. As equações de campo dadas por estes lagrangianos ficam expressas de forma bastante compacta em termos de cliffformas.

Concluindo, os exemplos acima ilustram algumas das muitas aplicações em Física das formas a valores em álgebras de Clifford.

4.2 Teorema de periodicidade (1,1) e soluções invariantes por transformações conformes

Encontrar soluções para as equações de Yang-Mills⁶ é, em geral, uma tarefa extremamente difícil. No estudo de equações de Yang-Mills no espaço de Minkowski, uma maneira de simplificar as equações é procurar por soluções que sejam invariantes por transformações conformes. Em [5] esta técnica é explorada usando o fato de que as *transformações conformes* do espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ são dadas por *rotações* num espaço de dimensão maior $\mathbb{R}^{2,4}$ que contém o hipertoro $S^1 \times S^3$ visto como a *compactificação conforme* de $\mathbb{R}^{1,3}$. A teoria de Yang-Mills é formulada sobre o hipertoro e as soluções obtidas são levadas para $\mathbb{R}^{1,3}$ através da projeção $S^1 \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}^{1,3}$. A vantagem desta abordagem é que os elementos do grupo das rotações em $\mathbb{R}^{2,4}$ são transformações lineares, o que não ocorre com o grupo conforme. Assim, soluções das equações de Yang-Mills são encontradas resolvendo-se equações diferenciais ordinárias bastante simples, ver [5].

Os pontos do espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,3}$ podem ser vistos como *paravetores* da álgebra $\mathcal{Cl}_3$, ou seja, como elementos de $\mathbb{R} + \mathbb{R}^3 \subseteq \mathcal{Cl}_3$, assim como $\mathbb{R}^{2,4}$ é identificado ao espaço dos paravetores $\mathbb{R} + \mathbb{R}^{4,1} \subseteq \mathcal{Cl}_{4,1}$. No capítulo anterior, foi introduzido o grupo $\text{Spin}(p, q)$ que, conforme vimos, age nos vetores do espaço $\mathbb{R}^{p, q}$ através da representação adjunta contorcida. No que segue,

⁶Ver seção (2.3).

vamos introduzir o grupo $\text{Spin}(q+1, p)$ que, por sua vez, age nos paravetores $\mathbb{R} + \mathbb{R}^{p,q}$ através da representação adjunta contorcida. Em particular, temos a representação $\widehat{\text{ad}} : \text{Spin}(2, 4) \longrightarrow \text{SO}_+(2, 4)$ e, pelo teorema de periodicidade $(1, 1)$, esta representação nos dá diretamente as transformações conformes do espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, conforme mostrado em [25].

4.2.1 Compactificação conforme

Vejamos como mergulhar o espaço pseudo-euclidiano $\mathbb{R}^{p,q}$ no hipertoro $S^p \times S^q$ contido em $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$.

Seja $K \subseteq \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ o cone nulo contendo a origem, ou seja, $K = \{x \in \mathbb{R}^{p+1,q+1} : g(x, x) = 0\}$, onde g é a métrica pseudo-euclidiana em $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$. Vamos denotar os pontos de $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$ por $w = (u, z, v)$ onde $z \in \mathbb{R}^{p,q}$ e $u, v \in \mathbb{R}$. Seja M a intersecção do cone nulo K com o hiperplano dado por $v - u = 1$. Definimos a aplicação $\phi : \mathbb{R}^{p,q} \longrightarrow M$ dada por

$$\phi(z) = \left(\frac{g(z, z) - 1}{2}, z, \frac{g(z, z) + 1}{2} \right).$$

Verifica-se facilmente que ϕ é uma isometria, portanto podemos identificar $\mathbb{R}^{p,q}$ com a subvariedade $M \subseteq K$, a qual denotaremos por $M(\mathbb{R}^{p,q})$.

Seja $w \in \mathbb{R}^{p+1,q+1}$ dado por $w = (u, (x, y), v)$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^{p,q}$. Tome $r_1 = (u^2 + x_1^2 + \dots + x_p^2)^{1/2}$ e $r_2 = (v^2 + y_1^2 + \dots + y_q^2)^{1/2}$. Então $g(w, w) = r_1^2 - r_2^2$. Portanto a subvariedade N de K dada por $r_1 = r_2 = 1$ é difeomorfa ao produto de duas esferas, ou seja, N é um hipertoro

$$N = S^p \times S^q.$$

Em Felsager [11] pg. 565, mostra-se que existe uma transformação conforme levando $M(\mathbb{R}^{p,q})$ no hipertoro $N = S^p \times S^q$, esta transformação é na verdade uma projeção segundo as retas geradoras do cone K . É importante ressaltar que esta transformação associa a cada ponto de $M(\mathbb{R}^{p,q})$ um par de pontos antípodas em $S^p \times S^q$, portanto cada ponto do espaço $\mathbb{R}^{p,q}$ pode ser representado por um par de pontos antípodas do hipertoro $S^p \times S^q$. Em função dessa identificação, $S^p \times S^q$ é conhecido como *compactificação conforme* de $\mathbb{R}^{p,q}$.

Vejamos como construir transformações conformes em $\mathbb{R}^{p,q}$ usando a compactificação conforme vista acima. Seja $T \in O(p, q)$ uma transformação pseudo-ortogonal em $\mathbb{R}^{p,q}$. Obviamente, T preserva o cone nulo K , ou seja, $T(K) \subseteq K$ e o hipertoro $S^p \times S^q$ é levado isometricamente num novo subconjunto $T(S^p \times S^q) \subseteq K$; projetando segundo as retas geradoras de K ,

obtemos uma transformação conforme do hipertoro nele mesmo. Esta última pode ser considerada como uma transformação conforme de $\mathbb{R}^{p,q}$. Temos assim uma correspondência entre rotações de $O(p+1, q+1)$ e transformações conformes de $\mathbb{R}^{p,q}$.

Deve-se observar, no entanto, que a correspondência acima não é injetora, pois a cada ponto de $\mathbb{R}^{p,q}$ corresponde um par de pontos antípodos de $S^p \times S^q$. Tal correspondência é de fato 2 para 1. Assim sendo, é natural definir o grupo conforme como

$$C(p, q) = O(p+1, q+1)/\mathbb{Z}_2.$$

4.2.2 A ação de $\mathbb{S}pin(2,4)$

Pelo que vimos acima, algumas transformações conformes em $\mathbb{R}^{1,3}$ são obtidas a partir de rotações em $\mathbb{R}^{2,4}$, estas, por sua vez, podem ser dadas pela ação do grupo $\mathbb{S}pin(2,4) = \{g \in \mathcal{Cl}_{4,1} : g\bar{g} = 1\}$ através da representação adjunta contorcida $\widehat{\text{ad}} : \mathbb{S}pin_+(2,4) \longrightarrow \text{SO}_+(2,4)$. Vejamos a seguir como obter as transformações conformes em $\mathbb{R}^{1,3}$ diretamente a partir da representação acima. De acordo com o capítulo 7 de [25], isso será feito através do **Teorema 3.2.1** de periodicidade (1,1) das álgebras de Clifford.

