UNICAMP

MAZÍLIO CORONEL MALAVAZI

PROBLEMAS ELÍPTICOS DO TIPO CÔNCAVO-CONVEXO COM CRESCIMENTO CRÍTICO E CONDIÇÃO DE NEUMANN

CAMPINAS

2013

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

MAZÍLIO CORONEL MALAVAZI

PROBLEMAS ELÍPTICOS DO TIPO CÔNCAVO-CONVEXO COM CRESCIMENTO CRÍTICO E CONDIÇÃO DE NEUMANN

Orientador: Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Doutor em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO MAZÍLIO CORONEL MALAVAZI E ORIENTADA PELO PROF. DR. FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

Assinatura do Orientador

Francisco O. V. de Paiva

CAMPINAS

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

	Malavazi, Mazílio Coronel, 1983-
M291p	Problemas elípticos do tipo côncavo-convexo com crescimento crítico e condição de Neumann / Mazílio Coronel Malavazi. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.
	Orientador: Francisco Odair Vieira de Paiva. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Equações diferenciais elípticas. 3. Teoria do ponto crítico (Análise matemática). 4. Princípios variacionais. 5. Neumann, Problema de. I. Paiva, Francisco Odair Vieira de,1975-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Elliptic problems of the concave-convex type with critical growth and Neumann condition
Palavras-chave em inglês:
Nonlinear partial differential equations
Elliptic differential equations
Critical point theory (Mathematical analysis)
Variational principles
Neumann problem
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Francisco Odair Vieira de Paiva [Orientador]
Gaetano Siciliano
Marcelo Fernandes Furtado
José Luiz Boldrini
Olivâine Santana de Queiroz
Data de defesa: 14-01-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 14 de janeiro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

Prof(a). Dr(a). GAETANO SICILIANO

Prof(a). Dr(a). MARCELO FERNANDES FURTADO

Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof(a). Dr(a). OLIVÂINE SANTANA DE QUEIROZ

... à minha família, em especial à Sidimara.

"As ciências têm as raízes amargas, porém os frutos são doces."
(Aristóteles)

Agradecimentos

- Ao professor Odair, pela orientação humana e construtiva. Por acreditar em mim, quando eu mesmo não acreditava mais.
- À minha família, especialmente aos meus pais, por me ensinarem que o valor da vida está nas pessoas que caminham com você.
- Aos amigos de agora e/ou de outrora.
- Aos professores de longa data, representados pelos professores Cristiano, Luiz Antônio, Zoraide, Nelo, Arguelo e Enoc.
- Aos professores de matemática do ICNHS, em nome dos amigos Rubens, Lee e Fábio, pela cooperação.
- Ao Imecc/Unicamp, em nome de seus professores e funcionários, em especial a Tânia, por tudo, mas principalmente por dizer as palavras certas nos momentos incertos.
- Ao departamento de matemática da UFSCAR, pela cooperação para a conclusão deste trabalho.
- À Capes, pelo apoio financeiro parcial.
- Àqueles que lamentavelmente não me lembro neste momento, mas que de alguma forma colaboraram com minha formação.

Resumo

Nesta tese obtemos resultados de existência, não-existência e multiplicidade de soluções para a classe de problemas elípticos, com condição de Neumann homogênea, $-\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + f(x,u)$, sobre um domínio limitado e suave do espaço euclidiano, $0 < q < 1$, a é Hölder contínua, podendo mudar de sinal e f é Hölder contínua em x, localmente Hölder contínua em u e com crescimento crítico. A existência da primeira solução é obtida através do método de sub-super solução e a segunda solução é obtida através do Teorema do Passo da Montanha.

Palavras-Chave: Problema Crítico, Existência de Solução, Multiplicidade de Soluções, Sub-Super Solução, Teorema do Passo da Montanha, Trudinger-Moser, Crescimento Exponencial.

Abstract

In this thesis results of existence, nonexistence and multiplicity of solutions for a class of elliptic problems with homogeneous Neumann condition, $-\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + f(x,u)$, on a bounded and smooth domain of Euclidean space, $0 < q < 1$, a is Holder continuous and may change sign and f is Holder continuous in x, locally Holder continuous in u and with critical growth. The existence of the first solution was obtained by the method of upper and lower solution and the second solution was obtained by Mountain Pass Theorem.

Keywords: Critical Problem, Solution Existence, Multiplicity of Solutions, Upper and Lower Solution, Pass Mountain Theorem, Trudinger-Moser, Exponential Growth.

Sumário

Introdução

Equações elípticas com não-linearidades de crescimento crítico, tem sido extensivamente estudadas nos últimos anos. Em dimensão $N \geq 3$ o crescimento crítico é do tipo potência e é determinado pelas imersões de Sobolev, já no caso $N = 2$ o crescimento crítico é do tipo exponencial e é determinado pela desigualdade de Trudinger-Moser. Enquanto equações com crescimento subcrítico são abordadas por métodos variacionais clássicos, as equações com crescimento crítico necessitam de métodos variacionais específicos, devido principalmente a perda de compacidade.

Em diversos trabalhos recentes, vide [1, 5, 6, 7, 8, 9, 17, 16, 18, 24, 25, 26, 42, 44, 45, 46, 52], pudemos notar um enorme interesse sobre soluções positivas de problemas elípticos da forma:

$$-\Delta u = g(x, u, \lambda), \ \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \ \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Quando g é sublinear na origem em algum aberto $\Omega' \subset \Omega$, ou seja,

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{g(x, s, \lambda)}{s} = +\infty$$

uniformemente em $x \in \Omega'$ e para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fixado, os resultados versam que, para todo λ em um fixado intervalo limitado ou ilimitado da reta, o problema $-\Delta u = g(x, u, \lambda)$ admite pelo menos duas soluções positivas. Dentre estes podemos citar o trabalho pioneiro de Ambrosetti-Brezis-Cerami [8], bem como [1, 5, 7, 9, 24, 25, 26, 44, 45, 46, 52].

Em todo o nosso trabalho, assumimos Ω como um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com bordo suave $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$ e trabalhamos com a condição de Neumann homogênea na fronteira, para tanto consideramos η como o vetor normal unitário apontando para fora da fronteira de Ω.

No *Capítulo 1*, estudamos a existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos parametrizados,

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \qquad (N_\lambda)$$

onde $N \geq 2$, $0 < q < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real, $a \in C^\gamma(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \gamma \leq 1$.

No caso de $\lambda = 0$ e $f(x,u) = 0$, as soluções de $(N_{\lambda=0})$, correspondem a soluções estacionárias da equação parabólica

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta(w^m) + a(x)w, \quad m > 1, \qquad (1)$$

sob a transformação $w = u^{\frac{1}{m}}$. Conforme Alama ([5], Pg. 813), a equação (1) tem sido considerada como um modelo de densidade populacional $w(x,t)$ de uma única espécie móvel em meios heterogêneos, nesse caso $a(x)$ muda de sinal e representa a taxa de crescimento local, tomando valores negativos apenas fora de uma região fixada.

Nós consideramos que $f(x,s)$ tem crescimento sublinear na origem e crescimento superlinear no infinito, ou seja, assumimos que

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{|f(x,s)|}{s} = +\infty$$

e

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{|f(x,s)|}{s} = +\infty,$$

uniformente em Ω.

Problemas com esse tipo de comportamento, tem sido estudado recentemente, por diversos autores, tendo como precursor o trabalho de Ambrosetti, Brezis & Cerami [8], onde os autores estudam o problema

$$-\Delta u = \nu u^q + u^p,$$

com condição de fronteira de Dirichlet, $0 < q < 1 < p$ e $\nu \geq 0$.

Posteriormente, o trabalho de De Figueiredo, Gossez & Ubilla [25], que nos inspirou a fazer esse estudo, aborda por exemplo o problema

$$-\Delta u = \lambda a(x)u^q + b(x)u^p,$$

com condição de fronteira de Dirichlet, $\lambda > 0$ é um parâmetro real, $0 < q < 1 < p \leq 2^* - 1$, se $N \geq 3$ e $0 < q < 1 < p < +\infty$ se $N = 1, 2$. Dentre outros trabalhos que nos motivaram nesse trabalho, para obter solução para o problema (N_λ), podemos citar [5, 25, 44, 45].

De maneira semelhante ao feito por Rabinowitz, veja [49](Apêndice B) e por Berestycki e Lions, veja [10](Apêndice), mostra-se que sob certas hipóteses sobre f, o funcional energia associado ao problema é de classe C^1 e conforme o *Apêndice A* temos que toda solução no sentido fraco é um solução clássica em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \gamma < 1$. Ainda mais, assumindo certas hipóteses sobre a, essa solução é positiva em $\overline{\Omega_a^0}$, onde $\Omega_a^0 = \text{int}\{x \in \Omega; a(x) \geq 0\}$. Para obtermos a solução usamos o método de sub-super solução e o resultado é de certa forma global relativo à λ, ou seja, obtemos solução para todo $\lambda < \lambda^*$ e nenhuma para $\lambda > \lambda^*$ e sob certas hipóteses obtemos solução para $\lambda = \lambda^*$.

No *capítulo 2*, consideramos $N \geq 3$ e obtemos resultados de multiplicidade de soluções para a seguinte subclasse de problemas elípticos parametrizados, com condição de Neumann homogênea na fronteira,

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{N_λ}$$

onde λ é um parâmetro real, $1 < q < p = 2^* - 1 = \dfrac{N+2}{N-2}$,

$$a \text{ e } b \in C^\gamma(\overline{\Omega}), \text{ para algum } 0 < \gamma \leq 1. \tag{ab_γ}$$

Resultados de multiplicidade de soluções para o problema (N_λ), com p subcrítico e $b(x) \equiv \gamma \geq 0, \gamma \in \mathbb{R}$, foram obtidos por Alama [5]. Resultados para (N_λ), com condição de Dirichlet e p subcrítico, foram obtidos por de Paiva [44]. Alguns outros problemas motivaram o nosso estudo no caso crítico: como os trabalhos de [25, 45], com condição de Dirichlet na fronteira e os trabalhos de [17, 21, 29], com condição de Neumann na fronteira.

A primeira solução é devido ao resultado do *Capítulo 1*, já para a segunda solução, usamos o Teorema do Passo da Montanha, veja Corolário 5.11, em Ghoussoub ([35], Pg. 96). Inicialmente, usando as ideias de Alama ([5], Pg. 832), mostramos que a primeira solução é um mínimo local. Assumindo certas hipóteses sobre a, b e motivados pelos resultados de [6, 44], mostramos a limitação das sequências de Palais-Smale. Utilizamos as ideias de [17, 29] para mostrar que o funcional satisfaz $(PS)_c$, para c abaixo de um determinado nível de energia. Além dos trabalhos de [17, 29], também motivados pelos trabalhos de

[16, 19, 21, 25, 39, 40, 45, 56], obtemos a segunda solução assumindo hipóteses adequadas sobre a, b e em um dos casos estudados, uma restrição em λ, quando a dimensão $N \geq 6$.

No *capítulo 3*, consideramos $N = 2$ e obtemos resultados de multiplicidade de soluções para a seguinte subclasse de problemas elípticos parametrizados, com crescimento crítico do tipo exponencial, com condição de Neumann homogênea na fronteira,

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + b(x)h(u)e^{\alpha_0 u^2} & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{N_λ}$$

onde $\alpha_0 > 0$, λ é um parâmetro real,

$$a \text{ e } b \in C^\gamma(\overline{\Omega}), \text{ para algum } 0 < \gamma \leq 1. \tag{ab_γ}$$

e

$$h \in C^\gamma_{loc}(\mathbb{R}), \text{ para algum } 0 < \gamma \leq 1. \tag{h_γ}$$

Diversos trabalhos nos motivaram a estudar essa classe de problemas críticos, veja [27, 28, 33, 34, 46, 47, 48]. As técnicas utilizadas nestes trabalhos para obterem as soluções, consiste em aplicar o Princípio Variacional de Ekeland e o Teorema do Passo da Montanha.

Neste trabalho, seguimos um caminho diferente, onde a primeira solução é devido ao resultado do *Capítulo 1*, ou seja, via método de sub-super solução e para a segunda solução, usamos o Teorema do Passo da Montanha, veja Corolário 5.11, em Ghoussoub ([35], Pg. 96). Inicialmente, usando as ideias de Alama ([5], Pg. 832), mostramos que a primeira solução é um mínimo local. Assumindo certas hipóteses sobre a, b e h, motivados pelos resultados do Odair ([44], Pg. 1250021-8), mostramos a limitação das sequências de Palais-Smale. Utilizamos as ideias de [27, 46, 47, 48] para mostrar que o funcional satisfaz $(PS)_c$, para c abaixo de um determinado nível de energia e motivados pelos trabalhos de [46, 47, 48], obtemos a segunda solução assumindo hipóteses adequadas sobre a, b e h.

Capítulo 1

Existência e Não-Existência de Solução

1 Introdução

Considere Ω como um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com bordo suave $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, $N \geq 2$ e η o vetor normal unitário apontando para fora do bordo de Ω. Nesse capítulo, temos por objetivo estudar, mais especificamente, a existência de solução para seguinte classe de problemas elípticos parametrizados, com condição de Neumann homogênea no bordo de Ω

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{M'_λ}$$

onde $0 < q < 1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real. Assumimos que $a \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma \leq 1$, quando a muda de sinal em Ω, então o Princípio do Máximo não é aplicável, portanto as soluções podem se anular em parte de Ω. Também assumimos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua em x e localmente Hölder contínua em u, com $f(x,t) = 0$, para todo $t \leq 0$.

Como estamos interessados em estudar esse problema com o crescimento de f crítico, primeiro vamos definir o que é crescimento crítico quando $N = 2$.

Definição 1.1 *Dizemos que a função f tem crescimento TM-crítico (resp. TM-subcrítico), se existe $\beta_0 > 0$ (resp. $\beta_0 = 0$), tal que*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\beta s^2}} = \begin{cases} 0 & \forall\, \beta > \beta_0, \ \textit{uniformemente em } \bar{\Omega} \\ +\infty & \forall\, \beta < \beta_0, \ \textit{uniformemente em } \bar{\Omega} \end{cases} \tag{c_{β_0}}$$

Considerando as desigualdades de Trudinger-Moser, veja o trabalho de Adimurthi e Yadava ([3], Pg. 469), temos que

$$e^{\beta u^2} \in L^1(\Omega), \ \forall\ u \in H^1(\Omega), \ \forall\ \beta > 0.$$

e existe $C > 0$, tal que

$$\sup_{\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega e^{\beta u^2} dx \leq C, \ \forall\ \beta \leq 2\pi, u \in H^1(\Omega).$$

Definimos agora os seguintes conjuntos:

$$\Omega_{a^+} = \{x \in \Omega; a(x) > 0\}; \quad \Omega_{a^-} = \{x \in \Omega; a(x) < 0\} \quad \text{e} \quad \Omega_a^0 = \text{int}\,\{x \in \Omega; a(x) \geq 0\}$$

Consideremos aqui as seguintes hipóteses sobre a e f:

(H_{a^+}) O conjunto Ω_a^+ é não-vazio.

(H_a^0) $\Omega_a^0 = \cup_1^k U_i$, $k < +\infty$, U_i componente conexa, U_i com bordo suave C^2 e $U_i \cap \Omega_a^+ \neq \emptyset$, $\forall i = 1, ..., k$.

(H_f^1) Para $N \geq 3$, assuma que existem $1 < \sigma \leq 2^* - 1$, $c_2 > 0$, tal que $|f(x,t)| \leq c_2(1 + t^\sigma)$, qtp $x \in \Omega$, $\forall\ t \geq 0$. Para $N = 2$, assuma que para todo $u \in H^1(\Omega)$, existe $C, \beta > 0$ tal que $|f(x,u)| \leq Ce^{\beta u^2}$, qtp $x \in \Omega$.

(H_f^2) Existem $t_0 > 0$ e $c_0 > 0$, tal que $|f(x,t)| \leq c_0 t$, qtp $x \in \Omega$ e para todo $0 \leq t \leq t_0$.

(H_f^3) Existem $\theta > 2$, $0 \leq q_1 < 1$ e $t_3, c_3 > 0$, tal que $\theta F(x,t) \leq tf(x,t) + c_3 t^{q_1+1}$, qtp $x \in \Omega$, $\forall\ t \geq t_3$, onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$.

(H_f^4) Existem um subdomínio $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ e $t_4, c_4 > 0$, tal que $F(x,t) \geq c_4 t^2$, qtp $x \in \tilde{\Omega}$, $\forall\ t \geq t_4$.

Observe que $u = 0$ é solução do nosso problema, mas estamos interessados em soluções fracas não-triviais $u \in H^1(\Omega)$, para o problema (M'_λ), isto é, $u \gneq 0$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uv dx = \int_\Omega a(x) u^q v dx + \int_\Omega f(x,u) v dx, \ \forall\ v \in H^1(\Omega).$$

Os pontos críticos do funcional energia

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) \ &:= \ \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx - \frac{1+\lambda}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u^+)^{q+1} dx \\ &- \ \int_\Omega F(x,u) dx \end{aligned}$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$, serão soluções fracas do nosso problema, ainda mais são não-negativas. Sob a hipótese (H_f^1), temos que I_λ está bem definido em $H^1(\Omega)$ e sem muitas alterações ao resultado de Rabinowitz, veja [49](Apêndice B) e de Berestycki e Lions, veja [10](Apêndice), mostramos que I_λ é de classe C^1.

