



THADEU ALVES SENNE

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS
SOB NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA**

**Campinas
2013**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

THADEU ALVES SENNE

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS
SOB NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Unicamp para a obtenção
do título de Doutor em Matemática Aplicada.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA PELO ALUNO THADEU ALVES SENNE
E ORIENTADA PELO PROF. DR. FRANCISCO DE ASSIS
MAGALHÃES GOMES NETO.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Francisco", written over a horizontal line.

Prof. Dr. Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto
Orientador

Campinas
2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Senne, Thadeu Alves, 1985-
Se58o Otimização topológica de estruturas sob não linearidade
geométrica / Thadeu Alves Senne. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Otimização topológica. 2. Programação não-linear. 3.
Mecânica não-linear. I. Gomes Neto, Francisco de Assis
Magalhães, 1964-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Topology optimization of structures under geometrical
nonlinearity

Palavras-chave em inglês:

Topology optimization

Nonlinear programming

Nonlinear mechanics

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Francisco de Assis Magalhães Gomes Neto [Orientador]

Sandra Augusta Santos

Ana Friedlander de Martínez Pérez

Cícero Ribeiro de Lima

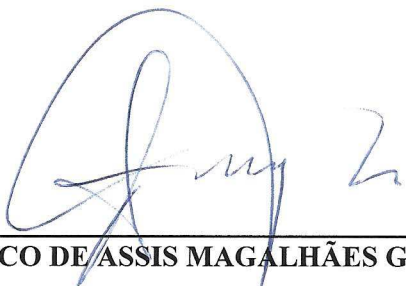
Ernesto Julián Goldberg Birgin

Data de defesa: 25-02-2013

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 25 de fevereiro de 2013 e aprovada

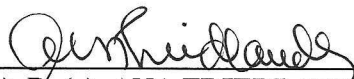
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). FRANCISCO DE ASSIS MAGALHÃES GOMES NETO



Prof(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS



Prof(a). Dr(a). ANA FRIEDLANDER DE MARTÍNEZ PÉREZ



Prof(a). Dr(a). CÍCERO RIBEIRO DE LIMA



Prof(a). Dr(a). ERNESTO JULIÁN GOLDBERG BIRGIN

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter conseguido vencer mais uma grande e importante etapa de minha vida. Há exatos dez anos, em 2003, quando fui aprovado para ingressar no Cursão na Unicamp e escolher o curso de Matemática Aplicada, realizei um dos maiores sonhos de minha vida. Naquela época, jamais imaginava que eu fosse capaz de chegar à pós-graduação. Mas, dia após dia, após vários tropeços, fui superando todos os obstáculos que surgiam com muita garra, força de vontade, e, principalmente, muita fé em Deus. Quando me dei conta, estava eu conquistando o título de doutor em Matemática Aplicada pela Unicamp. Tenho certeza de que, sem Deus, nada disso teria sido possível.

Aos meus amados pais, Brígida e Moacyr, a quem dedico este trabalho, qualquer coisa que eu diga não é suficiente para expressar minha infinita gratidão pelo amor e pelo apoio incondicional em todas as fases de minha vida. Agradeço a eles a enorme paciência nos meus momentos de insegurança, por sempre estarem dispostos a me ouvir e pelos valiosos conselhos de quem lutou bravamente para oferecer uma vida digna e tudo o que há de melhor para toda a família.

À minha segunda mãe e ao meu segundo pai, ou seja, aos meus amados irmãos Líliah e Marcos, agradeço eternamente o amor, o carinho, a amizade e a ajuda oferecida a mim por toda a minha vida, em todos os sentidos.

Aos demais amados familiares (sem citar nomes, para não ser injusto), agradeço o amor e o estímulo para que eu pudesse trilhar o meu caminho com toda a segurança.

Ao meu eterno orientador e querido amigo, Chico, agradeço a enorme confiança depositada em meu trabalho, a imensa paciência em solucionar as inúmeras dúvidas que surgiam e a sua exemplar dedicação.

A todos os meus queridos amigos, de perto ou de longe (novamente, sem citar nomes, para não cometer injustiças), agradeço o companheirismo e os momentos inesquecíveis que passamos juntos.

Agradeço ao meu amigo Abel Soares Siqueira por disponibilizar a interface desenvolvida por ele em C++ para a utilização do pacote CHOLMOD, e pela sua paciência em ajudar a entender e a usar o referido pacote em minha tese.

Finalmente, agradeço a todos os professores do IMECC que contribuíram para a minha formação. Também sou grato aos funcionários da secretaria de pós-graduação do IMECC (Ednaldo, Lívia e Tânia) pelos excelentes serviços prestados, e à CAPES e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nos últimos anos, a otimização topológica vem sendo amplamente adotada nas indústrias automotiva e aeroespacial, e no projeto de um tipo especial de estruturas, denominado *mecanismo flexível*. Grande parte dos trabalhos na área de otimização topológica considera que a estrutura possui uma relação linear entre deformações e deslocamentos, ou seja, supõe-se que os deslocamentos sofridos pela estrutura sejam pequenos. Todavia, para algumas estruturas, essa hipótese não é válida, sendo necessário supor que os deslocamentos são grandes, o que implica numa relação não linear entre deformações e deslocamentos. Nesse caso, dizemos que a estrutura está sob *não linearidade geométrica*. O objetivo desta tese de doutorado é a obtenção da topologia ótima de estruturas e de mecanismos flexíveis sob não linearidade geométrica através um novo algoritmo de otimização, denominado *Programação Linear por Partes Sequencial* (PLPS). Este método consiste na resolução de subproblemas de programação linear por partes convexos, onde são introduzidas informações sobre a diagonal da matriz Hessiana da função objetivo. Para acelerar o algoritmo, tais subproblemas são convertidos em problemas de programação linear. Provamos que a PLPS é globalmente convergente a pontos estacionários. Além disso, nossos experimentos numéricos realizados com estruturas e mecanismos flexíveis sujeitos a grandes deslocamentos mostram que a PLPS é eficiente e robusta.

Palavras-chave: Otimização Topológica, Programação Não Linear, Mecânica Não Linear.

Abstract

In the last years, topology optimization has been broadly applied in the automotive and aerospace industries, and to a special kind of structure, named *compliant mechanism*. Most papers on topology optimization consider that the structure has a linear relation between strains and displacements, meaning that the displacements of the structure are small. However, for some structures this assumption is not valid, and it is necessary to suppose that the displacements are large, implying in a nonlinear relation between strains and displacements. In this case, we say that the structure is under *geometrical nonlinearity*. The objective of this doctoral thesis is to obtain the optimum topology of structures and compliant mechanisms under geometrical nonlinearity through a new optimization algorithm, named *Sequential Piecewise Linear Programming* (SPLP). This method consists in the solution of convex piecewise linear programming subproblems that contain information about the diagonal of the Hessian matrix of the objective function. To speed up the algorithm, these subproblems are converted into linear programming ones. We prove that the SPLP is globally convergent to stationary points. Besides, our numerical experiments with structures and compliant mechanisms under large displacements also show that the SPLP is efficient and robust.

Key words: Topology Optimization, Nonlinear Programming, Nonlinear Mechanics.

Sumário

Resumo	ix
Abstract	xi
Introdução	1
1 O problema de otimização topológica	5
1.1 Otimização topológica de uma estrutura	6
1.1.1 Flexibilidade média	7
1.1.2 Formulação do problema de otimização topológica	8
1.2 Otimização topológica de um mecanismo flexível	9
1.2.1 Energia mútua de uma estrutura	9
1.2.2 Formulação de Nishiwaki <i>et al.</i>	11
1.2.3 Formulação de Pedersen, Buhl e Sigmund	15
2 Conceitos básicos sobre Mecânica do Contínuo	19
2.1 Descrição do movimento de um corpo contínuo	19
2.2 Gradiente de Deformação	20
2.3 Mudança de área devido à deformação	22
2.4 Tensões de Piola-Kirchhoff	23
3 Método dos Elementos Finitos e Otimização Topológica	27
3.1 Discretização do domínio Ω	27
3.2 Interpolação dos deslocamentos	28
3.3 Elementos finitos retangulares	28
3.4 Condições de equilíbrio estático	33
3.4.1 Pequenos deslocamentos	34
3.4.2 Grandes deslocamentos	38
3.5 Matrizes de rigidez globais	49
4 O problema de otimização topológica no domínio discretizado	53
4.1 Estruturas	55

4.2	Mecanismos flexíveis	58
4.3	Dificuldades numéricas do método de Newton	62
4.3.1	Eliminação de nós rodeados por elementos vazios	63
4.3.2	Método do comprimento de arco	64
4.3.3	Escalamento das densidades	67
4.4	Derivadas da função objetivo do problema de otimização topológica	70
4.4.1	Estruturas	70
4.4.2	Mecanismos flexíveis	72
4.5	Tabuleiro de xadrez	74
4.6	Filtro das densidades ponderadas	76
4.7	Filtro de Heaviside	77
5	Programação Linear por Partes Sequencial	81
5.1	Descrição do método	81
5.2	Critério de aceitação ou rejeição do passo	84
5.3	O modelo linear por partes	86
5.4	Um algoritmo para a PLPS	91
5.5	O algoritmo está bem definido	97
5.6	Todo ponto limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ é φ -estacionário	102
5.7	O algoritmo encontra um ponto estacionário	105
5.8	Escolha da matriz diagonal \mathbf{B}_k	112
5.8.1	Aproximação baseada em variáveis recíprocas	112
5.8.2	Aproximação baseada em variáveis exponenciais	114
5.8.3	Aproximação quase-Newton diagonal	115
6	Resultados Computacionais	117
6.1	Problemas testados	117
6.1.1	Exemplo 1 - Viga em balanço	117
6.1.2	Exemplo 2 - Placa apoiada nos pontos médios das laterais	118
6.1.3	Exemplo 3 - Placa biengastada	118
6.1.4	Exemplo 4 - Viga biengastada	119
6.1.5	Exemplo 5 - Viga MBB	119
6.1.6	Exemplo 6 - Pinça apoiada no canto superior esquerdo	120
6.1.7	Exemplo 7 - Pinça engastada na lateral esquerda	121
6.1.8	Exemplo 8 - Inversor de deslocamentos	121
6.2	Descrição dos testes	122
6.3	Resultados para o Exemplo 1	126
6.4	Resultados para o Exemplo 2	130
6.5	Resultados para o Exemplo 3	132

6.6	Resultados para o Exemplo 4	134
6.7	Resultados para o Exemplo 5	137
6.8	Resultados para o Exemplo 6	138
6.9	Resultados para o Exemplo 7	142
6.10	Resultados para o Exemplo 8	144
6.11	Testes adicionais com o filtro de Heaviside	146
6.11.1	Exemplo 9 - Viga em balanço	146
6.11.2	Exemplo 10 - Viga biapoiada	146
6.11.3	Exemplo 11 - Inversor de deslocamentos	147
6.11.4	Resultados para os Exemplos 9, 10 e 11	148
6.12	Perfil de desempenho dos algoritmos	150
6.12.1	Análise com relação ao tempo	151
6.12.2	Análise dos valores da função objetivo	154
	Conclusões	157
	Referências Bibliográficas	161

Introdução

A *otimização topológica* é um método computacional introduzido por Bendsøe e Kikuchi [7], com o objetivo de encontrar uma estrutura que seja o mais rígida possível, satisfazendo, por exemplo, uma restrição sobre a quantidade de material no interior de um domínio Ω , que é um meio contínuo. Essa estrutura está sujeita à ação de forças externas e à aplicação de alguns apoios, que são responsáveis pela sua sustentação.

Cada um dos pontos de Ω pode conter ou não conter material. Matematicamente, isso pode ser descrito através de uma variável χ que assume o valor 1 se o ponto contém material, e que tem valor 0, caso contrário. Entretanto, sob o ponto de vista computacional, é extremamente caro fazer com que cada ponto de Ω seja representado por apenas essas duas possibilidades. Dessa forma, a variável discreta χ é substituída por uma variável contínua $\rho \in [0, 1]$. Porém, na estrutura final, espera-se que ρ assumam apenas os valores 0 ou 1. Com o intuito de eliminar valores intermediários de ρ , Bendsøe [6] introduziu o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), no qual ρ é substituído por ρ^p . O parâmetro $p > 1$ tem o papel de reduzir o aparecimento de densidades intermediárias.

Existem outras alternativas que permitem melhorar o desempenho de uma estrutura, antecessoras ao advento da otimização topológica. Na *otimização paramétrica* (vide Vanderplaats [63]), o objetivo é encontrar os valores ótimos de alguns parâmetros da estrutura (como, por exemplo, a espessura ou a área da seção transversal de uma viga), cujo formato é previamente conhecido, de modo que ela seja o mais rígida possível. Outra estratégia é a *otimização de forma* (vide Haftka e Grandhi [38]), na qual procura-se otimizar o contorno de uma estrutura já conhecida. Com isso, a discretização do domínio deve ser refeita cada vez que a forma da estrutura é modificada, o que produz um aumento do custo computacional associado à resolução do problema.

Ao contrário das duas abordagens citadas acima, na otimização topológica, não é necessário conhecer de antemão o formato da estrutura. Deve-se definir apenas o domínio no qual a estrutura deve ser construída, a quantidade disponível de material, as forças externas aplicadas e os apoios. A topologia ótima da estrutura é determinada pela distribuição de material no interior do domínio. Isso representa uma grande vantagem, pois a discretização do domínio permanece inalterada durante todo o processo, mas

a sua topologia pode ser alterada durante a resolução do problema, garantindo a sua máxima eficiência.

Nos últimos anos, a otimização topológica vem sendo amplamente adotada na indústria automotiva e aeroespacial (vide Bendsøe e Sigmund [8]), e no projeto de uma classe especial de estruturas, denominadas *mecanismos flexíveis* (vide Sigmund [60], Larsen, Sigmund e Bowstra [45], Nishiwaki *et al.* [53], Lima [47], Gomes e Senne [32]), que são estruturas projetadas para que haja deslocamentos em determinadas direções. Essas estruturas podem, por exemplo, segurar um determinado objeto ou acionar algum dispositivo, e também são usadas para construir sistemas microeletromecânicos (MEMS, da sigla em Inglês). Tais sistemas possuem circuitos eletrônicos acoplados e são fabricados em escala micrométrica, através de técnicas empregadas na construção de circuitos integrados para computadores. De acordo com Lima [47], os MEMS têm grande aplicação nas áreas industrial e biomédica, como, por exemplo, em garras, pinças, tesouras e em equipamentos para laparoscopia. Lima [47] ainda destaca a presença de mecanismos flexíveis em componentes de máquinas fotográficas e no cabeçote leitor de discos rígidos de computadores. Deve-se ressaltar que um mecanismo flexível deve ter flexibilidade suficiente para produzir uma deflexão máxima num determinado ponto e numa determinada direção, mas que também deve ser rígido o suficiente para suportar os carregamentos nele aplicados, evitando rupturas ou quebras.

A maioria dos trabalhos na área de otimização topológica consideram que a estrutura possui uma relação linear entre deformações e deslocamentos, ou seja, supõe-se que os deslocamentos sofridos pela estrutura são pequenos. Todavia, para algumas estruturas, essa hipótese nem sempre é válida. Quando isso acontece, é necessário supor que os deslocamentos sejam grandes, o que implica numa relação não linear entre deformações e deslocamentos. Devido à dificuldade em relação à implementação computacional, o número de trabalhos que lidam com a hipótese de não linearidade geométrica (ou seja, grandes deslocamentos) não é muito grande. Dentre eles, citamos Jog [28], Buhl, Pedersen e Sigmund [14], Bruns e Tortorelli [11], Gea e Luo [30], Bruns, Sigmund e Tortorelli [12], Ohsaki e Nishiwaki [54], Luo e Tong [49], Lahuerta, Rojas e Silva [42], Lazarov, Schevenels e Sigmund [41], Lahuerta [43] e Lee e Park [46].

O objetivo central deste trabalho é a resolução eficiente de problemas de otimização topológica de estruturas e de mecanismos flexíveis sob a hipótese de não linearidade geométrica, através de um novo método de programação não linear, denominado *Programação Linear por Partes Sequencial* (PLPS), que representa uma extensão da versão globalmente convergente da Programação Linear Sequencial (PLS) proposta por Gomes e Senne [32]. A PLPS permite a introdução de alguma informação de segunda ordem da função objetivo, de modo que, a cada iteração, resolve-se um subproblema linear por partes, que é convertido em um problema de programação linear.

No Capítulo 1, fazemos uma introdução ao problema de otimização topológica e descrevemos sua formulação para a determinação da topologia ótima de uma estrutura rígida e de um mecanismo flexível. Para uma boa compreensão da formulação do problema de otimização topológica de estruturas sob não linearidade geométrica, relembramos, no Capítulo 2, alguns conceitos básicos sobre Mecânica do Contínuo. O tratamento numérico do problema em questão, que consiste na aplicação do Método dos Elementos Finitos, é descrito no Capítulo 3. Já no Capítulo 4, apresentamos a formulação dos problemas de otimização topológica em sua forma discretizada, discutimos algumas dificuldades numéricas inerentes à hipótese de grandes deslocamentos, e apresentamos alternativas para superá-las. No Capítulo 5, descrevemos a Programação Linear por Partes Sequencial, e provamos que este novo algoritmo é globalmente convergente. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos os resultados obtidos com a aplicação a problemas reais de otimização topológica de estruturas e mecanismos flexíveis sob não linearidade geométrica, e fazemos uma análise comparativa do desempenho da PLPS com a PLS e com uma versão da Programação Quadrática Sequencial (PQS), na qual usamos uma matriz diagonal para aproximar a matriz Hessiana da função objetivo.

Capítulo 1

O problema de otimização topológica

Esta tese de doutorado é uma extensão do trabalho realizado anteriormente pelo autor em sua dissertação de mestrado, intitulada “Otimização Topológica de Mecanismos Flexíveis” [59]. Como a descrição inicial dos problemas de otimização topológica é genérica, este capítulo é uma reprodução do Capítulo 2 de [59], que está sendo apresentado novamente neste trabalho com o objetivo de facilitar o entendimento do leitor e para a completude do texto.

Neste trabalho, estudamos a aplicação da *otimização topológica* para a obtenção de estruturas e mecanismos flexíveis sob a hipótese de grandes deslocamentos. A estrutura a ser projetada deve estar contida em um domínio Ω , sujeita à aplicação de forças externas e à imposição de condições de contorno. Em geral, essas condições são representadas pela colocação de apoios, que têm o papel de sustentar a estrutura.

A resolução de um problema de otimização topológica consiste em decidir em quais pontos de Ω haverá material. Dessa forma, a topologia ótima da estrutura pode ser representada por uma função discreta $\chi(x)$, definida em cada ponto $x \in \Omega$ (*variáveis de projeto*) como

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Omega_D, \\ 0, & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_D, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $\Omega_D \subset \Omega$ é a região da estrutura onde há presença de material.

Devido à mudança brusca no valor das variáveis de projeto, o uso dessa função faz com que o problema a ser resolvido seja mal condicionado. Uma maneira possível de evitar este inconveniente é substituir a função discreta (1.1) por uma função contínua $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que represente a *densidade* de material em cada ponto $x \in \Omega$.

Quando adotamos uma função contínua ρ para representar a distribuição de material

da estrutura em Ω , pode ocorrer a formação de regiões com densidades intermediárias, ou seja, densidades cujos valores pertencem ao intervalo $(0, 1)$. Com o objetivo de contornar esta dificuldade, Bendsøe [6] introduziu o *método de densidades*, ou *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP), no qual, em lugar de ρ , utiliza-se a função ρ^p para controlar a distribuição de material, onde $p > 1$ é um parâmetro de penalização responsável pela diminuição da ocorrência das densidades intermediárias.

A Figura 1.1 ilustra o comportamento das densidades penalizadas em função do aumento do fator p . Observando este gráfico, notamos que, à medida que o valor de p aumenta, as densidades penalizadas ficam cada vez mais próximas de 0.

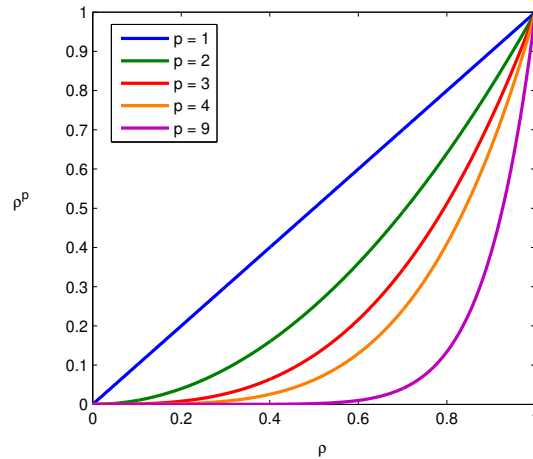


Figura 1.1: Efeito do aumento do fator de penalização p do SIMP sobre as densidades.

Rietz [57] adverte que, na prática, deve-se tomar cuidado com a penalização excessiva das densidades intermediárias (fator p muito alto), pois, à medida que aumentamos o valor de p , aproximamos cada vez mais o problema contínuo de um problema discreto, fazendo com que reapareça a instabilidade numérica gerada pela variação brusca dos valores das densidades.

Nas próximas seções, introduziremos as formulações para os problemas de otimização topológica de uma estrutura e de um mecanismo flexível.

1.1 Otimização topológica de uma estrutura

O objetivo deste trabalho é estudar algumas formulações para o problema de otimização topológica de mecanismos flexíveis, sob a hipótese de não linearidade geométrica. Entretanto, para facilitar a compreensão do comportamento físico desses mecanismos, apresentaremos, nesta seção, uma formulação matemática para um problema de otimização topológica mais simples, que consiste em obter a estrutura mais rígida que pode

ser construída a partir do volume de material disponível, suportando os carregamentos aplicados e atendendo às condições de contorno do problema.

A rigidez de uma estrutura está associada ao conceito de *flexibilidade média*, de tal forma que a estrutura mais rígida corresponde àquela que apresenta a menor flexibilidade. Portanto, a formulação matemática de um problema de otimização topológica estrutural terá como objetivo minimizar a flexibilidade média da estrutura, atendendo às restrições de volume do material e garantindo que o corpo esteja em equilíbrio estático.

1.1.1 Flexibilidade média

Considere um corpo elástico em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que deve ser mantido fixo em uma região Γ_d , conforme mostra a Figura 1.2, e que é submetido à aplicação de um carregamento \mathbf{t}^1 na região Γ_{t^1} .

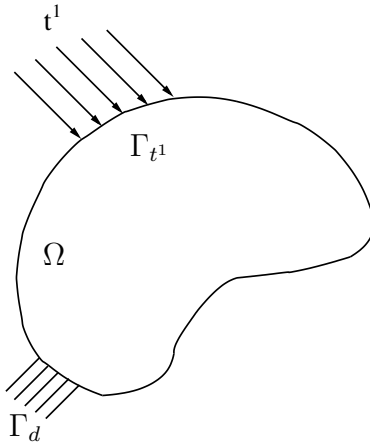


Figura 1.2: Corpo submetido à aplicação de um carregamento \mathbf{t}^1 e mantido fixo numa região Γ_d de Ω .

O carregamento aplicado ao corpo gera um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^1 = [u_1^1 \ u_2^1]^T$. A componente u_1^1 representa o deslocamento na horizontal e a componente u_2^1 refere-se ao deslocamento na vertical. Cada componente do vetor \mathbf{u}^1 deve ser uma função pertencente a um conjunto de *funções admissíveis*, definido por

$$V = \{v_i \in H^1(\Omega) \mid v_i = 0 \text{ em } \Gamma_d, \ i = 1, 2\}, \quad (1.2)$$

onde $H^1(\Omega)$ denota o espaço vetorial das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\left[\int_{\Omega} f^2 \, d\Omega \right]^{1/2} < \infty \quad \text{e} \quad \left[\int_{\Omega} \|\nabla f\|^2 \, d\Omega \right]^{1/2} < \infty.$$

Quando uma estrutura é submetida à situação de carregamento ilustrada pela Figura 1.2, consideramos a *flexibilidade média* como sendo a energia de deformação armazenada pela estrutura quando o carregamento \mathbf{t}^1 é aplicado na região Γ_{t^1} , definida por

$$L^1(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^1 \, d\Gamma \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V. \quad (1.3)$$

A flexibilidade média é a função objetivo do problema de otimização topológica de uma estrutura rígida, que é apresentada a seguir.

1.1.2 Formulação do problema de otimização topológica

Uma estrutura mantida fixa em uma área de sua superfície (como no caso ilustrado na Figura 1.2) sofre deformação quando nela é aplicado um carregamento externo. O trabalho interno associado a essa deformação é dado pela forma bilinear $a : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad \mathbf{v} \in V, \quad (1.4)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um tensor de deformações, \mathbf{C} é um tensor de elasticidade simétrico associado às propriedades do material que compõe a estrutura em questão, e V é o conjunto de funções admissíveis definido em (1.2).

O trabalho realizado pelo carregamento externo aplicado à estrutura é definido pela forma linear $b : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$b(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma, \quad \mathbf{v} \in V, \quad (1.5)$$

onde Γ é a fronteira do domínio Ω .

Usando (1.4) e (1.5), a energia potencial total da estrutura é definida por um funcional $\Pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\Pi = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in V. \quad (1.6)$$

Se $\mathbf{u}^1 \in V$ é o campo de deslocamentos associado à aplicação do carregamento \mathbf{t}^1 na estrutura, através do cálculo dos pontos estacionários do funcional (1.6), pode-se mostrar que a condição de equilíbrio estático da estrutura é dada por

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = b(\mathbf{u}^1). \quad (1.7)$$

Substituindo (1.3) em (1.7), obtemos

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = L^1(\mathbf{u}^1). \quad (1.8)$$

Portanto, quando a estrutura está em equilíbrio estático, o trabalho interno devido à deformação da estrutura é igual à sua flexibilidade média.

Em geral, quando construímos uma estrutura, temos uma quantidade limitada de material disponível. Dessa forma, devemos impor uma restrição sobre o volume máximo que essa estrutura deve ter. Denotando por Ω_{\max} esse volume máximo, devemos ter

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max}, \quad (1.9)$$

onde $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$ é a função de densidade que representa a quantidade de material usada para construir a estrutura.

Para obtermos a estrutura ótima, o objetivo do problema deve ser maximizar a rigidez da estrutura, o que é equivalente a minimizar a sua flexibilidade média. Uma vez que a estrutura deve estar em equilíbrio estático e levando em conta que a quantidade de material para construí-la é limitada, obtemos o seguinte problema de otimização topológica:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & L^1(\mathbf{u}^1) \\ \text{s. a} \quad & a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = L^1(\mathbf{u}^1), \quad \mathbf{u}^1 \in V \\ & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\ & 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Na próxima seção, introduziremos o problema de otimização topológica de um mecanismo flexível.

1.2 Otimização topológica de um mecanismo flexível

Conforme dissemos anteriormente, um mecanismo flexível deve ser rígido o suficiente para que seja capaz de suportar a aplicação de carregamentos externos, mas deve ser flexível o bastante para produzir um deslocamento máximo em um ponto e em uma direção de interesse. Diante dessas duas características antagônicas, torna-se necessário o desenvolvimento de duas formulações distintas para representar o comportamento de um mecanismo flexível, uma das quais deve descrever o seu *comportamento cinemático*, e a outra, o seu *comportamento estrutural*. De acordo com Lima [47], o comportamento cinemático “*é a capacidade que o mecanismo possui de se movimentar ao longo de uma direção especificada*”, e o comportamento estrutural “*provê a rigidez suficiente para garantir a forma do mecanismo*”. Como vimos, a flexibilidade média de uma estrutura está relacionada ao seu comportamento estrutural. Por sua vez, o comportamento cinemático da estrutura está associado à *energia mútua*, que introduzimos a seguir.

1.2.1 Energia mútua de uma estrutura

No mesmo corpo ilustrado na Figura 1.2, que é mantido fixo na região Γ_d , consideramos agora a aplicação de um carregamento \mathbf{t}^2 na região Γ_{t^2} de Ω , conforme mostrado na Figura 1.3. Esse carregamento produz um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^2 = [u_1^2 \ u_2^2]^T$. É importante notar que o carregamento \mathbf{t}^1 também é aplicado na mesma região Γ_{t^1} de

Ω assim como na Figura 1.2, embora ele não tenha sido representado na Figura 1.3 por questão de simplicidade.

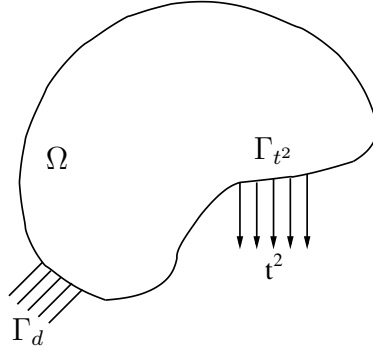


Figura 1.3: Corpo submetido à aplicação de um carregamento \mathbf{t}^2 e mantido fixo numa região Γ_d de Ω .

Para definir a energia mútua, supomos que a estrutura é submetida simultaneamente aos dois casos de carregamento. A energia mútua associada ao carregamento \mathbf{t}^1 é a energia armazenada pela estrutura quando a região Γ_{t^1} é deformada ao longo da direção do carregamento \mathbf{t}^1 , devido à aplicação do carregamento \mathbf{t}^2 em Γ_{t^2} . Analogamente, a energia mútua ao carregamento \mathbf{t}^2 é a energia armazenada pela estrutura quando a região Γ_{t^2} é deformada ao longo da direção do carregamento \mathbf{t}^2 devido à aplicação do carregamento \mathbf{t}^1 em Γ_{t^1} . Sendo assim, para cada um dos dois casos de carregamento em questão, as respectivas energias mútuas são definidas por

$$L^1(\mathbf{u}^2) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma \quad \text{para } \mathbf{u}^2 \in V, \quad (1.11)$$

que é associada ao carregamento \mathbf{t}^1 , e

$$L^2(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^2}} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \quad \text{para } \mathbf{u}^1 \in V, \quad (1.12)$$

relacionada ao carregamento \mathbf{t}^2 .

Calculando os pontos estacionários do funcional (1.6), mostra-se que

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^1 \cdot \mathbf{u}^2 d\Gamma = L^1(\mathbf{u}^2) \quad (1.13)$$

e

$$a(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^2}} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma = L^2(\mathbf{u}^1), \quad (1.14)$$

ou seja, o trabalho interno devido à deformação do mecanismo é igual à energia mútua em cada caso de carregamento ilustrado pelas Figuras 1.2 e 1.3. Quando a estrutura é submetida simultaneamente aos dois casos de carregamento em questão, mostra-se também que

$$L^1(\mathbf{u}^2) = L^2(\mathbf{u}^1), \quad (1.15)$$

ou, usando (1.13) e (1.14),

$$a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = a(\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^1). \quad (1.16)$$

Portanto, (1.15) e (1.16) nos dizem que o trabalho realizado pelo carregamento \mathbf{t}^1 ao longo do campo de deslocamentos \mathbf{u}^2 da região Γ_{t^2} é igual ao trabalho realizado pelo carregamento \mathbf{t}^2 ao longo do campo de deslocamentos \mathbf{u}^1 da região Γ_{t^1} . Este resultado é conhecido como *Teorema de Maxwell-Betti* (vide Cook e Young [19]).

No caso da otimização topológica de um mecanismo flexível, além de minimizar a flexibilidade média, para obter uma estrutura rígida que suporte a ação das forças externas, ainda é necessário maximizar a sua energia mútua. A seguir, apresentaremos a formulação de Nishiwaki *et al.* [53] para o problema de otimização topológica de um mecanismo flexível.

1.2.2 Formulação de Nishiwaki *et al.*

Em Nishiwaki *et al.* [53], foi desenvolvida uma formulação para o projeto de um mecanismo flexível que consiste na análise de dois casos distintos de carregamento. No primeiro deles, considera-se a aplicação simultânea de um carregamento \mathbf{t}^1 numa região Γ_{t^1} da fronteira do domínio Ω (situação mostrada na Figura 1.2) e de outro carregamento fictício unitário \mathbf{t}^2 numa outra região Γ_{t^2} da fronteira de Ω (conforme mostra a Figura 1.3). Para determinar uma estrutura que seja uma solução ótima deste problema, resolvemos um problema de otimização topológica que consiste em maximizar a energia mútua do mecanismo flexível, sujeita às condições de equilíbrio associadas aos carregamentos em questão, e a uma restrição sobre o volume máximo de material que esse mecanismo deve conter.

O segundo caso de carregamento representa um esforço de reação, aplicado na mesma região, na mesma direção, mas em sentido contrário ao do carregamento \mathbf{t}^2 , com a condição de que o deslocamento na região Γ_{t^1} seja nulo. De acordo com Lima [47], essa restrição ao deslocamento em Γ_{t^1} tem o papel de simular o esforço de reação em Γ_{t^1} quando o mecanismo flexível é deformado. Nesse segundo caso de carregamento, procura-se a solução para o problema de minimizar a flexibilidade média do mecanismo, sujeita à sua condição de equilíbrio associada ao esforço de reação, e à mesma restrição sobre o volume máximo, como no primeiro caso.

Se considerássemos apenas o primeiro caso de carregamento, poderíamos obter um mecanismo extremamente flexível, que teria um comportamento bastante semelhante ao de um fluido. Esse comportamento não é adequado, pois o mecanismo deve manter o seu formato quando ele é submetido à ação de carregamentos. Por outro lado, se apenas o segundo caso de carregamento fosse considerado, o mecanismo seria extremamente rígido, de modo a impedir a sua deformação. Diante dessas duas situações conflitantes,

Nishiwaki *et al.* [53] propuseram uma formulação multiobjetivo que consiste na análise dos dois casos de carregamento em um único problema de otimização, no qual a energia mútua do mecanismo é maximizada e a sua flexibilidade média é minimizada.

Nas subseções seguintes, apresentamos a formulação para os dois casos de carregamento descritos acima e, em seguida, introduzimos a formulação multiobjetivo proposta por Nishiwaki *et al.* [53].

Formulação para o comportamento cinemático

Considere o mecanismo flexível do domínio Ω , mostrado na Figura 1.4, que é mantido fixo na região Γ_d e está sujeito à aplicação de um carregamento \mathbf{t}^1 numa superfície Γ_{t^1} qualquer do domínio. O carregamento \mathbf{t}^1 produz um campo de deslocamentos \mathbf{u}^1 sobre o mecanismo. Agora, considere a aplicação de um carregamento fictício unitário \mathbf{t}^2 na direção e no sentido do deslocamento desejado, atuando em outra superfície Γ_{t^2} do domínio, que por sua vez gera um outro campo de deslocamentos \mathbf{u}^2 sobre o mecanismo. Os carregamentos \mathbf{t}^1 e \mathbf{t}^2 devem ser aplicados simultaneamente no mecanismo.

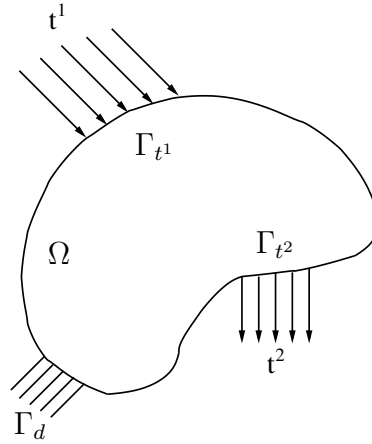


Figura 1.4: Condição de carregamento para a formulação do comportamento cinemático de um mecanismo flexível.

Conforme Nishiwaki *et al.* [53] e Lima [47], o problema de otimização para o comportamento cinemático de um mecanismo flexível é formulado como

$$\begin{aligned}
 \max_{\rho} \quad & L^2(\mathbf{u}^1) = \int_{\Gamma_{t^2}} \mathbf{t}^2 \cdot \mathbf{u}^1 d\Gamma \\
 \text{s. a} \quad & a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), & \text{para } \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1 \in V_a \\
 & a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), & \text{para } \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \in V_a \\
 & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
 & 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde

$$V_a = \{v_i \in H^1(\Omega) \mid v_i = 0 \text{ em } \Gamma_d, i = 1, 2\}, \tag{1.18}$$

é o conjunto de deslocamentos admissíveis (vide definição análoga dada por (1.2)), Ω_{\max} é o volume máximo de material que o mecanismo flexível deve conter, e $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de densidade, definida em cada ponto $x \in \Omega$.

Formulação para o comportamento estrutural

Considere o mecanismo flexível do domínio Ω mostrado na Figura 1.5, que é mantido fixo na região Γ_d . De acordo com Nishiwaki *et al.* [53] e Lima [47], a região Γ_{t^1} também deve ser fixada na mesma direção onde o carregamento \mathbf{t}^1 é aplicado, com o objetivo de representar o esforço de reação na região Γ_{t^1} quando o mecanismo é deformado pelo carregamento $\mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2$, aplicado em Γ_{t^2} , na mesma direção e em sentido contrário ao carregamento \mathbf{t}^2 , produzindo um campo de deslocamentos $\mathbf{u}^3 = [u_1^3 \ u_2^3]^T$. Dessa forma, o mecanismo será rígido o suficiente para que possa suportar os carregamentos aplicados.

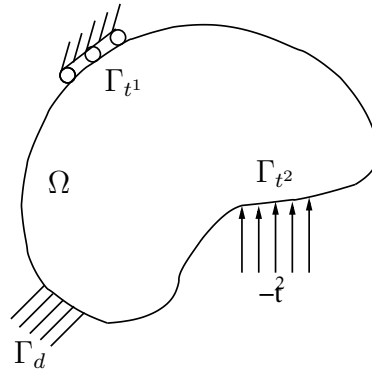


Figura 1.5: Condição de carregamento para a formulação do comportamento estrutural de um mecanismo flexível.

Segundo Nishiwaki *et al.* [53] e Lima [47], o problema de otimização associado ao comportamento estrutural de um mecanismo flexível é formulado como

$$\begin{aligned}
 \min_{\rho} \quad & L^3(\mathbf{u}^3) = \int_{\Gamma_{t^1}} \mathbf{t}^3 \cdot \mathbf{u}^3 d\Gamma \\
 \text{s. a} \quad & \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \\
 & a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3), \quad \text{para } \mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3 \in V_b \\
 & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
 & 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

onde Ω_{\max} representa o volume máximo de material que o mecanismo flexível deve conter, e

$$V_b = \{v_i \in H^1(\Omega) \mid v_i = 0 \text{ em } \Gamma_d \text{ e } \Gamma_{t^1}, \ i = 1, 2\} \tag{1.20}$$

é o conjunto de deslocamentos admissíveis. Note que o conjunto V_b tem uma condição adicional sobre os deslocamentos admissíveis, que significa que os deslocamentos devem ser nulos também sobre a superfície Γ_{t^1} , ou seja, que $v_i = 0$ em Γ_{t^1} , para $i = 1, 2$.

Problema de otimização multiobjetivo

Como desejamos maximizar a energia mútua $L^2(\mathbf{u}^1)$ e minimizar a flexibilidade média $L^3(\mathbf{u}^3)$ do mecanismo simultaneamente, devemos reunir as formulações para os comportamentos cinemático e estrutural para um mecanismo flexível em um único problema. Nishiwaki *et al.* [53] sugerem um problema de otimização multiobjetivo, definido como

$$\begin{aligned}
& \max_{\rho} (L^2(\mathbf{u}^1), -L^3(\mathbf{u}^3)) \\
& \text{s. a } \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \\
& \quad a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), \quad \text{para } \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1 \in V_a \\
& \quad a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), \quad \text{para } \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \in V_a \\
& \quad a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3), \quad \text{para } \mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3 \in V_b \\
& \quad \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
& \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

A função objetivo do problema (1.21) pode ser reescrita atribuindo-se pesos à energia mútua e à flexibilidade média, ou seja,

$$\begin{aligned}
& \max_{\rho} w_1 L^2(\mathbf{u}^1) + w_2 (-L^3(\mathbf{u}^3)) \\
& \text{s. a } \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \\
& \quad a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), \quad \text{para } \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1 \in V_a \\
& \quad a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), \quad \text{para } \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \in V_a \\
& \quad a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3), \quad \text{para } \mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3 \in V_b \\
& \quad \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
& \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{1.22}$$

onde $w_1, w_2 \geq 0$, com $w_1 + w_2 = 1$, são os pesos atribuídos à energia mútua e à flexibilidade média, respectivamente, ρ é a variável de projeto (densidade de cada ponto do domínio Ω), $L^2(\mathbf{u}^1)$ é a energia mútua e $L^3(\mathbf{u}^3)$ é a flexibilidade média do mecanismo flexível. Cabe lembrar que os deslocamentos \mathbf{u}^1 , \mathbf{u}^2 e \mathbf{u}^3 são funções da densidade de cada ponto de Ω , ou seja, $\mathbf{u}^1 \equiv \mathbf{u}^1(\rho)$, $\mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}^2(\rho)$ e $\mathbf{u}^3 \equiv \mathbf{u}^3(\rho)$.

Nishiwaki *et al.* [53] observam que as ordens de grandeza de $L^2(\mathbf{u}^1)$ e $L^3(\mathbf{u}^3)$ podem ser muito diferentes, o que pode tornar o problema (1.22) mal condicionado. Dessa forma, eles sugerem que esse problema seja reescrito como

$$\begin{aligned}
& \max_{\rho} \frac{L^2(\mathbf{u}^1)}{L^3(\mathbf{u}^3)} \\
& \text{s. a } \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \\
& a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), \quad \text{para } \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1 \in V_a \\
& a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), \quad \text{para } \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \in V_a \\
& a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3), \quad \text{para } \mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3 \in V_b \\
& \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
& 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

A função objetivo do problema (1.23), que é a razão entre a energia mútua e a flexibilidade média do mecanismo flexível, pode ser interpretada como um fator de eficiência do mecanismo, de modo que, quanto maior esse fator, melhor será o desempenho do mecanismo.

De acordo com Lima [47], a função objetivo do problema (1.23) pode não permitir um controle eficiente sobre a energia mútua e a flexibilidade média. Sendo assim, ele sugere a atribuição de fatores de peso para cada uma dessas duas energias, de modo que o problema (1.23) é reescrito como

$$\begin{aligned}
& \max_{\rho} w \log(L^2(\mathbf{u}^1)) - (1 - w) \log(L^3(\mathbf{u}^3)) \\
& \text{s. a } \mathbf{t}^3 = -\mathbf{t}^2 \\
& a(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1) = L^1(\mathbf{v}^1), \quad \text{para } \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1 \in V_a \\
& a(\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2) = L^2(\mathbf{v}^2), \quad \text{para } \mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2 \in V_a \\
& a(\mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3) = L^3(\mathbf{v}^3), \quad \text{para } \mathbf{u}^3, \mathbf{v}^3 \in V_b \\
& \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
& 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,
\end{aligned} \tag{1.24}$$

onde $0 \leq w \leq 1$ é um fator de peso que faz com que o mecanismo seja mais flexível e menos rígido, ou vice-versa.

É muito importante lembrar que a formulação (1.24) deve ser usada com cautela, pois, se a energia mútua $L^2(\mathbf{u}^1)$ for nula ou negativa, o seu logaritmo não poderá ser calculado. Por outro lado, a energia de flexibilidade média $L^3(\mathbf{u}^3)$ é sempre positiva.

1.2.3 Formulação de Pedersen, Buhl e Sigmund

Nesta seção, vamos apresentar a formulação do problema de otimização topológica de um mecanismo flexível proposta por Pedersen, Buhl e Sigmund [55].

A Figura 1.6 mostra a aplicação de um carregamento externo \mathbf{t}^1 num ponto 1 da superfície do domínio Ω e de uma força de reação \mathbf{t}^2 produzida por uma mola de rigidez k_{out} sobre o mecanismo em um outro ponto 2 da superfície de Ω . A região $\Gamma_d \subset \Omega$

permanece fixa. O ponto 1 é denominado *ponto de entrada* e o ponto 2 é chamado de *ponto de saída*.

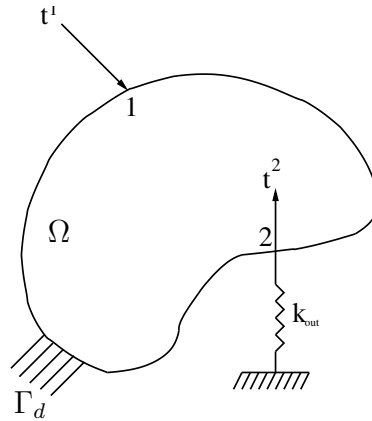


Figura 1.6: Aplicação de um carregamento externo \mathbf{t}^1 num mecanismo flexível e ação da força de reação \mathbf{t}^2 exercida por uma mola de rigidez k_{out} sobre o mecanismo.

Pedersen, Buhl e Sigmund [55] propuseram uma formulação que consiste na maximização do deslocamento u_{out} no ponto de saída, sujeito a uma restrição sobre a condição de equilíbrio estático do mecanismo flexível, a um volume máximo de material que o mecanismo flexível deve conter, a uma restrição sobre os valores que as densidades de material podem assumir (valores entre 0 e 1), e a um limitante superior para o deslocamento no ponto 1, de acordo com a Figura 1.6. De acordo com Sigmund [60], a restrição de deslocamento máximo no ponto de entrada representa uma maneira de controlar indiretamente a tensão máxima sofrida pelo mecanismo flexível, uma vez que a imposição direta de restrições de tensão aumenta drasticamente a complexidade de resolução de um problema de otimização topológica.

Sejam F_{in} a intensidade do carregamento externo \mathbf{t}^1 , R_s a intensidade da força de reação \mathbf{t}^2 , u_{in} o deslocamento no ponto de entrada produzido pela aplicação de \mathbf{t}^1 , u_{out} o deslocamento no ponto de saída, e k_{out} a rigidez da mola fixada no ponto de saída do mecanismo flexível. O trabalho realizado por \mathbf{t}^1 sobre o mecanismo é definido por

$$W_{in} = \frac{1}{2} F_{in} u_{in} \quad (1.25)$$

e o trabalho realizado pela mola sobre o mecanismo é dado por

$$W_{out} = \frac{1}{2} R_s u_{out} = \frac{1}{2} k_{out} u_{out}^2. \quad (1.26)$$

Em um mecanismo flexível, parte do trabalho é armazenado como um trabalho elástico W_{elast} , de modo que

$$W_{out} = W_{in} - W_{elast}. \quad (1.27)$$

O trabalho máximo no ponto de saída obtém-se maximizando o trabalho no ponto de entrada e minimizando o trabalho elástico. Logo,

$$\max W_{out} = \max(W_{in} - W_{elast}). \quad (1.28)$$

Supondo que a força de entrada F_{in} tenha um valor fixo, o trabalho no ponto de entrada W_{in} será máximo se o deslocamento u_{in} no ponto de entrada também for máximo. Entretanto, isso não faz sentido do ponto de vista físico, pois, em geral, os deslocamentos sofridos pelo mecanismo flexível são limitados. Uma situação análoga ocorre se o deslocamento u_{in} é fixado. Neste caso, o trabalho W_{in} terá um valor máximo se F_{in} também tiver um valor máximo. Mas essa alternativa também não é adequada, uma vez que a intensidade máxima da força que um mecanismo flexível pode sofrer também é limitada. De acordo com Pedersen, Buhl e Sigmund [55], esse problema pode ser contornado fazendo com que F_{in} seja conhecida e impondo um limite para o deslocamento no ponto de entrada, através da restrição $u_{in} \leq u_{in}^*$.