Tomando o espaço dos paravetores $\mathbb{R} + \mathbb{R}^3 \subseteq \mathcal{Cl}_3$ munido da métrica $g(x, y) = \langle x\bar{y} \rangle_0$, vemos que podemos identificá-lo com o espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ através da seguinte correspondência

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{1,3} \longmapsto x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}^3,$$

a qual é obviamente uma isometria. Da mesma maneira, o espaço $\mathbb{R}^{2,4}$, cujos pontos são dados por (u, x, v) com $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ e $u, v \in \mathbb{R}$, pode ser identificado aos paravetores $\mathbb{R} + \mathbb{R}^{4,1} \subseteq \mathcal{Cl}_{4,1}$ com a métrica $g(x, y) = \langle x\bar{y} \rangle_0$ através da isometria

$$(u, x, v) \in \mathbb{R}^{2,4} \longmapsto \left(x_0 + \sum_{i=1}^3 x_i f_i + v f_4 + u f_5\right) \in \mathbb{R} + \mathbb{R}^{4,1},$$

onde $\{f_i\}_{i=1}^5$ é uma base pseudo-ortonormal de $\mathbb{R}^{4,1}$.

O teorema 3.2.1 nos garante que $\mathcal{Cl}_{4,1} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \otimes \mathcal{Cl}_{3,0}$. Portanto, $\mathcal{Cl}_{4,1}$ é isomorfa à álgebra de matrizes 2×2 com entradas em $\mathcal{Cl}_{3,0}$, pois $\mathcal{Cl}_{1,1} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$. Já vimos que os paravetores associados ao espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,3}$ estão contidos em $\mathcal{Cl}_3$. Conforme veremos a seguir, é possível obter a subvariabilidade $M(\mathbb{R}^{1,3}) \subseteq K$, discutida no início desta seção, em termos de matrizes com entradas em $\mathcal{Cl}_3$.

Seja $b \in \mathbb{R} + \mathbb{R}^{4,1}$ um paravetor qualquer, $b = x_0 + \sum_{i=1}^3 x_i f_i + v f_4 + u f_5$. Vamos fixar o bivetor $\beta = f_4 f_5$ e fazer a seguinte identificação

$$f_i \longmapsto f_i f_4 f_5 = e_i \quad i = 1, 2, 3,$$

como $f_4^2 = 1$ e $f_5^2 = -1$, temos que $e_i^2 = 1$.

Assim temos que

$$b = x_0 + \frac{v+u}{2}(f_4 + f_5) + \frac{v-u}{2}(f_4 - f_5) + \sum_{i=1}^3 x_i e_i \beta.$$

Escolhemos uma representação matricial tal que

$$f_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

portanto temos

$$b = \begin{pmatrix} x_0 + \sum x_i e_i & v - u \\ v + u & x_0 - \sum x_i e_i \end{pmatrix}.$$

Para caracterizar as matrizes b que pertencem a $M(\mathbb{R}^{1,3})$, observamos primeiramente que, pela isometria dada acima, é imediato que b pertence ao cone nulo K se, e somente se, $b\bar{b} = 0$. A seguir, como discutimos anteriormente, tomamos a intersecção de K com o hiperplano dado por $v - u = 1$. Portanto

$$b\bar{b} = x_0^2 + u^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v + u = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

ou seja, $v + u = x\bar{x}$ onde $x = x_0 + \sum x_i e_i$.

Com isso, mostramos que as matrizes b que correspondem aos pontos de $M(\mathbb{R}^{1,3})$ são da forma

$$b = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x\bar{x} & \bar{x} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Verifica-se diretamente que a aplicação

$$x \in \mathbb{R} + \mathbb{R}^3 \longmapsto \begin{pmatrix} x & 1 \\ x\bar{x} & \bar{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R} + \mathbb{R}^{4,1}$$

é uma isometria sobre a sua imagem $M(\mathbb{R}^{1,3})$.

Vamos usar a expressão matricial acima para obter transformações conformes no espaço-tempo através da ação do grupo $\mathbb{S}\text{pin}(2,4) = \{g \in \mathcal{C}\ell_{4,1} : g\bar{g} = 1\}$. Novamente o teorema de periodicidade $(1,1)$ nos garante que os elementos deste grupo pertencem ao espaço $\mathcal{C}\ell_{4,1} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{3,0}$, ou seja, cada $g \in \mathbb{S}\text{pin}(2,4)$ é da forma

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathcal{C}\ell_3.$$

Podemos efetuar rotações nos paravetores $\mathbb{R} + \mathbb{R}^{4,1}$ através da representação adjunta contorcida $\widehat{\text{ad}} : \mathbb{S}\text{pin}_+(2,4) \longrightarrow \text{SO}_+(2,4)$ dada por $\widehat{\text{ad}}(g)b = gb\hat{g}^{-1} = gb\bar{g}$. Para isso usamos a correspondência entre os antiautomorfismos estabelecida pelo teorema 3.2.1:

$$\widehat{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

consequentemente, a representação adjunta contorcida é dada por

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 \\ x\bar{x} & \bar{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} x' & 1 \\ x'\bar{x}' & \bar{x}' \end{pmatrix}$$

onde

$$x' = (x\bar{c} + \bar{a})^{-1}(x\bar{d} + \bar{b})$$

$$\Delta = (c\bar{x} + a)\overline{(c\bar{x} + a)} \in \mathbb{R}.$$

Com base na expressão acima, podemos encontrar as matrizes de $\mathbb{S}\text{pin}_+(2,4)$ que correspondem às transformações conformes de $\mathbb{R}^{1,3} \simeq \mathbb{R} + \mathbb{R}^3$ listadas abaixo

- **Translação** $x \mapsto x + h$, $h \in \mathbb{R} + \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{h} & 1 \end{pmatrix}$$

- **Dilatação** $x \mapsto \rho x$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\rho} & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho} \end{pmatrix}$$

- **Rotação** $x \mapsto gx\tilde{g}$, $g \in \text{Spin}_+(1, 3)$

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \hat{g} \end{pmatrix}.$$

Os resultados aqui apresentados podem ser usados, por exemplo, no estudo de soluções (da Teoria de Yang-Mills) invariantes por transformações conformes, atacando estas últimas com as ferramentas das álgebras de Clifford que, conforme vimos, através do teorema de periodicidade (1,1), dão um caráter algébrico àquelas transformações.

