UNICAMP

Elisa Regina dos Santos

A equação de Daugavet para polinômios em espaços de Banach

Campinas

2013

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Elisa Regina dos Santos

A equação de Daugavet para polinômios em espaços de Banach

Orientador: Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pela aluna Elisa Regina dos Santos, e orientada pelo Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

J Mujica

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

Campinas

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Santos, Elisa Regina dos, 1984-
Sa59e A equação de Daugavet para polinômios em espaços de Banach / Elisa Regina dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Jorge Tulio Mujica Ascui.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Daugavet, Equação de. 2. Banach, Espaços de. 3. Polinômios. 4. C-álgebras. I. Mujica Ascui, Jorge Tulio,1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: The Daugavet equation for polynomials on Banach spaces
Palavras-chave em inglês:
Daugavet equation
Banach spaces
Polynomials
C-algebras
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutora em Matemática
Banca examinadora:
Jorge Tulio Mujica Ascui [Orientador]
Ary Orozimbo Chiacchio
Daniela Mariz Silva Vieira
Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
Mary Lilian Lourenço
Data de defesa: 27-02-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 27 de fevereiro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof(a). Dr(a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

Prof(a). Dr(a). DANIELA MARIZ SILVA VIEIRA

Prof(a). Dr(a). MARY LILIAN LOURENÇO

Prof(a). Dr(a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO

aos meus pais

e ao meu esposo

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me guiado ao longo deste caminho e me dado forças para vencer os obstáculos.

Aos meus pais, Inêz e Lauro, por sempre acreditarem em mim, me apoiarem e me ajudarem a alcançar este sonho. Desde criança eles me ofereceram tudo o que podiam e me ensinaram o valor de lutar por aquilo que desejamos. Se hoje escrevo estes agradecimentos foi porque eles me ensinaram a persistir sempre.

Ao meu esposo, Rodrigo, por estar sempre ao meu lado nos momentos de alegria e de tristeza, pela paciência nas horas de incerteza, por me encorajar a não desistir de minhas ideias e por me mostrar que os problemas sempre se resolvem por mais duros que pareçam. Espero estar sempre ao seu lado para para fazê-lo feliz como você me faz.

Ao meu orientador, Jorge Mujica, por me guiar ao longo deste trabalho, pela disponibilidade, pelas sugestões que sempre mostravam uma nova perspectiva para o estudo, por me ensinar muito como professor e orientador, e pela paciência nos momentos de dificuldade.

À minha orientadora de mestrado, Daniela Mariz, com quem iniciei o estudo da equação de Daugavet. Obrigada por ter apresentado esta linha de pesquisa com a qual tenho tido muito prazer em trabalhar.

À minha turma de doutorado, a turma de doutorado mais unida que já conheci.

Muito obrigada pelo trabalho que cada um dos integrantes dedicou para que todos do grupo pudessem passar no exame de qualificação. O semestre em que estudamos juntos foi com certeza um dos mais duros de minha vida com estudante, mas também o de maior aprendizado e que eu jamais poderei esquecer.

Agradeço especialmente ao meu amigo Régis, com quem tive o prazer de dividir as minhas horas de estudo desde o mestrado, pelo amigo maravilhoso que sempre foi e sempre será, pelo coração enorme que possui, por dividir comigo diversos momentos de alegria, por estar sempre a disposição para me ajudar com as minha dúvidas e por sempre confiar em mim como matemática.

À minha amiga Alda, por incentivar a criação do nosso grupo de estudos do doutorado, por ser sempre tão atenciosa e carinhosa, por todos os passeios no shopping, por todos os milk-shakes, por todos os almoços e todos os petit gateaus, por ser hoje uma das minhas melhores amigas e por podermos partilhar do nosso amor por gatinhos.

À minha amiga Manú, por toda a alegria que sempre trouxe para minha sala de estudo. Alguns do predinho provavelmente não gostavam muito quando Manú, Régis, Alda e eu estávamos todos na mesma sala falando ao mesmo tempo, mas estes momentos ficarão sempre em nossa memória.

Às minhas amigas Ingrid e Ana, com quem dividi a minha casa, por serem pessoas tão maravilhosas, por todos os momentos de descontração e alegria, pelo ambiente ótimo que mantinham em nossa casa e por dividir comigo tantos momentos de comemoração ao longo dos últimos anos.

A todos os meus amigos que, estando longe ou bem perto, fizeram parte da minha vida ao longo desta trajetória. Cada um de vocês foi essencial para que eu chegasse até aqui. Não citarei nomes para me certificar de que não esquecerei de ninguém, mas se você é meu amigo sabe que este agradecimento vai para você!

À minha banca, por todas as correções e sugestões que tornaram este trabalho melhor escrito e mais completo.

A todos os professores e funcionários do IMECC, pelo trabalho contínuo e bem feito.

E finalmente, à FAPESP pelo auxílio financeiro, sem o qual este trabalho não teria sido realizado.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o estudo da equação de Daugavet e da equação alternativa de Daugavet para polinômios contínuos em espaços de Banach. Estas equações foram inicialmente definidas para operadores lineares nos trabalhos de I. K. Daugavet [8] e M. Martín e T. Oikhberg [20]. Recentemente Y. S. Choi et al. [5] generalizaram suas definições para funções limitadas em espaços de Banach e estas têm sido estudadas em particular para polinômios e polinômios homogêneos.

Na primeira parte deste trabalho, investigamos tais equações para polinômios em C*-álgebras. Estudamos separadamente os casos em que as C*-álgebras são comutativas e não-comutativas. Nestes casos, obtemos condições necessárias e suficientes sobre tais C*-álgebras para que determinadas classes de polinômios satisfaçam a equação de Daugavet ou a equação alternativa de Daugavet.

Na segunda parte do trabalho, estudamos a estabilidade da propriedade polinomial alternativa de Daugavet sobre somas c_0, ℓ_∞ e ℓ_1 de espaços de Banach. A partir deste estudo obtemos novos exemplos de espaços com a propriedade polinomial alternativa de Daugavet, a saber $L_\infty(\mu, X)$ e $C(K, X)$, onde X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

Abstract

The main purpose of this work is to study the Daugavet equation and the alternative Daugavet equation for continuous polynomials on Banach spaces. These equations were originally defined for linear operators in the works of I. K. Daugavet [8] and M. Martín & T. Oikhberg [20]. Recently Y. S. Choi et al. [5] generalized their definitions for bounded functions on Banach spaces and these have been studied in particular for polynomials and homogeneous polynomials.

In the first part of this work, we investigate such equations for polynomials on C*-algebras. We study separately the cases in which the C*-algebras are commutative and non-commutative. In these cases, we obtain necessary and sufficient conditions on such C*-algebras in order that certain polynomial classes satisfy the Daugavet equation and the alternative Daugavet equation.

In the second part of the work, we study the stability of the polynomial alternative Daugavet property over c_0-, ℓ_∞- and ℓ_1-sums of Banach spaces. From this study, we obtain new examples of spaces with the polynomial alternative Daugavet property, namely $L_\infty(\mu, X)$ and $C(K, X)$, where X has the polynomial alternative Daugavet property.

Sumário

Notações

Neste trabalho, utilizaremos frequentemente as seguintes notações:

$\mathbb{N}$	conjunto dos números inteiros positivos
$\mathbb{N}_0$	conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	corpo dos números complexos
$\mathbb{K}$	corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathbb{T}$	esfera unitária em $\mathbb{K}$
$\mathbb{D}$	disco unitário aberto em $\mathbb{C}$
$\operatorname{Re} z$	parte real de um número complexo z
X, Y	espaços de Banach
B_X	bola unitária fechada em X
S_X	esfera unitária em X
$\mathcal{L}(X, Y)$	espaço das aplicações lineares contínuas de X em Y, 8
X^*	$\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$
X'	espaço das aplicações lineares de X em $\mathbb{K}$
X^m	produto $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{m-\text{vezes}}$
$\mathcal{P}(^m X, Y)$	espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos de X em Y, 9

$\mathcal{P}(^mX)$	$\mathcal{P}(^mX, \mathbb{K})$
$\mathcal{P}(X, Y)$	espaço dos polinômios contínuos de X em Y, 9
$\mathcal{P}(X)$	$\mathcal{P}(X, \mathbb{K})$
$\mathcal{P}_{wk}(X, Y)$	espaço dos polinômios fracamente compactos de X em Y, 10
$\mathcal{P}_f(^mX, Y)$	espaço dos polinômios m-homogêneos de tipo finito de X em Y, 10
$\mathcal{P}_f(X, Y)$	espaço dos polinômios de tipo finito de X em Y, 10
$\mathcal{P}_A(X, Y)$	espaço dos polinômios aproximáveis de X em Y, 11
$\widehat{P}$	extensão de um polinômio de tipo finito P, 10
V	subconjunto aberto não-vazio de X
$\mathcal{H}(V, Y)$	espaço das aplicações holomorfas de V em Y, 11
$\ell_\infty(B_X, Y)$	espaço das funções limitadas de B_X em Y, 13
$\ell_\infty(B_X)$	$\ell_\infty(B_X, \mathbb{K})$
$\ell_\infty(X)$	espaço das sequências limitadas em X
$\ell_1(X)$	espaço das sequências em X cuja somatória das normas dos elementos converge
$c_0(X)$	espaço das sequências em X que convergem a zero
$C_u(B_X, X)$	espaço das funções uniformemente contínuas de B_X em X, 15
$\mathcal{A}_u(B_X, X)$	subespaço das funções em $C_u(B_X, X)$ que são holomorfas no interior de B_X, 15
$C_b(\Omega, X)$	espaço das funções contínuas e limitadas de um espaço de Hausdorff completamente regular Ω em X
$C_b(\Omega)$	$C_b(\Omega, \mathbb{K})$
$C(K, X)$	espaço das funções contínuas de um espaço de Hausdorff compacto K em X
$C(K)$	$C(K, \mathbb{K})$
$C_0(L, X)$	espaço das funções contínuas de um espaço de Hausdorff localmente compacto L em X que se anulam no infinito
$C_w(K, X)$	espaço das funções fracamente contínuas de um espaço de Hausdorff compacto K em X
$C_{w^*}(K, X^*)$	espaço das funções fracamente estrela contínuas de um espaço de Hausdorff compacto K em X^*
$L_\infty(\mu, X)$	espaço das (classes de equivalência de) funções essencialmente limitadas com valores em X
$L_\infty(\mu)$	$L_\infty(\mu, \mathbb{K})$

$L_2[a,b]$	espaço das (classes de equivalência de) funções do intervalo $[a,b]$ em $\mathbb{K}$ cujo quadrado do módulo é integrável
$L_1(\mu, X)$	espaço das (classes de equivalência de) funções Bochner-integráveis com valores em X
$L_1(\mu)$	$L_1(\mu, \mathbb{K})$
$\mathcal{Z}$	subespaço de $\ell_\infty(B_X)$
$\mathcal{Z}^X$	espaço das funções $\Phi : B_X \to X$ tais que $x^* \circ \Phi \in \mathcal{Z}$ para todo $x^* \in X^*$, 14
$\varphi \otimes x_0$	elemento de $\mathcal{Z}^X$ dado por $[\varphi \otimes x_0](x) = \varphi(x)x_0$ para todo $x \in B_X$, onde $\varphi \in \mathcal{Z}$ e $x_0 \in X$, 14
$\Pi(X)$	conjunto $\{(x, x^*) : \ x \in S_X, \ x^* \in S_{X^*}, \ x^*(x) = 1\}$, 14
$V(\Phi)$	imagem numérica de Φ, 15
$v(\Phi)$	raio numérico de Φ, 15
$\mathcal{A}$	álgebra de Banach, 20; C*-álgebra, 21
$S(\mathcal{A})$	espectro de $\mathcal{A}$, 22
$\sigma(a)$	espectro de a em uma C*-álgebra, 22
$\widehat{a}$	transformada de Gelfand de a, 23
a^*	involução de a, 21; elemento do dual topológico de X
U	JB*-tripla, 30
$\mathrm{Sp}(a)$	espectro de a em uma JB*-tripla, 32
$\Lambda(a)$	conjunto $\mathrm{Sp}(a) \cap (0, \infty)$
e	unidade de uma C*-álgebra; tripotente de uma JB*-tripla, 30
$P_j(e)$	projeções de Peirce, 30
$U_j(e)$	imagem de $P_j(e)$, 30
Λ	conjunto de índices
$\mathcal{F}(\Lambda)$	conjunto dirigido de todos os subconjuntos finitos de Λ
$\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{c_0}$	soma c_0 de uma sequência $(X_j)_{j=1}^\infty$ de espaços de Banach, 44
$\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_\infty}$	soma ℓ_∞ de uma sequência $(X_j)_{j=1}^\infty$ de espaços de Banach, 44
$\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_1}$	soma ℓ_1 de uma sequência $(X_j)_{j=1}^\infty$ de espaços de Banach, 45

Introdução

Em 1963, I. K. Daugavet [8] provou que cada operador compacto linear T em $C[0,1]$ satisfaz a equação

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|, \tag{DE}$$

que é hoje conhecida como *equação de Daugavet*. Ao longo dos anos, a validade desta equação foi verificada por diferentes autores para várias classes de operadores em diversos espaços de Banach. Entre outros, mencionamos G. Y. Lozanovskii [18], para o caso dos operadores compactos em $L_1[0,1]$; H. Kamowitz [15], para o caso dos operadores compactos em $C(K)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados; J. R. Holub [12], para o caso dos operadores fracamente compactos em $C[0,1]$; J. R. Holub [13], para o caso dos operadores fracamente compactos em $L_1(\mu)$, onde μ é uma medida σ-finita não-atômica; D. Werner [29], para o caso dos operadores fracamente compactos em $C(K)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados; e T. Oikhberg [25], para o caso dos operadores fracamente compactos em uma C*-álgebra não-atômica. As demonstrações dos casos de J. R. Holub [12], H. Kamowitz [15] e D. Werner [29] também podem ser encontradas em detalhes na dissertação de mestrado de E. R. Santos [27].

Da equação de Daugavet surgiu a definição da propriedade de Daugavet, conforme apresentamos a seguir. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade de Daugavet* se todo operador de posto um em X satisfaz (DE). Segundo V. M. Kadets et al. [14], se um espaço de Banach X tem a propriedade de Daugavet, então todo operador fracamente compacto em X satisfaz (DE). Este resultado facilitou a descoberta de novos espaços onde operadores fracamente compactos satisfazem (DE). Além disto, P. Wojtaszczyk [30] provou com o auxílio deste resultado que a propriedade de Daugavet possui uma certa estabilidade sobre somas ℓ_1 e ℓ_∞. Mais precisamente, se os espaços $(X_j)_{j=1}^\infty$ possuem a propriedade de Daugavet, então $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_1}$ e $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_\infty}$ possuem a propriedade de Daugavet.

Voltando um pouco no tempo, em 1970, J. Duncan et al. [10] provaram que para todo espaço de Hausdorff compacto K, toda medida σ-finita μ e todo operador linear T em $C(K)$ ou em $L_1(\mu)$, a equação

$$\max_{|w|=1} \|\mathrm{Id} + wT\| = 1 + \|T\| \tag{ADE}$$

é satisfeita. A partir de então esta equação passou a ser conhecida como *equação alternativa de Daugavet*.

Fazendo uso da equação alternativa de Daugavet, M. Martín e T. Oikhberg [20] definiram a *propriedade alternativa de Daugavet*, como definimos a seguir. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade alternativa de Daugavet* se todo operador de posto um em X satisfaz (ADE). Neste mesmo artigo, eles provaram que se um espaço de Banach X tem a propriedade alternativa de Daugavet, então todo operador fracamente compacto em X satisfaz (ADE). Com o auxílio deste resultado, eles provaram que uma C*-álgebra tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, suas projeções atômicas são centrais. E também mostraram que para uma sequência de espaços de Banach $(X_j)_{j=1}^\infty$ vale que $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_\infty}$ (ou $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{c_0}$, ou $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_1}$) tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, todo X_j tem a propriedade alternativa de Daugavet.

A equação de Daugavet e a equação alternativa de Daugavet têm se mostrado úteis no tratamento de problemas de teoria da aproximação, no estudo da geometria de espaços de Banach de operadores lineares e na obtenção de resultados topológicos a respeito de espaços de Banach.