Levando em conta as considerações feitas acima, Pedersen, Buhl e Sigmund [55] formularam o problema de otimização topológica de um mecanismo flexível como

$$\begin{aligned} \max_{\rho} \quad & u_{out} \\ \text{s. a} \quad & a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = L^1(\mathbf{u}^1), \quad \mathbf{u} \in V \\ & u_{in} \leq u_{in}^*, \\ & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\ & 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1.29)$$

onde u_{out} é o deslocamento do mecanismo flexível no ponto de saída, $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é a forma bilinear que representa o trabalho interno do mecanismo flexível (introduzida em (1.4)), $L^1(\mathbf{u}^1)$ é a flexibilidade média associada ao carregamento externo \mathbf{t}^1 ilustrado na Figura 1.6, V é o espaço linear admissível introduzido em (1.2), u_{in} é o deslocamento do mecanismo no ponto de entrada, u_{in}^* é o deslocamento máximo permitido no ponto de entrada, Ω_{\max} é o volume máximo que o mecanismo flexível ótimo pode assumir, e ρ é a função de densidade utilizada no projeto do mecanismo. É importante lembrar que $\mathbf{u}^1 \equiv \mathbf{u}^1(\rho)$.

Outra maneira possível de controlar o deslocamento no ponto de entrada é a colocação de uma mola de rigidez k_{in} neste ponto [8], conforme mostra a Figura 1.7. Neste caso, podemos eliminar a restrição $u_{in} \leq u_{in}^*$, de modo que o problema (1.29) pode ser reescrito como

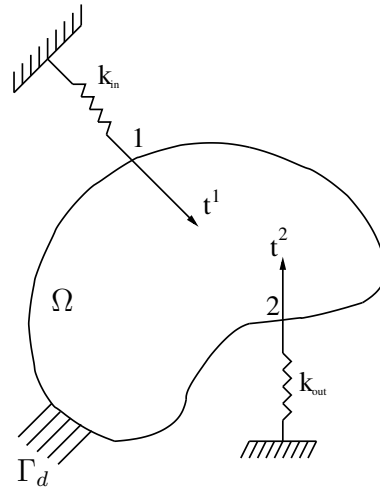


Figura 1.7: Colocação de uma mola de rigidez k_{in} no ponto de entrada para controlar o deslocamento máximo sofrido pelo mecanismo flexível neste ponto.

$$\begin{aligned}
 & \max_{\rho} u_{out} \\
 \text{s. a} \quad & a(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^1) = L^1(\mathbf{u}^1), \quad \mathbf{u} \in V \\
 & \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max} \\
 & 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad \forall x \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

É importante lembrar que k_{in} e k_{out} são consideradas implicitamente na restrição de equilíbrio estático do mecanismo flexível.

Existem outras formulações para o problema de otimização topológica de mecanismos flexíveis. Dentre elas, citamos os trabalhos de Du e Chen [24], Luo *et al.* [48] e Min e Kim [52].

No próximo capítulo, introduziremos alguns conceitos básicos sobre Mecânica do Contínuo, que são necessários para o entendimento da formulação do problema de otimização topológica de estruturas e de mecanismos flexíveis sob a hipótese de não linearidade geométrica.

Capítulo 2

Conceitos básicos sobre Mecânica do Contínuo

Para uma boa compreensão do problema de otimização topológica de estruturas e de mecanismos flexíveis sob a hipótese de não linearidade geométrica, faremos, neste capítulo, uma breve revisão sobre alguns tópicos relacionados à Mecânica do Contínuo. Nosso objetivo é definir as *tensões de Piola-Kirchhoff*, que atuam no corpo quando a relação entre deformações e deslocamentos da estrutura é não linear. O leitor interessado em maiores detalhes sobre esses conceitos pode consultar Crisfield [21], Lai, Rubin e Krempl [44], e Zienkiewicz, Taylor e Zhu [66].

2.1 Descrição do movimento de um corpo contínuo

Sabemos que a trajetória de uma partícula no espaço tridimensional é descrita por uma função vetorial do tempo:

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(t) = x(t) \mathbf{e}_1 + y(t) \mathbf{e}_2 + z(t) \mathbf{e}_3 ,$$

onde \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 são os vetores da base canônica de \mathbb{R}^3 .

Se temos N partículas, então existem N trajetórias correspondentes, descritas pelas funções

$$\mathbf{p}_n \equiv \mathbf{p}_n(t) = x_n(t) \mathbf{e}_1 + y_n(t) \mathbf{e}_2 + z_n(t) \mathbf{e}_3 , \quad n = 1, 2, \dots, N .$$

Em um corpo contínuo, não só existe um número infinito de partículas, como também existe uma quantidade infinita de partículas em uma vizinhança qualquer de cada partícula. Podemos associar uma partícula à posição que ocupa no espaço em algum instante de referência t_0 . Por exemplo, se uma partícula desse corpo estava na posição (X_1, X_2, X_3) no instante t_0 , essas coordenadas podem ser usadas para identificar essa

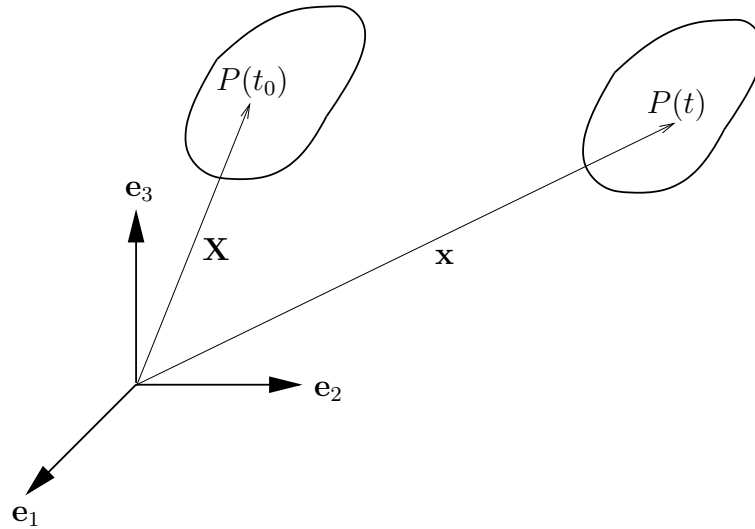


Figura 2.1: Posição de uma partícula em função do tempo.

partícula. Assim, em geral, as trajetórias de qualquer partícula de um corpo podem ser descritas por uma função vetorial do tipo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(\mathbf{X}_0, t_0) = \mathbf{X},$$

onde $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ é o vetor posição no instante t para a partícula P que estava na posição $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3$. Veja a Figura 2.1.

Na próxima seção, veremos como descrever a deformação de uma partícula de um corpo contínuo, em função do deslocamento dessa partícula entre os pontos \mathbf{X} e \mathbf{x} .

2.2 Gradiente de Deformação

Considere uma partícula P cujo vetor posição é \mathbf{X} na configuração não deformada de um corpo tridimensional. Após o deslocamento do corpo, a nova posição da partícula, indicada por p na configuração deformada, é dada pelo vetor posição \mathbf{x} . Dessa forma, podemos escrever

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{X})$ representa o deslocamento sofrido pela partícula P .

Seja agora uma nova partícula Q , vizinha à partícula P , com vetor posição $\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$. Na configuração deformada, a partícula Q tem uma nova posição q , dada pelo vetor posição $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$. Supondo que os segmentos $\Delta\mathbf{X}$ e $\Delta\mathbf{x}$ que ligam as partículas P e Q nas configurações não deformada e deformada, respectivamente, sejam suficientemente pequenos, podemos expressá-los como $d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{x}$. Nesse caso, de acordo com a Figura 2.2, observamos que

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}). \quad (2.2)$$

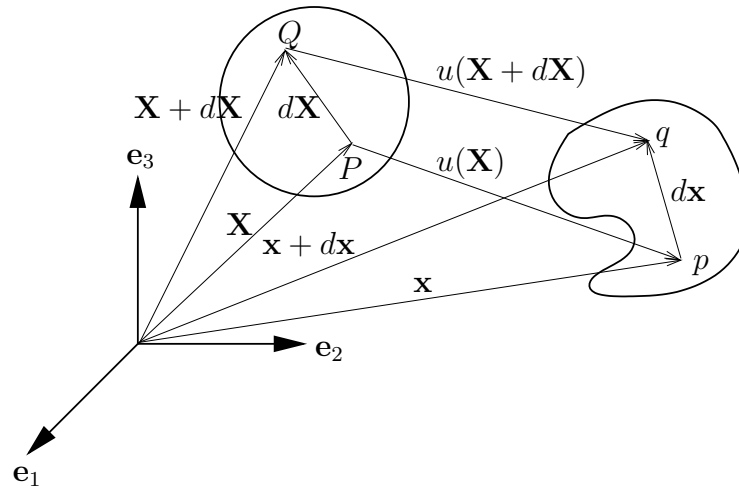


Figura 2.2: Deformação de um corpo contínuo.

Subtraindo (2.1) de (2.2), obtemos

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{u}(\mathbf{X}) = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u}) d\mathbf{X}, \quad (2.3)$$

onde $\nabla \mathbf{u}$ é um tensor de segunda ordem, conhecido como *gradiente de deslocamentos*. Para um corpo tridimensional, a matriz de $\nabla \mathbf{u}$ em relação às coordenadas cartesianas é dada por

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Podemos reescrever a equação (2.3) como

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X},$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} \quad (2.5)$$

é o *gradiente de deformação*.

Para um corpo tridimensional, temos, em coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Sob algumas condições, pode-se mostrar que \mathbf{F} é não singular.

A seguir, veremos como a área da superfície do corpo numa vizinhança do ponto \mathbf{X} é transformada após a deformação desse corpo, de acordo com o raciocínio desenvolvido em [44].

2.3 Mudança de área devido à deformação

Considere dois segmentos infinitesimais do corpo que têm origem no ponto \mathbf{X} , denotados por $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1 \mathbf{e}_1$ e $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2 \mathbf{e}_2$. A região retangular formada por $d\mathbf{X}^{(1)}$ e $d\mathbf{X}^{(2)}$ no instante de referência t_0 é dada por

$$d\mathbf{A}_0 = d\mathbf{X}^{(1)} \times d\mathbf{X}^{(2)} = dS_1 dS_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = dS_1 dS_2 \mathbf{e}_3 = dA_0 \mathbf{e}_3,$$

onde dA_0 é a magnitude da área do quadrilátero de arestas $d\mathbf{X}^{(1)}$ e $d\mathbf{X}^{(2)}$, e \mathbf{e}_3 é normal ao plano que contém $d\mathbf{X}^{(1)}$ e $d\mathbf{X}^{(2)}$. No instante t , $d\mathbf{X}^{(1)}$ é deformado em $d\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(1)}$ e $d\mathbf{X}^{(2)}$ é deformado em $d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(2)}$. Logo, a região deformada $d\mathbf{A}$ é dada por

$$d\mathbf{A} = \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(1)} \times \mathbf{F} d\mathbf{X}^{(2)} = dS_1 dS_2 (\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2) = dA_0 (\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2). \quad (2.7)$$

De (2.7), concluímos que a direção associada à área deformada $d\mathbf{A}$ é perpendicular aos vetores $\mathbf{F}\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{F}\mathbf{e}_2$. Vamos denotar essa direção por um vetor normal unitário \mathbf{n} , ou seja,

$$d\mathbf{A} = dA\mathbf{n}. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) em (2.7), obtemos

$$dA\mathbf{n} = dA_0 (\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2).$$

Assim,

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \cdot dA\mathbf{n} = \mathbf{F}\mathbf{e}_2 \cdot dA\mathbf{n} = 0 \quad (2.9)$$

e

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot dA\mathbf{n} = dA_0 \mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2). \quad (2.10)$$

Lembramos que, dados três vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ é igual ao determinante da matriz cujas linhas são as componentes de \mathbf{a}, \mathbf{b} e \mathbf{c} . Dessa forma,

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{F}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{F}\mathbf{e}_2) = \det(\mathbf{F}). \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.10), obtemos

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_3 \cdot dA\mathbf{n} = dA_0 \det(\mathbf{F}). \quad (2.12)$$

De (2.9), temos que

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{n} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{n} = 0, \quad (2.13)$$

e, de (2.12), obtemos

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{n} = \left(\frac{dA_0}{dA} \right) \det(\mathbf{F}). \quad (2.14)$$

De (2.13) e (2.14), concluímos que $\mathbf{F}^T \mathbf{n}$ tem a mesma direção de \mathbf{e}_3 . Assim,

$$\mathbf{F}^T \mathbf{n} = \frac{dA_0}{dA} (\det(\mathbf{F})) \mathbf{e}_3. \quad (2.15)$$

De (2.15), obtemos

$$dA \mathbf{n} = dA_0 (\det(\mathbf{F})) (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{e}_3. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) estabelece que o vetor normal à área deformada tem a mesma direção do vetor $(\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{e}_3$, e sua magnitude é dada por

$$dA = dA_0 |\det(\mathbf{F})| \|(\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{e}_3\|.$$

Para encontrarmos (2.16), usamos a hipótese de que a área não deformada é gerada pelos vetores canônicos \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , de modo que \mathbf{e}_3 é o vetor normal unitário a essa área. Entretanto, pode-se mostrar que (2.16) permanece válida se a área não deformada for gerada por quaisquer outros dois vetores linearmente independentes, denotando por \mathbf{n}_0 o vetor normal a essa área. Dessa forma, (2.16) pode ser reescrita como

$$dA \mathbf{n} = dA_0 (\det(\mathbf{F})) (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{n}_0. \quad (2.17)$$

De posse de (2.17), estamos prontos para descrever o primeiro e segundo tensores de tensões de Piola-Kirchhoff, seguindo os argumentos mostrados em [44].

2.4 Tensões de Piola-Kirchhoff

Seja dA_0 um elemento de área infinitesimal do corpo, com vetor normal unitário \mathbf{n}_0 no instante de referência t_0 , e seja dA um elemento infinitesimal de área desse mesmo corpo, com vetor normal unitário \mathbf{n} no instante t . Denotaremos dA_0 como sendo a *área não deformada* e dA como sendo a *área deformada*. Seja $d\mathbf{f}$ a força que atua na área deformada dA .

Sabemos que

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} dA$$

e que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T} \mathbf{n}, \quad (2.18)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o *vetor de tensões de Cauchy* e \mathbf{T} é o *tensor de tensões de Cauchy* associado. Logo, as tensões de Cauchy representam as tensões que atuam na configuração deformada do corpo.

Com relação à área não deformada $d\mathbf{A}_0$, a força $d\mathbf{f}$ é expressa como

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}_0 d\mathbf{A}_0, \quad (2.19)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{P}\mathbf{n}_0 \quad (2.20)$$

é o primeiro vetor de tensões de Piola-Kirchhoff e \mathbf{P} é o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. Assim, este tensor está associado às tensões que atuam na configuração não deformada do corpo.

É possível obter uma relação entre o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de tensões de Cauchy. De fato, como

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} dA = \boldsymbol{\sigma}_0 dA_0,$$

temos que

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{dA}{dA_0} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.18) e (2.20) em (2.21), obtemos

$$\mathbf{P}\mathbf{n}_0 = \left(\frac{dA}{dA_0} \right) \mathbf{T}\mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}d\mathbf{A}\mathbf{n}}{dA_0}.$$

Usando (2.17), encontramos

$$\mathbf{P}\mathbf{n}_0 = \mathbf{T}(\det(\mathbf{F}))(\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{n}_0. \quad (2.22)$$

Como (2.22) é válido para qualquer \mathbf{n}_0 , concluímos que o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é dado por

$$\mathbf{P} = (\det(\mathbf{F}))\mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (2.23)$$

Agora, seja $\widehat{d\mathbf{f}}$ a força que atua na configuração não deformada do corpo. Essa força $\widehat{d\mathbf{f}}$ é transformada sob o gradiente de deformação \mathbf{F} , de modo que, na configuração deformada do corpo, tem-se

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}\widehat{d\mathbf{f}} \quad (2.24)$$

e

$$\widehat{d\mathbf{f}} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0. \quad (2.25)$$

O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é uma matriz \mathbf{S} tal que

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}\mathbf{n}_0, \quad (2.26)$$

onde \mathbf{n}_0 é o vetor normal à área não deformada.

De (2.24), (2.25) e (2.26), temos que

$$\mathbf{d}\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{n}_0 dA_0. \quad (2.27)$$

Também, de (2.19) e (2.20), obtemos

$$\mathbf{d}\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}_0 dA_0 = \mathbf{P}\mathbf{n}_0 dA_0. \quad (2.28)$$

Comparando (2.27) com (2.28), observamos que

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}. \quad (2.29)$$

A equação (2.29) nos dá a relação entre o primeiro e segundo tensores de tensões de Piola-Kirchhoff. De (2.23) e (2.29), podemos encontrar a relação entre o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de tensões de Cauchy, que é dada por

$$\mathbf{S} = (\det(\mathbf{F}))\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (2.30)$$

É importante observar que, quando o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é utilizado, é necessário interpretá-lo com relação à configuração deformada do corpo. Assim, essa interpretação, que será feita seguindo [40], deve levar em conta as tensões verdadeiras que atuam no corpo, ou seja, as tensões de Cauchy (2.18).

Considere a tensão num ponto qualquer do corpo, definido pelo tensor de tensões de Cauchy \mathbf{T} em um determinado referencial. Utilizando uma transformação de coordenadas cuja matriz de transformação \mathbf{R} seja ortogonal (ou seja, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$), podemos representar \mathbf{T} no novo referencial como

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{R}. \quad (2.31)$$

Se o corpo está sujeito a pequenas deformações mas está sujeito a grandes deslocamentos e rotações, pode-se mostrar que $\mathbf{F} \approx \mathbf{R}$ e $\det(\mathbf{F}) \approx 1$. Neste caso, (2.30) pode ser reescrita como

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{R}^{-1})^T.$$

Como $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, obtemos

$$\mathbf{S} = \mathbf{R}^T\mathbf{T}\mathbf{R}. \quad (2.32)$$

Comparando (2.31) com (2.32), podemos concluir que em um corpo sujeito a pequenas deformações mas sujeito a grandes deslocamentos e rotações, o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff pode ser interpretado como as tensões de Cauchy definidas em um novo sistema de eixos coordenados, resultante da deformação imposta ao referencial inicial pelo movimento do corpo.

Tendo (2.30) em mãos, podemos descrever a formulação do problema de otimização topológica de estruturas com não linearidade geométrica. Para tanto, faremos a análise não linear da estrutura através do Método dos Elementos Finitos, no capítulo a seguir.

Capítulo 3

Método dos Elementos Finitos e Otimização Topológica

Até o momento, a formulação do problema de otimização topológica de uma estrutura ou de um mecanismo flexível foi considerada num domínio Ω , que é um meio contínuo. Na prática, a resolução do problema em tal meio é extremamente complicada, pois envolve a resolução de um problema de otimização em um espaço de dimensão infinita. Para resolvê-lo numericamente, empregamos o *Método dos Elementos Finitos* (veja, por exemplo, Assan [3], Crisfield [21] e Zienkiewicz *et al.* [66]), que é o procedimento numérico mais conhecido e aplicado em problemas de análise de esforços em um corpo. Neste método, o problema em questão é *discretizado*, ou seja, o meio contínuo Ω é transformado em um meio discreto Ω^h , através da subdivisão de Ω em um número finito de regiões, denominadas *elementos finitos*.

Neste trabalho, os problemas de otimização topológica são bidimensionais, ou seja, a espessura da estrutura ou do mecanismo flexível é considerada constante.

As Seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.5 foram adaptadas de [32], aparecendo novamente neste trabalho para a completude do texto.

3.1 Discretização do domínio Ω

A aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) inicia-se com a discretização do domínio Ω (que é originalmente um meio contínuo) em um número finito de elementos. O conjunto formado por eles é chamado de *malha*. Pode-se gerar uma malha de elementos finitos composta por diferentes tipos de elementos. A escolha da quantidade de elementos que irão compor o domínio discretizado Ω^h depende da precisão exigida para a solução aproximada do problema e dos recursos computacionais disponíveis. Geralmente, uma malha mais fina (ou seja, uma malha com um número suficientemente “grande” de elementos) resulta em uma aproximação mais precisa, mas com um custo

computacional maior. Em muitos problemas, é necessário gerar uma malha não uniforme, aplicando um refinamento nas áreas do domínio onde o grau de precisão deve ser maior para uma análise adequada do problema.

A seguir, veremos como são calculados os deslocamentos provocados pela aplicação de forças externas num elemento finito.

3.2 Interpolação dos deslocamentos

Em cada um dos pontos de um elemento finito, os deslocamentos produzidos pela aplicação de forças externas em uma estrutura devem ser aproximados por uma interpolação polinomial. Os pontos usados nessa interpolação são os *nós* da malha de elementos finitos. Os deslocamentos que ocorrem em cada nó são os *deslocamentos nodais*. Em um ponto interior ao elemento, o deslocamento pode ser dado como uma combinação linear dos deslocamentos nodais do elemento em questão, ou seja,

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^{n_f} \mathbf{N}_i(x, y) \hat{\mathbf{u}}_i^{(e)} = \mathbf{N}(x, y) \hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \quad (3.1)$$

onde x e y são as coordenadas cartesianas de um ponto do interior do elemento, $\mathbf{u}^{(e)}(x, y)$ é o deslocamento aproximado nesse ponto, n_f é o número de nós do elemento em questão, \mathbf{N}_i é a *função de forma* (ou *função de interpolação*) associada aos deslocamentos nodais do i -ésimo nó, e $\hat{\mathbf{u}}_i^{(e)}$ é o deslocamento nodal do nó i . Esse deslocamento nodal pode ser expresso de maneira geral como $\hat{\mathbf{u}}_i^{(e)} = [\hat{u}_{i,1}^{(e)} \ \hat{u}_{i,2}^{(e)} \ \dots \ \hat{u}_{i,n_d}^{(e)}]^T$, onde n_d é o número de *graus de liberdade* em um nó. Portanto, o número total de graus de liberdade para um elemento é igual a $n_f \times n_d$. É importante lembrar que as componentes dos deslocamentos podem representar rotações e translações. O vetor $\hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ em (3.1) é o vetor de deslocamentos para o elemento como um todo, e tem a forma $\hat{\mathbf{u}}^{(e)} = [\hat{\mathbf{u}}_1^{(e)} \ \hat{\mathbf{u}}_2^{(e)} \ \dots \ \hat{\mathbf{u}}_{n_f}^{(e)}]^T$.

Os elementos finitos mais comuns são os triangulares e os retangulares. Em geral, os elementos triangulares contém três, seis ou dez nós de interpolação. Já os elementos retangulares, na maioria dos casos, contém quatro, oito ou doze nós de interpolação [3].

As funções de forma dependem do tipo de elemento finito adotado. Para elementos finitos retangulares, que são usados neste trabalho, tais funções são descritas a seguir.

3.3 Elementos finitos retangulares

Neste trabalho, consideramos que as estruturas e os mecanismos flexíveis devam estar contidos em um domínio retangular ou em um domínio composto pela união de regiões retangulares. Sendo assim, optamos por trabalhar com elementos finitos

retangulares. Esse tipo de elemento não é usado para discretizar domínios com fronteiras de formatos mais genéricos.

Em particular, adotamos, neste trabalho, elementos finitos retangulares com quatro nós, todos eles localizados nos seus vértices, e com dois graus de liberdade por nó, associados aos deslocamentos na horizontal e na vertical, conforme mostra a Figura 3.1. Nesse caso, as funções aproximadoras para os deslocamentos no interior de um elemento retangular são polinômios bilineares, ou seja,

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (3.2)$$

e

$$v(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy, \quad (3.3)$$

onde x, y são as coordenadas de um ponto do elemento finito retangular, $u(x, y)$ é a interpolação para os deslocamentos na horizontal, e $v(x, y)$ é a interpolação para os deslocamentos na vertical.

Para obter as equações do MEF para os elementos, é conveniente adotar um *sistema de coordenadas local*, que é definido para cada elemento. Posteriormente, estas equações são combinadas usando um sistema de coordenadas global, que é definido para todo o domínio.

A formulação dos elementos finitos retangulares fica mais simples se considerarmos um sistema de coordenadas local (ξ, η) cuja origem localiza-se no baricentro do elemento, conforme mostra a Figura 3.2.

Como se observa na Figura 3.1, as dimensões de um elemento finito retangular no sistema de coordenadas global são $2a \times 2b \times h$, onde a é a distância entre o nó 1 e o ponto médio da base do retângulo, b é a distância entre o nó 1 e o ponto médio da altura do retângulo, e h é a espessura (constante) do elemento. Observando a Figura 3.2, notamos que, no sistema de coordenadas local, o elemento tem altura e largura iguais a 2. A espessura h do elemento finito retangular não é mostrada nas Figuras 3.1 e 3.2 por simplicidade. As relações entre as coordenadas globais (x, y) e as coordenadas locais (ξ, η) são dadas por

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}. \quad (3.4)$$

A numeração dos nós é iniciada no canto inferior esquerdo do elemento, prosseguindo no sentido anti-horário, conforme mostram as Figuras 3.1 e 3.2.

Após definir as coordenadas locais como em (3.4), podemos reescrever (3.2) e (3.3), respectivamente, como

$$u(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) u_1 + N_2(\xi, \eta) u_2 + N_3(\xi, \eta) u_3 + N_4(\xi, \eta) u_4 \quad (3.5)$$

e

$$v(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta) v_1 + N_2(\xi, \eta) v_2 + N_3(\xi, \eta) v_3 + N_4(\xi, \eta) v_4, \quad (3.6)$$

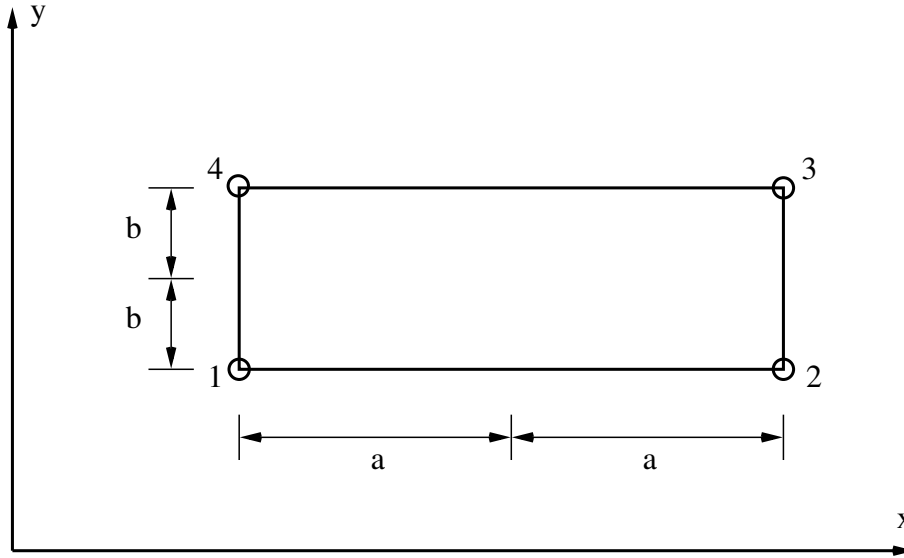


Figura 3.1: Elemento finito retangular de quatro nós no sistema de coordenadas global (x, y) .

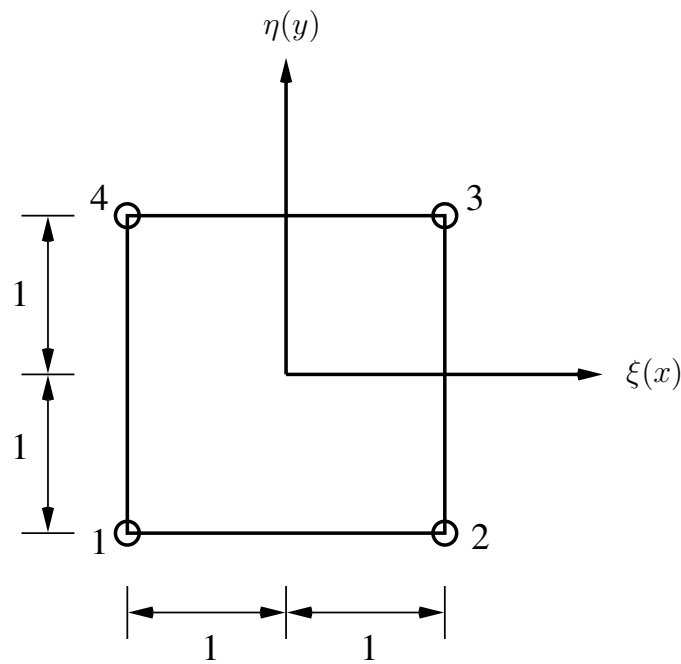


Figura 3.2: Elemento finito retangular de quatro nós no sistema de coordenadas local (ξ, η) .

onde u_i , $i = 1, \dots, 4$ são os deslocamentos nodais na direção horizontal, v_i , $i = 1, \dots, 4$ são os deslocamentos nodais na direção vertical, $N_i(\xi, \eta)$ são as funções de forma, definidas por

$$N_i(\xi, \eta) = L_i(\xi) L_i(\eta), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (3.7)$$

e cada L_i é um polinômio de Lagrange de uma única variável, satisfazendo

$$L_i(z_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $z_j = \xi_j$ ou η_j , conforme o caso.

Para o elemento da Figura 3.2, L_1 varia linearmente entre os nós 1 e 2, preservando a continuidade C^0 ao longo da aresta 1-2. Observações análogas valem para as arestas 2-3, 3-4 e 4-1. Logo, usando a equação (3.7) e observando a Figura 3.2, obtemos

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= L_1(\xi) L_1(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= L_2(\xi) L_2(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= L_3(\xi) L_3(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= L_4(\xi) L_4(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

As funções de forma (3.8) são chamadas *bilineares* porque cada fator é uma função linear de uma coordenada local.

De acordo com (3.1), temos, para elementos finitos retangulares,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde N_i , $i = 1, \dots, 4$, são as funções de forma dadas em (3.8).

Derivando (3.5) e (3.6) em relação a x e a y , obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} u_4 \\
 \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial x} v_4 \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial y} u_4 \\
 \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 + \frac{\partial N_4}{\partial y} v_4.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Podemos reescrever (3.10) como

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G} \hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \tag{3.11}$$

onde

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^T, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

e

$$\hat{\mathbf{u}}^{(e)} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T. \tag{3.14}$$

Usando a Regra da Cadeia e fazendo um agrupamento conveniente dos termos obtidos, as derivadas das funções de forma (3.8) podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Em (3.15), a matriz

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

é a matriz Jacobiana associada à mudança de variáveis dada em (3.4).

Se \mathbf{J} é não singular, podemos reescrever (3.15) como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Derivando as equações (3.4) e as funções de forma (3.8) em relação a ξ e a η , encontramos as derivadas das funções de forma em relação a x e a y , usadas em (3.17), que são dadas por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & -\frac{1-\xi}{b} \\ \frac{1-\eta}{a} & -\frac{1+\xi}{b} \\ \frac{1+\eta}{a} & \frac{1+\xi}{b} \\ -\frac{1+\eta}{a} & \frac{1-\xi}{b} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

e substituímos os elementos de (3.18) em (3.13).

A seguir, mostraremos como obter as equações que definem a condição de equilíbrio estático de uma estrutura no caso de pequenos e grandes deslocamentos.

3.4 Condições de equilíbrio estático

Neste trabalho, supomos que o material que compõe a estrutura seja *isotrópico* (ou seja, um material cujas propriedades não dependem da direção) e que ele traba-

lhe no *regime elástico linear*, no qual a relação entre tensões e deformações é linear. Quando a estrutura está sujeita a pequenos deslocamentos, a relação entre deformações e deslocamentos também é linear. Por outro lado, se a estrutura sofre grandes deslocamentos, as deformações e os deslocamentos possuem uma relação não linear. Também consideramos que a estrutura tenha uma espessura constante e que ela esteja em um *estado plano de tensões* (veja, por exemplo, Assan [3]), que ocorre quando a espessura é muito pequena em relação às outras dimensões e as tensões atuam apenas no plano da estrutura.

3.4.1 Pequenos deslocamentos

Quando uma estrutura com espessura constante está sujeita a pequenos deslocamentos, a matriz de deformações num ponto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é dada por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde $\nabla\mathbf{u}$ é o gradiente de deslocamentos definido em (2.4) e

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

O valor de ε_z será definido logo adiante, impondo a condição de estado plano de tensões.

Podemos escrever (3.20) como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \quad (3.21)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \tau_{xy}]^T, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{HG},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a matriz \mathbf{G} é definida em (3.13) e o vetor $\hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ é definido em (3.14).

A relação entre a matriz de tensões \mathbf{T} e a matriz de deformações \mathbf{E} é descrita por

$$\mathbf{T} = [\lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E})]\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \quad (3.23)$$

onde $\operatorname{tr}(\cdot)$ indica o traço de uma matriz,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (3.24)$$

e

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.25)$$

são as *constantas de Lamé*, E é o *módulo de Young* (ou *módulo de elasticidade*) do material e ν é o respectivo *coeficiente de Poisson*, que é definido como a razão entre as deformações lateral e axial do material. Convém lembrar que $E > 0$ e que $0 < \nu < 1$.

A equação (3.23), conhecida como *Lei de Hooke*, é utilizada para descrever o comportamento elástico linear de uma estrutura constituída de um material isotrópico.

Usando (3.19) e (3.20), reescrevemos (3.23) como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_y + \varepsilon_z), \\ \sigma_y &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_z), \\ \sigma_z &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}.$$

Como a estrutura está em um estado plano de tensões, temos $\sigma_z = 0$. Impondo esta condição, obtemos

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (3.28)$$

Substituindo (3.28) em (3.27), encontramos

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} & \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} & \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Usando (3.24) e (3.25), (3.29) torna-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.30)$$

onde

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é dado em (3.22).

Sabemos, de (1.6), que a energia potencial total de um elemento finito é dada por

$$\Pi_e = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}^{(e)}, \mathbf{u}^{(e)}) - b(\mathbf{u}^{(e)}), \quad (3.31)$$

onde $\mathbf{u}^{(e)}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, a é a forma bilinear associada ao trabalho interno devido à deformação do elemento (definida em (1.4)) e b é a forma linear associada ao trabalho realizado pelas forças externas aplicadas ao elemento (definida em (1.5)).

Considerando que o sólido esteja em equilíbrio, os pontos estacionários do funcional (3.31) são aqueles em que a sua primeira variação é nula, ou seja,

$$\delta \Pi_e = \int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{b} d\Gamma_e = 0.$$

Logo,

$$\int_{\Omega_e} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_e = \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{b} d\Gamma_e, \quad (3.32)$$

onde Ω_e denota o domínio do elemento finito e , e Γ_e denota a fronteira desse elemento.

De (3.1), a primeira variação dos deslocamentos é dada por

$$\delta \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)} \quad (3.33)$$

e, de (3.21), a primeira variação das deformações é dada por

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.21), (3.33) e (3.34) em (3.32), obtemos

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)T} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \hat{\mathbf{u}}^{(e)} = \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)T} \left[\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e \right]. \quad (3.35)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ (ou seja, a primeira variação dos deslocamentos) são arbitrários, (3.35) fica

$$\left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e \right] \hat{\mathbf{u}}^{(e)} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e.$$

Denotando

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega_e, \quad (3.36)$$

e

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e, \quad (3.37)$$

obtemos o sistema linear

$$\mathbf{k}^{(e)} \hat{\mathbf{u}}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)}, \quad (3.38)$$

onde $\mathbf{k}^{(e)}$ é a *matriz de rigidez do elemento*, $\hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ é o *vetor de deslocamentos nodais do elemento* e $\mathbf{f}^{(e)}$ é o *vetor de forças nodais equivalentes do elemento*.

O sistema linear (3.38) representa as condições de equilíbrio estático do elemento e . Claramente, essa condição deve ser satisfeita para todos os elementos do domínio Ω onde a estrutura está contida.

Observa-se que, no caso de pequenos deslocamentos, a matriz de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}$ para elementos quadrados com quatro nós (veja a Figura 3.2) é a mesma para todos os elementos da malha. A ordem dessa matriz é 8×8 , pois cada um dos quatro nós do elemento retangular em questão contém dois graus de liberdade (deslocamentos na horizontal e na vertical). Neste caso, temos $\mathbf{f}^{(e)} \in \mathbb{R}^8$ e $\hat{\mathbf{u}}^{(e)} \in \mathbb{R}^8$.

Sendo constante a espessura do elemento finito, vamos denotá-la por h_e . Assim, podemos reescrever (3.36) como

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} h_e dA_e, \quad (3.39)$$

onde A_e é a área da face do elemento finito retangular contida no plano do domínio Ω .

De (3.4), temos que

$$dx dy = ab d\xi d\eta.$$

Logo, no sistema de coordenadas local (ξ, η) da Figura 3.2, (3.39) fica

$$\mathbf{k}^{(e)} = ab h_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\xi d\eta. \quad (3.40)$$

3.4.2 Grandes deslocamentos

Se uma estrutura com espessura constante estiver submetida a grandes deslocamentos, a matriz de deformações num ponto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ será dada por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}^T\nabla\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

As equações (3.42) são conhecidas como *deformações de Green-Lagrange*.

Reescrevendo (3.42) na forma matricial, temos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\mathbf{H} + \frac{1}{2}\mathbf{A} \right] \boldsymbol{\theta}, \quad (3.43)$$

onde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e o vetor $\boldsymbol{\theta}$ é definido em (3.11).

Nesta seção, apresentaremos a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant e a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet.

Lei de Material de Kirchhoff-Saint Venant

Suponha que a estrutura seja constituída por um material *hiperelástico*, cujo comportamento é descrito por uma *função de energia de deformação específica* $\widehat{W} \equiv \widehat{W}(\mathbf{E})$,

definida em relação à configuração não deformada da estrutura. Essa função define uma *lei de material*.

A lei de material adotada com mais frequência é a de *Kirchhoff-Saint Venant*, cuja função de energia de deformação específica é definida por

$$\widehat{W}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\lambda [\text{tr}(\mathbf{E})]^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2), \quad (3.45)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé dadas em (3.24) e (3.25).

Derivando-se (3.45) em relação à matriz de deformações \mathbf{E} , obtemos o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, definido em (2.30):

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \widehat{W}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = [\lambda \text{tr}(\mathbf{E})]\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}. \quad (3.46)$$

Observando (3.23) e (3.46), podemos concluir que quando a relação entre deformações e deslocamentos é linear, a Lei de Hooke e a Lei de Kirchhoff-Saint Venant são equivalentes, embora a primeira esteja relacionada ao caso de pequenos deslocamentos, e a segunda ao caso de grandes deslocamentos.

Substituindo (3.41) e (3.42) em (3.46), obtemos

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

com σ_x, σ_y e τ_{xy} dados em (3.27).

Impondo a condição de estado plano de tensões descrita em (3.28), chegamos à relação entre tensões e deformações definida em (3.30), com o vetor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ dado por (3.43).

De (3.43), a primeira variação das deformações é dada por

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}\delta\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}(\delta\mathbf{A})\boldsymbol{\theta}.$$

Pode-se mostrar que $\mathbf{A}\delta\boldsymbol{\theta} = (\delta\mathbf{A})\boldsymbol{\theta}$. Logo, tomando a primeira variação de (3.11), obtemos

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{H} + \mathbf{A})\delta\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{H} + \mathbf{A})\mathbf{G}\delta\hat{\mathbf{u}}^{(e)}. \quad (3.48)$$

Definindo

$$\overline{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}) = (\mathbf{H} + \mathbf{A})\mathbf{G}, \quad (3.49)$$

podemos escrever

$$\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L, \quad (3.50)$$

onde $\overline{\mathbf{B}} \equiv \overline{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}\mathbf{G}$ e $\mathbf{B}_L = \mathbf{A}\mathbf{G}$.

Analogamente ao caso de pequenos deslocamentos, a energia potencial total de um elemento finito e é dada por (3.31), e a condição de equilíbrio estático desse elemento é definida em (3.32). Assim, substituindo (3.30), (3.33) e (3.48) em (3.32), encontramos

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)T} \left[\int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e \right] = \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)T} \left[\int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e \right]. \quad (3.51)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ (ou seja, a primeira variação dos deslocamentos nodais) são arbitrários, podemos concluir, de (3.51), que

$$\int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e = \mathbf{f}^{(e)}, \quad (3.52)$$

onde $\mathbf{f}^{(e)}$ é o vetor de forças nodais equivalentes do elemento e , definido em (3.37).

Utilizando (3.11), (3.30), (3.43) e (3.50), podemos reescrever (3.52) como

$$\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}) \hat{\mathbf{u}}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{0}, \quad (3.53)$$

onde

$$\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}) = \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L \right) d\Omega_e \quad (3.54)$$

é a matriz de rigidez do elemento e .

O sistema (3.53) representa as condições de equilíbrio estático de cada elemento e do domínio Ω no qual está contida a estrutura.

É importante notar que (3.53) é um sistema não linear, uma vez que, sob a hipótese de grandes deslocamentos, a matriz de rigidez do elemento definida em (3.54) é dependente dos deslocamentos nodais. Dessa forma, para encontrarmos o vetor de deslocamentos nodais que corresponde à condição de equilíbrio da estrutura, é necessário utilizar algum método iterativo, como, por exemplo, o método de Newton.

A partir de agora, denotaremos o sistema (3.52) como

$$\mathbf{r} \equiv \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{0}. \quad (3.55)$$

Tomando a primeira variação de (3.55), obtemos

$$\delta \mathbf{r} = \int_{\Omega_e} \delta \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e. \quad (3.56)$$

Usando (3.48), a primeira variação de (3.30) é dada por

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}.$$

Portanto, a segunda integral de (3.56) fica

$$\int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \delta \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e = \left[\int_{\Omega_e} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} d\Omega_e \right] \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)} = [\mathbf{k}_0^{(e)} + \mathbf{k}_L^{(e)}] \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \quad (3.57)$$

onde

$$\mathbf{k}_0^{(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 d\Omega_e \quad (3.58)$$

é a matriz de rigidez do elemento e associada aos pequenos deslocamentos e

$$\mathbf{k}_L^{(e)} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L) d\Omega_e. \quad (3.59)$$

é a matriz de rigidez do elemento e relativa aos grandes deslocamentos.

Como a matriz \mathbf{B}_0 que aparece em (3.50) não depende de $\mathbf{u}^{(e)}$, temos $\delta \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$. Logo, de (3.50), obtemos

$$\delta \bar{\mathbf{B}} = \delta(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) = \delta \mathbf{B}_L = \delta(\mathbf{A} \mathbf{G}) = (\delta \mathbf{A}) \mathbf{G}.$$

Assim,

$$\delta \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}^T (\delta \mathbf{A})^T \boldsymbol{\sigma}.$$

Observe que, de (3.13) e (3.44),

$$(\delta \mathbf{A})^T \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} & \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} & \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} \tau_{xy} \\ \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} \tau_{xy} \\ \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \tau_{xy} \\ \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \tau_{xy} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{S}} \mathbf{G} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)},$$

onde

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 & \sigma_y \end{bmatrix}.$$

Logo, a primeira integral de (3.56) é dada por

$$\int_{\Omega_e} \delta \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e = \mathbf{k}_\sigma^{(e)} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \quad (3.60)$$

onde

$$\mathbf{k}_\sigma^{(e)} = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{S}} \mathbf{G} d\Omega_e \quad (3.61)$$

é a *matriz de tensões iniciais* do elemento e .

Substituindo (3.57) e (3.60) em (3.56), obtemos

$$\delta \mathbf{r} = [\mathbf{k}_0^{(e)} + \mathbf{k}_L^{(e)} + \mathbf{k}_\sigma^{(e)}] \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)} \equiv \mathbf{k}_T^{(e)} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \quad (3.62)$$

onde $\mathbf{k}_T^{(e)} \equiv \mathbf{k}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ é a *matriz de rigidez tangente* do elemento e .

Uma vez que usamos apenas um tipo de elemento finito neste trabalho (elementos retangulares com quatro nós), as matrizes $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ e $\mathbf{k}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ são de ordem 8×8 , pois cada um dos quatro nós do elemento retangular em questão contém dois graus de liberdade (deslocamentos na horizontal e na vertical). Neste caso, temos $\hat{\mathbf{u}}^{(e)} \in \mathbb{R}^8$ e $\mathbf{f}^{(e)} \in \mathbb{R}^8$.

Sendo h_e a espessura constante do elemento finito e , podemos reescrever as matrizes $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ e $\mathbf{k}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ como

$$\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}) = \int_{A_e} \left(\mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L \right) h_e dA_e \quad (3.63)$$

e

$$\mathbf{k}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}) = \int_{A_e} \left(\mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{S}} \mathbf{G} \right) h_e dA_e, \quad (3.64)$$

onde A_e é a área da face do elemento finito retangular contida no plano do domínio Ω .

De (3.4), temos que

$$dx dy = ab d\xi d\eta.$$

Logo, no sistema de coordenadas local (ξ, η) da Figura 3.2, (3.63) e (3.64) ficam

$$\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}) = abh_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L \right) d\xi d\eta \quad (3.65)$$

e

$$\mathbf{k}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}) = abh_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L + \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{S}} \mathbf{G} \right) d\xi d\eta. \quad (3.66)$$

Tendo em mãos (3.65) e (3.66), podemos aplicar o método de Newton ao sistema não linear (3.53) para encontrar o vetor de deslocamentos nodais associado à condição de equilíbrio do elemento e . Assim, dado um ponto inicial $\hat{\mathbf{u}}_0^{(e)}$, resolvemos a seqüência de sistemas lineares

$$\mathbf{k}_T(\hat{\mathbf{u}}_k^{(e)}) \Delta \hat{\mathbf{u}}_k^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)} - \mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}_k^{(e)}) \hat{\mathbf{u}}_k^{(e)}, \quad (3.67)$$

e obtemos a aproximação para o vetor de deslocamentos nodais na condição de equilíbrio do elemento e calculando

$$\hat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(e)} = \hat{\mathbf{u}}_k^{(e)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_k^{(e)},$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Observando o sistema não linear original (3.53), concluímos que os sistemas lineares (3.67) devem ser resolvidos até que $\|\mathbf{f}^{(e)} - \mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}_k^{(e)}) \hat{\mathbf{u}}_k^{(e)}\| \leq \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

Lei de Material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet

Apesar de ser frequentemente adotada na literatura, a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant não garante a existência de soluções para as condições de equilíbrio estático de uma estrutura (vide [56]). Entretanto, Ball [4] demonstrou a existência dessas soluções para uma classe especial de leis de material, cujas funções de energia de deformação específica \widehat{W} são denominadas *policonvexas*.

Seja $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ um subconjunto das matrizes quadradas de ordem 3, com coeficientes reais. Dizemos que $\widehat{W} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ é *policonvexa* se existe uma função convexa $W^* : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$\mathbb{U} \equiv \{(\mathbf{F}, \mathbf{Cof}(\mathbf{F}), \det(\mathbf{F})) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \mid \mathbf{F} \in \mathbb{F}\},$$

tal que

$$\widehat{W}(\mathbf{F}) = W^*(\mathbf{F}, \mathbf{Cof}(\mathbf{F}), \det(\mathbf{F})) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{F},$$

em que $\mathbf{Cof}(\mathbf{F}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de cofatores de \mathbf{F} .

Neste trabalho, consideraremos a *lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet* [18, 62], que é policonvexa (portanto, garante a existência de soluções para as condições de equilíbrio estático da estrutura) e representa uma extensão da Lei de Hooke clássica, apresentada na Subseção 3.4.1. Antes de apresentarmos a formulação matemática desta lei de material, convém observar que, para um corpo tridimensional com espessura constante, o gradiente de deslocamentos $\nabla \mathbf{u}$ e o gradiente de deformações \mathbf{F} (definidos por (2.4) e (2.5), respectivamente) são dados por

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

e

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \gamma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Para simplificar a notação, definimos

$$\bar{J} = f_{11}f_{12} - f_{12}f_{21}, \quad (3.70)$$

$$J = \det(\mathbf{F}) = (1 + \gamma_{33})(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) = (1 + \gamma_{33})\bar{J} \quad (3.71)$$

e

$$I_C = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = f_{11}^2 + f_{21}^2 + f_{12}^2 + f_{22}^2 + f_{33}^2. \quad (3.72)$$

Nesse caso, a função de energia de deformação específica que define a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet é dada por

$$\widehat{W} \equiv \widehat{W}(J, I_C) = \frac{1}{2}\lambda \left[\frac{1}{2}(J^2 - 1) - \ln J \right] + \frac{1}{2}\mu(I_C - 3 - 2 \ln J), \quad (3.73)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé, dadas em (3.24) e (3.25), respectivamente.