4.3 Construção de Monopolos e Instantons

O espaço dos spinors algébricos⁷ associados à álgebra $\mathcal{Cl}_3$ é $\mathbb{C}^2$, logo pode ser identificado ao espaço dos **spinors de Pauli**. Conforme vimos no capítulo anterior, tal espaço é isomorfo à subálgebra par $\mathcal{Cl}_3^+$. O espaço dos **spinors de Dirac**, por sua vez, é definido usualmente em Mecânica Quântica Relativista como $\mathbb{C}^4$. Conforme vimos, este é o espaço dos spinors algébricos de $\mathcal{Cl}_4(\mathbb{C})$. Para os nossos propósitos, no entanto, vamos considerar os spinors de Dirac dados pelos spinors algébricos de $\mathcal{Cl}_4$, uma álgebra real. Lembrando que $\mathcal{Cl}_4 \simeq \mathcal{Cl}_{1,3} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{H})$, nesse trabalho os spinors de Dirac⁸ serão vistos como elementos de $\mathbb{H}^2$; este espaço, por sua vez, é isomorfo à subálgebra par $\mathcal{Cl}_4^+$.

A seguir, apresentaremos o teorema de inversão, que permite reobter os spinors (de Pauli e Dirac) a partir de seus covariantes bilineares [16]. Veremos então que tal teorema nos dá a estrutura das fibrações de Hopf⁹, $S^1 \times S^3 \rightarrow S^2$ no caso dos spinors de Pauli e $S^3 \times S^7 \rightarrow S^4$ para spinors de Dirac, conforme demonstrado em [33]. Mais precisamente, o teorema de inversão nos fornece **trivializações locais** das fibrações de Hopf. Os potenciais de gauge, tanto de monopolos quanto de instantons, apresentam singularidades quando definidos no espaço de base S^2 e S^4 respectivamente. Com o teorema de inversão, obtemos extensões sem singularidade dos potenciais para o espaço total S^3 e S^7 .

⁷Ver página 61.

⁸Para mais esclarecimentos a respeito dos spinors de Dirac como elementos de $\mathbb{H}^2$, pode-se consultar [33].

⁹Ver página 23.

Monopolos

Um monopolo magnético de carga g situado na origem $r = 0$ do espaço tem um campo magnético B definido em $\mathbb{R}^3$ independente do tempo tal que $\nabla \cdot B = 4\pi g \delta^3(r)$. Como $\Delta(1/r) = -4\pi \delta^3(r)$ e $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$, segue-se que o campo do monopolo é

$$B = g\mathbf{r}/r^3.$$

Assim, vamos estudar o monopolo através do campo $B = g\mathbf{r}/r^3$ definido em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Tomando o potencial

$$A = \left(\frac{-gy}{r(r+z)}, \frac{gx}{r(r+z)}, 0 \right)$$

vemos que $\nabla \times A = B$ para $r \neq -z$. O potencial é **singular** sobre o eixo z negativo. É conveniente escrevermos o campo e o potencial em termos de formas diferenciais usando coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$B = \star g \frac{dr}{r^2} = g \sin \theta \, d\theta \wedge d\phi, \quad A = g(1 - \cos \theta) d\phi.$$

Instantons

Seja F uma 2-forma a valores vetoriais definida em $\mathbb{R}^4$, dizemos que F é **auto-dual** se $\star F = F$. Lembrando a identificação entre $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{H}$, podemos considerar a forma diferencial quaterniônica

$$dx = dx_1 + dx_2 i + dx_3 j + dx_4 k.$$

Calculando $dx \wedge dx^*$, obtemos

$$\begin{aligned} dx \wedge dx^* &= (dx_1 + dx_2 i + dx_3 j + dx_4 k) \wedge (dx_1 - dx_2 i - dx_3 j - dx_4 k) \\ &= -2\{ (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)i + (dx_1 \wedge dx_3 + dx_4 \wedge dx_2)j + \\ &\quad + (dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3)k \} \end{aligned}$$

com essa expressão, verifica-se facilmente que a 2-forma $dx \wedge dx^*$ é auto-dual. Os Instantons são soluções auto-duais da equação de Yang-Mills com grupo $SU(2)$. Consideremos o $SU(2)$ -potencial A dado por:

$$A(x) = \text{Im} \left\{ \frac{x \, dx^*}{1 + |x|^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x \, dx^* - dx \, x^*}{1 + |x|^2} \right\}.$$

Calculando [1] a curvatura desse potencial, obtemos o campo auto-dual F

$$F = \frac{dx \wedge dx^*}{(1 + |x|^2)^2},$$

chamado Instanton Fundamental. Note-se que o potencial apresenta uma **singularidade** no infinito ∞ .

4.3.1 Teorema de Inversão para Spinors de Pauli

Conforme vimos no exemplo 3.2.2, os spinors de Pauli $\Phi \in \mathcal{C}\ell_3^+$

$$\Phi = w_1 + w_2 e_1 e_2 + w_3 e_1 e_3 + w_4 e_2 e_3, \quad (4.4)$$

são representados por matrizes complexas da forma

$$\Phi \leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 + iw_2 & -w_3 + iw_4 \\ w_3 + iw_4 & w_1 - iw_2 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Definição 4.3.1 (covariantes bilineares) Para cada spinor $\Phi \in \mathcal{C}\ell_3^+$ estão associados os seguintes elementos

$$\begin{aligned} \sigma &= \Phi \tilde{\Phi}, & J &= \Phi e_3 \tilde{\Phi}, \\ S &= \Phi e_1 e_2 \tilde{\Phi}, & \omega &= \Phi e_1 e_2 e_3 \tilde{\Phi}, \end{aligned}$$

chamados covariantes bilineares.

A motivação para esta definição vem das quantidades covariantes bilineares da Mecânica Quântica associadas aos spinors de Pauli $\phi \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned} \sigma &= \phi^\dagger \phi, & J_i &= \phi^\dagger \sigma_i \phi, \\ S_{ij} &= \phi^\dagger \frac{i}{2} [\sigma_i, \sigma_j] \phi, & \omega &= \phi^\dagger \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \phi, \end{aligned}$$

onde $\phi = \begin{pmatrix} w_1 + iw_2 \\ w_3 + iw_4 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De fato, usando a representação matricial de Φ dada pela expressão (4.5) e dos vetores e_i dada pelas matrizes de Pauli, vê-se facilmente que as duas expressões para os covariantes bilineares se correspondem, ou seja

$$J_i = \langle J e_i \rangle_0, \quad S_{ij} = \langle S e_i e_j \rangle_0.$$

Se calcularmos $J = \Phi e_3 \tilde{\Phi}$ em termos de matrizes, temos

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} |z_1|^2 - |z_2|^2 & 2z_1 z_2^* \\ 2z_2 z_1^* & |z_2|^2 - |z_1|^2 \end{pmatrix}, \quad z_1 = w_1 + iw_2 \text{ e } z_2 = w_3 + iw_4 \\ &= 2\text{Re}(z_2 z_1^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\text{Im}(z_2 z_1^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + |z_1|^2 - |z_2|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, temos que J é dado por

$$\begin{aligned} J = & (w_1 w_3 + w_2 w_4) e_1 + \\ & (w_1 w_4 - w_2 w_3) e_2 + \\ & (|w_1|^2 + |w_2|^2 - |w_3|^2 - |w_4|^2) e_3. \end{aligned}$$

Comparando com a expressão (1.7), vemos que, no caso em que $\Phi = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, a aplicação $\Phi \mapsto J$ é exatamente a fibração de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$.