Sob a hipótese (H_f^1) acima, conforme *Apêndice A*, temos que toda solução fraca $u_\lambda \in H^1(\Omega)$ é uma solução clássica $u_\lambda \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ para algum $\gamma \in (0,1)$. O lema a seguir é uma versão do Lema 2.1 de Alama ([5], Pg. 818).

Lema 1.1 *Assuma (H_a^0) e (H_f^2). Suponha que $u_\lambda \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ seja uma solução clássica de (M'_λ), com u_λ não-trivial em Ω_a^0, então $u_\lambda(x) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega_a^0}$.*

Demonstração: Como $u_\lambda \neq 0$ em Ω_a^0. Para $x \in \Omega_a^0$, tal que $0 \leq u_\lambda(x) \leq t_0$, t_0 em (H_f^2) temos

$$\begin{aligned} -\Delta u_\lambda - \lambda u_\lambda &= a(x)u_\lambda^q + f(x,u_\lambda) \\ &\geq a(x)u_\lambda^q - c_0 u_\lambda \end{aligned} \tag{1.1}$$

Portanto,

$$-\Delta u_\lambda + (c_0 + |\lambda|)u_\lambda \geq 0, \tag{1.2}$$

para $0 \leq u_\lambda(x) \leq t_0$, tomando $\beta(s) = (c_0 + |\lambda|)s$, pelo princípio do Máximo de Vazquez, vide Teorema 1, em ([54], Pg. 192), obtemos que $u_\lambda > 0$, em Ω_a^0. Suponha então que $u_\lambda(x) = 0$ para algum $x \in \partial\Omega_a^0$, então $x \in \partial U_i$ para algum i fixado, aplicando o Lema de Hopf, veja Evans ([22], Pg. 330), obtemos que $\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x) > 0$, com ν o vetor normal exterior a U_i em x. Observe que $x \notin \partial U_i \cap \Omega$, pois em um mínimo no interior temos $\nabla u_\lambda(x) = 0$. Mas se $x \in \partial U_i \cap \partial\Omega$, neste caso o vetor normal exterior a U_i em x, coincide com o vetor normal exterior a Ω, e então temos uma contradição com a condição de Neumann sobre o bordo de Ω. Portanto $u_\lambda > 0$ em $\overline{\Omega_a^0}$. ∎

Sob a hipótese (H_f^1), temos que toda solução fraca $u_\lambda \in H^1(\Omega)$ é uma solução clássica $u_\lambda \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $\gamma \in (0,1)$ e sob as hipóteses (H_a^0) e (H_f^2) temos, do Lema 1.1, as soluções não-triviais de (M_λ) em Ω_a^0 são positivas em $\overline{\Omega_a^0}$. Isto nos motiva a considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + f(x,u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \overline{\Omega_a^0} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{M_λ}$$

O resultado principal desse Capítulo, versa sobre a existência e não-existência de solução para o problema (M_λ). O trabalho de De Figueiredo, Gossez & Ubilla [25], foi o principal motivador para o resultado enunciado a seguir

Teorema 1.1 (Existência e Não-Existência) *Assuma* (H_{a^+}), (H_a^0), (H_f^1) *e* (H_f^2), *então existe* $\lambda^* \in (-\infty, +\infty]$, *tal que:*

1. *Para todo* $\lambda < \lambda^*$ *o problema* (M_λ) *possui ao menos uma solução com energia negativa.*

2. *Assuma que existe uma bola* $B_f \subset \Omega_a^0$, *tal que* $f(x,t) \geq 0$, *qtp* $x \in B_f$ *e* $\forall\ t \geq 0$, *então* $\lambda^* < +\infty$ *e ainda mais o problema* (M_λ) *não possui solução, para* $\lambda > \lambda^*$.

3. *Assuma* (H_f^3), $\int_\Omega a(x)dx < 0$, $\tilde{\Omega} = \Omega$ *em* (H_f^4) *e existe* $B \in \mathbb{R}, t_5 > 0$, *tal que* $f(x,t) \geq Bt$, $\forall\ t \geq t_5$. *Então o problema* (M_λ) *admite ao menos uma solução para* $\lambda = \lambda^*$.

A demonstração do Teorema 1.1, será feita mais adiante, como consequência dos resultados que iremos estabelecer a seguir.

2 Existência de Solução para $\lambda < \lambda^*$

Lema 1.2 *Assuma* (H_{a^+}), (H_a^0), (H_f^1) *e* (H_f^2), *então existe* $\lambda_0 < 0$, *tal que o problema* (M_λ) *admite uma solução* u_λ, *para todo* $\lambda \leq \lambda_0$.

Demonstração: Conforme Abreu, Carrião e Miyagaki ([1], Pg. 137), seja e a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} -\Delta e + e = 1 & \text{em } \Omega \\ e > 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial e}{\partial \eta} = 1 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

Sabemos que $e \in C^2(\overline{\Omega})$. Então considere $m > 0$, tal que $me(x) \leq t_0$, qtp $x \in \Omega$, t_0 como em (H_f^2), então $f(x, me(x)) \leq c_0 me(x)$. Seja $\delta > 0$ e $\Omega_\delta = \{x \in \Omega; e(x) < \delta\}$, então tomando um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}(m\delta)^q + c_0 m\delta \leq m$, temos que

$$\|a\|_{L^\infty(\Omega)}(me(x))^q + c_0 me(x) \leq m$$

para todo $x \in \Omega_\delta$. Portanto para $\lambda \leq -1$, temos que

$$\lambda me(x) + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}(me(x))^q + c_0 me(x) \leq m - me(x)$$

para todo $x \in \Omega_\delta$. De onde segue que

$$-\Delta(me) = m - me \geq \lambda(me) + a(x)(me)^q + f(x, me),\ \forall\ x \in \Omega_\delta. \tag{1.4}$$

Seja $\tilde{\lambda} < -1$, tal que

$$\lambda m\delta + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|me\|^q_{L^\infty(\Omega)} + c_0\|me\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m - me$$

para todo $\lambda \leq \tilde{\lambda}$, $x \in \overline{\Omega}$. Portanto, se $\lambda \leq \tilde{\lambda}$, temos que

$$-\Delta(me) = m - me \geq \lambda m\delta + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|me\|^q_{L^\infty(\Omega)} + c_0\|me\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Portanto, para $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$, temos $\lambda\delta \geq \lambda e(x)$, pois λ é negativo, de onde segue que

$$-\Delta(me) \geq \lambda me + a(x)(me)^q + f(x, me), \ \forall\, x \in \Omega \setminus \Omega_\delta. \tag{1.5}$$

Portanto, de (1.4) e (1.5), obtemos que me é supersolução para (M_λ), se $\lambda \leq \tilde{\lambda}$.

Dado $\lambda \leq \tilde{\lambda}$, temos que $\overline{u} := me$ é uma supersolução para (M_λ). Como, $\underline{u} := 0$ é uma subsolução para (M_λ). Considere o seguinte problema de minimização

$$\inf_{u \in M} I_\lambda(u), \ \text{onde } M = \{u \in H^1(\Omega); \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \ \text{qtp } x \in \Omega\}.$$

Com algumas modificações no Teorema I.2.4 do Struwe ([51], Pg. 17), veja Alama ([5], Pg. 826), o mínimo é atingido em $u_\lambda \in M$ e, ainda mais, u_λ resolve fracamente (M_λ). Vamos mostrar que u_λ é não-trivial. De fato, suponha por contradição, que $u_\lambda = 0$, qtp $x \in \Omega_a^0$. Seja $\phi \in C_0^1(B)$ positiva, com B uma bola contida em $\Omega_a^+ \subset \Omega_a^0$. Então observe que existe $s_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que $s_0\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m \cdot \min\{e(x), x \in B\} \leq t_0$ e para $0 \leq s \leq s_0$, temos $u_\lambda + s\phi \in M$, pois $u_\lambda = 0$, em B. Portanto de (H_f^2), temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + s\phi) &= I_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(s\phi) \\
&= I_\lambda(u_\lambda) + \tfrac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx - \frac{\lambda s^2}{2}\int_\Omega \phi^2 dx - \frac{s^{q+1}}{q+1}\int_\Omega a(x)\phi^{q+1} dx \\
&- \int_\Omega F(x, s\phi) dx \\
&\leq I_\lambda(u_\lambda) + C_1 s^2 - s^{q+1}\int_B \frac{a(x)\phi^{q+1}}{q+1} \\
&= I_\lambda(u_\lambda) + s^{q+1}(C_1 s^{1-q} - C_2) \\
&< I_\lambda(u_\lambda)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

para $s > 0$ suficientemente pequeno. Mas isso é uma contradição com a definição de u_λ. Portanto u_λ é não-trivial em Ω_a^0. ∎

Defina $\lambda^* := \sup\{\lambda \in \mathbb{R}; M_\lambda \text{ tem solução}\}$. Observe que do Lema 1.2, temos que λ^* está bem definido.

Lema 1.3 *Assuma* (H_{a^+}), (H_a^0), (H_f^1) *e* (H_f^2), *então o problema* (M_λ) *admite uma solução* u_λ, *para todo* $\lambda < \lambda^*$, *com* $I_\lambda(u_\lambda) < 0$.

Demonstração: Seja $\lambda < \lambda^*$, pela definição de λ^*, existe $\lambda < \mu < \lambda^*$ e $\overline{u} := u_\mu$ a solução de M_μ dada pelo Lema 1.2, observe que

$$-\Delta u_\mu = \mu u_\mu + a(x)u_\mu^q + f(x, u_\mu) \geq \lambda u_\mu + a(x)u_\mu^q + f(x, u_\mu).$$

Portanto $\overline{u}$ é supersolução de (M_λ). Ainda mais $\underline{u} := 0$ é subsolução de (M_λ).

Agora considere o seguinte problema de minimização

$$\inf_{u \in M} I_\lambda(u), \text{ onde } M = \{u \in H^1(\Omega); \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \text{ qtp} x \in \Omega\}.$$

Com algumas modificações no Teorema I.2.4 do Struwe ([51], Pg. 17), veja Alama ([5], Pg. 826), o mínimo é atingido em $u_\lambda \in M$ e, ainda mais, u_λ é solução de (M_λ).

Vamos mostrar que u_λ é uma solução não-trivial. De fato, suponha por contradição, que $u_\lambda = 0$, qtp $x \in \Omega_a^0$. Seja $\phi \in C_0^1(B)$, onde B é uma bola contida em Ω_{a^+}, ϕ positiva. Então observe que existe $s_0 > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $s\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}\|\overline{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq m \cdot \min\{e(x), x \in B\} \leq t_0$ e $u_\lambda + s\phi\overline{u} \in M$, para $0 \leq s \leq s_0$, haja vista que $u_\lambda = 0$, em B e $s\phi\overline{u} \leq \overline{u}$. Portanto

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + s\phi\overline{u}) &= I_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(s\phi\overline{u}) \\
&= I_\lambda(u_\lambda) + \tfrac{s^2}{2}\int_\Omega |\nabla\phi\overline{u}|^2 dx - \frac{\lambda s^2}{2}\int_\Omega (\phi\overline{u})^2 dx - \frac{s^{q+1}}{q+1}\int_\Omega a(x)(\phi\overline{u})^{q+1} dx \\
&- \int_\Omega F(x, s\phi\overline{u}) dx \\
&\leq I_\lambda(u_\lambda) + C_1 s^2 - s^{q+1}\int_B \frac{a(x)(\phi\overline{u})^{q+1}}{q+1} \\
&= I_\lambda(u_\lambda) + s^{q+1}(C_1 s^{1-q} - C_2) \\
&< I_\lambda(u_\lambda)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

para $s > 0$ suficientemente pequeno, o que é uma contradição com a definição de u_λ. Portanto u_λ é não-trivial em Ω_a^0. Ainda mais, como $s\phi\overline{u} \in M$, vimos que $I_\lambda(s\phi\overline{u}) < 0$, para $s > 0$ suficientemente pequeno, portanto $I_\lambda(u_\lambda) < 0$. ■

3 Não-Existência de Solução para $\lambda > \lambda^*$

Nesta seção vamos mostrar que λ^* é finito.

Lema 1.4 *Assuma* (H_{a^+})*,* (H_a^0)*,* (H_f^1) *e* (H_f^2)*, e que existe uma bola* $B_f \subset \Omega_a^0$*, tal que* $f(x,t) \geq 0$*, qtp* $x \in B_f$ *e* $\forall\ t \geq 0$*, então o problema* (M_λ) *não admite solução, para* λ *muito grande.*

Demonstração: De fato, suponha por contradição que u_λ seja uma solução de (M_λ). Considere então μ_1 o primeiro autovalor positivo e $\phi_1 > 0$ a autofunção associada a μ_1, do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu u & \text{em } B_f \\ u = 0 & \text{em } \partial B_f \end{cases}$$

Usando a restrição de u_λ a B_f como função teste, temos que

$$\int_{B_f} \nabla u_\lambda \nabla \phi_1 dx - \int_{\partial B_f} u_\lambda \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} dS = \mu_1 \int_{B_f} u_\lambda \phi_1 dx.$$

Como u_λ é solução de (M_λ) e $\operatorname{supp} \phi_1 \subset B_f$, temos

$$\int_{B_f} \nabla u_\lambda \nabla \phi_1 dx = \lambda \int_{B_f} u_\lambda \phi_1 dx + \int_{B_f} a(x) u_\lambda^q \phi_1 dx + \int_{B_f} f(x, u_\lambda) \phi_1 dx.$$

Dessas duas equações, obtemos que

$$(\mu_1 - \lambda) \int_{B_f} u_\lambda \phi_1 dx + \int_{\partial B_f} u_\lambda \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} dS = \int_{B_f} a(x) u_\lambda^q \phi_2 dx + \int_{B_f} f(x, u_\lambda) \phi_1 dx \geq 0.$$

Como $\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$ em ∂B_f, obtemos

$$(\mu_1 - \lambda) \int_{B_f} u_\lambda \phi_1 dx > \int_{B_f} a(x) u_\lambda^q \phi_2 dx + \int_{B_f} f(x, u_\lambda) \phi_1 dx \geq 0.$$

O que é uma contradição para $\lambda > 0$ suficientemente grande. ∎

4 Existência de Solução para $\lambda = \lambda^*$

Nesta seção vamos obter uma solução pra o problema (M_{λ^*}).

Lema 1.5 *Assuma* (H_{a^+})*,* (H_a^0)*,* (H_f^1)*,* (H_f^2)*,* (H_f^3)*,* $\tilde{\Omega} = \Omega$ *em* (H_f^4)*,* $\int_\Omega a(x) dx < 0$ *e existe* $B \in \mathbb{R}$*,* $t_5 > 0$*, tal que* $f(x,t) \geq Bt$*,* $\forall\ t \leq t_5$*. então o problema* (M_λ) *admite ao menos uma solução para* $\lambda = \lambda^*$*.*

Demonstração: Do Lema 1.4, obtemos que $\lambda^* < +\infty$. Considere $\lambda_n \to \lambda^*$, com $\lambda_n < \lambda^*$ e u_n a solução dada pelo Lema 1.3, associada a (M_{λ_n}), portanto $I_{\lambda_n}(u_n) < 0$.

Vamos mostrar que u_n é limitada em $H^1(\Omega)$. De fato, como $I_{\lambda_n}(u_n) < 0$ e $\langle I'_{\lambda_n}(u_n), u_n\rangle = 0$, tomando θ como em (H_f^3), obtemos que

$$\frac{\theta}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{\theta(1+\lambda_n)}{2}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\theta}{q+1}\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega \theta F(x,u_n)dx < 0$$

e

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - (1+\lambda_n)\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx = 0.$$

Subtraindo a equação acima da desigualdade anterior e usando (H_f^3), obtemos

$$\left(\frac{\theta}{2}-1\right)\left(\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - (1+\lambda_n)\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right) - \left(\frac{\theta}{q+1}-1\right)\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega c_3 u_n^{q_1+1}dx < C. \tag{1.8}$$

Como $\tilde{\Omega} = \Omega$ em (H_f^4), existe $t_4, c_4 > 0$, tal que $F(x,t) \geq c_4 t^2$ para todo $t \geq t_4$, procedendo como em [24], observe que existe $t_6 \geq t_4$ e $c_6 > 0$, tal que $F(x,t) \geq c_6 t^2 + 1$, $\forall\ t \geq t_6$.