Quando o corpo está em equilíbrio estático, o princípio dos trabalhos virtuais estabelece que (vide [56])

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext}, \quad (3.74)$$

onde

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega_e} \text{tr}(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{F}) d\Omega_e \quad (3.75)$$

representa o trabalho virtual realizado pelas forças internas, e

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma_e} \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{b} d\Gamma_e \quad (3.76)$$

é o trabalho virtual realizado pelas forças externas.

Na equação (3.75), temos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{11}} & \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{21}} & 0 \\ \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{12}} & \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{33}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} & \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} & \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

onde \mathbf{P} representa o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff (definido em (2.23)) para um corpo tridimensional com espessura constante e $\delta \mathbf{F}$ é a primeira variação do gradiente de deformações (3.69).

Derivando (3.73) em relação às componentes do gradiente de deformação (3.69), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{11}} &= \frac{1}{J} \left[\frac{1}{2} \lambda (J^2 - 1) - \mu \right] (1 + \gamma_{33}) f_{22} + \mu f_{11} \\
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{21}} &= -\frac{1}{J} \left[\frac{1}{2} \lambda (J^2 - 1) - \mu \right] (1 + \gamma_{33}) f_{12} + \mu f_{21} \\
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{12}} &= -\frac{1}{J} \left[\frac{1}{2} \lambda (J^2 - 1) - \mu \right] (1 + \gamma_{33}) f_{21} + \mu f_{12} \\
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{22}} &= \frac{1}{J} \left[\frac{1}{2} \lambda (J^2 - 1) - \mu \right] (1 + \gamma_{33}) f_{11} + \mu f_{22} \\
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{33}} &= \left[\frac{1}{2} \lambda (f_{33}^3 \bar{J}^2 - 1) + \mu (f_{33}^2 - 1) \right] \frac{1}{f_{33}}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Supondo que a estrutura esteja no estado plano de tensões, temos $\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{33}} = 0$. Resolvendo essa equação (vide Campello, Pimenta e Wriggers [17]), obtemos

$$\gamma_{33} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda \bar{J}^2 + 2\mu}} - 1. \tag{3.79}$$

Observando as quatro primeiras equações de (3.78), vamos definir

$$w(\bar{J}) = \left[\frac{1}{2} \lambda (J^2 - 1) - \mu \right] \frac{1}{J} = \left\{ \frac{1}{2} \lambda [(1 + \gamma_{33})^2 \bar{J}^2 - 1] - \mu \right\} \frac{1}{J}. \tag{3.80}$$

Substituindo (3.79) em (3.80), encontramos

$$w(\bar{J}) = -\mu \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda \bar{J}^3 + 2\mu \bar{J}} \right). \tag{3.81}$$

Derivando (3.81), vem

$$w'(\bar{J}) = -w(\bar{J}) \left(\frac{3\lambda \bar{J}^2 + 2\mu}{\lambda \bar{J}^3 + 2\mu \bar{J}} \right). \tag{3.82}$$

Logo, podemos reescrever as quatro primeiras equações de (3.78) de uma maneira mais simples:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{11}} &= w(\bar{J})f_{22} + \mu f_{11} \\
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{21}} &= -w(\bar{J})f_{12} + \mu f_{21} \\
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{12}} &= -w(\bar{J})f_{21} + \mu f_{12} \\
\frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{22}} &= w(\bar{J})f_{11} + \mu f_{22}.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

De (3.77), temos

$$\text{tr}(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{F}) = \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{11}} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{21}} \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{12}} \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{22}} \frac{\partial(\delta v)}{\partial y}. \tag{3.84}$$

Por outro lado, definindo

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{11}} & \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{21}} & \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{12}} & \frac{\partial \widehat{W}}{\partial f_{22}} \end{bmatrix}^T$$

e

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} & \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} & \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} & \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} \end{bmatrix}^T,$$

observamos que

$$\text{tr}(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{F}) = \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\theta}.$$

De (3.11), vem

$$\delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{G} \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}.$$

Logo,

$$\text{tr}(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{F}) = \delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)T} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}. \tag{3.85}$$

Substituindo (3.85) em (3.75) e (3.33) em (3.76), obtemos, de (3.74),

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)T} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e \right] = \mathbf{0}. \tag{3.86}$$

Uma vez que os deslocamentos virtuais $\delta \hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ são arbitrários, encontramos

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Gamma_e = \mathbf{0},$$

ou, usando (3.37),

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{0}. \tag{3.87}$$

Denotando

$$\mathbf{r}(\widehat{\mathbf{u}}^{(e)}) = \mathbf{q}(\widehat{\mathbf{u}}^{(e)}) - \mathbf{f}^{(e)}, \quad (3.88)$$

onde

$$\mathbf{q}(\widehat{\mathbf{u}}^{(e)}) = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_e, \quad (3.89)$$

o sistema não linear (3.87) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{r}(\widehat{\mathbf{u}}^{(e)}) = \mathbf{0}. \quad (3.90)$$

Agora, vamos obter a matriz de rigidez tangente associada à lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet, que corresponde à matriz Jacobiana do sistema não linear (3.87). Para isso, em primeiro lugar, devemos encontrar a *matriz dos módulos de rigidez elásticos*, definida por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{11}^2} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{11} \partial f_{21}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{11} \partial f_{12}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{11} \partial f_{22}} \\ \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{21} \partial f_{11}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{21}^2} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{21} \partial f_{12}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{21} \partial f_{22}} \\ \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{12} \partial f_{11}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{12} \partial f_{21}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{12}^2} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{12} \partial f_{22}} \\ \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{22} \partial f_{11}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{22} \partial f_{21}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{22} \partial f_{12}} & \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{22}^2} \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

Derivando as equações (3.83) em relação às componentes do gradiente de deformação e usando (3.82), obtemos

$$\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{11}^2} = w'(\bar{J}) f_{22}^2 + \mu$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{21}^2} = w'(\bar{J}) f_{12}^2 + \mu$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{12}^2} = w'(\bar{J}) f_{21}^2 + \mu$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{22}^2} = w'(\bar{J}) f_{22}^2 + \mu$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{11} \partial f_{21}} &= \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{21} \partial f_{11}} = -w'(\bar{J}) f_{12} f_{22} \\ \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{11} \partial f_{12}} &= \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{12} \partial f_{11}} = -w'(\bar{J}) f_{21} f_{22} \\ \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{11} \partial f_{22}} &= \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{22} \partial f_{11}} = w'(\bar{J}) f_{11} f_{22} + w(\bar{J}) \\ \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{21} \partial f_{12}} &= \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{12} \partial f_{21}} = w'(\bar{J}) f_{21} f_{12} - w(\bar{J}) \\ \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{21} \partial f_{22}} &= \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{22} \partial f_{21}} = -w'(\bar{J}) f_{11} f_{12} \\ \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{12} \partial f_{22}} &= \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial f_{22} \partial f_{12}} = -w'(\bar{J}) f_{11} f_{21}. \end{aligned}$$

Para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet, a aplicação do método de Newton para a resolução do sistema não linear (3.90) partindo de um ponto inicial $\widehat{\mathbf{u}}_0^{(e)}$ nos leva à resolução dos sistemas lineares

$$\mathbf{k}_T(\widehat{\mathbf{u}}_k^{(e)}) \Delta \widehat{\mathbf{u}}_k^{(e)} = -\mathbf{r}(\widehat{\mathbf{u}}_k^{(e)}), \quad (3.92)$$

onde

$$\mathbf{k}_T(\widehat{\mathbf{u}}^{(e)}) = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} d\Omega_e, \quad (3.93)$$

\mathbf{G} é a matriz definida em (3.13), e \mathbf{D} é a matriz dos módulos de rigidez elásticos tangentes, definida em (3.91).

No sistema de coordenadas local (ξ, η) da Figura 3.2, escrevemos (3.89) e (3.93), respectivamente, como

$$\mathbf{q}(\widehat{\mathbf{u}}^{(e)}) = abh_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} d\xi d\eta \quad (3.94)$$

e

$$\mathbf{k}_T(\widehat{\mathbf{u}}^{(e)}) = abh_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} d\xi d\eta. \quad (3.95)$$

A aproximação para o vetor de deslocamentos nodais na condição de equilíbrio do elemento e é dada por

$$\widehat{\mathbf{u}}_{k+1}^{(e)} = \widehat{\mathbf{u}}_k^{(e)} + \Delta \widehat{\mathbf{u}}_k^{(e)},$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Resolvemos os sistemas lineares (3.92) e atualizamos os deslocamentos nodais até que $\|\mathbf{r}(\widehat{\mathbf{u}}^{(e)})\| \leq \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

A próxima seção mostra como utilizar as matrizes de rigidez dos elementos e os respectivos vetores de forças nodais equivalentes para obter os deslocamentos nodais para toda a estrutura.

3.5 Matrizes de rigidez globais

É importante salientar que as integrais (3.40), (3.65), (3.66), (3.94) e (3.95) não são simples de serem obtidas analiticamente. Na prática, pode-se usar algum esquema de integração numérica, como, por exemplo, a quadratura Gaussiana, obtendo uma aproximação do tipo

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j,$$

onde n_x e n_y são, respectivamente, o número de pontos usados para aproximar a integral em ξ e em η , e w_i e w_j são os pesos para cada ponto dessa aproximação. Em geral, toma-se $n_x = n_y = 2$.

Após encontrar as matrizes de rigidez \mathbf{k} e \mathbf{k}_T para cada elemento, devemos inseri-las em matrizes maiores \mathbf{K} e \mathbf{K}_T , respectivamente, que são usadas para determinar os sistemas de equações que representam as condições de equilíbrio estático da estrutura. Essas equações serão apresentadas mais adiante, no Capítulo 4. As matrizes \mathbf{K} e \mathbf{K}_T são denominadas *matriz de rigidez global* e *matriz de rigidez tangente global*, respectivamente, e são uma superposição das matrizes de rigidez dos elementos. Para efetuar essa superposição de matrizes, devemos, em primeiro lugar, adotar uma convenção para a numeração dos nós e dos graus de liberdade associados a cada nó, de modo a obedecer a conectividade entre os elementos dentro do domínio. Lembramos que, neste trabalho, os domínios de todos os problemas são retangulares, ou são regiões que podem ser decompostas em dois ou mais retângulos. Sendo assim, convencionamos que a numeração dos nós e dos elementos deve começar no canto inferior esquerdo do domínio e prosseguir por colunas, de baixo para cima, de modo que o último elemento seja aquele localizado no canto superior direito do domínio.

A Figura 3.3 mostra um exemplo de domínio e ilustra a convenção para a numeração dos nós e dos elementos. O número de um elemento é apresentado no centro deste. À esquerda de cada nó, está representado o seu índice. Dessa forma, o elemento 1, por exemplo, está conectado aos nós 1, 6, 7 e 2 (exatamente nessa ordem, começando no canto inferior esquerdo do elemento e prosseguindo no sentido anti-horário).

A dimensão das matrizes de rigidez globais \mathbf{K} e \mathbf{K}_T é igual ao dobro do número total de nós da malha de elementos finitos, denotado por n_n , ou seja, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$, pois

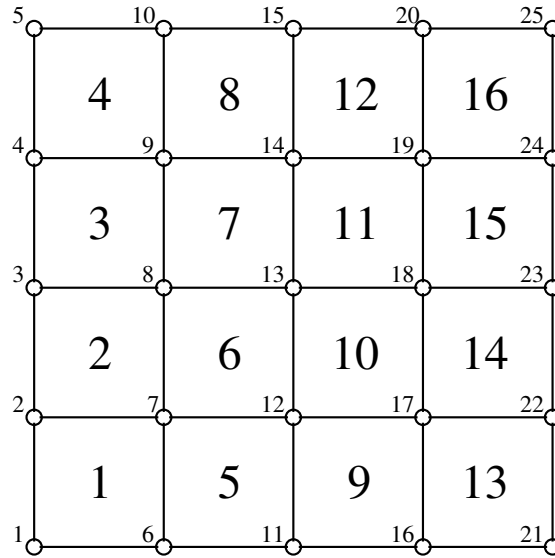


Figura 3.3: Exemplo de domínio com a numeração dos elementos e dos nós.

cada nó tem dois graus de liberdade, cujos índices são $2j - 1$ (deslocamento nodal na horizontal) e $2j$ (deslocamento nodal na vertical). Definimos n_{el} como sendo o número total de elementos do domínio discretizado.

Sem perda de generalidade, para ilustrar a montagem das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{K}_T , faremos referência apenas à matriz \mathbf{K} , pois o procedimento para obter \mathbf{K}_T é exatamente o mesmo. Em primeiro lugar, devemos introduzir, para cada elemento $i = 1, \dots, n_{el}$, uma matriz $\mathbf{M}_i \in \mathbb{R}^{2n_n \times 8}$, formada por colunas da matriz identidade $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$, de tal maneira que

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \mathbf{M}_i \mathbf{k}^{(i)} \mathbf{M}_i^T. \quad (3.96)$$

A seleção das colunas de \mathbf{I} que farão parte de cada \mathbf{M}_i deve ser feita de acordo com a numeração dos graus de liberdade de cada elemento. Por exemplo, o elemento de número 7 da Figura 3.3 está conectado aos nós 8, 13, 14 e 9, e contém os graus de liberdade de índices 15, 16, 25, 26, 27, 28, 17 e 18, nessa ordem. Logo, a matriz \mathbf{M}_7 , associada ao elemento 7, é dada por

$$\mathbf{M}_7 = [\mathbf{I}_{*,15} \ \mathbf{I}_{*,16} \ \mathbf{I}_{*,25} \ \mathbf{I}_{*,26} \ \mathbf{I}_{*,27} \ \mathbf{I}_{*,28} \ \mathbf{I}_{*,17} \ \mathbf{I}_{*,18}],$$

onde $\mathbf{I}_{*,j}$ indica a j -ésima coluna da matriz \mathbf{I} .

O vetor global de forças nodais equivalentes da estrutura $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2n_n}$ deve ser obtido através de uma superposição dos vetores de forças nodais equivalentes dos elementos, $\mathbf{f}^{(e)}$, de maneira análoga àquela feita para as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{K}_T , utilizando rigorosamente a mesma convenção para os índices definida acima. Assim,

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{n_{el}} \mathbf{M}_i \mathbf{f}^{(i)}. \quad (3.97)$$

O vetor \mathbf{f} corresponde ao carregamento \mathbf{t} , mostrado na Figura 1.2, no domínio discretizado.

No próximo capítulo, veremos como representar os problemas de otimização topológica estudados neste trabalho em um meio discreto, após a aplicação do Método dos Elementos Finitos.

Capítulo 4

O problema de otimização topológica no domínio discretizado

No Capítulo 1, descrevemos a formulação do problema de otimização topológica de estruturas e de mecanismos flexíveis em um meio contínuo. Agora, apresentaremos a formulação destes problemas no domínio discretizado, tanto no caso de pequenos quanto no caso de grandes deslocamentos.

Após a discretização do domínio e a aplicação do Método dos Elementos Finitos, o problema de otimização topológica num meio contínuo é transformado em um problema de programação não linear num meio discreto, cujas variáveis são as densidades ρ_i , $i = 1, \dots, n_{el}$, que devem satisfazer as restrições

$$0 \leq \rho_i \leq 1.$$

Para cada i , o elemento i é vazio se $\rho_i = 0$, e é sólido se $\rho_i = 1$.

Com a introdução dos elementos finitos, a restrição de volume

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq \Omega_{\max}$$

passa a ser escrita como

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \rho_i \leq V^*, \quad (4.1)$$

onde v_i é o volume do elemento i e V^* é o volume máximo que a estrutura ótima pode possuir. Note que a restrição (4.1) é linear em relação às variáveis ρ_i .

Na prática, é conveniente reescrever (4.1) como

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0, \quad (4.2)$$

para evitar instabilidades numéricas decorrentes da diferença das ordens de grandeza das variáveis e da restrição de volume.

Como a rigidez do elemento finito está diretamente relacionada às propriedades efetivas do material, a penalização do material intermediário através da aplicação do modelo SIMP é introduzida nas matrizes de rigidez $\mathbf{k}^{(e)}$ e $\mathbf{k}_T^{(e)}$ do elemento, definindo

$$\mathbf{k}(\rho_e) = \rho_e^p \bar{\mathbf{k}}, \quad e = 1, \dots, n_{el} \quad (4.3)$$

no caso de pequenos deslocamentos, e

$$\mathbf{k}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \rho_e) = \rho_e^p \bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}), \quad e = 1, \dots, n_{el} \quad (4.4)$$

e

$$\mathbf{k}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \rho_e) = \rho_e^p \bar{\mathbf{k}}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}), \quad e = 1, \dots, n_{el}, \quad (4.5)$$

no caso de grandes deslocamentos. De forma análoga, a equação (3.89) torna-se

$$\mathbf{q}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}, \rho_e) = \rho_e^p \bar{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}), \quad e = 1, \dots, n_{el}. \quad (4.6)$$

Em (4.3), (4.4) e (4.5), $\hat{\mathbf{u}}^{(e)}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento e , ρ_e é a densidade do elemento e , e p é o fator de penalização do modelo SIMP.

A matriz de rigidez $\bar{\mathbf{k}}$ em (4.3), associada ao caso de pequenos deslocamentos, é calculada usando (3.40). Já as matrizes $\bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ e $\bar{\mathbf{k}}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$, relacionadas à hipótese de grandes deslocamentos com a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant, são obtidas usando (3.65) e (3.66), respectivamente. Para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet, $\bar{\mathbf{k}}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ é calculada usando (3.95) e $\bar{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ é obtida através de (3.94).

Tendo em mãos (4.3), (4.4) e (4.5), obtemos as matrizes de rigidez globais da estrutura (introduzidas na Seção 3.5), dadas por

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \rho_i^p \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{k}} \mathbf{M}_i^T \quad (4.7)$$

no caso de pequenos deslocamentos,

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \rho_i^p \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) \mathbf{M}_i^T \quad (4.8)$$

e

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \rho_i^p \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{k}}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) \mathbf{M}_i^T \quad (4.9)$$

no caso de grandes deslocamentos.

Em (4.7), (4.8) e (4.9), $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2n_n}$ é o *vetor global de deslocamentos nodais* da estrutura, $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_{n_{el}})^T$ é um vetor que contém as densidades de cada elemento, e \mathbf{M}_i é a matriz definida em (3.97), para cada $i = 1, \dots, n_{el}$.

Sob algumas hipóteses, Rietz [57] e Martínez [50] demonstram que é possível obter um valor finito para o fator de penalização p das densidades, tal que o valor ótimo de

cada densidade assuma apenas os valores 0 ou 1, isto é, existe um valor finito de p tal que a solução ótima do problema de otimização topológica é discreta.

Na próxima subseção, mostraremos o problema de otimização topológica de estruturas no domínio discretizado.

4.1 Estruturas

Conforme vimos no Capítulo 1, a condição de equilíbrio estático da estrutura é representada no problema (1.10) pela equação

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad (4.10)$$

onde $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é a forma bilinear que representa o trabalho interno associado à deformação da estrutura (definida em (1.4)) e $L(\mathbf{v})$ é a flexibilidade média da estrutura (definida em (1.3)). Assim, no caso de pequenos deslocamentos, (4.10) é convertida no sistema

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (4.11)$$

onde a matriz de rigidez global $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ é dada por (4.7). Para estruturas em que a hipótese de grandes deslocamentos é levada em consideração, (4.10) é convertida no sistema não linear

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

onde

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (4.13)$$

para a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant. Já para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet, obtemos, de (3.88),

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \rho_i^p \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) - \mathbf{f}, \quad (4.14)$$

onde \mathbf{M}_i é a matriz definida em (3.96) e $\bar{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ é dado em (3.89).

Se nenhuma condição de contorno relativa aos deslocamentos nodais for imposta às condições de equilíbrio estático, os sistemas (4.11) e (4.12) terão infinitas soluções. Fisicamente, isso significa que um corpo sem nenhum tipo de restrição aos deslocamentos pode apresentar movimentos de corpo rígido, ou seja, não está em equilíbrio estático.

No caso de pequenos deslocamentos, após a imposição dos apoios, a matriz de rigidez global $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ (que é simétrica) torna-se definida positiva. Assim, podemos usar a Fatoração de Cholesky para resolver os sistemas lineares (4.11). Entretanto, no caso de grandes deslocamentos, a matriz de rigidez tangente global $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ (que também é simétrica) poderá não ser definida positiva, mesmo com a inclusão dos apoios na

estrutura. Isso acarreta grandes dificuldades numéricas na resolução dos sistemas não lineares (4.12), conforme discutiremos adiante neste capítulo.

Uma vez que as matrizes de rigidez globais (4.7), (4.8) e (4.9) são obtidas através da superposição das respectivas matrizes de rigidez do elemento (4.3), (4.4) e (4.5), pode ocorrer que (4.7), (4.8) e (4.9) sejam singulares. Uma alternativa amplamente usada para evitar este problema é atribuir um valor estritamente positivo (mas pequeno o suficiente) para o limitante inferior das densidades. Assim, definindo $\rho_{\min} > 0$, temos

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}.$$

Podemos tomar, por exemplo, $\rho_{\min} = 10^{-3}$. Entretanto, devido às dificuldades numéricas encontradas na resolução dos sistemas não lineares (4.12), uma escolha mais cuidadosa desse limitante inferior será discutida adiante neste capítulo.

No caso de grandes deslocamentos, usamos o método de Newton para resolver o sistema (4.12). Assim, dado um ponto inicial \mathbf{u}_0 e fixado um vetor de densidades $\boldsymbol{\rho}$, devemos resolver a sequência de sistemas lineares

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\rho}) \Delta \mathbf{u}_k = -\mathbf{R}(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\rho}). \quad (4.15)$$

A aproximação para o vetor de deslocamentos nodais na condição de equilíbrio da estrutura é dada por

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k, \quad (4.16)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Conforme observamos anteriormente, os sistemas lineares (4.15) devem ser resolvidos até encontrarmos \mathbf{u}_k tal que

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\rho})\| \leq \varepsilon, \quad (4.17)$$

onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.

É importante notar que o vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} é dependente do vetor de densidades $\boldsymbol{\rho}$, de modo que denotamos $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$. Assim, os sistemas (4.11) e (4.12) podem ser expressos como

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}, \quad (4.18)$$

e

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

Após a discretização do domínio, o problema de otimização topológica de uma estrutura, definido em (1.10), sob a hipótese de não linearidade geométrica, é dado por

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f} \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el} \end{aligned} \quad (4.20)$$

no caso de pequenos deslocamentos, e

$$\begin{aligned}
& \min_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \\
& \text{s. a } \mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \\
& \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\
& 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

no caso de grandes deslocamentos.

Quando a estrutura está sujeita a pequenos deslocamentos, a matriz de rigidez global $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ é simétrica e definida positiva e, portanto, não singular. Assim, o problema (4.20) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& \min_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{f}^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f} \\
& \text{s. a } \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\
& 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Observando (4.13) e (4.14), podemos escrever

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{f}, \tag{4.23}$$

onde $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ representa o *vetor de forças nodais internas da estrutura*. Para a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant, temos

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{u} \tag{4.24}$$

e, para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet,

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \rho_i^p \mathbf{M}_i \mathbf{q}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}), \tag{4.25}$$

com $\mathbf{q}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)})$ dado em (3.94).

Quando a estrutura está em equilíbrio estático, temos $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}$. Logo, a restrição de equilíbrio estático $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$ pode ser acoplada à função objetivo do problema (4.21), que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& \min_{\boldsymbol{\rho}} [\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})]^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \\
& \text{s. a } \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\
& 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Note que o cálculo da função objetivo do problema (4.22) requer a resolução do sistema linear (4.18). Já no problema (4.26), é necessário resolver o sistema não linear (4.19) para calcular o valor da função objetivo.

Na próxima subseção, apresentaremos a formulação de Nishiwaki *et al.* [53] e de Pedersen, Buhl e Sigmund [55] para o projeto de um mecanismo flexível, no domínio discretizado.

4.2 Mecanismos flexíveis

Na resolução numérica da formulação de Nishiwaki *et al.* [53] (problema (1.23)), devemos definir três situações distintas de carregamentos aplicados ao mecanismo flexível. A Figura 4.1 ilustra essas situações.

A Figura 4.1(a) mostra o domínio de projeto, a força aplicada, as condições de apoio e a direção do deslocamento desejado. Na Figura 4.1(b), é exibido o domínio discretizado, a força aplicada e os apoios, que impedem os deslocamentos nodais tanto na horizontal quanto na vertical. A Figura 4.1(c) mostra a aplicação da força fictícia

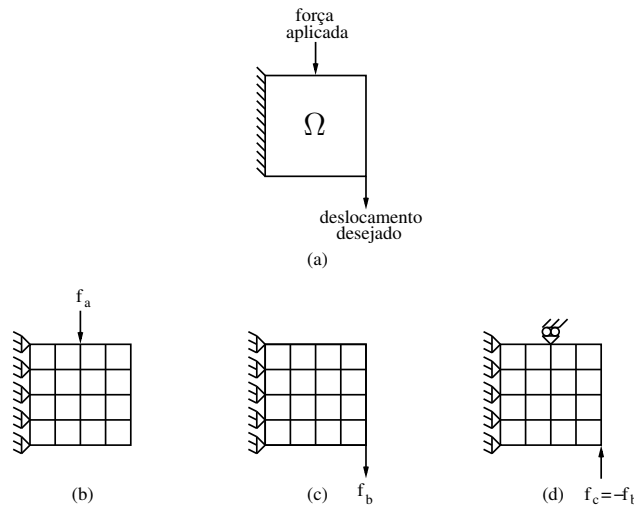


Figura 4.1: Simulações de carregamento para um mecanismo flexível.

unitária no ponto e na direção do deslocamento desejado. Na Figura 4.1(d), é exibida a força de reação no mesmo ponto, na mesma direção, mas em sentido contrário ao da força fictícia unitária mostrada na Figura 4.1(c). É importante ressaltar que a Figura 4.1(d) inclui um apoio adicional no mesmo nó e na mesma direção da força aplicada na primeira situação de carregamento (Figura 4.1(b)). Esse apoio restringe o deslocamento apenas na direção de aplicação da força (neste caso, na vertical).

Quando o mecanismo flexível está sujeito a pequenos deslocamentos, as condições de equilíbrio estático associadas às três situações de carregamento ilustradas nas Figuras

4.1(b), 4.1(c) e 4.1(d) são dadas, respectivamente, pelos sistemas lineares

$$\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_a \quad (4.27)$$

$$\mathbf{K}_b(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_b \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K}_c(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_c, \quad (4.29)$$

onde $\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\rho})$, $\mathbf{K}_b(\boldsymbol{\rho})$ e $\mathbf{K}_c(\boldsymbol{\rho})$ são as matrizes de rigidez relativas aos casos de carregamento das Figuras 4.1(b), 4.1(c) e 4.1(d), respectivamente.

Sob a hipótese de grandes deslocamentos, temos

$$\mathbf{R}_a(\mathbf{u}_a, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{R}_b(\mathbf{u}_b, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{R}_c(\mathbf{u}_c, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}, \quad (4.32)$$

onde (4.30), (4.31) e (4.32) referem-se aos casos de carregamento das Figuras 4.1(b), 4.1(c) e 4.1(d), respectivamente, e $\mathbf{u}_a \equiv \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho})$, $\mathbf{u}_b \equiv \mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho})$ e $\mathbf{u}_c \equiv \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})$. Para a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant, $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})$ é definida por (4.13). Já para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet, usamos (4.14).

Analogamente ao caso das estruturas, os sistemas lineares (4.27), (4.28) e (4.29) são resolvidos usando a Fatoração de Cholesky, e os sistemas não lineares (4.30), (4.31) e (4.32) são resolvidos através do método de Newton. Para cada um desses sistemas, dados os respectivos pontos iniciais $\mathbf{u}_{a,0}$, $\mathbf{u}_{b,0}$ e $\mathbf{u}_{c,0}$ e fixado um vetor de densidades $\boldsymbol{\rho}$, resolvemos as sequências de sistemas lineares

$$\mathbf{K}_{Ta}(\mathbf{u}_{a,k}, \boldsymbol{\rho}) \Delta \mathbf{u}_{a,k} = -\mathbf{R}_a(\mathbf{u}_a, \boldsymbol{\rho}) \quad (4.33)$$

$$\mathbf{K}_{Tb}(\mathbf{u}_{b,k}, \boldsymbol{\rho}) \Delta \mathbf{u}_{b,k} = -\mathbf{R}_b(\mathbf{u}_b, \boldsymbol{\rho}) \quad (4.34)$$

$$\mathbf{K}_{Tc}(\mathbf{u}_{c,k}, \boldsymbol{\rho}) \Delta \mathbf{u}_{c,k} = -\mathbf{R}_c(\mathbf{u}_c, \boldsymbol{\rho}), \quad (4.35)$$

onde \mathbf{K}_{Ta} , \mathbf{K}_{Tb} e \mathbf{K}_{Tc} são as matrizes de rigidez tangente relativas aos casos de carregamento das Figuras 4.1(b), 4.1(c) e 4.1(d), respectivamente. As aproximações para os vetores de deslocamentos nodais em cada um desses casos são dadas por

$$\mathbf{u}_{a,k+1} = \mathbf{u}_{a,k} + \Delta \mathbf{u}_{a,k} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{u}_{b,k+1} = \mathbf{u}_{b,k} + \Delta \mathbf{u}_{b,k} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{u}_{c,k+1} = \mathbf{u}_{c,k} + \Delta \mathbf{u}_{c,k}. \quad (4.38)$$

Os sistemas lineares (4.33), (4.34) e (4.35) devem ser resolvidos até que as condições

$$\|\mathbf{R}_a(\mathbf{u}_a, \boldsymbol{\rho})\| \leq \varepsilon \quad (4.39)$$

$$\|\mathbf{R}_b(\mathbf{u}_b, \boldsymbol{\rho})\| \leq \varepsilon \quad (4.40)$$

$$\|\mathbf{R}_c(\mathbf{u}_c, \boldsymbol{\rho})\| \leq \varepsilon \quad (4.41)$$

sejam satisfeitas, onde $\varepsilon > 0$ é um número positivo suficientemente pequeno.

A obtenção da energia mútua do mecanismo é baseada nas configurações mostradas pelas Figuras 4.1(b) e 4.1(c), e a sua flexibilidade média é encontrada através da configuração da Figura 4.1(d). Podemos definir a energia mútua e a flexibilidade média do mecanismo na forma matricial como

$$\begin{aligned} \text{energia mútua} &= \mathbf{f}_b^T \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{flexibilidade média} &= \mathbf{f}_c^T \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho}). \end{aligned}$$

Com a discretização do domínio, o problema de otimização topológica de um mecanismo flexível definido em (1.23) fica dado por

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} & \quad - \frac{\mathbf{f}_b^T \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho})}{\mathbf{f}_c^T \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})} \\ \text{s. a} & \quad \mathbf{K}_a(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_a \\ & \quad \mathbf{K}_b(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_b \\ & \quad \mathbf{K}_c(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_c \\ & \quad \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

no caso de pequenos deslocamentos, e por

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} & \quad - \frac{\mathbf{f}_b^T \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho})}{\mathbf{f}_c^T \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})} \\ \text{s. a} & \quad \mathbf{R}_a(\mathbf{u}_a, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \\ & \quad \mathbf{R}_b(\mathbf{u}_b, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \\ & \quad \mathbf{R}_c(\mathbf{u}_c, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \\ & \quad \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}, \end{aligned} \tag{4.43}$$

no caso de grandes deslocamentos.

Note que o cálculo da função objetivo do problema (4.43) requer o uso de apenas duas das três condições de equilíbrio estático do mecanismo flexível, pois ela só depende dos vetores de deslocamentos nodais \mathbf{u}_a e \mathbf{u}_c . Dessa forma, para calcular a função objetivo em questão, é necessário resolver os sistemas lineares (4.27) e (4.29), no caso de pequenos deslocamentos, ou os sistemas não lineares (4.33) e (4.35), no caso de grandes deslocamentos.

Assim como no caso das estruturas, as condições de equilíbrio estático podem ser

acopladas à função objetivo, de modo que o problema (4.42) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & - \frac{\mathbf{f}_b^T \mathbf{K}_a(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_a}{\mathbf{f}_c^T \mathbf{K}_c(\boldsymbol{\rho})^{-1} \mathbf{f}_c} \\ \text{s. a} \quad & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

e, usando (4.24) ou (4.25), o problema (4.43) torna-se

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & - \frac{[\mathbf{f}_{int,b}(\mathbf{u}_b(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})]^T \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho})}{[\mathbf{f}_{int,c}(\mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})]^T \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})} \\ \text{s. a} \quad & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Agora, consideraremos a formulação proposta por Pedersen, Buhl e Sigmund [55]. No domínio discretizado, o problema (1.29) é escrito como

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & \mathbf{l}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f} \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \leq u_{in}^* \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el} \end{aligned} \quad (4.46)$$

no caso de pequenos deslocamentos, e

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & \mathbf{l}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \leq u_{in}^* \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el} \end{aligned} \quad (4.47)$$

no caso de grandes deslocamentos.

Nos problemas (4.46) e (4.47), $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{2n_n}$ é um vetor cuja componente associada ao nó correspondente ao grau de liberdade do ponto de saída é igual a 1 e as outras componentes são iguais a 0, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{2n_n}$ é um vetor cuja componente associada ao nó correspondente ao grau de liberdade do ponto de entrada é igual a 1 e as outras componentes são iguais a 0, e u_{in}^* é o valor máximo permitido para o deslocamento no nó correspondente ao ponto de entrada. Em (4.47), a restrição $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$ é obtida usando (4.13) para a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant, e usando (4.14) para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet.

É importante salientar que, nos problemas (4.46) e (4.47), o valor da rigidez da mola k_{out} deve ser somado às componentes da diagonal das matrizes $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ e $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ e da componente do resíduo $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ correspondentes ao grau de liberdade relativo ao ponto de saída do mecanismo flexível.

Se colocarmos uma mola de rigidez k_{in} no nó correspondente ao grau de liberdade do ponto de entrada do mecanismo flexível, eliminamos a restrição $\mathbf{e}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \leq u_{in}^*$. Logo, os problemas (4.46) e (4.47) tornam-se

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & \mathbf{I}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f} \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el} \end{aligned} \tag{4.48}$$

para pequenos deslocamentos, e

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & \mathbf{I}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \rho_i}{V^*} - 1 \leq 0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el} \end{aligned} \tag{4.49}$$

para grandes deslocamentos.

Nos problemas (4.48) e (4.49), é necessário somar os valores de k_{in} e k_{out} às componentes de $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$, $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ e $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ correspondentes aos graus de liberdade associados aos pontos de entrada e de saída do mecanismo, respectivamente.

Na próxima seção, discutiremos as dificuldades encontradas na resolução dos sistemas não lineares oriundos da hipótese de não linearidade geométrica.

4.3 Dificuldades numéricas do método de Newton

Quando consideramos a hipótese de pequenos deslocamentos na obtenção de uma estrutura ou de um mecanismo flexível, todos os elementos do domínio discretizado têm a mesma matriz de rigidez do elemento $\bar{\mathbf{k}}$, que é calculada uma única vez, no início do processo de otimização, e é armazenada para o cálculo de $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$. Entretanto, quando lidamos com estruturas ou mecanismos flexíveis sujeitos a grandes deslocamentos, cada elemento possui uma matriz de rigidez diferente, uma vez que ela é dependente dos seus respectivos deslocamentos nodais. Neste caso, as matrizes $\bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ e $\bar{\mathbf{k}}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(e)})$ devem ser calculadas para cada elemento toda vez que o resíduo $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ e a matriz de rigidez tangente global $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ precisam ser obtidos, o que aumenta drasticamente o custo computacional do cálculo da função objetivo.

Além disso, no caso de pequenos deslocamentos, pode-se garantir que a matriz de rigidez global $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ é definida positiva, de modo que a fatoração de Cholesky pode ser usada para resolver o sistema linear referente às condições de equilíbrio estático da estrutura. Já quando levamos em conta a hipótese de grandes deslocamentos, a matriz de rigidez tangente global $\mathbf{K}_T(\boldsymbol{\rho})$ não será necessariamente definida positiva, e o método de Newton poderá não encontrar uma solução para o sistema não linear $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$.

Nesta seção, apresentaremos algumas estratégias para tentar contornar as dificuldades numéricas enfrentadas pelo método de Newton para sistemas não lineares em problemas de otimização topológica com a hipótese de grandes deslocamentos.

4.3.1 Eliminação de nós rodeados por elementos vazios

Buhl, Pedersen e Sigmund [14] constataram, em testes computacionais, que a dificuldade de convergência do método de Newton é provocada pela oscilação nos valores dos deslocamentos dos nós rodeados por elementos com baixa densidade, conforme mostra a Figura 4.2, na qual os elementos de cor branca são vazios e os elementos de cor cinza são preenchidos por material. Baseado neste experimento, eles propuseram uma

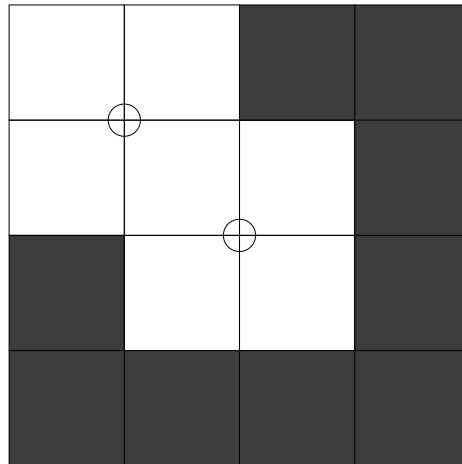


Figura 4.2: Exemplo de domínio onde os nós rodeados por elementos com baixa densidade (que estão circundados) são removidos do critério de convergência do método de Newton.

estratégia que consiste na remoção desses nós na verificação do critério de convergência do método de Newton (norma do passo $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ e norma do resíduo $\mathbf{R}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\rho})$). Com isso, atribui-se o valor zero às componentes de $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ e de $\mathbf{R}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\rho})$ associadas aos nós em questão. Buhl, Pedersen e Sigmund [14] argumentam que os nós rodeados por elementos com baixa densidade podem ser removidos pelo fato de serem irrelevantes do ponto de vista estrutural, ou seja, por não interferirem no processo de construção da estrutura final.

4.3.2 Método do comprimento de arco

Em estruturas submetidas a grandes deslocamentos, a curva que relaciona a força aplicada aos deslocamentos sofridos pela estrutura (chamada *curva força-deslocamento*) é não linear, podendo apresentar pontos de máximo, pontos de mínimo e pontos onde a reta tangente à curva é vertical, conforme mostra a Figura 4.3.2. Neste contexto, tais pontos são denominados *pontos limite*.

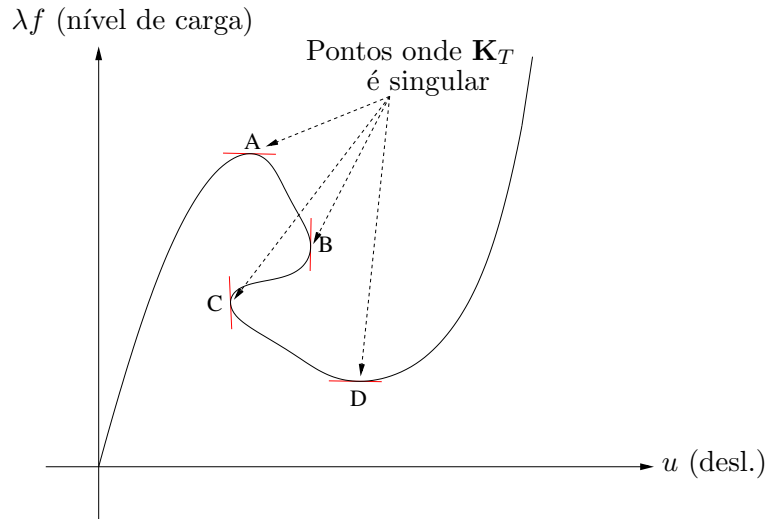


Figura 4.3: Exemplo de curva força-deslocamento para uma estrutura submetida a grandes deslocamentos.

Se o método de Newton atinge um ponto limite, a matriz de rigidez tangente global $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ torna-se singular, e o método de Newton diverge. Na tentativa de superar essa dificuldade, podemos aumentar gradativamente a intensidade da carga externa. Para tanto, introduzimos uma nova variável λ no sistema $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$, obtendo o novo sistema

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}, \lambda) = \mathbf{0}, \quad \text{onde} \quad \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}, \lambda) = \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) - \lambda \mathbf{f}, \quad (4.50)$$

$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ é o vetor de forças nodais internas da estrutura, definido em (4.24) ou (4.25), e \mathbf{f} é o vetor de forças nodais externas.

Com a introdução da variável λ , que define o nível de carga da estrutura, é necessário definir uma equação adicional, para que o sistema de equações (4.50) fique completamente determinado. Uma maneira de se fazer isso é impor que o vetor $\Delta \mathbf{u}$, que representa o passo total dado entre o ponto inicial \mathbf{u}_0 e a solução \mathbf{u}^* dentro de um determinado nível de carga, tenha um comprimento fixo ℓ . Ou seja, incluímos a restrição

$$\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} = \ell^2, \quad (4.51)$$

onde $\Delta \mathbf{u}$ representa a variação total dos deslocamentos nodais dentro de um determinado nível de carga e ℓ é o chamado *comprimento de arco*. A equação (4.51) corresponde a exigir que os iterados gerados pelo método de Newton pertençam a uma superfície esférica de raio igual a ℓ e cujo centro localiza-se no ponto \mathbf{u}_0 .

Considere um nível inicial de carga $0 < \lambda_0 < 1$ e um número r de incrementos de carga. No primeiro nível de carga ($r = 1$), aplicamos o método de Newton ao sistema não linear formado por (4.50) e (4.51) partindo do ponto $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ até convergir a um ponto de equilíbrio estático $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$. No segundo nível de carga ($r = 2$), começamos no ponto $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$ e aplicamos o método de Newton a (4.50) e (4.51) até convergir a um ponto de equilíbrio estático $(\mathbf{u}_2, \lambda_2)$. Prosseguindo com esse raciocínio, no r -ésimo nível de carga, obtém-se o ponto de equilíbrio estático $(\mathbf{u}^*, \lambda^*)$, correspondente à carga externa originalmente aplicada à estrutura. Desse modo, espera-se que $\lambda^* = 1$. A Figura (4.3.2) ilustra este processo.

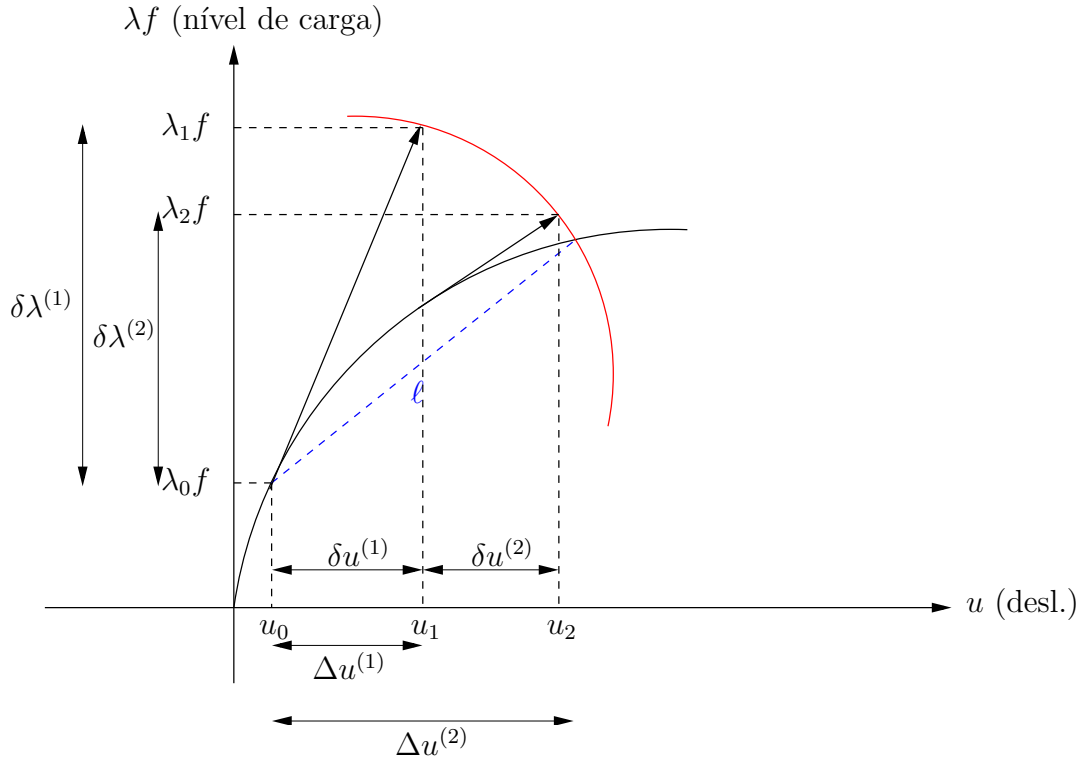


Figura 4.4: Interpretação geométrica do método do comprimento de arco.

O processo descrito acima define o *método do comprimento de arco*, que consiste numa adaptação do método de Newton para lidar com problemas de otimização topológica de estruturas sob não linearidade geométrica e/ou de material. Este método foi apresentado por Wempner [64], e aprimorado principalmente por Riks [58], Batoz e Dhatt [5] e Crisfield [20, 21].

Daqui em diante, para simplificar a notação, denotaremos $\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}, \lambda) \equiv \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}, \lambda)$,

uma vez que $\boldsymbol{\rho}$ permanece inalterado durante a aplicação do método de Newton.

Agora, vamos descrever uma iteração do método do comprimento de arco, dentro de um determinado nível de carga.

Tomando a aproximação linear de $\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}, \lambda)$ em torno de um ponto $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda})$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{u}, \lambda) &= \tilde{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda}) + \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda})}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda})}{\partial \lambda} \delta \lambda \\ &= \hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{K}}_T \delta \mathbf{u} - \mathbf{f} \delta \lambda. \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde $\hat{\mathbf{R}} \equiv \tilde{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\lambda})$ e $\hat{\mathbf{K}}_T \equiv \hat{\mathbf{K}}_T(\hat{\mathbf{u}})$.

Aplicando o método de Newton a (4.50) (ou seja, fazendo $\mathbf{L}_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}$ em (4.52)), obtemos

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_R + \delta \mathbf{u}_f, \quad (4.53)$$

onde

$$\delta \mathbf{u}_f = \delta \lambda \hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{f} \quad (4.54)$$

é o *passo preditor* e

$$\delta \mathbf{u}_R = -\hat{\mathbf{K}}_T^{-1} \hat{\mathbf{R}} \quad (4.55)$$

é o *passo corretor*.