Recentemente Y. S. Choi et al. [5] generalizaram a definição da equação de Daugavet e da equação alternativa de Daugavet para funções limitadas em um espaço de Banach X da seguinte forma: se $\ell_\infty(B_X, X)$ é o espaço de Banach de todas funções limitadas de B_X para X, munido com a norma do supremo, dizemos que uma função

$\Phi \in \ell_\infty(B_X, X)$ satisfaz a *equação de Daugavet* se

$$\|\mathrm{Id} + \Phi\| = 1 + \|\Phi\|, \tag{DE}$$

e dizemos que Φ satisfaz a *equação alternativa de Daugavet* se

$$\max_{|w|=1} \|I + w\Phi\| = 1 + \|\Phi\|. \tag{ADE}$$

Estas equações têm sido particularmente estudadas para polinômios. No caso em que todo polinômio de posto um em um espaço de Banach X satisfaz (DE) (resp. (ADE)), dizemos que X tem a *propriedade polinomial de Daugavet* (resp. *propriedade polinomial alternativa de Daugavet*). De acordo com Y. S. Choi et al. [5], se um espaço X tem a propriedade polinomial de Daugavet (resp. propriedade polinomial alternativa de Daugavet), então todo polinômio fracamente compacto em X satisfaz (DE) (resp. (ADE)).

Diversos exemplos de espaços com a propriedade polinomial de Daugavet já são conhecidos. Y. S. Choi et al. [5] provaram que, se Ω é um espaço topológico completamente regular sem pontos isolados, então $C_b(\Omega, X)$ possui a propriedade polinomial de Daugavet. Y. S. Choi et al. [6] mostraram que, se K é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados e μ é uma medida não-atômica, então $C(K,(X,w))$, $C(K,(X^*,w^*))$ e $L_\infty(\mu, X)$ têm a propriedade polinomial de Daugavet. Ainda, M. Martín et al. [19] provaram que $L_1(\mu, X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet, se μ é uma medida não-atômica.

Além disso, segundo Y. S. Choi et al. [6], a propriedade polinomial de Daugavet é estável sobre somas ℓ_∞ e c_0. De fato, estes provaram que se $(X_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência de espaços de Banach, então $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_\infty}$ (ou $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{c_0}$) tem a propriedade polinomial de Daugavet se, e somente se, todo X_j tem a propriedade polinomial de Daugavet.

A seguir descrevemos como este trabalho está organizado.

No Capítulo 1 apresentaremos algumas definições e resultados preliminares sobre polinômios e aplicações holomorfas em espaços de Banach, e exibiremos uma introdução detalhada à equação de Daugavet para operadores e para polinômios. O intuito deste primeiro capítulo é facilitar e motivar a leitura do estudo realizado nos capítulos subsequentes.

O Capítulo 2 e o Capítulo 3 serão destinados ao estudo de polinômios definidos em C*-álgebras. No Capítulo 2 trabalharemos com C*-álgebras comutativas. Iniciaremos com uma breve introdução a C*-álgebras e provaremos que uma C*-álgebra comutativa tem a propriedade polinomial de Daugavet se, e somente se, é não-atômica. Além disso, mostraremos que todo polinômio contínuo em uma C*-álgebra comutativa satisfaz (ADE). No Capítulo 3 estudaremos C*-álgebras não necessariamente comutativas. Apresentaremos primeiramente algumas preliminares sobre JB*-triplas e provaremos que todo polinômio de tipo finito em uma JB*-tripla U satisfaz (DE) (resp. (ADE)), se U não possui tripotentes minimais (resp. se todos os tripotentes minimais de U são centrais). Destes resultados deduziremos os resultados principais deste capítulo. Para uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, provaremos que todo polinômio de tipo finito em $\mathcal{A}$ satisfaz (DE) se, e somente se, $\mathcal{A}$ é não-atômica; e demonstraremos que todo polinômio de tipo finito em $\mathcal{A}$ satisfaz (ADE) se, e somente se, todas as projeções atômicas de $\mathcal{A}$ são centrais.

Por fim, o Capítulo 4 será dedicado ao estudo da estabilidade da propriedade polinomial alternativa de Daugavet sobre somas ℓ_∞, c_0 e ℓ_1. Para uma sequência de espaços de Banach $(X_j)_{j=1}^\infty$, provaremos que $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_\infty}$ (ou $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{c_0}$) tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, todo X_j tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet. E mostraremos que se todo polinômio k-homogêneo de posto um em $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_1}$ satisfaz (DE) (resp. (ADE)), então todo polinômio k-homogêneo de posto um em X_j satisfaz (DE) (resp. (ADE)) para $j = 1, \ldots, \infty$. Fazendo uso desses resultados obteremos exemplos de espaços de funções a valores vetoriais que têm a propriedade polinomial alternativa de Daugavet quando o espaço imagem tem tal propriedade. Para uma medida σ-finita μ, um espaço de Hausdorff compacto K e um espaço de Banach X, provaremos as seguintes afirmações: $L_\infty(\mu, X)$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, μ é não-atômica ou X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet; $C(K, X)$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, K não possui pontos isolados ou X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet; se todo polinômio k-homogêneo de posto um em $L_1(\mu, X)$ satisfaz (DE) (resp. (ADE)), então μ é não-atômica ou todo polinômio k-homogêneo de posto um em X satisfaz (DE) (resp. (ADE)).

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentaremos algumas definições e alguns resultados que facilitarão a leitura do texto.

1.1 Polinômios e aplicações holomorfas

Nesta seção apresentaremos definições e resultados sobre polinômios e aplicações holomorfas em espaços de Banach. Para um estudo mais aprofundado sugerimos a referência [23].

Definição 1.1.1. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{L}_a(^mX, Y)$ o espaço das aplicações m-lineares $A : X^m \to Y$, e denotaremos por $\mathcal{L}(X^m, Y)$ o subespaço das aplicações contínuas de $\mathcal{L}_a(^mX, Y)$. Para cada $A \in \mathcal{L}_a(^mX, Y)$ definimos

$$\|A\| = \sup\left\{\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \ : \ x_j \in X, \ \max_{1\leq j\leq m} \|x_j\| \leq 1\right\}.$$

Por conveniência definimos $\mathcal{L}_a(^0X, Y) = \mathcal{L}(^0X, Y) = Y$. Quando $m = 1$, escreveremos $\mathcal{L}_a(^1X, Y) = \mathcal{L}_a(X, Y)$ e $\mathcal{L}(^1X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$. Quando $Y = \mathbb{K}$, escreveremos

$\mathcal{L}_a(^mX, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_a(^mX)$ e $\mathcal{L}(^mX, \mathbb{K}) = \mathcal{L}(^mX)$. Finalmente, quando $m = 1$ e $Y = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{L}_a(X) = X'$ e $\mathcal{L}(X) = X^*$.

Proposição 1.1.2 ([23], Proposition 1.3). *$\mathcal{L}(^mX, Y)$ é um espaço de Banach com a norma definida anteriormente.*

Exemplo 1.1.3. Podemos construir aplicações multilineares a partir de funcionais lineares da seguinte forma. Dados $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in X'$, definimos $A \in \mathcal{L}_a(^mX, \mathbb{K})$ por

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \varphi_1(x_1) \ \ldots \ \varphi_m(x_m)$$

para todos $x_1, \ldots, x_m \in X$. Observe que ao tomarmos $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in X^*$, obtemos $A \in \mathcal{L}(X^m, \mathbb{K})$.

Definição 1.1.4. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : X \to Y$ é dita um *polinômio m-homogêneo* se existe $A \in \mathcal{L}_a(X^m, Y)$ tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$ para todo $x \in X$. Denotaremos por $\mathcal{P}_a(^mX, Y)$ o espaço vetorial dos polinômios m-homogêneos de X em Y, e denotaremos por $\mathcal{P}(^mX, Y)$ o subespaço dos polinômios contínuos de $\mathcal{P}_a(^mX, Y)$. Para cada $P \in \mathcal{P}_a(^mX, Y)$ definimos

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| \ : \ x \in X, \ \|x\| \leq 1\}.$$

Quando $Y = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{P}_a(^mX, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_a(^mX)$ e $\mathcal{P}(^mX, \mathbb{K}) = \mathcal{P}(^mX)$.

Proposição 1.1.5 ([23], Corollary 2.3). *$\mathcal{P}(^mX, Y)$ é um espaço de Banach com a norma definida anteriormente.*

Definição 1.1.6. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : X \to Y$ é dita um *polinômio de grau menor ou igual a m* se esta pode ser representada como uma soma

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_m,$$

onde $P_k \in \mathcal{P}_a(^kX, Y)$ para $k = 0, 1, \ldots, m$. Denotaremos por $\mathcal{P}_a(X, Y)$ o espaço vetorial dos polinômios de X em Y, e denotaremos por $\mathcal{P}(X, Y)$ o subespaços dos polinômios contínuos de $\mathcal{P}_a(X, Y)$.

Quando $Y = \mathbb{K}$, escreveremos $\mathcal{P}_a(X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}_a(X)$ e $\mathcal{P}(X, \mathbb{K}) = \mathcal{P}(X)$. Claramente $\mathcal{P}(X, Y)$ é um espaço normado com a norma do supremo sobre B_X.

Proposição 1.1.7 ([23], Proposition 2.9)**.** *(a)* $\mathcal{P}_a(X,Y)$ *é a soma direta algébrica dos subespaços* $\mathcal{P}_a({}^mX,Y)$ *com* $m \in \mathbb{N}_0$*.*

(b) $\mathcal{P}(X,Y)$ *é a soma direta algébrica dos subespaços* $\mathcal{P}({}^mX,Y)$ *com* $m \in \mathbb{N}_0$*.*

Proposição 1.1.8 ([23], Exercise 2.N)**.** *Para cada* $P \in \mathcal{P}_a(X,Y)$ *as seguintes condições são equivalentes:*

(a) P *é contínuo;*

(b) P *é limitado em toda bola com raio finito;*

(c) P *é limitado em alguma bola aberta.*

Definição 1.1.9. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Um polinômio $P \in \mathcal{P}(X,Y)$ é dito um *polinômio de posto um* se o subespaço gerado pela imagem de P possui dimensão um.

Definição 1.1.10. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Denotaremos por $\mathcal{P}_{wk}(X,Y)$ o subespaço dos polinômios $P \in \mathcal{P}(X,Y)$ tais que $P(B_X)$ é relativamente fracamente compacto em Y. Os elementos de $\mathcal{P}_{wk}(X,Y)$ são chamados de *polinômios fracamente compactos.*

Definição 1.1.11. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Denotaremos por $\mathcal{P}_f({}^mX,Y)$ o subespaço dos polinômios $P \in \mathcal{P}({}^mX,Y)$ que podem ser escritos na forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i[x_i^*(x)]^m \quad \text{para todo } x \in X,$$

onde $y_i \in Y$ e $x_i^* \in X^*$. Denotaremos por $\mathcal{P}_f(X,Y)$ a soma algébrica dos espaços $\mathcal{P}_f({}^mX,Y)$ com $m \in \mathbb{N}_0$. Cada $P \in \mathcal{P}_f(X,Y)$ é dito um *polinômio de tipo finito.*

Proposição 1.1.12. *Todo* $P \in \mathcal{P}_f(X,Y)$ *possui uma extensão* $\widehat{P} \in \mathcal{P}_f(X^{**},Y^{**})$ *satisfazendo* $\|\widehat{P}\|_{X^{**}} = \|P\|_X$*.*

Demonstração. Como P é um polinômio de tipo finito, temos

$$P(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i[x_i^*(x)]^{m_i} \quad \text{para todo } x \in X,$$

para algum $y_i \in Y$, $x_i^* \in X^*$ e $m_i \in \mathbb{N}_0$. Defina $\widehat{P} : X^{**} \to Y^{**}$ por

$$\widehat{P}(x^{**}) = \sum_{i=1}^{k} y_i [x^{**}(x_i^*)]^{m_i},$$

onde y_i é visto como um elemento de Y^{**}. Então $\widehat{P}$ pertence a $\mathcal{P}_f(X^{**}, Y^{**})$ e é uma extensão de P. Além disso, $\widehat{P}$ é fracamente estrela contínuo. Já que $B_{X^{**}}$ é fracamente estrela compacta pelo Teorema de Alaoglu, segue que existe $x_0^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que

$$\|\widehat{P}(x_0^{**})\| = \|\widehat{P}\|_{X^{**}}.$$

Agora, pelo Teorema de Goldstine, existe uma sequência $(x_n) \subset B_X$ que converge para x_0^{**} na topologia fraca estrela. Daí,

$$\|\widehat{P}\|_{X^{**}} = \|\widehat{P}(x_0^{**})\| = \lim_n \|P(x_n)\| \leq \|P\|_X.$$

Logo, $\|\widehat{P}\|_{X^{**}} = \|P\|_X$. $\square$

Observação 1.1.13. Dados $P, Q \in \mathcal{P}_f(X, Y)$, observe que $\widehat{P+Q} = \widehat{P} + \widehat{Q}$.

Definição 1.1.14. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Denotaremos por $\mathcal{P}_A({}^m X, Y)$ o fecho de $\mathcal{P}_f({}^m X, Y)$ em $\mathcal{P}({}^m X, Y)$ e denotaremos por $\mathcal{P}_A(X, Y)$ a soma algébrica dos espaços $\mathcal{P}_A({}^m X, Y)$ com $m \in \mathbb{N}_0$. Os elementos de $\mathcal{P}_A(X, Y)$ são chamados de *polinômios aproximáveis.*

Para um estudo de $\mathcal{P}_A({}^m X, Y)$ indicamos a referência ([9], Capítulo 2).

Definição 1.1.15. Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$ e seja V um subconjunto aberto de X. Uma aplicação $F : V \to Y$ é dita *holomorfa* ou *analítica* se, para cada $a \in V$, existem uma bola aberta $B(a, r) \subset V$ e uma sequência de polinômios $P_k \in \mathcal{P}({}^k X, Y)$ tais que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x - a)$$

uniformemente para $x \in B(a, r)$. Denotaremos por $\mathcal{H}(V, Y)$ o espaço vetorial das aplicações holomorfas de V em Y. Quando $Y = \mathbb{C}$, escreveremos $\mathcal{H}(V, \mathbb{C}) = \mathcal{H}(V)$.

Proposição 1.1.16 ([23], Example 5.3)**.** $\mathcal{P}(X, Y) \subset \mathcal{H}(X, Y)$.

1.2 A equação de Daugavet para operadores

Nesta seção apresentaremos diversos resultados importantes envolvendo a equação de Daugavet para operadores.

Definição 1.2.1. Seja X um espaço de Banach e seja $T : X \to X$ um operador linear limitado. Dizemos que T satisfaz a *equação de Daugavet* se

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|. \tag{DE}$$

Observemos que sempre vale $\|\mathrm{Id}+T\| \leq 1+\|T\|$, pela desigualdade triangular.

A seguir apresentaremos alguns resultados que nos mostram exemplos de espaços de Banach clássicos cujos operadores fracamente compactos satisfazem a equação de Daugavet.

Definição 1.2.2. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Um conjunto $A \in \Sigma$ é chamado um *átomo* se $\mu(A) > 0$ e para todo $B \subset A$ temos $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. A medida μ é dita *não-atômica* se não possui átomos.

Teorema 1.2.3 ([13], Theorem 1)**.** *Seja μ uma medida σ-finita não-atômica. Então todo operador fracamente compacto em $L_1(\mu)$ satisfaz* (DE)*.*

Teorema 1.2.4 ([29], Theorem 5)**.** *Seja K um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados. Então todo operador fracamente compacto em $C(K)$ satisfaz* (DE)*.*

Exemplo 1.2.5. Os espaços $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ não possuem a propriedade de que todo operador fracamente compacto satisfaz (DE). De fato, basta considerar o operador linear $T = -\mathrm{Id}$. Este operador é fracamente compacto (compacto) e $\|\mathrm{Id} + T\| = 0 < 2 = 1 + \|T\|$.

Definição 1.2.6. Um espaço de Banach X tem a *propriedade de Daugavet* (DP) se todo operador de posto um em X satisfaz (DE).

Teorema 1.2.7 ([14], Theorem 2.3)**.** *Se um espaço de Banach X tem a propriedade de Daugavet, então todo operador fracamente compacto em X satisfaz* (DE)*.*

Proposição 1.2.8. *Sejam X um espaço de Banach, K um espaço de Hausdorff compacto e (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita. Então:*

(a) ([21], Remark 6) *$C(K, X)$ tem a propriedade de Daugavet se, e somente se, K não possui pontos isolados ou X tem a propriedade de Daugavet;*

(b) ([21], Remark 9) *$L_1(\mu, X)$ tem a propriedade de Daugavet se, e somente se, μ é não-atômica ou X tem a propriedade de Daugavet.*

Proposição 1.2.9 ([22], Theorem 5)**.** *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e seja X um espaço de Banach. Então $L_\infty(\mu, X)$ tem a propriedade de Daugavet se, e somente se, μ é não-atômica ou X tem a propriedade de Daugavet.*

A seguir apresentamos a definição de uma versão mais fraca da equação de Daugavet, conhecida como equação alternativa de Daugavet.