Identidades de Fierz

Os covariantes bilineares estão relacionados pelas seguintes identidades

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= -\omega^2, & J^2 &= \sigma^2, \\ S &= e_1 e_2 e_3 J & (S_{ij} &= \varepsilon_{jik} J_k), \end{aligned}$$

conhecidas como identidades de Fierz.

A questão levantada pelo teorema de inversão é a seguinte: dados σ, J, S e ω , é possível determinar o spinor Φ ? Devido às identidades de Fierz, temos apenas três quantidades independentes J_1, J_2 e J_3 , ao passo que o spinor de Pauli tem quatro graus de liberdade. Este grau de liberdade extra é considerado como relacionado a uma fase arbitrária.

Considerando Φ dado pela expressão (4.4), supondo que $w_1 + w_2 e_1 e_2 \neq 0$ (ou seja, $z_1 \neq 0$), temos que

$$\frac{1}{2}(\Phi + e_3 \Phi e_3) = w_1 + w_2 e_1 e_2 = \alpha e^{e_1 e_2 \beta}$$

de forma que

$$\frac{1}{2}(\Phi + e_3 \Phi e_3) e^{e_1 e_2 \theta}$$

é um escalar não nulo. Segue-se que para algum escalar C temos

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi C \frac{1}{2}(\tilde{\Phi} + e_3 \tilde{\Phi} e_3) e^{e_1 e_2 \theta} \\ &= C_1 (\Phi \tilde{\Phi} + \Phi e_3 \tilde{\Phi} e_3) e^{e_1 e_2 \theta} \\ &= C_1 (\sigma + J e_3) e^{e_1 e_2 \theta}. \end{aligned}$$

Para determinar C_1 , fazemos

$$\begin{aligned} \sigma &= \Phi \tilde{\Phi} = C_1^2 (\sigma + J e_3) (\sigma + e_3 J) \\ &= C_1^2 (2\sigma^2 + 2\sigma J_3) \quad \text{onde } J_3 = \langle J e_3 \rangle_0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma + J_3)}}.$$

Segue-se daí que

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma + J_3)}}(\sigma + J e_3) e^{e_1 e_2 \theta}.$$

Portanto, o spinor $\phi = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ é dado por

$$\boxed{\phi = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma + J_3)}}(\sigma 1 + J_i \sigma_i) e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad (4.6)$$

onde θ é uma fase arbitrária. Este é o **Teorema de Inversão** para spinors de Pauli. Para o caso de spinors em que $z_1 = 0$, basta aplicar uma rotação no spinor e utilizar a expressão acima que pode ser colocada na seguinte forma

$$\phi = \sqrt{\frac{\sigma + J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{J_1 + iJ_2}{\sigma + J_3} \end{pmatrix} e^{i\theta}.$$

No entanto, para relacionar o teorema de inversão com a fibração de Hopf, é interessante estabelecer a expressão para o caso em que $z_2 \neq 0$.

Seja Φ um spinor tal que $z_2 \neq 0$, aplicando a rotação $R = e_1 e_3 \in \text{Spin}(3)$, obtemos um spinor $\Phi' = R\Phi$ tal que $z'_1 \neq 0$ e a expressão acima é válida para ϕ' . Vejamos como relacionar os covariantes bilineares. Primeiramente, é óbvio que $\sigma' = \sigma$. Além disso, $J' = \Phi' e_3 \tilde{\Phi}' = e_1 e_3 \Phi e_3 \tilde{\Phi} e_3 e_1 = e_1 e_3 J e_3 e_1$. Verifica-se facilmente que $J'_1 = -J_1$, $J'_2 = J_2$, $J'_3 = -J_3$. Aplicando o teorema de inversão, temos que

$$\phi' = \sqrt{\frac{\sigma - J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-J_1 + iJ_2}{\sigma - J_3} \end{pmatrix} e^{i\theta}.$$

Para obter o spinor ϕ , devemos aplicar a rotação inversa $\phi = \tilde{R}\phi'$. Mas $\tilde{R} = e_3 e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Concluimos portanto que a expressão para o teorema de inversão no caso que $z_2 \neq 0$ é a seguinte

$$\phi = \sqrt{\frac{\sigma - J_3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{J_1 - iJ_2}{\sigma - J_3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\theta}.$$

Note-se que $z_2 \neq 0 \iff J_3 \neq \sigma$.

4.3.2 Spinors de Pauli e Monopolos

Considerando o spinor de Pauli $\phi \in \mathbb{C}^2$, temos que $\sigma = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$. Assim, o conjunto dos spinors que satisfazem $\sigma = 1$ pode ser identificado à esfera S^3 . Pelas identidades de Fierz, para o vetor $J = J_i e_i$ temos que

$$J^2 = 1.$$

ou seja, os vetores J pertencem a S^2 . Segue-se que para $\sigma = 1$, a aplicação

$$\Phi \longmapsto \Phi e_3 \tilde{\Phi} = J$$

é uma aplicação de S^3 em S^2 que, conforme vimos na seção anterior, nada mais é do que a fibração de Hopf.

Quando $\sigma = 1$, as expressões para o teorema de inversão,

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{1+J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{J_1+iJ_2}{1+J_3} \end{pmatrix} e^{i\theta} \quad \text{para } z_1 \neq 0$$

e

$$\phi_2 = \sqrt{\frac{1-J_3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{J_1-iJ_2}{1-J_3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\theta} \quad \text{para } z_2 \neq 0,$$

correspondem a trivializações locais da fibração de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ definidas em $S^2 - \{\text{pólo Sul}\}$ e $S^2 - \{\text{pólo Norte}\}$ respectivamente.

Para determinar a estrutura do fibrado, devemos estudar a função de transição que relaciona as duas trivializações. Para isso, restringimos os abertos a uma vizinhança do hemisfério Norte de S^2 e uma do hemisfério Sul, de forma que a interseção das vizinhanças é uma pequena faixa contendo o equador S^1 . Assim, podemos tomar a função de transição como uma aplicação $t : S^1 \rightarrow S^1$, definida no equador $J_3 = 0$ da esfera, com valores no grupo estrutural S^1 , tal que $\sqrt{\frac{1+J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{J_1+iJ_2}{1+J_3} \end{pmatrix} e^{i\theta} = \sqrt{\frac{1-J_3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{J_1-iJ_2}{1-J_3} \\ 1 \end{pmatrix} t(\varphi) e^{i\theta}$, onde φ é dado por $e^{i\varphi} = J_1 + iJ_2$. Para determinar $t(\varphi)$, note-se que $J_3 = 0$, logo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ J_1 + iJ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 - iJ_2 \\ 1 \end{pmatrix} t(\varphi).$$

Segue-se que $t(\varphi) = J_1 + iJ_2 = e^{i\varphi}$, ou seja, a função de transição $t : S^1 \rightarrow S^1$ é a identidade. Este resultado está de acordo com o fato conhecido de

que a fibração de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ é caracterizada pela classe de homotopia $1 \in \mathbb{Z} \simeq \pi_1(S^1)$. Está portanto justificada a afirmação de que o Teorema de Inversão para spinors de Pauli tem ligação estreita com a estrutura da fibração de Hopf S^3 sobre S^2 .