Dados um ponto inicial $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ e um passo inicial $\delta \lambda_0 > 0$ para o nível de carga, devemos encontrar um passo preditor inicial, definido por

$$\hat{\mathbf{K}}_T^{(0)} \delta \mathbf{u}_f^{(0)} = \delta \lambda_0 \mathbf{f} \implies \delta \mathbf{u}_f^{(0)} = \delta \lambda_0 [\hat{\mathbf{K}}_T^{(0)}]^{-1} \mathbf{f}. \quad (4.56)$$

A partir do segundo nível de carga, o passo inicial $\delta \lambda_0$ para o nível de carga é obtido substituindo-se (4.56) em (4.51). Nesse caso,

$$\delta \lambda_0 = \pm \frac{\ell}{\sqrt{[\delta \mathbf{u}_f^{(0)}]^T [\delta \mathbf{u}_f^{(0)}]}}. \quad (4.57)$$

De acordo com Crisfield [21], a escolha do sinal correto em (4.57) depende da análise dos sinais dos termos da diagonal da matriz \mathbf{D} da fatoração \mathbf{LDL}^T de \mathbf{K}_T . Se todos os termos da diagonal de \mathbf{D} forem positivos (ou seja, se \mathbf{K}_T for definida positiva), escolhemos o sinal positivo. Caso contrário, tomamos o sinal negativo. Isso acontece, por exemplo, quando um dos iterados é um ponto limite da curva força-deslocamento.

Dada a aproximação $\mathbf{u}^{(k)}$ obtida na k -ésima iteração do método do comprimento de arco, obtemos o novo iterado $\mathbf{u}^{(k+1)}$ definindo

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(0)} + \Delta \mathbf{u}^{(k+1)}, \quad (4.58)$$

onde

$$\Delta \mathbf{u}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_R + \delta \mathbf{u}_f \quad (4.59)$$

e

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta\lambda. \quad (4.60)$$

Note que, até este momento, o passo $\delta\lambda$ permanece indeterminado. Então, para obter $\delta\lambda$, substituímos (4.59) em (4.51), obtendo a equação quadrática

$$\alpha_1(\delta\lambda)^2 + \alpha_2(\delta\lambda) + \alpha_3 = 0, \quad (4.61)$$

onde

$$\alpha_1 = \delta\mathbf{u}_f^T \delta\mathbf{u}_f,$$

$$\alpha_2 = 2\delta\mathbf{u}_f^T (\Delta\mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{u}_R)$$

e

$$\alpha_3 = (\Delta\mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{u}_R)^T (\Delta\mathbf{u}^{(k)} + \delta\mathbf{u}_R) - \ell^2.$$

Caso (4.61) não tenha raízes reais, aumenta-se o comprimento de arco ℓ até que esta equação tenha pelo menos uma raiz real.

Na literatura, foram propostas diversas maneiras de se escolher o valor de $\delta\lambda$ mais adequado, caso (4.61) tenha duas raízes reais. Uma alternativa possível, proposta por Hellweg e Crisfield [39], é tomar $\delta\lambda$ que forneça o menor valor de $\|\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{u}^{k+1}, \lambda^{(k+1)})\|$.

Crisfield [21] sugere que, a partir do segundo nível de carga, o comprimento do arco seja ajustado a partir da relação

$$\ell_{j+1} = \ell_j \left(\frac{I_d}{I_j} \right), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (4.62)$$

onde n é o número total de níveis de carga, I_j é o número de iterações efetuadas no nível de carga j e I_d é o número desejado de iterações no nível de carga j (em geral, toma-se $I_d \leq 5$). Isso permite que o comprimento de arco seja pequeno em regiões onde a não linearidade da curva força-deslocamento é mais severa, e que ele seja grande em regiões onde essa curva tem um comportamento próximo ao linear.

4.3.3 Escalamento das densidades

Conforme dito anteriormente, devemos atribuir um valor $\rho_{min} > 0$ suficientemente pequeno para evitar que a matriz de rigidez global seja singular. Um valor frequentemente escolhido na prática é $\rho_{min} = 10^{-3}$. Entretanto, em nossos testes computacionais, este valor de ρ_{min} produz instabilidades numéricas no método de Newton para vários problemas de otimização topológica em que a força externa aplicada tem grande magnitude.

Diante dessa situação, tentamos aplicar a estratégia de remoção dos nós rodeados por elementos de baixa densidade no critério de convergência do método de Newton,

proposta por Buhl, Pedersen e Sigmund [14], mas não obtivemos sucesso. A próxima tentativa foi a aplicação o método do comprimento de arco para resolver o sistema não linear $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$, em lugar do método de Newton original. Após numerosos testes, constatamos que este método também não produziu os resultados desejados, uma vez que, na última etapa (ou seja, no último nível de carga), o método convergia para $\lambda^* < 1$, ou seja, o nível de carga considerado pelo método era inferior à intensidade da força originalmente aplicada à estrutura. Além disso, o método em questão é extremamente caro sob o ponto de vista computacional e muito sensível em relação às escolhas do ponto inicial e do tipo de atualização para o comprimento do arco entre dois níveis de carga consecutivos. Mesmo considerando a opção de usar o método de Newton em conjunto com o método do comprimento de arco, acionando-o apenas quando o método de Newton falha, não encontramos resultados satisfatórios.

Finalmente, após a experiência adquirida com esses testes, tentamos resolver os problemas fazendo um escalamento das densidades. Essa estratégia foi a única que obteve sucesso em todos os problemas que envolvem grandes deslocamentos da estrutura. Este processo será apresentado a seguir.

Seja ρ_i a densidade original do i -ésimo elemento do domínio discretizado, e considere $\rho_{\min} = 10^{-3}$ (note que qualquer outro valor de $\rho_{\min} > 0$ poderia ser tomado). Definimos $\bar{\rho}_{\min} > \rho_{\min}$ e a mudança de variáveis

$$\tau_i = \left(\frac{1 - \bar{\rho}_{\min}}{1 - \rho_{\min}} \right) \rho_i + \left(\frac{\bar{\rho}_{\min} - \rho_{\min}}{1 - \rho_{\min}} \right), \quad i = 1, \dots, n_{el}, \quad (4.63)$$

de modo que o intervalo original $[\rho_{\min}, 1]$ de ρ_i é transformado no intervalo $[\bar{\rho}_{\min}, 1]$ de τ_i .

De (4.63), temos que

$$\rho_i = \left(\frac{1 - \rho_{\min}}{1 - \bar{\rho}_{\min}} \right) \tau_i - \left(\frac{\bar{\rho}_{\min} - \rho_{\min}}{1 - \bar{\rho}_{\min}} \right), \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (4.64)$$

Substituindo (4.64) na restrição de volume (4.1), encontramos

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} v_i \tau_i \leq \left(\frac{1 - \bar{\rho}_{\min}}{1 - \rho_{\min}} \right) V^* + \left(\frac{\bar{\rho}_{\min} - \rho_{\min}}{1 - \rho_{\min}} \right) V_{dom}, \quad (4.65)$$

onde

$$V_{dom} = \sum_{i=1}^{n_{el}} v_i$$

é o volume total do domínio discretizado no qual a estrutura deve estar contida.

Seguindo o formato proposto em (4.2), reescrevemos (4.65) como

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \tau_i}{\tilde{V}} - 1 \leq 0, \quad (4.66)$$

onde

$$\tilde{V} = \left(\frac{1 - \bar{\rho}_{\min}}{1 - \rho_{\min}} \right) V^* + \left(\frac{\bar{\rho}_{\min} - \rho_{\min}}{1 - \rho_{\min}} \right) V_{dom}. \quad (4.67)$$

Definindo

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)^T$$

com τ_i dado em (4.63) e usando a nova restrição de volume (4.67), mostramos abaixo os problemas (4.21), (4.43), (4.47) e (4.49) em suas versões escaladas.

Estruturas

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{f}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \tau_i}{\tilde{V}} - 1 \leq 0, \\ & \bar{\rho}_{\min} \leq \tau_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Mecanismos flexíveis (Nishiwaki *et al.* [53])

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\mathbf{f}_b^T \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\tau})}{\mathbf{f}_c^T \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\tau})} \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{R}_a(\mathbf{u}_a(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{R}_b(\mathbf{u}_b(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{R}_c(\mathbf{u}_c(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \tau_i}{\tilde{V}} - 1 \leq 0, \\ & \bar{\rho}_{\min} \leq \tau_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Mecanismos flexíveis (Pedersen, Buhl e Sigmund [55])

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{l}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) \leq u_{in}^* \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \tau_i}{\tilde{V}} - 1 \leq 0, \\ & \bar{\rho}_{\min} \leq \tau_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Mecanismos flexíveis (Bendsøe e Sigmund [8])

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{l}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0} \\ & \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \tau_i}{\tilde{V}} - 1 \leq 0, \\ & \bar{\rho}_{\min} \leq \tau_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Na próxima seção, veremos como calcular as derivadas da função objetivo dos problemas de otimização topológica estudados neste trabalho.

4.4 Derivadas da função objetivo do problema de otimização topológica

Conforme vimos nas Seções 4.1 e 4.2, os problemas de otimização topológica podem ser escritos em função apenas das densidades dos elementos, uma vez que as condições de equilíbrio estático da estrutura podem ser acopladas à função objetivo. A seguir, veremos como calcular as derivadas da função objetivo para o problema de otimização topológica de estruturas e, em seguida, para mecanismos flexíveis.

4.4.1 Estruturas

Nos problemas (4.20) e (4.21), a função objetivo é definida por $F(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$, onde \mathbf{f} é o vetor de forças nodais e $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$ é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura.

Pela Regra da Cadeia, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \rho_i} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \rho_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial \rho_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.72)$$

onde $m = 2n_n$ é o número total de graus de liberdade referentes aos deslocamentos nodais de toda a estrutura, e $n = n_{el}$ é o número total de elementos do domínio discretizado.

Denotamos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \rho_i} & \frac{\partial u_2}{\partial \rho_i} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial \rho_i} \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.73)$$

Em primeiro lugar, consideremos o problema (4.20), referente à hipótese de pequenos deslocamentos. Derivando os deslocamentos nodais em relação a ρ_i e usando (4.7) e (4.18), obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} = -\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \mathbf{u}, \quad (4.74)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{k}} \mathbf{M}_i^T. \quad (4.75)$$

Observando que

$$\frac{\partial F}{\partial u_j} = f_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

e usando (4.73), podemos reescrever (4.72) como

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = \mathbf{f}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.76)$$

Uma vez que, de (4.20), temos $\mathbf{f} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{u}$, e substituindo (4.74) e (4.75) em (4.76), encontramos

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \mathbf{u} = -p \rho_i^{p-1} \mathbf{u}^T \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{k}} \mathbf{M}_i^T \mathbf{u} = -p \rho_i^{p-1} \mathbf{u}^{(i)T} \bar{\mathbf{k}} \mathbf{u}^{(i)}, \quad (4.77)$$

onde $\mathbf{u}^{(i)} \in \mathbb{R}^8$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento i .

Agora, consideraremos o problema (4.21), onde a hipótese de grandes deslocamentos é levada em conta. Nesse caso, definimos

$$\mathbf{R} = [R_1 \quad R_2 \quad \dots \quad R_m]^T \quad (4.78)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} = \left[\frac{\partial R_1}{\partial \rho_i} \quad \frac{\partial R_2}{\partial \rho_i} \quad \dots \quad \frac{\partial R_m}{\partial \rho_i} \right]^T, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.79)$$

onde $R_j \equiv R_j(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$, $j = 1, \dots, m$.

Derivando a condição de equilíbrio estático (4.19) com relação a ρ_i , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \rho_i} + \frac{\partial R_1}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \rho_i} + \dots + \frac{\partial R_1}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial \rho_i} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho_i} &= 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \rho_i} + \frac{\partial R_2}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \rho_i} + \dots + \frac{\partial R_2}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial \rho_i} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_i} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial R_m}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \rho_i} + \frac{\partial R_m}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \rho_i} + \dots + \frac{\partial R_m}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial \rho_i} + \frac{\partial R_m}{\partial \rho_i} &= 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Note que (4.80) pode ser escrito como o sistema linear

$$\mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} = -\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i}, \quad (4.81)$$

onde $\mathbf{K}_T \equiv \mathbf{K}_T(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho})$ é a matriz de rigidez tangente global definida em (4.9), dada por

$$[\mathbf{K}_T]_{jl} = \frac{\partial R_j}{\partial u_l}, \quad j, l = 1, \dots, m.$$

Supondo que \mathbf{K}_T seja não singular, temos, de (4.81),

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \rho_i} = -\mathbf{K}_T^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.82)$$

Substituindo (4.82) em (4.76), obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = -\mathbf{f}^T \mathbf{K}_T^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.83)$$

Definindo, agora, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ como a solução do sistema linear

$$\mathbf{K}_T \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{f}, \quad (4.84)$$

a equação (4.83) torna-se

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.85)$$

O processo descrito acima para a obtenção de $\partial F/\partial \rho_i$ é conhecido como *método adjunto* [8].

Para a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant, temos, de (4.13),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial (\mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{u} - \mathbf{f})}{\partial \rho_i} \\
&= \frac{\partial (\mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{u})}{\partial \rho_i} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_i} \\
&= \left[\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} \right] \mathbf{u} \\
&= p \rho_i^{p-1} \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) \mathbf{M}_i^T \mathbf{u}.
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Logo, substituindo (4.86) em (4.85), obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}^{(i)T} \bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) \hat{\mathbf{u}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.87}$$

onde $\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \in \mathbb{R}^8$ é um vetor que contém as componentes do vetor $\boldsymbol{\lambda}$ associadas ao elemento retangular i , p é o fator de penalização do modelo SIMP, $\hat{\mathbf{u}}^{(i)} \in \mathbb{R}^8$ é o vetor que contém as componentes do vetor de deslocamentos nodais \mathbf{u} referentes ao elemento i (na condição de equilíbrio estático) e $\bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ é a matriz de rigidez do elemento i , calculada usando (3.65).

Considerando, agora, a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet, temos, de (4.14),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial \left[\sum_{e=1}^{n_{el}} \rho_e^p \mathbf{M}_e \mathbf{q}(\hat{\mathbf{u}}^{(e)}) \right]}{\partial \rho_i} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_i} \\
&= p \rho_i^{p-1} \mathbf{M}_i \mathbf{q}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}).
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Substituindo (4.88) em (4.85), obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}^{(i)T} \mathbf{q}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.89}$$

4.4.2 Mecanismos flexíveis

Agora, vamos considerar o cálculo do vetor gradiente da função objetivo do problema de otimização topológica de mecanismos flexíveis, proposto por Nishiwaki *et al.* [53] (problemas (4.42) e (4.43)). Neste caso, temos

$$F(\boldsymbol{\rho}) = - \frac{\mathbf{f}_b^T \mathbf{u}_a(\boldsymbol{\rho})}{\mathbf{f}_c^T \mathbf{u}_c(\boldsymbol{\rho})}. \tag{4.90}$$

Denotando $F_1(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_b^T \mathbf{u}_a$ e $F_2(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_c^T \mathbf{u}_c$, temos que, para cada $i = 1, \dots, n_{el}$,

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} = - \frac{\frac{\partial F_1(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} F_2(\boldsymbol{\rho}) - F_1(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial F_2(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i}}{[F_2(\boldsymbol{\rho})]^2}. \quad (4.91)$$

Para pequenos deslocamentos, seguindo o mesmo raciocínio adotado para estruturas, encontramos

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho_i} = -p \rho_i^{p-1} \mathbf{u}_a^{(i)T} \bar{\mathbf{k}} \mathbf{u}_a^{(i)}, \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho_i} = -p \rho_i^{p-1} \mathbf{u}_c^{(i)T} \bar{\mathbf{k}} \mathbf{u}_c^{(i)}. \quad (4.93)$$

No caso de grandes deslocamentos, obtemos, de modo análogo ao que fizemos para estruturas,

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}_a^{(i)T} \bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}_a^{(i)}) \mathbf{u}_a^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}_c^{(i)T} \bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}_c^{(i)}) \mathbf{u}_c^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.95)$$

para a lei de material de material de Kirchhoff Saint-Venant, e

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}_a^{(i)T} \bar{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{u}}_a^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}_c^{(i)T} \bar{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{u}}_c^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.97)$$

para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet.

Nas equações (4.92)-(4.97), $\boldsymbol{\lambda}_a \in \mathbb{R}^{2n_n}$ é a solução do sistema linear

$$\mathbf{K}_{Ta} \boldsymbol{\lambda}_a = -\mathbf{f}_a,$$

$\boldsymbol{\lambda}_c \in \mathbb{R}^{2n_n}$ é a solução do sistema linear

$$\mathbf{K}_{Tc} \boldsymbol{\lambda}_c = -\mathbf{f}_c,$$

onde $\boldsymbol{\lambda}_a^{(i)} \in \mathbb{R}^8$ e $\boldsymbol{\lambda}_c^{(i)} \in \mathbb{R}^8$ são, respectivamente, os vetores que contêm as componentes dos vetores $\boldsymbol{\lambda}_a$ e $\boldsymbol{\lambda}_c$ associadas ao elemento i , p é o fator de penalização do modelo SIMP, $\mathbf{u}_a^{(i)} \in \mathbb{R}^8$ e $\mathbf{u}_c^{(i)} \in \mathbb{R}^8$ são, respectivamente, os vetores que contêm as componentes dos vetores de deslocamentos nodais \mathbf{u}_a e \mathbf{u}_c referentes ao elemento i (na condição de equilíbrio estático), $\bar{\mathbf{k}}$ é a matriz de rigidez para pequenos deslocamentos dada em (3.40), $\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}_a^{(i)}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ e $\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{u}_c^{(i)}) \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ são, respectivamente, as matrizes de rigidez do elemento i associadas ao primeiro e ao terceiro casos de carregamento ilustradas na Figura (4.1), calculadas usando (3.65), e $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{u}_a^{(i)})$ e $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{u}_c^{(i)})$ são obtidos usando (3.89).

Nas formulações propostas por Pedersen, Buhl e Sigmund [55] e Bendsøe e Sigmund [8], a função objetivo é dada por $F(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{I}^T \mathbf{u}(\boldsymbol{\rho})$. No caso de pequenos deslocamentos, temos

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = -p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}^{(i)T} \mathbf{u}^{(i)}, \quad (4.98)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é solução do sistema linear

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{1}. \quad (4.99)$$

Para grandes deslocamentos, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}^{(i)T} \bar{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) \hat{\mathbf{u}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.100)$$

para a lei de material de Kirchhoff-Saint Venant, e

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = p \rho_i^{p-1} \boldsymbol{\lambda}^{(i)T} \mathbf{q}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.101)$$

para a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet. Em (4.100) e (4.101), $\boldsymbol{\lambda}$ é solução do sistema linear

$$\mathbf{K}_T \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{1}. \quad (4.102)$$

Na próxima seção, vamos discutir um tipo de instabilidade numérica que surge durante a resolução de um problema de otimização topológica, bem como algumas estratégias para evitá-la.

4.5 Tabuleiro de xadrez

Durante a resolução numérica de um problema de otimização topológica, ocorre um fenômeno indesejável: a formação de regiões com elementos vazios e com elementos totalmente preenchidos, dispostos de maneira alternada, semelhante a um tabuleiro de xadrez, conforme mostra a Figura 4.5.

Segundo Díaz e Sigmund [23], uma das possíveis causas do surgimento dessa instabilidade numérica é a utilização de elementos finitos retangulares de quatro nós com funções interpoladoras bilineares para os deslocamentos. De acordo com eles, o uso desse modelo faz com que a distribuição de material em formato de tabuleiro de xadrez seja artificialmente mais rígida do que uma distribuição homogênea, considerando o mesmo volume de material empregado.

A maioria dos trabalhos na literatura sugere duas formas distintas para a eliminação do “tabuleiro de xadrez” nos problemas de otimização topológica. Uma delas consiste em aumentar a ordem do elemento finito (isto é, aumentar o número de nós do elemento), com o objetivo de se obter uma aproximação mais refinada para os deslocamentos.

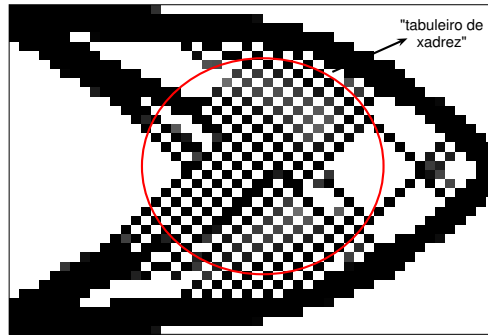


Figura 4.5: Exemplo de uma estrutura onde aparece o “tabuleiro de xadrez”.

Entretanto, essa estratégia faz com que o custo computacional da resolução numérica do problema de otimização topológica fique muito alto, pois a dimensão da matriz de rigidez global torna-se muito elevada à medida que aumentamos o número de nós em cada elemento.

A ocorrência do “tabuleiro de xadrez” também pode ser evitada através da aplicação de um operador matemático denominado *filtro espacial*. Esse operador tem o papel de redistribuir as densidades ao redor de cada elemento do domínio, fazendo com que a distribuição dessas densidades fique mais homogênea. Um filtro espacial pode ser definido de modo genérico através do produto de convolução entre uma função F (que deve satisfazer algumas condições) e a função $\rho : \Omega \rightarrow [0, 1]$, ou seja,

$$(F * \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Para mais detalhes sobre o assunto, consulte Bourdin [13].

Quando utilizamos um filtro espacial, devemos, em primeiro lugar, definir uma vizinhança para cada um dos elementos do domínio. Denotamos tal vizinhança por $B(i, r)$, indicando que ela é centrada num elemento i e tem raio r . Para cada elemento i , a aplicação do filtro produz efeito apenas nele e nos elementos pertencentes à sua vizinhança, e quanto mais distante um elemento j dessa vizinhança estiver do elemento central i , menor será a ação desse filtro sobre o elemento j . A Figura 4.6 ilustra a vizinhança de um elemento finito i .

De acordo com Bourdin [13], a representação genérica de um filtro espacial num meio discreto, para cada elemento e da malha de elementos finitos, é dada por

$$(F * \rho)_e = \sum_{i \in B(e, r)} \left(\rho_e \int_i F(\mathbf{x} - \mathbf{c}_e) d\mathbf{x} \right),$$

onde \mathbf{c}_e representa o vetor de coordenadas do centro do elemento e .

A seguir, apresentaremos alguns filtros espaciais encontrados na literatura, que serão aplicados neste trabalho para evitar o surgimento do “tabuleiro de xadrez” nas topologias ótimas das estruturas.

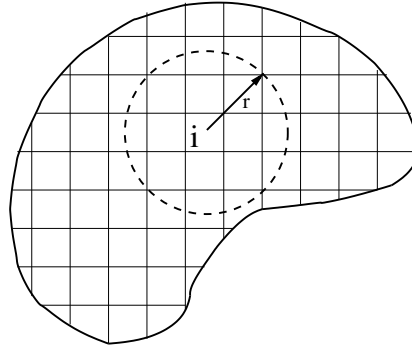


Figura 4.6: Ilustração da vizinhança de um elemento finito i .

4.6 Filtro das densidades ponderadas

Vamos apresentar um filtro espacial, proposto por Bruns e Tortorelli [9], que é aplicado sobre as densidades dos elementos. Neste caso, para cada elemento i , a densidade original ρ_i é substituída pela média ponderada das densidades dos elementos contidos em sua vizinhança B_i . A nova densidade do elemento i é dada por

$$\phi_i \equiv \phi_i(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{j \in B_i} \frac{\omega_j(s_{ij})}{\gamma_i} \rho_j, \quad (4.103)$$

onde

$$\omega_j(s_{ij}) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{s_{ij}^2}{2\left(\frac{r}{3}\right)^2}\right)}{2\pi\left(\frac{r}{3}\right)}, & \text{se } s_{ij} \leq r, \\ 0, & \text{se } s_{ij} > r, \end{cases} \quad (4.104)$$

s_{ij} é a distância euclidiana entre os centroides dos elementos i e j , e

$$\gamma_i = \sum_{j \in B_i} \omega_j(s_{ij}). \quad (4.105)$$

Dizemos que os fatores de peso $\omega_j(s_{ij})$ definidos pela equação (4.104) são *Gaussianos* devido à presença da função exponencial de base e . Podemos notar que apenas as densidades dos elementos tais que $s_{ij} \leq r$ são influenciadas pela aplicação do filtro.

É importante lembrar que as densidades originais devem ser substituídas pelas densidades filtradas tanto na função objetivo quanto nas restrições do problema. A aplicação de um filtro diretamente nas densidades tem a vantagem de manter compatíveis as condições de otimalidade do problema de otimização topológica.

Com a aplicação do filtro em questão, as matrizes de rigidez globais dadas por (4.7), (4.8) e (4.9) e o resíduo (4.14) tornam-se, respectivamente,

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \phi_i(\boldsymbol{\rho})^p \mathbf{M}_i \mathbf{k} \mathbf{M}_i^T, \quad (4.106)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \phi_i(\boldsymbol{\rho})^p \mathbf{M}_i \mathbf{k}_i(\mathbf{u}) \mathbf{M}_i^T, \quad (4.107)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \phi_i(\boldsymbol{\rho})^p \mathbf{M}_i \mathbf{k}_{T_i}(\mathbf{u}) \mathbf{M}_i^T, \quad (4.108)$$

e

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \phi_i(\boldsymbol{\rho})^p \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) - \mathbf{f}. \quad (4.109)$$

A restrição de volume de material é reescrita como

$$g(\boldsymbol{\rho}) \equiv \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \phi_i(\boldsymbol{\rho})}{V^*} - 1 \leq 0. \quad (4.110)$$

Como se observa, mesmo com a aplicação do filtro, a restrição de volume permanece linear.

Quando o filtro das densidades ponderadas é adotado, as derivadas parciais primeiras da função objetivo são dadas por

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = \sum_{j \in B_i} \frac{\partial F}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \rho_i} = \sum_{j \in B_i} \frac{\partial F}{\partial \phi_j} \frac{\omega_i(s_{ij})}{\gamma_j}, \quad i = 1, \dots, n_{el}, \quad (4.111)$$

onde $\partial F / \partial \phi_j$ é calculada de acordo com os resultados mostrados na Seção 4.4, dependendo do tipo de problema. As derivadas parciais primeiras da restrição de volume são dadas por

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_i} = \sum_{j \in B_i} \frac{\partial g}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \rho_i} = \sum_{j \in B_i} \frac{v_j}{V^*} \frac{\omega_i(s_{ij})}{\gamma_j}, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (4.112)$$

O filtro das densidades ponderadas também pode ser aplicado aos problemas escalados (4.68)-(4.71), substituindo-se $\boldsymbol{\tau}$ por $\phi(\boldsymbol{\tau})$.

4.7 Filtro de Heaviside

Guest, Prévost e Belystchko [36] e Sigmund [61] propuseram uma modificação no filtro das densidades ponderadas, de modo que as densidades assumam apenas os valores ρ_{\min} e 1. Seja ϕ_i a densidade filtrada de um elemento i qualquer do domínio, obtida usando (4.103). Se essa densidade for maior que o valor mínimo permitido para as densidades, considera-se que o elemento i é sólido. Por outro lado, se tal densidade for igual à densidade mínima permitida, supõe-se que o elemento i é vazio. Isso pode ser representado pela *função de Heaviside*

$$\bar{\phi}_i = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi_i > \rho_{\min} \\ \rho_{\min}, & \text{se } \phi_i = \rho_{\min} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (4.113)$$

É importante enfatizar que a proposta de Sigmund [61] representa uma simplificação do trabalho de Guest, Prévost e Belystchko [36], pois estes autores definem variáveis de projeto intermediárias, denominadas *variáveis de projeto nodais*, que, posteriormente, são convertidas nas densidades dos elementos, enquanto Sigmund [61] trabalha diretamente com as densidades. Neste trabalho, seguiremos a linha de raciocínio adotada por Sigmund [61].

O uso da função (4.113) faz com que as funções envolvidas no problema de otimização topológica deixem de ser diferenciáveis. Entretanto, segundo Guest, Prévost e Belystchko [36] e Sigmund [61], uma função aproximadora diferenciável para (4.113) é dada por

$$\eta_i(\boldsymbol{\rho}) = 1 - \exp(-\beta \phi_i) + \phi_i \exp(-\beta), \quad i = 1, \dots, n_{el}, \quad (4.114)$$

onde $\beta \geq 0$ é um parâmetro de penalização que controla a curvatura desta função e ϕ_i é a densidade filtrada, encontrada através de (4.103). Denominamos este filtro como *filtro de Heaviside*.

Observando (4.114), notamos que, se $\beta = 0$, o filtro de Heaviside corresponde ao filtro das densidades ponderadas apresentado na Seção 4.6. Além disso, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \eta_i = \bar{\phi}_i$. A Figura 4.7 ilustra esse fato.

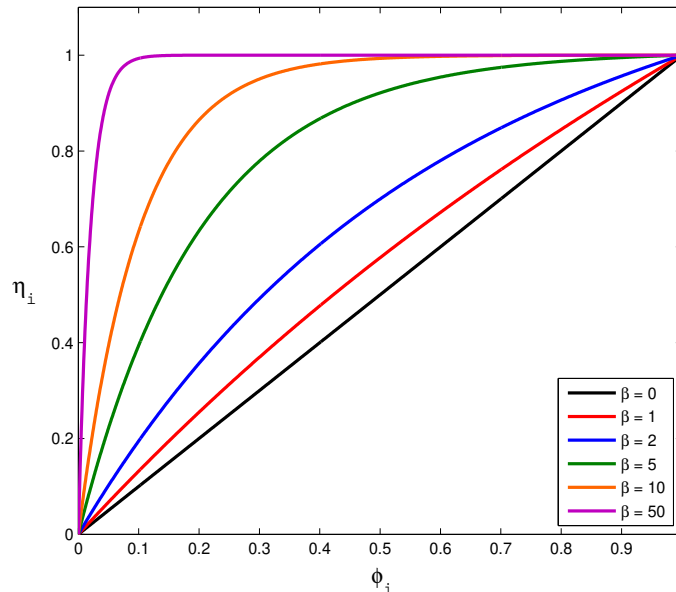


Figura 4.7: Efeito do aumento do parâmetro β sobre as densidades filtradas ϕ_i .

Sigmund [61] sugere que β seja aumentado gradativamente, assumindo valores entre 1 e 500, para evitar instabilidades numéricas.

Quando o filtro de Heaviside é empregado, as matrizes de rigidez globais dadas por

(4.7), (4.8) e (4.9) e o resíduo (4.14) tornam-se, respectivamente,

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \eta_i(\boldsymbol{\rho})^p \mathbf{M}_i \mathbf{k} \mathbf{M}_i^T, \quad (4.115)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \eta_i(\boldsymbol{\rho})^p \mathbf{M}_i \mathbf{k}_i(\mathbf{u}) \mathbf{M}_i^T, \quad (4.116)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \eta_i(\boldsymbol{\rho})^p \mathbf{M}_i \mathbf{k}_{T_i}(\mathbf{u}) \mathbf{M}_i^T, \quad (4.117)$$

e

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_{el}} \eta_i(\boldsymbol{\rho})^p \mathbf{M}_i \bar{\mathbf{q}}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)}) - \mathbf{f}. \quad (4.118)$$

A restrição de volume de material é expressa como

$$g(\boldsymbol{\rho}) \equiv \sum_{i=1}^{n_{el}} \frac{v_i \eta_i(\boldsymbol{\rho})}{V^*} - 1 \leq 0. \quad (4.119)$$

Note que a restrição de volume, que originalmente é linear, passa a ser não linear.

As derivadas parciais primeiras da função objetivo e da restrição de volume são dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_i} = \sum_{j \in B_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \rho_i} = \sum_{j \in B_i} \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial \phi_j} \frac{\omega_i(s_{ij})}{\gamma_j}, \quad i = 1, \dots, n_{el}, \quad (4.120)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \rho_i} = \sum_{j \in B_i} \frac{\partial g}{\partial \phi_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial \phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial \rho_i} = \sum_{j \in B_i} \frac{v_j}{V^*} \frac{\partial \eta_j}{\partial \phi_j} \frac{\omega_i(s_{ij})}{\gamma_j}, \quad i = 1, \dots, n_{el}. \quad (4.121)$$

onde

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial \phi_j} = \beta \exp(-\beta \phi_j) + \exp(-\beta).$$

Se resolvermos os problemas de otimização topológica com o escalamento das densidades proposto na Seção 4.3, basta substituírmos $\boldsymbol{\rho}$ por $\boldsymbol{\tau}$ em (4.115)-(4.121), com τ_i definido em (4.63).

No próximo capítulo, introduziremos um novo algoritmo de otimização para resolver os problemas de otimização topológica abordados neste trabalho.

Capítulo 5

Programação Linear por Partes Sequencial

Neste capítulo, apresentamos um novo método de otimização, denominado *Programação Linear por Partes Sequencial* (PLPS), que será usado, neste trabalho, para resolver problemas de otimização topológica de estruturas e mecanismos flexíveis submetidos a grandes deslocamentos. Este método representa uma extensão do algoritmo de Programação Linear Sequencial (PLS) proposto por Gomes e Senne [32], consistindo na resolução de uma sequência de problemas de otimização lineares por partes convexos que aproximam um problema de otimização não linear, com base no trabalho de Byrd, Nocedal, Waltz e Wu [15].

5.1 Descrição do método

Considere o problema de programação não linear

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{x} \in X, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{c} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são funções com derivadas parciais primeiras Lipschitz contínuas,

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u\}, \tag{5.2}$$

e $\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_u \in \mathbb{R}^n$ são vetores que contêm, respectivamente, os limitantes inferiores e superiores para as componentes de \mathbf{x} . Lembramos que qualquer problema de otimização com restrições de desigualdade pode ser colocado na forma (5.1) através da introdução de variáveis de folga.

Dizemos que $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto *viável* ou *factível* para o problema (5.1) se todas as restrições forem satisfeitas, ou seja, se $\mathbf{c}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_l \leq \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}_u$. Se alguma dessas

restrições não for satisfeita, dizemos que $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto *inviável* ou *infectível*.

Uma vez que as funções envolvidas no problema têm derivadas parciais primeiras contínuas, podemos obter uma aproximação linear para cada uma delas em torno de um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ou seja, podemos escrever

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{s}) &\approx f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s}, \\ \mathbf{c}(\mathbf{x} + \mathbf{s}) &\approx \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{s}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = [\nabla c_1(\mathbf{x}) \dots \nabla c_m(\mathbf{x})]^T$ é a matriz Jacobiana das restrições de igualdade.

Geralmente, o cálculo das derivadas segundas das funções que aparecem em um problema de otimização topológica é bastante complexo. Por esse motivo, algoritmos que exigem o uso de derivadas segundas raramente são adotados para resolver problemas desta classe. Com o intuito de obter uma aproximação mais precisa para a função objetivo (introduzindo algum tipo de informação de segunda ordem) e ainda assim resolver um problema que pode ser convertido em um problema de programação linear (que, em geral, são resolvidos com menor esforço computacional), desenvolvemos, neste trabalho, a *Programação Linear por Partes Sequencial* (PLPS). A ideia principal deste método é adaptar a versão da Programação Linear Sequencial (PLS) proposta por Gomes e Senne [32], substituindo o subproblema linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} + \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0} \\ & \|\mathbf{s}\|_\infty \leq \delta_k \end{aligned} \tag{5.3}$$

pelo subproblema definido por

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} + \Gamma_k(\mathbf{s}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} + \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0} \\ & \|\mathbf{s}\|_\infty \leq \delta_k \end{aligned} \tag{5.4}$$

onde $\Gamma_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear por partes convexa não negativa que contém informações sobre a curvatura das funções envolvidas no problema (5.1), e $\delta_k > 0$ é o raio da região de confiança, adotado para evitar que o novo iterado $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}$ fique muito distante do iterado corrente $\mathbf{x}^{(k)}$ e para garantir a convergência global do algoritmo. A definição da função Γ_k será discutida em detalhes na Seção 5.3.

É importante notar que a restrição $\|\mathbf{s}\|_\infty \leq \delta_k$ pode ser reescrita como

$$s_{l_i}^{(k)} \leq s_i \leq s_{u_i}^{(k)},$$

onde

$$s_{l_i}^{(k)} = \max\{-\delta_k, x_{l_i} - x_{k_i}\}, \tag{5.5}$$

$$s_{u_i}^{(k)} = \min\{\delta_k, x_{u_i} - x_{k_i}\}, \tag{5.6}$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Para iniciar a aplicação do método, devemos fornecer um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ e um critério de parada. A solução ótima \mathbf{s}_c do problema (5.4) resolvido na iteração k é usada para atualizar a solução aproximada do problema original (5.1). Deste modo, ao final da iteração k , fazemos

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c. \quad (5.7)$$

É possível que o conjunto viável do problema (5.4) seja vazio. Neste caso, além de reduzir o valor da função objetivo f , devemos obter um ponto que reduza a infactibilidade. De acordo com Gomes e Senne [32], isso pode ser feito resolvendo o subproblema auxiliar

$$\begin{aligned} \min \quad & M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}) = \|\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} + \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1 \\ \text{s. a} \quad & \|\mathbf{s}\|_\infty \leq 0,8\delta_k. \end{aligned} \quad (5.8)$$

A restrição $\|\mathbf{s}\|_\infty \leq 0,8\delta_k$ pode ser reescrita como

$$s_{n,i}^l \leq s_i \leq s_{n,i}^u,$$

onde

$$\begin{aligned} s_{n,i}^l &= \max\{-0,8\delta_k, x_{l_i} - x_{k_i}\}, \\ s_{n,i}^u &= \min\{0,8\delta_k, x_{u_i} - x_{k_i}\}, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, n$, e $M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s})$ é uma aproximação para a medida de inviabilidade

$$\varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1. \quad (5.9)$$

Para que seja possível reduzir o valor da função objetivo f , observe que o raio da região de confiança usado no subproblema (5.8) é uma fração de δ_k . Naturalmente, a constante 0,8 poderia ter sido substituída por outro valor pertencente ao intervalo (0, 1).

O uso da norma-1 na definição da medida de inviabilidade permite-nos reescrever o subproblema (5.8) como um problema de programação linear, na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & \overline{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}, \mathbf{z}) = \mathbf{e}^T \mathbf{z} \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} + \mathbf{E}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{z} = -\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ & \mathbf{s}_n^l \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_n^u \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m_I}$ é o vetor de variáveis de folga associadas às restrições linearizadas inviáveis e $\mathbf{e} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$. Para vermos como a matriz \mathbf{E} é construída, seja \mathbf{I}_i a i -ésima coluna da matriz identidade de ordem m_I e suponha que $\{i_1, i_2, \dots, i_{m_I}\}$ seja o conjunto de índices relativos às componentes não nulas de $\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})$. Dessa forma, a j -ésima coluna de $\mathbf{E}(\mathbf{x}^{(k)})$ é dada por

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{cases} \mathbf{I}_{i_j}, & \text{se } c_{i_j}(\mathbf{x}^{(k)}) < 0, \\ -\mathbf{I}_{i_j}, & \text{se } c_{i_j}(\mathbf{x}^{(k)}) > 0. \end{cases}$$

Note que um ponto viável para o subproblema (5.10) é dado por $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ e $z_j = |c_{ij}(\mathbf{x}^{(k)})|$, $j = 1, \dots, m_I$.

Dizemos que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é um ponto φ -estacionário se \mathbf{x} satisfaz as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) do problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \varphi(\mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{x} \in X, \end{aligned}$$

onde $\varphi(\cdot)$ e X são definidos em (5.9) e (5.2), respectivamente. Além disso, um ponto $\mathbf{x} \in X$ que satisfaz $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ é *regular* se os gradientes das restrições ativas em \mathbf{x} são linearmente independentes.

5.2 Critério de aceitação ou rejeição do passo

Ao resolver o problema original (5.1) de maneira aproximada, existem dois objetivos a serem alcançados simultaneamente: a redução da infactibilidade, que é medida por $\varphi(\mathbf{x})$, e a redução da função objetivo $f(\mathbf{x})$. Se $f(\hat{\mathbf{x}}) \ll f(\tilde{\mathbf{x}})$ e $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \ll \varphi(\tilde{\mathbf{x}})$, podemos concluir que $\hat{\mathbf{x}}$ é um ponto melhor que $\tilde{\mathbf{x}}$ para o problema (5.1). Por outro lado, não é claro o que ocorre se

$$f(\hat{\mathbf{x}}) < f(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{e} \quad \varphi(\hat{\mathbf{x}}) > \varphi(\tilde{\mathbf{x}})$$

ou

$$f(\hat{\mathbf{x}}) > f(\tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{e} \quad \varphi(\hat{\mathbf{x}}) < \varphi(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Diante dessa situação conflitante, devemos definir uma *função de mérito*, cujo papel é permitir que decidamos se $\hat{\mathbf{x}}$ é ou não um ponto melhor que o ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ em relação ao problema (5.1). Definimos como função de mérito a função $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(\mathbf{x}, \theta) = \theta f(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \varphi(\mathbf{x}), \quad \theta \in [0, 1]. \quad (5.11)$$

O papel do parâmetro θ é determinar se a otimalidade terá maior relevância sobre a factibilidade, ou vice-versa. Mais adiante, nesta seção, explicaremos como calcular o valor de θ a cada iteração do nosso algoritmo.

Para decidir se o passo \mathbf{s}_c será ou não aceito, devemos analisar as *reduções real* e *prevista* da função de mérito (5.11) entre os pontos $\mathbf{x}^{(k)}$ e $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$. Para tanto, definimos

$$A_{red}^{opt} = f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c) \quad (5.12)$$

e

$$A_{red}^{fct} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}) - \varphi(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c) \quad (5.13)$$

como sendo, respectivamente, a redução real da função objetivo e da infactibilidade do problema (5.1). Definimos também

$$P_{red}^{opt} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s}_c - \Gamma_k(\mathbf{s}_c) \quad (5.14)$$

e

$$P_{red}^{fct} = M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c) = \|\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1 - \|\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}_c + \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1, \quad (5.15)$$

que são, respectivamente, a redução prevista da função objetivo e da infactibilidade do problema (5.1), fornecidas pela solução do subproblema (5.4).

Usando as equações (5.12) a (5.15), definimos agora

$$A_{red} = \theta A_{red}^{opt} + (1 - \theta) A_{red}^{fct}$$

e

$$P_{red} = \theta P_{red}^{opt} + (1 - \theta) P_{red}^{fct},$$

que são, respectivamente, a redução real e prevista da função de mérito (5.11) na k -ésima iteração da PLPS.

O passo \mathbf{s}_c é aceito se $A_{red} \geq 0,1P_{red}$. Caso contrário, o raio da região de confiança δ_k é reduzido e o passo \mathbf{s}_c é recalculado. Por outro lado, δ_k pode ser aumentado se a razão A_{red}/P_{red} for suficientemente grande.

Para atualizar o parâmetro θ_k , seguimos a sugestão de [31, 32] e definimos, no início da k -ésima iteração,

$$\theta_k^{min} = \min \{1, \theta_0, \dots, \theta_{k-1}\}, \quad (5.16)$$

$$\theta_k^{large} = \left[1 + \frac{N}{(k+1)^{1,1}} \right] \theta_k^{min}, \quad (5.17)$$

onde $N \geq 0$ é um parâmetro que permite que o parâmetro θ tenha um decréscimo não monótono ao longo das iterações da PLPS. Definimos também

$$\begin{aligned} \theta_k^{sup} &= \sup \{ \theta \in [0, 1] \mid P_{red} \geq 0,5 P_{red}^{fct} \} \\ &= \begin{cases} 0,5 \left(\frac{P_{red}^{fct}}{P_{red}^{fct} - P_{red}^{opt}} \right), & \text{se } P_{red}^{opt} \leq \frac{1}{2} P_{red}^{fct} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.18)$$

De posse desses parâmetros, determinamos θ_k segundo

$$\theta_k = \min \{ \theta_k^{sup}, \theta_k^{large} \}. \quad (5.19)$$

Na próxima seção, veremos como definir a função Γ_k que aparece na função objetivo do subproblema (5.4).

5.3 O modelo linear por partes

Lembramos que a função objetivo do subproblema (5.4) é dada por

$$m_k(\mathbf{s}) = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} + \Gamma_k(\mathbf{s}), \quad (5.20)$$

onde Γ_k é uma função linear por partes convexa não negativa. A construção desse modelo linear por partes segue a proposta de Byrd *et al.* [15].

Escolhemos Γ_k como sendo uma aproximação linear por partes de um modelo quadrático, ou seja,

$$\Gamma_k(\mathbf{s}) \approx \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{B}_k \mathbf{s}, \quad (5.21)$$

onde $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica e semidefinida positiva.

Em geral, não é simples construir uma aproximação linear por partes de uma função quadrática, principalmente quando o número de variáveis é grande. Entretanto, quando \mathbf{B}_k é uma matriz diagonal, ou seja, $\mathbf{B}_k = \text{diag}(b_{k,i})$, temos

$$\frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{B}_k \mathbf{s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} b_{k,i} s_i^2. \quad (5.22)$$

Neste caso, a função quadrática é *separável*, ou seja, pode ser escrita como a soma de n funções quadráticas de uma única variável.

Nesse trabalho, tomamos \mathbf{B}_k como uma matriz diagonal definida positiva. Várias alternativas para a definição de \mathbf{B}_k são apresentadas na Seção 5.8.

Supondo que \mathbf{B}_k seja diagonal, podemos aproximar cada uma das funções $\gamma_k(s_i) = \frac{1}{2} b_{k,i} s_i^2$ por uma função linear por partes $\Gamma_{k,i}(s_i)$ formada por $2r + 1$ segmentos de reta, onde r é um inteiro positivo pequeno (digamos, $r \leq 5$). Logo,

$$\Gamma_{k,i}(s_i) \approx \gamma_k(s_i) \quad (5.23)$$

e

$$\Gamma_k(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{k,i}(s_i). \quad (5.24)$$

Denotando por $\ell_{k,i}^{(j)}(s_i)$, $j = 0, \dots, 2r$, as funções lineares que compõem a função linear por partes $\Gamma_{k,i}(s_i)$ e considerando que \mathbf{B}_k seja definida positiva, podemos definir

$$\Gamma_{k,i}(s_i) = \max_{j \in J} \left\{ \ell_{k,i}^{(j)}(s_i) \right\}, \quad \text{onde } J = \{0, \dots, 2r\}. \quad (5.25)$$

Cada função $\ell_{k,i}^{(j)}(s_i)$ é escolhida de modo a interpolar $\gamma_k(s_i)$ e a sua derivada em um ponto $t_{k,i}^{(j)}$, $j \in J$. Logo, $\ell_{k,i}^{(j)}$ é dada por

$$\ell_{k,i}^{(j)}(s_i) = -\frac{1}{2} b_{k,i} (t_{k,i}^{(j)})^2 + (b_{k,i} t_{k,i}^{(j)}) s_i. \quad (5.26)$$

Com o objetivo de ilustrar a interpolação linear por partes de uma função quadrática em uma variável, consideremos a função $\gamma(s) = \frac{1}{2}s^2$ e os pontos de interpolação $t_0 = -2$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ e $t_4 = 2$. Neste caso, a respectiva função interpoladora linear por partes é dada por

$$\Gamma(s) = \begin{cases} -2 - 2s, & \text{se } s \leq -3/2, \\ -1/2 - s, & \text{se } -3/2 < s \leq -1/2, \\ 0, & \text{se } -1/2 < s \leq 1/2, \\ -1/2 + s, & \text{se } 1/2 < s \leq 3/2, \\ -2 + 2s, & \text{se } s > 3/2. \end{cases}$$

Os gráficos das funções γ e Γ estão mostrados na Figura 5.1.