Dividindo (H_f^3) por $tF(x,t)$, com $t \geq t_6$, obtemos

$$\frac{\theta}{t} \leq \frac{f(x,t)}{F(x,t)} + c_4\frac{t^{q_1}}{F(x,t)}.$$

Integrando de t_6 a t obtemos

$$\ln\left(\frac{t}{t_6}\right)^\theta \leq \ln\left(\frac{F(x,t)}{F(x,t_6)}\right) + c_4\int_{t_6}^t \frac{s^{q_1}}{F(x,s)}ds$$

e aplicando a exponencial à desigualdade, obtemos

$$\left(\frac{t}{t_6}\right)^\theta \leq \left(\frac{F(x,t)}{F(x,t_6)}\right)\exp\left(c_4\int_{t_6}^t \frac{s^{q_1}}{F(x,s)}ds\right).$$

Portanto

$$F(x,t) \geq F(x,t_6)\left(\frac{t}{t_6}\right)^\theta \exp\left(-c_4\int_{t_6}^t \frac{s^{q_1}}{F(x,s)}ds\right).$$

Usando (H_f^4) novamente, obtemos que

$$F(x,t) \geq Ct^\theta,\ \forall\ t \geq t_6 \tag{1.9}$$

e alguma constante $C > 0$.

Defina então $g_n(x,t) = f(x,t) + (1+\lambda_n)t$ e $G_n(x,t) = \int_0^t g_n(x,s)ds$. Vamos mostrar que para $\epsilon > 0$, tal que $2 < \theta - \epsilon$, existe $t_7 > 0$, tal que

$$(\theta - \epsilon)G_n(x,t) \leq tg_n(x,t) + c_3 t^{q_1+1}, \ \forall \ t \geq t_7 \tag{1.10}$$

De fato,

$$(\theta - \epsilon)G_n(x,t) = (\theta - \epsilon)F(x,t) + (\theta - \epsilon)(1+\lambda_n)\frac{t^2}{2}$$

Usando (H_f^3) e (1.9), para $t \geq \max\{t_3, t_6\}$, temos que

$$(\theta - \epsilon)G_n(x,t) \leq tf(x,t) + c_3 t^{q_1+1} - \epsilon C t^{\theta} + \left(\frac{\theta - \epsilon}{2}\right)(1+\lambda_n)t^2$$

Portanto

$$(\theta - \epsilon)G_n(x,t) \leq tg_n(x,t) + c_3 t^{q_1+1} - \left(\epsilon C t^{\theta-2} - \left(\frac{\theta - \epsilon}{2} - 1\right)(1+\lambda_n)\right)t^2$$

Como $\theta > 2$, existe $t_7 > 0$, tal que

$$\epsilon C t^{\theta - 2} \geq \left(\frac{\theta - \epsilon}{2} - 1\right)(1+\lambda_n)$$

e assim temos (1.10).

Voltando a prova da limitação de u_n, como $I_{\lambda_n}(u_n) < 0$ e $\langle I'_{\lambda_n}(u_n), u_n\rangle = 0$, obtemos que

$$\frac{\theta - \epsilon}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{\theta - \epsilon}{q+1}\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega (\theta - \epsilon)\left(F(x,u_n) + \frac{(1+\lambda_n)u_n^2}{2}\right)dx < 0$$

e

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega \left(f(x,u_n)u_n + (1+\lambda_n)u_n^2\right)dx = 0$$

Subtraindo a equação acima da desigualdade anterior e usando (1.10), obtemos

$$\left(\frac{\theta - \epsilon}{2} - 1\right)\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \left(\frac{\theta - \epsilon}{q+1} - 1\right)\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega c_3 u_n^{q_1+1}dx < C.$$

Das imersões de Sobolev, temos

$$\left(\frac{\theta - \epsilon}{2} - 1\right)\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left(1 + \|u_n\|^{q+1}_{H^1(\Omega)} + \|u_n\|^{q_1+1}_{H^1(\Omega)}\right).$$

Como $0 \leq q, q_1 < 1$, temos que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$ é limitada.

Assim, a menos de subsequência, podemos assumir que u_n converge fracamente para alguma u_{λ^*} em $H^1(\Omega)$, ainda mais, converge em quase todo ponto em Ω para u_{λ^*}, converge fortemente para u_{λ^*} em $L^s(\Omega)$, para todo $s \geq 1$ quando $N = 2$ e para todo $1 \leq s < 2^*$ quando $N \geq 3$. Passando o limite, na formulação fraca de solução, obtemos que u_{λ^*} resolve o nosso problema. Para concluir, precisamos mostrar que $u_{\lambda^*} \neq 0$, em Ω_a^0.

Das hipóteses que $\tilde{\Omega} = \Omega$ em (H_f^4), $\int_\Omega a(x)dx < 0$ e que existe $B \in \mathbb{R}$ e $t_5 > 0$, tal que $f(x,t) \geq Bt$, $\forall\ t \leq t_5$, podemos encontrar $\tilde{B} \in \mathbb{R}$, tal que $f(x,t) \geq \tilde{B}t$, $\forall\ t \geq 0$.

Conforme Alama ([5], Pg. 829), considere para $\lambda' = \min\{\min\{\lambda_n\} + \tilde{B}, 0\} \leq 0$, $v' \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta v' = \lambda' v' + a(x)v'^q & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v'}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Observação 1.1 *A hipótese que* $\displaystyle\int_\Omega a(x)dx < 0$ *é fundamental ao considerar esse resultado, bem como no uso do Lema de Comparação feito abaixo.*

Como $u_n \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ e

$$-\Delta u_n = \lambda_n u_n + a(x)u_n^q + f(x,u_n) \geq \lambda_n u_n + a(x)u_n^q + \tilde{B}u_n \geq \lambda' u_n + a(x)u_n^q$$

usando um lema de comparação, Lema 4.6 do Alama ([5], Pg. 828), temos que $v' \leq u_n$, para todo n. Como $v' > 0$ em Ω_a^0, temos o resultado. ■

Demonstração do Teorema 1.1: (1) segue do Lema 1.3, (2) segue do Lema 1.4 e (3) segue do Lema 1.5. ■

Capítulo 2

Multiplicidade de Soluções para o caso $N \geq 3$

1 Introdução

Neste capítulo, vamos obter um resultado de multiplicidade de soluções, para um caso particular do problema (M_λ), com $N \geq 3$ e $f(x,u) = b(x)u^p$, onde $1 < p = 2^* - 1$ e $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev. Como no Capítulo 1, considere Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com bordo suave $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$ e η o vetor normal unitário apontando para fora do bordo de Ω. Mais precisamente, temos por objetivo estudar a multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos parametrizados, com condição de Neumann homogênea no bordo de Ω

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \qquad (N'_\lambda)$$

onde $0 < q < 1 < p = 2^* - 1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real. Assumimos que $a, b \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma \leq 1$ e a muda de sinal em Ω, então o Princípio do Máximo não é aplicável, assim as soluções podem se anular em parte de Ω.

Como no Capítulo 1, considere os seguintes conjuntos relativos ao coeficiente a:

$$\Omega_{a^+} = \{x \in \Omega; a(x) > 0\}; \quad \Omega_{a^-} = \{x \in \Omega; a(x) < 0\} \quad \text{e} \quad \Omega_a^0 = \text{int}\,\{x \in \Omega; a(x) \geq 0\};$$

e definimos, de forma análoga, os seguintes conjuntos relativos a b:

$$\Omega_b^+ = \{x \in \Omega; b(x) > 0\}; \quad \Omega_b^- = \{x \in \Omega; b(x) < 0\} \quad \text{e} \quad \Omega_b = \{x \in \Omega; b(x) \geq 0\}; \quad \text{e}$$

$$\Omega_{b^0} = \Omega \setminus \overline{\{x \in \Omega; b(x) \neq 0\}}.$$

Consideremos aqui, as seguintes hipóteses sobre a e b:

(H_{a^+}) O conjunto Ω_a^+ é não-vazio.

$(H_{a^\pm})$ Assuma (H_{a^+}) e que Ω_a^- é não-vazio.

(H_a^0) $\Omega_a^0 = \cup_1^k U_i$, $k < +\infty$, U_i componente conexa, U_i com bordo suave C^2 e $U_i \cap \Omega_a^+ \neq \emptyset$, $\forall i = 1, ..., k$.

(H_{b^+}) O conjunto Ω_b^+ é não-vazio.

$(H_{b^\pm})$ Assuma (H_{b^+}) e que o conjunto Ω_b^- é não-vazio, e ainda mais, $\overline{\Omega_b^+} \cap \overline{\Omega_b^-} = \emptyset$.

(H_{ab}) O conjunto $\Omega_a^+ \cap \Omega_b^+$ é não-vazio.

(H_{b^0}) O conjunto Ω_{b^0} tem bordo suave C^2 e $\overline{\Omega_{b^0}} \subset \Omega$.

Observe que $u = 0$ é solução do nosso problema, mas estamos interessados em soluções fracas não-triviais $u \in H^1(\Omega)$, para o problema (N'_λ), isto é, $u \gneq 0$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uv dx = \int_\Omega a(x) u^q v dx + \int_\Omega b(x) u^p v dx, \ \forall \ v \in H^1(\Omega).$$

Naturalmente, u será ponto crítico do funcional energia

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) \ &:= \ \tfrac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx - \frac{1+\lambda}{2} \int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega a(x)(u^+)^{q+1} dx \\ &- \ \tfrac{1}{p+1} \int_\Omega b(x)(u^+)^{p+1} dx \end{aligned}$$

Note que I_λ está bem definido em $H^1(\Omega)$, ainda mais I_λ é C^1, veja os trabalhos de Rabinowitz [49](Apêndice B) e de Berestycki e Lions [10](Apêndice).

Sob as hipóteses acima, temos que toda solução fraca $u_\lambda \in H^1(\Omega)$ é uma solução clássica $u_\lambda \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $\gamma \in (0,1)$, veja *Apêndice A*. Ainda mais, sob a hipótese (H_a^0), temos do Lema 1.1, que as soluções de (N'_λ), não-triviais em Ω_a^0, são positivas em $\overline{\Omega_a^0}$. Isto nos motiva a considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + b(x)u^p & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \overline{\Omega_a^0} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \qquad (N_\lambda)$$

Assim podemos enunciar o seguinte teorema de existência e não-existência

Teorema 2.1 (Existência e Não-Existência) *Assuma (H_{a^+}) e (H_a^0), então existe $\lambda^* \in (-\infty, +\infty]$, tal que:*

1. *Para todo $\lambda < \lambda^*$ o problema (N_λ) possui ao menos uma solução, com energia negativa.*

2. *Assuma (H_{ab}). Então*

   (a) *$\lambda^* < +\infty$ e ainda mais o problema (N_λ) não possui solução, para $\lambda > \lambda^*$.*

   (b) *Assuma que $\Omega_{b^+} = \Omega$ e $\int_\Omega a(x)dx < 0$. Então o problema (N_λ) possui ao menos uma solução, para $\lambda = \lambda^*$.*

Definimos $b_M := \max_\Omega b(x)$ e $b_m := \max_{\partial\Omega} b(x)$. Assim podemos enunciar o Teorema 2.2, onde temos um resultado de multiplicidade de soluções

Teorema 2.2 (Multiplicidade) *Assuma $(H_{a^+_-})$, (H_a^0), (H_{ab}) e*

(a) $\Omega_{b^+} = \Omega$; ou

(b) $(H_{b^+_-})$, (H_{b^0}) e $\lambda \notin \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega_{b^0}))$.

Então para $\lambda^* \in \mathbb{R}$, dado no Teorema 2.1:

1. *considere $\lambda < \lambda^*$, então se $b_M \leq 2^{\frac{2}{N-2}} b_m$, sem perda de generalidade, podemos supor $b_m := b(0)$, a curvatura média do bordo de Ω positiva em 0, $|b(x) - b_m| = o(|x|)$, para x próximo de 0 e $a(x) \geq a_0 > 0$ numa vizinhança de 0; ou*

2. *considere para $N \geq 6$, que $0 \leq \lambda < \lambda^*$ e para $3 \leq N \leq 5$, que $\lambda < \lambda^*$, então se $b(x_M) := b_M \geq 2^{\frac{2}{N-2}} b_m$, $|b(x) - b_M| = o(|x - x_M|^{\frac{N-2}{2}})$, para x próximo de x_M, $a(x) \geq a_0 > 0$ numa vizinhança de x_M;*

o problema (N_λ) possui ao menos duas soluções.

O Teorema 2.1, a menos do item (2.b), é consequência do Teorema 1.1, os detalhes apresentamos a seguir. Já a demonstração do Teorema 2.2, será feita mais adiante, como consequência de uma sequência de resultados que iremos estabelecer posteriormente a demonstração do Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1: Vamos mostrar que (1) e (2.a), são consequência do Teorema 1.1, do Capítulo 1, para isso basta tomar $f(x,t) = b(x)(t^+)^p$, como $b \in C^\gamma(\overline{\Omega})$ e $p > 1$, é imediato que (H_f^1) é verificada. Observe que $f(x,t) \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} t$, para $0 \leq t \leq 1$, de onde segue que (H_f^2) é verificada. Observe que de (H_{ab}), podemos tomar uma bola $B \subset \Omega_a^0$, tal que $f(x,t) \geq 0$ em B, assim utilizando os itens (1) e (2) do Teorema 1.1, obtemos (1) e (2.a). Já a prova de (2.b) é análoga a prova de (3) no Teorema 1.1, a única diferença está na prova de que se $\lambda_n \to \lambda^*$, com $\lambda_n < \lambda^*$ e u_n a solução obtida no item (1) para (N_{λ_n}), então $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$ é limitada.

De fato, como $I_{\lambda_n}(u_n) < 0$ e $\langle I'_{\lambda_n}(u_n), u_n \rangle = 0$, obtemos que

$$\frac{p+1}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{(p+1)(1+\lambda_n)}{2}\int_\Omega u_n^2 dx - \frac{p+1}{q+1}\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega b(x)u_n^{p+1}dx < 0$$

e

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - (1+\lambda_n)\int_\Omega u_n^2 dx - \int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega b(x)u_n^{p+1}dx = 0$$

Subtraindo a equação acima da desigualdade anterior, obtemos

$$\frac{p-1}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{(p-1)(1+\lambda_n)}{2}\int_\Omega u_n^2 dx - \frac{p-q}{q+1}\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx < 0$$

Portanto,

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega u_n^{q+1}dx\right),$$

de onde segue, pela imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$, que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^{q+1}_{H^1(\Omega)}\right). \tag{2.1}$$

Como $q+1 < 2$, basta mostrarmos que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ é limitada, para obtermos que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$ é limitada.

De fato, suponha por contradição, que a menos de subsequência, $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$. Defina $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$. Dividindo a desigualdade (2.1) por $\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$\|v_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left(1 + \|u_n\|^{q-1}_{L^2(\Omega)}\|v_n\|^{q+1}_{H^1(\Omega)}\right).$$

Como $q < 1$ e $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$, obtemos que v_n é limitada em $H^1(\Omega)$. Portanto, a menos de subsequência, podemos assumir que v_n, converge fracamente para alguma v em $H^1(\Omega)$, converge fortemente para v em $L^s(\Omega)$, para todo $1 \leq s < 2^*$. Em particular $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Por outro lado, como $\langle I'_{\lambda_n}(u_n), \phi\rangle = 0$, dividindo essa equação por $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_n \nabla \phi dx - \lambda_n \int_\Omega v_n \phi dx - \|u_n\|^{q-1}_{L^2(\Omega)} \int_\Omega a(x) v_n^q \phi dx - \|u_n\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} \int_\Omega b(x) v_n^p \phi dx = 0.$$

Portanto $\|u_n\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} \int_\Omega b(x) v_n^p \phi dx$ é limitado, mas como $\|u_n\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} \to +\infty$, temos que

$$\int_\Omega b(x) v^p \phi dx = \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega b(x) v_n^p \phi dx = 0.$$

Como $b > 0$, qtp $x \in \Omega$, segue que $v = 0$, o que é uma contradição, pois $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Logo $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ é limitada.

Para concluir a prova, basta proceder como na prova do item (3) do Teorema 1.1. ■

2 A Primeira Solução é um Mínimo Local

Nesta seção vamos mostrar que a solução dada no Teorema 2.1 é um mínimo local do funcional I_λ em $H^1(\Omega)$.

Lema 2.1 *Assuma* $(H_{a_-^+})$, (H_a^0), $\lambda < \lambda^*$, $0 \leq u_\lambda \leq \overline{u} := u_\mu$, *onde* u_λ *é solução do problema* (N_λ) *e* u_μ *é solução do problema* (N_μ), *com* $\lambda < \mu < \lambda^*$. *Então* $u_\lambda < \overline{u}$ *em* A, *onde* $A := \{x \in \overline{\Omega}; \overline{u} > 0\}$.