Definição 1.2.10. Seja X um espaço de Banach e seja $T : X \to X$ um operador linear limitado. Dizemos que T satisfaz a *equação alternativa de Daugavet* se

$$\max_{|w|=1} \|\mathrm{Id} + wT\| = 1 + \|T\|. \tag{ADE}$$

Teorema 1.2.11 ([10], página 483)**.** *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja μ uma medida σ-finita. Então todo operador linear limitado em $C(K)$ ou $L_1(\mu)$ satisfaz* (ADE).

Definição 1.2.12. Um espaço de Banach X tem a *propriedade alternativa de Daugavet* (ADP) se todo operador de posto um em X satisfaz (ADE).

Teorema 1.2.13 ([20], Theorem 2.2)**.** *Se um espaço de Banach X tem a propriedade alternativa de Daugavet, então todo operador fracamente compacto em X satisfaz* (ADE).

Resultados análogos à Proposição 1.2.8 e à Proposição 1.2.9 também são válidos para a propriedade alternativa de Daugavet. Estes serão apresentados em detalhes no Capítulo 4.

1.3 A equação de Daugavet para polinômios

Nesta seção introduziremos a equação de Daugavet para polinômios, que é o centro do estudo desta tese.

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\ell_\infty(B_X, X)$ o espaço de Banach de todas as funções limitadas de B_X em X munido com a norma do supremo. Escreveremos $\ell_\infty(B_X)$ quando apenas funções a valores escalares forem consideradas.

Definição 1.3.1. Seja X um espaço de Banach e seja $\Phi \in \ell_\infty(B_X, X)$. Dizemos que Φ satisfaz a *equação de Daugavet* se

$$\|\mathrm{Id} + \Phi\| = 1 + \|\Phi\|, \tag{DE}$$

e dizemos que Φ satisfaz a *equação alternativa de Daugavet* se

$$\max_{|w|=1} \|\mathrm{Id} + w\Phi\| = 1 + \|\Phi\|. \tag{ADE}$$

Se X é um espaço de Banach e $\mathcal{Z}$ é um subespaço de $\ell_\infty(B_X)$, denotaremos por $\mathcal{Z}^X$ o conjunto de todas as funções $\Phi : B_X \to X$ tais que $x^* \circ \Phi \in \mathcal{Z}$ para todo $x^* \in X^*$. Para $\varphi \in \mathcal{Z}$ e $x_0 \in X$, denotaremos por $\varphi \otimes x_0$ o elemento de $\mathcal{Z}^X$ dado por $[\varphi \otimes x_0](x) = \varphi(x)x_0$ para todo $x \in B_X$. Apresentamos a seguir uma caracterização de (DE) e (ADE) para funções em $\mathcal{Z}^X$ cujas imagens são relativamente fracamente compactas.

Teorema 1.3.2 ([5], Theorem 1.1.)**.** *Seja X um espaço de Banach e seja $\mathcal{Z}$ um subespaço de $\ell_\infty(B_X)$. São equivalentes:*

(i) Para todo $\varphi \in \mathcal{Z}$ e todo $x_0 \in X$, $\varphi \otimes x_0$ satisfaz (DE)*;*

(ii) Para todos $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, $x_0 \in S_X$ e $\varepsilon > 0$, existem $w \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$\mathrm{Re}\, w\varphi(y) > 1 - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_0 + wy\| > 2 - \varepsilon;$$

(iii) Todo $\Phi \in \mathcal{Z}^X$ cuja imagem é relativamente fracamente compacta satisfaz (DE).

Teorema 1.3.3 ([5], Corollary 1.2)**.** *Seja X um espaço de Banach e seja $\mathcal{Z}$ um subespaço de $\ell_\infty(B_X)$. São equivalentes:*

(i) Para todo $\varphi \in \mathcal{Z}$ e todo $x_0 \in X$, $\varphi \otimes x_0$ satisfaz (ADE)*;*

(ii) Para todos $\varphi \in S_{\mathcal{Z}}$, $x_0 \in S_X$ e $\varepsilon > 0$, existem $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que

$$\mathrm{Re}\, w_1\varphi(y) > 1 - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_0 + w_2 y\| > 2 - \varepsilon;$$

(iii) Todo $\Phi \in \mathcal{Z}^X$ cuja imagem é relativamente fracamente compacta satisfaz (ADE).

Definição 1.3.4. Para um espaço de Banach X, denotaremos por $\Pi(X)$ o subconjunto de $X \times X^*$ dado por

$$\Pi(X) = \big\{(x, x^*) : \ x \in S_X, \ x^* \in S_{X^*}, \ x^*(x) = 1\big\}.$$

Dada uma função limitada $\Phi : S_X \to X$, sua *imagem numérica* é o conjunto

$$V(\Phi) = \big\{x^*(\Phi(x)) : \ (x, x^*) \in \Pi(X)\big\},$$

e seu *raio numérico* é o valor

$$v(\Phi) = \sup\big\{|\lambda| : \ \lambda \in V(\Phi)\big\}.$$

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $C_u(B_X, X)$ o espaço de Banach das funções uniformemente contínuas de B_X em X munido com a norma do supremo, e denotaremos por $\mathcal{A}_u(B_X, X)$ o subespaço das funções $\Phi \in C_u(B_X, X)$ que são holomorfas no interior de B_X. É mencionado em ([5], página 65) que cada $\Phi \in C_u(B_X, X)$ é de fato limitada. Agradecemos ao Professor Domingo Garcia por comunicarnos uma demonstração deste fato, que enunciamos a seguir.

Lema 1.3.5. *Cada $\Phi \in C_u(B_X, X)$ é limitada.*

Demonstração. Como Φ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < 1$ para todos $x, y \in B_X$ com $\|x - y\| < \delta$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Então, para cada $x \in B_X$, tem-se que

$$\|\Phi(x) - \Phi(0)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \left\| \Phi\left(\frac{k}{n}x\right) - \Phi\left(\frac{k-1}{n}x\right) \right\| < n,$$

e portanto $\|\Phi(x)\| < \|\Phi(0)\| + n$. $\square$

Para funções no espaço $C_u(B_X, X)$ podemos caracterizar (DE) e (ADE) da seguinte forma.

Proposição 1.3.6 ([5], Proposition 1.3)**.** *Seja X um espaço de Banach e seja Φ um elemento de $C_u(B_X, X)$. Então:*

(a) Φ satisfaz (DE) *se, e somente se, $\|\Phi\| = \sup \mathrm{Re}\, V(\Phi)$;*

(b) Φ satisfaz (ADE) *se, e somente se, $\|\Phi\| = v(\Phi)$.*

A equação de Daugavet e a equação alternativa de Daugavet têm sido estudadas especialmente para polinômios e polinômios homogêneos. Apresentaremos a seguir alguns dos principais resultados deste estudo obtidos até o momento. Alguns outros resultados serão apresentados ao longo dos próximos capítulos.

Exemplos 1.3.7.

(a) Os espaços $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ não têm a propriedade de que todo polinômio fracamente compacto satisfaz (DE). Isso segue do Exemplo 1.2.5 e do fato de um operador linear ser um polinômio.

(b) Todo polinômio em $\mathbb{C}$ satisfaz (ADE). De fato, fixe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ com $\|P\| = 1$. Pelo Teorema do Módulo Máximo, existe $y \in \mathbb{T}$ tal que $|P(y)| = \|P\| = 1$. Ainda, podemos encontrar $w_1 \in \mathbb{T}$ tal que
$$\operatorname{Re} w_1 P(y) = |P(y)| = 1.$$
Por outro lado, podemos encontrar $w_2 \in \mathbb{T}$ tal que
$$\operatorname{Re} w_2 y = |y| = 1.$$
Então, tomando $w = w_1\overline{w_2} \in \mathbb{T}$, obtemos
$$\|\mathrm{Id} + wP\| \geq |y + wP(y)| = |w_2 y + w_1 P(y)| = 2.$$

(c) O resultado do item anterior não é válido para $\mathbb{R}$, isto é, existe um polinômio (fracamente compacto) $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $\|\mathrm{Id} \pm P\| < 1 + \|P\|$. De fato, definindo
$$P(t) = 1 - t^2 \qquad (t \in \mathbb{R}),$$
obtemos $\|P\| = 1$ e
$$\|\mathrm{Id} \pm P\| = \max_{t\in[-1,1]} |t \pm (1 - t^2)| = \frac{5}{4} < 2.$$

O exemplos anteriores foram extraídos de [5].

Tomando $\mathcal{Z} = \mathcal{P}(X)$ no Teorema 1.3.2 e no Teorema 1.3.3 obtemos facilmente os seguintes corolários.

Corolário 1.3.8. *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(i) Para todo $p \in \mathcal{P}(X)$ e todo $x_0 \in X$, $p \otimes x_0$ satisfaz (DE)*;*

(ii) Para todos $p \in \mathcal{P}(X)$ com $\|p\| = 1$, $x_0 \in S_X$ e $\varepsilon > 0$, existem $w \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que
$$\operatorname{Re} wp(y) > 1 - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_0 + wy\| > 2 - \varepsilon;$$

(iii) Todo $P \in \mathcal{P}(X, X)$ fracamente compacto satisfaz (DE).

Corolário 1.3.9. *Seja X um espaço de Banach. São equivalentes:*

(i) *Para todo $p \in \mathcal{P}(X)$ e todo $x_0 \in X$, $p \otimes x_0$ satisfaz* (ADE)*;*

(ii) *Para todos $p \in \mathcal{P}(X)$ com $\|p\| = 1$, $x_0 \in S_X$ e $\varepsilon > 0$, existem $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$ e $y \in B_X$ tais que*

$$\mathrm{Re}\, w_1 p(y) > 1 - \varepsilon \quad \text{e} \quad \|x_0 + w_2 y\| > 2 - \varepsilon;$$

(iii) *Todo $P \in \mathcal{P}(X, X)$ fracamente compacto satisfaz* (ADE).

Definição 1.3.10. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a *propriedade polinomial de Daugavet* se todo polinômio de posto um de X em X satisfaz (DE). E dizemos que X tem a *propriedade polinomial alternativa de Daugavet* se todo polinômio de posto um de X em X satisfaz (ADE).

Pelo Corolário 1.3.8 e pelo Corolário 1.3.9, segue que se X tem a propriedade polinomial de Daugavet então todo polinômio fracamente compacto em X satisfaz (DE), e se X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet então todo polinômio fracamente compacto em X satisfaz (ADE). Além disso, fazendo uso desses corolários foram provados os seguintes resultados.

Teorema 1.3.11 ([5], Theorem 2.4)**.** *Sejam Ω um espaço de Hausdorff completamente regular sem pontos isolados, K um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados e X um espaço de Banach. Então $C_b(\Omega, X)$ e $C(K, X)$ têm a propriedade polinomial de Daugavet.*

Teorema 1.3.12 ([6], Theorem 6.5)**.** *Seja X um espaço de Banach. Então:*

(a) *Se μ é uma medida σ-finita não-atômica, então $L_\infty(\mu, X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet;*

(b) *Se K é um espaço de Hausdorff compacto, então $C_w(K, X)$ e $C_{w^*}(K, X^*)$ têm a propriedade polinomial de Daugavet.*

Teorema 1.3.13 ([19], Theorem 3.3)**.** *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita não-atômica e seja X um espaço de Banach. Então $L_1(\mu, X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet.*

A seguir apresentaremos alguns resultados sobre a equação de Daugavet para polinômios homogêneos.

Definição 1.3.14. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a *propriedade de Daugavet de ordem* k (k-DP) se todo polinômio k-homogêneo de posto um satisfaz (DE). E dizemos que X tem a *propriedade alternativa de Daugavet de ordem* k (k-ADP) se todo polinômio k-homogêneo de posto um satisfaz (ADE).

Proposição 1.3.15 ([5], Corollary 3.3)**.** *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ e seja k um inteiro, $k \geq 2$.*

(a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então a k-DP *e a* k-ADP *são equivalentes.*

(b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e k é par, então a k-DP *e a* k-ADP *são equivalentes.*

Exemplos 1.3.16.

(a) Pelo Exemplo 1.3.7.b, o espaço $\mathbb{C}$ tem a k-ADP para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, pela proposição anterior, $\mathbb{C}$ tem a k-DP para todo $k \geq 2$, mas $\mathbb{C}$ não tem a 1-DP.

(b) Segundo o Exemplo 1.3.7.c, existem polinômios não-homogêneos em $\mathbb{R}$ que não satisfazem (ADE). Entretanto, é fácil verificar que $\mathbb{R}$ tem a k-ADP para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) Assim, $\mathbb{R}$ tem a k-DP para todo k par, pela proposição anterior. Por outro lado, se k é ímpar, $\mathbb{R}$ não tem a k-DP. Basta considerar o polinômio $P \in \mathcal{P}(^k\mathbb{R})$ dado por

$$P(t) = -t^k \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Os exemplos anteriores foram extraídos de [5]. Observe que o item (c) mostra que a k-DP e a k-ADP não são equivalentes para k ímpar, no caso em que X é um espaço real.

Proposição 1.3.17 ([5], Proposition 3.7)**.** *Seja X um espaço de Banach e seja k um inteiro positivo. Se X tem a* $(k+1)$-ADP*, então X tem a* k-ADP.

Exemplo 1.3.18. Segundo ([7], página 141), existe um polinômio 2-homogêneo fracamente compacto $P \in \mathcal{P}(^2\ell_1, \ell_1)$ (ℓ_1 visto como espaço real ou complexo) tal que $v(P) \leq \frac{1}{2}\|P\|$. Segue da Proposição 1.3.6 que P não satisfaz (ADE), ou seja, ℓ_1 não tem a 2-ADP. Daí, pela proposição anterior, ℓ_1 não tem a k-ADP para nenhum $k \geq 2$.

O corolário a seguir segue diretamente da Proposição 1.3.15 e da Proposição 1.3.17.

Corolário 1.3.19. *Seja X um espaço de Banach complexo e seja k um inteiro, $k \geq 2$. Se X tem a $(k+1)$-DP, então X tem a k-DP.*

O resultado acima não vale no caso real. De fato, como vimos no Exemplo 1.3.16.c, $\mathbb{R}$ tem a k-DP para todo k par, mas não tem a k-DP para nenhum k ímpar. Entretanto, um resultado similar pode ser provado no caso real.

Proposição 1.3.20 ([5], Proposition 3.10)**.** *Seja X um espaço de Banach real e seja k um inteiro positivo. Se X tem a $(k+2)$-DP, então X tem a k-DP.*

CAPÍTULO 2

A equação polinomial de Daugavet em C*-álgebras comutativas

O objetivo principal deste capítulo é provar que toda C*-álgebra comutativa não-atômica tem a propriedade polinomial de Daugavet.

2.1 C*-álgebras

Apresentaremos nesta seção a definição de C*-álgebra e alguns exemplos clássicos. Para mais detalhes sobre este conceito indicamos as referências [28] e [3].

Definição 2.1.1. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra* se $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial complexo e um anel com elemento unidade $e \neq 0$ tal que $(\lambda x)y = x(\lambda y) = \lambda(xy)$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra de Banach* se $\mathcal{A}$ é uma álgebra e um espaço de Banach tal que

(a) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$;

(b) $\|e\| = 1$.

A álgebra de Banach $\mathcal{A}$ é dita *comutativa* se $xy = yx$ para todos $x, y \in \mathcal{A}$. Um elemento $x \in \mathcal{A}$ é dito *central* se $xy = yx$ para todo $y \in \mathcal{A}$.

Exemplos 2.1.2.

(a) Seja Ω um espaço de Hausdorff completamente regular e seja $C_b(\Omega)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas e limitadas de Ω em $\mathbb{C}$, munido com a norma do supremo. Se a multiplicação é definida pontualmente, então o espaço complexo $C_b(\Omega)$ é uma álgebra de Banach comutativa.

(b) Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja $C(K)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas de K em $\mathbb{C}$, munido com a norma do supremo. Se a multiplicação é definida pontualmente, então o espaço complexo $C(K)$ é uma álgebra de Banach comutativa.

(c) Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e seja $L_\infty(\mu)$ o espaço de Banach de todas as (classes de equivalência de) funções essencialmente limitadas de Ω em $\mathbb{C}$, munido com a norma do supremo essencial. Se a multiplicação é definida pontualmente, então o espaço complexo $L_\infty(\mu)$ é uma álgebra de Banach comutativa.

(d) Seja X um espaço de Banach complexo com dimensão pelo menos dois. Se a multiplicação é definida como a composição de operadores, então $\mathcal{L}(X, X)$ é uma álgebra de Banach não-comutativa.

Definição 2.1.3. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach. Uma aplicação $x \in \mathcal{A} \to x^* \in \mathcal{A}$ é chamada *involução* se satisfaz as seguintes condições, para todos $x, y \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

(a) $(\lambda x + y)^* = \overline{\lambda} x^* + y^*$;

(b) $(xy)^* = y^* x^*$;

(c) $x^{**} = x$.

Uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ munida de uma involução é dita uma *C*-álgebra* se a involução satisfaz a condição adicional:

(d) $\|x^* x\| = \|x\|^2$, para todo $x \in \mathcal{A}$.

Exemplos 2.1.4.

(a) Seja Ω um espaço de Hausdorff completamente regular. Se definimos $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para todos $f \in C_b(\Omega)$ e $x \in \Omega$, então a álgebra de Banach $C_b(\Omega)$ é uma C*-álgebra comutativa.

(b) Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Se definimos $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para todos $f \in C(K)$ e $x \in K$, então a álgebra de Banach $C(K)$ é uma C*-álgebra comutativa.

(c) Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita. Se definimos $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para todos $f \in L_\infty(\mu)$ e $x \in \Omega$, então a álgebra de Banach $L_\infty(\mu)$ é uma C*-álgebra comutativa.

(d) Seja H um espaço de Hilbert complexo. Se definimos a involução de um operador $T \in \mathcal{L}(H, H)$ como o adjunto usual T^* de T, então $\mathcal{L}(H, H)$ é uma C*-álgebra.

Definição 2.1.5. Um elemento p de uma C*-álgebra é dito uma *projeção* se $p^2 = p = p^*$.

Definição 2.1.6. Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Dizemos que uma projeção não-nula p em $\mathcal{A}$ é *atômica* se, para todo $a \in \mathcal{A}$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $pap = \lambda p$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *não-atômica* se $\mathcal{A}$ não possui projeções atômicas.

Alguns exemplos de C*-álgebras não-atômicas serão apresentados na próxima seção.

2.2 C*-álgebras comutativas

Apresentaremos a seguir algumas definições e resultados válidos para C*-álgebras comutativas.

Definição 2.2.1. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e seja $a \in \mathcal{A}$. O *espectro* de a, denotado por $\sigma(a)$, é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $a - \lambda e$ não é invertível.

Definição 2.2.2. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa. O *espectro* de $\mathcal{A}$, denotado por $S(\mathcal{A})$, é o conjunto dos homomorfismos $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

Proposição 2.2.3 ([23], Corollary 30.4)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa e seja $a \in \mathcal{A}$. Então $\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in S(\mathcal{A})\}$ e cada $\phi \in S(\mathcal{A})$ é contínuo.*

Definição 2.2.4. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa. Para cada $a \in \mathcal{A}$ consideremos a função

$$\widehat{a} : \phi \in S(\mathcal{A}) \mapsto \phi(a) \in \mathbb{C}.$$

A função $\widehat{a}$ é chamada de *transformada de Gelfand* de a. Denotaremos por $\widehat{\mathcal{A}}$ a álgebra das funções $\widehat{a}$, com $a \in \mathcal{A}$. O espectro $S(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ será sempre munido da topologia mais fraca que torna contínua cada função $\widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}}$. Essa topologia é chamada de *topologia de Gelfand*.

Teorema 2.2.5 ([23], Theorem 30.6). *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa e seja $a \in \mathcal{A}$. Então:*

(a) $S(\mathcal{A})$ é um espaço de Hausdorff compacto;

(b) A transformada de Gelfand é um homomorfismo de álgebras contínuo.

Definição 2.2.6. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ C*-álgebras. Dizemos que uma aplicação $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um $*$-*isomorfismo* se T é um isomorfismo de álgebras tal que $T(x^*) = (Tx)^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{A}$ é $*$-*isomorfa* a $\mathcal{B}$.

Teorema 2.2.7 (Teorema de Gelfand-Naimark, [3], Theorem VI.5.2). *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então $\mathcal{A}$ é isometricamente $*$-isomorfa a $C(S(\mathcal{A}))$.*

Teorema 2.2.8 ([3], Theorem VI.5.4). *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa gerada por um único elemento a e seu adjunto a^*. Então $\widehat{a}$ é um homeomorfismo de $S(\mathcal{A})$ em $\sigma(a)$.*

O teorema a seguir será fundamental para a demonstração do resultado principal deste capítulo. Como não encontramos sua prova ao longo de nossos estudos, optamos por apresentá-la em detalhes.

Teorema 2.2.9. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então $\mathcal{A}$ é não-atômica se, e somente se, $S(\mathcal{A})$ não possui pontos isolados.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $S(\mathcal{A})$ possua um ponto isolado x_0. Defina a função $f : S(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq x_0 \\ 1 & , x = x_0. \end{cases}$$

Como x_0 é um ponto isolado de $S(\mathcal{A})$, segue que $f \in C(S(\mathcal{A}))$. Observe que $f^2 = f = f^*$, ou seja, f é uma projeção em $C(S(\mathcal{A}))$. Além disso, dada $g \in C(S(\mathcal{A}))$ temos

$$\begin{aligned} f(x)g(x)f(x) &= \begin{cases} 0 & , x \neq x_0 \\ g(x_0) & , x = x_0 \end{cases} \\ &= g(x_0)f(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in S(\mathcal{A})$, ou seja, $fgf = g(x_0)f$. Assim, dada $g \in C(S(\mathcal{A}))$, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $fgf = \lambda f$. Logo, f é uma projeção atômica em $C(S(\mathcal{A}))$.

Agora, pelo Teorema de Gelfand-Naimark, $\mathcal{A}$ é isometricamente $*$-isomorfa a $C(S(\mathcal{A}))$. Portanto, $\mathcal{A}$ possui pelo menos uma projeção atômica.

($\Leftarrow$) Suponha que $\mathcal{A}$ possua uma projeção atômica p. Então, dado $a \in \mathcal{A}$ existe $\lambda_a \in \mathbb{C}$ tal que

$$pap = \lambda_a p.$$

É fácil ver que λ_a é único, já que p é não-nulo. Defina

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longmapsto & \lambda_a. \end{array}$$

Mostraremos que $\phi \in S(\mathcal{A})$. De fato, dados $a, b \in \mathcal{A}$,

$$\phi(ab)p = p(ab)p = (pap)(pbp) = [\phi(a)p][\phi(b)p] = [\phi(a)\phi(b)]p,$$

onde a segunda igualdade vale pois $\mathcal{A}$ é comutativa e p é uma projeção. Além disso,

$$\phi(a + \alpha b)p = p(a + \alpha b)p = pap + \alpha(pbp) = \phi(a)p + \alpha\phi(b)p = [\phi(a) + \alpha\phi(b)]p,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \text{e} \quad \phi(a + \alpha b) = \phi(a) + \alpha\phi(b),$$

para todos $a, b \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Logo, $\phi \in S(\mathcal{A})$.

Provaremos que ϕ é um ponto isolado de $S(\mathcal{A})$, mais precisamente, provaremos que o aberto

$$U\left(\phi; p; \tfrac{1}{2}\right) = \left\{\psi \in S(\mathcal{A}) : |\psi(p) - \phi(p)| < \tfrac{1}{2}\right\}$$

é igual a $\{\phi\}$. Primeiramente, observe que $\phi(p) = 1$, já que $ppp = \phi(p)p$. Agora tome $\psi \in S(\mathcal{A})$. Observe que

$$\psi(p) = \psi(p^2) = \psi(p)^2.$$

Segue que $\psi(p)$ é igual a 0 ou 1. Se $\psi(p) = 0$ então

$$|\psi(p) - \phi(p)| = 1,$$

ou seja, $\psi \notin U(\phi; p; \frac{1}{2})$. E se $\psi(p) = 1$ então

$$\psi(a) = \psi(p)\psi(a)\psi(p) = \psi(pap) = \psi(\phi(a)p) = \phi(a)\psi(p) = \phi(a)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, isto é, $\psi = \phi$. Logo, $\{\phi\} = U\left(\phi; p; \frac{1}{2}\right)$.

Portanto, $S(\mathcal{A})$ possui um ponto isolado. $\square$

2.3 Polinômios fracamente compactos em C*-álgebras comutativas

Como motivação para os resultados principais dos Capítulos 2 e 3, consideremos os seguintes resultados sobre a equação de Daugavet para operadores em C*-álgebras.

Teorema 2.3.1 ([25], Theorem 2.1)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Então todo operador fracamente compacto em $\mathcal{A}$ satisfaz* (DE) *se, e somente se, $\mathcal{A}$ é não-atômica.*

Teorema 2.3.2 ([20], Theorem 4.1)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Então todo operador fracamente compacto em $\mathcal{A}$ satisfaz* (ADE) *se, e somente se, todas projeções atômicas de $\mathcal{A}$ são centrais.*

Provaremos a seguir que esses resultados podem ser generalizados quando a C*-álgebra é comutativa. Para tanto, consideremos em particular o seguinte resultado sobre o espaço complexo $C(K)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto.

Teorema 2.3.3 ([5], Corollary 2.6)**.** *Seja K um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados. Então toda $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_{C(K)}, C(K))$ fracamente compacta satisfaz* (DE)*.*

Fazendo uso do Teorema 2.2.9, do Teorema 2.3.3 e do Teorema de Gelfand-Naimark provaremos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.3.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então toda $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ fracamente compacta satisfaz* (DE)*, se e somente se, $\mathcal{A}$ é não-atômica.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como $\mathcal{A}$ é não-atômica, segue do Teorema 2.2.9 que $S(\mathcal{A})$ não possui pontos isolados. Desta forma, toda $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_{C(S(\mathcal{A}))}, C(S(\mathcal{A})))$ fracamente compacta satisfaz (DE) pelo Teorema 2.3.3. Pelo Teorema de Gelfand-Naimark, $\mathcal{A}$ é isometricamente $*$-isomorfa a $C(S(\mathcal{A}))$. Logo, toda $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ fracamente compacta satisfaz (DE).

($\Leftarrow$) Se $\mathcal{A}$ possui pelo menos uma projeção atômica, então $S(\mathcal{A})$ possui pelo menos um ponto isolado pelo Teorema 2.2.9. Daí, é possível construir um operador de posto um de $C(S(\mathcal{A}))$ em $C(S(\mathcal{A}))$ que não satisfaz (DE). Para tanto, considere um ponto isolado x_0 de $S(\mathcal{A})$. Defina a função $f : S(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq x_0 \\ 1 & , x = x_0. \end{cases}$$

Claramente $f \in C(S(\mathcal{A}))$. Agora defina

$$\begin{array}{rccc} T: & C(S(\mathcal{A})) & \longrightarrow & C(S(\mathcal{A})) \\ & g & \longmapsto & -g(x_0)f. \end{array}$$

Então T é um operador de posto um. Além disto, se $g \in C(S(\mathcal{A}))$ então $(\mathrm{Id}+T)g(x) = g(x)$ para $x \neq x_0$, e $(\mathrm{Id} + T)g(x_0) = 0$. Isto implica $\|\mathrm{Id} + T\| = 1 < 1 + \|T\|$. Assim, T é uma função fracamente compacta de $\mathcal{A}_u(B_{C(S(\mathcal{A}))}, C(S(\mathcal{A})))$ que não satisfaz (DE). Portanto a conclusão segue do Teorema de Gelfand-Naimark. □

Como consequência imediata do Teorema 2.3.4 e de sua demonstração, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.3.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathcal{A}$ é não-atômica;

(ii) Toda $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ fracamente compacta satisfaz (DE)*;*

(iii) Todo polinômio fracamente compacto $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz (DE)*;*

(iv) Todo operador fracamente compacto $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz (DE)*;*

(v) Todo operador de posto um $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz (DE).

Exemplos 2.3.6. Apresentaremos a seguir alguns exemplos de C*-álgebras comutativas não-atômicas.

(a) $C_b(\Omega)$, onde Ω é um espaço de Hausdorff completamente regular sem pontos isolados. Sabemos que $C_b(\Omega)$ é uma C*-álgebra comutativa. Vamos provar que $C_b(\Omega)$ é não-atômica. Suponha que $C_b(\Omega)$ tenha uma projeção atômica f. Então $f^2 = f = f^*$ e dada $g \in C_b(\Omega)$, existe $\lambda_g \in \mathbb{C}$ tal que $fgf = \lambda_g f$, o que implica $fg = \lambda_g f$. Já que $f^2 = f$, temos que f assume apenas os valores 0 e 1. Além disso, f não é identicamente nula, então $f^{-1}(1) \neq \varnothing$. Suponha que $f^{-1}(1)$ possua pelo menos dois pontos a e b. Já que Ω é um espaço de Hausdorff completamente regular, existe $g \in C_b(\Omega)$ tal que $g(a) = 0$ e $g(b) = 1$. Assim

$$0 = f(a)g(a) = \lambda_g f(a) = \lambda_g,$$

e por outro lado,

$$1 = f(b)g(b) = \lambda_g f(b) = \lambda_g,$$

o que é uma contradição. Logo, $f^{-1}(1)$ possui apenas um ponto. Portanto $f^{-1}(1)$ é um ponto isolado de Ω, pois $f \in C_b(\Omega)$ e assume somente os valores 0 e 1.

(b) $C(K)$, onde K é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados. Segue do primeiro exemplo.

(c) $L_\infty(\mu)$, onde μ é uma medida não-atômica σ-finita. Sabemos que $L_\infty(\mu)$ é uma C*-álgebra comutativa. Mostraremos que $L_\infty(\mu)$ é não-atômica. Suponha que $L_\infty(\mu)$ tenha uma projeção atômica f. Então $f^2 = f = f^*$ e dada $g \in L_\infty(\mu)$, existe $\lambda_g \in \mathbb{C}$ tal que $fgf = \lambda_g f$, o que implica $fg = \lambda_g f$. Analogamente ao caso (i), temos que f assume apenas os valores 0 e 1 q.t.p., pois $f^2 = f$. Defina $A = f^{-1}(1)$. Já que f é não-nula q.t.p., A é um conjunto mensurável com medida positiva e $f = \chi_A$. Considere $B \subset A$ mensurável. Assim

$$\chi_B = \chi_A \cdot \chi_B = \lambda \chi_A,$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $B = \varnothing$ ou $\chi_B = \chi_A$ q.t.p. Segue que $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Portanto A é um átomo de μ.

(d) A subálgebra fechada $\mathcal{A}_T$ de $\mathcal{L}(L_2[a,b], L_2[a,b])$ gerada por T, onde $[a,b]$ é um intervalo limitado e T é o operador linear limitado de $L_2[a,b]$ em $L_2[a,b]$ definido por $Tx = y$, com $y(t) = tx(t)$ para todo $t \in [a,b]$. Já que T é auto-adjunto, $\mathcal{A}_T$ é uma C*-álgebra comutativa. Provaremos que $\mathcal{A}_T$ é não-atômica. Sabemos pelo Teorema 2.2.9 que $\mathcal{A}_T$ é não-atômica se, e somente se, $S(\mathcal{A}_T)$ não possui pontos isolados. Além disso, pelo Teorema 2.2.8, $S(\mathcal{A}_T)$ é homeomorfo a $\sigma(T)$. Daí, $\mathcal{A}_T$ é não-atômica se, e somente se, $\sigma(T)$ não possui pontos isolados. Agora, é fácil provar que $\sigma(T)$ é o intervalo $[a,b]$. Portanto, $\mathcal{A}_T$ é não-atômica.

Os Exemplos (a), (b) e (c) já são conhecidos de [5] e [6] por possuírem a propriedade polinomial de Daugavet, mas o Exemplo (d) ainda não havia aparecido na literatura.

Finalmente consideremos um resultado sobre a equação alternativa de Daugavet.

Teorema 2.3.7 ([5], Proposition 1.3 e Theorem 2.8)**.** *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja X o espaço complexo $C(K)$. Então toda $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_X, X)$ satisfaz* (ADE).

Este resultado implica imediatamente o último resultado que apresentaremos neste capítulo.

Corolário 2.3.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então toda $\Phi \in \mathcal{A}_u(B_{\mathcal{A}}, \mathcal{A})$ satisfaz* (ADE).

Demonstração. Pelo Teorema de Gelfand-Naimark, $\mathcal{A}$ é isometricamente $*$-isomorfa a $C(S(\mathcal{A}))$. □

CAPÍTULO 3

A equação polinomial de Daugavet em C*-álgebras não-comutativas

O objetivo deste capítulo é estender o Teorema 2.3.1 e o Teorema 2.3.2 para polinômios de tipo finito.

3.1 JB*-triplas

Os resultados principais deste capítulo serão deduzidos de resultados correspondentes para JB*-triplas. Para tanto, apresentaremos a seguir uma breve introdução a JB*-triplas, onde apontaremos algumas de suas propriedades, as quais serão necessárias para as demonstrações dos resultados desejados.

Definição 3.1.1. Um espaço de Banach complexo U munido com uma aplicação contínua

$$U \times U \times U \to U, \qquad (a, b, c) \mapsto \{abc\}$$

(denominada *produto triplo*) é dito uma *JB*-tripla* se satisfaz as condições abaixo.

(1) O produto triplo $(a, b, c) \mapsto \{abc\}$ é linear em a e em c, e antilinear em b.