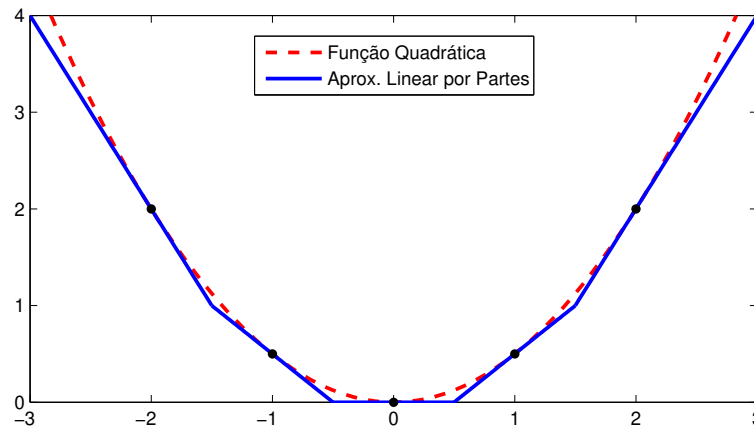


Figura 5.1: Função linear por partes $\Gamma(s)$ que interpola a função $\gamma(s) = \frac{1}{2}s^2$.

Vejamos como escolher os pontos de interpolação associados à função $\Gamma_{k,i}$. Em primeiro lugar, para garantir que $\Gamma_k(\mathbf{s}) \geq 0$, um dos pontos de interpolação deve ser a origem, ou seja,

$$t_{k,i}^{(0)} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sejam

$$D_{k,i} = \max \{-0,5\delta_k, x_{l_i} - x_i\} \quad (5.27)$$

e

$$U_{k,i} = \min \{0,5\delta_k, x_{u_i} - x_i\} \quad (5.28)$$

os limitantes inferior e superior, respectivamente, dos intervalos que contém os pontos de interpolação $t_{k,i}^{(j)}$ associados à função $\Gamma_{k,i}$, para cada $i = 1, \dots, n$. Podemos observar que, para cada variável s_i do subproblema (5.4), o intervalo que contém esses pontos de interpolação está contido no respectivo intervalo de s_i , dado por $[s_{l_i}, s_{u_i}]$, onde s_{l_i} e s_{u_i} são definidos em (5.5) e (5.6), respectivamente.

Com o objetivo de obter um passo de tamanho adequado, Byrd *et al.* [16] sugerem que os limitantes (5.27) e (5.28) sejam ajustados de modo que o intervalo que contém os pontos de interpolação também contenha, sempre que possível, o minimizador da quadrática

$$q_k(s_i) = \gamma_k(s_i) + \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} s_i = \frac{1}{2} b_{k,i} s_i^2 + \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} s_i, \quad (5.29)$$

dado por

$$v_{k,i} = -\frac{1}{b_{k,i}} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}. \quad (5.30)$$

Sendo assim, temos de considerar três casos.

Caso 1. Se $D_{k,i} \leq 2v_{k,i} \leq U_{k,i}$, definimos $\widehat{D}_{k,i} = D_{k,i}$ e $\widehat{U}_{k,i} = U_{k,i}$.

Caso 2. Se $2v_{k,i} > U_{k,i}$, tomamos $\widehat{D}_{k,i} = D_{k,i}$, e temos duas possibilidades:

- Se $2v_{k,i} < s_{u_i}^{(k)}$, definimos $\widehat{U}_{k,i} = 2v_{k,i}$.
- Caso contrário, definimos $\widehat{U}_{k,i} = s_{u_i}^{(k)}$.

Caso 3. Se $2v_{k,i} < D_{k,i}$, tomamos $\widehat{U}_{k,i} = U_{k,i}$, e temos duas possibilidades:

- Se $2v_{k,i} > s_{l_i}^{(k)}$, definimos $\widehat{D}_{k,i} = 2v_{k,i}$.
- Caso contrário, definimos $\widehat{D}_{k,i} = s_{l_i}^{(k)}$.

Seguindo a proposta de Byrd *et al.* [16] e Wu [65], vamos considerar quatro casos para escolher $t_{k,i}^{(j)}$.

Caso 1. Se $|x_{k_i} - x_{l_i}| \leq 10^{-6}$ e $|x_{k_i} - x_{u_i}| > 10^{-6}$, tomamos $t_{k,i}^{(0)} = \widehat{D}_{k,i} = 0$ e definimos

$$t_{k,i}^{(j)} = 0, 3^{2r-j} \widehat{U}_{k,i}, \quad j = 1, \dots, 2r. \quad (5.31)$$

Caso 2. Se $|x_{k_i} - x_{u_i}| \leq 10^{-6}$ e $|x_{k_i} - x_{l_i}| > 10^{-6}$, tomamos $t_{k,i}^{(2r)} = \widehat{U}_{k,i} = 0$ e definimos

$$t_{k,i}^{(j)} = 0, 3^j \widehat{D}_{k,i}, \quad j = 0, \dots, 2r - 1. \quad (5.32)$$

Caso 3. Se $|x_{k_i} - x_{l_i}| > 10^{-6}$ e $|x_{k_i} - x_{u_i}| > 10^{-6}$, definimos

$$t_{k,i}^{(j)} = \begin{cases} 0, 3^j \widehat{D}_{k,i} & j = 0, \dots, r-1, \\ 0 & j = r, \\ 0, 3^{2r-j} \widehat{U}_{k,i} & j = r+1, \dots, 2r. \end{cases} \quad (5.33)$$

Caso 4. Se $|x_{k_i} - x_{l_i}| \leq 10^{-6}$ e $|x_{k_i} - x_{u_i}| \leq 10^{-6}$, definimos

$$t_{k,i}^{(j)} = 0, \quad j = 0, \dots, 2r. \quad (5.34)$$

Agora, veremos como transformar o subproblema linear por partes (5.4) em um problema de programação linear. Usando (5.25) e (5.26), podemos reescrever (5.20) como

$$\begin{aligned} m_k(\mathbf{s}) &= \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} + \Gamma_k(\mathbf{s}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} s_i + \Gamma_{k,i}(s_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} s_i + \max_{j \in J} \left\{ (b_{k,i} t_{k,i}^{(j)}) s_i - \frac{1}{2} b_{k,i} (t_{k,i}^{(j)})^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \max_{j \in J} \left\{ \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} + b_{k,i} t_{k,i}^{(j)} \right) s_i - \frac{1}{2} b_{k,i} (t_{k,i}^{(j)})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Cada parcela do somatório em (5.35) representa uma função linear por partes cujo gráfico é formado por $2r + 1$ segmentos de reta. Dessa forma, podemos representar a i -ésima parcela como

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} s_i + \Gamma_{k,i}(s_i) = \begin{cases} \alpha_{k,i}^{(0)} s_i + \beta_{k,i}^{(0)}, & \text{se } s_i \leq z_{k,i}^{(0)}, \\ \alpha_{k,i}^{(1)} s_i + \beta_{k,i}^{(1)}, & \text{se } z_{k,i}^{(0)} < s_i \leq z_{k,i}^{(1)}, \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{k,i}^{(2r-1)} s_i + \beta_{k,i}^{(2r-1)}, & \text{se } z_{k,i}^{(2r-2)} < s_i \leq z_{k,i}^{(2r-1)}, \\ \alpha_{k,i}^{(2r)} s_i + \beta_{k,i}^{(2r)}, & \text{se } s_i > z_{k,i}^{(2r)}, \end{cases} \quad (5.36)$$

onde

$$\alpha_{k,i}^{(j)} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} + b_{k,i} t_{k,i}^{(j)}, \quad j \in J \quad (5.37)$$

e

$$\beta_{k,i}^{(j)} = -\frac{1}{2} b_{k,i} (t_{k,i}^{(j)})^2, \quad j \in J \quad (5.38)$$

são, respectivamente, as inclinações e os coeficientes lineares de cada um dos segmentos de reta que compõem a função Γ_k , e

$$z_{k,i}^{(j)} = \frac{1}{2}(t_{k,i}^{(j)} + t_{k,i}^{(j+1)}), \quad j \in J \quad (5.39)$$

são os pontos de interseção entre dois segmentos de reta consecutivos.

Como $\Gamma_k(s)$ é convexa, podemos escrever (5.4) como um problema de programação linear, fazendo a mudança de variáveis

$$s_i = \sum_{j=0}^{2r} \omega_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.40)$$

onde cada nova variável $\omega_{i,j}$ está associada ao j -ésimo segmento de reta descrito em (5.36). Reescrevendo (5.40) em notação vetorial, obtemos

$$\mathbf{s} = \sum_{j=0}^{2r} \boldsymbol{\omega}_j, \quad \boldsymbol{\omega}_j \in \mathbb{R}^n. \quad (5.41)$$

Dessa forma, cada vetor de variáveis $\boldsymbol{\omega}_j$ deve satisfazer

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_l^{(k)} &\leq \boldsymbol{\omega}_0 \leq \mathbf{z}_0^{(k)}, \\ \mathbf{0} &\leq \boldsymbol{\omega}_j \leq \mathbf{z}_j^{(k)} - \mathbf{z}_{j-1}^{(k)}, \quad j = 1, \dots, 2r-1, \\ \mathbf{0} &\leq \boldsymbol{\omega}_{2r} \leq \mathbf{s}_u^{(k)} - \mathbf{z}_{2r}^{(k)}, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{s}_l^{(k)}$ e $\mathbf{s}_u^{(k)}$ são, respectivamente, os limitantes inferior e superior para as variáveis s_j dados por (5.5) e (5.6) e $\mathbf{z}_j^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor cujas componentes são dadas por (5.39).

Com a mudança de variáveis (5.41), o subproblema (5.4) pode ser reescrito como o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=0}^{2r} \boldsymbol{\alpha}_j^{(k)T} \boldsymbol{\omega}_j \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}) \sum_{j=0}^{2r} \boldsymbol{\omega}_j + \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{s}_l^{(k)} \leq \boldsymbol{\omega}_0 \leq \mathbf{z}_0^{(k)} \\ & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\omega}_j \leq \mathbf{z}_j^{(k)} - \mathbf{z}_{j-1}^{(k)}, \quad j = 1, \dots, 2r-1 \\ & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\omega}_{2r} \leq \mathbf{s}_u^{(k)} - \mathbf{z}_{2r}^{(k)}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}_j^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor cujas componentes são dadas por (5.37).

A seguir, descrevemos o algoritmo referente à Programação Linear por Partes Sequencial.

5.4 Um algoritmo para a PLPS

Sejam um ponto inicial $\mathbf{x}^{(0)} \in X$ e um raio inicial para a região de confiança $\delta_0 \geq \delta_{\min} > 0$. Definamos $\theta_0 = \theta^{\max} = 1$ e denotemos $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})$, $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_k$, $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{x}^{(k)})$ e $\nabla f \equiv \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$. O Algoritmo 5.1 resolve o problema (5.1) através da PLPS.

Algoritmo 5.1: Programação Linear por Partes Sequencial

Enquanto algum critério de parada não é satisfeito

1. Cálculo do passo normal \mathbf{s}_n

1.1. Resolva o subproblema (5.10) para obter o passo normal \mathbf{s}_n

2. Cálculo do passo tangente \mathbf{s}_c

2.1. Se $\overline{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_n, \mathbf{z}) = 0$

Calcule $t_{k,i}^{(j)}$ usando (5.31)-(5.34), $z_{k,i}^{(j)}$ usando (5.39), $\alpha_{k,i}^{(j)}$ através de (5.37), $\beta_{k,i}^{(j)}$ através de (5.38) e resolva o subproblema (5.42) para obter \mathbf{s}_c

2.2. Caso contrário

$$\mathbf{s}_c \leftarrow \mathbf{s}_n$$

3. Cálculo do parâmetro θ_k

3.1. Calcule θ_k^{large} e θ_k^{sup} segundo (5.17) e (5.18), e faça

$$\theta_k = \min\{\theta_k^{large}, \theta_k^{sup}, \theta^{max}\}.$$

4. Aceitação ou rejeição do passo tangente \mathbf{s}_c

4.1. Se $A_{red} \geq 0,1P_{red}$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$$

Recalcule ∇f , \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{E}

$$\theta_{\max} \leftarrow 1$$

4.1.1. Se $A_{red}/P_{red} \geq 0,5$

$$\delta_{k+1} \leftarrow \min\{1, 5\delta_k, \|\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_l\|_{\infty}\}$$

4.1.2. Senão, se $0,2 \leq A_{red}/P_{red} < 0,5$

$$\delta_{k+1} \leftarrow \delta_k$$

4.1.3. Caso contrário

$$\delta_{k+1} \leftarrow 0,25\delta_k$$

4.2. Caso contrário

$$\delta_k \leftarrow \max\{0,25\|\mathbf{s}_c\|_{\infty}, 0,1\delta_k\}$$

$$\theta_{\max} \leftarrow \theta_k$$

A seguir, ilustraremos uma iteração do Algoritmo 5.1 com um problema de otimização bastante simples. Considere

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ \text{s. a} \quad & x_1 - x_2^2 + 1 = 0 \\ & -5 \leq x_1 \leq 5 \\ & -4 \leq x_2 \leq 4. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), & \nabla f(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, & \nabla^2 f(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ c(x_1, x_2) &= x_1 - x_2^2 + 1, & \nabla c(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2x_2 \end{bmatrix}, & \nabla^2 c(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

e

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -5 \leq x_1 \leq 5, -4 \leq x_2 \leq 4\}.$$

O problema (5.43) possui 3 minimizadores locais, dados por

$$\mathbf{x}_1^* = (-1, 0)^T, \quad \mathbf{x}_2^* = (-1/2, -\sqrt{2}/2)^T \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_3^* = (-1/2, \sqrt{2}/2)^T,$$

e 2 maximizadores locais, dados por

$$\mathbf{x}_4^* = (5, -\sqrt{6})^T \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_5^* = (5, \sqrt{6})^T.$$

A Figura 5.2 ilustra as curvas de nível da função objetivo de (5.43) com sua respectiva região viável. Os minimizadores locais estão indicados pelos pontos azuis, e os maximizadores locais estão representados pelos pontos vermelhos.

Vamos aplicar o Algoritmo 5.1 partindo do ponto $\hat{\mathbf{x}} = (0, -1)$, com o raio da região de confiança $\delta = 2$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{x}}) &= 1/2, & \nabla f(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, & \nabla^2 f(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ c(\hat{\mathbf{x}}) &= 0, & \nabla c(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & \nabla^2 c(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\nabla^2 f(\hat{\mathbf{x}})$ já é diagonal, definimos $b_1 = b_2 = 1$ como sendo os elementos diagonais da matriz \mathbf{B} .

Note que $\hat{\mathbf{x}}$ é um ponto viável para o problema (5.43), de modo que não é necessário efetuar o Passo 1 do Algoritmo 5.1 para obter o passo normal \mathbf{s}_n . Logo, vamos obter o passo tangente \mathbf{s}_c resolvendo o subproblema (5.4), no Passo 2. Para isso, devemos, em primeiro lugar, definir o intervalo que contém os pontos de interpolação associados à

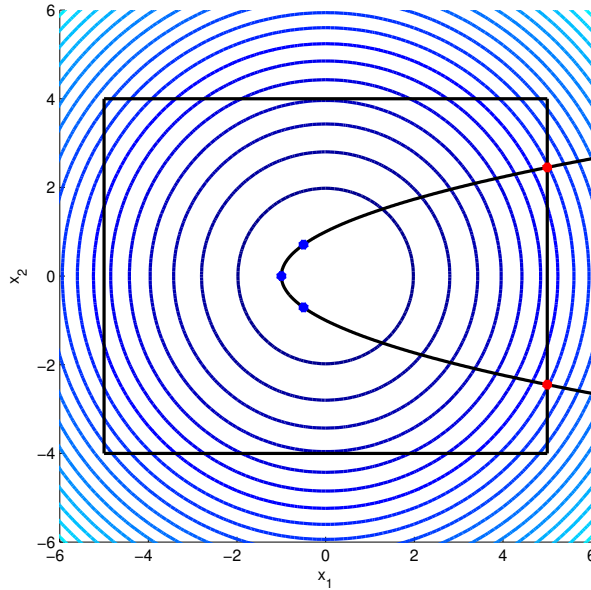


Figura 5.2: Curvas de nível da função objetivo de (5.43) com a respectiva região viável e com os minimizadores e maximizadores locais.

função linear por partes $\Gamma_i(s_i)$, definida em (5.25) e os limitantes inferiores e superiores para as variáveis s_1 e s_2 do subproblema (5.4). Usando (5.27) e (5.28), obtemos, para $\hat{\mathbf{x}} = (0, -1)^T$ e $\delta = 2$,

$$D_1 = -1, \quad U_1 = 1, \quad D_2 = -1, \quad U_2 = 1,$$

e, de (5.5) e (5.6), encontramos

$$s_{l_1} = -2, \quad s_{u_1} = 2, \quad s_{l_2} = -2, \quad s_{u_2} = 2.$$

Para definirmos os intervalos que contêm os pontos de interpolação das funções lineares por partes $\Gamma_1(s_1)$ e $\Gamma_2(s_2)$, precisamos ter em mãos os minimizadores irrestritos das quadráticas (definidas em (5.29))

$$q_1(s_1) = \frac{1}{2}b_1s_1^2 + \frac{\partial f(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_1}s_1 = \frac{1}{2}s_1^2,$$

e

$$q_2(s_2) = \frac{1}{2}b_2s_2^2 + \frac{\partial f(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_2}s_2 = \frac{1}{2}s_2^2 - s_2.$$

De (5.30), concluímos que o minimizador de $q_1(s_1)$ é $v_1 = 0$, e que o minimizador de $q_2(s_2)$ é $v_2 = 1$.

Como $D_1 \leq 2v_1 \leq U_1$, obtemos $\hat{D}_1 = D_1 = -1$ e $\hat{U}_1 = U_1 = 1$. Por outro lado, temos $2v_2 > U_2$ e $2v_2 > s_{u_2}$, de modo que $\hat{D}_2 = D_2 = -1$ e $\hat{U}_2 = s_{u_2} = 2$. Logo, os pontos de interpolação usados para construir $\Gamma_1(s_1)$ devem estar no intervalo $[\hat{D}_1, \hat{U}_1] = [-1, 1]$, e os pontos de interpolação usados para encontrar $\Gamma_2(s_2)$ devem pertencer ao intervalo $[\hat{D}_2, \hat{U}_2] = [-1, 2]$.

Neste exemplo, supomos que os intervalos $[\widehat{D}_1, \widehat{U}_1]$ e $[\widehat{D}_2, \widehat{U}_2]$ contenham 3 pontos de interpolação cada.

Uma vez que $|\widehat{x}_1 - x_{l_1}| = 5 > 10^{-6}$ e $|\widehat{x}_1 - x_{u_1}| = 5 > 10^{-6}$, usando (5.33), obtemos os seguintes pontos de interpolação para $\Gamma_1(s_1)$:

$$t_1^{(0)} = \widehat{D}_1 = -1, \quad t_1^{(1)} = 0 \quad \text{e} \quad t_1^{(2)} = \widehat{U}_1 = 1.$$

Analogamente, temos $|\widehat{x}_2 - x_{l_2}| = 3 > 10^{-6}$ e $|\widehat{x}_2 - x_{u_2}| = 5 > 10^{-6}$, de modo que, de (5.33), os pontos de interpolação usados para encontrar $\Gamma_2(s_2)$ são

$$t_2^{(0)} = \widehat{D}_2 = -1, \quad t_2^{(1)} = 0 \quad \text{e} \quad t_2^{(2)} = \widehat{U}_2 = 2.$$

Usando (5.37), (5.38) e (5.39), podemos calcular os coeficientes angulares, os coeficientes lineares e os pontos de quebra que compõem a função objetivo linear por partes (5.35) do subproblema (5.4). Para a variável s_1 , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0)} &= -1, & \alpha_1^{(1)} &= 0, & \alpha_1^{(2)} &= 1, \\ \beta_1^{(0)} &= -0,5, & \beta_1^{(1)} &= 0, & \beta_1^{(2)} &= -0,5, \\ z_1^{(0)} &= -0,5, & z_1^{(1)} &= 0,5. \end{aligned}$$

Já para a variável s_2 , encontramos

$$\begin{aligned} \alpha_2^{(0)} &= -2, & \alpha_2^{(1)} &= -1, & \alpha_2^{(2)} &= 1, \\ \beta_2^{(0)} &= -0,5, & \beta_2^{(1)} &= 0, & \beta_2^{(2)} &= -2, \\ z_2^{(0)} &= -0,5, & z_2^{(1)} &= 1. \end{aligned}$$

Logo, usando (5.36), podemos escrever a função objetivo linear por partes (5.35) do subproblema (5.4) como

$$m(s_1, s_2) = m_1(s_1) + m_2(s_2),$$

onde

$$m_1(s_1) = \begin{cases} -s_1 - 0,5, & \text{se } s_1 \geq -0,5, \\ 0, & \text{se } -0,5 < s_1 \leq 0,5, \\ s_1 - 0,5, & \text{se } s_1 > 0,5 \end{cases} \quad (5.44)$$

e

$$m_2(s_2) = \begin{cases} -2s_2 - 0,5, & \text{se } s_2 \geq -0,5, \\ -s_2, & \text{se } -0,5 < s_2 \leq 1, \\ s_2 - 2, & \text{se } s_2 > 1. \end{cases} \quad (5.45)$$

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram os gráficos das funções lineares por partes (5.44) e (5.45), respectivamente,

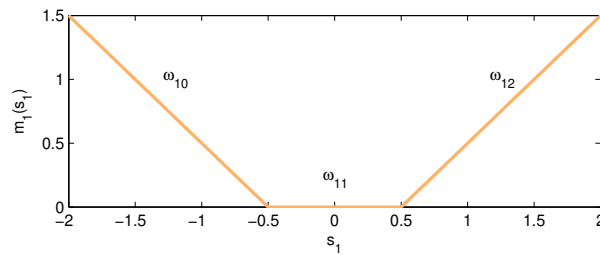


Figura 5.3: Gráfico da função linear por partes definida em (5.44).

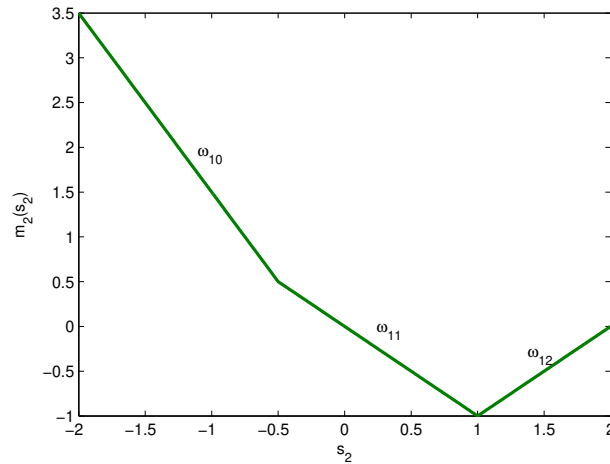


Figura 5.4: Gráfico da função linear por partes definida em (5.45).

O subproblema linear por partes (5.4), que aproxima o problema (5.43) em torno do ponto $\hat{\mathbf{x}} = (0, -1)^T$ é dado por

$$\begin{aligned}
 \min \quad & m(s_1, s_2) \\
 \text{s. a} \quad & s_1 + 2s_2 = 0 \\
 & -2 \leq s_1 \leq 2 \\
 & -2 \leq s_2 \leq 2.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

O gráfico de $m(s_1, s_2)$ é mostrado na Figura 5.5. As curvas de nível da função objetivo e a região viável do problema (5.46) são mostradas na Figura 5.6. O minimizador global do problema em questão é destacado pelo ponto em laranja.

Para que o subproblema linear por partes (5.46) seja convertido no problema de programação linear definido em (5.42), aplicamos a mudança de variáveis (5.41), de modo que

$$s_1 = \omega_{10} + \omega_{11} + \omega_{12}$$

e

$$s_2 = \omega_{20} + \omega_{21} + \omega_{22}.$$

As Figuras 5.3 e 5.4 mostram que cada variável auxiliar ω_{10} , ω_{11} e ω_{12} está associada a um segmento de reta do gráfico da função linear por partes (5.44), e que cada variável auxiliar ω_{20} , ω_{21} e ω_{22} está associada a um segmento de reta do gráfico da função linear

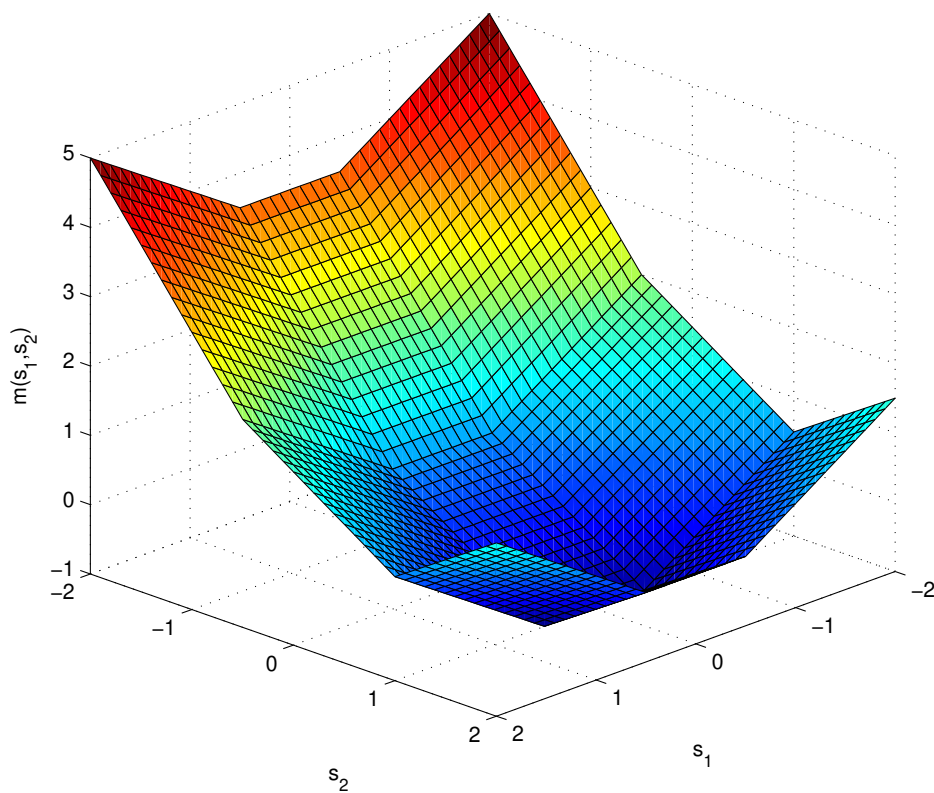


Figura 5.5: Gráfico da função objetivo linear por partes do subproblema (5.46).

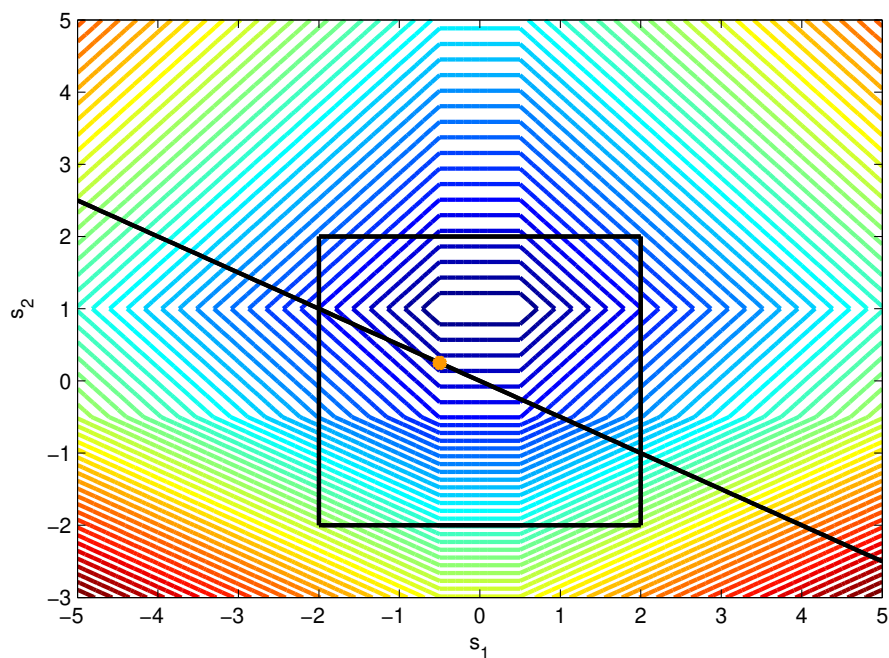


Figura 5.6: Curvas de nível da função objetivo do subproblema linear por partes (5.46) com a respectiva região viável e com seu minimizador global $\mathbf{s}^* = (-0,5; 0,25)^T$.

por partes (5.45). Com essa mudança de variáveis, o subproblema (5.46) é transformado em

$$\begin{aligned}
& \min && -\omega_{10} - 2\omega_{20} + 0\omega_{11} - \omega_{21} + \omega_{12} + \omega_{22} \\
& \text{s. a} && \omega_{10} + 2\omega_{20} + \omega_{11} + 2\omega_{21} + \omega_{12} + 2\omega_{22} = 0 \\
& && -2 \leq \omega_{10} \leq -0,5 \\
& && -2 \leq \omega_{20} \leq -0,5 \\
& && 0 \leq \omega_{11} \leq 1 \\
& && 0 \leq \omega_{21} \leq 1,5 \\
& && 0 \leq \omega_{12} \leq 1,5 \\
& && 0 \leq \omega_{22} \leq 1.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

A solução ótima do subproblema linear (5.47) é

$$\boldsymbol{\omega}^* = (\omega_{10}^*, \omega_{20}^*, \omega_{11}^*, \omega_{21}^*, \omega_{12}^*, \omega_{22}^*)^T = (-0,5; -0,5; 0; 0,75; 0; 0)^T,$$

de modo que a solução ótima do subproblema linear por partes (5.46) é

$$\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*)^T = (-0,5; 0,25)^T.$$

Logo, o novo ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é dado por

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{s}^* = (0, -1)^T + (-0,5; 0,25)^T = (-0,5; -0,75)^T.$$

Observe que $f(\tilde{\mathbf{x}}) = 0,40625 < f(\hat{\mathbf{x}}) = 0,5$ e que $c(\tilde{\mathbf{x}}) = -0,0625$. Como $c(\tilde{\mathbf{x}}) \neq 0$, será necessário resolver o subproblema (5.10) na próxima iteração do algoritmo para obter um passo normal \mathbf{s}_n , com o objetivo de recuperar a viabilidade da solução aproximada de (5.43).

Agora, vamos ao Passo 3 do Algoritmo 5.1, no qual determinamos o valor do parâmetro θ . Usando (5.16)-(5.19), obtemos $\theta = 1$. Finalmente, como $A_{red} = 0,09375$, $P_{red} = 0,25$ e $A_{red}/P_{red} = 0,375$, o ponto $\tilde{\mathbf{x}}$ é aceito no passo 4, e o raio da região de confiança para a próxima iteração é mantido (ou seja, $\delta = 2$).

A seguir, provaremos que a PLPS é globalmente convergente. Para tanto, na Seção 5.5, mostraremos que o Algoritmo 5.1 está bem definido. Na Seção 5.6, provaremos que todo ponto limite da sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ gerada pela PLPS é φ -estacionário. Finalmente, na Seção 5.7, mostraremos que o Algoritmo 5.1 encontra um ponto estacionário. As demonstrações dos lemas e teoremas seguem a linha adotada em Gomes, Maciel e Martínez [31] e Gomes e Senne [32].

5.5 O algoritmo está bem definido

Nesta seção, provaremos que o Algoritmo 5.1 está bem definido, ou seja, que após repetir os passos 1 a 4 um número finito de vezes, podemos obter um novo iterado

$\mathbf{x}^{(k+1)}$ a partir do iterado $\mathbf{x}^{(k)}$. Para isso, três casos são considerados: em primeiro lugar, quando o ponto corrente $\mathbf{x}^{(k)} \in X$ não é φ -estacionário e $\overline{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_n, \mathbf{z}) \neq 0$; em segundo, quando $\mathbf{x}^{(k)} \in X$ não é φ -estacionário e $\overline{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_n, \mathbf{z}) = 0$; e finalmente, quando $\mathbf{x}^{(k)}$ é factível e regular para o problema (5.1) e as suas condições KKT não são satisfeitas em $\mathbf{x}^{(k)}$.

Usando (5.20), podemos definir a aproximação linear por partes da função objetivo f em torno de \mathbf{x} como

$$L_P(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s} + \Gamma(\mathbf{s}). \quad (5.48)$$

Também, consideramos a aproximação quadrática de f em torno de \mathbf{x} , dada por

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{s}. \quad (5.49)$$

Ao longo das demonstrações, faremos uso de algumas hipóteses adicionais, sempre que necessário.

As demonstrações dos Lemas 5.5.1 e 5.5.2 são encontradas em [32]. Entretanto, elas são apresentadas novamente neste trabalho, para a completude do texto.

Lema 5.5.1. *Suponha que $\mathbf{x}^{(k)}$ não seja φ -estacionário e que a condição estabelecida no passo 2.1 do Algoritmo 5.1 não seja satisfeita. Então, após um número finito de recusas de passo, $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$ é aceite.*

Prova. Defina $(\mathbf{s}_0, \mathbf{z}_0) = (\mathbf{0}, -\mathbf{E}(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}))$ como sendo um ponto inicial viável para o problema (5.10), resolvido no passo 1.1 do Algoritmo 5.1. Defina também

$$\mathbf{d}_n = (\mathbf{d}_s, \mathbf{d}_z) = P_{N(\mathbf{x}^{(k)})}(-\nabla \overline{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_0, \mathbf{z}_0)), \quad (5.50)$$

onde $P_{N(\mathbf{x})}$ denota a projeção ortogonal sobre o conjunto

$$N(\mathbf{x}) = \{ (\mathbf{s}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n+m_I} \mid \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{s} + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{z} = -\mathbf{c}(\mathbf{x}), \mathbf{x}_l - \mathbf{x} \leq \mathbf{s}_n \leq \mathbf{x}_u - \mathbf{x}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \}. \quad (5.51)$$

Para \mathbf{x} fixo, $\overline{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{z})$ é uma função linear de \mathbf{s} e de \mathbf{z} . Neste caso, $\nabla \overline{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{z})$ não depende destas variáveis, e podemos escrever $\nabla \overline{M}(\mathbf{x})$, por simplicidade.

Se $\mathbf{x}^{(k)}$ não é φ -estacionário e $\overline{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_n, \mathbf{z}) > 0$, a redução da infactibilidade gerada por $\mathbf{s}_c \equiv \mathbf{s}_n$ satisfaz

$$\begin{aligned} P_{red}^{fct} &\geq \overline{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) - \overline{M}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_0 + \bar{\alpha} \mathbf{d}_s, \mathbf{z}_0 + \bar{\alpha} \mathbf{d}_z) \\ &= -\bar{\alpha} \mathbf{e}^T \mathbf{d}_z = -\bar{\alpha} \nabla \overline{M}(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_n > 0, \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde

$$\bar{\alpha} = \max \{ \alpha \in (0, 1] \mid \|\alpha \mathbf{d}_n\|_\infty \leq 0,8 \delta_k \}.$$

Após rejeitar o passo e reduzir δ_k um número finito de vezes, obtemos $\|\alpha \mathbf{d}_n\|_\infty = 0,8$. Neste caso, definindo $\eta = -\nabla \overline{M}(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_n / \|\mathbf{d}_n\|_\infty$, temos

$$P_{red}^{fct} \geq 0,8\eta\delta_k. \quad (5.53)$$

Usando a expansão de Taylor, vem

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c) = \mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}_c + \mathcal{O}(\|\mathbf{s}_c\|^2),$$

de modo que

$$\varphi(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c) = \|\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c)\|_1 = M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_c) + \mathcal{O}(\|\mathbf{s}_c\|^2).$$

Analogamente,

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s}_c + \mathcal{O}(\|\mathbf{s}_c\|^2).$$

Então, para δ_k suficientemente pequeno, $A_{red}(\delta_k) = P_{red}(\delta_k) + \mathcal{O}(\delta_k^2)$, de modo que

$$|A_{red}(\delta_k) - P_{red}(\delta_k)| = \mathcal{O}(\delta_k^2). \quad (5.54)$$

Nossa escolha de θ_k garante que $P_{red} \geq 0,5P_{red}^{fct}$. Logo, de (5.53), vem

$$P_{red} \geq 0,4\eta\delta_k. \quad (5.55)$$

Finalmente, de (5.54) e (5.55), obtemos

$$\left| \frac{A_{red}(\delta_k)}{P_{red}(\delta_k)} - 1 \right| = \mathcal{O}(\delta_k). \quad (5.56)$$

Portanto, $A_{red} \geq 0,1P_{red}$ para δ_k suficientemente pequeno, e o passo é aceito. \blacksquare

Lema 5.5.2. *Suponha que $\mathbf{x}^{(k)}$ não seja φ -estacionário e que a condição estabelecida no passo 2.1 do Algoritmo 5.1 seja satisfeita. Então, em um número finito de passos, o ponto $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$ é aceito.*

Prova. Sejam $\delta_k^{(0)}$ o raio da região de confiança no início da k -ésima iteração, e \mathbf{s}_a a solução de

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{s}\|_\infty \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}\mathbf{s} = -\mathbf{c} \\ & \mathbf{s}_n^l \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_n^u. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{x}^{(k)}$ não é φ -estacionário, temos que $\|\mathbf{s}_a\|_\infty > 0$. Agora, supondo que o passo seja rejeitado j vezes, obtemos $\delta_k^{(j)} \leq (0,25)^j \delta_k^{(0)}$. Logo, após

$$\left\lceil \log_2 \sqrt{\frac{0,8\delta_k^{(0)}}{\|\mathbf{s}_a\|_\infty}} \right\rceil$$

tentativas, \mathbf{s}_n é rejeitado e o Lema 5.5.1 pode ser aplicado. \blacksquare

Lema 5.5.3. *Suponha que $\mathbf{x}^{(k)}$ seja viável e regular para o problema (5.1), mas que não satisfaça suas condições KKT. Então, após um número finito de iterações, $\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}_c$ é aceito.*

Prova. Se $\mathbf{x}^{(k)}$ é regular mas não é estacionário para o problema (5.1), então temos $\mathbf{d}_t = P_\Upsilon(-\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})) \neq \mathbf{0}$, onde P_Υ denota a projeção ortogonal sobre o conjunto

$$\Upsilon = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} = \mathbf{0}, \mathbf{x}_l - \mathbf{x}^{(k)} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{x}_u - \mathbf{x}^{(k)} \}.$$

Para $\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t = 0$, a prova é a mesma mostrada no Lema 3.3 de Gomes e Senne [32]. Vejamos, então, o que acontece se $\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t > 0$.

Seja a função quadrática

$$q(\alpha) = (\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t) \alpha + \frac{1}{2} (\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t) \alpha^2,$$

e considere a função linear por partes

$$g(\alpha) = (\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t) \alpha + \Gamma(\alpha),$$

que aproxima $q(\alpha)$, de modo que

$$(i) \Gamma(0) = 0$$

$$(ii) 0 \leq \Gamma(\alpha) \leq \frac{1}{2} (\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t) \alpha^2,$$

e $\Gamma(\alpha)$ interpola o termo $\frac{1}{2} (\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t) \alpha^2$ nos pontos $t^{(0)}, t^{(1)}, \dots, t^{(n_t)}$, em que $t^{(0)} = 0$, e n_t é o número de pontos de interpolação positivos, definidos para todas as componentes de \mathbf{s} . Os pontos $t^{(1)}, \dots, t^{(n_t)}$ são alguns daqueles usados na construção das funções lineares por partes $\Gamma_i(s_i)$, $i = 1, \dots, n$. Caso $n_t = 0$, devemos definir $t^{(1)} = \infty$, e forçar $n_t = 1$.

Podemos escrever

$$\Gamma(\alpha) = \max_{j \in J} \left\{ [(\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t) t^{(j)}] \alpha - \frac{1}{2} (\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t) (t^{(j)})^2 \right\}, \quad J = \{0, 1, \dots, n_t\},$$

de modo que

$$g(\alpha) = \max_{j \in J} \{g_j(\alpha)\},$$

onde

$$g_j(\alpha) = C_j \alpha + D_j,$$

$$C_j = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t + (\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t) t^{(j)}$$

e

$$D_j = -\frac{1}{2}(\mathbf{d}_t^T \mathbf{B}_k \mathbf{d}_t)(t^{(j)})^2.$$

O ponto de intersecção entre as retas $g_j(\alpha)$ e $g_{j+1}(\alpha)$ é denotado por $z^{(j)}$, para cada $j = 0, \dots, n_t - 1$. Caso tenhamos $t^{(1)} = \infty$, devemos definir $z^{(0)} = \infty$.

Podemos escrever

$$g(\alpha) = \begin{cases} C_0\alpha + D_0, & \text{se } \alpha \leq z^{(0)}, \\ C_1\alpha + D_1, & \text{se } z^{(0)} < \alpha \leq z^{(1)}, \\ \vdots & \vdots \\ C_{n_t-1}\alpha + D_{n_t-1}, & \text{se } z^{(n_t-2)} < \alpha \leq z^{(n_t-1)}, \\ C_{n_t}\alpha + D_{n_t}, & \text{se } \alpha > z^{(n_t-1)}. \end{cases} \quad (5.57)$$

Como $t^{(0)} = 0$, constatamos que, para $\alpha \in [0, z^{(0)}]$,

$$C_0 = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t \quad \text{e} \quad D_0 = 0,$$

de modo que $g_0(\alpha) = (\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t)\alpha$.

Considere, então, o problema auxiliar

$$\begin{aligned} \min \quad & g_0(\alpha) = (\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t)\alpha \\ \text{s. a} \quad & 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde $\bar{\alpha} = \min \{ \delta_k / \|\mathbf{d}_t\|_\infty, z^{(0)} \}$. Uma vez que (5.58) é um problema de programação linear, seu minimizador é $\alpha^* = \bar{\alpha}$. Assim, após reduzir δ_k um número finito de vezes, obtemos $\bar{\alpha} = \delta_k / \|\mathbf{d}_t\|_\infty$. Além disso,

$$\eta = -\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t / \|\mathbf{d}_t\|_\infty > 0,$$

de modo que

$$\begin{aligned} L_P(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) - L_P(\mathbf{x}^{(k)}, \alpha^* \mathbf{d}_t) &= -\bar{\alpha} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t \\ &= -\frac{\delta_k}{\|\mathbf{d}_t\|_\infty} \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{d}_t = \eta \delta_k. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Combinando (5.59) com o fato de que \mathbf{s}_c é solução de (5.4), obtemos

$$\begin{aligned} P_{red}^{opt} &= L_P(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) - L_P(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_c) \\ &\geq L_P(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) - L_P(\mathbf{x}^{(k)}, \alpha^* \mathbf{d}_t) = \eta \delta_k. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\mathbf{x}^{(k)}$ é factível,

$$M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{0}) = M(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_c) = 0.$$

Portanto, $\theta_k = \min\{1, \theta_k^{large}\}$ não é reduzido, e

$$P_{red} = \theta_k P_{red}^{opt} \geq \theta_k \eta \delta_k. \quad (5.60)$$

Como a equação (5.54) também se aplica neste caso, podemos combiná-la com (5.60) para obter (5.56). Logo, para δ_k suficientemente pequeno, temos $A_{red} \geq 0,1 P_{red}$, de modo que o passo é aceito. ■

5.6 Todo ponto limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ é φ -estacionário

Conforme vimos, o Algoritmo 5.1 para em três casos: quando $\mathbf{x}^{(k)}$ é um ponto estacionário para o problema (5.4), quando $\mathbf{x}^{(k)}$ é φ -estacionário (mas inviável), ou quando $\mathbf{x}^{(k)}$ é viável, mas não regular.

Agora, investigaremos o que acontece quando o Algoritmo 5.1 gera uma sequência infinita de iterados. Nosso objetivo é provar que os pontos limites desta sequência são φ -estacionários. Os resultados abaixo seguem a linha de raciocínio adotada em [31] e [32]. Os Lemas 5.6.1 e 5.6.2 e o Teorema 5.6.1 são demonstrados em [32]. Essas demonstrações aparecem novamente aqui para a completude do texto.

Lema 5.6.1. *Se $\mathbf{x}^* \in X$ não é φ -estacionário, então existem $\varepsilon_1, \beta_1, \beta_2 > 0$ tais que, se o Algoritmo 5.1 é aplicado a $\mathbf{x} \in X$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon_1$, então*

$$P_{red}(\mathbf{x}) \geq \min\{\beta_1 \delta, \beta_2\}.$$

Prova. Seja $(\mathbf{s}_0^*, \mathbf{z}_0^*) = (\mathbf{0}, -\mathbf{E}(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{c}(\mathbf{x}^*))$ um ponto inicial viável e $(\mathbf{s}_n^*, \mathbf{z}^*)$ a solução ótima de (5.10) para $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^*$.

Se \mathbf{x}^* não é φ -estacionário, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in X$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon$, as restrições que são inviáveis em \mathbf{x}^* também são inviáveis em \mathbf{x} . Logo, para um vetor fixo \mathbf{x} próximo de \mathbf{x}^* , podemos considerar o problema auxiliar de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \widetilde{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{z}) = \mathbf{e}^T \mathbf{z} \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{s} + \mathbf{E}(\mathbf{x}^*)\mathbf{z} = -\widetilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{s}_n^l \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_n^u \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

onde $\widetilde{\mathbf{c}}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_i(\mathbf{x})$ se $\mathbf{c}_i(\mathbf{x}^*) > 0$ e $\widetilde{\mathbf{c}}_i(\mathbf{x}) = -\mathbf{c}_i(\mathbf{x})$ se $\mathbf{c}_i(\mathbf{x}^*) < 0$. Denotamos por $(\widetilde{\mathbf{s}}_n, \widetilde{\mathbf{z}})$ a solução ótima deste problema e $(\mathbf{s}_0, \mathbf{z}_0) = (\mathbf{0}, -\mathbf{E}(\mathbf{x}^*)^T \widetilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}))$ um ponto inicial viável.

De acordo com (5.50), definimos

$$\tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x}) = P_{\tilde{N}(\mathbf{x})}(-\nabla\tilde{M}(\mathbf{x})),$$

onde $\tilde{N}(\mathbf{x})$ é definido como em (5.51), usando $\mathbf{E}(\mathbf{x}^*)$ e $\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$. Observe que $\tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x}^*) = \mathbf{d}_n(\mathbf{x}^*) = P_{N(\mathbf{x}^*)}(-\nabla\overline{M}(\mathbf{x}^*))$.