Conforme vimos anteriormente, o potencial de um monopolo de carga $g = 1/2$ é descrito em coordenadas polares por $A = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)d\phi$, definido em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Singular sobre o eixo z negativo. Assim, vemos que o monopolo pode ser descrito por um fibrado principal com variedade de base $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ e grupo estrutural S^1 .

Em vista do difeomorfismo $\mathbb{R}^3 - \{0\} \simeq S^2 \times \mathbb{R}$, considerando que todo fibrado sobre $\mathbb{R}^n$ é trivial, podemos considerar o fibrado restrito a S^2 como descrevendo o monopolo. Então vamos tomar o monopolo descrito por um fibrado principal sobre S^2 com grupo estrutural $S^1 \simeq U(1)$ descrito localmente pela $U(1)$ -conexão

$$A = \frac{i}{2}(1 - \cos \theta)d\phi.$$

Consideramos agora a fibração de Hopf $S^1 \times S^3 \rightarrow S^2$ e tomamos a seguinte $U(1)$ -conexão definida **sem singularidade** sobre o espaço total S^3

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\phi^\dagger d\phi - (d\phi^\dagger)\phi).$$

Para verificar que $\mathcal{A}$ é de fato uma $U(1)$ -conexão, vamos mostrar que sua expressão local satisfaz a condição de gauge dos potenciais expressa na definição 2.2.4. De fato, considerando uma seção U do fibrado e uma transformação de gauge agindo sobre ela $\phi = Ue^{i\theta}$ obtemos facilmente que

$$\frac{1}{2}(\phi^\dagger d\phi - (d\phi^\dagger)\phi) = \frac{1}{2}(U^\dagger dU - (dU^\dagger)U) + id\theta$$

que é exatamente a condição de gauge para um $U(1)$ -potencial.

Tomando uma seção local U da fibração de Hopf dada pelo teorema de inversão

$$U = \phi = \sqrt{\frac{1+J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{J_1+iJ_2}{1+J_3} \end{pmatrix}$$

temos que o $U(1)$ potencial definido na variedade de base S^2 é dado pelo pull-back:

$$A = U^* \mathcal{A} = \frac{1}{2}(U^\dagger dU - (dU^\dagger)U).$$

$$\begin{aligned}
dU &= d\sqrt{\frac{1+J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{J_1+iJ_2}{1+J_3} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{1+J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ d(\frac{J_1+iJ_2}{1+J_3}) \end{pmatrix} \\
&= d\sqrt{\frac{1+J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{J_1+iJ_2}{1+J_3} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{1+J_3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(dJ_1+idJ_2)(1+J_3)-(J_1+iJ_2)dJ_3}{(1+J_3)^2} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow A &= iIm(U^\dagger dU) = i\frac{1+J_3}{2} \left(\frac{J_1dJ_2 - J_2dJ_1}{(1+J_3)^2} \right).
\end{aligned}$$

Concluimos que o potencial A é definido localmente em S^2 por

$$A = \frac{i}{2} \left(\frac{J_1dJ_2 - J_2dJ_1}{1+J_3} \right).$$

Tomando coordenadas esféricas (θ, ϕ) :

$$J_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad J_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad J_3 = \cos \theta.$$

é fácil verificar que o potencial A fica dado por

$$A = \frac{i}{2}(1 - \cos \theta)d\phi.$$

Concluimos que o potencial $\mathcal{A}$, definido sem singularidade sobre S^3 , é de fato uma extensão do potencial de monopolo de carga $1/2$ definido sobre S^2 . Se tomarmos uma seção local V dada pela segunda expressão para o teorema de inversão

$$V = \sqrt{\frac{1-J_3}{2}} \begin{pmatrix} \frac{J_1-iJ_2}{1-J_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

temos que o potencial $A' = V^*\mathcal{A}$ definido localmente nesse caso é

$$A' = -\frac{i}{2}(1 + \cos \theta)d\phi.$$

Conforme esperado, A e A' estão relacionados pela transformação de gauge $A' = A + id\phi$.

4.3.3 Teorema de Inversão para Spinors de Dirac

Conforme havíamos dito anteriormente, vamos considerar $\mathbb{H}^2$ como sendo o espaço dos spinors de Dirac. Tal espaço é isomorfo à subálgebra par $\mathcal{Cl}_4^+$ e, de acordo com o exemplo 3.2.3, seus elementos $\Psi \in \mathcal{Cl}_4^+$

$$\begin{aligned} \Psi = & a + a_{01}e_0e_1 + a_{02}e_0e_2 + a_{03}e_0e_3 \\ & + a_{12}e_1e_2 + a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3 + a_{0123}e_5, \end{aligned} \quad (4.7)$$

são representados por matrizes da forma

$$\Psi \leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

onde $q_1 = a - a_{23}i + a_{13}j - a_{12}k$ e $q_2 = a_{0123} + a_{01}i + a_{02}j + a_{03}k$.

O spinor de Dirac $\psi \in \mathbb{H}^2$ é obtido a partir de Ψ da seguinte forma:

$$\psi = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definição 4.3.2 (covariantes bilineares) Para cada spinor $\Psi \in \mathcal{Cl}_4^+$ estão associados os seguintes elementos

$$\begin{aligned} \sigma &= \langle \Psi \tilde{\Psi} \rangle_0, & \omega &= \langle \Psi e_5 \tilde{\Psi} \rangle_0, & J &= \Psi e_0 \tilde{\Psi}, \\ S &= \Psi e_1 e_2 \tilde{\Psi}, & K &= \Psi e_3 \tilde{\Psi}. \end{aligned}$$

chamados covariantes bilineares.

A motivação para esta definição vem dos observáveis associados ao spinor de Dirac “usual” $\varphi \in \mathbb{C}^4$ que são dados pelas seguintes quantidades covariantes bilineares:

$$\begin{aligned} \sigma &= \varphi^\dagger \varphi, & \omega &= \varphi^\dagger \gamma_5 \varphi, & J_\mu &= \varphi^\dagger \gamma_\mu \varphi, \\ S_{\mu\nu} &= \varphi^\dagger \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \varphi, & K_\mu &= \varphi^\dagger i \gamma_5 \gamma_\mu \varphi. \end{aligned}$$

Quando estamos trabalhando no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, ao invés de usarmos a conjugação hermitiana do spinor $\varphi^\dagger$, as quantidades acima são definidas usualmente através do adjunto de Dirac $\bar{\varphi} = \varphi^\dagger \gamma_0$. A multiplicação do conjugado hermitiano pela matriz γ_0 é necessária para deixar a equação de Dirac em forma covariante mediante a conjugação. No caso do espaço euclidiano $\mathbb{R}^4$, a equação de Dirac é covariante mediante a conjugação hermitiana e a multiplicação pela matriz γ_0 é portanto desnecessária.