Demonstração: Seja $v = \overline{u} - u_\lambda \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Como u_λ é solução do problema (N_λ) e $\overline{u} = u_\mu$ é solução do problema N_μ, com $\lambda < \mu < \lambda^*$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \Delta \overline{u} - \Delta u_\lambda \\
&= -\mu \overline{u} - a(x)\overline{u}^q - b(x)\overline{u}^p + \lambda u_\lambda + a(x)u_\lambda^q + b(x)u_\lambda^p \\
&= (-\mu + \lambda)\overline{u} - \lambda(\overline{u} - u_\lambda) - a(x)\left(\frac{\overline{u}^q - u_\lambda^q}{\overline{u} - u_\lambda}\right)(\overline{u} - u_\lambda) - b(x)\left(\frac{\overline{u}^p - u_\lambda^p}{\overline{u} - u_\lambda}\right)(\overline{u} - u_\lambda) \\
&\leq -\lambda(\overline{u} - u_\lambda) + a^-(x)\left(\frac{\overline{u}^q - u_\lambda^q}{\overline{u} - u_\lambda}\right)(\overline{u} - u_\lambda) + b^-(x)\left(\frac{\overline{u}^p - u_\lambda^p}{\overline{u} - u_\lambda}\right)(\overline{u} - u_\lambda) \\
&\leq m(x) v
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde

$$m(x) := \begin{cases} -\lambda + a^-(x)\left(\dfrac{\overline{u}^q - u_\lambda^q}{\overline{u} - u_\lambda}\right) + b^-(x)\left(\dfrac{\overline{u}^p - u_\lambda^p}{\overline{u} - u_\lambda}\right) & , \text{ se } \lambda < 0 \\ a^-(x)\left(\dfrac{\overline{u}^q - u_\lambda^q}{\overline{u} - u_\lambda}\right) + b^-(x)\left(\dfrac{\overline{u}^p - u_\lambda^p}{\overline{u} - u_\lambda}\right) & , \text{ se } \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Observe que m está bem definida em A, mesmo possivelmente, onde $\overline{u} = u_\lambda$, pois $\overline{u} \geq \delta_0 > 0$, em A. Suponha que $v(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in A$. Caso $x_0 \in \Omega$, então existe uma bola B_1 com centro em x_0, com $\overline{B_1} \subset A \cap \Omega$. Como em B_1, $\overline{u}$ é limitada uniformemente por baixo por uma constante positiva, temos que m é uniformemente limitada em B_1. Então pelo princípio do Máximo de Vazquez, veja ([54], Pg. 192), $v = 0$, em B_1, logo $\overline{u} = u_\lambda$ em B_1. Entretanto, como

$$-\Delta\overline{u} - \mu\overline{u} = a(x)\overline{u}^q + b(x)\overline{u}^p \quad \text{e} \quad -\Delta u_\lambda - \lambda u_\lambda = a(x)u_\lambda^q + b(x)u_\lambda^p$$

temos

$$(\mu - \lambda)\overline{u} = 0, \text{ qtp em } B_1,$$

o que é uma contradição pois $\mu > \lambda$ e $\overline{u} > 0$, em B_1. No caso de $x_0 \in \partial\Omega$, como A é relativamente aberto em $\overline{\Omega}$, existe uma bola B_2 com centro em x_0, tal que $B_2 \cap \overline{\Omega} \subset A$. Como o bordo de Ω é suave, o vetor normal exterior a $B_2 \cap \overline{\Omega}$ em x_0 é igual ao vetor normal exterior a Ω em x_0. Aplicando o Lema de Hopf, veja Evans ([22], Pg. 330), para $v \geq 0$ em $x_0 \in \partial(B_2 \cap \overline{\Omega})$, temos que $\dfrac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) > 0$, no entanto isso é uma contradição, com o fato que $\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \eta}(x_0) = \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}(x_0) = 0$. ■

Lema 2.2 *Assuma* $(H_{a^+_-})$, (H_a^0), $\lambda < \lambda^*$ *e que* u_λ *uma solução de* (N_λ), *tal que* $0 \leq u_\lambda \leq \overline{u} := u_\mu$, *onde* u_μ *é a solução do problema* (N_μ), *para algum* $\lambda < \mu < \lambda^*$, *ainda mais que* $I_\lambda(u_\lambda) = \inf_{u \in M} I_\lambda(u)$, *onde* $M = \{u \in H^1(\Omega); 0 \leq u \leq \overline{u},\ qtp\ x \in \Omega\}$. *Então* u_λ *é mínimo local do funcional energia* I_λ *em* $H^1(\Omega)$.

Demonstração: Suponha, por contradição, que exista $u_n \in H^1(\Omega)$, tal que $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, com $I_\lambda(u_n) < I_\lambda(u_\lambda) < 0$.

Defina $v_n = \max\{0, \min\{u_n, \overline{u}\}\}$, $w_n = (u_n - \overline{u})^+ = \max\{u_n - \overline{u}, 0\} \geq 0$ e $z_n = (-u_n)^+ = \max\{-u_n, 0\} \geq 0$. Observe que

$$0 \leq v_n \leq \overline{u}, \text{ logo } v_n \in M$$

e $u_n(x) \geq \overline{u}(x) \geq 0$, qtp $x \in \operatorname{supp}(w_n)$, logo $z_n(x) = 0$, qtp $x \in \operatorname{supp}(w_n)$, assim temos que $|\operatorname{supp}(w_n) \cap \operatorname{supp}(z_n)| = 0$. Além disso, temos que

1. Se $u_n(x) > \overline{u}(x)$, então $v_n(x) = \overline{u}(x)$, $w_n(x) = u_n(x) - \overline{u}(x)$ e $z_n(x) = 0$;

2. Se $u_n(x) < 0$, então $v_n(x) = 0$, $w_n(x) = 0$ e $z_n(x) = -u_n(x)$; e

3. Se $0 \leq u_n(x) \leq \overline{u}(x)$, então $v_n(x) = u_n(x)$, $w_n(x) = 0$ e $z_n(x) = 0$.

Portanto em qualquer um dos casos, temos que $u_n = v_n + w_n - z_n$ em Ω. Considere

$$R_n = \{x \in \Omega; 0 \leq u_n(x) \leq \overline{u}(x)\}, \; S_n = \operatorname{supp}(w_n) \text{ e } T_n = \operatorname{supp}(z_n).$$

A partir das definições anteriores, podemos reescrever $I_\lambda(u_n)$ da seguinte forma,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) = & \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - \frac{b(x)}{p+1}(u_n^+)^{p+1}\right) dx \\ = & \int_{S_n} \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - \frac{b(x)}{p+1}(u_n^+)^{p+1}\right) dx \\ + & \int_{T_n} \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - \frac{b(x)}{p+1}(u_n^+)^{p+1}\right) dx \\ + & \int_{R_n} \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - \frac{b(x)}{p+1}(u_n^+)^{p+1}\right) dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Como

1. Se $x \in S_n$, temos $u_n(x) = \overline{u}(x) + w_n(x) \geq 0$;

2. Se $x \in T_n$, temos $u_n(x) = -z_n(x) \leq 0$; e

3. Se $x \in R_n$, temos $u_n(x) = v_n(x) \geq 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\int_{S_n} \left(|\nabla(\overline{u} + w_n)|^2 + (\overline{u} + w_n)^2\right) dx - \frac{1+\lambda}{2}\int_{S_n} (\overline{u} + w_n)^2 dx \\ &- \frac{1}{q+1}\int_{S_n} a(x)(\overline{u} + w_n)^{q+1} dx - \frac{1}{p+1}\int_{S_n} b(x)(\overline{u} + w_n)^{p+1} dx \\ &+ \frac{1}{2}\int_{T_n} \left(|\nabla z_n|^2 + z_n^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{R_n} \left(|\nabla v_n|^2 + v_n^2\right) dx \\ &- \frac{1+\lambda}{2}\int_{R_n} v_n^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_{R_n} a(x) v_n^{q+1} dx - \frac{1}{p+1}\int_{R_n} b(x) v_n^{p+1} dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como, $v_n = \overline{u}$ em S_n e $v_n = 0$ em T_n, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(v_n) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left(|\nabla v_n|^2 + v_n^2\right) - \frac{1+\lambda}{2} v_n^2 - \frac{a(x)}{q+1} v_n^{q+1} - \frac{b(x)}{p+1} v_n^{p+1} \right) dx \\
&= \int_{S_n} \left(\frac{1}{2}\left(|\nabla \overline{u}|^2 + \overline{u}^2\right) - \frac{1+\lambda}{2} \overline{u}^2 - \frac{a(x)}{q+1} \overline{u}^{q+1} - \frac{b(x)}{p+1} \overline{u}^{p+1} \right) dx \qquad (2.5) \\
&+ \int_{R_n} \left(\frac{1}{2}\left(|\nabla v_n|^2 + v_n^2\right) - \frac{1+\lambda}{2} v_n^2 - \frac{a(x)}{q+1} v_n^{q+1} - \frac{b(x)}{p+1} v_n^{p+1} \right) dx.
\end{aligned}$$

Assim de (2.4) e (2.5), obtemos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= I_\lambda(v_n) \\
&+ \int_{S_n} \left(\frac{|\nabla(\overline{u}+w_n)|^2 - |\nabla \overline{u}|^2}{2} + \left(\frac{(\overline{u}+w_n)^2 - \overline{u}^2}{2} \right) - (1+\lambda)\left(\frac{(\overline{u}+w_n)^2 - \overline{u}^2}{2} \right) \right) dx \\
&- \int_{S_n} \left(\frac{a(x)}{q+1}\left((\overline{u}+w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}\right) + \frac{b(x)}{p+1}\left((\overline{u}+w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}\right) \right) dx \\
&+ \int_{T_n} \left(\frac{|\nabla z_n|^2}{2} + \frac{z_n^2}{2} \right) dx
\end{aligned} \qquad (2.6)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= I_\lambda(v_n) \\
&+ \int_{S_n} \left(\nabla \overline{u} \nabla w_n + \frac{|\nabla w_n|^2}{2} + \left(\overline{u} w_n + \frac{w_n^2}{2} \right) - (1+\lambda)\left(\overline{u} w_n + \frac{w_n^2}{2} \right) \right) dx \\
&- \int_{S_n} \left(\frac{a(x)}{q+1}\left((\overline{u}+w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}\right) + \frac{b(x)}{p+1}\left((\overline{u}+w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}\right) \right) dx \qquad (2.7) \\
&+ \int_{T_n} \left(\frac{|\nabla z_n|^2}{2} + \frac{z_n^2}{2} \right) dx
\end{aligned}$$

Como $\overline{u}$ é supersolução de (N_λ). Além de que $w_n = 0$ em $\Omega \setminus S_n$, temos que

$$\int_{S_n} \nabla \overline{u} \nabla w_n dx - \lambda \int_{S_n} \overline{u} w_n dx \geq \int_{S_n} a(x) \overline{u}^q w_n dx + \int_{S_n} b(x) \overline{u}^p w_n dx$$

Portanto, de (2.7) obtemos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_n) &\geq I_\lambda(v_n) \\ &+ \int_{S_n} \frac{|\nabla w_n|^2 + w_n^2}{2} dx - (1+\lambda) \int_{S_n} \frac{w_n^2}{2} dx \\ &- \int_{S_n} a(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} - \overline{u}^q w_n \right) dx \\ &- \int_{S_n} b(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - \overline{u}^p w_n \right) dx \\ &+ \int_{T_n} \frac{|\nabla z_n|^2 + z_n^2}{2} dx \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como $w_n = 0$ em $\Omega \setminus S_n$ e $z_n = 0$ em $\Omega \setminus T_n$, obtemos

$$I_\lambda(u_n) \geq I_\lambda(v_n) + \frac{1}{2}\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|z_n\|^2_{H^1(\Omega)} - L \tag{2.9}$$

onde

$$\begin{aligned} L &= \frac{1+\lambda}{2} \int_{S_n} w_n^2 dx + \int_{S_n} a(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} - \overline{u}^q w_n \right) dx \\ &+ \int_{S_n} b(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - \overline{u}^p w_n \right) dx \end{aligned} \tag{2.10}$$

Assuma, por enquanto, que $L \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}$. Como, por hipótese de contradição, $I_\lambda(u_n) < I_\lambda(u_\lambda)$ e temos também que $I_\lambda(v_n) \geq I_\lambda(u_\lambda)$, pois $v_n \in M$ e $I_\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in M} I_\lambda(v)$, logo

$$I_\lambda(u_n) - I_\lambda(v_n) = I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(u_\lambda) - I_\lambda(v_n) < 0.$$

Portanto, da desigualdade (2.9), segue que

$$\left(\frac{1}{2} - o(1) \right) \|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|z_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|z_n\|^2_{H^1(\Omega)} - L < 0 \tag{2.11}$$

Para n suficientemente grande, temos que $w_n = z_n = 0$, qtp Ω, de onde segue que $u_n \in M$, o que é uma contradição, já que u_λ é mínimo de I_λ em M e $I_\lambda(u_n) < I_\lambda(u_\lambda)$. Portanto u_λ é mínimo local de I_λ em $H^1(\Omega)$.

Vamos agora, mostrar que $L \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}$. Lembramos que

$$\begin{aligned} L &= \frac{1+\lambda}{2} \int_{S_n} w_n^2 dx + \int_{S_n} a(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} - \overline{u}^q w_n \right) dx \\ &+ \int_{S_n} b(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - \overline{u}^p w_n \right) dx \end{aligned} \tag{2.12}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existem $0 < \theta_i(x) < 1$, $i = 1, 2$ tal que

$$\frac{(\overline{u} + w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} - \overline{u}^q w_n = (\overline{u} + \theta_1 w_n)^q w_n - \overline{u}^q w_n \geq 0,$$

$$\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - \overline{u}^p w_n = (\overline{u} + \theta_2 w_n)^p w_n - \overline{u}^p w_n \geq 0,$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L &\leq \frac{1+\lambda}{2} \int_{S_n} w_n^2 dx + \int_{S_n} a(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} - \overline{u}^q w_n \right) dx \\ &+ \int_{S_n} b^+(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - \overline{u}^p w_n \right) dx \end{aligned} \tag{2.13}$$

Observação 2.1 *A princípio, no termo que contém a, podíamos considerar apenas a^+, mas a parte a^- é essencial para controlarmos o termo que contém w_n^2 em um certo conjunto que ficará explícito mais adiante.*

Vamos inicialmente, obter uma estimativa crucial para o nosso propósito. Do lema 2.1, temos que $|\{x \in A; \overline{u}(x) \leq u_\lambda(x)\}| = 0$, como

$$\begin{aligned} |\{x \in A; \overline{u}(x) \leq u_\lambda(x)\}| &= |\cap_{j=1}^{+\infty} \{x \in A; \overline{u}(x) \leq u_\lambda(x) + \frac{1}{j}\}| \\ &= \lim_{j \to +\infty} |\{x \in A; \overline{u}(x) \leq u_\lambda(x) + \frac{1}{j}\}|, \end{aligned}$$

dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|\{x \in A; \overline{u} \leq u_\lambda + \delta\}| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $u_n \to u_\lambda$, fortemente em $L^2(\Omega)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n \geq n_1$, temos

$$\int_\Omega (u_n - u_\lambda)^2 \leq \frac{\epsilon}{2} \delta^2.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega (u_n - u_\lambda)^2 \geq \int_{\{x \in \Omega; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\}} (u_n - u_\lambda)^2 \geq \int_{\{x \in \Omega; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\}} \delta^2 = \delta^2 |\{x \in \Omega; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\}|.$$

Portanto $|\{x \in \Omega \cap A; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\}| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Como,

$$S_n = \{x \in \Omega; u_n > \overline{u}\} \subseteq \{x \in \Omega; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\} \cup \{x \in \Omega; \overline{u} \leq u_\lambda + \delta\}.$$

Temos que $|S_n \cap A| \leq \epsilon$, de onde segue que $|S_n \cap A| = o(1)$.

Agora vamos estimar o termo que contém b, pois o mesmo não depende dos demais termos em L. Como $p = 2^* - 1 > 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $0 < \theta_2(x), \theta_3(x) < 1$, tal que
$$\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - (\overline{u})^p w_n = p(\overline{u} + \theta_3 w_n)^{p-1}\theta_2 w_n^2.$$
Para alguma constante $C > 0$, temos que
$$\int_{S_n} b(x)\left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - (\overline{u})^p w_n\right)dx \leq C\int_{S_n}(\overline{u} + \theta_3 w_n)^{p-1}w_n^2 dx$$
Como em $A = \{x \in \overline{\Omega}; \overline{u} > 0\}$, temos $(\overline{u} + \theta_3 w_n)^{p-1}w_n^2 \leq Cw_n^2 + Cw_n^{p+1}$, segue que
$$\int_{S_n\cap A}(\overline{u} + \theta_3 w_n)^{p-1}w_n^2 dx \leq C\int_{S_n\cap A} w_n^2 dx + C\int_{S_n} w_n^{p+1}dx$$
como $\|w_n\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, pois $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, usando as Imersões de Sobolev, $p > 1$, temos que
$$\int_{S_n} w_n^{p+1}dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)},$$
como $|S_n \cap A| = o(1)$ e $\frac{2}{N} + \frac{N-2}{N} = 1$, onde $N \geq 3$, pela Desigualdade de Hölder, temos
$$\int_{S_n\cap A} w_n^2 dx \leq \left(\int_{S_n\cap A} 1dx\right)^{\frac{2}{N}}\left(\int_{S_n\cap A}(w_n^2)^{\frac{N}{N-2}}dx\right)^{\frac{N-2}{N}} \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$
De onde segue que
$$\int_{S_n\cap A} b(x)\left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - \overline{u}^p w_n\right)dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$
Em $B = \Omega \setminus A$, temos $(\overline{u} + \theta_3 w_n)^{p-1}w_n^2 \leq Cw_n^{p+1}$, portanto
$$\int_{S_n\cap B}(\overline{u} + \theta_3 w_n)^{p-1}w_n^2 dx \leq C\int_{S_n} w_n^{p+1}dx,$$
como $\|w_n\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, pois $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, usando as Imersões de Sobolev, $p > 1$ e o fato que $\|w_n\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$, obtemos
$$\int_{S_n\cap B} w_n^{p+1}dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$
Assim
$$\int_{S_n\cap B} b(x)\left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{p+1} - \overline{u}^{p+1}}{p+1} - \overline{u}^p w_n\right)dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto
$$\int_{S_n} b(x)\left(\frac{(\overline{u}+w_n)^{p+1}-\overline{u}^{p+1}}{p+1}-\overline{u}^p w_n\right)dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Os termos que contém a e w_n^2, possuem uma dependência, conforme já observado anteriormente. Precisamente, isso ocorre quando $\lambda > -1$. Por isso vamos quebrar em dois caso, o primeiro quando $\lambda > -1$ e o segundo caso, naturalmente, quando $\lambda \leq -1$.