Pela continuidade de $\tilde{\mathbf{d}}_n$, existe $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon]$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in X$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon_1$,

$$-\nabla\tilde{M}(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x}) \geq -\frac{1}{2}\nabla\overline{M}(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_n(\mathbf{x}^*) > 0$$

e

$$0 < \|\tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x})\|_\infty \leq 2\|\mathbf{d}_n(\mathbf{x}^*)\|_\infty.$$

Agora, vamos considerar duas situações. Em primeiro lugar, suponha que, após resolver (5.61), encontremos $\tilde{M}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{s}}_n, \tilde{\mathbf{z}}) > 0$. Neste caso, se $\|\tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x})\|_\infty \geq 0,8\delta$, temos, de (5.55)

$$P_{red} \geq 0,4 \frac{(-\nabla\tilde{M}(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x}))}{\|\tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x})\|_\infty} \delta \geq 0,1 \frac{(-\nabla\overline{M}(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_n(\mathbf{x}^*))}{\|\mathbf{d}_n(\mathbf{x}^*)\|_\infty} \delta. \quad (5.62)$$

Por outro lado, se $\|\tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x})\|_\infty < 0,8\delta$, usando (5.52) e a nossa escolha de θ , obtemos

$$P_{red} \geq 0,5 P_{red}^{fct} \geq -0,5 \nabla\tilde{M}(\mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{d}}_n(\mathbf{x}) \geq -0,25 \nabla\overline{M}(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{d}_n(\mathbf{x}^*). \quad (5.63)$$

Finalmente, suponha que, após resolver (5.61), tenhamos $\tilde{M}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{s}}_n, \tilde{\mathbf{z}}) = 0$. Neste caso, $P_{red}^{fct} = \tilde{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_0, \tilde{\mathbf{z}}_0)$, isto é, P_{red}^{fct} é máximo, de modo que (5.63) também é satisfeito. O resultado desejado segue de (5.62) e (5.63), para uma escolha apropriada das constantes β_1 e β_2 . ■

Lema 5.6.2. *Suponha que \mathbf{x}^* não seja φ -estacionário e que K_1 seja um conjunto infinito de índices tal que $\lim_{k \in K_1} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$. Então, $\{\delta_k \mid k \in K_1\}$ está suficientemente afastado de zero. Além disso, existe $\beta_3 > 0$ e $\bar{k} > 0$ tais que, para $k \in K_1, k \geq \bar{k}$, tem-se $A_{red} > \beta_3$.*

Prova. Para $k \in K_1$ suficientemente grande, temos $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon_1$, onde ε_1 é definido no Lema 5.6.1. Neste caso, pelo Lema 5.5.1, concluímos que o passo nunca é rejeitado quando sua norma é menor que algum $\delta_1 > 0$. Portanto, δ_k está suficientemente afastado de zero. Além disso, pelo nosso critério de aceitação de passo e pelo Lema 5.6.1, temos

$$A_{red} \geq 0,1 P_{red} \geq 0,1 \min\{\beta_1 \delta_1, \beta_2\}.$$

O resultado desejado é obtido tomando $\beta_3 = 0,1 \min\{\beta_1 \delta_1, \beta_2\}$. ■

Com o objetivo de provar o teorema principal desta seção, precisamos de uma hipótese adicional de compacidade, que é verificada trivialmente quando lidamos com problemas com restrições de caixa, como em (5.1).

Hipótese H1. *A sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ gerada pelo Algoritmo 5.1 é limitada.*

Teorema 5.6.1. *Suponha que a Hipótese H1 seja válida. Se $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ é uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 5.1, então todo ponto limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ é φ -estacionário.*

Prova. Para simplificar a notação, denotamos $f_k = f(\mathbf{x}^{(k)})$, $\varphi_k = \varphi(\mathbf{x}^{(k)})$, $\psi_k = \psi(\mathbf{x}^{(k)}, \theta_k)$, e $A_{red}^{(k)} = A_{red}(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{s}_c^{(k)}, \theta_k)$. De (5.11), temos

$$\begin{aligned} \psi_k &= \theta_k f_k + (1 - \theta_k) \varphi_k - [\theta_{k-1} f_k + (1 - \theta_{k-1}) \varphi_k] \\ &\quad + [\theta_{k-1} f_k + (1 - \theta_{k-1}) \varphi_k] \\ &= (\theta_k - \theta_{k-1}) f_k - (\theta_k - \theta_{k-1}) \varphi_k + \theta_{k-1} f_k + (1 - \theta_{k-1}) \varphi_k \\ &= (\theta_k - \theta_{k-1})(f_k - \varphi_k) + \psi_{k-1} - A_{red}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Além disso, de (5.16)-(5.19), vem

$$\theta_k - \theta_{k-1} \leq \frac{N}{(k+1)^{1,1}} \theta_{k-1}.$$

A Hipótese H1 implica a existência de um limitante superior $c > 0$ tal que $|f_k - \varphi_k| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que

$$\psi_k \leq \frac{cN}{(k+1)^{1,1}} + \psi_{k-1} - A_{red}^{(k-1)}. \quad (5.64)$$

Notando que $\theta_k \in [0, 1]$ para todo k e aplicando (5.64) recursivamente, obtemos

$$\psi_k \leq \sum_{j=1}^k \frac{cN}{(j+1)^{1,1}} + \psi_0 - \sum_{j=0}^{k-1} A_{red}^{(j)}.$$

Como a série $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{cN}{(j+1)^{1,1}}$ é convergente, a desigualdade acima pode ser escrita como

$$\psi_k \leq \tilde{c} - \sum_{j=0}^{k-1} A_{red}^{(j)}.$$

Agora, suponhamos que $\mathbf{x}^* \in X$ seja um ponto limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ que não é φ -estacionário. Então, pelo Lema (5.6.2), existe $\beta_3 > 0$ tal que $A_{red}^{(k)} \geq \beta_3$ para um conjunto infinito de índices. Mais ainda, $A_{red}^{(k)} > 0$ para todo k . Portanto, ψ_k é ilimitada inferiormente, o que contradiz a Hipótese H1, provando o lema. \blacksquare

5.7 O algoritmo encontra um ponto estacionário

Nesta seção, mostraremos que existe um ponto limite da sequência de iterados gerada pelo Algoritmo 5.1 que é um ponto estacionário de (5.1). Os Lemas 5.7.1, 5.7.3, 5.7.4, 5.7.5, 5.7.6 e 5.7.7 foram demonstrados em [32]. Essas demonstrações aparecem novamente aqui, para a completude do texto.

Lema 5.7.1. *Para cada ponto viável e regular \mathbf{x}^* , existem $\varepsilon_0, \hat{\sigma} > 0$ tais que, quando o Algoritmo 5.1 é aplicado a $\mathbf{x} \in X$ que satisfaz $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon_0$, tem-se*

$$\|\mathbf{s}_n\|_\infty \leq \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 / \hat{\sigma}$$

e

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, \delta)) \geq \min\{\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1, \hat{\sigma}\delta\}.$$

Prova. Como $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é Lipschitz contínua, para cada \mathbf{x}^* que é viável e regular, existe ε_0 tal que, para todo $\mathbf{x} \in X$ satisfazendo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon_0$, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ tem posto completo e o problema auxiliar

$$\begin{aligned} \min \quad & \overline{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{z}) = \mathbf{e}^T \mathbf{z} \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{s} + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{z} = -\mathbf{c}(\mathbf{x}) \\ & \mathbf{x}_l - \mathbf{x} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{x}_u - \mathbf{x} \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5.65}$$

tem uma solução ótima $(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{0})$. Neste caso, $\mathbf{A}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{s}} = -\mathbf{c}(\mathbf{x})$, de modo que $\|\hat{\mathbf{s}}\|_2 \leq \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_2 / \hat{\sigma}$, onde $\hat{\sigma} > 0$ é o menor valor singular de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Uma vez que o problema (5.65) é o problema (5.10) sem a restrição de região de confiança $\|\mathbf{s}\|_\infty \leq 0, 8\delta$, temos que

$$\|\mathbf{s}_n\|_\infty \leq \|\hat{\mathbf{s}}\|_\infty \leq \|\hat{\mathbf{s}}\|_2 \leq \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_2 / \hat{\sigma} \leq \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 / \hat{\sigma},$$

provando a primeira parte do lema.

Se $(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{0})$ também é viável para (5.10), então $\mathbf{s}_n = \hat{\mathbf{s}}$, e temos

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, \delta)) = M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1. \tag{5.66}$$

Por outro lado, se $\|\hat{\mathbf{s}}\|_\infty > 0, 8\delta$, podemos definir $\hat{\mathbf{s}}_n = \delta \hat{\mathbf{s}} / \|\hat{\mathbf{s}}\|_\infty$ e $\hat{\mathbf{z}}_n = (1 - \delta / \|\hat{\mathbf{s}}\|_\infty) \mathbf{z}_0$ (onde \mathbf{z}_0 é o vetor \mathbf{z} correspondente a $\mathbf{s} = \mathbf{0}$), de modo que $(\hat{\mathbf{s}}_n, \hat{\mathbf{z}}_n)$ é viável para (5.10). Além disso, como $\overline{M}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{z}_0) = \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1$, $\overline{M}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}, \mathbf{0}) = 0$ e \overline{M} é uma função linear de \mathbf{s} e de \mathbf{z} , temos que $M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, \delta)) = \overline{M}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{s}}_n, \hat{\mathbf{z}}_n) = (1 - \delta / \|\hat{\mathbf{s}}\|_\infty) \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1$. Logo,

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n(\mathbf{x}, \delta)) = \delta \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 / \|\hat{\mathbf{s}}\|_\infty \geq \hat{\sigma}\delta. \tag{5.67}$$

A segunda parte do lema segue de (5.66) e (5.67). ■

Lema 5.7.2. *Seja $\mathbf{x}^{(k)}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 5.1. Suponha que $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$ seja uma subsequência que converge ao ponto viável e regular \mathbf{x}^* que não é estacionário para o problema (5.1). Então, existem $c_2 > 0, k_2 \geq k_1, \delta' > 0$ tais que, para $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_2\}$, se $\bar{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n, \mathbf{z}) = 0$ no passo 2.1 do Algoritmo 5.1, temos*

$$L_P(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n) - L_P(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c) \geq c_2 \min\{\delta, \delta'\}.$$

Prova. Como a subsequência infinita $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$ converge para o ponto factível \mathbf{x}^* , existe \bar{k}_2 tal que, para $k \in K_1, k \geq \bar{k}_2$, temos

$$\|\mathbf{s}_n\|_\infty \leq 0,8\bar{\delta},$$

em que $\bar{\delta} = \min\{\delta, 10^{-6}\}$. Observe que, segundo (5.31)-(5.34), para $\|\mathbf{s}\|_\infty \leq \bar{\delta}$, as funções $\Gamma_i(s_i)$, $i = 1, \dots, n$, são iguais a zero, de modo que

$$L_P(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = f(x) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s}.$$

Definamos $\mathbf{d}_t = P_\Lambda(-\nabla f(\mathbf{x}))$, onde

$$\Lambda = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{s} = \mathbf{0}, \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} + \mathbf{s}_n + \mathbf{s} \leq \mathbf{x}_u\}.$$

Denotemos, também, \mathbf{s}_t^d como a solução do subproblema auxiliar

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T (\mathbf{s}_n + \mathbf{s}) \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{s} = \alpha \mathbf{d}_t, \alpha \geq 0 \\ & \|\mathbf{s}_n + \mathbf{s}\|_\infty \leq \bar{\delta} \\ & \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} + \mathbf{s}_n + \mathbf{s} \leq \mathbf{x}_u. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Pode-se observar que $\mathbf{s}_t^d = \tilde{\alpha} \mathbf{d}_t$ é a solução de

$$\begin{aligned} \min \quad & (\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t) \alpha \\ \text{s. a} \quad & 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{\alpha} = \min\{1, \Delta_1, \Delta_2\},$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \min_{d_{t_i} < 0} \left\{ \frac{\bar{\delta} + s_{n_i}}{-d_{t_i}}, \frac{x_i + s_{n_i} - x_{l_i}}{-d_{t_i}} \right\}, \\ \Delta_2 &= \min_{d_{t_i} > 0} \left\{ \frac{\bar{\delta} - s_{n_i}}{d_{t_i}}, \frac{x_{u_i} - x_i - s_{n_i}}{d_{t_i}} \right\}. \end{aligned}$$

Como (5.68) é um problema de programação linear e $\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t < 0$, concluímos que $\tilde{\alpha} = \bar{\alpha}$. Além disso, $\alpha = 1$ satisfaz $\mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} + \mathbf{s}_n + \mathbf{s} \leq \mathbf{x}_u$, de modo que

$$\bar{\alpha} = \min \left\{ 1, \min_{d_{t_i} < 0} \left\{ \frac{\bar{\delta} + s_{n_i}}{-d_{t_i}} \right\}, \min_{d_{t_i} > 0} \left\{ \frac{\bar{\delta} - s_{n_i}}{d_{t_i}} \right\} \right\}. \tag{5.69}$$

Lembrando que \mathbf{s}_c é solução de (5.4), obtemos

$$L_P(\mathbf{s}_n) - L_P(\mathbf{s}_c) \geq L(\mathbf{s}_n) - L(\mathbf{s}_n + \mathbf{s}_t^d) = -\bar{\alpha} \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t. \quad (5.70)$$

Uma vez que $P_\Lambda(-\nabla f(\mathbf{x}))$ é uma função contínua de \mathbf{x} , e \mathbf{x}^* é regular e factível mas não é estacionário, existem $c'_1, c'_2 > 0$ e $k_2 \geq 0$ tais que, para todo $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_2\}$,

$$\|\mathbf{d}_t\|_\infty \leq c'_1, \quad (5.71)$$

$$-\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}_t \geq c'_2. \quad (5.72)$$

De (5.69) e pelo fato de que $\|\mathbf{s}_n\|_\infty \geq 0, 8\delta_k$, temos

$$\bar{\alpha} \geq \min \left\{ 1, \frac{0, 2\bar{\delta}}{c'_1} \right\} = \frac{0, 2}{c'_1} \min \left\{ \frac{c'_1}{0, 2}, 10^{-6}, \delta \right\}. \quad (5.73)$$

Combinando (5.70), (5.72) e (5.73), obtemos, para todo $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_2\}$,

$$L_P(\mathbf{s}_n) - L_P(\mathbf{s}_c) \geq \frac{0, 2c'_2}{c'_1} \min \left\{ \frac{c'_1}{0, 2}, 10^{-6}, \delta \right\}.$$

O resultado desejado é obtido tomando-se $c_1 = \frac{0, 2c'_2}{c'_1}$ e $\delta' = \min \left\{ \frac{c'_1}{0, 2}, 10^{-6} \right\}$. ■

Lema 5.7.3. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 5.1. Suponha que $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$ seja uma subsequência que converge ao ponto viável e regular \mathbf{x}^* que não é estacionário para o problema (5.1). Então, existem $\beta, c_3, k_3 > 0$ tais que, quando $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_3\}$ e $\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 \leq \beta\delta_k$,*

$$L_P(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - L_P(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c) \geq c_3 \min\{\delta, \delta'\}$$

e $\theta^{sup}(\mathbf{x}, \delta) = 1$, onde θ^{sup} é dado por (5.18) e δ' é definido no Lema 5.7.2.

Prova. Pelo Lema 5.7.1, obtemos

$$\|\mathbf{s}_n\|_\infty \leq \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 / \hat{\sigma} \leq \beta\delta_k / \hat{\sigma}.$$

Portanto, definindo $\beta = 0, 8\hat{\sigma}$, temos $\|\mathbf{s}\|_\infty \leq 0, 8\delta$, de modo que $\bar{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n, \mathbf{z}) = 0$ no passo 2.1 do Algoritmo 5.1.

Pelo Lema 5.7.2 e pelo fato de $\nabla f(\mathbf{x})$ ser Lipschitz contínua, podemos definir $k_3 \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} L_P(\mathbf{0}) - L_P(\mathbf{s}_c) &\geq L_P(\mathbf{s}_n) - L_P(\mathbf{s}_c) - |L_P(\mathbf{0}) - L_P(\mathbf{s}_n)| \\ &\geq c_2 \min\{\delta, \delta'\} - \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|), \end{aligned}$$

para todo $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_3\}$. Logo, escolhendo β convenientemente, provamos a primeira afirmação do lema.

Para provar a segunda parte do lema, notamos que

$$P_{red}^{fct} = M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_c) = M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_c) = \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1,$$

de modo que

$$P_{red}^{opt} - 0,5 P_{red}^{fct} \geq c_3 \min\{\delta, \delta'\} - 0,5 \|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1.$$

Assim, para uma escolha apropriada de β , obtemos $P_{red} > 0,5 P_{red}^{fct}$ para $\theta = 1$, chegando ao resultado desejado. ■

Lema 5.7.4. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ uma seqüência infinita gerada pelo Algoritmo 5.1. Suponha que H1 seja válida, e que $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$ seja uma subsequência que converge ao ponto viável e regular \mathbf{x}^* que não é estacionário para o problema (5.1). Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 0$.*

Prova. As seqüências $\{\theta_k^{min}\}$ e $\{\theta_k^{max}\}$ são limitadas inferiormente e não crescentes, sendo, portanto, convergentes. Mais ainda, elas convergem ao mesmo limite, já que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\theta_k^{large} - \theta_k^{min}) = 0$. Além disso, $\theta_{k+1}^{min} \leq \theta_k \leq \theta_k^{large}$. Logo, $\{\theta_k\}$ é convergente.

Suponha que a seqüência infinita $\{\theta_k\}$ não convirja a 0. Então, devem existir $k_4 \geq k_3$ e $\hat{\theta}_U > \hat{\theta}_L > 0$ tais que $\hat{\theta}_L \leq \theta_k \leq \hat{\theta}_U$ para $k \geq k_4$.

Agora, suponha que $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_4\}$ e que $M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n) = 0$. Neste caso, pelo Lema 5.7.2, temos que

$$P_{red} \geq \theta [L_P(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - L_P(\mathbf{x}, \mathbf{s}_c)] \geq \theta c_2 \min\{\delta, \delta'\} - \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1).$$

Como θ não é aumentado se o passo é rejeitado, para cada θ tentado na iteração que corresponde a \mathbf{x} , temos que

$$P_{red} \geq \hat{\theta}_L c_2 \min\{\delta, \delta'\} - \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1).$$

Usando a expansão de Taylor, o fato de que ∇f e \mathbf{A} são Lipschitz contínuas, obtemos, de modo análogo a (5.54),

$$|A_{red} - P_{red}| = \mathcal{O}(\delta^2). \quad (5.74)$$

Logo, existe $\tilde{\delta} \in (0, \delta') \subset (0, \delta_{min})$ tal que, se $\delta \in (0, \tilde{\delta})$ e $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_4\}$,

$$|A_{red} - P_{red}| \leq \hat{\theta}_L c_2 \tilde{\delta} / 40.$$

Seja $k'_4 \geq k_4$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k'_4\}$ e para todo θ tentado na iteração correspondente a \mathbf{x} , tem-se

$$P_{red} \geq \hat{\theta}_L c_2 \min\{\delta, \delta'\} - \hat{\theta}_L c_2 \tilde{\delta} / 20.$$

Se, além disso, $\delta \in [\tilde{\delta}/10, \tilde{\delta})$, então

$$P_{red} \geq \hat{\theta}_L c_2 \tilde{\delta} / 20.$$

Portanto, para todo $\delta \in [\tilde{\delta}/10, \tilde{\delta}]$ e para todo $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k'_4\}$, temos que

$$\frac{|A_{red} - P_{red}|}{P_{red}} \leq 0,5. \quad (5.75)$$

Por outro lado, se $M(\mathbf{x}, \mathbf{s}_n) > 0$, então $P_{red}^{opt} = 0$, de modo que $P_{red} = (1 - \theta) P_{red}^{fct}$. Neste caso, de (5.67) e pelo fato de que θ não é aumentado se o passo é rejeitado, obtemos

$$P_{red} \geq (1 - \hat{\theta}_U) \hat{\sigma} \delta.$$

Usando (5.74), existe $\tilde{\delta} \in (0, \delta_{min})$ tal que, se $\delta \in (0, \tilde{\delta})$ e $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_4\}$,

$$|A_{red} - P_{red}| \leq (1 - \hat{\theta}_U) \hat{\sigma} \tilde{\delta} / 2,$$

de modo que (5.75) também se aplica.

Assim, para algum $\delta \in [\tilde{\delta}/10, \tilde{\delta}]$, o passo é aceito, o que significa que δ_k está suficientemente afastado de zero para $k \in K_1, k \geq k'_4$ e, conseqüentemente, P_{red} também está suficientemente afastado de zero.

Uma vez que $A_{red} \geq 0,1 P_{red}$, a sequência $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ é infinita e a sequência $\{\theta_k\}$ é convergente, concluímos que $\psi(\mathbf{x}, \theta)$ é ilimitada, o que contradiz a Hipótese H1, provando o lema. ■

Lema 5.7.5. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 5.1. Suponha que H1 seja válida, e que $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$ seja uma subsequência que converge ao ponto viável e regular \mathbf{x}^* que não é estacionário para o problema (5.1). Se $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_3\}$ e $\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 \geq \beta \delta$, então*

$$\delta / \theta^{sup} = \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1).$$

Prova. Observe que, quando $\theta^{sup} \neq 1$,

$$\begin{aligned} \theta^{sup} &= \frac{P_{red}}{2(P_{red}^{fct} - P_{red}^{opt})} \\ &= \frac{M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n)}{2[M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n) - L_P(\mathbf{0}) + L_P(\mathbf{s}_c)]}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 5.7.1, se $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_3\}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\theta^{sup}} &= 1 + \frac{L_P(\mathbf{s}_c) - L_P(\mathbf{s}_n)}{M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n)} + \frac{L_P(\mathbf{s}_n) - L_P(\mathbf{0})}{M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n)} \\ &\leq 1 + \frac{|L_P(\mathbf{0}) - L(\mathbf{s}_n)|}{M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_n)} \\ &\leq 1 + \frac{\mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1)}{\min\{\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1, \hat{\sigma} \delta\}} \leq 1 + \frac{\mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1)}{\min\{\beta, \hat{\sigma}\} \delta}. \end{aligned}$$

Logo, como $\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 \geq \beta \delta$, temos que $\delta / \theta^{sup} = \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1)$. ■

Lema 5.7.6. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 5.1. Suponha que $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$ seja uma subsequência que converge ao ponto viável e regular \mathbf{x}^* que não é estacionário para o problema (5.1). Então, existem $k_5 > 0, \tilde{\theta} \in (0, 1]$ tais que, se $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}^{(k)} \mid k \in K_1, k \geq k_5\}$, $\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 \geq \beta\delta$ e $\theta \leq \tilde{\theta}$ satisfaz (5.16)-(5.19), então*

$$A_{red} \geq 0,1 P_{red}.$$

Prova. Pelo fato de que ∇f e \mathbf{A} são Lipschitz contínuas, podemos escrever $A_{red} = P_{red} + \mathcal{O}(\delta^2)$. Agora, supondo que $\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1 \geq \beta\delta$, temos

$$|A_{red} - P_{red}| = \delta \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1). \quad (5.76)$$

Uma vez que a nossa escolha de θ garante que $P_{red} \geq 0,5[M(\mathbf{0}) - M(\mathbf{s}_c)]$, o Lema 5.7.1 implica que, para $k \in K_1$ suficientemente grande,

$$P_{red} \geq 0,5 \min\{\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1, \hat{\sigma}\delta\} \geq 0,5 \min\{\beta, \hat{\sigma}\}\delta.$$

Portanto, dividindo ambos os lados de (5.76) por P_{red} , obtemos

$$\left| \frac{A_{red}}{P_{red}} - 1 \right| = \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x})\|_1),$$

que nos fornece o resultado desejado. ■

Lema 5.7.7. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 5.1. Suponha que todos os pontos limites de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ sejam viáveis e regulares e que a Hipótese H1 seja válida. Então, existe um ponto limite de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ que é um ponto estacionário do problema (5.1).*

Prova. Seguindo as ideias do Lema 13 de [31], notamos que, pela Hipótese H1, existe uma subsequência convergente $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k \in K_1}$. Com o objetivo de obter uma contradição, suponha que o ponto limite desta subsequência não seja um ponto estacionário de (5.1). Então, pelo Lema 5.7.4, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = 0$.

Como (5.17)-(5.18) implicam que $\theta_k^{large} > \min\{1, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{k-1}\}$, existe um subconjunto infinito $K_2 \subset K_1$ tal que

$$\lim_{k \in K_2} \theta_k^{sup}(\underline{\delta}_k) = 0, \quad (5.77)$$

onde $\underline{\delta}_k$ é um dos raios da região de confiança testados na iteração k . Portanto, também existem $\tilde{\theta}, k_6 > 0$ tais que, para todo $k \in K_2, k \geq k_6$, tem-se $\theta_k^{large} \leq 2\theta_k^{min}$,

$$\theta_k^{sup}(\underline{\delta}_k) \leq \tilde{\theta}/2 < 1 \text{ e } \theta_k \leq \tilde{\theta}/2. \quad (5.78)$$

O Lema 5.7.3 garante que $\theta_k^{sup}(\delta) = 1$ para todo $k \in K_2$ quando $\|\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1 \leq \beta\delta$. Assim, de (5.77) e (5.78),

$$\|\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1 > \beta\underline{\delta}_k \quad (5.79)$$

para todo $k \in K_2$. Logo, uma vez que $\|\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1 \rightarrow 0$, concluímos que

$$\lim_{k \in K_2} \underline{\delta}_k = 0.$$

Sem perda de generalidade, assumamos que

$$\underline{\delta}_k \leq 0,1 \delta' < 0,1 \delta_{min} \quad (5.80)$$

para todo $k \in K_2$, onde δ' é definido no Lema 5.7.2. Portanto, $\underline{\delta}_k$ não pode ser o primeiro raio da região de confiança testado na iteração k . Denotamos por $\widehat{\delta}_k$ o raio da região de confiança testado imediatamente antes de $\underline{\delta}_k$, e $\widehat{\theta}_k$ o parâmetro de penalização associado a este passo rejeitado. De (5.78) e pela escolha do parâmetro de penalização, obtemos $\widehat{\theta}_k \leq \widetilde{\theta}$ para todo $k \in K_2$, $k \geq k_6$. Portanto, o Lema 5.7.6 se aplica, de modo que $\|\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1 < \beta \widehat{\delta}_k$ para todo $k \in K_2$, $k \geq k_6$. Além disso, como $\underline{\delta}_k \geq 0,1 \widehat{\delta}_k$, a desigualdade (5.80) implica que

$$\widehat{\delta}_k \leq 10 \underline{\delta}_k \leq \delta' < \delta_{min}. \quad (5.81)$$

Definamos $\theta'(\widehat{\delta}_k) = \theta_k^{large}$ se $\widehat{\delta}_k$ foi o primeiro raio da região de confiança a ser testado na iteração k , e $\theta'(\widehat{\delta}_k) = \theta(\delta'_k)$ caso contrário, onde δ'_k é o raio da região de confiança testado imediatamente antes de $\widehat{\delta}_k$ na iteração k .

De (5.16)-(5.19), do fato de que não é permitido o aumento de θ dentro de uma iteração externa, de (5.77) e pelo Lema 5.7.3, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_k &= \min\{\theta'_k(\widehat{\delta}_k), \theta_k^{sup}(\widehat{\delta}_k)\} = \theta'_k(\widehat{\delta}_k) \\ &\geq \min\{\theta'_k(\widehat{\delta}_k), \theta_k^{sup}(\underline{\delta}_k)\} = \theta_k^{sup}(\underline{\delta}_k) \end{aligned} \quad (5.82)$$

para todo $k \in K_2$, $k \geq k_6$.

Pelo fato de $\nabla f(\mathbf{x})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ serem Lipschitz contínuas, podemos escrever

$$|A_{red}(\widehat{\theta}_k, \widehat{\delta}_k) - P_{red}(\widehat{\theta}_k, \widehat{\delta}_k)| = \mathcal{O}(\widehat{\delta}^2)$$

para todo $k \in K_2$, $k \geq k_6$. Além disso, pelo Lema 5.7.3, (5.81) e pela definição de P_{red} , temos

$$P_{red}(\widehat{\theta}_k, \widehat{\delta}_k) \geq \widehat{\theta}_k c_3 \widehat{\delta}_k,$$

de modo que

$$\frac{|A_{red}(\widehat{\theta}_k, \widehat{\delta}_k) - P_{red}(\widehat{\theta}_k, \widehat{\delta}_k)|}{P_{red}(\widehat{\theta}_k, \widehat{\delta}_k)} = \frac{\mathcal{O}(\widehat{\delta}^2)}{\widehat{\theta}_k c_3 \widehat{\delta}_k} = \frac{\mathcal{O}(\widehat{\delta})}{\widehat{\theta}_k}. \quad (5.83)$$

Pelo Lema 5.7.5 e de (5.79), obtemos

$$\underline{\delta}_k / \theta_k^{sup} = \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1) \text{ para } k \in K_2, k \geq k_6.$$

De (5.81) e (5.82), temos também que $\widehat{\delta}_k / \theta_k^{sup} = \mathcal{O}(\|\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)})\|_1)$. Portanto, pelo fato de \mathbf{x}^* ser factível, o lado direito de (5.83) tende a zero quando $k \in K_2$, $k \geq k_6$. Isso implica que, para k grande o suficiente, $A_{red} \geq 0,1 P_{red}$ para $\widehat{\delta}_k$, contradizendo a hipótese de que $\widehat{\delta}_k$ havia sido rejeitado. ■

Teorema 5.7.1. *Seja $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 5.1. Suponha que a Hipótese H1 seja válida. Então, todos os pontos limites de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ são φ -estacionários. Além disso, se todos esses pontos limites são factíveis e regulares, existe um ponto limite \mathbf{x}^* que é estacionário para o problema (5.1). Em particular, se todos os pontos φ -estacionários são factíveis e regulares, existe uma subsequência de $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ que converge ao ponto estacionário factível e regular de (5.1).*

Prova. Este resultado segue do Teorema 5.6.1 e do Lema 5.7.7. ■

5.8 Escolha da matriz diagonal \mathbf{B}_k

Nesta seção, apresentaremos, dentre as escolhas possíveis para \mathbf{B}_k , aquelas que foram testadas neste trabalho. Em princípio, a opção natural seria tomar a matriz diagonal \mathbf{B}_k (usada no subproblema (5.42)) como sendo a diagonal da matriz Hessiana da função objetivo (ou do Lagrangiano) do problema (5.1), calculada no ponto corrente $\mathbf{x}^{(k)}$. Entretanto, no caso particular de problemas de otimização topológica, até mesmo a obtenção da diagonal dessa Hessiana é extremamente cara sob o ponto de vista computacional, de modo que investigamos três aproximações para essa matriz diagonal.

5.8.1 Aproximação baseada em variáveis recíprocas

Com o objetivo de encontrar aproximações mais precisas que a aproximação linear, sem pagar o alto custo envolvido em aproximações de ordens superiores, uma prática comum adotada na literatura sobre otimização topológica é definir variáveis intermediárias

$$y_i \equiv y_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n,$$

e tomar a aproximação linear de uma função h em relação a essas variáveis, ou seja,

$$\hat{h}(\mathbf{y}) = h(\mathbf{y}^{(k)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(\mathbf{y}^{(k)})}{\partial y_i} (y_i - y_i^{(k)}). \quad (5.84)$$

Esse tipo de aproximação usa apenas informações de primeira ordem, mas é mais precisa que a aproximação linear. É importante notar que $\hat{h}(\mathbf{y})$ é uma função linear em relação às variáveis y_i , mas, em geral, é uma função não linear em relação às variáveis originais x_i .

Etman, Groenwold e Rooda [26] apresentaram um método de Programação Quadrática Sequencial (PQS) aplicado à resolução de problemas de otimização topológica, no qual, a cada iteração, a matriz Hessiana do Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{x})$ é aproximada por uma matriz diagonal \mathbf{B}_k , usando variáveis intermediárias *recíprocas*

$$y_i = 1/x_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.85)$$

Neste trabalho, a estratégia de Etman, Groenwold e Rooda [26] será usada para aproximar a Hessiana da função objetivo f .

Através de (5.84) e (5.85), encontra-se a *aproximação recíproca* de f em torno de $\mathbf{x}^{(k)}$, dada por

$$\widehat{f}_R(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(k)}) \left(\frac{x_i^{(k)}}{x_i} \right) \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}, \quad (5.86)$$

de modo que as suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem são dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial \widehat{f}_R(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \left(\frac{x_i^{(k)}}{x_i} \right)^2 \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.87)$$

e

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}_R(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} -\frac{2}{x_i} \left(\frac{x_i^{(k)}}{x_i} \right)^2 \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.88)$$

De (5.87) e (5.88), temos, no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$,

$$\frac{\partial \widehat{f}_R(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.89)$$

e

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}_R(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} -\frac{2}{x_i^{(k)}} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5.90)$$

donde concluímos, de (5.89), que (5.86) é uma aproximação de primeira ordem de f em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$. Logo, usando (5.90), definimos, neste trabalho,

$$b_{k,i} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \widehat{f}_R(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2}, & \text{se } \frac{\partial^2 \widehat{f}_R(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2} \geq 0, \\ \frac{\partial^2 \widehat{f}_R(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2} + 1, 1 \left| \frac{\partial^2 \widehat{f}_R(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2} \right|, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.91)$$

Note que $b_{k,i} \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

5.8.2 Aproximação baseada em variáveis exponenciais

Groenwold e Etman [35] adotam variáveis intermediárias *exponenciais*, na forma

$$y_i = x_i^{a_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.92)$$

que resultam numa *aproximação exponencial* para a função objetivo f em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$, dada por

$$\widehat{f}_E(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i}{x_i^{(k)}} \right)^{a_i^{(k)}} - 1 \right] \left(\frac{x_i^{(k)}}{a_i^{(k)}} \right) \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}. \quad (5.93)$$

Com o objetivo de obter uma aproximação mais precisa, Fadel, Riley e Barthelemy [27] sugerem que os expoentes $a_i^{(k)}$ sejam obtidos impondo-se a condição

$$\frac{\partial \widehat{f}_E(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.94)$$

Resolvendo (5.94) para $a_i^{(k)}$, obtemos

$$a_i^{(k)} = 1 + \ln \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} \bigg/ \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right\} \bigg/ \ln \{ x_i^{(k-1)} / x_i^{(k)} \}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.95)$$

Note que $a_i^{(k)}$ não está definido se os termos dentro do logaritmo forem nulos ou negativos. Portanto, se existir um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$, temos $1 - (\varepsilon/x_i^{(k)}) < x_i^{(k-1)}/x_i^{(k)} < 1 + (\varepsilon/x_i^{(k)})$, de modo que $x_i^{(k-1)}/x_i^{(k)} \approx 1$ e, conseqüentemente, $\ln \{ x_i^{(k-1)}/x_i^{(k)} \} \approx 0$, produzindo instabilidades numéricas no cálculo de $a_i^{(k)}$ em (5.95). Dessa forma, em nosso trabalho, adotamos a seguinte estratégia: se

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k-1)})}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right) \leq 0 \quad \text{ou} \quad |x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}| < 10^{-6},$$

escolhemos $a_i^{(k)} = -1$. Neste caso, a aproximação de f com relação a x_i será recíproca (vide (5.85)). Entretanto, a equação (5.94) deixará de ser satisfeita para as variáveis i em que isso ocorre.

De (5.93), temos que

$$\frac{\partial \widehat{f}_E(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \left(\frac{x_i^{(k)}}{x_i} \right)^{1-a_i^{(k)}} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \quad (5.96)$$

e

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}_E(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} (a_i^{(k)} - 1)(x_i^{(k)})^{1-a_i^{(k)}} (x_i)^{a_i^{(k)}-2} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.97)$$

No ponto $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$, temos, de (5.96) e (5.97), que

$$\frac{\partial \widehat{f}_E(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \quad (5.98)$$

e

$$\frac{\partial^2 \widehat{f}_E(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} \left(\frac{a_i^{(k)} - 1}{x_i^{(k)}} \right) \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.99)$$

De (5.98), observa-se que (5.93) é uma aproximação de primeira ordem de f em torno do ponto $\mathbf{x}^{(k)}$.

Usando (5.99), definimos

$$b_{k,i} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \widehat{f}_E(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2}, & \text{se } \frac{\partial^2 \widehat{f}_R(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2} \geq 0, \\ \frac{\partial^2 \widehat{f}_E(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2} + 1, 1 \left| \frac{\partial^2 \widehat{f}_R(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i^2} \right|, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.100)$$

Note que $b_{k,i} \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

5.8.3 Aproximação quase-Newton diagonal

Outra possibilidade para a escolha da matriz diagonal \mathbf{B}_k é a atualização quase-Newton diagonal de memória limitada proposta por Goulart e Herskovits [33]. Entretanto, neste trabalho, quando esta estratégia é adotada, \mathbf{B}_k é atualizada usando-se apenas as informações sobre duas iterações consecutivas k e $k+1$.

De acordo com Goulart e Herskovits [33], a matriz \mathbf{B}_{k+1} é obtida resolvendo-se o problema de otimização

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{B}_{k+1} \mathbf{v}_k - \mathbf{w}_k\|_F^2 \\ \text{s. a} \quad & (\mathbf{B}_{k+1})_{ii} > \delta, \quad \delta > 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & (\mathbf{B}_{k+1})_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j, \end{aligned} \quad (5.101)$$

onde $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$, $\mathbf{w}_k = \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ e $\|\cdot\|_F$ denota a norma de Frobenius.

Para facilitar a discussão a seguir, denotaremos, nesta seção, $\mathbf{B}_{k+1} \equiv \mathbf{B}$, $\mathbf{v}_k \equiv \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_k \equiv \mathbf{w}$, com $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$ e $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$.

A função objetivo do problema (5.101) pode ser escrita como

$$\Phi(b_1, \dots, b_n) = \|\mathbf{B} \mathbf{v} - \mathbf{w}\|_F^2 = (b_1 v_1 - w_1)^2 + (b_2 v_2 - w_2)^2 + \dots + (b_n v_n - w_n)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= (b_1^2 v_1^2 - 2b_1 v_1 w_1 + w_1^2) + (b_2^2 v_2^2 - 2b_2 v_2 w_2 + w_2^2) + \dots + (b_n^2 v_n^2 - 2b_n v_n w_n + w_n^2) = \\
&= b_1^2 v_1^2 + b_2^2 v_2^2 + \dots + b_n^2 v_n^2 - 2b_1 v_1 w_1 - 2b_2 v_2 w_2 - \dots - 2b_n v_n w_n + w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_n^2 = \\
&= \mathbf{b}^T \mathbf{V}^2 \mathbf{b} - 2\mathbf{w}^T \mathbf{V}^T \mathbf{b} + \mathbf{w}^T \mathbf{w}, \tag{5.102}
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ e $\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, \dots, v_n)$.

Definindo $\mathbf{Q} = 2\mathbf{V}^2$, $\mathbf{q} = 2\mathbf{V}\mathbf{w}$ e $c = \mathbf{w}^T \mathbf{w}$ e usando (5.102), podemos reescrever (5.101) como o problema de programação quadrática

$$\begin{aligned}
&\min \quad \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{Q} \mathbf{b} - \mathbf{q}^T \mathbf{b} + c \\
&\text{s. a} \quad b_i \geq \delta > 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5.103}
\end{aligned}$$

Observe que, como \mathbf{Q} é diagonal e $Q_{ii} \geq 0$, essa matriz é semidefinida positiva. Dessa forma, a função objetivo de (5.103) é convexa. Assim, uma vez que as restrições de (5.103) formam um conjunto convexo, concluímos que este problema possui um minimizador global. Usando as condições de Karush-Kuhn-Tucker, pode-se mostrar que a solução de (5.103) é dada por

$$b_i = \max \left(\delta, \frac{q_i}{Q_{ii}} \right), \tag{5.104}$$

onde

$$\frac{q_i}{Q_{ii}} = \frac{\frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k+1)})}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i}}{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}. \tag{5.105}$$

Usando (5.105), definimos, em nosso trabalho,

$$b_{k+1,i} = \begin{cases} \frac{q_i}{Q_{ii}}, & \text{se } \frac{q_i}{Q_{ii}} \geq 0, \\ \frac{q_i}{Q_{ii}} + 1, 1 \left| \frac{q_i}{Q_{ii}} \right|, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.106}$$

Note que $b_{k,i} \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

É importante notar que, se tivermos $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, teremos instabilidades numéricas no cálculo de $b_{k,i}$. Dessa forma, quando $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < 10^{-10}$, definimos $b_{k+1,i} = b_{k,i}$.

Como o cálculo de $b_{k+1,i}$ depende dos gradientes de duas iterações consecutivas, obtemos $b_{0,i}$ usando (5.91). Ou seja, $b_{0,i}$ é dada pelas segundas derivadas não mistas da aproximação recíproca da função objetivo f .

Capítulo 6

Resultados Computacionais

Neste capítulo, resolvemos alguns problemas clássicos de otimização topológica de estruturas e de mecanismos flexíveis sob a hipótese de não linearidade geométrica, através das formulações estudadas neste trabalho, usando a Programação Linear por Partes Sequencial (PLPS), descrita no Capítulo 5. Os cinco primeiros exemplos representam estruturas rígidas. Já os três últimos exemplos correspondem a mecanismos flexíveis, para os quais consideramos a formulação de Pedersen, Buhl e Sigmund [55]. Os testes foram realizados com o objetivo de comparar a PLPS com a versão globalmente convergente da Programação Linear Sequencial (PLS) proposta em [32] e com a Programação Quadrática Sequencial (PQS) usando uma aproximação diagonal para a matriz Hessiana da função objetivo, que aqui denotaremos *PQS diagonal*. Usamos dois filtros distintos para a eliminação do tabuleiro de xadrez: o filtro das densidades ponderadas e o filtro de Heaviside. Os três métodos de otimização (PLS, PLPS e PQS diagonal) e todas as rotinas necessárias para a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) foram implementados em C++. Os subproblemas da PLS, da PLPS e da PQS diagonal são resolvidos usando o pacote CPLEX[®], versão 12.1, em C++. Todos os resultados foram obtidos em um computador pessoal com processador Intel Core[®] i7-3612QM, de 2.1 GHz, 8 GB de memória RAM e 64 bits, usando o sistema operacional Linux, plataforma Ubuntu.

6.1 Problemas testados

6.1.1 Exemplo 1 - Viga em balanço

Neste exemplo, consideramos uma viga em balanço apresentada por Buhl, Pedersen e Sigmund [14]. Seja o domínio retangular mostrado na Figura 6.1, submetido a uma força vertical \mathbf{F} (para baixo) de 300000 N no ponto médio da aresta lateral direita do domínio. Consideramos que a aresta lateral esquerda da viga está engastada, impedindo

os deslocamentos nodais tanto na horizontal quanto na vertical. A viga tem uma espessura $e = 0,1\text{ m}$, o módulo de Young do material que a compõe é $E = 3 \times 10^9\text{ N/m}^2$, e o coeficiente de Poisson do material em questão é $\nu = 0,4$. O domínio é discretizado em 2500 elementos quadrados. A estrutura ótima deve conter 50% do volume total do domínio.

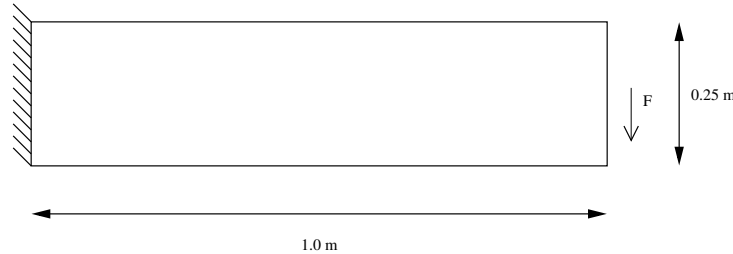


Figura 6.1: Domínio da viga em balanço do Exemplo 1.

6.1.2 Exemplo 2 - Placa apoiada nos pontos médios das laterais

Neste exemplo, apresentado por Gea e Luo [30], uma placa deve ser construída no domínio retangular da Figura 6.2. Aplicamos uma força vertical \mathbf{F} (para cima) de 200 N no ponto médio da aresta superior do domínio. Os deslocamentos são impedidos na horizontal e na vertical nos pontos médios das arestas laterais. A espessura da placa

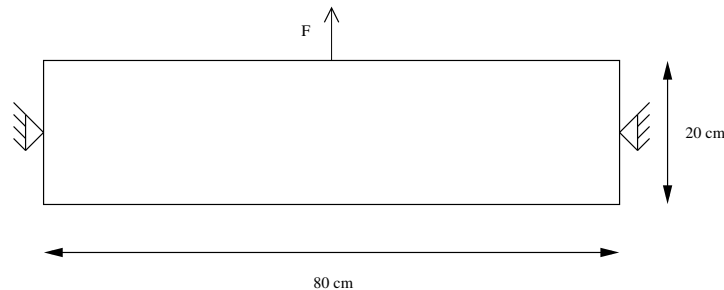


Figura 6.2: Domínio da placa do Exemplo 2.

é de $0,1\text{ cm}$, o módulo de Young do material que a compõe é $E = 100000\text{ N/cm}^2$, e o respectivo coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. O domínio é discretizado em 3600 elementos, e a estrutura ótima deve conter 25% do volume total do domínio.

6.1.3 Exemplo 3 - Placa biengastada

A Figura 6.3 mostra um domínio retangular no qual deve ser construída uma placa, cuja espessura é de $0,1\text{ cm}$. São aplicadas três forças concentradas $\mathbf{F}_1 = 15\text{ N}$, $\mathbf{F}_2 = 30\text{ N}$ e $\mathbf{F}_3 = 15\text{ N}$ (para cima) na base do domínio. As laterais da placa são engastadas,

de modo que os deslocamentos são impedidos tanto na horizontal quanto na vertical. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material que constitui essa placa são, respectivamente, $E = 10000 \text{ N/cm}^2$ e $\nu = 0,3$. O domínio é discretizado em 2500 elementos, e a estrutura ótima deve conter 25% do volume total do domínio. Essa estrutura foi apresentada no trabalho de Gea e Luo [30].

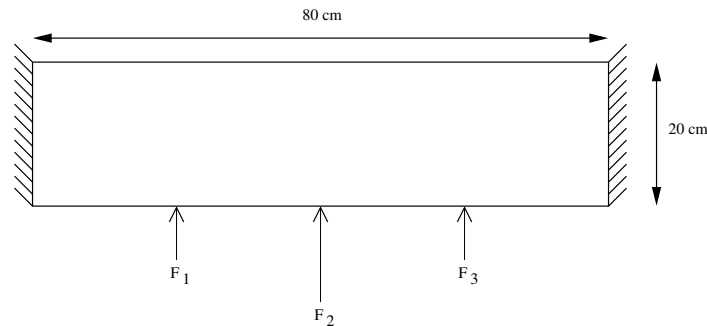


Figura 6.3: Domínio da placa do Exemplo 3.

6.1.4 Exemplo 4 - Viga biengastada

Jung e Gea [29] propõem um problema que consiste em encontrar a topologia ótima de uma viga biengastada, conforme mostra a Figura 6.4.

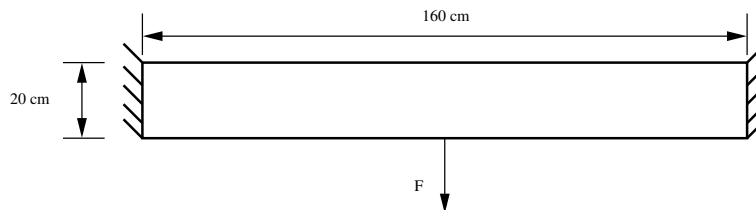


Figura 6.4: Domínio da viga do Exemplo 4.

No ponto médio da base do domínio, é aplicada uma força \mathbf{F} (para baixo) de 30 N . O módulo de Young e o coeficiente de Poisson do material que compõe esta viga são, respectivamente, $E = 3000 \text{ N/cm}^2$ e $\nu = 0,3$. O domínio é discretizado em 3200 elementos quadrados, e a estrutura ótima deve conter 20% do volume total do domínio.

6.1.5 Exemplo 5 - Viga MBB

Uma viga deve ser construída no domínio retangular mostrado na Figura 6.5. Essa viga foi desenvolvida pela empresa de aviação alemã *Messerschmitt-Bölkow-Blohm*, para sustentar o assoalho de um avião. Aplicamos uma força vertical \mathbf{F} (para baixo) de 450000 N no ponto médio da aresta superior do domínio. No canto inferior direito, os deslocamentos são impedidos tanto na horizontal quanto na vertical e, no canto inferior esquerdo, os deslocamentos são restringidos apenas na vertical. Esta viga tem uma

espessura $e = 0,1\text{ m}$, o módulo de Young do material que a compõe é $E = 3 \times 10^9\text{ N/m}^2$, e o respectivo coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. O domínio é discretizado em 2400 elementos. A estrutura ótima deve conter 50% do volume total do domínio.