(2) O produto triplo é simétrico, isto é, $\{abc\} = \{cba\}$.

(3) Para todo $x \in U$, o operador $D_x : U \to U$, definido por $D_x u = \{xxu\}$, é Hermitiano (isto é, $\|\exp(itD_x)\| = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$) com espectro não-negativo.

(4) A "identidade principal"

$$\{ab\{xyz\}\} = \{\{abx\}yz\} - \{x\{bay\}z\} + \{xy\{abz\}\} \tag{J}$$

é satisfeita para todos $a, b, x, y, z \in U$.

(5) Para todo $x \in U$, $\|\{xxx\}\| = \|x\|^3$.

Segundo ([11], Corollary 3), $\|\{abc\}\| \leq \|a\|\|b\|\|c\|$ para todos $a, b, c \in U$.

Toda C*-álgebra é uma JB*-tripla com o produto triplo

$$\{abc\} = \frac{ab^*c + cb^*a}{2}\cdot$$

Mais geralmente, subespaços fechados de C*-álgebras que são fechados sob o produto triplo formam a classe das JB*-triplas conhecidas como *JC*-triplas*.

Por *JBW*-tripla* denominamos uma JB*-tripla que é o dual de um espaço de Banach. Segundo ([2], Theorem 1.4), se U é uma JB*-tripla, então U^{**} é uma JB*-tripla cujo produto triplo é fracamente estrela contínuo em cada variável. Em particular, U^{**} é uma JBW*-tripla.

Seja x um elemento em uma JB*-tripla U. Definimos o operador antilinear $Q_x : U \to U$ por $Q_x(u) = \{xux\}$. Um elemento $e \in U$ é chamado *tripotente* se $\{eee\} = e$. Para um tripotente e, definimos as *projeções de Peirce*:

$$P_2(e) = Q_e^2, \qquad P_1(e) = 2(D_e - Q_e^2), \qquad P_0(e) = \mathrm{Id} - 2D_e + Q_e^2.$$

Denotaremos por $U_j(e)$ a imagem de $P_j(e)$ para $j = 0, 1, 2$. Observe que $\sum_j P_j(e) = \mathrm{Id}$, por definição. Então

$$U = \mathrm{span}[U_2(e), U_1(e), U_0(e)] \quad (\textit{decomposição de Peirce}).$$

Essa decomposição possui importantes regras de multiplicação, conhecidas como *cálculo de Peirce*:

(i) $\{U_i(e)U_j(e)U_k(e)\} \subset U_{i-j+k}(e) \quad$ se $i-j+k \in \{0,1,2\}$;

(ii) $\{U_i(e)U_j(e)U_k(e)\} = \{0\} \quad$ se $i-j+k \notin \{0,1,2\}$;

(iii) $\{U_2(e)U_0(e)U\} = \{U_0(e)U_2(e)U\} = \{0\}$.

Essas regras podem ser encontradas em ([26], Proposition V.2.1). Segue de (i) que $U_j(e)$ é uma JB*-tripla para $j = 0,1,2$. Ainda por ([26], Proposition V.2.1) sabemos que

$$x \in U_j(e) \iff D_e x = (j/2)x.$$

Além disso, fazendo uso das identidades (J1*), (J2*) e (J3*) de [26], é possível mostrar que

$$P_k(e) \circ P_j(e) = 0 \text{ se } k \neq j, \qquad P_j(e)^2 = P_j(e) \text{ para } j = 0,1,2.$$

Definição 3.1.2. Seja U uma JB*-tripla e seja W um subespaço de U. Um tripotente e é dito *diagonalizante* se $U_1(e) = \{0\}$, é dito *minimal em* W se $P_2(e)[W] = \mathbb{C}e$ e é dito simplesmente *minimal* se $U_2(e) = \mathbb{C}e$.

Definição 3.1.3. Seja U uma JB*-tripla. Elementos $a, b \in U$ são ditos *ortogonais* se $\{abU\} = \{0\}$.

Para tripotentes e e f, valem as equivalências:

$$\{efU\} = \{0\} \iff \{feU\} = \{0\} \iff \{eef\} = 0 \iff \{eff\} = 0.$$

Observe que pela regra (iii) do cálculo de Peirce, os elementos de $U_0(e)$ e $U_2(e)$ são ortogonais.

Lema 3.1.4 ([24], página 299)**.** *Seja U uma JB*-tripla. Se $a, b \in U$ são ortogonais, então* $\|a+b\| = \max\{\|a\|, \|b\|\}$.

Lema 3.1.5 ([20], Lemma 4.11)**.** *Seja U uma JB*-tripla e seja e um tripotente em U. Então as projeções $P_0(e)$, $P_1(e)$ e $P_2(e)$ são contrações, ou seja, $\|P_j(e)\| \leq 1$ para $j =$* $0,1,2$.

Introduziremos a seguir a *decomposição simultânea de Peirce* de uma JB*-tripla U. Suponha que $e_1, \ldots, e_n$ sejam tripotentes mutuamente ortogonais em U. Para $1 \leq i, j \leq n$, defina $U_{ii} = U_2(e_i)$, $U_{ij} = U_1(e_i) \cap U_1(e_j)$ se $i \neq j$ (observe que $U_{ij} = U_{ji}$),

$$U_{i0} = U_{0i} = U_1(e_i) \cap \left(\bigcap_{i \neq j} U_0(e_j) \right) \quad \text{e} \quad U_{00} = \bigcap_j U_0(e_j).$$

Então

$$U = \operatorname{span}[U_{ij} : 0 \leq i \leq j \leq n].$$

Segundo [26], para $e = e_1 + \cdots + e_n$ temos

$$U_0(e) = U_{00} = \bigcap_{1 \leq j \leq n} U_0(e_j), \quad U_1(e) = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} U_{0i} \quad \text{e} \quad U_2(e) = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} U_{ij}.$$

Essa decomposição também possui importantes regras de multiplicação:

(i) $\{U_{ij} U_{jk} U_{kl}\} \subset U_{il}$;

(ii) $\{U_{ij} U_{kl} U_{pq}\} = \{0\}$ se $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \varnothing$;

(iii) $\{U_{ij} U_{jk} U_{pq}\} = \{0\}$ se $k \notin \{p, q\}$.

Essas regras podem ser encontradas em ([26], Proposition V.4.1).

Lema 3.1.6. *Sejam U uma JB*-tripla e e_1, e_2 tripotentes ortogonais em U. Se $e = e_1 + e_2$ e e_1 é minimal em $U_2(e)$, então e_1 é minimal em U.*

Demonstração. Segundo a decomposição simultânea de Peirce, se $e = e_1 + e_2$, então

$$\begin{aligned} U_0(e) &= U_0(e_1) \cap U_0(e_2), \\ U_1(e) &= [U_0(e_1) \cap U_1(e_2)] \oplus [U_0(e_2) \cap U_1(e_1)], \\ U_2(e) &= U_2(e_1) \oplus U_2(e_2) \oplus [U_1(e_1) \cap U_1(e_2)]. \end{aligned}$$

Como $P_2(e_1)\big[U_0(e_1)\big] = \{0\}$ e $P_2(e_1)\big[U_1(e_1)\big] = \{0\}$, segue que $P_2(e_1)\big[U_0(e)\big] = \{0\}$ e $P_2(e_1)\big[U_1(e)\big] = \{0\}$. Agora, e_1 minimal em $U_2(e)$ implica $P_2(e_1)\big[U_2(e)\big] = \mathbb{C}e_1$. Logo, $P_2(e_1)U = \mathbb{C}e_1$, ou seja, e_1 é minimal em U. $\square$

Definição 3.1.7. Seja U uma JB*-tripla e seja $a \in U$. O conjunto

$$\operatorname{Sp}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a \notin (Q_a - \lambda^2)U\}$$

é chamado *espectro* de a.

Definição 3.1.8. Sejam Λ um conjunto de índices, $\mathcal{F}(\Lambda)$ a coleção de todos os subconjuntos finitos de Λ e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família no dual topológico de um espaço de Banach. Dizemos que a soma desta família converge na topologia fraca estrela, se as somas parciais

$$\sum_{\lambda\in F} x_\lambda \quad \text{para } F \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

convergem na topologia fraca estrela a um ponto $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$.

Proposição 3.1.9 ([1], Lemma 3.2 e Proposition 3.6)**.** *Sejam U uma JB*-tripla, $a \in U$ e $\Lambda(a) = \mathrm{Sp}(a) \cap (0, \infty)$. Então existe uma família $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda(a)}$ de tripotentes mutuamente ortogonais em U^{**} tal que*

$$a = \sum_{\lambda\in\Lambda(a)} \lambda e_\lambda$$

onde a soma converge na topologia fraca estrela e $\|a\| = \sup_{\lambda\in\Lambda(a)} |\lambda|$.

Segundo ([1], página 441), se λ é um ponto isolado de $\Lambda(a)$, então $e_\lambda \in U$.

Lema 3.1.10 ([20], Proof. of Theorem 4.5)**.** *Seja U uma JB*-tripla e seja e um tripotente em U. Então:*

(a) Se e não é minimal e $U_2(e)$ possui dimensão finita, então existem tripotentes ortogonais $e_1, e_2 \in U^{**}$ tais que $e = e_1 + e_2$ e e_1 é minimal em $U_2(e)$;

(b) Se $U_2(e)$ possui dimensão infinita e $N \in \mathbb{N}$, então existem tripotentes mutuamente ortogonais $e_1, \ldots, e_N \in U^{**}$ tais que $e = \sum_{n=1}^{N} e_n$.

Lema 3.1.11 ([20], Lemma 4.16)**.** *Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade: se $N \geq N(\varepsilon)$, $e_1, e_2, \ldots, e_N$ são tripotentes mutuamente ortogonais em uma JB*-tripla U e $x^* \in S_{U^*}$, então existe $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tal que $\|x^*|_{V_n}\| \leq \varepsilon$, onde $V_n = U_2(e_n) + U_1(e_n)$.*

Lema 3.1.12. *Dados $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $M \in \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade: se $e_1, e_2, \ldots, e_M$ são tripotentes mutuamente ortogonais em uma JB*-tripla U e $x_1^*, \ldots, x_k^* \in S_{U^*}$, então existe $n \in \{1, 2, \ldots, M\}$ tal que $\|x_i^*|_{V_n}\| \leq \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, k$, onde $V_n = U_2(e_n) + U_1(e_n)$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, seja $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ como no lema anterior. Provaremos que, para $k \in \mathbb{N}$ fixo, $M = N(\varepsilon)^k$ tem a propriedade desejada. Mostraremos isto por indução sobre

k. De fato, pelo lema anterior, a afirmação é verdadeira para $k = 1$. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para $k - 1$. Ou seja, se $x_1^*, \ldots, x_{k-1}^* \in S_{U^*}$, $M' = N(\varepsilon)^{k-1}$ e $e_1, \ldots, e_{M'}$ são tripotentes mutuamente ortogonais, então existe $n \in \{1, 2, \ldots, M'\}$ tal que $\|x_i^*|_{V_n}\| \leq \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, k-1$, onde $V_n = U_2(e_n) + U_1(e_n)$.

Provemos a afirmação para k. Sejam $x_1^*, \ldots, x_k^* \in S_{U^*}$, $M = N(\varepsilon)^k$ e $e_1, \ldots, e_M$ tripotentes mutuamente ortogonais. Definindo

$$A_1 = \{e_1, \ldots, e_{M'}\},\ A_2 = \{e_{M'+1}, \ldots, e_{2M'}\},\ \ldots\ ,\ A_{N(\varepsilon)} = \{e_{M-M'+1}, \ldots, e_M\},$$

obtemos $N(\varepsilon)$ conjuntos disjuntos, cada qual contendo M' tripotentes mutuamente ortogonais. Assim, por hipótese de indução, cada A_j, $j = 1, \ldots, N(\varepsilon)$, possui um tripotente $\widetilde{e_j}$ tal que $\|x_i^*|_{\widetilde{V_j}}\| \leq \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, k-1$, onde $\widetilde{V_j} = U_2(\widetilde{e_j}) + U_1(\widetilde{e_j})$. Agora, pelo lema anterior, para $\widetilde{e_1}, \ldots, \widetilde{e}_{N(\varepsilon)}$ tripotentes mutuamente ortogonais e $x_k^* \in S_{U^*}$, existe $n \in \{1, 2, \ldots, N(\varepsilon)\}$ tal que $\|x_k^*|_{\widetilde{V_n}}\| \leq \varepsilon$, onde $\widetilde{V_n} = U_2(\widetilde{e_n}) + U_1(\widetilde{e_n})$. Como $\|x_i^*|_{\widetilde{V_n}}\| \leq \varepsilon$ para $i = 1, \ldots, k-1$, segue o resultado desejado. $\square$

3.2 Polinômios de tipo finito em JB*-triplas

Apresentamos a seguir dois resultados obtidos em [20].

Teorema 3.2.1 ([20], Theorem 4.7)**.** *Uma JB*-tripla tem a propriedade de Daugavet se, e somente se, não possui tripotentes minimais.*

Teorema 3.2.2 ([20], Theorem 4.5)**.** *Uma JB*-tripla tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, todos os seus tripotentes minimais são diagonalizantes.*

Motivados por estes resultados sobre a equação de Daugavet para operadores, vamos estabelecer os seguintes resultados sobre a equação de Daugavet para polinômios.

Teorema 3.2.3. *Seja U uma JB*-tripla. São equivalentes:*

(i) U não possui tripotentes minimais;

(ii) Todo polinômio de tipo finito $Q : U \to U$ satisfaz (DE)*;*

(iii) Todo polinômio aproximável $Q : U \to U$ satisfaz (DE)*;*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Segundo o Teorema 1.3.2, é suficiente mostrar que todo polinômio de tipo finito de posto um satisfaz (DE), se U não possui tripotentes minimais. Sendo assim, considere $Q(x) = q(x)a$, onde $q \in \mathcal{P}(X)$ é de tipo finito, $a \in U$ e $\|q\| = \|a\| = 1$. Como q é um polinômio de tipo finito, temos

$$q(x) = \sum_{i=1}^{k} [x_i^*(x)]^{m_i} \text{ para todo } x \in U,$$

para algum $x_i^* \in U^*$ e $m_i \in \mathbb{N}_0$. Além disso, como $\|q\| = 1$, dado $0 < \varepsilon < 1$, existem $x \in B_X$ e $w \in \mathbb{T}$ tais que $\mathrm{Re}\, wq(x) > 1 - \varepsilon$.

Pela Proposição 3.1.9, existe uma família $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda(a)}$ de tripotentes mutuamente ortogonais em U^{**} tal que $a = \sum_{\lambda \in \Lambda(a)} \lambda e_\lambda$ onde a soma converge na topologia fraca estrela e $\|a\| = \sup\{\lambda : \lambda \in \Lambda(a)\}$.