No contexto da álgebra de Clifford do espaço $\mathbb{R}^{1,3}$ os covariantes bilineares são definidos em termos do spinor $\Psi \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+$ pelas mesmas expressões do caso $\mathcal{Cl}_4$ com excessão de

$$\omega = -\langle \Psi e_5 \tilde{\Psi} \rangle_0.$$

Identidades de Fierz

Os covariantes bilineares associados ao spinor de Dirac $\Psi \in \mathcal{C}\ell_4^+$ estão relacionados pelas seguintes identidades

$$\begin{aligned} J^2 &= \sigma^2 - \omega^2, & J^2 &= K^2, \\ JK &= (\omega - e_5 \sigma)S. \end{aligned}$$

Para demonstrar as identidades de Fierz, vejamos primeiro a seguinte identidade $\Psi\tilde{\Psi} = \sigma + \omega e_5$. Representando Ψ matricialmente como em (4.8) e usando a representação matricial de e_0, e_1, e_2, e_3 dada no exemplo 3.2.3 temos que

$$\begin{aligned} \Psi\tilde{\Psi} &= (|q_1|^2 + |q_2|^2)I + (q_1 q_2^* + q_2 q_1^*)e_5 \\ &= \langle \Psi\tilde{\Psi} \rangle_0 + \langle \Psi e_5 \tilde{\Psi} \rangle_0 e_5 = \sigma + \omega e_5, \end{aligned}$$

consequentemente:

$$\begin{aligned} J^2 &= \Psi e_0 \tilde{\Psi} \Psi e_0 \tilde{\Psi} = \Psi e_0 (\sigma + \omega e_5) e_0 \tilde{\Psi} \\ &= \Psi (\sigma - \omega e_5) \tilde{\Psi} = (\sigma - \omega e_5) \Psi \tilde{\Psi} \\ &= (\sigma - \omega e_5)(\sigma + \omega e_5) = \sigma^2 - \omega^2, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que Ψ , por pertencer à subálgebra par, comuta com o pseudo-escalar e_5 . A verificação das demais identidades de Fierz é similar.

Usando a representação matricial da álgebra $\mathcal{C}\ell_4$ dada no exemplo 3.2.3 e o fato de que $e_5 = e_0 e_1 e_2 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, segue-se que $\omega = 2\text{Re}(q_2 q_1^*)$ e

$$J = \begin{pmatrix} |q_1|^2 - |q_2|^2 & q_1 q_2^* - q_2 q_1^* \\ q_2 q_1^* - q_1 q_2^* & |q_2|^2 - |q_1|^2 \end{pmatrix},$$

mas $q_1 q_2^* - q_2 q_1^* = 2\text{Re}(q_2 q_1^* i)i + 2\text{Re}(q_2 q_1^* j)j + 2\text{Re}(q_2 q_1^* k)k$, portanto

$$\begin{aligned} J &= (|q_1|^2 - |q_2|^2)e_0 \\ &\quad + 2\text{Re}(q_2 q_1^* i)e_1 \\ &\quad + 2\text{Re}(q_2 q_1^* j)e_2 \\ &\quad + 2\text{Re}(q_2 q_1^* k)e_3. \end{aligned}$$

Comparando com a expressão (1.8), quando $\sigma^2 = \omega^2 + J^2 = 1$, vemos que a aplicação $\Psi \mapsto \omega + J$ nada mais é do que a fibração de Hopf $S^3 \rightarrow S^4$.

No caso da álgebra $\mathcal{Cl}_{1,3}$ do espaço pseudo-euclidiano $\mathbb{R}^{1,3}$, temos que $e_5^2 = -1$. Contrariamente à álgebra $\mathcal{Cl}_4$, na qual $e_5^2 = 1$. Como consequência deste fato, as identidades de Fierz para o spinor $\Psi \in \mathcal{Cl}_{1,3}$ são as seguintes: $J^2 = \sigma^2 + \omega^2$, $J^2 = -K^2$ e $JK = -(\omega + e_5\sigma)S$. Em particular

$$J^2 - \omega^2 = \sigma^2,$$

portanto, nesse caso, não podemos estabelecer a mesma relação entre os covariantes bilineares e a fibração de Hopf vista acima, razão pela qual optamos por tomar os spinors como elementos de $\mathcal{Cl}_4^+$.

Vejamos agora como “recuperar” o spinor de Dirac a partir dos seus covariantes bilineares. Seja $\Psi \in \mathcal{Cl}_4^+$ representado matricialmente por $\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}$, com $q_1 \neq 0$. Escrevendo Ψ como em (4.7) tem-se que

$$\frac{1}{2}(\Psi + e_0\Psi e_0) = a + a_{12}e_1e_2 + a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3$$

Tomando a representação matricial do exemplo 3.2.3, vemos que os elementos da forma $a + a_{12}e_1e_2 + a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3$ podem ser identificados aos quatérnios $\mathbb{H}$ através da relação

$$i \leftrightarrow e_3e_2, \quad j \leftrightarrow e_1e_3, \quad k \leftrightarrow e_2e_1.$$

Portanto podemos escrever

$$a + a_{12}e_1e_2 + a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3 = \sqrt{\rho} U$$

onde ρ é um escalar positivo e U pode ser identificado com um quatérnio unitário, i.e., pertence a $SU(2) \simeq \text{Spin}(3)$. Assim, podemos parametrizar U pelos ângulos de Euler

$$U = e^{e_1e_2\alpha_1/2} e^{e_1e_3\alpha_2/2} e^{e_1e_2\alpha_3/2}.$$

Concluimos que

$$\frac{1}{2}(\Psi + e_0\Psi e_0) e^{e_2e_1\alpha_3/2} e^{e_3e_1\alpha_2/2} e^{e_2e_1\alpha_1/2}$$

é uma quantidade escalar. Portanto, existe um escalar C tal que

$$\begin{aligned} \Psi &= C\Psi(\tilde{\Psi} + e_0\tilde{\Psi}e_0)R \\ &= C(\sigma + e_5\omega + Je_0)R, \end{aligned}$$

onde $R \in \text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2)$. Como $R\tilde{R} = \tilde{R}R = 1$ e $\tilde{e}_5 = e_5$ e, com o auxílio das identidades de Fierz, fazemos

$$\begin{aligned}\sigma + e_5\omega &= \Psi\tilde{\Psi} = C^2(\sigma + e_5\omega + Je_0)(\sigma + e_5\omega + e_0J) \\ &= C^2(\sigma^2 + 2\sigma e_5\omega + 2\sigma J_0 + \omega^2 + \omega e_5e_0J + Je_0e_5\omega + J^2) \\ &= C^2(2\sigma^2 + 2\sigma e_5\omega + 2\sigma J_0 + 2J_0e_5\omega) \\ &= 2C^2(\sigma + e_5\omega)(\sigma + J_0),\end{aligned}$$

segue-se que

$$C = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma + J_0)}}$$

onde¹⁰ $J_0 = \langle Je_0 \rangle_0$.