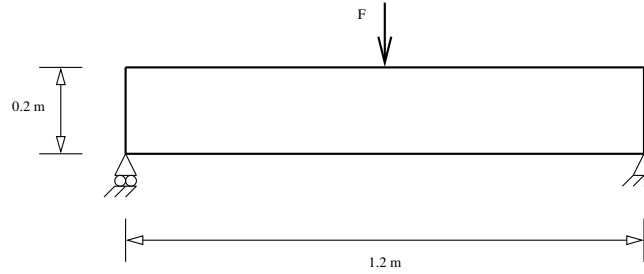


Figura 6.5: Domínio da viga MBB do Exemplo 5.

6.1.6 Exemplo 6 - Pinça apoiada no canto superior esquerdo

A Figura 6.6 mostra um domínio no qual deve ser projetada uma pinça. Como a pinça possui um eixo de simetria horizontal, apenas a metade superior do domínio original é apresentada. A espessura da pinça é de $7\ \mu\text{m}$. O módulo de Young do material que constitui essa pinça é $E = 180\text{ mN}/\mu\text{m}^2$, e o respectivo coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. A metade superior do domínio é discretizada em 2880 elementos finitos quadrados. O mecanismo ótimo deve conter 20% do volume total do domínio.

No canto inferior esquerdo desse domínio (ou seja, no ponto A), é aplicada uma força horizontal f_a de 5 mN . Para que a pinça entre em contato com um objeto, o deslocamento desejado deve ocorrer no ponto B. Para controlar o deslocamento sofrido pelo mecanismo no ponto A, é colocada nesse ponto uma mola cuja constante de rigidez é $k_{in} = 2\text{ mN}/\mu\text{m}$. No ponto B, é colocada uma mola de rigidez $k_{out} = 1\text{ mN}/\mu\text{m}$, com o objetivo de simular o esforço de reação sobre o mecanismo. Para representar a simetria da peça, em toda a base do domínio, foram colocados apoios que impedem os deslocamentos na vertical. No canto superior esquerdo do domínio, um engaste de $22,5\ \mu\text{m}$ de comprimento restringe os deslocamentos tanto na horizontal quanto na vertical.

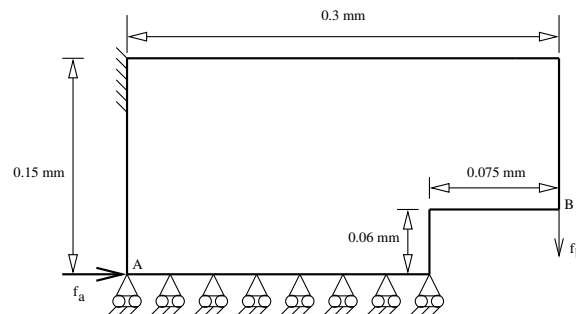


Figura 6.6: Domínio da pinça do Exemplo 6.

6.1.7 Exemplo 7 - Pinça engastada na lateral esquerda

A Figura 6.7 mostra um domínio no qual uma pinça engastada na sua lateral esquerda deve ser construída. Esta pinça tem um eixo de simetria horizontal, de modo que apenas a metade superior do domínio original é apresentada. A espessura da pinça é de $1 \mu m$. O módulo de Young do material que constitui essa pinça é $E = 100 mN/\mu m^2$, e o respectivo coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. A metade superior do domínio é discretizada em 2912 elementos finitos quadrados. O mecanismo ótimo deve conter 10% do volume total do domínio. No ponto A, é aplicada uma força horizontal f_a de $2,5 mN$. O

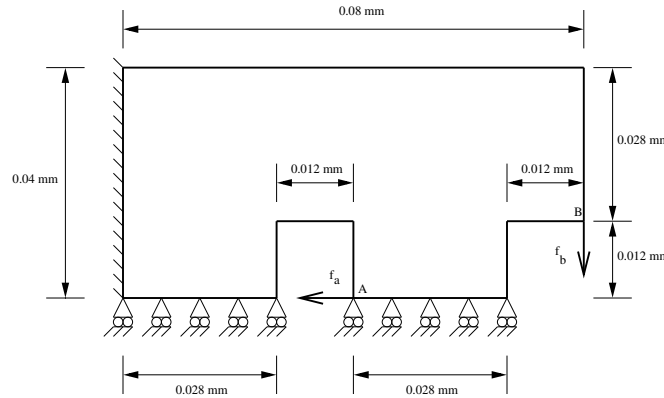


Figura 6.7: Domínio da pinça do Exemplo 7.

deslocamento desejado deve ocorrer no ponto B. Uma mola de rigidez $k_{in} = 5 mN/\mu m$ é colocada no ponto A, com o objetivo de controlar o deslocamento sofrido pelo mecanismo neste ponto. Para simular o esforço de reação sobre a pinça, é colocada uma mola de rigidez $k_{out} = 1 mN/\mu m$ no ponto B. Devido à simetria dessa pinça, são colocados apoios que impedem os deslocamentos na vertical em toda a base do domínio.

6.1.8 Exemplo 8 - Inversor de deslocamentos

A Figura 6.8 mostra um domínio retangular no qual deve ser construído um inversor de deslocamentos. Uma vez que esse inversor possui um eixo de simetria horizontal, trabalhamos apenas com a metade superior do seu domínio. A espessura do inversor é $e = 7 \mu m$. O módulo de Young do material que constitui esse inversor é $E = 180 mN/\mu m^2$, e o respectivo coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. A metade superior do domínio é discretizada em 3200 elementos finitos quadrados. O mecanismo ótimo deve conter 20% do volume total do domínio.

Aplicamos uma força horizontal f_a de $20 mN$ à esquerda no ponto A (canto inferior esquerdo do domínio). O deslocamento desejado deve ocorrer no ponto B, no sentido contrário à aplicação da força f_a . Por esse motivo, o mecanismo flexível deste exemplo é chamado de inversor de deslocamentos. Para controlar o deslocamento do inversor no ponto A, colocamos uma mola de rigidez $k_{in} = 4 mN/\mu m$ nesse ponto. Com o intuito de

representar o esforço de reação sofrido pelo mecanismo, colocamos uma mola de rigidez $k_{out} = 1 \text{ mN}/\mu\text{m}$ no ponto B. Os apoios da base do domínio apenas simulam a simetria da estrutura, impedindo os deslocamentos na vertical. O apoio real do inversor, cujo comprimento é de $22,5 \mu\text{m}$ aparece no canto superior esquerdo da Figura 6.8. Esse apoio impede os deslocamentos tanto na horizontal quanto na vertical.

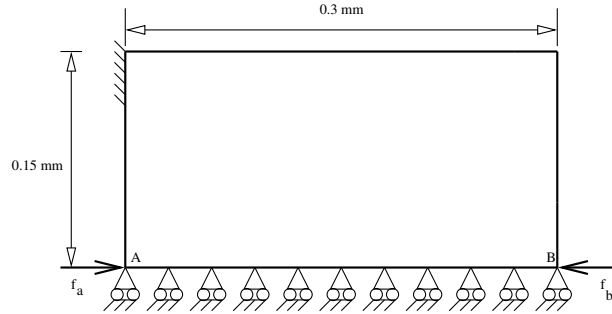


Figura 6.8: Domínio do inversor de deslocamentos do Exemplo 8.

6.2 Descrição dos testes

Neste trabalho, apresentamos os resultados encontrados para cada problema usando a Programação Linear por Partes Sequencial (PLPS) e comparamos esses resultados com aqueles obtidos pela versão globalmente convergente da Programação Linear Sequencial (PLS) [32] e com a Programação Quadrática Sequencial (PQS) usando uma aproximação diagonal para a matriz Hessiana da função objetivo, a qual denominamos *PQS diagonal*. Para cada estrutura ou mecanismo flexível, aplicamos dois filtros distintos para a eliminação do tabuleiro de xadrez: o filtro das densidades ponderadas e o filtro de Heaviside, apresentados nas Seções 4.10 e 4.11, respectivamente.

As soluções ótimas foram obtidas através de um aumento gradativo do fator de penalização p do método SIMP. Assim, dado um ponto inicial, obtivemos a solução ótima com $p = 1,0$. Em seguida, esta solução foi usada como ponto inicial para encontrar a solução ótima com $p = 1,1$, que, por sua vez, foi usada como ponto inicial para encontrar a solução ótima com $p = 1,2$, e assim por diante, até atingirmos $p = 3,0$. Essa estratégia, denominada *Método da Continuação* (vide Allaire e Francfort [1]), tem como objetivo escapar de minimizadores locais do problema de otimização topológica, permitindo a obtenção de uma aproximação mais adequada para o minimizador global do problema em questão.

Conforme discutimos na Seção 4.3, o maior obstáculo encontrado na resolução de problemas de otimização topológica de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos é a não convergência do método de Newton para a resolução dos sistemas não lineares referentes à condição de equilíbrio estático, quando a matriz de rigidez tangente global

$\mathbf{K}_T(\boldsymbol{\rho})$ deixa de ser definida positiva. Após tentarmos sem sucesso a estratégia de remoção dos nós rodeados por elementos vazios proposta por Buhl, Pedersen e Sigmund [14] (Subseção 4.3.1) e a aplicação do método do comprimento de arco (Subseção 4.3.2), a estratégia que foi capaz de eliminar as dificuldades de convergência do método de Newton foi o escalamento das densidades, proposto na Subseção 4.3.3. Dessa forma, nos Exemplos 1, 2, 3, 4 e 5 (estruturas rígidas), resolvemos o problema escalado (4.68), tomando $\rho_{min} = 0,001$ e $\bar{\rho}_{min} = 0,1$. É importante salientar que este valor de $\bar{\rho}_{min}$ foi escolhido, após inúmeros testes computacionais, de modo a produzir resultados satisfatórios em todos os problemas resolvidos. Com relação aos problemas dos Exemplos 6, 7 e 8 (mecanismos flexíveis), após vários testes, constatamos que os melhores resultados foram obtidos com a formulação proposta por Pedersen, Buhl e Sigmund [55], descrita pelos problemas (4.48) e (4.49), sem usar o escalamento das densidades. A formulação proposta por Nishiwaki *et al.* (problemas (4.42) e (4.43)) não se mostrou adequada para mecanismos submetidos a grandes deslocamentos, uma vez que é necessário resolver dois sistemas não lineares para calcular a função objetivo, aumentando o esforço computacional exigido na resolução dos problemas de otimização topológica.

Na prática, observa-se que a restrição de volume, que originalmente é descrita como uma restrição de desigualdade, sempre é ativa em uma solução ótima de um problema de otimização topológica. Sendo assim, em nossos testes computacionais, consideramos que essa restrição é de igualdade, de modo que os problemas de otimização topológica resolvidos têm a forma do problema de otimização geral (5.1).

Em todos os problemas de otimização topológica onde as estruturas ou os mecanismos flexíveis estão sujeitos a grandes deslocamentos, adotamos a lei de material neo-Hookiana de Simo-Ciarlet (descrita na Subseção 3.4.2), pois, sob o ponto de vista teórico, ela garante a existência de soluções para as condições de equilíbrio estático da estrutura, além de ser mais barata, sob o ponto de vista computacional. De fato, quando essa lei é utilizada, a matriz de rigidez tangente de cada elemento é formada por uma única parcela (observe (3.93)), enquanto que, no caso da lei de material de Kirchhoff-Saint Venant (também apresentada na Subseção 3.4.2), a matriz de rigidez tangente do elemento é composta pela soma de cinco parcelas (confira (3.66)), que exigem um grande esforço computacional para serem obtidas.

Os sistemas não lineares (4.12) referentes às condições de equilíbrio estático no caso de grandes deslocamentos foram resolvidos usando o método de Newton, até que a condição (4.17) fosse satisfeita com $\varepsilon = 10^{-6}$ ou até atingir o número máximo de 100 iterações. Todos os sistemas lineares associados ao método de Newton ou aqueles referentes à hipótese de pequenos deslocamentos foram resolvidos usando a fatoração de Cholesky, através do pacote CHOLMOD [22], versão 1.7, em C++.

Uma vez que a PLPS leva em conta uma aproximação para a diagonal da matriz

Hessiana da função objetivo na resolução dos subproblemas (5.4), comparamos o seu desempenho com a PQS, usando também uma aproximação diagonal para essa Hessiana. Neste caso, dado um iterado $\mathbf{x}^{(k)}$, obtemos o passo normal resolvendo o subproblema (5.10), e o passo tangente através da solução do subproblema quadrático separável

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_{k,i} s_i^2 + \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{s} \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s} = -\mathbf{c}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ & \mathbf{s}_l^{(k)} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_u^{(k)}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $b_{k,i}$, $i = 1, \dots, n$ são os elementos diagonais da matriz \mathbf{B}_k que aproxima a diagonal da Hessiana da função objetivo, e $\mathbf{s}_l^{(k)}$ e $\mathbf{s}_u^{(k)}$ são definidos em (5.5) e (5.6), respectivamente.

Com relação à matriz \mathbf{B}_k , testamos as aproximações para a Hessiana da função objetivo baseadas em variáveis recíprocas e exponenciais e a aproximação Quase-Newton diagonal, apresentadas nas Subseções 5.8.1, 5.8.2 e 5.8.3, respectivamente. Para cada uma dessas aproximações, testamos a PLPS usando 3 e 5 pontos de interpolação para obter a aproximação linear por partes $\Gamma_k(\mathbf{s})$ do termo quadrático $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_{k,i} s_i^2$. Os resultados desses testes mostraram que o número de iterações efetuadas usando 3 ou 5 pontos de interpolação na PLPS foram parecidos e que, conforme esperado, o custo de resolução do subproblema (5.10) aumenta à medida em que aumentamos a quantidade desses pontos. Dentre as três alternativas apresentadas para a obtenção de \mathbf{B}_k , a aproximação baseada em variáveis exponenciais foi a que produziu o menor número de iterações da PLPS para a maioria dos problemas testados. Diante desse cenário, optamos, neste trabalho, utilizar a PLPS com 3 pontos de interpolação em combinação com a aproximação da diagonal da Hessiana da função objetivo baseada em variáveis exponenciais.

Com relação ao critério de parada adotado para os três métodos de otimização considerados neste trabalho, seguimos a proposta apresentada por Martínez [51]. Sejam o iterado $\mathbf{x}^{(k)}$ e o Lagrangiano $\ell(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{x})$ correspondente a (5.1), levando-se em conta apenas as restrições de igualdade. Considere o problema

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \|\mathbf{x}^{(k)} - \nabla \ell(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) - \mathbf{x}\|_2^2 \\ \text{s. a} \quad & \mathbf{x} \in X, \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u\}.$$

A solução $\bar{\mathbf{x}}$ do problema (6.2) é a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{x}^{(k)} - \nabla \ell(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$ no conjunto X , a qual pode ser escrita analiticamente como

$$\bar{x}_i = \min \left\{ x_{u_i}, \max \left\{ x_{l_i}, x_i^{(k)} - \frac{\partial \ell(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}_k)}{\partial x_i} \right\} \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Denotamos $\bar{\mathbf{x}} = P_X(\mathbf{x}^{(k)} - \nabla\ell(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}))$. Pode-se mostrar que $\bar{\mathbf{x}}$ é o único ponto estacionário de (6.2) e que $\bar{\mathbf{x}}$ depende continuamente de $\mathbf{x}^{(k)}$. Além disso, pode-se provar que, se $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(k)}$, então $\mathbf{x}^{(k)}$ é ponto estacionário do problema (5.1). Baseado nesse resultado, define-se o *gradiente projetado contínuo*

$$g_P(\mathbf{x}^{(k)}) = P_X(\mathbf{x}^{(k)} - \nabla\ell(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})) - \mathbf{x}^{(k)}.$$

Assim, se $g_P(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{0}$, então $\mathbf{x}^{(k)}$ é ponto estacionário de (5.1). Neste trabalho, para cada um dos três algoritmos testados, $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ é tomado como o vetor de multiplicadores de Lagrange associados à restrição de volume na solução ótima do subproblema relativo ao passo tangente.

Considerando as observações feitas acima, paramos cada um dos três algoritmos testados neste trabalho quando

$$\|g_P(\mathbf{x}^{(k)})\|_\infty < 10^{-3} \quad \text{ou} \quad \|\mathbf{s}^{(k)}\|_\infty < 10^{-6}$$

para cada valor do parâmetro de penalização p do método SIMP. Além disso, estabelecemos um número máximo de iterações igual a 50 se $1, 0 \leq p \leq 2, 9$ e igual a 10000 se $p = 3, 0$.

Durante a resolução dos problemas de otimização topológica, observa-se que os valores da função objetivo e da restrição de volume têm ordens de grandeza bastante diferentes, o que pode acarretar instabilidades numéricas durante a resolução dos problemas. Com o intuito de evitar este inconveniente, além de aplicar o escalamento das densidades, também fazemos um escalamento da função objetivo e da restrição de volume. Denotando a função objetivo original por f , a restrição de volume original por c e as densidades escaladas $\boldsymbol{\tau}$, definimos a função objetivo escalada \tilde{f} e a restrição de volume escalada \tilde{c} como

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{f(\boldsymbol{\tau})}{\|\nabla f(\boldsymbol{\tau}_0)\|_\infty} \quad \text{e} \quad \tilde{c}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{c(\boldsymbol{\tau})}{\|\nabla c(\boldsymbol{\tau}_0)\|_\infty},$$

onde $\boldsymbol{\tau}_0 \in \mathbb{R}^{n_{el}}$ é o ponto inicial escalado para cada valor de p . É importante observar que, na prática, $\|\nabla f(\boldsymbol{\tau}_0)\|_\infty > 0$ e $\|\nabla c(\boldsymbol{\tau}_0)\|_\infty > 0$.

Com relação ao filtro de Heaviside (apresentado na Seção 4.7), Sigmund [61] sugere que o parâmetro β seja aumentado gradativamente, assumindo valores entre 1 e 500, para evitar instabilidades numéricas. Entretanto, em nossas experiências com estruturas e mecanismos flexíveis sujeitos a grandes deslocamentos, constatamos que tais instabilidades numéricas surgem para valores baixos de β (por exemplo, $\beta = 5$), fazendo com que o método de Newton não convirja para uma solução do sistema não linear $\mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\rho}), \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}$, mesmo com o escalamento das densidades proposto na Seção 4.3. Diante disso, após vários testes, a alternativa que resultou em melhores resultados foi adotar um valor fixo para β , conforme proposto no trabalho de Guest, Asadpoure e

Ha [37]. Neste trabalho, tomamos $\beta = 1,5$, que foi o valor que produziu bons resultados para todos os testes. Na Seção 6.11, mostramos alguns resultados adicionais com o filtro de Heaviside, para algumas estruturas sujeitas a pequenos deslocamentos, usando valores mais altos para o parâmetro β .

Para os três métodos de otimização testados, o valor inicial δ_0 do raio da região de confiança para cada valor de p é igual a $0,1$. Nas Seções 6.3 a 6.11, os resultados obtidos são apresentados em tabelas. Já na Seção 6.12, esses resultados são resumidos em gráficos do perfil de desempenho (*performance profile*), introduzido por Dolan e Moré [25].

6.3 Resultados para o Exemplo 1

Na Tabela 6.1, mostramos os resultados obtidos para a topologia ótima da viga em balanço do Exemplo 1. O raio de aplicação dos filtros, r_{min} , é igual a $3,5$ elementos, e o ponto inicial escolhido é $\rho_i^{(0)} = 0,5$, $i = 1, \dots, 2500$.

Observando a Tabela 6.1, notamos que, no caso de grandes deslocamentos combinado com o filtro das densidades ponderadas, os valores da função objetivo obtidos pelos três métodos de otimização testados foram bastante parecidos. A PQS diagonal encontrou a solução com o menor número de iterações externas e internas, mas a PLPS obteve a solução com o menor tempo. Já com o filtro de Heaviside, destacamos a superioridade da PLPS, que encontrou a solução ótima usando apenas 66% do tempo gasto pela PLS, e efetuou somente 55% do número total de iterações internas feitas por esse método.

Considerando as estruturas submetidas a pequenos deslocamentos com o filtro das densidades ponderadas, a PLS encontrou a solução no menor tempo, embora o número de iterações externas e internas tenha sido muito parecido para os três algoritmos. Quando o filtro de Heaviside foi aplicado, notamos que, apesar de a PLS ter efetuado mais iterações que os outros dois métodos, o tempo gasto para encontrar a solução ótima corresponde a $86,5\%$ daquele usado pela PLPS. Com relação a PQS diagonal, esse percentual cai para aproximadamente 45% . Observamos que a PQS diagonal gastou um tempo bem maior que os outros dois algoritmos para resolver os problemas.

As Figuras 6.9-6.14 mostram as vigas obtidas em função do tipo de deslocamento considerado, do filtro e do método usado. Observando essas figuras, fica claro que as topologias das vigas em balanço sujeitas a grandes deslocamentos são completamente diferentes daquelas obtidas considerando-se a hipótese de pequenos deslocamentos, e são assimétricas. Podemos observar que as vigas em balanço obtidas submetidas a grandes deslocamentos com o filtro das densidades ponderadas obtidas com a PLPS e com a PQS diagonal (Figura 6.11) são um pouco diferentes daquela encontrada pela PLS (Figura 6.12). Com relação às estruturas sob grandes deslocamentos obtidas com

Exemplo 1 - Viga em balanço			
Grandes Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$1,0863 \times 10^5$	$1,0801 \times 10^5$	$1,0863 \times 10^5$
iterações externas	1102	1640	1001
iterações internas	1249	1776	1171
tempo (seg.)	135,54	175,10	160,34
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$1,1312 \times 10^5$	$1,1310 \times 10^5$	$1,1304 \times 10^5$
iterações externas	1063	1835	933
iterações internas	1075	1950	1092
tempo (seg.)	127,94	193,99	148,74
Pequenos Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$1,3406 \times 10^5$	$1,3405 \times 10^5$	$1,3393 \times 10^5$
iterações externas	993	1037	992
iterações internas	1084	1094	1132
tempo (seg.)	36,57	26,41	68,94
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$1,4112 \times 10^5$	$1,4112 \times 10^5$	$1,4113 \times 10^5$
iterações externas	1035	1342	1027
iterações internas	1152	1403	1202
tempo (seg.)	40,13	34,71	76,27

Tabela 6.1: Resultados obtidos para a viga em balanço do Exemplo 1.

o filtro de Heaviside, constatamos que aquela encontrada pela PQS diagonal (Figura 6.14) contém uma barra a menos que as obtidas pela PLPS e pela PLS (Figura 6.13).

As Figuras 6.15-6.18 mostram o que acontece com a topologia ótima da viga em balanço do Exemplo à medida que a intensidade da força é aumentada, sob a hipótese de grandes deslocamentos. Podemos notar que a viga perde a simetria, e a barra inclinada mais próxima ao canto inferior direito do domínio desaparece quando a força aplicada é de $240000 N$.

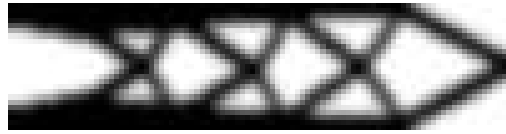


Figura 6.9: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para $F = 300000 N$, com os três métodos.

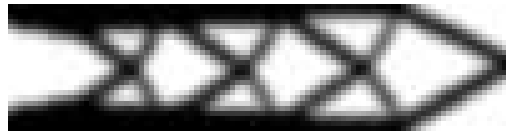


Figura 6.10: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para $F = 300000 N$, com os três métodos.



Figura 6.11: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PLPS e da PQS diagonal, para $F = 300000 N$.



Figura 6.12: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PLS, para $F = 300000 N$.



Figura 6.13: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, obtida através da PLPS e da PLS, para $F = 300000 N$.



Figura 6.14: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, obtida através da PQS diagonal, para $F = 300000 N$.

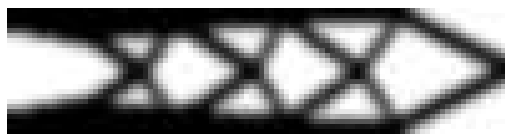


Figura 6.15: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para $F = 1000 N$.



Figura 6.16: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para $F = 12000 N$.



Figura 6.17: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para $F = 144000 N$.



Figura 6.18: Viga em balanço do Exemplo 1 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para $F = 240000 N$.

6.4 Resultados para o Exemplo 2

Os resultados encontrados para a placa do Exemplo 2 são mostrados na Tabela 6.2. O raio de aplicação dos filtros, r_{min} , é igual a 2,5 elementos, e o ponto inicial escolhido é $\rho_i^{(0)} = 0,25$, $i = 1, \dots, 3600$.

Exemplo 2 - Placa apoiada nos pontos médios das laterais			
Grandes Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$3,2514 \times 10^2$	$3,2550 \times 10^2$	$3,2533 \times 10^2$
iterações externas	741	961	810
iterações internas	800	1007	916
tempo (seg.)	111,06	122,63	172,71
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$4,2808 \times 10^2$	$4,2808 \times 10^2$	$4,2808 \times 10^2$
iterações externas	2318	3980	2451
iterações internas	2448	4033	2717
tempo (seg.)	336,66	478,73	522,34
Pequenos Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$3,9082 \times 10^2$	$3,3400 \times 10^2$	$3,8974 \times 10^2$
iterações externas	937	897	888
iterações internas	1006	953	995
tempo (seg.)	50,05	32,52	100,00
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$4,2461 \times 10^2$	$4,2460 \times 10^2$	$4,2461 \times 10^2$
iterações externas	951	1047	947
iterações internas	1037	1105	1096
tempo (seg.)	52,73	37,98	108,17

Tabela 6.2: Resultados obtidos para a placa do Exemplo 2.

Observamos na Tabela 6.2 que, quando o filtro das densidades ponderadas foi aplicado no caso de grandes deslocamentos, a PLPS encontrou a solução ótima gastando o menor número de iterações externas e internas e o menor tempo. Quando usamos o filtro de Heaviside, os valores da função objetivo obtidos pelos três algoritmos foram idênticos. Novamente, a PLPS obteve a solução ótima em menos tempo. De fato, o tempo gasto pela PLPS correspondeu a aproximadamente 70,3% do total gasto pela PLS e a aproximadamente 64,5% do tempo que a PQS diagonal gastou para resolver o

problema. É importante notar que a PLPS efetuou apenas 60,7% do número total de iterações internas realizadas pela PLS.

No caso de pequenos deslocamentos, notamos que, para os dois filtros adotados, o número de iterações externas e internas foram semelhantes para os três algoritmos testados, e a PLS encontrou a solução no menor tempo.

As Figuras 6.19-6.23 mostram que a topologia ótima da placa submetida a grandes deslocamentos é completamente diferente daquela obtida usando a hipótese de grandes deslocamentos. Além disso, sob a hipótese de pequenos deslocamentos, quando o filtro das densidades ponderadas é usado, a estrutura obtida pela PLPS e pela PQS diagonal (Figura 6.20) contém algumas barras a mais do que aquela encontrada pela PLS (Figura 6.19). Analisando o valor da função objetivo, observa-se que a placa da Figura 6.19 é mais rígida do que aquela da Figura 6.20, sugerindo que os métodos alcançaram minimizadores locais diferentes. Observamos também que, no caso de grandes deslocamentos, a barra que compõe a parte superior da placa obtida usando o filtro das densidades ponderadas (Figura 6.22) é formada por três segmentos de reta, enquanto que, na placa encontrada usando o filtro de Heaviside (Figura 6.23), essa barra é curva.

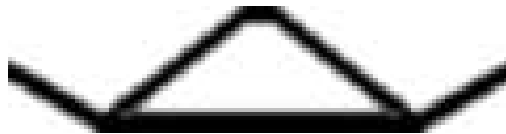


Figura 6.19: Placa do Exemplo 2 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PLS.

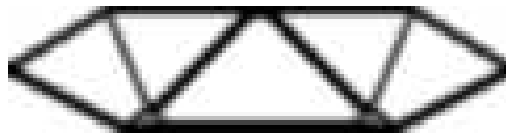


Figura 6.20: Placa do Exemplo 2 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PLPS e da PQS diagonal.

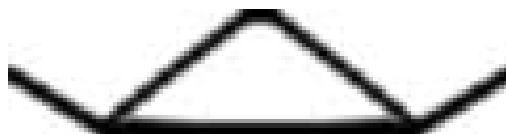


Figura 6.21: Placa do Exemplo 2 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para os três métodos.

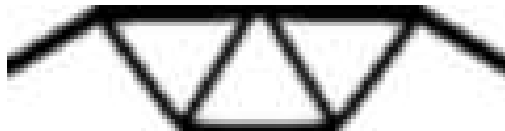


Figura 6.22: Placa do Exemplo 2 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.

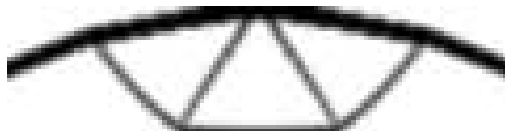


Figura 6.23: Placa do Exemplo 2 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para os três métodos.

6.5 Resultados para o Exemplo 3

A Tabela 6.3 mostra os resultados obtidos para a placa biengastada do Exemplo 3. O raio de aplicação dos filtros, r_{min} , é igual a 2,0 elementos, e o ponto inicial escolhido é $\rho_i^{(0)} = 0,25$, $i = 1, \dots, 2500$.

Analisando a Tabela 6.3, observamos que, quando a placa esteve submetida a grandes deslocamentos, os valores da função objetivo foram bastante parecidos para os dois filtros aplicados. Constatamos que a PLPS teve um desempenho bastante superior em relação aos outros dois algoritmos. Com efeito, no caso do filtro das densidades ponderadas, a PLPS precisou de apenas 30,6% do tempo gasto pela PLS para encontrar a solução ótima. Já quando o filtro de Heaviside é aplicado, esse percentual foi de 66,7%. O número de iterações efetuadas pela PLPS e pela PQS diagonal foram semelhantes, porém o tempo gasto pela PQS diagonal para resolver os problemas foi maior.

Para as estruturas submetidas a pequenos deslocamentos, notamos que, tanto para o filtro das densidades ponderadas quanto para o filtro de Heaviside, o número de iterações internas e externas efetuadas pela PLPS e pela PQS diagonal foram bastante semelhantes, embora a PLPS tenha consumido apenas metade do tempo da PQS diagonal. Por sua vez, a PLS realizou um número de iterações um pouco maior que os outros dois métodos, mas o tempo consumido por ela foi menor.

As Figuras 6.24-6.27 mostram que a topologia ótima da placa submetida a pequenos deslocamentos é totalmente diferente daquela obtida para grandes deslocamentos. Note que, no caso de pequenos deslocamentos, a placa obtida com o filtro das densidades ponderadas possui duas barras horizontais em sua base, enquanto naquela encontrada com o filtro de Heaviside tais barras estão ausentes.



Figura 6.24: Placa do Exemplo 3 sujeita a pequenos deslocamentos com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.



Figura 6.25: Placa do Exemplo 3 sujeita a pequenos deslocamentos com o filtro de Heaviside, para os três métodos.

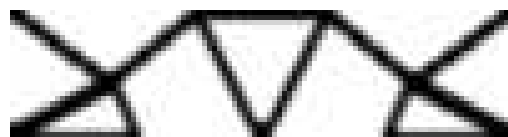


Figura 6.26: Placa do Exemplo 3 sujeita a grandes deslocamentos com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.

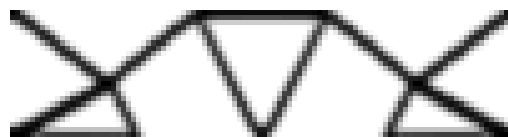


Figura 6.27: Placa do Exemplo 3 sujeita a grandes deslocamentos com o filtro de Heaviside, para os três métodos.

Exemplo 3 - Placa biengastada			
Grandes Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$8,8644 \times 10^1$	$8,8695 \times 10^1$	$8,8644 \times 10^1$
iterações externas	900	3625	887
iterações internas	990	3743	1022
tempo (seg.)	90,40	295,65	121,40
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$1,2195 \times 10^2$	$1,2183 \times 10^2$	$1,2195 \times 10^2$
iterações externas	1262	2693	1391
iterações internas	1363	2742	1579
tempo (seg.)	119,14	178,68	180,59
Pequenos Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$8,0450 \times 10^1$	$8,0451 \times 10^1$	$8,0446 \times 10^1$
iterações externas	567	715	578
iterações internas	639	773	677
tempo (seg.)	21,31	17,49	41,29
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$1,0134 \times 10^2$	$1,0134 \times 10^2$	$1,0134 \times 10^2$
iterações externas	1029	1222	1034
iterações internas	1132	1268	1189
tempo (seg.)	37,23	28,44	74,82

Tabela 6.3: Resultados obtidos para a placa do Exemplo 3.

6.6 Resultados para o Exemplo 4

Os resultados obtidos para a topologia ótima da viga biengastada do Exemplo 4 são mostrados na Tabela 6.4. O raio de aplicação dos filtros, r_{min} , é igual a 2,0 elementos. O ponto inicial escolhido foi $\rho_i^{(0)} = 0, 2, i = 1, \dots, 3200$.

Pela Tabela 6.4, observamos que, no caso de grandes deslocamentos em conjunto com o filtro das densidades ponderadas, o número de iterações efetuadas pela PLPS e pela PQS diagonal foi bastante parecido. Contudo, para encontrar a solução ótima, a PLPS realizou apenas 65,2% do total de iterações efetuadas pela PLS. Quando o filtro de Heaviside foi aplicado, a PLPS encontrou a solução ótima no menor tempo, embora o número de iterações internas e externas tenha sido semelhante para os três algoritmos.

Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos, notamos que, quando o filtro

das densidades ponderadas foi usado, os três algoritmos exigiram um número de iterações bastante parecido para encontrar a solução ótima. Apesar disso, a PLS obteve a solução no menor tempo. Já com o filtro de Heaviside, notamos que, apesar de a PLPS ter resolvido o problema gastando apenas 67,5% do total de iterações efetuadas pela PLS, este último consumiu um tempo um pouco menor que a PLPS.

Analisando as Figuras 6.28-6.31, notamos que a viga submetida a grandes deslocamentos tem um formato totalmente diferente daquela sujeita à pequenos deslocamentos. Neste exemplo em particular, as estruturas sujeitas a grandes deslocamentos obtidas com o filtro de Heaviside (Figura 6.31) diferem daquelas obtidas usando o filtro das densidades ponderadas (Figura 6.30).

Exemplo 4 - Viga biengastada			
Grandes Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$6,7865 \times 10^1$	$6,8010 \times 10^1$	$6,7816 \times 10^1$
iterações externas	1219	1929	1159
iterações internas	1281	1965	1296
tempo (seg.)	139,11	178,54	191,64
Heaviside			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$9,1447 \times 10^1$	$9,1447 \times 10^1$	$9,1487 \times 10^1$
iterações externas	1092	1428	1359
iterações internas	1181	1487	1528
tempo (seg.)	127,67	139,04	223,39
Pequenos Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$6,8231 \times 10^1$	$6,8231 \times 10^1$	$6,8231 \times 10^1$
iterações externas	892	998	873
iterações internas	965	1047	995
tempo (seg.)	38,86	26,80	74,55
Heaviside			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$1,0563 \times 10^2$	$1,0563 \times 10^2$	$1,0582 \times 10^2$
iterações externas	1186	1834	1269
iterações internas	1270	1882	1414
tempo (seg.)	51,87	49,47	114,26

Tabela 6.4: Resultados obtidos para a viga do Exemplo 4.

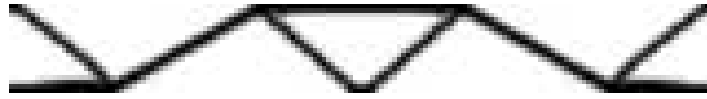


Figura 6.28: Viga do Exemplo 4 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.



Figura 6.29: Viga do Exemplo 4 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para os três métodos.

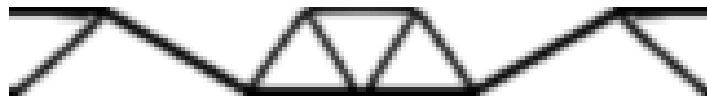


Figura 6.30: Viga do Exemplo 4 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.



Figura 6.31: Viga do Exemplo 4 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para os três métodos.

6.7 Resultados para o Exemplo 5

Na Tabela 6.5, apresentamos os resultados obtidos para a viga MBB do Exemplo 5. O raio de aplicação dos filtros, r_{min} , é igual a 3,5 elementos, e o ponto inicial escolhido foi $\rho_0^{(i)} = 0,5$, $i = 1, \dots, 2400$.

Observamos na Tabela 6.5 que, no caso de grandes deslocamentos com o filtro das densidades ponderadas, a PLPS e a PQS diagonal efetuaram menos iterações que a PLS. Entretanto, o tempo gasto pela PLPS é 25,5% menor do que aquele gasto pela PQS diagonal e 9,4% menor que o consumido pela PLS. Quando aplicamos o filtro de Heaviside, a PLPS teve um desempenho bastante superior ao da PLS e ao da PQS diagonal. De fato, o tempo consumido pela PLPS para resolver o problema correspondeu a somente 54,1% do tempo gasto pela PLS e a 76,7% do tempo gasto pela PQS diagonal.

Para as estruturas submetidas a pequenos deslocamentos, observamos que o número de iterações necessárias para convergir para a solução ótima variou pouco entre os algoritmos, para os dois filtros aplicados. A PLS gastou o menor tempo para encontrar essas soluções.

Observando as Figuras 6.32-6.35, podemos notar que as vigas MBB sujeitas a grandes deslocamentos possuem algumas barras a mais do que aquelas obtidas usando a hipótese de pequenos deslocamentos.



Figura 6.32: Viga MBB do Exemplo 5 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.



Figura 6.33: Viga MBB do Exemplo 5 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.



Figura 6.34: Viga MBB do Exemplo 5 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para os três métodos.



Figura 6.35: Viga MBB do Exemplo 5 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para os três métodos.

Exemplo 5 - Viga MBB			
Grandes Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$6,9992 \times 10^4$	$6,9903 \times 10^4$	$7,0018 \times 10^4$
iterações externas	805	1047	809
iterações internas	914	1130	946
tempo (seg.)	84,09	92,82	112,80
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$7,3741 \times 10^4$	$7,3818 \times 10^4$	$7,3731 \times 10^4$
iterações externas	1154	2754	1090
iterações internas	1299	2857	1297
tempo (seg.)	120,78	223,18	157,48
Pequenos Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$6,2344 \times 10^4$	$6,2344 \times 10^4$	$6,2434 \times 10^4$
iterações externas	908	1018	899
iterações internas	1012	1088	1045
tempo (seg.)	31,73	22,74	59,65
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	$6,6063 \times 10^4$	$6,6063 \times 10^4$	$6,6063 \times 10^4$
iterações externas	954	1190	977
iterações internas	1077	1263	1153
tempo (seg.)	34,21	27,47	66,24

Tabela 6.5: Resultados obtidos para a viga MBB do Exemplo 5.

6.8 Resultados para o Exemplo 6

A Tabela 6.6 contém os resultados obtidos para a pinça do Exemplo 6. O raio de aplicação do filtro, r_{min} , é igual a 2,0 elementos. O ponto inicial escolhido foi $\rho_i^{(0)} = 0, 2, \dots, 2880$.

Observando a Tabela 6.6, constatamos que, no caso de grandes deslocamentos em combinação com o filtro das densidades ponderadas, a PLPS gastou apenas 27,2% do tempo gasto pela PLS para encontrar a solução. Com relação à PQS diagonal, esse percentual foi de 65,8%. Por outro lado, quando aplicamos o filtro de Heaviside, a PLS gastou o equivalente a 46,4% do tempo total gasto pela PLPS para resolver o problema e, fazendo uma comparação com a PQS diagonal, esse percentual foi de 74,1%.

Quando consideramos que a pinça está sujeita a pequenos deslocamentos, a PQS

diagonal resolveu o problema efetuando o menor número de iterações com os dois filtros adotados. Entretanto, quando o filtro das densidades ponderadas foi usado, o tempo gasto por esse algoritmo foi 62,2% maior que o da PLPS e 53,2% maior que o da PLS. Já com o filtro de Heaviside, a PLPS gastou apenas 51,2% do tempo gasto pela PLS para encontrar a solução ótima, e 57,6% do tempo gasto pela PQS diagonal.

Notamos que os valores da função objetivo foram bastante parecidos em todos os testes realizados com a pinça, independentemente do tipo de filtro utilizado e da hipótese feita sobre os deslocamentos. Entretanto, como podemos observar nas Figuras 6.36-6.47, embora não haja diferenças significativas para as topologias ótimas das pinças com pequenos ou grandes deslocamentos, o formato ótimo da pinça varia de acordo com o algoritmo usado.

Exemplo 6 - Pinça apoiada no canto superior esquerdo			
Grandes Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-1,4022	-1,4092	-1,4172
iterações externas	978	4257	1167
iterações internas	1149	4618	1377
tempo (seg.)	198,62	730,87	302,05
Heaviside			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-1,3979	-1,3959	-1,3937
iterações externas	2705	1397	1281
iterações internas	3109	1592	1536
tempo (seg.)	539,23	250,38	338,11
Pequenos Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-1,4071	-1,4117	-1,4280
iterações externas	1124	1842	950
iterações internas	1304	1979	1124
tempo (seg.)	68,50	72,54	111,14
Heaviside			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-1,3939	-1,4078	-1,3987
iterações externas	1256	3975	1167
iterações internas	1472	4161	1391
tempo (seg.)	78,83	153,92	136,81

Tabela 6.6: Resultados obtidos para a pinça do Exemplo 6.



Figura 6.36: Pinça do Exemplo 6 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PLS.



Figura 6.37: Pinça do Exemplo 6 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PLS.



Figura 6.38: Pinça do Exemplo 6 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PLPS.



Figura 6.39: Pinça do Exemplo 6 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PLPS.



Figura 6.40: Pinça do Exemplo 6 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PQS diagonal.



Figura 6.41: Pinça do Exemplo 6 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, obtida através da PQS diagonal.



Figura 6.42: Pinça do Exemplo 6 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside, obtida através da PLS.

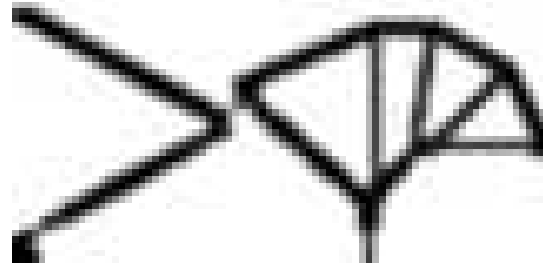


Figura 6.43: Pinça do Exemplo 6 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, obtida através da PLS.

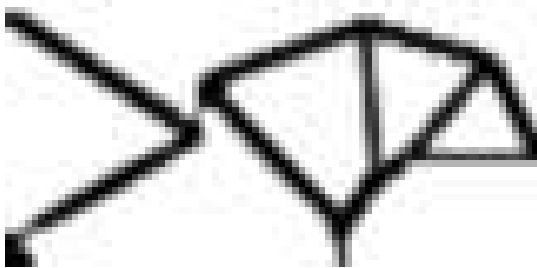


Figura 6.44: Pinça do Exemplo 6 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside, obtida através da PLPS.



Figura 6.45: Pinça do Exemplo 6 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, obtida através da PLPS.

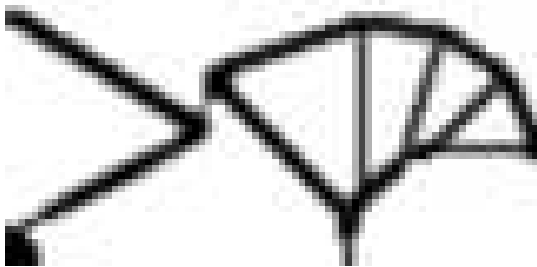


Figura 6.46: Pinça do Exemplo 6 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside, obtida através da PQS diagonal.

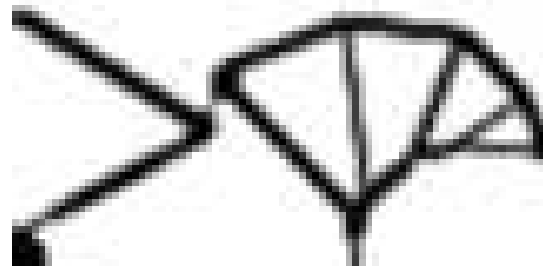


Figura 6.47: Pinça do Exemplo 6 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, obtida através da PQS diagonal.

6.9 Resultados para o Exemplo 7

Os resultados obtidos para a pinça do Exemplo 7 encontram-se na Tabela 6.7. O raio de aplicação do filtro, r_{min} , é igual a 2.0 elementos. O ponto inicial escolhido foi $\rho_i^{(0)} = 0, 1, i = 1, \dots, 2912$.

Exemplo 7 - Pinça engastada na lateral esquerda			
Grandes Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-0,1852	-0,1849	-0,1823
iterações externas	1588	2918	904
iterações internas	1854	3277	1077
tempo (seg.)	284,56	516,79	227,15
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-0,1829	-0,1847	-0,1829
iterações externas	1131	5556	1073
iterações internas	1340	6440	1294
tempo (seg.)	231,43	989,12	266,82
Pequenos Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-0,1848	-0,1848	-0,1823
iterações externas	622	924	574
iterações internas	685	970	673
tempo (seg.)	35,41	35,32	63,79
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-0,1849	-0,1844	-0,1829
iterações externas	991	1000	858
iterações internas	1089	1076	1010
tempo (seg.)	56,49	42,52	90,15

Tabela 6.7: Resultados obtidos para a pinça do Exemplo 7.

Analisando a Tabela 6.7, constatamos que, quando consideramos a hipótese de grandes deslocamentos, a PLPS teve um desempenho bastante superior ao da PLS para os dois filtros adotados. Quando aplicamos o filtro das densidades ponderadas, a PLPS gastou somente 55,1% do tempo total gasto pela PLS para convergir para a solução ótima do problema. Entretanto, dentre os três algoritmos, a PQS diagonal resolveu o problema gastando o menor tempo e o menor número de iterações externas e internas.

Já com o filtro de Heaviside, a PLPS precisou de apenas 23,4% do tempo gasto pela PLS para encontrar a solução ótima. A PQS diagonal efetuou um número um pouco menor de iterações que a PLPS, embora tenha gasto um tempo um pouco maior.

Com relação aos mecanismos obtidos com a hipótese de pequenos deslocamentos, notamos que a PQS diagonal resolveu os problemas efetuando o menor número de iterações, embora tenha gasto um tempo bem maior do que os outros dois métodos. Observamos que, quando o filtro das densidades ponderadas é usado, o tempo gasto pela PLPS e pela PLS foi praticamente o mesmo, embora a PLS tenha efetuado mais iterações que a PLPS. Já para o filtro de Heaviside, a PLS consumiu apenas 75,2% do tempo gasto pela PLPS.

As Figuras 6.48-6.51 mostram as topologias ótimas da pinça. Podemos notar que, neste exemplo, os mecanismos obtidos usando a hipótese de pequenos e grandes deslocamentos são idênticos.



Figura 6.48: Pinça do Exemplo 7 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.



Figura 6.49: Pinça do Exemplo 7 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro das densidades ponderadas, para os três métodos.



Figura 6.50: Pinça do Exemplo 7 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para os três métodos.



Figura 6.51: Pinça do Exemplo 7 sujeita a grandes deslocamentos, com o filtro de Heaviside, para os três métodos.

6.10 Resultados para o Exemplo 8

Na Tabela 6.8, apresentamos os resultados obtidos para o inversor de deslocamentos do Exemplo 8. O raio de aplicação dos filtros, r_{min} , é 2,0 elementos. O ponto inicial escolhido foi $\rho_i^{(0)} = 0,2$, $i = 1, \dots, 3200$.