Caso $\lambda > -1$**:** Neste caso, primeiro vamos estimar os termos sobre o conjunto A. Como $\frac{2}{N}+\frac{N-2}{N}=1$, onde $N \geq 3$, pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap A} w_n^2 dx &\leq \frac{\lambda+1}{2}\left(\int_{S_n\cap A} 1dx\right)^{\frac{2}{N}}\left(\int_{S_n\cap A}(w_n^2)^{\frac{N}{N-2}}dx\right)^{\frac{N-2}{N}}\\
&\leq C|S_n\cap A|^{\frac{2}{N}}\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Observe que $\Omega_{a^+}\subset A$ e $B\subset \Omega\setminus\Omega_{a^+}$, assim

$$\int_{S_n\cap(A\setminus\Omega_{a^+})} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx \leq 0$$

ainda mais, $\overline{u}>0$ em $\overline{\Omega_a^0}$ e $\Omega_a^+\subset\overline{\Omega_a^0}$, então existe $\delta>0$, tal que $\overline{u}(x)\geq\delta$, para todo $x\in\Omega_{a^+}$, portanto pelo Teorema do Valor Intermediário, obtemos $0<\theta_1(x),\theta_4(x)<1$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx &\leq \int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a^+(x)\left((\overline{u}+\theta_1 w_n)^q-\overline{u}^q\right)w_n dx\\
&= \int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a^+(x)q(\overline{u}+\theta_4\theta_1 w_n)^{q-1}\theta_1 w_n^2 dx\\
&\leq C\int_{S_n\cap\Omega_{a^+}}\delta^{q-1}w_n^2dx\\
&\leq C\int_{S_n\cap A} w_n^2 dx\\
&\leq C|S_n\cap A|^{\frac{2}{N}}\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Já em $B=\Omega\setminus A$, observe que $\overline{u}=0$, em B e $B\subset\Omega_{a^-}$. Agora definimos

$$U_n=\left\{x\in\Omega_{a^-}; w_n(x)\geq\left(\frac{2a^-(x)}{(\lambda+1)(q+1)}\right)^{\frac{1}{1-q}}\right\}.$$

Nesse ponto é fundamental que $\lambda > -1$. Como $u_n \to u_\lambda$, em $H^1(\Omega)$ e $u_\lambda \leq \overline{u}$, em Ω, temos que $w_n = (\overline{u} - u_n)^+ \to 0$ em $H^1(\Omega)$, logo $|U_n| \to 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap B} w_n^2 dx &\leq \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap(B\setminus U_n)} w_n^2 dx + \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap U_n} w_n^2 dx. \\
&= \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap(B\setminus U_n)} w_n^{1-q} w_n^{q+1} dx + \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap U_n} w_n^2 dx. \\
&\leq \int_{S_n\cap(B\setminus U_n)} \frac{a^-(x)}{q+1} w_n^{q+1} dx + \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap U_n} w_n^2 dx. \\
&\leq \int_{S_n\cap B} \frac{a^-(x)}{q+1} w_n^{q+1} dx + o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde usamos para a segunda desigualdade, a definição de U_n e para a terceira desigualdade, a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev. Como

$$-\int_{S_n\cap B} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} + \overline{u}^q w_n\right) dx = -\int_{S_n\cap B} \frac{a^-(x)}{q+1} w_n^{q+1} dx,$$

pois $\overline{u} = 0$, em $B \subset \Omega_{a^-}$, temos que

$$\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap B} w_n^2 dx - \int_{S_n\cap B} a^-(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} + \overline{u}^q w_n\right) dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto, temos que se $\lambda > -1$,

$$\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n} w_n^2 dx - \int_{S_n} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} + \overline{u}^q w_n\right) dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Caso $\lambda \leq -1$: Neste caso, temos que

$$\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n} w_n^2 dx \leq 0 \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Já para o termo que contém a, observe que não precisamos mais do termo onde $a \leq 0$, já que o mesmo era somente necessário para controlar o termo que contém w_n^2. Observe que $\Omega_{a^+} \subset A$ e $B \subset \Omega \setminus \Omega_a^+$, assim

$$\int_{S_n\cap(A\setminus\Omega_{a^+})} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} + \overline{u}^q w_n\right) dx \leq 0$$

ainda mais, $\overline{u} > 0$ em $\overline{\Omega_a^0}$ e $\Omega_a^+ \subset \overline{\Omega_a^0}$, então existe $\delta > 0$, tal que $\overline{u}(x) \geq \delta$, para todo $x \in \Omega_{a^+}$, portanto pelo Teorema do Valor Intermediário, obtemos $0 < \theta_1(x), \theta_4(x) < 1$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_{S_n} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx &\leq \int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a^+(x)\left((\overline{u}+\theta_1 w_n)^q-\overline{u}^q\right)w_n dx\\
&= \int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a^+(x) q(\overline{u}+\theta_4\theta_1 w_n)^{q-1}\theta_1 w_n^2 dx\\
&\leq C\int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} \delta^{q-1} w_n^2 dx\\
&\leq C\int_{S_n\cap A} w_n^2 dx\\
&\leq C|S_n\cap A|^{\frac{2}{N}}\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que se $\lambda < -1$,

$$\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n} w_n^2 dx - \int_{S_n} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Assim, independente do valor de λ, temos

$$L \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

De onde segue o resultado do Lema. ■

3 O Problema Modificado

Considere $\lambda < \lambda^*$ e u_λ a solução dada pelo Lema 1.3. Considere agora, o problema modificado

$$\begin{cases}
-\Delta v - \lambda v = a(x)\left((u_\lambda+v)^q - u_\lambda^q\right) + b(x)\left((u_\lambda+v)^p - u_\lambda^p\right) & \text{em } \Omega\\
v \geq 0 & \text{em } \Omega\\
\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega
\end{cases} \qquad (N''_\lambda)$$

Observe que se v é solução do problema (N''_λ), então $u = u_\lambda + v$ resolve o problema (N_λ).

Defina

$$h(x,t) = a(x)\left((u_\lambda+t^+)^q - u_\lambda^q\right) + b(x)\left((u_\lambda+t^+)^p - u_\lambda^p\right)$$

e

$$\begin{aligned} H(x,s) &= \int_0^s h(x,t)dt \\ &= a(x)\left(\frac{(u_\lambda+s^+)^{q+1}-u_\lambda^{q+1}}{q+1}-s^+u_\lambda^q\right)+b(x)\left(\frac{(u_\lambda+s^+)^{p+1}-u_\lambda^{p+1}}{p+1}-s^+u_\lambda^p\right). \end{aligned}$$

O funcional energia associado ao problema (N''_λ) é

$$J_\lambda(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla v|^2+v^2\right)dx-\frac{1+\lambda}{2}\int_\Omega v^{+2}dx-\int_\Omega H(x,v)dx.$$

Sem muita dificuldade, mostra-se que

$$J_\lambda(v)=I_\lambda(u_\lambda+v^+)-I_\lambda(u_\lambda)+\frac{1}{2}\|v^-\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{2.15}$$

Proposição 2.1 *Assuma as hipóteses do Lema 2.2, então 0 é mínimo local de J_λ em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração: Conforme o Lema 2.2, u_λ é mínimo local de I_λ em $H^1(\Omega)$. Portanto, existe $\delta>0$, tal que

$$I_\lambda(u_\lambda)\le I_\lambda(u),\ \text{para todo } \|u_\lambda-u\|_{H^1(\Omega)}<\delta$$

Da identidade (2.15), temos que

$$J_\lambda(0)=0\le I_\lambda(u_\lambda+v^+)-I_\lambda(u_\lambda)+\frac{1}{2}\|v^-\|^2_{H^1(\Omega)}=J_\lambda(v)$$

para todo $\|v\|_{H^1(\Omega)}=\|u_\lambda-u\|_{H^1(\Omega)}<\delta$. Portanto, 0 é mínimo local de J_λ em $H^1(\Omega)$. ∎

Proposição 2.2 *Se I_λ satisfaz $(PS)_{c+I_\lambda(u_\lambda)}$, para algum $c\in\mathbb{R}$, então o funcional J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração: Seja v_n uma sequência $(PS)_c$ para J_λ, $c\in\mathbb{R}$, ou seja,

$$J_\lambda(v_n)\to c \quad \text{e} \quad J'_\lambda(v_n)\to 0,\ \text{em } H^{-1}(\Omega).$$

onde $H^{-1}(\Omega)$ é o espaço dual de $H^1(\Omega)$. De (2.15), temos

$$\langle J'_\lambda(v_n),v_n{}^-\rangle=I'_\lambda(u_\lambda+v_n{}^+)v_n{}^-+\|v^-\|^2_{H^1(\Omega)}=\|v^-\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto $v_n^-\to 0$, em $H^1(\Omega)$. Colocando $u_n=u_\lambda+v_n^+$, temos de (2.15)

$$I_\lambda(u_n)\to I_\lambda(u_\lambda)+c$$

e

$$\langle I'_\lambda(u_n), \phi\rangle = o(1)\|\phi\|_{H^1(\Omega)}, \ \forall\ \phi \in H^1(\Omega).$$

Portanto u_n é uma sequência $(PS)_{I_\lambda(u_\lambda)+c}$ para o funcional I_λ. Portanto, a menos de subsequência, u_n é convergente em $H^1(\Omega)$, logo v_n é convergente em $H^1(\Omega)$. ■

4 Limitação das Sequências de Palais-Smale

Este resultado foi motivado por [6, 44].

Lema 2.3 *Toda sequência $(PS)_c$ é limitada em $H^1(\Omega)$, caso:*

1. *$\Omega_{b^+} = \Omega$; ou*
2. *$(H_{b^+_-})$, (H_{b^0}) valem e $\lambda \notin \sigma(-\Delta, H^1_0(\Omega_{b^0}))$.*

Demonstração: De fato, considere $u_n \in H^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$, ou seja,

$$I_\lambda(u_n) \to c, \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0$$

a última convergência em $H^{-1}(\Omega)$, o dual de $H^1(\Omega)$. De fato, podemos assumir que $I_\lambda(u_n) \leq C$ e $\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle = o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{1+\lambda}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega b(x)(u_n^+)^{p+1}dx \leq C$$

e

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - (1+\lambda)\int_\Omega (u_n^+)^2 dx - \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1}dx - \int_\Omega b(x)(u_n^+)^{p+1}dx = o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}.$$

Observe que $(p+1)I_\lambda(u_\lambda) - \langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle \leq C - o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$, ou seja,

$$\frac{p-1}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{(p-1)(1+\lambda)}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 dx - \frac{p-q}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1}dx \leq C + o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C + o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)} + C\left(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)}\right).$$

De onde segue, pela imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^{q+1}(\Omega)$, que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C + o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)} + C\left(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^{q+1}_{H^1(\Omega)}\right). \tag{2.16}$$

Como $q+1<2$, basta mostrarmos que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ é limitada, para obtermos que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$ é limitada.

De fato, suponha por contradição, que a menos de subsequência, $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$. Defina $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$. Dividindo a desigualdade (2.16) por $\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$\|v_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|u_n\|^{-2}_{L^2(\Omega)} k + \|u_n\|^{-1}_{L^2(\Omega)} o(1)\|v_n\|_{H^1(\Omega)} + C\left(1 + \|u_n\|^{q-1}_{L^2(\Omega)}\|v_n\|^{q+1}_{H^1(\Omega)}\right).$$

Como $q<1$ e $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to +\infty$, obtemos que v_n é limitada em $H^1(\Omega)$. Portanto, a menos de subsequência, podemos assumir que v_n, converge fracamente para alguma v em $H^1(\Omega)$, converge fortemente para v em $L^s(\Omega)$, para todo $1 \leq s < 2^*$. Em particular $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Por outro lado, considere como $\langle I'_\lambda(u_n), \phi\rangle = o(1)\|\phi\|_{H^1(\Omega)}$, dividindo essa equação por $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$, obtemos

$$\begin{aligned} o(1)\|u_n\|^{-1}_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla v_n \nabla \phi dx + \int_\Omega v_n \phi dx - (1+\lambda)\int_\Omega v_n \phi dx + \\ &- \|u_n\|^{q-1}_{L^2(\Omega)} \int_\Omega a(x) v_n^q \phi dx - \|u_n\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} \int_\Omega b(x) v_n^p \phi dx \end{aligned}$$

Portanto $\|u_n\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} \displaystyle\int_\Omega b(x) v_n^p \phi dx$ é limitado, mas como $\|u_n\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} \to +\infty$, temos que

$$\int_\Omega b(x) v^p \phi dx = \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega b(x) v_n^p \phi dx = 0.$$

Caso (i): Se $b>0$ qtp em Ω, temos que $v=0$, o que é uma contradição, pois $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Caso (ii): Já no caso de b mudar de sinal. Pela arbitrariedade de $\phi \in H^1(\Omega)$, obtemos que $v=0$, qtp $x \in \Omega \setminus \Omega_{b^0}$. Como $\overline{\Omega_{b^0}} \subset \Omega$, podemos considerar $v \in H^1_0(\Omega_{b^0})$, considerando que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$, temos tabém que $v \neq 0$ em Ω_{b^0}. Por outro lado, para $\phi \in C^\infty_c(\Omega_{b^0})$, denotamos por ϕ a sua extensão natural a Ω, com $\phi = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_{b^0}$ e pelo fato que $\langle I'_\lambda(u_n), \phi\rangle = o(1)\|\phi\|_{H^1(\Omega)}$, temos que

$$o(1)\|u_n\|^{-1}_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega_{b^0}} \nabla v_n \nabla \phi dx - \lambda \int_{\Omega_{b^0}} v_n \phi dx - \|u_n\|^{q-1}_{L^2(\Omega)} \int_{\Omega_{b^0}} a(x) v_n^q \phi dx$$

Como $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ e $q<1$, obtemos que

$$\int_{\Omega_{b^0}} \nabla v \nabla \phi dx - \lambda \int_{\Omega_{b^0}} v \phi dx = 0, \ \forall\ \phi \in C^\infty_c(\Omega_{b^0}),$$

o que é uma contradição com a hipótese que $\lambda \notin \sigma(-\Delta, H_0^1(\Omega_{b^0}))$. Logo $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ é limitada, consequentemente $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$ é limitada. ∎

5 Multiplicidade

Para os resultados dessa seção, nós utilizamos, principalmente, as ideias de [17, 29], mas também de [16, 19, 21, 25, 39, 40, 45, 56].

5.1 Condição de Palais-Smale

Nesta seção utilizamos as ideias de Garcia-Azorero, Peral e Rossi ([29], Pg. 112). Considere

$$S = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx,\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1\right\}$$

onde $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é o espaço de Sobolev, obtido com o completamento de $C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, com a norma $\|u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$. A constante S é atingida por

$$U(x) = \frac{C_N}{(1 + x^2)^{\frac{n-2}{2}}},$$

com $C_N = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}$. Ainda mais,

$$-\Delta U = U^{2^*-1},\ \text{em } \mathbb{R}^N$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}}.$$

Recordamos as definições

$$b_M := \max_{x \in \overline{\Omega}} b(x) > 0 \quad \text{e} \quad b_m := \max_{x \in \partial\Omega} b(x).$$

Lema 2.4 *Assuma as hipóteses do Lema 2.3. Se $u = 0$ e $u = u_\lambda$ são os únicos pontos críticos de I_λ, então I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$,*

1. *Caso $b_m > 0$, para*

$$c < c^* = I_\lambda(u_\lambda) + \min\left\{\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}}\right\}.$$

2. Caso $b_m \leq 0$, para

$$c < c^* = I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Demonstração: Para essa demonstração, precisamos de algumas definições, enunciadas a seguir:

Definição 2.1 *Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$. Definimos $C_0(\Omega)$ como o fecho de $K(\Omega) = \{u \in C(\Omega); \operatorname{supp} u$ é compacto em $\Omega\}$ em $C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ com respeito a norma uniforme. Uma medida finita sobre Ω é um funcional linear contínuo sobre $C_0(\Omega)$.*

Agora, considere uma sequência $u_n \in H^1(\Omega)$, que satisfaz $(PS)_c$, isto é,

$$I_\lambda(u_n) \to c, \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0$$

a última convergência em $H^{-1}(\Omega)$, o dual de $H^1(\Omega)$.