Seja $M \in \mathbb{N}$ dado pelo Lema 3.1.12. Se 1 é um ponto isolado de $\Lambda(a)$, o tripotente e correspondente ao ponto $1 \in \Lambda(a)$ pertence a U. Como U não possui tripotentes minimais, segue que $U_2(e)$ possui dimensão infinita. De fato, se $U_2(e)$ possuísse dimensão finita existiriam tripotentes ortogonais e_1 e e_2 tais que $e = e_1 + e_2$ e e_1 minimal em $U_2(e)$ pelo Lema 3.1.10. Então e_1 seria minimal em U pelo Lema 3.1.6, o que não pode ocorrer. Daí, existem tripotentes mutuamente ortogonais $e_1, \ldots, e_M \in U^{**}$ tais que $e = \sum_{n=1}^{M} e_n$. Agora, se 1 não é um ponto isolado de $\Lambda(a)$, é possível encontrar $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \subset \Lambda(a)$ tal que $1 - \varepsilon < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_M < 1$. Neste caso, definindo $e_n = e_{\lambda_n}$, obtemos tripotentes mutuamente ortogonais $e_1, \ldots, e_M \in U^{**}$. Em ambos os casos, temos $P_2(e_n)a = \alpha_n e_n$ para todo $n \in \{1, \ldots, M\}$, com $\alpha_n \in (1-\varepsilon, 1]$. Pelo Lema 3.1.12, existe $n \in \{1, \ldots, M\}$ tal que $\|x_i^*|_{V_n}\| \le \varepsilon \|x_i^*\|$ para $i = 1, \ldots, k$, onde $V_n = U_2(e_n) + U_1(e_n)$. Defina $x^{**} = P_0(e_n)x + \overline{w} e_n$. Então $\|x^{**}\| = \max\{\|P_0(e_n)x\|, \|\overline{w}e_n\|\} = 1$, pois $e_n \in U_2(e_n)$, $\|P_0(e_n)x\| \le \|x\| \le 1$ e $\|\overline{w}e_n\| = 1$. Além disso,

$$x - x^{**} = P_1(e_n)x + P_2(e_n)x - \overline{w}e_n = [P_1(e_n) + P_2(e_n)](x - \overline{w}e_n) \in V_n,$$

já que $x = P_0(e_n)x + P_1(e_n)x + P_2(e_n)x, P_2(e_n)e_n = e_n$ e $P_1(e_n)e_n = 0$. Assim,

$$|(x - x^{**})x_i^*| \le \varepsilon \|x - x^{**}\| \|x_i^*\| \le 2\varepsilon \|x_i^*\|,$$

para $i = 1, \ldots, k$. Seja $\widehat{q} \in \mathcal{P}_f(X^{**})$ a extensão de q dada pela Proposição 1.1.12. Como

$$\begin{aligned}
\widehat{q}(x^{**}) &= \widehat{q}(x + (x^{**} - x)) \\
&= \left[\left(x + (x^{**} - x)\right)x_1^*\right]^{m_1} + \cdots + \left[\left(x + (x^{**} - x)\right)x_k^*\right]^{m_k} \\
&= \sum_{j=0}^{m_1} \binom{m_1}{j} \left[x(x_1^*)\right]^{m_1 - j} \cdot \left[(x^{**} - x)x_1^*\right]^j + \cdots + \sum_{j=0}^{m_k} \binom{m_k}{j} \left[x(x_k^*)\right]^{m_k - j} \cdot \left[(x^{**} - x)x_k^*\right]^j,
\end{aligned}$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
&\widehat{q}(x^{**}) - \widehat{q}(x) \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{m_1} \binom{m_1}{j} \big[x(x_1^*)\big]^{m_1-j} \cdot \big[(x^{**}-x)x_1^*\big]^j + \cdots + \sum_{j=1}^{m_k} \binom{m_k}{j} \big[x(x_k^*)\big]^{m_k-j} \cdot \big[(x^{**}-x)x_k^*\big]^j.
\end{aligned}
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
&|\widehat{q}(x^{**}) - \widehat{q}(x)| \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{m_1} \binom{m_1}{j} \big|x(x_1^*)\big|^{m_1-j} \cdot \big|(x^{**}-x)x_1^*\big|^j + \cdots + \sum_{j=1}^{m_k} \binom{m_k}{j} \big|x(x_k^*)\big|^{m_k-j} \cdot \big|(x^{**}-x)x_k^*\big|^j \\
&\qquad \le \sum_{j=1}^{m_1} \binom{m_1}{j} \|x_1^*\|^{m_1-j} \cdot (2\varepsilon\|x_1^*\|)^j + \cdots + \sum_{j=1}^{m_k} \binom{m_k}{j} \|x_k^*\|^{m_k-j} \cdot (2\varepsilon\|x_k^*\|)^j \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{m_1} \binom{m_1}{j} 2^j \varepsilon^j \|x_1^*\|^{m_1} + \cdots + \sum_{j=1}^{m_k} \binom{m_k}{j} 2^j \varepsilon^j \|x_k^*\|^{m_k} \\
&\qquad < M\varepsilon,
\end{aligned}
$$

para algum $M \in \mathbb{N}$ que não depende de ε. Logo $\operatorname{Re} w\widehat{q}(x) - \operatorname{Re} w\widehat{q}(x^{**}) < M\varepsilon$, e então

$$
\operatorname{Re} w\widehat{q}(x^{**}) > \operatorname{Re} w\widehat{q}(x) - M\varepsilon > 1 - (M+1)\varepsilon.
$$

Observe que

$$
P_2(e_n)x^{**} = P_2(e_n)\left(P_0(e_n)x\right) + \overline{w}P_2(e_n)e_n = \overline{w}e_n,
$$

pois $P_2(e_n) \circ P_0(e_n) = 0$ e e_n é um tripotente. Daí, como $P_2(e_n)$ é uma contração,

$$
\|x^{**} + \widehat{q}(x^{**})a\| \ge \|P_2(e_n)(x^{**} + \widehat{q}(x^{**})a)\| = \|\overline{w}e_n + \widehat{q}(x^{**})\alpha_n e_n\| = \|e_n + w\widehat{q}(x^{**})\alpha_n e_n\|. \tag{3.1}
$$

Agora, $\|e_n\| = 1$ implica

$$
\|e_n + w\widehat{q}(x^{**})\alpha_n e_n\| = |1 + w\widehat{q}(x^{**})\alpha_n| \ge \operatorname{Re}\left(1 + w\widehat{q}(x^{**})\alpha_n\right) = 1 + \alpha_n \cdot \operatorname{Re} w\widehat{q}(x^{**}). \tag{3.2}
$$

Sabemos que $\alpha_n > 1 - \varepsilon$ e $\operatorname{Re} w\widehat{q}(x^{**}) > 1 - (M+1)\varepsilon$, então

$$
1 + \alpha_n \cdot \operatorname{Re} w\widehat{q}(x^{**}) > 1 + (1-\varepsilon)\cdot(1-(M+1)\varepsilon) > 2 - (M+2)\varepsilon. \tag{3.3}
$$

Segue de (3.1), (3.2) e (3.3) que

$$
\|\mathrm{Id}_{U^{**}} + \widehat{Q}\| \ge \|x^{**} + \widehat{q}(x^{**})a\| \ge \|e_n + w\widehat{q}(x^{**})\alpha_n e_n\| \ge 1 + \alpha_n \cdot \operatorname{Re} w\widehat{q}(x^{**}) > 2 - (M+2)\varepsilon.
$$

Finalmente, como $\|\mathrm{Id}_{U^{**}} + \widehat{Q}\| = \|\mathrm{Id} + Q\|$, a afirmação fica provada.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Como todo operador de posto um é um polinômio de tipo finito, segue que todo operador de posto um satisfaz (DE). Logo, U não possui tripotentes minimais pelo Teorema 3.2.1.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ é claro. □

Como consequência do Teorema 3.2.3, do Teorema 3.2.1 e do Teorema 1.2.7, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.2.4. *Seja U uma JB*-tripla. São equivalentes:*

(i) U não possui tripotentes minimais;

(ii) Todo polinômio de tipo finito $Q : U \to U$ satisfaz (DE)*;*

(iii) Todo polinômio aproximável $Q : U \to U$ satisfaz (DE)*;*

(iv) Todo operador fracamente compacto $T : U \to U$ satisfaz (DE)*;*

(v) Todo operador de posto um $T : U \to U$ satisfaz (DE).

A demonstração do resultado a seguir utiliza basicamente as mesmas técnicas da prova do teorema anterior.

Teorema 3.2.5. *Seja U uma JB*-tripla. São equivalentes:*

(i) Todos os tripotentes minimais de U são diagonalizantes;

(ii) Todo polinômio de tipo finito $Q : U \to U$ satisfaz (ADE)*;*

(iii) Todo polinômio aproximável $Q : U \to U$ satisfaz (ADE)*;*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Segundo o Teorema 1.3.3, para provar (ii) é suficiente mostrar que todo polinômio de tipo finito de posto um satisfaz (ADE). Sendo assim, considere $Q(x) = q(x)a$, onde $q \in \mathcal{P}(X)$ é de tipo finito, $a \in U$ e $\|q\| = \|a\| = 1$. Como q é um polinômio de tipo finito, temos

$$q(x) = \sum_{i=1}^{k} [x_i^*(x)]^{m_i} \text{ para todo } x \in U,$$

para algum $x_i^* \in U^*$ e $m_i \in \mathbb{N}_0$.

Suponhamos primeiramente que 1 seja um ponto isolado de $\Lambda(a)$ e que $U_2(e)$ possua dimensão finita. Considere e o tripotente correspondente a $1 \in \Lambda(a)$. Como 1 é um ponto isolado de $\Lambda(a)$, temos $e \in U$. Se e não é minimal, então existem tripotentes ortogonais $e_1, e_2 \in U^{**}$ tais que $e = e_1 + e_2$ e e_1 é minimal em $U_2(e)$ pelo Lema 3.1.10. Pelo Lema 3.1.6, e_1 é minimal em U. Agora, por hipótese todo tripotente minimal é diagonalizante, então e_1 é diagonalizante. Segue que todo $x \in U$ pode ser escrito na forma $x = \lambda e_1 + x_0$, com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x_0 \in U_0(e_1)$. De fato, temos

$$\mathrm{Id} = P_0(e_1) + \underbrace{P_1(e_1)}_{0} + P_2(e_1) = P_0(e_1) + P_2(e_1).$$

Assim, dado $x \in U$, temos

$$x = P_0(e_1)x + P_2(e_1)x = P_0(e_1)x + \lambda e_1,$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, já que e_1 é minimal. Desta forma, como $\|q\| = 1$, dado $\varepsilon > 0$, existe $x = \lambda e_1 + x_0 \in B_U$ tal que $|q(x)| > 1 - \varepsilon$. Sendo $\|x\| \leq 1$ e $\|x\| = \max\{|\lambda|, \|x_0\|\}$, segue que $|\lambda| \leq 1$. Provaremos que existe $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ tal que $|\widehat{q}(\lambda_0 e_1 + x_0)| > 1 - \varepsilon$. Defina $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ por $f(\alpha) = \widehat{q}(\alpha e_1 + x_0)$. Então f é contínua em $\overline{\mathbb{D}}$ e holomorfa em $\mathbb{D}$. Daí, pelo Teorema do Módulo Máximo,

$$\max\{|f(\alpha)| : \alpha \in \overline{\mathbb{D}}\} = \max\{|f(\alpha)| : \alpha \in \mathbb{T}\}.$$

Assim, existe $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ tal que $|\widehat{q}(\lambda_0 e_1 + x_0)| > 1 - \varepsilon$. Definindo $\widetilde{x} = \lambda_0 e_1 + x_0$, obtemos $\| \widetilde{x} \| = \max\{\|\lambda_0 e_1\|, \|x_0\|\} = 1$, já que $\|\lambda_0 e_1\| = 1$ e $\|x_0\| \leq 1$. Além disso,

$$P_2(e_1)\, \widetilde{x} = P_2(e_1)(\lambda_0 e_1 + x_0) = \lambda_0 P_2(e_1) e_1 + P_2(e_1) x_0 = \lambda_0 e_1,$$

pois e_1 é um tripotente e $x_0 \in U_0(e_1)$. Ainda $a = e_1 + e_2 + (a - e)$ e $(e_2 + a - e) \in U_0(e_1)$, pois $D_{e_1}(e_2 + a - e) = 0$. Logo, $P_2(e_1)a = e_1$. Daí, como $P_2(e_1)$ é uma contração,

$$\max_{|w|=1} \| \widetilde{x} + w\widehat{q}(\widetilde{x})a\| \geq \max_{|w|=1} \|P_2(e_1)(\widetilde{x} + w\widehat{q}(\widetilde{x})a)\| = \max_{|w|=1} \|\lambda_0 e_1 + w\widehat{q}(\widetilde{x})e_1\|. \tag{3.4}$$

E como $|\lambda_0| = 1$ e $\|e_1\| = 1$,

$$\max_{|w|=1} \|\lambda_0 e_1 + w\widehat{q}(\widetilde{x})e_1\| = \max_{|w|=1} \|e_1 + w\overline{\lambda_0}\widehat{q}(\widetilde{x})e_1\| = \max_{|w|=1} |1 + w\overline{\lambda_0}\widehat{q}(\widetilde{x})| \geq 1 + |\widehat{q}(\widetilde{x})| > 2 - \varepsilon. \tag{3.5}$$

Então de (3.4) e (3.5) segue que

$$\max_{|w|=1} \|\mathrm{Id}_{U^{**}} + w\widehat{Q}\| \geq \max_{|w|=1} \| \widetilde{x} + w\widehat{q}(\widetilde{x})a\| \geq \max_{|w|=1} \|\lambda_0 e_1 + w\widehat{q}(\widetilde{x})e_1\| > 2 - \varepsilon,$$

ou seja, $\widehat{Q}$ satisfaz (ADE).

Caso e seja minimal, basta reescrever esta parte da demonstração com e no lugar de e_1 para obter que Q satisfaz (ADE).

Agora suponhamos que a condição anterior seja falsa, isto é, 1 não é um ponto isolado de $\Lambda(a)$ ou $U_2(e)$ possui dimensão infinita. Dado $0 < \varepsilon < 1$, seja $M \in \mathbb{N}$ dado pelo Lema 3.1.12. Conforme a demonstração do teorema anterior, podemos encontrar tripotentes mutuamente ortogonais $e_1, \ldots, e_M \in U^{**}$ tais que $P_2(e_n)a = \alpha_n e_n$ para todo $n \in \{1, \ldots, M\}$, com $\alpha_n \in (1-\varepsilon, 1]$. Seja $n \in \{1, \ldots, M\}$ tal que $\|x_i^*|_{V_n}\| \le \varepsilon \|x_i^*\|$ para $i = 1, \ldots, k$. Como $\|q\| = 1$, existe $x \in B_X$ tal que $|q(x)| > 1-\varepsilon$. Defina $x^{**} = P_0(e_n)x + e_n$. Daí, $\|x^{**}\| = \max\{\|P_0(e_n)x\|, \|e_n\|\} = 1$, pois $\|P_0(e_n)x\| \le \|x\| \le 1$ e $\|e_n\| = 1$. Além disso,

$$x - x^{**} = P_1(e_n)x + P_2(e_n)x - e_n = \big[P_1(e_n) + P_2(e_n)\big](x - e_n) \in V_n.$$

Assim, seguindo os passos da demonstração anterior, $|\widehat{q}(x^{**}) - \widehat{q}(x)| < M\varepsilon$ para algum $M \in \mathbb{N}$ que não depende de ε. Logo

$$|\widehat{q}(x^{**})| > |\widehat{q}(x)| - M\varepsilon > 1 - (M+1)\varepsilon.$$

Note também que

$$P_2(e_n)x^{**} = P_2(e_n)\left(P_0(e_n)x\right) + P_2(e_n)e_n = e_n.$$

Como $P_2(e_n)$ é uma contração,

$$\max_{|w|=1} \|x^{**} + w\widehat{q}(x^{**})a\| \ge \max_{|w|=1} \|P_2(e_n)(x^{**} + w\widehat{q}(x^{**})a)\| = \max_{|w|=1} \|e_n + w\widehat{q}(x^{**})\alpha_n e_n\|. \quad (3.6)$$

Agora, $\|e_n\| = 1$ implica

$$\max_{|w|=1} \|e_n + w\widehat{q}(x^{**})\alpha_n e_n\| = \max_{|w|=1} |1 + w\widehat{q}(x^{**})\alpha_n| = 1 + \alpha_n |\widehat{q}(x^{**})|. \quad (3.7)$$

Sabemos que $\alpha_n > 1 - \varepsilon$ e $|\widehat{q}(x^{**})| > 1 - (M+1)\varepsilon$, então

$$1 + \alpha_n |\widehat{q}(x^{**})| > 1 + (1-\varepsilon) \cdot (1 - (M+1)\varepsilon) > 2 - (M+2)\varepsilon. \quad (3.8)$$

Segue de (3.6), (3.7) e (3.8) que

$$\max_{|w|=1} \|\mathrm{Id}_{U^{**}} + w\widehat{Q}\| \ge \max_{|w|=1} \|x^{**} + w\widehat{q}(x^{**})a\| > 2 - (M+2)\varepsilon,$$

ou seja, $\widehat{Q}$ satisfaz (ADE).

Por fim, como $\|\mathrm{Id}_{U^{**}} + w\widehat{Q}\| = \|\mathrm{Id} + wQ\|$, a afirmação fica provada.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Como todo operador de posto um é um polinômio de tipo finito, segue que todo operador de posto um satisfaz (ADE). Logo, todos os tripotentes minimais de U são diagonalizantes pelo Teorema 3.2.2.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ é claro. □

Como consequência do Teorema 3.2.5, do Teorema 3.2.2 e do Teorema 1.2.13, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.2.6. *Seja U uma JB*-tripla. São equivalentes:*

(i) Todos os tripotentes minimais de U são diagonalizantes;

(ii) Todo polinômio de tipo finito $Q : U \to U$ satisfaz (ADE)*;*

(iii) Todo polinômio aproximável $Q : U \to U$ satisfaz (ADE)*;*

(iv) Todo operador fracamente compacto $T : U \to U$ satisfaz (ADE)*;*

(v) Todo operador de posto um $T : U \to U$ satisfaz (ADE).

3.3 Polinômios de tipo finito em C*-álgebras

A partir do Teorema 3.2.3 e do Teorema 3.2.5 provaremos os resultados principais deste capítulo. Consideremos primeiramente uma proposição preparatória que nos permitirá constatar tais resultados.

Proposição 3.3.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Então:*

(a) $\mathcal{A}$ é uma JB-tripla;*

(b) $\mathcal{A}$ possui projeções atômicas se, e somente se, possui tripotentes minimais;

(c) Todas as projeções atômicas de $\mathcal{A}$ são centrais se, e somente se, todos os tripotentes minimais de $\mathcal{A}$ são diagonalizantes.