Segue-se do que foi visto acima que

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2(\sigma + J_0)}}(\sigma + e_5\omega + Je_0)R.$$

O spinor de Dirac $\psi \in \mathbb{H}^2$, é dado por $\psi = \Psi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Usando a representação matricial da álgebra $\mathcal{Cl}_4$ temos que

$$\boxed{\psi = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\sigma + J_0}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega - J_1i - J_2j - J_3k}{\sigma + J_0} \end{pmatrix} Q} \quad (4.9)$$

onde Q é o quatérnio unitário que representa o elemento $R \in \text{Spin}(3)$. Este é o **Teorema de Inversão** para spinors de Dirac.

Analogamente ao caso do spinor de Pauli, o teorema de inversão para spinors de Dirac no caso em que $q_2 \neq 0$ pode ser obtido através de uma rotação.

Tomando a rotação dada pelo pseudoescalar $e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Spin}(4)$, obtemos o spinor $\Psi' = e_5\Psi$ tal que $q'_1 \neq 0$ para o qual vale a expressão acima. Quanto aos covariantes bilineares, temos obviamente $\sigma' = \sigma$, $J' = e_5Je_5 = -J$ e $\omega' = \langle e_5\Psi e_5\tilde{\Psi}e_5 \rangle_0 = \omega$. Aqui usamos o fato de que e_5 anticomuta com vetores, comuta com elementos da subálgebra par e $e_5^2 = 1$. Portanto

$$\psi' = \sqrt{\frac{\sigma - J_0}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega + J_1i + J_2j + J_3k}{\sigma - J_0} \end{pmatrix} Q.$$

¹⁰Note-se que $\sigma + J_0 = (|q_1|^2 + |q_2|^2) + (|q_1|^2 - |q_2|^2) \neq 0 \iff q_1 \neq 0$.

Aplicando a rotação novamente, obtemos $\psi = e_5 \psi'$, assim chegamos à expressão para o teorema de inversão no caso $q_2 \neq 0$

$$\psi = \sqrt{\frac{\sigma - J_0}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega + J_1 i + J_2 j + J_3 k}{\sigma - J_0} \\ 1 \end{pmatrix} Q.$$

Note-se que $q_2 \neq 0 \iff \sigma - J_0 \neq 0$.

4.3.4 Spinors de Dirac e Instantons

Agora mostraremos como generalizar a construção de um potencial sem singularidade para o caso de instantons. Conforme vimos, a construção do monopolo estava baseada na fibração de Hopf $S^1 \times S^3 \longrightarrow S^2$. A estrutura deste fibrado, isto é suas trivializações locais e funções de transição, é dada pelo teorema de inversão para spinors de Pauli. A descrição dos instantons é feita através de fibrados principais com grupo estrutural $SU(2) \simeq S^3$ e variedade de base S^4 .

Descreveremos o instanton fundamental [1] usando a fibração de Hopf $S^3 \times S^7 \longrightarrow S^4$. Quando $\sigma = |q_1|^2 + |q_2|^2 = 1$, temos que o spinor de Dirac $\psi = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ pertence à esfera S^7 e, conforme vimos (pg. 88), a aplicação que o associa aos covariantes bilineares J e ω é a fibração de Hopf $S^7 \longrightarrow S^4$. Lembrando das identidades de Fierz, $J^2 + \omega^2 = 1$, ou seja $(\omega, J_1, J_2, J_3, J_0) \in S^4$.

Quando $\sigma = 1$, as expressões para o teorema de inversão,

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{1 + J_0}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\omega - J_1 i - J_2 j - J_3 k}{1 + J_0} \end{pmatrix} Q \quad \text{para } q_1 \neq 0$$

e

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{1 - J_0}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\omega + J_1 i + J_2 j + J_3 k}{1 - J_0} \\ 1 \end{pmatrix} Q \quad \text{para } q_2 \neq 0,$$

correspondem a trivializações locais da fibração de Hopf $S^7 \longrightarrow S^4$ definidas em $S^4 - \{\text{pólo Sul}\} \iff J_0 \neq -1$ e $S^4 - \{\text{pólo Norte}\} \iff J_0 \neq 1$ respectivamente. Restringindo os abertos de forma que sua interseção se reduza a uma pequena faixa contendo o equador $J_0 = 0$ de S^4 , verifica-se facilmente que a função de transição t definida no (equador de S^4) = S^3 a valores no grupo estrutural S^3 é a aplicação identidade $t : S^3 \longrightarrow S^3$. Novamente

verificamos que a função de transição pertence à classe 1 de homotopia de $\pi_3(\mathrm{SU}(2)) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto, o Teorema de Inversão para spinors de Dirac nos dá a estrutura da fibração de Hopf S^7 sobre S^4 .

De modo inteiramente análogo ao potencial de monopolo, definimos a $\mathrm{SU}(2)$ conexão

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(\psi^\dagger d\psi - (d\psi^\dagger)\psi).$$

Para verificar que $\mathcal{A}$ é de fato uma $\mathrm{SU}(2)$ -conexão, vamos mostrar que sua expressão local satisfaz a condição de gauge dos potenciais expressa na definição 2.2.4. De fato, considerando uma seção local $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ do fibrado e uma transformação de gauge agindo sobre ela

$$\psi = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} Q,$$

onde $|q_1|^2 + |q_2|^2 = 1$ e $Q^*Q = 1$, obtemos facilmente que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\psi^\dagger d\psi - (d\psi^\dagger)\psi) &= Q^* \frac{1}{2} \left[(q_1^* \ q_2^*) \begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{pmatrix} - (dq_1^* \ dq_2^*) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right] Q \\ &\quad + Q^* dQ, \end{aligned}$$

que é exatamente a condição de gauge para um $\mathrm{SU}(2)$ -potencial.

Tomando o pull-back pela trivialização local dada pelo teorema de inversão temos que

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\frac{1+J_0}{2}}, \\ q_2 &= \sqrt{\frac{1+J_0}{2}} \left(\frac{\omega - J_1 i - J_2 j - J_3 k}{1+J_0} \right), \end{aligned}$$

nos dá o seguinte potencial $A = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}^* \mathcal{A}$ definido localmente na variedade de base S^4

$$A = \left(\frac{1+J_0}{2} \right) \left[\frac{K^* dK - (dK^*)K}{2} \right]$$

onde

$$K = \frac{\omega - J_1 i - J_2 j - J_3 k}{1+J_0}.$$

Para escrever A definido em $\mathbb{R}^4$, necessitamos da projeção estereográfica $S^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\omega}{1 + J_0}, \\ x_i &= \frac{J_i}{1 + J_0}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Segue-se que $K = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k = x^*$. Observando que

$$|x|^2 = \frac{1 - J_0}{1 + J_0},$$

temos

$$\frac{1 + J_0}{2} = \frac{1}{1 + |x|^2}.$$

O potencial de gauge é portanto dado por

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x dx^* - dx x^*}{1 + |x|^2} \right\}.$$

Concluimos que o potencial $\mathcal{A}$, definido sem singularidade sobre S^7 , é de fato uma extensão do potencial de instanton fundamental definido sobre S^4 .