Sabemos do Lema 2.3, que u_n é limitada em $H^1(\Omega)$, portanto existe $u \in H^1(\Omega)$, a menos de subsequência, o limite fraco da sequência u_n. Ainda mais, pelo Princípio de Concentração de Compacidade de Lions, vide [39, 40], bem como [16, 19] existe um conjunto finito de pontos $\{x_k, k \in K\} \subset \overline{\Omega}$ e números reais positivos $\{\mu_k; k \in K\}$ e $\{\rho_k; k \in K\}$, tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, \text{ fracamente em } H^1(\Omega) \\ u_n \to u, \text{ fortemente em } L^s(\Omega),\ 1 \leq s < 2^* \\ |\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_{k\in K} \mu_k \delta_{x_k}, \text{ em medida M}(\Omega) \\ |u_n|^{2^*} \rightharpoonup d\rho = |u|^{2^*} + \sum_{k\in K} \rho_k \delta_{x_k}, \text{ em medida M}(\Omega) \end{cases}$$

onde $M(\Omega)$ é o espaço das medidas finitas sobre Ω. Ainda mais,

$$\mu_k \geq S\rho_k^{\frac{2}{2^*}}, \text{ se } x_k \in \Omega \tag{2.17}$$

e

$$\mu_k \geq \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} \rho_k^{\frac{2}{2^*}}, \text{ se } x_k \in \partial\Omega. \tag{2.18}$$

Vamos mostrar agora que $\mu_k \leq b(x_k)\rho_k$. Para isso vamos considerar uma família de funções concentrando em x_k. Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, considere $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$\phi \equiv 1,\ x \in B_\epsilon(x_k), \quad \phi \equiv 0,\ x \in B_{2\epsilon}(x_k)^c,\ |\nabla\phi| \leq \frac{2}{\epsilon}.$$

e x_k seja o único ponto singular contido no supp ϕ. Como a sequência $u_n\phi$ é limitada em $H^1(\Omega)$ e u_n é uma sequência $(PS)_c$, temos que

$$\langle I'(u_n), u_n\phi\rangle \to 0.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n\phi) + \int_\Omega u_n^2\phi dx - (1+\lambda)\int_\Omega (u_n^+)^2\phi dx - \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1}\phi dx - \int_\Omega b(x)(u_n^+)^{2^*}\phi dx = o(1).$$

Como $u_n^{2^*} \rightharpoonup d\rho$ em medida, obtemos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n\phi) = -\int_\Omega u_n^2\phi dx + (1+\lambda)\int_\Omega (u_n^+)^2\phi dx + \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1}\phi dx + \int_\Omega b(x)\phi d\rho + o(1).$$

Por outro lado,

$$\nabla u_n \nabla(u_n\phi) = u_n\nabla u_n \nabla\phi + |\nabla u_n|^2\phi$$

como, $|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\mu$, em medida, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\phi \ &= -\int_\Omega u_n^2\phi dx + (1+\lambda)\int_\Omega (u_n^+)^2\phi dx + \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1}\phi dx + \\ &+ \int_\Omega b(x)\phi d\rho - \int_\Omega \phi d\mu + o(1). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Como u_n é limitada em $H^1(\Omega)$ e converge para u em $L^2(\Omega)$, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$0 \le \left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\phi dx\right| \le \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega u_n^2|\nabla\phi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le C\left(\int_\Omega u^2|\nabla\phi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considere $\Omega_\epsilon = B_{2\epsilon}(x_k)\cap\Omega$, como $\frac{2}{N} + \frac{N-2}{N} = 1$ e $|\nabla\phi| < \frac{2}{\epsilon}$, temos pela desigualdade de Hölder, que

$$\left(\int_{\Omega_\epsilon} u^2|\nabla\phi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_{\Omega_\epsilon} u^{\frac{2N}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{N}} \cdot \left(\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla\phi|^N dx\right)^{\frac{2}{N}} \le \left(\int_{\Omega_\epsilon} u^{\frac{2N}{N-2}} dx\right)^{\frac{N-2}{N}} \cdot \left(\int_{\Omega_\epsilon} \frac{2^N}{\epsilon^N} dx\right)^{\frac{2}{N}}$$

Como $\Omega_\epsilon \subset B_{2\epsilon}(x_k)$, temos que

$$0 \le \left|\int_\Omega u_n\nabla u_n\nabla\phi dx\right| \le C\|u\|^2_{L^{2^*}(\Omega_\epsilon)} \frac{|B_{2\epsilon}(x_k)|^2}{\epsilon^2} \to 0, \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

De onde segue que

$$\int_\Omega u_n \nabla u_n \nabla \phi dx \to 0$$

quando $\epsilon \to 0$. Portanto de (2.19)

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0} \left(-\int_\Omega u_n^2 \phi dx + (1+\lambda) \int_\Omega (u_n^+)^2 \phi dx + \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1} \phi dx + \int_\Omega b(x)\phi d\rho - \int_\Omega \phi d\mu \right).$$

Como $|\operatorname{supp} \phi| \to 0$, quando $\epsilon \to 0$, temos da identidade anterior, que

$$0 = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_\Omega b(x)\phi d\rho - \int_\Omega \phi d\mu \right).$$

Pela continuidade de b, quando $\epsilon \to 0$, obtemos que

$$\int_\Omega b(x)\phi d\rho = \int_\Omega \left(b(x)\phi |u|^{2^*} + b(x)\phi \sum_k \rho_k \delta_{x_k} \right) dx \to b(x_k)\rho_k$$

e

$$-\int_\Omega \phi d\mu \leq -\int_\Omega \left(\phi |\nabla u|^2 + \phi \sum_k \mu_k \delta_{x_k} \right) dx \to -\mu_k.$$

Consequentemente,

$$b(x_k)\rho_k \geq \mu_k. \tag{2.20}$$

Observe aqui, que $x_k \notin \Omega_{b^-}$.

Voltamos a prova que u_n converge em $H^1(\Omega)$. Pelo Lema de Brezis-Lieb, temos que

$$\int_\Omega b(x)(u_n^+)^{2^*} dx = \int_\Omega b(x)(u^+)^{2^*} dx + \int_\Omega b(x)(v_n^+)^{2^*} dx + o(1)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx + o(1),$$

onde $v_n = u_n - u$. Como $I_\lambda(u_n) = c + o(1)$, temos que

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + u_n^2 \right) dx - \frac{1+\lambda}{2} \int_\Omega (u_n^+)^2 - \frac{1}{q+1} \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1} - \frac{1}{2^*} \int_\Omega b(x)(u_n^+)^{2^*} = c + o(1).$$

e como $u_n \to u$ em $L^s(\Omega)$, para $1 \leq s < 2^*$, das identidades anteriores, temos que

$$I_\lambda(u) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega b(x)(v_n^+)^{2^*} = c + o(1). \tag{2.21}$$

Analogamente, como $\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle = o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$, temos que

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 + u^2\right) dx - (1+\lambda)\int_\Omega (u_n^+)^2 - \int_\Omega a(x)(u_n^+)^{q+1} - \int_\Omega b(x)(u_n^+)^{2^*} = o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}.$$

e como $I'_\lambda(u) = 0$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \int_\Omega b(x)(v_n^+)^{2^*} = o(1). \tag{2.22}$$

De (2.21) e (2.22), obtemos que

$$I_\lambda(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = c + o(1).$$

Como $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} = \frac{1}{N}$, segue que

$$I_\lambda(u) + \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx = c + o(1). \tag{2.23}$$

De (2.23), obtemos

$$I_\lambda(u) + \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^2 dx = c + o(1).$$

Como $|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup d\mu \geq |\nabla u|^2 + \sum_k \mu_k \delta_{x_k}$, temos que

$$I_\lambda(u) + \frac{1}{N}\mu_k \leq c, \ \forall\ k \in K. \tag{2.24}$$

Agora precisamos mostrar que se $u = 0$ ou $u = u_\lambda$, então $\rho_k = \mu_k = 0$ para todo k.

Caso 1: Suponha $b_m > 0$. Observe também, que de (2.20), temos $b_m\rho_k \geq \mu_k$, se $x_k \in \partial\Omega$ e $b_M\rho_k \geq \mu_k$, se $x_k \in \Omega$. Agora, se $\mu_k > 0$, temos que $\rho_k > 0$, então para obtermos uma contradição, é suficiente supor que $\rho_k > 0$, para algum k.

De (2.20), temos que se $x_k \in \Omega$, temos $b_M\rho_k \geq \mu_k$ e de (2.17), temos

$$\mu_k \geq S\rho_k^{\frac{2}{2^*}} \geq S\left(\frac{\mu_k}{b_M}\right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Como $1 - \frac{2}{2^*} = \frac{2}{N}$, temos

$$\mu_k^{\frac{2}{N}} \geq \frac{S}{b_M^{\frac{N-2}{N}}}.$$

De onde segue que

$$\mu_k \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{b_M^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Analogamente, de (2.20), se $x_k \in \partial\Omega$, então $b_m \rho_k \geq \mu_k$ e de (2.18), temos

$$\mu_k \geq \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} \rho_k^{\frac{2}{2^*}} \geq \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} \left(\frac{\mu_k}{b_m} \right)^{\frac{2}{2^*}}.$$

Como $1 - \frac{2}{2^*} = \frac{2}{N}$, temos

$$\mu_k^{\frac{2}{N}} \geq \frac{S}{2^{\frac{2}{N}} b_m^{\frac{N-2}{N}}}.$$

De onde segue que

$$\mu_k \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2 b_m^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Assim, de (2.24), segue

$$I_\lambda(u) \leq c - \frac{1}{N}\mu_k \leq c - \begin{cases} \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}} & \text{se } x_k \in \Omega \\ \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}} & \text{se } x_k \in \partial\Omega \end{cases}$$

Portanto

$$I_\lambda(u) + \min\left\{ \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}} \right\} \leq c.$$

Como $I_\lambda(u_\lambda) < 0$, temos que se $u = 0$ ou $u = u_\lambda$, então

$$I_\lambda(u_\lambda) + \min\left\{ \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}} \right\} \leq c.$$

O que é uma contradição, pois por hipótese

$$c < I_\lambda(u_\lambda) + \min\left\{ \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}} \right\}.$$

Portanto $\rho_k = \mu_k = 0$, para todo $k \in K$.

Logo, a menos de subsequência, u_n converge em $H^1(\Omega)$, de onde segue que I_λ, satisfaz $(PS)_c$ para

$$c < I_\lambda(u_\lambda) + \min\left\{ \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}} \right\}.$$

Caso $b_m \leq 0$**:**

No caso $b_m \leq 0$, se $x_k \in \partial\Omega$, temos de (2.20), que

$$b_m \rho_k \geq \mu_k.$$

Portanto $\mu_k = 0$. Como de (2.18), $\mu_k \geq \dfrac{S}{2^{\frac{2}{N}}} \rho_k^{\frac{2}{2^*}}$, temos também $\rho_k = 0$.

Se $x_k \in \Omega$, temos de (2.17), $\mu_k \geq S\rho_k^{\frac{2}{2^*}}$, e de (2.20), $b_M \rho_k \geq \mu_k$, de onde segue que, se $\rho_k = 0$, então $\mu_k = 0$. Suponha então que $\rho_k > 0$ para algum k, com $x_k \in \Omega$, então $b_M \rho_k \geq \mu_k \geq S\rho_k^{\frac{2}{2^*}}$, portanto

$$\mu_k \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{b_M^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Assim de (2.24), temos

$$I_\lambda(u) + \frac{1}{N}\mu_k \leq c.$$

De onde segue que

$$I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}} \leq c$$

o que é uma contradição.

Portanto $\rho_k = \mu_k = 0$, para todo $k \in K$. Logo, a menos de subsequência, u_n converge em $H^1(\Omega)$, de onde segue que I_λ, satisfaz $(PS)_c$ para

$$c < I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}.$$

■

5.2 Nível de Energia

Para obtermos a segunda solução para (N_λ), utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz. Os Teoremas a seguir são baseados nos resultados de [17], veja também [21].

Teorema 2.3 *Assuma que* $b_M \leq 2^{\frac{2}{N-2}} b_m$. *Sem perda de generalidade, suponha que* $0 \in \partial\Omega$ *e* $b_m = b(0)$, *suponha também que* $a(x) \geq a_0 > 0$ *em uma vizinhança de* 0 *e* $H(0) > 0$, *onde* $H(0)$ *é a curvatura média do bordo de* Ω *em* 0 *e que*

$$|b(x) - b(0)| = o(|x|), \text{ para } x \text{ próximo de } 0. \tag{2.25}$$

Então para todo $\lambda < \lambda^*$, com $\lambda \notin \sigma(-\Delta, H^1(\Omega_{b^0}))$ ou $b > 0$ em Ω, o problema (N_λ) tem ao menos duas soluções.

Demonstração: Como nesse caso I_λ satisfaz $(PS)_c$, apenas abaixo de um certo nível, conforme Lema 2.4, vamos obter um caminho com energia abaixo do nível crítico. Observe que $b_M \leq 2^{\frac{2}{N-2}} b_m$ implica que $b_m > 0$, $b_M^{\frac{N-2}{N}} \leq 2 b_m^{\frac{N-2}{N}}$ e portanto

$$\min\left\{\frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}}\right\} = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Por simplicidade assumimos que $0 \in \partial\Omega$ e $b_m = b(0)$. Para estimar o nível de energia de I_λ abaixo de c, onde I_λ satisfaz $(PS)_c$, nós usaremos a seguinte família de funções

$$u_{\epsilon;y} = \frac{C_n \epsilon^{\frac{n-2}{2}}}{(\epsilon^2 + |x-y|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

onde $\epsilon > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$. Simplificamos a notação, usando apenas u_ϵ, para denotar $u_{\epsilon;0}$.

Precisamos concentrar essa família de funções em torno de 0. Para isso, seja $\phi \in C^1(B_r(0))$, tal que $\phi \equiv 1, B_{\frac{r}{2}}(0)$, $\phi \equiv 0, B_r(0)^c$ e $0 \leq \phi \leq 1$, onde $r > 0$ é tal que $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq b_0 > 0$ e $|b(x) - b_m| = o(|x|)$, $\forall\ x \in \overline{B_r(0)} \cap \overline{\Omega}$, denotaremos $B_r := B_r(0)$.

Defina $v_\epsilon = \phi u_\epsilon$. Primeiro, vamos mostrar que

$$\max_{t \geq 0} I_\lambda(u_\lambda + t v_\epsilon) < I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2N b_m^{\frac{N-2}{2}}}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Temos as seguintes estimativas, conforme [17],

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega u_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2*}}} \leq \begin{cases} \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} - A_N H(0)\epsilon \log \frac{1}{\epsilon} + O(\epsilon) & \text{se } N = 3 \\ \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} - A_N H(0)\epsilon + O(\epsilon^2 \log \frac{1}{\epsilon}) & \text{se } N = 4 \\ \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} - A_N H(0)\epsilon + O(\epsilon^2) & \text{se } N \geq 5 \end{cases} \tag{2.26}$$

onde $A_N > 0$ é uma constante dependendo de N. Temos também que

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}^c \cap \Omega} u_\epsilon^{2^*} dx = O(\epsilon^N)$$

e

$$\int_{B^c_{\frac{r}{2}}\cap\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 dx = O(\epsilon^{N-2}).$$

Portanto, v_ϵ satisfaz a mesma identidade (2.26), trocando u_ϵ por v_ϵ. Pela definição de I_λ, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &= \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda + t\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_\lambda + tv_\epsilon)^2 dx \\
&- \tfrac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega b(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{2^*} dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 + 2t\nabla u_\lambda \nabla v_\epsilon + |t\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_\lambda^2 + 2tu_\lambda v_\epsilon + (tv_\epsilon)^2 dx \\
&- \tfrac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1} dx + \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^-(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{2^*} dx \\
&- \tfrac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{2^*} dx
\end{aligned}$$

Para estimar $I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon)$, $t \geq 0$, conforme [17], para $\theta > 2$ e $k \in (1, \theta - 1)$, podemos encontrar $C > 0$, tal que

$$(s+t)^\theta \geq s^\theta + t^\theta + \theta s^{\theta-1}t + \theta s t^{\theta-1} - Ct^k s^{\theta-k}, \ \forall\, s, t \geq 0.$$

Usando esta desigualdade com $\theta = p + 1 = 2^*$, e $1 < k := \frac{N+1}{N-2} < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$. Observe que $2^* - k = \frac{N-1}{N-2}$ e portanto

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 + 2t\nabla u_\lambda \nabla v_\epsilon + |t\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_\lambda^2 + 2tu_\lambda v_\epsilon + (tv_\epsilon)^2 dx \\
&- \tfrac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1} dx + \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^-(x)u_\lambda^{2^*} dx \\
&- \tfrac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)u_\lambda^{2^*} dx - \int_\Omega b^+(x)u_\lambda t v_\epsilon dx \\
&- \tfrac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)\left((tv_\epsilon)^{2^*} + (2^*)u_\lambda t^p v_\epsilon^p - Cu_\lambda^{\frac{N-1}{N-2}} v_\epsilon^{\frac{N+1}{N-2}}\right) dx
\end{aligned}$$

pois $v_\epsilon = \phi u_\epsilon$, e $\operatorname{supp}\phi \subset \operatorname{supp} b^+$. Assim