Demonstração.

(a) Conforme comentamos anteriormente, toda C*-álgebra é uma JB*-tripla com o produto triplo

$$\{abc\} = \frac{ab^*c + cb^*a}{2}.$$

(b) Suponhamos primeiramente que $\mathcal{A}$ possua projeções atômicas. Seja $p \in \mathcal{A}$ uma projeção atômica. Então $p^2 = p = p^*$ e $p\mathcal{A}p = \mathbb{C}p$. Daí,

$$\{ppp\} = pp^*p = p$$

e, dado $a \in \mathcal{A}$,

$$P_2(p)a = \{p\{pap\}p\} = p(p^*ap^*)p = \lambda p$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo, p é um tripotente minimal.

Suponhamos agora que $\mathcal{A}$ possua tripotentes minimais. Seja e um tripotente minimal. Segue que $ee^*e = e$ e $P_2(e)\mathcal{A} = \mathbb{C}e$. Defina $d = e^*e$ e $r = ee^*$. Então

$$d^2 = e^*(ee^*e) = e^*e = d = d^*$$

e

$$r^2 = (ee^*e)e^* = ee^* = r = r^*.$$

Além disso, dado $a \in \mathcal{A}$,

$$dad = d^2ad = e^*(ee^*(ea)e^*e) = e^*\lambda_d e = \lambda_d d$$

e

$$rar = rar^2 = (ee^*(ae)e^*e)e^* = \lambda_r ee^* = \lambda_r r$$

para algum λ_d e $\lambda_r \in \mathbb{C}$. Daí, d e r são projeções atômicas.

(c) Suponhamos que as projeções atômicas de $\mathcal{A}$ sejam centrais. Dado e um tripotente minimal, sabemos pela demonstração do item anterior que $d = e^*e$ e $r = ee^*$ são projeções atômicas. Então d e r são centrais. Daí, dado $a \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned} P_1(e)a = 2(D_e - Q_e^2)a = 2(\{eea\} - \{e\{eae\}e\}) &= ee^*a + ae^*e - 2ee^*ae^*e \\ &= ra + ad - ee^*ad - rae^*e = ra + ad - (ed)e^*a - ae^*(re) \\ &= ra + ad - ee^*a - ae^*e = ra + ad - ra - ad = 0. \end{aligned}$$

Logo, e é diagonalizante.

Agora, suponhamos que os tripotentes minimais de $\mathcal{A}$ sejam diagonalizantes. Seja p uma projeção atômica de $\mathcal{A}$. Então p é um tripotente minimal e, portanto, p é diagonalizante. Assim, dado $a \in \mathcal{A}$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = P_1(p)(pa - ap) &= pp^*(pa - ap) + (pa - ap)p^*p - 2pp^*(pa - ap)p^*p \\ &= pp^*pa - pp^*ap + pap^*p - app^*p - 2pp^*pap^*p + 2pp^*app^*p \\ &= pa - pap + pap - ap - 2pap + 2pap \\ &= pa - ap. \end{aligned}$$

Ou seja, p é central. □

O seguinte resultado segue claramente do Teorema 3.2.3 e da Proposição 3.3.1.

Teorema 3.3.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra. São equivalentes:*

(i) *$\mathcal{A}$ é não-atômica;*

(ii) *Todo polinômio de tipo finito $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (DE)*;*

(iii) *Todo polinômio aproximável $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (DE)*;*

Além disso, pelo Corolário 3.2.4, este teorema pode ser enunciado numa forma estendida conforme apresentamos a seguir.

Corolário 3.3.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra. São equivalentes:*

(i) *$\mathcal{A}$ é não-atômica;*

(ii) *$\mathcal{A}$ não possui tripotentes minimais;*

(iii) *Todo polinômio de tipo finito $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (DE)*;*

(iv) *Todo polinômio aproximável $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (DE)*;*

(v) *Todo operador fracamente compacto $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (DE)*;*

(vi) *Todo operador de posto um $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (DE).

O próximo teorema segue do Teorema 3.2.5 e da Proposição 3.3.1.

Teorema 3.3.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. São equivalentes:*

(i) *Todas as projeções atômicas de $\mathcal{A}$ são centrais;*

(ii) *Todo polinômio de tipo finito $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (ADE)*;*

(iii) *Todo polinômio aproximável $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (ADE)*;*

Também podemos enunciar uma versão estendida deste teorema segundo o Corolário 3.2.6.

Corolário 3.3.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. São equivalentes:*

(i) *Todas as projeções atômicas de $\mathcal{A}$ são centrais;*

(ii) *Todos os tripotentes minimais de $\mathcal{A}$ são diagonalizantes;*

(iii) *Todo polinômio de tipo finito $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (ADE)*;*

(iv) *Todo polinômio aproximável $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (ADE)*;*

(v) *Todo operador fracamente compacto $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (ADE)*;*

(vi) *Todo operador de posto um $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfaz* (ADE).

Note que esses resultados estendem o Teorema 2.3.1 e o Teorema 2.3.2.

CAPÍTULO 4

A propriedade polinomial alternativa de Daugavet

Este capítulo tem dois objetivos. O primeiro deles é estudar a estabilidade da propriedade polinomial alternativa de Daugavet sobre somas c_0, ℓ_∞ e ℓ_1. E o outro é utilizar este estudo para apresentar exemplos de espaços que possuem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

4.1 Estabilidade da propriedade polinomial alternativa de Daugavet

Seja $(X_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de espaços de Banach. Os espaços vetoriais

$$\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{c_0} = \left\{(x_j)_{j=1}^\infty : \ x_j \in X_j, \ \lim_j \|x_j\| = 0\right\}$$

e

$$\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_\infty} = \left\{(x_j)_{j=1}^\infty : \ x_j \in X_j, \ \sup_j \|x_j\| < \infty\right\},$$

munidos da norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\| = \sup_j \|x_j\|,$$

são espaços de Banach, chamados *soma* c_0 e *soma* ℓ_∞ da sequência $(X_j)_{j=1}^{\infty}$, respectivamente. O espaço vetorial

$$\big[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\big]_{\ell_1} = \big\{(x_j)_{j=1}^{\infty} : \ x_j \in X_j, \ \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty\big\},$$

munido da norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\| = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|,$$

também é um espaço de Banach, chamado *soma* ℓ_1 da sequência $(X_j)_{j=1}^{\infty}$. Essas definições podem ser encontradas na referência [16].

Segundo ([20], Proposition 3.1) e ([6], Proposition 6.7) a propriedade alternativa de Daugavet e a propriedade polinomial de Daugavet são estáveis sobre somas c_0 e ℓ_∞. Mais precisamente, valem os resultados enunciados a seguir.

Proposição 4.1.1. *Seja $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\big[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\big]_{\ell_\infty}$ (ou $\big[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\big]_{c_0}$) tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, todo X_j tem a propriedade alternativa de Daugavet.*

Proposição 4.1.2. *Seja $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\big[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\big]_{\ell_\infty}$ (ou $\big[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\big]_{c_0}$) tem a propriedade polinomial de Daugavet se, e somente se, todo X_j tem a propriedade polinomial de Daugavet.*

O primeiro objetivo desta seção é mostrar que a propriedade polinomial alternativa de Daugavet também é estável sobre somas c_0 e ℓ_∞. A prova da proposição a seguir foi baseada na demonstração de ([6], Proposition 6.7).

Proposição 4.1.3. *Seja $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\big[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\big]_{\ell_\infty}$ (ou $\big[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\big]_{c_0}$) tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, todo X_j tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.*

Demonstração. Seja $X = \big[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\big]_{\ell_\infty}$. Suponha que X tenha a propriedade polinomial alternativa de Daugavet e fixe $j_0 \in \mathbb{N}$. Dado $P : X_{j_0} \to X_{j_0}$ um polinômio fracamente compacto não-nulo, defina o polinômio $Q : X \to X$ por

$$Q((x_j)_{j=1}^{\infty}) = i_{j_0}(P(x_{j_0})),$$

onde i_{j_0} é a inclusão natural de X_{j_0} em X. Claramente Q é fracamente compacto e $\|Q\| = \|P\|$. Segue que Q satisfaz (ADE). Então

$$\begin{aligned}
1 < 1 + \|P\| = 1 + \|Q\| &= \max_{|w|=1} \|\mathrm{Id}_X + wQ\| \\
&= \max_{|w|=1} \left\{ \max \left\{ \sup_{\|x_{j_0}\| \leq 1} \|x_{j_0} + wP(x_{j_0})\|, \sup_{\|x_j\| \leq 1} \{\|x_j\| : j \neq j_0\} \right\} \right\} \\
&= \max_{|w|=1} \left\{ \sup_{\|x_{j_0}\| \leq 1} \|x_{j_0} + wP(x_{j_0})\| \right\} \\
&= \max_{|w|=1} \|\mathrm{Id}_{X_{j_0}} + wP\|,
\end{aligned}$$

ou seja, P satisfaz (ADE). Assim, X_{j_0} tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

Reciprocamente, suponha que todo X_j tenha a propriedade polinomial alternativa de Daugavet. Sejam $p \in \mathcal{P}(X)$ com $\|p\| = 1$, $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in S_X$ e $0 < \varepsilon < 1$. Já que $\|y\| = 1$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_{j_0}\| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Tome $z = (z_j)_{j=1}^{\infty} \in B_X$ tal que

$$|p(z)| > \frac{1 - \varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{2}},$$

e defina o polinômio $q \in \mathcal{P}(X_{j_0})$ por

$$q(x_{j_0}) = p(z + i_{j_0}(x_{j_0} - z_{j_0})).$$

Segue que

$$1 = \|p\| \geq \|q\| \geq |q(z_{j_0})| = |p(z)| > \frac{1 - \varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Já que X_{j_0} tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet, podemos aplicar o Corolário 1.3.9 com $\frac{q}{\|q\|}$, $\frac{y_{j_0}}{\|y_{j_0}\|}$ e $\frac{\varepsilon}{2}$ para obter $w_1, w_2 \in \mathbb{T}$ e $x_{j_0}^0 \in B_{X_{j_0}}$ tais que

$$\mathrm{Re}\, w_1 \frac{q}{\|q\|}(x_{j_0}^0) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left\| \frac{y_{j_0}}{\|y_{j_0}\|} + w_2 x_{j_0}^0 \right\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, definindo $x_0 = z + i_{j_0}(x_{j_0}^0 - z_{j_0}) \in B_X$, temos

$$\mathrm{Re}\, w_1 p(x_0) = \mathrm{Re}\, w_1 q(x_{j_0}^0) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|q\| > 1 - \varepsilon,$$

e

$$\begin{aligned}
\|y + w_2 x_0\| &\geq \|y_{j_0} + w_2 x_{j_0}^0\| \\
&\geq \left\| \frac{y_{j_0}}{\|y_{j_0}\|} + w_2 x_{j_0}^0 \right\| - \left\| \frac{y_{j_0}}{\|y_{j_0}\|} - y_{j_0} \right\| \\
&> 2 - \frac{\varepsilon}{2} - (1 - \|y_{j_0}\|) \\
&> 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet, pelo Corolário 1.3.9. $\square$

Esta proposição implica que, para um espaço de Banach X, $c_0(X)$ e $\ell_\infty(X)$ têm a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

A propriedade alternativa de Daugavet também é estável sobre somas ℓ_1, segundo a proposição apresentada a seguir.

Proposição 4.1.4 ([20], Proposition 3.1)**.** *Seja $(X_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_1}$ tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, todo X_j tem a propriedade alternativa de Daugavet.*

Infelizmente esta proposição não pode ser estendida para a propriedade polinomial alternativa de Daugavet, conforme mostraremos mais adiante. Porém, uma de suas direções é válida para a k-DP e para a k-ADP.

Proposição 4.1.5. *Seja $(X_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de espaços de Banach. Se $\left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_1}$ tem a k-DP (resp. a k-ADP), então todo X_j tem a k-DP (resp. a k-ADP).*

Demonstração. Seja $X = \left[\bigoplus_{j=1}^\infty X_j\right]_{\ell_1}$. Suponha que X tenha a k-DP e fixe $j_0 \in \mathbb{N}$. Dado $P : X_{j_0} \to X_{j_0}$ um polinômio k-homogêneo de posto um, defina $Q : X \to X$ por

$$Q((x_j)_{j=1}^\infty) = i_{j_0}(P(x_{j_0})),$$

onde i_{j_0} é a inclusão natural de X_{j_0} em X. Claramente Q é um polinômio k-homogêneo de posto um e $\|Q\| = \|P\|$. Segue que Q satisfaz (DE). Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $(x_j)_{j=1}^\infty \in S_X$ e $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in S_{X^*}$ tais que $\displaystyle\sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j) = 1$ e

$$\|Q\| - \varepsilon \leq \operatorname{Re}(x_j^*)\left[Q((x_j)_{j=1}^\infty)\right],$$

pela Proposição 1.3.6. Como $\sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j) = 1$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in S_X$ e $(x_j^*)_{j=1}^{\infty} \in S_{X^*} = S_{[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j^*]_{\ell_\infty}}$, segue que

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re} x_j^*(x_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^*(x_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^*\|\|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| = 1.$$

Daí, $\operatorname{Re} x_{j_0}^*(x_{j_0}) = \|x_{j_0}^*\|\|x_{j_0}\|$. Caso contrário, teríamos $\operatorname{Re} x_{j_0}^*(x_{j_0}) < \|x_{j_0}^*\|\|x_{j_0}\|$, que nos levaria a contradição

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re} x_j^*(x_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^*\|\|x_j\|,$$

já que $\sum_{j \neq j_0} \operatorname{Re} x_j^*(x_j) \leq \sum_{j \neq j_0} \|x_j^*\|\|x_j\|$. Como

$$\|x_{j_0}^*\|\|x_{j_0}\| = \operatorname{Re} x_{j_0}^*(x_{j_0}) \leq |x_{j_0}^*(x_{j_0})| \leq \|x_{j_0}^*\|\|x_{j_0}\|,$$

temos $x_{j_0}^*(x_{j_0}) = \operatorname{Re} x_{j_0}^*(x_{j_0}) = \|x_{j_0}^*\|\|x_{j_0}\|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|P\| - \varepsilon &= \|Q\| - \varepsilon \\
&\leq \operatorname{Re}(x_j^*)\big[Q((x_j)_{j=1}^{\infty})\big] \\
&= \operatorname{Re} x_{j_0}^*\big(P(x_{j_0})\big) \\
&\leq \frac{1}{\|x_{j_0}^*\|\|x_{j_0}\|^k} \cdot \operatorname{Re} x_{j_0}^*\big(P(x_{j_0})\big) \\
&= \operatorname{Re} \frac{x_{j_0}^*}{\|x_{j_0}^*\|}\left(P\left(\frac{x_{j_0}}{\|x_{j_0}\|}\right)\right) \\
&\leq \sup \operatorname{Re} \mathrm{V}(P),
\end{aligned}$$

já que $\|x_{j_0}^*\| \leq 1$, $\|x_{j_0}\| \leq 1$ e $\frac{x_{j_0}^*}{\|x_{j_0}^*\|}\left(\frac{x_{j_0}}{\|x_{j_0}\|}\right) = 1$. Ou seja, P satisfaz (DE), pela Proposição 1.3.6. Logo, X_{j_0} tem a k-DP.

A demonstração para o caso da k-ADP é totalmente análogo. □

A demonstração da proposição anterior fez uso das ideias de ([4], Proposition 2.8) e de ([21], Proposition 1).

Observação 4.1.6. Uma pergunta natural após esta proposição é se a sua recíproca é verdadeira. A resposta para esta pergunta é negativa. Segundo os Exemplos 1.3.16, $\mathbb{C}$ tem a k-DP para todo $k \geq 2$ e $\mathbb{R}$ tem a k-DP para todo k par. Entretanto, de acordo com o Exemplo 1.3.18, $\ell_1(\mathbb{C})$ e $\ell_1(\mathbb{R})$ não possuem a k-ADP para nenhum $k \geq 2$. Logo, a recíproca da proposição não é valida nem para espaços reais nem para espaços complexos.

Observação 4.1.7. A seguinte questão ainda está em aberto. Se o espaço $\left[\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j\right]_{\ell_1}$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet, então todo X_j tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet? Porém sabemos que sua recíproca é falsa no caso complexo. De fato, $\mathbb{C}$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet, segundo o Exemplo 1.3.7.b, enquanto que $\ell_1(\mathbb{C})$ não possui a k-ADP para nenhum $k \geq 2$, e portanto não tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

4.2 Espaços com a propriedade polinomial alternativa de Daugavet

São conhecidas caracterizações da propriedade alternativa de Daugavet e da propriedade polinomial de Daugavet para alguns espaços de funções a valores vetoriais.