Conclusão

Este trabalho explora as interligações entre três áreas do conhecimento: Geometria Diferencial, através dos grupos de Lie e das conexões em fibrados principais; Álgebras de Clifford; e Física dos campos de gauge. As aplicações apresentadas no capítulo final evidenciam as vantagens de se utilizar uma linguagem matemática (grupos de Lie, fibrados, álgebras de Clifford) adequada para tratar certos problemas físicos.

Através das formas assumindo valores em álgebras de Clifford mostramos a possibilidade de utilizar as propriedades destas álgebras para facilitar os cálculos no estudo de teorias clássicas de campo [8]. A abordagem das transformações conformes através da ação do grupo $\text{Spin}(2,4)$ certamente tem aplicações no estudo de soluções invariantes por transformações conformes das equações de Yang-Mills. No estudo de monopolos e instantons através de fibrados principais sobre as esferas S^2 e S^4 respectivamente, vimos como a projeção do spinor (de Pauli e de Dirac) nos seus covariantes bilineares coincide exatamente com as fibrações de Hopf. A possibilidade de considerar o potencial como uma 1-forma globalmente definida no espaço total do fibrado permite-nos uma descrição, livre de singularidade, dos monopolos e instantons. Essa é uma clara demonstração do poder das ferramentas matemáticas desenvolvidas pela geometria diferencial.

Quanto às fibrações de Hopf, comentamos o fato de que elas correspondem à classe 1 de homotopia do grupo $\mathbb{Z} \simeq \pi_1(S^1) \simeq \pi_3(S^3)$. De fato, os fibrados principais sobre esferas S^n podem ser classificados em termos da classe de homotopia de sua função de transição [29]. A quantização da carga elétrica a partir da existência de um monopolo magnético pode ser facilmente deduzida usando-se o fato de que os S^1 -fibrados sobre S^2 são classificados pelo grupo $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Os monopolos magnéticos são, portanto, um interessante elo de ligação entre Topologia e Física. O mesmo acontece com os instantons, uma vez que é possível mostrar que esses objetos são os responsáveis pelo mecanismo de tunelamento quântico entre diferentes e não-equivalentes estados de vácuo que surgem da quantização de teorias

de gauge não-abelianas. Para uma discussão sobre esse assunto bem como outras questões de interesse físico relacionadas, pode-se consultar K. Huang [15].

As interligações entre topologia e física de partículas e campos é uma bela ilustração da reaproximação entre Matemática e Física e uma interessante área de pesquisa atual.

Bibliografia

- [1] Atiyah M F *Geometry of Yang-Mills Fields*, 1981, Addison-Wesley.
- [2] Baez J, Muniain J P *Gauge Fields, Knots and Gravity*, 1994, World Scientific.
- [3] Benn I M, Tucker R W *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, 1989, Adam Higler.
- [4] Bleecker D *Gauge Theory and Variational Principles*, 1981, Addison-Wesley.
- [5] Chaves R Q *Estudo Geométrico de Soluções da Teoria de Yang-Mills no Espaço de Minkowski*, diss. Mestrado em Matemática, IMECC/Unicamp, 1999.
- [6] Chevalley C *Theory of Lie Groups*, 1946, Princeton University Press.
- [7] Darling R *Differential Forms and Connections*, 1994, Cambridge Un. Press.
- [8] Dimakis A, Müller-Hoissen F *Clifford calculus with applications to classical field theories*, Class. Quantum Grav. 8, 1991, 2093-2132.
- [9] do Carmo M P *Geometria Riemanniana*, 2^a edição, IMPA 1988.
- [10] Doran C, Hestenes D, Sommen F, Van Acker N *Lie Groups as Spin Groups*, J. Math. Phys. **34** (8), 1993.
- [11] Felsager B *Geometry, Particles, and Fields*, 1997, Springer.
- [12] Greub W *Multilinear Algebra*, 2nd edition 1978, Springer.
- [13] Hestenes D *Space-Time Algebra*, 1966, Gordon and Breach.
- [14] Hoffmann K, Kunze R *Linear Algebra*, 2nd edition 1971, Prentice-Hall.

-
- [15] Huang K *Quarks, Leptons and Gauge Fields*, 2nd edition, 1992 World Scientific.
 - [16] Lounesto P *Clifford Algebras and Spinors*, 1997, Cambridge Un. Press.
 - [17] Mosna R A *Formulações Geométricas da Teoria de Dirac*, Monografia-EQD, Instituto de Física Gleb Wataghin/Unicamp, 2000.
 - [18] Mosna R A, Miralles D, Vaz J *On a class of $\mathbb{Z}_2$ -gradings of Clifford Algebras*, 2002, preprint.
 - [19] Naber G L *Topology, Geometry, and Gauge Fields : foundations*, 1997, Springer.
 - [20] Nakahara M *Geometry, Topology and Physics*, 1990, IOP publishing.
 - [21] Porteous I R *Topological Geometry*, 2nd edition 1969, Cambridge Un. Press.
 - [22] Postnikov M *Leçons de Géométrie, Groups et Algèbres de Lie*, 1985, Éditions Mir.
 - [23] Postnikov M *Lições de Geometria, Álgebra Linear*, 1985, Éditions Mir.
 - [24] Rigas A *Grupos de Lie via Exemplos*, 1993, 19^a Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.
 - [25] da Rocha Jr. R *Spinors e Twistors no modelo paravetorial do espaço-tempo*, diss. Mestrado em Mat. Aplicada, IMECC/Unicamp, 2001.
 - [26] San Martin L *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, 1999.
 - [27] Snuggs J *Clifford Algebra*, Oxford Un. Press., 1997.
 - [28] Spivak M *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, 3th edition, 5 Vols. 1999, Publish or Perish.
 - [29] Steenrod N *The Topology of Fiber Bundles*, 1999, Princeton Un. Press.
 - [30] Trautman A *Solutions of the Maxwell and Yang-Mills equations associated with Hopf fibrings*, Inter. J. Theo. Phys., **16**, No. 8 (1977), 561-565.
 - [31] Trautman A, Nowakowski J *Natural connections on Stiefel bundles are sourceless gauge fields*, J. Math. Phys., **19**, No. 5 (1978), 1100-1103.

-
- [32] Vaz J *Álgebras de Clifford e Espinores*, Notas de aula, 1999, IMECC/Unicamp.
 - [33] Vaz J *Constructions of monopoles and instatons by using spinors and the inversion theorem*, em Clifford Algebras and their applications in Mathematical Physics, V. Dietrich et al. (eds), pg. 401, Kluwer (1998).
 - [34] Warner F *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, 1983, Springer-Verlag.