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_\lambda^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x) u_\lambda^{q+1} dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega b(x) u_\lambda^{2^*} dx \\
&+ t\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla v_\epsilon dx - t\lambda \int_\Omega u_\lambda v_\epsilon dx - t\int_\Omega a(x) u_\lambda^q v_\epsilon dx - t\int_\Omega b(x) u_\lambda^p v_\epsilon dx \\
&+ \tfrac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t^2\lambda}{2}\int_\Omega v_\epsilon^2 dx \\
&- \int_\Omega a(x)\left(\frac{(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1} - u_\lambda^{q+1}}{q+1} - tu_\lambda^q v_\epsilon\right) dx \\
&- \tfrac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)\left((tv_\epsilon)^{2^*} + (2^*) u_\lambda t^p v_\epsilon^p - Cu_\lambda^{\frac{N-1}{N-2}} v_\epsilon^{\frac{N+1}{N-2}}\right) dx
\end{aligned}$$

Conforme [44], temos a desigualdade,

$$\frac{(r+s)^{q+1} - r^{q+1}}{q+1} - r^q s \leq C(q) s^{q+1}, \ \forall\ r, s \geq 0,$$

que juntamente com o fato, que u_λ é solução fraca de (N_λ), obtemos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t^2\lambda}{2}\int_\Omega v_\epsilon^2 dx + Ct^{q+1}\int_\Omega v_\epsilon^{q+1} dx \\
&- \tfrac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)\left((tv_\epsilon)^{2^*} + 2^* u_\lambda t^p v_\epsilon^p - Cu_\lambda^{\frac{N-1}{N-2}} v_\epsilon^{\frac{N+1}{N-2}}\right) dx.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_\epsilon^{q+1} dx &\leq C\int_{B_\epsilon} \frac{\epsilon^{\frac{N-2}{2}(q+1)}}{\epsilon^{(N-2)(q+1)}} dx + C\int_{B_r \setminus B_\epsilon} \frac{\epsilon^{\frac{N-2}{2}(q+1)}}{|x|^{(N-2)(q+1)}} dx \\
&\leq C\epsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\epsilon^{\frac{N-2}{2}(q+1)}\int_\epsilon^r \rho^{q(2-N)+1} d\rho.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\int_\Omega v_\epsilon^{q+1} dx \leq \begin{cases} C\epsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\epsilon^{\frac{N-2}{2}(q+1)}, & \text{se } q \neq \dfrac{2}{N-2} \\ C\epsilon^{\frac{(N-2)(1-q)+4}{2}} + C\epsilon^{\frac{N-2}{2}(q+1)} + C\epsilon^{\frac{N-2}{2}(q+1)} |\ln \epsilon|, & \text{se } q = \dfrac{2}{N-2} \end{cases}$$

Logo

$$\int_\Omega v_\epsilon^{q+1} dx \leq \begin{cases} o(\epsilon^2), & \text{se } N \geq 6 \\ o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}), & \text{se } 3 \leq N \leq 5 \end{cases} \tag{2.27}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_\epsilon^{\frac{N+1}{N-2}} dx &\leq C\int_{B_r}\left(\frac{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\epsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{N+1}{N-2}} \\
&\leq C\int_{B_\epsilon}\frac{\epsilon^{\frac{N+1}{2}}}{\epsilon^{N+1}}dx + C\int_{B_r\setminus B_\epsilon}\frac{\epsilon^{\frac{N+1}{2}}}{|x|^{N+1}}dx \\
&\leq C\epsilon^{\frac{N-1}{2}} + C\epsilon^{\frac{N+1}{2}}\int_\epsilon^r \rho^{-2}d\rho \\
&\leq C\epsilon^{\frac{N-1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_\epsilon^{p} dx &\leq C\int_{B_r}\left(\frac{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\epsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{\frac{N+2}{N-2}} \\
&\leq C\int_{B_\epsilon}\frac{\epsilon^{\frac{N+2}{2}}}{\epsilon^{N+2}}dx + C\int_{B_r\setminus B_\epsilon}\frac{\epsilon^{\frac{N+2}{2}}}{|x|^{N+2}}dx \\
&\leq C\epsilon^{\frac{N+2}{2}} + C\epsilon^{\frac{N+2}{2}}\int_\epsilon^r \rho^{-3}d\rho \\
&\leq C\epsilon^{\frac{N-2}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ainda mais,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v_\epsilon^{2} dx &\leq C\int_{B_r}\left(\frac{\epsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\epsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\right)^{2} \\
&\leq C\int_{B_\epsilon}\frac{\epsilon^{N-2}}{\epsilon^{2(N-2)}}dx + C\int_{B_r\setminus B_\epsilon}\frac{\epsilon^{N-2}}{|x|^{2(N-2)}}dx \\
&\leq C\epsilon^{2} + C\epsilon^{N-2}\int_\epsilon^r \rho^{-N+3}d\rho
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_\Omega v_\epsilon^2 dx \leq \begin{cases} C\epsilon^2 + C\epsilon^{N-2}, & \text{se } N\geq 5 \\ C\epsilon^2 + C\epsilon^2|\ln\epsilon^2|, & \text{se } N=4 \\ C\epsilon^2 + C\epsilon, & \text{se } N=3 \end{cases} \tag{2.30}$$

Para $N\geq 5$, considere

$$\xi_\epsilon(t) := C\left(t^2\epsilon^2 + t^p\epsilon^{\frac{N-2}{2}} + t^{\frac{N+1}{N-2}}\epsilon^{\frac{N-1}{2}} + t^{q+1}\epsilon^{\frac{3}{2}}\right).$$

De (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30), para algum $C>0$, podemos escrever

$$I_\lambda(u_\lambda + t\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \psi_\epsilon(t)$$

onde

$$\psi_\epsilon(t) := \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b(x)v_\epsilon^{2^*}dx + \xi_\epsilon(t).$$

Portanto, como $v_\epsilon = 0$, quando $b(x)\leq 0$, temos que $\int_\Omega b(x)v_\epsilon^{2^*}dx > 0$, então

$$\lim_{t\to+\infty}\psi_\epsilon(t) < 0, \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0^+}\psi_\epsilon(t) = 0$$

Como $\psi'_\epsilon(t) > 0$, para $t > 0$ próximo de 0, existe $t_\epsilon > 0$, tal que, $\max_{t\geq 0}\psi_\epsilon(t) = \psi_\epsilon(t_\epsilon)$. Como $I_\lambda(u_\lambda) < 0$, temos que

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \psi_\epsilon(t_\epsilon) \leq \psi_\epsilon(t_\epsilon)$$

Vamos mostrar que existe $0 < T_1 \leq t_\epsilon \leq T_2$, para todo $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno. Como

$$\psi'_\epsilon(t_\epsilon) = 0,$$

temos que

$$t_\epsilon \int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - t_\epsilon^p \int_\Omega b(x) v_\epsilon^{2^*} \leq 0.$$

Portanto,

$$t_\epsilon^{p-1} \geq \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega b(x) v_\epsilon^{2^*}} \geq C \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega v_\epsilon^{2^*}} \geq C > 0,$$

para $\epsilon > 0$ pequeno. Portanto existe $0 < T_1 \leq t_\epsilon$, $\forall\ \epsilon > 0$, suficientemente pequeno.

Suponha agora, por contradição, que exista $t_{\epsilon_n} \to +\infty$, quando $\epsilon_n \to 0$. Como $\psi'_\epsilon(t_\epsilon) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= t_{\epsilon_n} \int_\Omega |\nabla v_{\epsilon_n}|^2 dx - t_{\epsilon_n}^p \int_\Omega b(x) v_{\epsilon_n}^{2^*} \\ &+ C\left(2t_{\epsilon_n}\epsilon_n^2 + p t_{\epsilon_n}^{p-1}\epsilon_n^{\frac{N-2}{2}} + \tfrac{N+1}{N-2} t_{\epsilon_n}^{\frac{3}{N-2}} \epsilon_n^{\frac{N-1}{2}} + (q+1) t_{\epsilon_n}^q \epsilon_n^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\Omega b(x) v_{\epsilon_n}^{2^*} &= t_{\epsilon_n}^{1-p} \int_\Omega |\nabla v_{\epsilon_n}|^2 dx \\ &+ C\left(2t_{\epsilon_n}^{1-p}\epsilon_n^2 + p t_{\epsilon_n}^{-1}\epsilon^{\frac{N-2}{2}} + \tfrac{N+1}{N-2} t_{\epsilon_n}^{\frac{3}{N-2}-p} \epsilon^{\frac{N-1}{2}} + (q+1) t_{\epsilon_n}^{q-p} \epsilon^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Como $b(x) \geq \delta_0$, no $\operatorname{supp} v_\epsilon$, para algum $\delta_0 > 0$, temos que o lado esquerdo da identidade acima é limitada inferiormente por uma constante positiva que independe de ϵ_n, já o lado direito da identidade converge pra zero, quando $\epsilon_n \to 0$ e assim obtemos uma contradição. Portanto, existe $0 < T_1 \leq t_\epsilon \leq T_2$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Como $|b(x)-b(0)|=o(|x|)$, para $x\in B_r$, então $|b(x)-b(0)|=o(1)|x|$, portanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega (b(x)-b_m)\,v_\epsilon^{2^*}dx &\leq o(1)\int_{B_r}|x|v_\epsilon^{2^*}dx\\ &\leq o(1)\int_{B_{\frac{r}{\epsilon}}}|x|v_\epsilon^{2^*}dx+O(\epsilon^N)\\ &= o(1)\int_{B_{\frac{r}{\epsilon}}}|\epsilon y|v_\epsilon^{2^*}(\epsilon y)\epsilon^N dy+O(\epsilon^N)\\ &= o(1)\epsilon\int_{B_{\frac{r}{\epsilon}}}\frac{|y|}{(1+|y|^2)^N}dy+O(\epsilon^N)\\ &\leq o(1)\epsilon\left(C+C\int_{r_0}^{+\infty}r^{-2N+1}r^{N-1}dr\right)+O(\epsilon^N)\\ &= o(\epsilon).\end{aligned}$$

Logo

$$\int_\Omega b(x)v_\epsilon^{2^*}dx=\int_\Omega b_m v_\epsilon^{2^*}dx+o(\epsilon).$$

Assim

$$\begin{aligned}I_\lambda(u_\lambda+tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda)+\psi_\epsilon(t)\\ &\leq I_\lambda(u_\lambda)+\frac{t_\epsilon^2}{2}\int_\Omega|\nabla v_\epsilon|^2dx-\frac{t_\epsilon^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b_m v_\epsilon^{2^*}dx+o(\epsilon)+\xi_\epsilon(t)\end{aligned}$$

Considere $A,B>0$, temos que $\max_{t>0}\left\{\frac{t^2}{2}A-\frac{t^{2^*}}{2^*}B\right\}$, se realiza com $t=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{N-2}{4}}$, assim

$$\max_{t>0}\left\{\frac{t^2}{2}A-\frac{t^{2^*}}{2^*}B\right\}=\frac{1}{N}\frac{A^{\frac{N}{2}}}{B^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Portanto

$$\frac{t_\epsilon^2}{2}\int_\Omega|\nabla v_\epsilon|^2dx-\frac{t_\epsilon^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b_m v_\epsilon^{2^*}dx\leq\frac{1}{N}\frac{\left(\int_\Omega|\nabla v_\epsilon|^2dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_\Omega b_m v_\epsilon^{2^*}dx\right)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda) + \psi_\epsilon(t)\\
&\leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t_\epsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t_\epsilon^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b_m v_\epsilon^{2^*} dx + o(\epsilon) + \xi_\epsilon(t)\\
&\leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega b_m v_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} + o(\epsilon) + \xi_\epsilon(t).
\end{aligned}$$

Como $\xi_\epsilon(t_\epsilon) = o(\epsilon)$, temos que

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(b_m\displaystyle\int_\Omega v_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} + o(\epsilon)$$

Portanto

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{Nb_m^{\frac{N-2}{2}}}\cdot\frac{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega v_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} + o(\epsilon)$$

De (2.26), temos

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx}{\left(\displaystyle\int_\Omega v_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{N}}} \leq \frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} - A_N H(0)\epsilon + O(\epsilon^2) \quad \text{se } N \geq 5.$$

Portanto

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{Nb_m^{\frac{N-2}{2}}}\left(\frac{S}{2^{\frac{2}{N}}} - A_N H(0)\epsilon + o(\epsilon)\right)^{\frac{N}{2}} + o(\epsilon).$$

Para algum $C > 0$, temos

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2Nb_m^{\frac{N-2}{2}}}\left(1 - C\epsilon + o(\epsilon)\right)^{\frac{N}{2}} + o(\epsilon)$$

Tomando ϵ suficientemente pequeno, obtemos que

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \quad < \quad I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2Nb_m^{\frac{N-2}{2}}}. \tag{2.31}$$

Para o caso $N = 4$, temos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &= I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t^2\lambda}{2}\int_\Omega v_\epsilon^2 dx + \\ &- \tfrac{1}{q+1}\int_\Omega a^+(x)\left(\frac{(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1} - u_\lambda^{q+1}}{q+1} - tu_\lambda^q v_\epsilon\right) dx + \\ &- \tfrac{1}{p+1}\int_\Omega b^+(x)\left(\frac{(u_\lambda + tv_\epsilon)^{p+1} - u_\lambda^{p+1}}{p+1} - tu_\lambda^p v_\epsilon\right) dx \end{aligned}$$

Da desigualdade, conforme [45],

$$\frac{(r+s)^{p+1} - r^{p+1}}{p+1} - r^p s \geq s^{p+1} + C(p) r^{p-1} s^2, \ \forall \ r, s \geq 0$$

Obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t^2\lambda}{2}\int_\Omega v_\epsilon^2 dx \\ &- \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)\left((tv_\epsilon)^{2^*} + Cu_\lambda^{p-1} t^2 v_\epsilon^2\right) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx + t^2 O(\epsilon^2 |\log \epsilon^2|) \\ &- \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b^+(x) v_\epsilon^{2^*} dx \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_\Omega b^+(x) v_\epsilon^{2^*} dx > 0$ temos que

$$\lim_{t\to+\infty} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) = -\infty.$$

Então existe $t_\epsilon > 0$, que realiza o máximo do lado direito da desigualdade anterior. De forma análoga a prova feita no caso $N \geq 5$, mostra-se que existe $0 < T_1 \leq t_\epsilon \leq T_2$, para todo $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno.

Portanto,

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \;\; \leq \;\; I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t_\epsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t_\epsilon^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b_m v_\epsilon^{2^*} dx + O(\epsilon^2|\log \epsilon^2|).$$

De onde se conclui que

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \;\; \leq \;\; I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_\Omega b_m v_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} + O(\epsilon^2|\log \epsilon^2|).$$

De (2.26), segue que

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \;\; < \;\; I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2Nb_m^{\frac{N-2}{2}}}.$$

para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno.

Para o caso $N = 3$, segue de maneira idêntica ao caso $N = 4$.

Vamos agora obter a segunda solução. Fixado $\epsilon > 0$, tal que (2.31) acontece, como

$$\lim_{t\to+\infty} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) = -\infty,$$

de (2.15), segue que $J_\lambda(tv_\epsilon) \to -\infty$, quando $t \to +\infty$. Da Proposição 2.1, 0 é mínimo local de J_λ em $H^1(\Omega)$, portanto existe $r > 0$ tal que $J_\lambda(u) \geq J_\lambda(0) = 0$, para todo $u \in H^1(\Omega)$, com $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq r$. Então existe $w_\lambda = t_0 v_\epsilon \in H^1(\Omega)$, com $\|w_\lambda\|_{H^1(\Omega)} > r$ tal que $J_\lambda(w_\lambda) < 0$.

Suponha que 0 é o único ponto crítico de J_λ, então da Proposicao 2.2 e 2.4, J_λ satisfaz $(PS)_c$, para

$$c < \min\left\{\frac{S^{\frac{N}{2}}}{2b_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2Nb_m^{\frac{N-2}{2}}}\right\}.$$

Defina

$$\Gamma = \Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0,1]; H^1(\Omega)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = w_\lambda\}$$

e

$$c_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{s\in[0,1]} J_\lambda(\gamma(s)).$$

Da Proposição 2.1, temos que $c_\lambda \geq 0$ e $J_\lambda(\partial B_r(0)) \geq 0$. De 2.31 e de (2.15), temos que

$$c_\lambda < \min\left\{ \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2b_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2Nb_m^{\frac{N-2}{2}}} \right\}.$$

Como $\max\{J_\lambda(0), J_\lambda(w_\lambda)\}| \leq 0$, temos as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, vide Corolário 5.11, em [35], que nos dá um ponto crítico não-trivial v para o problema modificado, o que é uma contradição. Assim existe um ponto crítico não-trivial v_λ de J_λ, é claro que v_λ é não-negativa, portanto $u = u_\lambda + v_\lambda$ é uma segunda solução do problema (N_λ). ■

Teorema 2.4 *Assuma para $N \geq 6$, que $0 \leq \lambda < \lambda^*$, e para $3 \leq N \leq 5$, que $\lambda < \lambda^*$, ainda mais $b_M > 2^{\frac{2}{N-2}} b_m$, onde $b_M = b(x_M)$ e $a(x) \geq a_0 > 0$ em uma vizinhança de x_M. Suponha também que*

$$|b(x) - b(x_M)| = o(|x - x_M|^{\frac{N-2}{2}}), \text{ para } x \text{ próximo de } x_M. \tag{2.32}$$

Então se $\lambda \notin \sigma(-\Delta, H^1(\Omega_{b^0}))$ ou $b > 0$ em Ω, o problema (N_λ) tem ao menos duas soluções.