Proposição 4.2.1 ([20], Theorem 3.4)**.** *Sejam X um espaço de Banach, K um espaço de Hausdorff compacto e (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita. Então:*

(a) $C(K, X)$ tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, K não possui pontos isolados ou X tem a propriedade alternativa de Daugavet;

(b) $L_\infty(\mu, X)$ tem a propriedade alternativa de Daugavet se, e somente se, μ é não-atômica ou X tem a propriedade alternativa de Daugavet.

Proposição 4.2.2 ([6], Corollary 6.9)**.** *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e seja X um espaço de Banach. Então $L_\infty(\mu, X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet se, e somente se, μ é não-atômica ou X tem a propriedade polinomial de Daugavet.*

Proposição 4.2.3 ([6], Proposition 6.10)**.** *Sejam X um espaço de Banach complexo, K um espaço de Hausdorff compacto, L um espaço de Hausdorff localmente compacto e Ω um espaço de Hausdorff completamente regular. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(a) $C(K, X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet se, e somente se, K não possui pontos isolados ou X tem a propriedade polinomial de Daugavet.

(b) $C_w(K, X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet se, e somente se, K não possui pontos isolados ou X tem a propriedade polinomial de Daugavet.

(c) $C_0(L, X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet se, e somente se, L não possui pontos isolados ou X tem a propriedade polinomial de Daugavet.

(d) $C_b(\Omega, X)$ *tem a propriedade polinomial de Daugavet se, e somente se,* Ω *não possui pontos isolados ou* X *tem a propriedade polinomial de Daugavet.*

A seguir apresentaremos dois resultados que estendem a Proposição 4.2.1 e generalizam a Proposição 4.2.2 e a Proposição 4.2.3 para a propriedade polinomial alternativa de Daugavet. As provas destes resultados foram baseadas nas provas de ([6], Corollary 6.9 e Proposition 6.10) e ([21], Remark 6).

Utilizando a Proposição 4.1.3 conseguimos uma caracterização da propriedade polinomial alternativa de Daugavet para espaços de funções essencialmente limitadas a valores vetoriais. Para provar este resultado faremos uso do seguinte lema.

Lema 4.2.4. *Seja* (Ω, Σ, μ) *um espaço de medida* σ*-finita. Então* μ *possui no máximo uma quantidade enumerável de átomos.*

Demonstração. Seja Γ o conjunto dos átomos de μ. Como μ é σ-finita, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ com $\mu(\Omega_i) < \infty$. Então

$$\begin{aligned}\Gamma &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{A \in \Gamma : A \subset \Omega_i\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ A \in \Gamma : A \subset \Omega_i,\ \mu(A) \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right] \right\}.\end{aligned}$$

Agora, fixados i e n,

$$\begin{aligned}\infty &> \mu(\Omega_i) \\ &\geq \mu\left(\bigcup \left\{ A \in \Gamma : A \subset \Omega_i,\ \mu(A) \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right] \right\} \right) \\ &= \sum_{\left\{A\in\Gamma : A\subset\Omega_i, \mu(A)\in\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]\right\}} \mu(A) \\ &> \sum_{\left\{A\in\Gamma : A\subset\Omega_i, \mu(A)\in\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]\right\}} \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Segue que o conjunto $\left\{A \in \Gamma : A \subset \Omega_i, \mu(A) \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]\right\}$ é finito para todos $i, n \in \mathbb{N}$. Como Γ é a união enumerável destes conjuntos, temos Γ enumerável. Logo, μ possui no máximo uma quantidade enumerável de átomos. $\square$

Proposição 4.2.5. *Seja* (Ω, Σ, μ) *um espaço de medida* σ*-finita e seja* X *um espaço de Banach. Então* $L_\infty(\mu, X)$ *tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se,* μ *é não-atômica ou* X *tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.12, sabemos que se μ é uma medida σ-finita não-atômica então $L_\infty(\mu, X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet e, em particular, a propriedade polinomial alternativa de Daugavet. Agora, se μ é uma medida σ-finita com pelo menos um átomo, então μ possui no máximo uma quantidade enumerável de átomos pelo lema anterior. Daí, existem um conjunto enumerável não-vazio J e uma medida σ-finita não-atômica ν tais que

$$L_\infty(\mu, X) = L_\infty(\nu, X) \oplus_\infty \left[\bigoplus_{j \in J} X \right]_{\ell_\infty}.$$

Neste caso, pela Proposição 4.1.3 temos que $L_\infty(\mu, X)$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet. □

Também conseguimos uma caracterização da propriedade polinomial alternativa de Daugavet para espaços de funções contínuas a valores vetoriais. Para provar este resultado faremos uso do seguinte lema.

Lema 4.2.6 ([17], Lemma 1)**.** *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja X um espaço de Banach. Para todo $f \in C_w(K, X)$, o conjunto*

$$\{t \in K : f \text{ é contínua em } t \text{ para a topologia da norma em } X\}$$

é denso em K.

Proposição 4.2.7. *Sejam X um espaço de Banach complexo, K um espaço de Hausdorff compacto, L um espaço de Hausdorff localmente compacto e Ω um espaço de Hausdorff completamente regular. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

(a) $C(K, X)$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, K não possui pontos isolados ou X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

(b) $C_w(K, X)$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, K não possui pontos isolados ou X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

(c) $C_0(L, X)$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, L não possui pontos isolados ou X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

(d) $C_b(\Omega, X)$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet se, e somente se, Ω não possui pontos isolados ou X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

Demonstração. Provaremos apenas a afirmação *(b)*, pois as demais seguem analogamente. Suponhamos primeiramente que $C_w(K,X)$ tenha a propriedade polinomial alternativa de Daugavet e que K possua pelo menos um ponto isolado. Então existe um espaço de Banach Z tal que $C_w(K,X) = X \oplus_\infty Z$. Daí, pela Proposição 4.1.3 segue que X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

Agora, suponhamos que K não possua pontos isolados. Neste caso, o Teorema 1.3.12 garante que $C_w(K,X)$ tem a propriedade polinomial de Daugavet e, em particular, a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

Finalmente, suponhamos que X tenha a propriedade polinomial alternativa de Daugavet. Dados $P \in \mathcal{P}(C_w(K,X), C_w(K,X))$ fracamente compacto com $\|P\| = 1$ e $\varepsilon > 0$, existem $f_0 \in S_{C_w(K,X)}$ e $t_0 \in K$ tais que f_0 é contínua em t_0 para a topologia da norma em X e

$$\|P(f_0)(t_0)\| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Como P é contínuo em f_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|P(f_0) - P(g)\| < \varepsilon \ \text{ se } \ \|f_0 - g\| < \delta. \tag{4.2}$$

Além disso, como f_0 é contínua em norma em t_0, temos que t_0 não pertence ao conjunto $W = \overline{\{t \in K : \|f(t) - f(t_0)\| \geq \delta\}}$. Assim, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $\varphi : K \to [0,1]$ tal que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t = t_0 \\ 0, & t \in W. \end{cases}$$

Seja $x_0 \in S_X$ tal que $f_0(t_0) = \|f_0(t_0)\| x_0$. Defina $\Psi : \mathbb{C} \to C_w(K,X)$ por

$$\Psi(z) = (1 - \varphi) f_0 + \varphi x_0 z.$$

Segue que

$$\|f_0 - \Psi(\|f_0(t_0)\|)\| = \sup_{t \in K} \big\| f_0(t) - \big((1 - \varphi(t)) f_0(t) + \varphi(t) f_0(t_0)\big) \big\| = \sup_{t \in K} \varphi(t) \|f_0(t) - f_0(t_0)\| < \delta,$$

pois $\varphi(W) = \{0\}$. Daí, por (4.2),

$$\big\| P(f_0) - P\big(\Psi(\|f_0(t_0)\|)\big) \big\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

que implica

$$\big\| P(f_0)(t_0) - P\big(\Psi(\|f_0(t_0)\|)\big)(t_0) \big\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, pela equação (4.1), obtemos

$$\big\|P\big(\Psi(\|f_0(t_0)\|)\big)(t_0)\big\| > \|P(f_0)(t_0)\| - \frac{\varepsilon}{2} > 1-\varepsilon.$$

Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar $x_0^* \in S_{X^*}$ tal que

$$x_0^*\left(\big[P\big(\Psi(\|f_0(t_0)\|)\big)\big](t_0)\right) > 1-\varepsilon.$$

Já que a função

$$z \longmapsto x_0^*\left(\big[P\big(\Psi(z)\big)\big](t_0)\right)$$

é holomorfa, o Teorema do Módulo Máximo garante que existe $z_0 \in \mathbb{T}$ tal que

$$\big\|P\big(\Psi(z_0)\big)(t_0)\big\| \geq \left|x_0^*\left(\big[P\big(\Psi(z_0)\big)\big](t_0)\right)\right| \geq x_0^*\left(\big[P\big(\Psi(\|f_0(t_0)\|)\big)\big](t_0)\right) > 1-\varepsilon.$$

Agora, defina $x_1 = z_0x_0 \in S_X$, considere $x_1^* \in S_{X^*}$ tal que $x_1^*(x_1) = 1$, e defina $\Phi : X \to C_w(K,X)$ por

$$\Phi(x) = x_1^*(x)(1-\varphi)f_0 + \varphi x.$$

Observe que $\|\Phi(x)\| \leq 1$ para todo $x \in B_X$ e que $\Phi(x_1) = \Psi(z_0)$. Assim,

$$\big\|P\big(\Phi(x_1)\big)(t_0)\big\| > 1-\varepsilon.$$

Finalmente, defina o polinômio $Q : X \to X$ por

$$Q(x) = \big[P\big(\Phi(x)\big)\big](t_0).$$

Então Q é fracamente compacto e

$$\|Q\| = \sup_{x\in B_X}\|Q(x)\| \geq \|Q(x_1)\| = \big\|\big[P\big(\Phi(x_1)\big)\big](t_0)\big\| > 1-\varepsilon.$$

Como X tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet, segue que Q satisfaz (ADE). Logo,

$$\begin{aligned}
\sup_{|w|=1}\|\mathrm{Id}_{C_w(K,X)} + wP\| &\geq \sup_{|w|=1}\sup_{x\in B_X}\big\|\Phi(x) + wP\big(\Phi(x)\big)\big\| \\
&\geq \sup_{|w|=1}\sup_{x\in B_X}\big\|\Phi(x)(t_0) + w\big[P\big(\Phi(x)\big)\big](t_0)\big\| \\
&= \sup_{|w|=1}\sup_{x\in B_X}\|x_1^*(x)(1-\varphi(t_0))f_0(t_0) + \varphi(t_0)x + wQ(x)\| \\
&= \sup_{|w|=1}\sup_{x\in B_X}\|x + wQ(x)\| \\
&= \sup_{|w|=1}\|\mathrm{Id}_X + wQ\| \\
&= 1 + \|Q\| > 2-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $C_w(K,X)$ tem a propriedade polinomial alternativa de Daugavet. $\square$

Para os espaços das funções Bochner-integráveis a valores vetoriais são conhecidas caracterizações apenas da propriedade de Daugavet e da propriedade alternativa de Daugavet.

Proposição 4.2.8 ([21], Remark 9; [20], Theorem 3.4)**.** *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e seja X um espaço de Banach. Então $L_1(\mu, X)$ tem a propriedade de Daugavet (resp. propriedade alternativa de Daugavet) se, e somente se, μ é não-atômica ou X tem a propriedade de Daugavet (resp. propriedade alternativa de Daugavet).*

Como consequência da Proposição 4.1.5 conseguimos generalizar parcialmente este resultado para a k-DP e para a k-ADP.

Proposição 4.2.9. *Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e seja X um espaço de Banach. Se $L_1(\mu, X)$ tem a k-DP (resp. k-ADP), então μ é não-atômica ou X tem a k-DP (resp. k-ADP).*

Demonstração. Suponha que μ possua pelo menos um átomo, então μ possui no máximo uma quantidade enumerável de átomos pelo Lema 4.2.4. Daí, existem um conjunto enumerável não-vazio J e uma medida σ-finita não-atômica ν tais que

$$L_1(\mu, X) = L_1(\nu, X) \oplus_1 \left[\bigoplus_{j \in J} X \right]_{\ell_1}.$$

Assim, pela Proposição 4.1.5, se $L_1(\mu, X)$ tem a k-DP (resp. k-ADP), então X tem a k-DP (resp. k-ADP). $\square$

Observação 4.2.10. Segue da Observação 4.1.6 que a recíproca da proposição anterior não é valida. Além disso, pela Observação 4.1.7, se X é um espaço de Banach complexo com a propriedade polinomial alternativa de Daugavet, não podemos afirmar que $L_1(\mu, X)$ tem a k-ADP para algum $k \in \mathbb{N}$ ou a propriedade polinomial alternativa de Daugavet.

Referências Bibliográficas

[1] J. Arazy, W. Kaup. *On continuous Peirce decompositions, Schur multipliers and the perturbation of triple functional calculus*. Math. Ann. **320** (2001), 431-461.

[2] T. Barton, R. Timoney. *Weak*-continuity of Jordan triple products and its applications*. Math. Scand. **59** (1986), 177-191.

[3] B. Beauzamy. *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[4] Y. S. Choi, D. García, S. G. Kim, M. Maestre. *The polynomial numerical index of a Banach space*. Proc. Edinb. Math. Soc. **49** (2006), 32-52.

[5] Y. S. Choi, D. García, M. Maestre, M. Martín. *The Daugavet equation for polynomials*. Studia Math. **178** (2007), 63-82.

[6] Y. S. Choi, D. García, M. Maestre, M. Martín. *The polynomial numerical index for some complex vector-valued function spaces*. Quart. J. Math. **59** (2008), 455-474.

[7] Y. S. Choi, S. G. Kim. *Norm or numerical radius attaining multilinear mappings and polynomials*. J. London Math. Soc. **54** (1996), 135-147.

[8] I. K. Daugavet. *On a property of completely continuous operators in the space C*. Uspekhi Mat. Nauk **18** (1963), 157-158 (em russo).

[9] S. Dineen. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*. Springer-Verlag, London, 1999.

[10] J. Duncan, C. M. McGregor, J. D. Pryce, A. J. White. *The numerical index of a normed space*. J. London Math. Soc. **2** (1970), 481-488.

[11] Y. Friedman, B. Russo. *The Gelfand-Naimark theorem for JB*-triples*. Duke Math. J. **53** (1986), 139-147.

[12] J. R. Holub. *A property of weakly compact operators on* $C[0,1]$. Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 396-398.

[13] J. R. Holub. *Daugavet's equation and operators on* $L_1(\mu)$. Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 295-300.

[14] V. M. Kadets, R. V. Shvidkoy, G. G. Sirotkin, D. Werner. *Banach spaces with the Daugavet property*. Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 855-873.

[15] H. Kamowitz. *A property of compact operators*. Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 231-236.

[16] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces*. Springer, Berlin, 1996.

[17] G. López, M. Martín, J. Merí. *Numerical index of Banach spaces of weakly or weakly-star continuous functions*. Rocky Mountain J. Math. **38** (2008), no. 1, 213-223.

[18] G. Y. Lozanovskii. *On almost integral operators in KB-spaces*. Vestnik Leningrad Univ. Mat. Mekh. Astr. **7** (1966), 31-44.

[19] M. Martín, J. Merí, M. Popov. *The polynomial Daugavet property for atomless* $L_1(\mu)$*-spaces*. Arch. Math. **94** (2010), 383-389.

[20] M. Martín, T. Oikhberg. *An alternative Daugavet property*. J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 158-180.

[21] M. Martín, R. Payá. *Numerical index of vector-valued function spaces*. Studia Math. **142** (2000), 269-280.

[22] M. Martín, A. Villena. *Numerical index and the Daugavet property for* $L_\infty(\mu, X)$. Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **46** (2003), no. 2, 415-420.

[23] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[24] M. Neal, B. Russo. *Existence of contractive projections on preduals of JBW*-triples*. Israel J. Math. **182** (2011), 293-331.

[25] T. Oikhberg. *The Daugavet property of C^*-algebras and non-commutative L_p-spaces*. Positivity **6** (2002), 59-73.

[26] G. Roos. *Jordan Triple Systems, in: Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains*. Progress in Mathematics, vol. 185, Birkhäuser, Boston, 2000.

[27] E. R. Santos. A Equação de Daugavet para Operadores no Espaço $C(S)$, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 2009.

[28] V. S. Sunder. *Functional Analysis: Spectral Theory*. Birkhäuser, Berlin, 1998.

[29] D. Werner, *An elementary approach to the Daugavet equation, in: Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis and Probability*. Lecture Notes in Pure and Applied Math. **175**, Marcel Dekker, New York, 1996, 449-454.

[30] P. Wojtaszczyk. *Some remarks on the Daugavet equation*. Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 1047-1052.