Exemplo 8 - Inversor de deslocamentos			
Grandes Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-4,0552	-4,0661	-4,0571
iterações externas	927	1241	817
iterações internas	1086	1368	991
tempo (seg.)	215,80	250,22	260,86
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-4,0393	-4,0532	-4,0531
iterações externas	1035	2541	1547
iterações internas	1194	2759	1849
tempo (seg.)	237,28	519,88	482,94
Pequenos Deslocamentos			
Densidades Ponderadas	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-4,1379	-4,1391	-4,1383
iterações externas	835	964	875
iterações internas	959	1078	1040
tempo (seg.)	42,09	36,42	113,67
Heaviside	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-4,1277	-4,1198	-4,1274
iterações externas	1464	2304	1495
iterações internas	1676	2468	1775
tempo (seg.)	76,62	84,61	190,39

Tabela 6.8: Resultados obtidos para o inversor do Exemplo 8.

Observamos na Tabela 6.8 que, quando consideramos a hipótese de grandes deslocamentos em conjunto com o filtro das densidades ponderadas, a PLPS encontrou a solução ótima gastando o menor tempo, embora a PQS diagonal tenha efetuado o menor número de iterações. Quando o filtro de Heaviside foi aplicado, a PLPS teve um desempenho bastante superior aos outros dois algoritmos. De fato, a PLPS necessitou de apenas 45,6% do tempo total gasto pela PLS para convergir para a solução ótima.

Com relação à PQS diagonal, esse percentual correspondeu a 49,1%.

No caso de pequenos deslocamentos com o filtro das densidades ponderadas, o número de iterações efetuadas pelos três algoritmos não variou muito. Neste caso, a PLS encontrou a solução no menor tempo. Por outro lado, quando o filtro de Heaviside foi usado, a PLPS obteve a solução ótima gastando menos tempo, e efetuando apenas 67,9% do número de iterações internas realizadas pela PLS. Podemos observar também que o número de iterações efetuadas pela PLPS e pela PQS diagonal foi bastante parecido.

As topologias ótimas do inversor são mostradas nas Figuras 6.52-6.55. Podemos observar que, neste exemplo, os mecanismos obtidos com a hipótese de pequenos e grandes deslocamentos são idênticos.



Figura 6.52: Inversor do Exemplo 8
sujeito a pequenos deslocamentos,
com o filtro das densidades ponderadas,
para os três métodos.

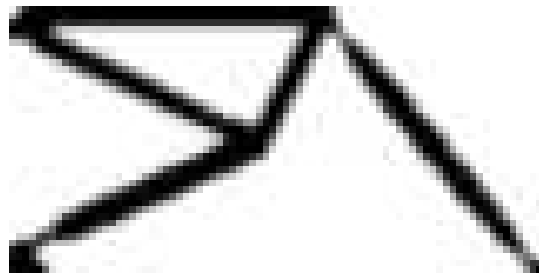


Figura 6.53: Inversor do Exemplo 8
sujeito a grandes deslocamentos,
com o filtro das densidades ponderadas,
para os três métodos.

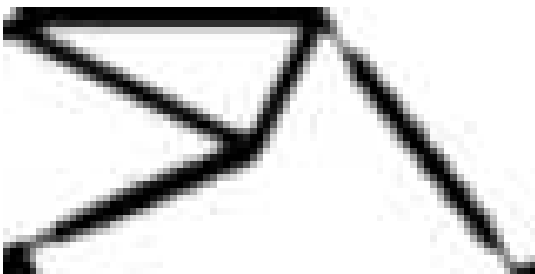


Figura 6.54: Inversor do Exemplo 8
sujeito a pequenos deslocamentos,
com o filtro de Heaviside,
para os três métodos.

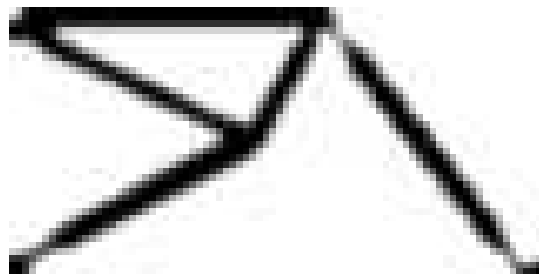


Figura 6.55: Inversor do Exemplo 8
sujeito a grandes deslocamentos,
com o filtro de Heaviside,
para os três métodos.

6.11 Testes adicionais com o filtro de Heaviside

Nesta seção, apresentamos a topologia ótima de duas estruturas e de um mecanismo flexível sujeitos a pequenos deslocamentos com o filtro de Heaviside, usando valores mais altos para o parâmetro β . Assim como nos outros testes, o parâmetro de penalização p do método SIMP foi aumentado gradativamente, iniciando com $p = 1,0$ e terminando com $p = 3,0$, com incrementos de $0,1$. Em [61], Sigmund sugere que β seja aumentado gradativamente, assumindo valores entre 1 e 500. Entretanto, em nossos testes computacionais com estruturas sujeitas a grandes deslocamentos, não foi possível atingir valores de β maiores que 1,5. Sendo assim, o objetivo desta seção é verificar o quanto é possível aumentar o valor de β no caso de pequenos deslocamentos. Após várias experiências, aquela que resultou em melhores resultados foi a seguinte: fixando $p = 1,0$, variamos β entre 1,0 e 10,0, com incrementos de 1,0. O valor de β foi aumentado após 50 iterações, ou quando algum dos critérios de parada estabelecidos na Seção 6.2 era satisfeito. Para $p \geq 1,0$, o valor de β foi fixado em 10,0, e também adotamos os mesmos critérios de parada definidos na Seção 6.2. O valor mínimo para as densidades foi $\rho_{min} = 10^{-3}$, de modo que o escalamento para as densidades definido em (4.63) não foi utilizado. O raio inicial da região de confiança adotado foi $\delta_0 = 0,1$.

A seguir, descreveremos os problemas de otimização topológica testados nesta seção, e apresentaremos os resultados obtidos.

6.11.1 Exemplo 9 - Viga em balanço

Seja o domínio retangular mostrado na Figura 6.56, submetido a uma força vertical $\mathbf{f} = 1 N$ (para baixo) no ponto A (ponto médio da aresta lateral direita do domínio). Consideramos que a aresta lateral esquerda da viga está engastada, impedindo os deslocamentos nodais tanto na horizontal quanto na vertical. Por simplicidade, supomos que a viga tem uma espessura $e = 1 cm$, que o módulo de Young do material que a compõe é $E = 1 N/cm^2$, e que o respectivo coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. O domínio é discretizado em 1800 elementos quadrados. A estrutura ótima deve conter 40% do volume total do domínio.

6.11.2 Exemplo 10 - Viga biapoiada

A Figura 6.57 mostra um domínio retangular onde uma viga bi-apoiada deve ser construída. No ponto médio da base do domínio, é aplicada uma força vertical $\mathbf{f} = 1 N$ (para baixo). No canto inferior esquerdo, existe um apoio que impede os deslocamentos tanto na horizontal quanto na vertical e, no canto inferior direito, um apoio que impede os deslocamentos apenas na vertical. Esta viga tem espessura $e = 1 cm$, o módulo de Young do material que a compõe é $E = 1 N/cm^2$, e o respectivo coeficiente de Poisson

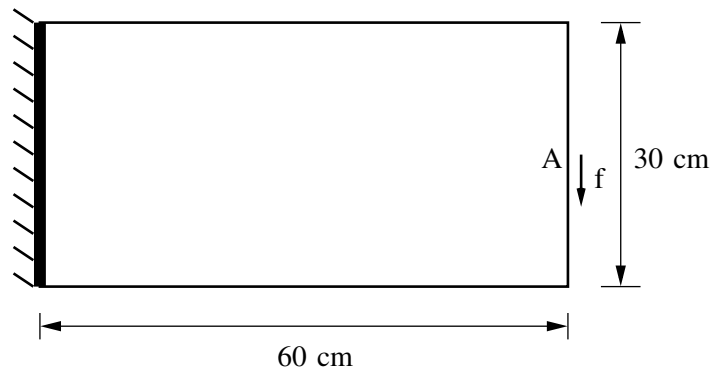


Figura 6.56: Domínio da viga em balanço do Exemplo 9.

é $\nu = 0,3$. O domínio é discretizado em 1800 elementos quadrados. A estrutura ótima deve conter 30% do volume total do domínio.

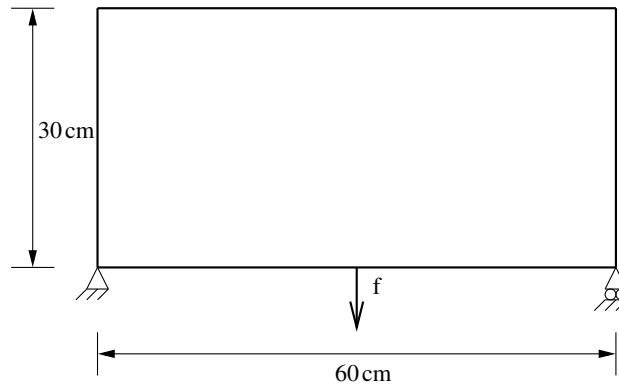


Figura 6.57: Domínio da viga biapoiada do Exemplo 10.

6.11.3 Exemplo 11 - Inversor de deslocamentos

Um domínio retangular onde deve ser construído um inversor de deslocamentos é mostrado na Figura 6.58. Uma vez que esse inversor possui um eixo de simetria horizontal, trabalhamos apenas com a metade superior do seu domínio. A espessura do inversor é $e = 7 \mu m$. O módulo de Young do material que constitui esse inversor é $E = 180 mN/\mu m^2$, e o respectivo coeficiente de Poisson é $\nu = 0,3$. A metade superior do domínio é discretizada em 1800 elementos finitos quadrados. O mecanismo ótimo deve conter 20% do volume total do domínio.

Aplicamos uma força horizontal \mathbf{f}_a de $1 mN$ à esquerda no ponto A (canto inferior esquerdo do domínio). O deslocamento desejado deve ocorrer no ponto B, no sentido contrário à aplicação da força \mathbf{f}_a . Para controlar o deslocamento do inversor no ponto A, colocamos uma mola de rigidez $k_{in} = 1 mN/\mu m$. Com o intuito de representar o esforço de reação sofrido pelo mecanismo, colocamos uma mola de rigidez $k_{out} = 1 mN/\mu m$

no ponto B. Os apoios da base do domínio apenas simulam a simetria da estrutura, impedindo os deslocamentos na vertical. O apoio real do inversor, cujo comprimento é de $22,5 \mu m$ aparece no canto superior esquerdo da Figura 6.11.3. Esse apoio impede os deslocamentos tanto na horizontal quanto na vertical.

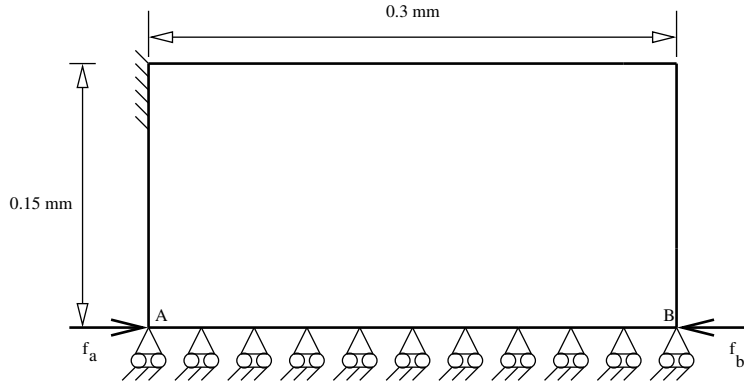


Figura 6.58: Domínio do inversor de deslocamentos do Exemplo 11.

6.11.4 Resultados para os Exemplos 9, 10 e 11

A Tabela 6.9 mostra os resultados obtidos para as topologias ótimas dos Exemplos 9, 10 e 11, sob a hipótese de pequenos deslocamentos, usando o filtro de Heaviside. Para esses três exemplos, o raio de aplicação do filtro r_{min} é igual a 2,0 elementos. Para a viga em balanço, o ponto inicial escolhido foi $\rho_i^{(0)} = 0,4$, $i = 1, \dots, 1800$. No caso da viga bi-engastada, tomamos $\rho_i^{(0)} = 0,3$, $i = 1, \dots, 1800$. Finalmente, para o inversor de deslocamentos, escolhemos $\rho_i^{(0)} = 0,2$, $i = 1, \dots, 1800$.

Observando a Tabela 6.9, constatamos que a PLPS convergiu para a solução ótima gastando o menor tempo nos três exemplos testados nesta seção. Entretanto, nos casos da viga biapoiada e do inversor, a PQS diagonal resolveu os problemas efetuando o menor número de iterações. Em comparação ao tempo total gasto pela PLS, a PLPS gastou o correspondente a 41,8% para a viga em balanço, a 53,5% no caso da viga biapoiada e 64,1% para o inversor. Agora, em comparação ao tempo total gasto pela PQS diagonal, a PLPS consumiu o equivalente a 44,4% no caso da viga em balanço, 69,4% para a viga biapoiada e 65,7% no caso do inversor.

Analisando as Figuras 6.59, 6.60 e 6.61, podemos notar que a redução de elementos com densidades intermediárias produzida pelo aumento do valor do parâmetro β do filtro de Heaviside foi mais expressiva para a viga em balanço.

Em nossos experimentos, constatamos que, para $\beta > 10$, os métodos falhavam em obter o passo tangente. O passo normal era recusado várias vezes na primeira iteração. Com isso, a norma do passo ficava muito pequena, e os algoritmos eram interrompidos.

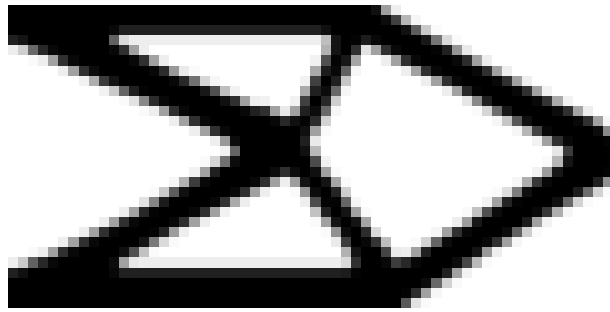


Figura 6.59: Viga em balanço do Exemplo 9 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside.

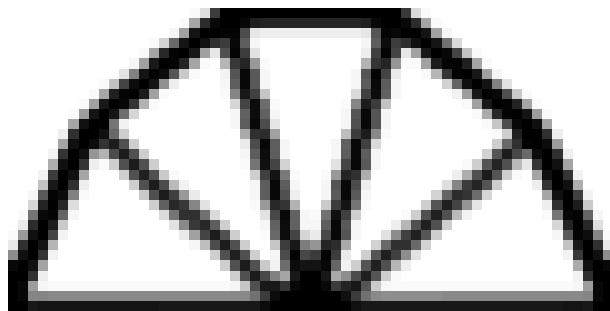


Figura 6.60: Viga biarpoiada do Exemplo 10 sujeita a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside.

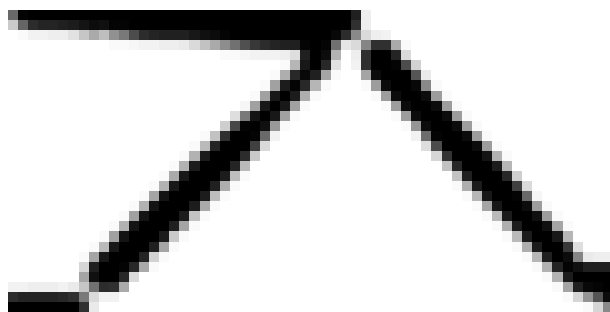


Figura 6.61: Inversor do Exemplo 11 sujeito a pequenos deslocamentos, com o filtro de Heaviside.

Exemplo 9 - Viga em balanço			
	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	84,5223	84,2592	84,0881
iterações externas	1476	5524	1841
iterações internas	1637	5715	2129
tempo (seg.)	41,48	99,27	93,46
Exemplo 10 - Viga biapoçada			
	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	28,0850	28,1804	28,0811
iterações externas	2766	7987	2163
iterações internas	2971	8108	2437
tempo (seg.)	76,14	142,32	109,75
Exemplo 11 - Inversor de deslocamentos			
	PLPS	PLS	PQS diag.
função objetivo	-0,4289	-0,4337	-0,4251
iterações externas	3557	7295	2428
iterações internas	4039	8200	2765
tempo (seg.)	91,30	142,48	138,99

Tabela 6.9: Resultados obtidos para os Exemplos 9, 10 e 11, usando o filtro de Heaviside.

6.12 Perfil de desempenho dos algoritmos

Nesta seção, os resultados obtidos são apresentados de maneira sintetizada e simultânea usando o perfil de desempenho (*performance profile*), proposto por Dolan e Moré [25], que tem o objetivo de tornar facilitar a comparação entre algoritmos que são usados para resolver um determinado conjunto de problemas, com relação à eficiência e à robustez. A seguir, descreveremos brevemente como funciona esse recurso, seguindo o texto de [25].

Considere um conjunto de algoritmos \mathcal{S} e um conjunto de problemas \mathcal{P} . Suponhamos que \mathcal{S} tenha n_s algoritmos e que \mathcal{P} tenha n_p problemas. Para cada problema p e cada algoritmo s , definimos

$$t_{p,s} = \text{tempo gasto para resolver o problema } p \text{ usando o algoritmo } s.$$

Tendo em mãos $t_{p,s}$, definimos o fator de desempenho

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min \{t_{p,s}, \forall s \in \mathcal{S}\}}. \quad (6.3)$$

Escolhemos um parâmetro $r_M \geq r_{p,s}$ suficientemente grande tal que $r_{p,s} = r_M$ se e somente se o algoritmo s não resolve o problema p .

Dado um algoritmo $s \in \mathcal{S}$, definimos uma função $\rho_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ não decrescente e constante por partes que mede o fator de desempenho de s para cada problema de \mathcal{P} . Essa função é dada por

$$\rho_s(\tau) = \frac{\#\{p \in \mathcal{P} \mid r_{p,s} \leq \tau\}}{n_p}, \quad (6.4)$$

onde $\#(C)$ denota a cardinalidade de um conjunto C .

O valor de $\rho_s(1)$ indica a probabilidade de que o algoritmo s resolva os problemas de \mathcal{P} no menor tempo em relação a todos os outros algoritmos de \mathcal{S} . Dessa forma, $\rho_s(1)$ mede a eficiência do algoritmo s . Para verificar a robustez do algoritmo s , basta encontrar τ^* para o qual tem-se $\rho_s(\tau^*) = 1$. Quando isso acontece para $\tau^* < r_M$, o algoritmo s resolve todos os problemas de \mathcal{P} . Logo, quanto menor for τ^* , mais robusto é o algoritmo s .

Nossos gráficos do perfil de desempenho incluem os 35 problemas de otimização topológica apresentados nesse capítulo. O conjunto de problemas é composto por 5 estruturas e 3 mecanismos flexíveis, aos quais aplicamos 2 tipos de filtros, considerando as hipóteses de pequenos e grandes deslocamentos. Além disso, temos as 3 estruturas da Seção 6.11, para as quais consideramos apenas pequenos deslocamentos e usamos somente o filtro de Heaviside.

A seguir, apresentamos uma análise em relação ao tempo gasto pelos algoritmos para resolver os problemas e também em relação aos valores da função objetivo encontrados por cada método.

6.12.1 Análise com relação ao tempo

As Figuras 6.62-6.66 mostram o perfil de desempenho dos algoritmos testados em relação ao tempo, considerando alguns cenários possíveis. Na Figura 6.62, levamos em conta apenas os 22 problemas de otimização topológica de estruturas. No perfil de desempenho da Figura 6.63, consideramos somente os 13 problemas de otimização topológica de mecanismos flexíveis. Já na Figura 6.64, apresentamos o perfil de desempenho levando em conta todos os problemas. Nas Figuras 6.65 e 6.66, fizemos uma análise do tempo gasto pelos algoritmos em relação ao filtro adotado. O perfil de desempenho associado aos resultados obtidos para os 16 problemas usando o filtro das densidades ponderadas é mostrado na Figura 6.65. Finalmente, na Figura 6.66, apresentamos o perfil de desempenho considerando apenas os 19 problemas nos quais o filtro de Heaviside foi aplicado.

Dentre os três algoritmos testados neste trabalho, constatamos, pela Figura 6.64, que a PLPS é o mais eficiente. É importante observar que todos os métodos de otimização

testados conseguiram resolver todos os problemas de otimização topológica (ou seja, em todos os problemas, obtivemos $\|g_P(\mathbf{x}^{(k)})\|_\infty < 10^{-3}$ na solução ótima aproximada). Assim, podemos concluir que os três métodos são igualmente robustos.

Analisando as Figuras 6.62 e 6.63, podemos constatar que, quando levamos em conta apenas os mecanismos flexíveis, a superioridade da PLPS e a diferença de robustez entre a PQS diagonal e a PLS são mais pronunciadas.

Observando as Figuras 6.65 e 6.66, notamos que a PLPS é um pouco mais eficiente com o filtro das densidades ponderadas em comparação com o filtro de Heaviside. Considerando a PLS, a mesma situação ocorre. Para os dois filtros, a PQS diagonal é o método menos eficiente.

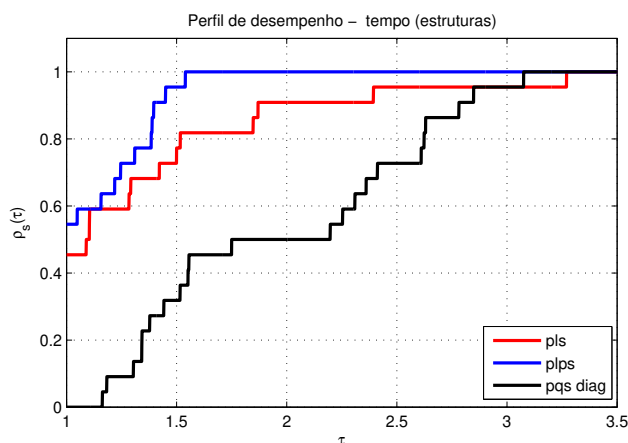


Figura 6.62: Perfil de desempenho em relação ao tempo, considerando apenas os problemas de otimização topológica de estruturas.

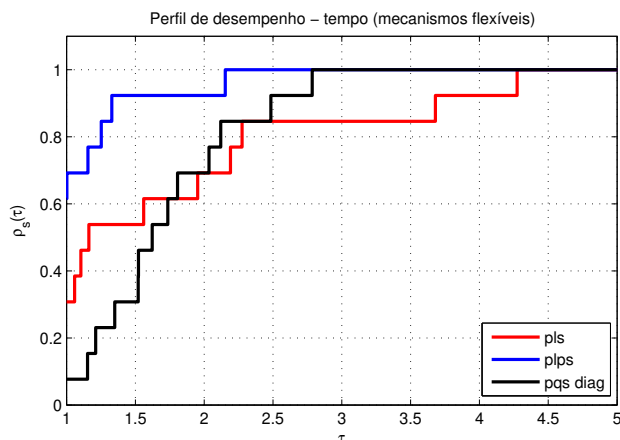


Figura 6.63: Perfil de desempenho em relação ao tempo, considerando apenas os problemas de otimização topológica de mecanismos flexíveis.

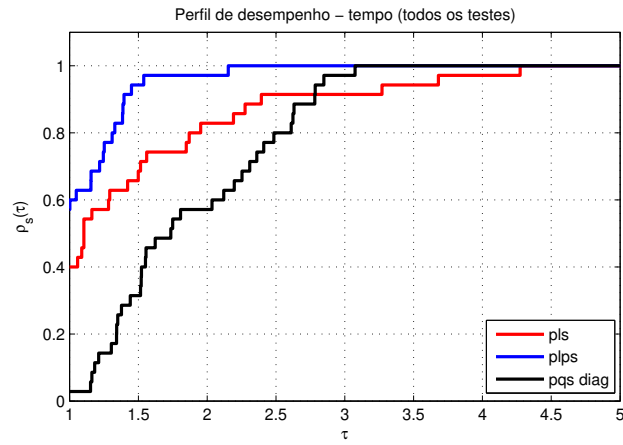


Figura 6.64: Perfil de desempenho em relação ao tempo, considerando todos os problemas de otimização topológica.

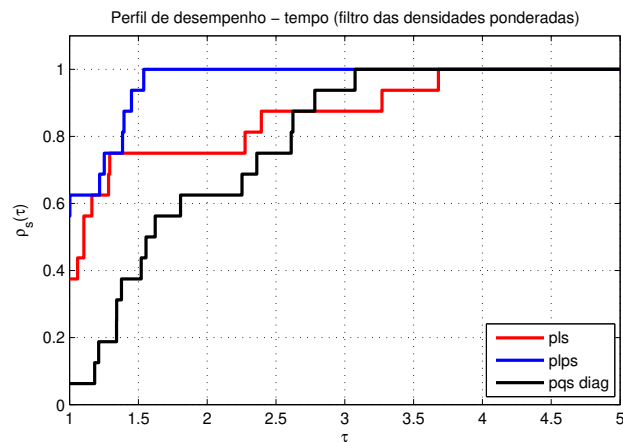


Figura 6.65: Perfil de desempenho em relação ao tempo, considerando apenas o filtro das densidades ponderadas.

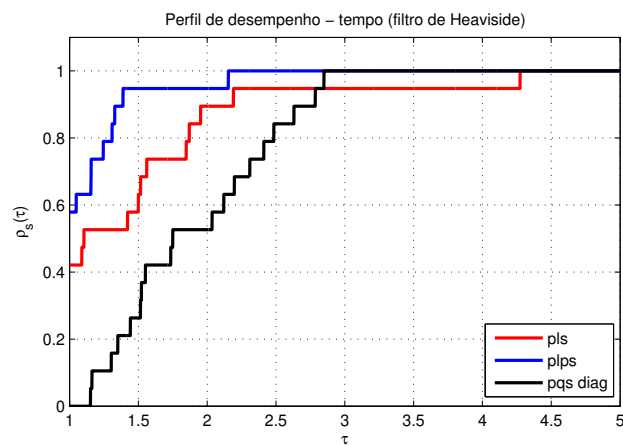


Figura 6.66: Perfil de desempenho em relação ao tempo, considerando apenas o filtro de Heaviside.

6.12.2 Análise dos valores da função objetivo

Para analisarmos os algoritmos em relação aos valores da função objetivo usando os gráficos de perfil de desempenho, é necessário redefinir o fator de desempenho dado por (6.3), substituindo $t_{p,s}$ por $f_{p,s}$, que fornece o valor ótimo da função objetivo do problema p obtido usando o algoritmo s .

Os problemas de otimização topológica testados neste trabalho têm uma característica bastante particular em relação ao sinal do valor ótimo da função objetivo: ele é sempre positivo no caso de estruturas e é sempre negativo no caso de mecanismos flexíveis. Diante disso, apresentaremos separadamente os perfis de desempenho em relação à função objetivo: um considerando apenas estruturas (Figura 6.67), que totalizam 22 problemas, e outro considerando somente mecanismos flexíveis (Figura 6.68), que perfazem 13 problemas.

Considerando apenas as estruturas, podemos observar pela Figura 6.67 que, na maioria dos casos, a discrepância entre os valores da função objetivo obtidos pelos algoritmos não passou de 0,6%. Em apenas um caso, essa discrepância foi de aproximadamente 17%. Assim, $\rho_s(\tau) = 1$ para todo $\tau \geq \tau^*$, com $\tau^* \approx 1,17$. Verificando as Tabelas 6.1 a 6.5 e 6.9, constatamos que essa variação máxima ocorreu para a placa do Exemplo 2, sujeita a pequenos deslocamentos e quando o filtro das densidades ponderadas foi aplicado. Neste caso, a PLS encontrou o menor valor da função objetivo, e as estruturas obtidas pelos três métodos apresentam diferenças significativas (veja as Figuras 6.19, 6.20 e 6.21). De um modo geral, constatamos que, para estruturas, a PLS encontrou o menor valor da função objetivo na maioria dos problemas.

Levando em conta somente os mecanismos flexíveis, constatamos pela Figura 6.68 que a PLS também conseguiu resolver os problemas obtendo o menor valor da função objetivo em comparação aos outros dois métodos, na maior parte dos casos. A maior discrepância entre os valores ótimos obtidos para a função objetivo é de aproximadamente 2,1% (ou seja, $\rho_s(\tau) = 1$ para todo $\tau \geq \tau^*$, com $\tau^* \approx 1,021$). Examinando as Tabelas 6.6 a 6.9, observamos que essa discrepância máxima ocorreu para o inversor de deslocamentos do Exemplo 11. Entretanto, neste caso, as topologias ótimas encontradas pelos três algoritmos foram idênticas (veja a Figura 6.61).

Analisando as Tabelas 6.1-6.9, podemos perceber que, na maioria dos problemas para os quais a PLPS gastou o menor tempo, o valor da função objetivo obtido por esse algoritmo foi superior ao mínimo encontrado. Por outro lado, se levarmos em consideração apenas os problemas em que a PLPS não foi o algoritmo mais rápido, o valor da função objetivo encontrado pelo algoritmo foi o menor na maioria das vezes. Observa-se, portanto, uma relação inversa entre o tempo de execução do algoritmo e o valor da função objetivo.

Também é importante lembrar que os problemas de otimização topológica possuem

muitos minimizadores locais. Assim, de uma forma geral, não é razoável exigir que os algoritmos obtenham o mesmo valor para a função objetivo, e variações da ordem de 1 %, como as obtidas nesses experimentos, estão dentro do esperado.

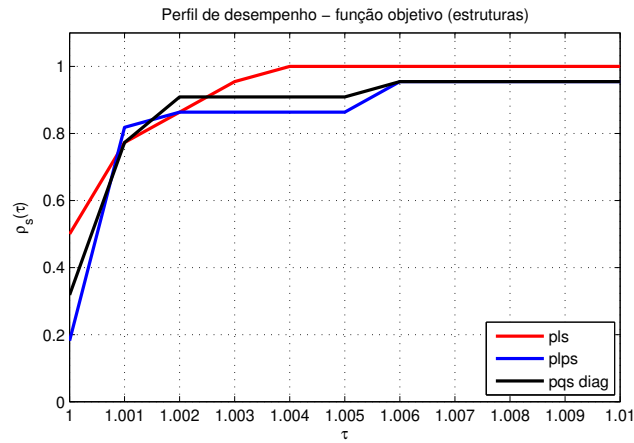


Figura 6.67: Perfil de desempenho em relação aos valores da função objetivo, considerando apenas os problemas de otimização topológica de estruturas.

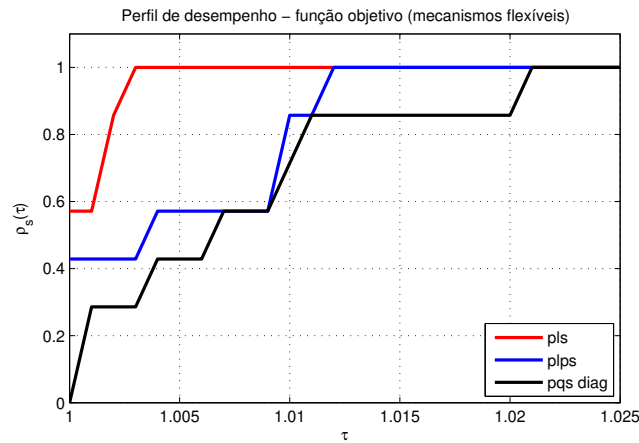


Figura 6.68: Perfil de desempenho em relação aos valores da função objetivo, considerando apenas os problemas de otimização topológica de mecanismos flexíveis.

Conclusões

Neste trabalho, estudamos problemas de otimização topológica de estruturas e de mecanismos flexíveis sob não linearidade geométrica. Um dos grandes desafios encontrados na resolução desses problemas foi o elevado custo computacional exigido no cálculo da função objetivo. De fato, para encontrar o seu valor em cada iteração de um algoritmo de otimização, é necessário resolver um sistema não linear associado às condições de equilíbrio estático da estrutura, através do método de Newton. Por outro lado, no caso de pequenos deslocamentos, a função objetivo requer a solução de um sistema linear. Baseado em alguns testes computacionais, constatamos que, quando a estrutura está sujeita a pequenos deslocamentos, a resolução desses sistemas lineares corresponde a aproximadamente 50% de todo o tempo de resolução do problema. Já no caso de grandes deslocamentos, a resolução dos sistemas lineares referentes ao método de Newton consome aproximadamente 80% do tempo total gasto para encontrar a solução do problema. Além disso, quando a estrutura sofre deformações excessivas, a matriz Jacobiana do sistema não linear torna-se singular, e o método de Newton encontra dificuldades de convergência. Com o intuito de contornar esse problema, testamos três estratégias.

Em primeiro lugar, empregamos uma heurística proposta por Buhl, Pedersen e Sigmund [14], que consiste na eliminação dos nós rodeados por elementos com baixa densidade no critério de convergência do método de Newton. Essa alternativa não foi capaz de solucionar as dificuldades de convergência do método em questão. Em seguida, usamos o método do comprimento de arco [20, 21], que consiste numa modificação do método de Newton na qual se introduz uma nova variável, correspondente à intensidade da carga aplicada à estrutura, e uma nova equação, que faz com que os iterados pertençam a uma determinada curva. Também não foi possível encontrar bons resultados usando esse método, pois ele não convergia para a intensidade correta da carga ao final do processo, além de encarecer a resolução do problema de otimização topológica de um modo geral. Depois, consideramos a possibilidade de combinar o método de Newton com o método do comprimento de arco, acionando-o apenas quando o método de Newton falhava em encontrar a solução do sistema não linear. Ainda assim, não foi possível encontrar resultados satisfatórios. Finalmente, adotamos o escalamento das densida-

des, que nos permitiu superar as dificuldades de convergência do método de Newton. Esse escalamento consiste numa mudança de variáveis, de modo que o intervalo original $[\rho_{min}, 1]$ no qual deve pertencer a densidade de cada elemento é transformado no novo intervalo $[\bar{\rho}_{min}, 1]$. Após várias experiências, a escolha de $\rho_{min} = 0,001$ e $\bar{\rho}_{min} = 0,1$ foi a que produziu os melhores resultados.

Apresentamos um novo algoritmo de otimização, denominado Programação Linear por Partes Sequencial (PLPS), para resolver os problemas de otimização topológica estudados neste trabalho. Este método permite introduzir alguma informação de segunda ordem da função objetivo através de uma aproximação da diagonal de sua matriz Hessiana. Em contrapartida, é preciso resolver um subproblema linear por partes que pode ser convertido em um problema de programação linear. Seguindo a linha adotada em [32], provamos que a PLPS tem a propriedade de convergência global a pontos estacionários. Comparamos o desempenho da PLPS com a versão globalmente convergente da Programação Linear Sequencial (PLS) proposta por Gomes e Senne [32] e com uma versão da Programação Quadrática Sequencial (PQS) na qual usamos uma aproximação diagonal da Hessiana da função objetivo, chamada neste trabalho de PQS diagonal.

Fizemos vários testes computacionais com estruturas e mecanismos flexíveis submetidos a pequenos e a grandes deslocamentos. Constatamos que o desempenho da PLPS foi bastante superior ao da PLS e ao da PQS diagonal no que diz respeito ao tempo gasto e ao número de iterações efetuadas, principalmente na resolução dos problemas onde consideramos a hipótese de grandes deslocamentos. Também observamos que a PLPS é mais eficiente que os outros dois algoritmos. Entretanto, observamos que, em alguns casos, a redução do número de iterações produzida pela PLPS não foi suficiente para diminuir o tempo de resolução dos problemas em relação à PLS. Isso se deve ao fato de que, ao usarmos 3 pontos de interpolação para obter a aproximação linear por partes do termo quadrático $\frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{B}_k \mathbf{s}$, os subproblemas da PLPS possuem o triplo do número de variáveis dos subproblemas da PLS, o que encarece a resolução desses subproblemas. Já em relação à PQS diagonal, a PLPS se mostrou extremamente competitiva, uma vez que o tempo necessário para que a PLPS resolvesse os problemas sempre foi muito menor.

Com relação aos valores ótimos da função objetivo encontrados por cada algoritmo, constatamos que a PLS encontrou o menor valor da função objetivo na maioria dos casos. Apesar disso, em quase todos os testes, a discrepância entre os valores ótimos da função objetivo encontrados pelos três métodos testados foi bastante pequena.

Para várias estruturas estudadas neste trabalho, as topologias ótimas das estruturas obtidas com a hipótese de grandes deslocamentos são completamente diferentes daquelas obtidas quando consideramos pequenos deslocamentos, e estão de acordo com os resultados encontrados na literatura. Isso mostra que a hipótese de grandes deslocamentos

é essencial para a construção de algumas estruturas práticas.

Com o objetivo de eliminar a formação do tabuleiro de xadrez nas estruturas ótimas, testamos o filtro das densidades ponderadas, proposto por Bruns e Tortorelli [9], e o filtro de Heaviside, apresentado por Sigmund [61]. Esses dois filtros são eficazes na eliminação do tabuleiro de xadrez. Entretanto, é necessária uma investigação mais detalhada com relação ao aumento do parâmetro β do filtro de Heaviside. Para estruturas submetidas a grandes deslocamentos, constatamos que se o valor de β for excessivamente alto, o método de Newton apresenta dificuldades de convergência para a solução do sistema não linear, mesmo com o escalamento das densidades. Dessa forma, a alternativa encontrada neste trabalho foi adotar um valor fixo para β , conforme sugerido no trabalho de Guest, Asadpoure e Ha [37].

Em nossos trabalhos futuros, prosseguiremos com o estudo de problemas de otimização topológica de estruturas compostas por um material não linear (ou seja, por um material que produz uma relação não linear entre tensões e deformações) e que, eventualmente, estejam sujeitas a grandes deslocamentos. Também investigaremos a possibilidade de reduzir o custo computacional associado à resolução dos sistemas de equações referentes às condições de equilíbrio estático da estrutura, tanto no caso de pequenos quanto no caso de grandes deslocamentos, inspirados no trabalho de Amir, Bendsøe e Sigmund [2].

Referências Bibliográficas

- [1] Allaire, G.; Francfort, G. A.; *A numerical algorithm for topology and shape optimization*. Topology Design of Structures, NATO ASI Series, 227, 1993, p. 239-248.
- [2] Amir, O.; Bendsøe, M. P.; Sigmund, O.; *Approximate reanalysis in topology optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 78, 2009, p. 1474-1491.
- [3] Assan, A. E.; *Método dos Elementos Finitos - Primeiros Passos*. Campinas: Editora Unicamp, 2. ed., 2003.
- [4] Ball, J. M.; *Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 63, 1977, p. 337-403.
- [5] Batoz, J. L.; Dhatt, G.; *Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14, 1979, p. 1262-1267.
- [6] Bendsøe, M. P.; *Optimal shape design as a material distribution problem*. Structural Optimization, 1, 1989, p. 193-202.
- [7] Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N.; *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71, 1988, p. 197-224.
- [8] Bendsøe, M. P.; Sigmund, O.; *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Berlin; New York: Springer-Verlag, 2004.
- [9] Bruns, T. E.; Tortorelli, D. A.; *An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 57, 2003, p. 1413-1430.
- [10] Bruns, T. E.; *A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 30, 2005, p. 428-436.

- [11] Bruns, T. E.; Tortorelli, D.; *Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, 2001, p. 3443-3459.
- [12] Bruns, T. E.; Sigmund, O.; Tortorelli, D. A.; *Numerical methods for the topology optimization of structures that exhibit snap-through*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 55, 2002, p. 1215-1237.
- [13] Bourdin, B.; *Filters in Topology Optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50, 2001, p. 2143-2158.
- [14] Buhl, T.; Pedersen, C. B. W.; Sigmund, O.; *Stiffness design of geometrically non-linear structures using topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 19, 2000, p. 93-104.
- [15] Byrd, R.; Nocedal, J.; Waltz, R.; Wu, Y.; *On the use of piecewise linear models in nonlinear programming*. Mathematical Programming, Series A, 137, 2013, p. 289-324.
- [16] Byrd, R.; Nocedal, J.; Waltz, R.; Wu, Y.; *An Implementation of an Algorithm for Nonlinear Programming Based on Piecewise Linear Models*. Technical Report, Optimization Center, Northwestern University, 2011.
- [17] Campello, E. M. B.; Pimenta, P. M.; Wriggers, P.; *A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation*. Computational Mechanics, 31, 2003, p. 505-518.
- [18] Ciarlet, P. G.; *Mathematical Elasticity - Volume I: Three-Dimensional Elasticity*. Netherlands: North-Holland, 1988.
- [19] Cook, R. D.; Young, W. C.; *Advanced Mechanics of Materials*. New York: Macmillan, 1985.
- [20] Crisfield, M. A.; *A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through*. Computers and Structures, 13, 1981, p. 55-62.
- [21] Crisfield, M. A.; *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Chichester: John Wiley & Sons, Vol. 1, 2001.
- [22] Davis, T.; *User Guide for CHOLMOD: a sparse Cholesky factorization and modification package*. Dept. of Computer and Information Science and Engineering, Univ. of Florida, Gainesville, FL, 2008.

- [23] Díaz, A. R.; Sigmund, O.; *Checkerboard patterns in layout optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 10, 1995, p. 40-45.
- [24] Du, Y.; Chen, L.; *Topology Optimization for Large-displacement Compliant Mechanisms Using Element Free Galerkin Method*. International Journal of CAD/CAM, 8, 2008, p. 1-10.
- [25] Dolan, E. D.; Moré, J. J.; *Benchmarking optimization software with performance profiles*. Mathematical Programming, Series A, 91, 2002, p. 201-213.
- [26] Etman, L. F. P.; Groenwold, A. A.; Rooda, J. E.; *First-order sequential convex programming using approximate diagonal QP subproblems*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 45, 2012, p. 479-488.
- [27] Fadel, G. M.; Riley, M. F.; Barthelemy, J. M.; *Two point exponential approximation method for structural optimization*. Structural Optimization, 2, 1990, p. 117-124.
- [28] Jog, C. *Distributed-parameter optimization and topology design for nonlinear thermoelasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 132, 1996, p. 117-134.
- [29] Jung, D.; Gea, H. C.; *Topology optimization of nonlinear structures*. Finite Element in Analysis and Design, 40, 2004, p. 1417-1427.
- [30] Gea, C. H.; Luo, J.; *Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities*. Computers and Structures, 79, 2001, p. 1977-1985.
- [31] Gomes, F. A. M.; Maciel, M. C.; Martínez, J. M.; *Nonlinear programming algorithms using trust regions and augmented Lagrangians with nonmonotone penalty parameters*. Mathematical Programming, 84, 1999, p. 161-200.
- [32] Gomes, F. A. M.; Senne, T. A.; *An SLP algorithm and its application to topology optimization*. Computational and Applied Mathematics, 30, 2011, p. 53-89.
- [33] Goulart, E.; *Matrizes Quase-Newton para Problemas de Otimização de Grande Porte*. Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica. Rio de Janeiro-RJ, 2005.
- [34] Goulart, E.; Herskovits, J.; *Sparse Quasi-Newton Matrices for Large Scale Nonlinear Optimization*. Proceedings of the 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, 2005.

- [35] Groenwold, A. A.; Etman, L. F. P.; *A quadratic approximation for structural topology optimization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 82, 2010, p. 505-524.
- [36] Guest, J. K.; Prévost, J. H.; Belytschko, T.; *Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 61, 2004, p. 238-254.
- [37] Guest, J. K.; Asadpoure, A.; Ha, S. H.; *Eliminating beta-continuation from Heaviside projection and density filter algorithms*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 44, 2011, p. 443-453.
- [38] Haftka, R. T.; Grandhi, R. V.; *Structural Shape Optimization - A Survey*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 57, 1986, p. 91-106.
- [39] Hellweg, H. B.; Crisfield, M. A.; *A new arc-length method for handling sharp snapbacks*. Computers and Structures, 66, 1998, p. 705-709.
- [40] Jorge, R. M. N.; *Modelação de Problemas Incompressíveis pelo Método das Deformações Acrescentadas baseado em Modos Compatíveis*. Tese submetida à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica. Porto, Portugal, 1998.
- [41] Lazarov, B. S.; Schevenels, M.; Sigmund, O.; *Robust design of large-displacement compliant mechanisms*. Mechanical Sciences, 2, 2011, p. 175-182.
- [42] Lahuerta, R. D.; Rojas, P. A. M.; Silva, E. C. N.; *Projeto de Estruturas em Regime Não linear Geométrico Utilizando o Método de Otimização Topológica*. Mecânica Computacional, Argentina, 29, 2010, p. 1105-1121.
- [43] Lahuerta, R. D.; *Projeto de estruturas considerando o efeito da não linearidade geométrica utilizando o método de otimização topológica*. Dissertação submetida à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. São Paulo, 2012.
- [44] Lai, W. M.; Rubin, D.; Krempl, E.; *Introduction to Continuum Mechanics*. Amsterdam: Elsevier/Butterworth-Heinemann, 1996.
- [45] Larsen, U. D.; Sigmund, O.; Bowstra, S.; *Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio*. Journal of Microelectromechanical Systems, 6, 1997.

- [46] Lee, H.; Park, G.; *Topology Optimization for Structures With Nonlinear Behavior Using the Equivalent Static Loads Method*. Journal of Mechanical Design, 134, 031004, 2012, p. 1-14.
- [47] Lima, C. R.; *Projeto de Mecanismos Flexíveis Usando o Método de Otimização Topológica*. Dissertação submetida à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia. São Paulo, 2002.
- [48] Luo, Z.; Chen, L.; Yang, J.; Zhang, Y.; Abdel-Malek, K.; *Compliant mechanism design using multi-objective topology optimization scheme of continuum structures*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 30, 2005, p. 142-154.
- [49] Luo, Z.; Tong, L.; *A level set method for shape and topology optimization of large-displacement compliant mechanisms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 76, 2008, p. 862-892.
- [50] Martínez, J. M.; *A note on the theoretical convergence properties of the SIMP method*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 29, 2005, p. 319-323.
- [51] Martínez, J. M.; *Otimização Prática usando o Lagrangiano Aumentado*. IMECC - UNICAMP, Campinas, versão atualizada em 3 de agosto de 2009.
- [52] Min, S.; Kim, Y.; *Topology Optimization of Compliant Mechanism with Geometrical Advantage*. JSME International Journal, Series C, 47-2, 2004.
- [53] Nishiwaki, S.; Frecker, M.; Seungjae, M.; Kikuchi, N.; *Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42, 1998, p. 535-559.
- [54] Ohsaki, M.; Nishiwaki, S.; *Shape design of pin-jointed multistable compliant mechanisms using snapthrough behavior*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 30, 2005, p. 327-334.
- [55] Pedersen, C. B. W.; Buhl, T.; Sigmund, O.; *Topology synthesis of large-displacement compliant mechanisms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50, 2001, p. 2683-2705.
- [56] Pimenta, P. M.; *Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2008.
- [57] Rietz, A.; *Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 21, 2001, p. 159-163.

- [58] Riks, E.; *An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems*. International Journal of Solids and Structures, 15, 1979, p. 524-551.
- [59] Senne, T. A.; *Otimização Topológica de Mecanismos Flexíveis*. Dissertação submetida ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada. Campinas, 2009.
- [60] Sigmund, O.; *On the design of compliant mechanisms using topology optimization*. Mechanics of Structures and Machines, 25, 1997, p. 493-524.
- [61] Sigmund, O.; *Morphology-based black and white filters for topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 33, 2007, p. 401-424.
- [62] Simo, J. C.; Hughes, T. J. R.; *Computational Inelasticity*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [63] Vanderplaats, G. N.; *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications*. New York: Mc-Graw Hill, 1984.
- [64] Wempner, G. A.; *Discrete Approximation Related to Nonlinear Theories of Solids*. International Journal of Solids and Structures, 17, 1971, p. 1581-1599.
- [65] Wu, Y.; *Active Set Algorithms for Large-scale Nonlinear Programming*. PhD thesis, Field of Electrical and Computer Engineering, Northwestern University, Evanston, 2010.
- [66] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z.; *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Amsterdam: Elsevier/Butterworth-Heinemann, Vols. 1 e 2, 2005.