Demonstração: Observe que, se $b_m > 0$, então a hipótese $b_M > 2^{\frac{2}{N-2}} b_m$ implica que $b_M^{\frac{N-2}{2}} > 2b_m^{\frac{N-2}{2}}$ e portanto

$$\min\left\{ \frac{S^{\frac{N}{2}}}{Nb_M^{\frac{N-2}{2}}}, \frac{S^{\frac{N}{2}}}{2Nb_m^{\frac{N-2}{2}}} \right\} = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{Nb_M^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Logo, o nível crítico é o mesmo do caso onde $b_m \leq 0$,

$$c^* = I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{Nb_M^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Para estimar o nível de energia de I_λ abaixo de c, onde I_λ satisfaz $(PS)_c$, nós usaremos a seguinte família de funções

$$u_{\epsilon;y} = \frac{C_n \epsilon^{\frac{n-2}{2}}}{(\epsilon^2 + |x-y|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

onde $\epsilon > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Precisamos concentrar essa família de funções em x_M, assim seja $\phi \in C^1(B_s(x_M))$, tal que $\phi \equiv 1$, $B_{\frac{s}{2}}(x_M)$, $\phi \equiv 0$, $B_s(x_M)^c$ e $0 \leq \phi \leq 1$, onde $s > 0$ é tal que $a(x) \geq a_0$, $b(x) \geq b_0 > 0$ e $|b(x) - b_M| = o(|x - x_M|^{\frac{N-2}{2}})$, $\forall\, x \in \overline{B_s(x_M)} \subset \Omega$, denotaremos $B_s := B_s(x_M)$.

Simplificamos a notação, usando apenas u_ϵ, para denotar $u_{\epsilon;x_M}$. Defina $v_\epsilon = \phi u_\epsilon$. Vamos mostrar que

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) < I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{Nb_M^{\frac{N-2}{2}}}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Suponha $3 \leq N \leq 5$. Procedemos como na prova do Teorema 2.3. Para estimar $I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon)$, considere $\theta > 2$ e $k \in (1, \theta - 1)$, podemos encontrar $C > 0$, tal que

$$(s+t)^\theta \geq s^\theta + t^\theta + \theta s^{\theta-1}t + \theta s t^{\theta-1} - Ct^k s^{\theta-k}, \ \forall \ s, t \geq 0.$$

Usando esta desigualdade com $\theta = 2^*$, e $1 < k := \frac{N+1}{N-2} < \frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$. Observe que $2^* - k = \frac{N-1}{N-2}$, portanto

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda + t\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_\lambda + tv_\epsilon)^2 dx \\
&- \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1}dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega b(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{2^*}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 + 2t\nabla u_\lambda \nabla v_\epsilon + |t\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_\lambda^2 + 2tu_\lambda v_\epsilon + (tv_\epsilon)^2 dx \\
&- \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1}dx + \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^-(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{2^*}dx \\
&- \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{2^*}dx
\end{aligned}$$

de onde segue que,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 + 2t\nabla u_\lambda \nabla v_\epsilon + |t\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_\lambda^2 + 2tu_\lambda v_\epsilon + (tv_\epsilon)^2 dx \\
&- \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1}dx + \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^-(x)u_\lambda^{2^*}dx \\
&- \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)u_\lambda^{2^*}dx - \int_\Omega b^+(x)u_\lambda t v_\epsilon dx \\
&- \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)\left((tv_\epsilon)^{2^*} + (2^*)u_\lambda t^p v_\epsilon^p - Cu_\lambda^{\frac{N-1}{N-2}}(tv_\epsilon)^{\frac{N+1}{N-2}}\right)dx
\end{aligned}$$

pois $v_\epsilon = \phi u_\epsilon$, e $\operatorname{supp}\phi \subset \operatorname{supp} b^+$. Assim

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u_\lambda^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)u_\lambda^{q+1}dx - \frac{1}{2^*}\int_\Omega b(x)u_\lambda^{2^*}dx \\
&+ t\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla v_\epsilon dx - t\lambda\int_\Omega u_\lambda v_\epsilon dx - t\int_\Omega a(x)u_\lambda^q v_\epsilon dx - t\int_\Omega b(x)u_\lambda^p v_\epsilon dx \\
&+ \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t^2\lambda}{2}\int_\Omega v_\epsilon^2 dx - \int_\Omega a(x)\left(\frac{(u_\lambda + tv_\epsilon)^{q+1} - u_\lambda^{q+1}}{q+1} - tu_\lambda^q v_\epsilon\right)dx \\
&- \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)\left((tv_\epsilon)^{2^*} + (2^*)u_\lambda t^p v_\epsilon^p - Ct^{\frac{N+1}{N-2}}u_\lambda^{\frac{N-1}{N-2}}v_\epsilon^{\frac{N+1}{N-2}}\right)dx
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade,

$$\frac{(r+s)^{q+1}-r^{q+1}}{q+1}-r^q s \leq C(q)s^{q+1},\ \forall\ r,s\geq 0$$

e o fato que u_λ é solução fraca de (N_λ), obtemos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda+tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda)+\frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2dx-\frac{t^2\lambda}{2}\int_\Omega v_\epsilon^2dx+Ct^{q+1}\int_\Omega v_\epsilon^{q+1}dx \\ &- \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)\left((tv_\epsilon)^{2^*}+(2^*)u_\lambda t^p v_\epsilon^p - Ct^{\frac{N+1}{N-2}}u_\lambda^{\frac{N-1}{N-2}}u_\epsilon^{\frac{N+1}{N-2}}\right)dx \end{aligned}$$

Sem muitas dificuldades, veja [17, 45], obtemos as seguintes estimativas

$$\int_\Omega v_\epsilon^{q+1}dx \leq \begin{cases} o(\epsilon^2), & \text{se } N\geq 6 \\ o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}), & \text{se } 3\leq N\leq 5, \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\int_\Omega v_\epsilon^{\frac{N+1}{N-2}}dx \leq C\epsilon^{\frac{N-1}{2}}, \tag{2.34}$$

$$\int_\Omega v_\epsilon^p dx \leq C\epsilon^{\frac{N-2}{2}}. \tag{2.35}$$

e

$$\int_\Omega v_\epsilon^2 dx \leq \begin{cases} C\epsilon^2+C\epsilon^{N-2}, & \text{se } N\geq 5 \\ C\epsilon^2+C\epsilon^2|\ln\epsilon^2|, & \text{se } N=4 \\ C\epsilon^2+C\epsilon, & \text{se } N=3. \end{cases} \tag{2.36}$$

Usando essas desigualdades acima, obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda+tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda)+\frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2dx+Ct^2o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})+Ct^{q+1}o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) \\ &- \frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b^+(x)v_\epsilon^{2^*}dx - Ct^p\epsilon^{\frac{N-2}{2}}+Ct^{\frac{N+1}{N-2}}\epsilon^{\frac{N-1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Como $\int_\Omega b^+(x)v_\epsilon^{2^*}dx>0$ temos que

$$\lim_{t\to+\infty} I_\lambda(u_\lambda+tv_\epsilon)=-\infty.$$

Então existe $t_\epsilon>0$, que realiza o máximo do lado direito em (2.37). De forma análoga a prova feita no Teorema 2.3, mostra-se que existe $0<T_1\leq t_\epsilon\leq T_2$, para todo $\epsilon>0$, suficientemente pequeno.

Como $|b(x)-b(x_M)| = o(|x-x_M|^{\frac{N-2}{2}})$, para $x \in B_s$, então $|b(x)-b(x_M)| = o(1)|x-x_M|^{\frac{N-2}{2}}$, portanto

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (b(x)-b_M)\, v_\epsilon^{2^*} dx &\leq o(1)\int_{B_s} |x-x_M|^{\frac{N-2}{2}} v_\epsilon^{2^*} dx \\
&\leq o(1)\int_{B_{\frac{s}{\epsilon}}(x_M)} |x-x_M|^{\frac{N-2}{2}} v_\epsilon^{2^*} dx + O(\epsilon^N) \\
&= o(1)\int_{B_{\frac{s}{\epsilon}}(0)} |\epsilon y|^{\frac{N-2}{2}} v_\epsilon^{2^*}(\epsilon y)\epsilon^N dy + O(\epsilon^N) \\
&= o(1)\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\int_{B_{\frac{s}{\epsilon}}(0)} \frac{|y|^{\frac{N-2}{2}}}{(1+|y|^2)^N} dy + O(\epsilon^N) \\
&\leq o(1)\epsilon^{\frac{N-2}{2}}\left(C + C\int_{r_0}^{+\infty} r^{\frac{-N-4}{2}} dr\right) + O(\epsilon^N) \\
&= o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_\Omega (b(x)-b_M)\, v_\epsilon^{2^*} dx = o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}). \tag{2.38}$$

Assim temos

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t_\epsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t_\epsilon^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b_M v_\epsilon^{2^*} dx - C\epsilon^{\frac{N-2}{2}} + C\epsilon^{\frac{N-1}{2}} + o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}})$$

Portanto

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx)^{\frac{N}{2}}}{\left(\displaystyle\int_\Omega b_M v_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} + o(\epsilon^{\frac{N-2}{2}}) - C\epsilon^{\frac{N-2}{2}}. \tag{2.39}$$

De [13], temos

$$\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2}) \quad \text{e} \quad \int_\Omega v_\epsilon^{2^*} dx = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N)$$

juntamente com (2.39), segue que

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) < I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N b_M^{\frac{N-2}{2}}}.$$

para ϵ, suficientemente pequeno.

Para o caso $N \geq 6$. Das desigualdades, conforme [45],

$$\frac{(r+s)^{q+1}-r^{q+1}}{q+1} - r^q s \leq C(q)s^{q+1}, \ \forall\ r,s \geq 0$$

e

$$\frac{(r+s)^{p+1}-r^{p+1}}{p+1} - r^p s \geq s^{p+1} + C(p)r^{p-1}s^2, \ \forall\ r,s \geq 0$$

Obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - \frac{t^2\lambda}{2}\int_\Omega v_\epsilon^2 dx + Ct^{q+1}\int_\Omega v_\epsilon^{q+1} dx \\ &- \frac{1}{2^*}\int_\Omega b^+(x)\left((tv_\epsilon)^{2^*} + Cu_\lambda^{p-1}t^2 v_\epsilon^2\right) dx. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\lambda \geq 0$, portanto existe $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) &\leq I_\lambda(u_\lambda) + \tfrac{t^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - C\int_\Omega v_\epsilon^2 dx\right) + t^{q+1}o(\epsilon^2) \\ &- \tfrac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b^+(x)v_\epsilon^{2^*} dx \end{aligned}$$

Como $\displaystyle\int_\Omega b^+(x)v_\epsilon^{2^*} dx > 0$ temos que

$$\lim_{t\to+\infty} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) = -\infty.$$

Então existe $t_\epsilon > 0$, que realiza o máximo do lado direito da desigualdade anterior. De forma análoga a prova feita no Teorema 2.3, mostra-se que existe $0 < T_1 \leq t_\epsilon \leq T_2$, para todo $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno.

Da estimativa (2.38), temos

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \tfrac{t_\epsilon^2}{2}\left(\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - C\int_\Omega v_\epsilon^2 dx\right) - \tfrac{t_\epsilon^{2^*}}{2^*}\int_\Omega b_M v_\epsilon^{2^*} dx + o(\epsilon^2).$$

Portanto

$$I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \leq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{N}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla v_\epsilon|^2 dx - C\int_\Omega |v_\epsilon|^2 dx\right)^{\frac{N}{2}}}{\left(\int_\Omega b_M v_\epsilon^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{2}}} + o(\epsilon^2).$$

De onde segue, vide [45], que

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(u_\lambda + tv_\epsilon) \;\; < \;\; I_\lambda(u_\lambda) + \frac{S^{\frac{N}{2}}}{Nb_M^{\frac{N-2}{2}}}.$$

para $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno.

Para aplicar o Teorema do Passo da Montanha, basta seguir como na prova do Teorema 2.3. ■

Demonstração do Teorema 2.2: A prova segue dos Teoremas 2.3 e 2.4. ■

Capítulo 3

Multiplicidade de Soluções para o caso $N = 2$

1 Introdução

Neste capítulo vamos obter um resultado de multiplicidade de soluções para um problema crítico em $\mathbb{R}^2$, caso particular do problema (M_λ) para $N = 2$, com $f(x,s) = b(x)h(s)e^{\alpha_0 s^2}$. Mais precisamente, temos por objetivo estudar a multiplicidade de solução para seguinte classe de problemas elípticos parametrizados, com condição de Neumann homogênea no bordo de Ω

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + b(x)h(u)e^{\alpha_0 u^2} & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P'_λ}$$

onde Ω é um domínio limitado com bordo suave em $\mathbb{R}^2$, η é o vetor normal unitário apontando para fora do bordo de Ω, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro, $0 < q < 1$, $\alpha_0 > 0$ é um número real fixado, $a, b \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \gamma \leq 1$.

(H) As seguintes hipóteses sobre h serão consideradas:

(a) h é localmente Hölder contínua sobre $\mathbb{R}$;

(b) $h(s) > 0$, para $s > 0$ e $h(s) = 0$, para $s \leq 0$;

(c) $h'(s) \geq 0,\ \forall\ s > 0$;

(d) $\limsup\limits_{s \to 0} \dfrac{h(s)}{s} = 0$;

(e) $\liminf\limits_{s\to+\infty}\dfrac{h(s)}{s}>0$;

(f) $\limsup\limits_{s\to+\infty}\dfrac{h(s)}{s^p}$=0, para algum $p>1$.

(g) $\limsup\limits_{s\to 0}\dfrac{h'(s)}{s^\tau}$=0, para algum $\tau>0$.

Essas hipóteses aparecem no trabalho de Prashanth e Sreenadh ([47], Pg. 1247) e também no trabalho de Figueiredo, Do Ó e Ruf ([27], Pg. 466), exceto a hipótese (g) que é necessária para mostrarmos que a primeira solução é um mínimo local. Exemplos de funções que satisfazem essas hipóteses são: $h(s)=s^p$, $h(s)=s^p+2\alpha_0\dfrac{s^{p+2}}{p+1}$, com $p>1$.

Primeiro, vamos ver o que entendemos por crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.1 *Dizemos que a função g tem crescimento TM-crítico (resp. TM-subcrítico), se existe* $\beta_0>0$ *(resp.* $\beta_0=0$*), tal que*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{|g(x,s)|}{e^{\beta s^2}}=\begin{cases}0 & \forall\,\beta>\beta_0,\ \textit{uniformemente em }\bar{\Omega}\\ +\infty & \forall\,\beta<\beta_0,\ \textit{uniformemente em }\bar{\Omega}\end{cases}\tag{c_{β_0}}$$

Como no Capítulo 1, considere os seguintes conjuntos relativos ao coeficiente a:

$$\Omega_{a^+}=\{x\in\Omega;a(x)>0\};\quad \Omega_{a^-}=\{x\in\Omega;a(x)<0\}\quad\text{e}\quad \Omega_a^0=\operatorname{int}\{x\in\Omega;a(x)\geq 0\};$$

e definimos, de forma análoga, os seguintes conjuntos relativos a b:

$$\Omega_b^+=\{x\in\Omega;b(x)>0\};\quad \Omega_b^-=\{x\in\Omega;b(x)<0\}\quad\text{e}\quad \Omega_b=\{x\in\Omega;b(x)\geq 0\};\quad\text{e}$$

$$\Omega_{b^0}=\Omega\setminus\overline{\{x\in\Omega;b(x)\neq 0\}}.$$

Consideremos aqui, as seguintes hipóteses sobre a e b:

(H_{a^+}) O conjunto Ω_a^+ é não-vazio.

$(H_{a^+_-})$ Assuma (H_{a^+}) e que Ω_a^- é não-vazio.

(H_a^0) $\Omega_a^0=\cup_1^k U_i$, $k<+\infty$, U_i componente conexa, U_i com bordo suave C^2 e $U_i\cap\Omega_a^+\neq\emptyset$, $\forall i=1,\dots,k$.

(H_{b^+}) O conjunto Ω_b^+ é não-vazio.

$(H_{b^+_-})$ Assuma (H_{b^+}) e que o conjunto Ω_b^- é não-vazio, e ainda mais, $\overline{\Omega_b^+}\cap\overline{\Omega_b^-}=\emptyset$.

(H_{ab}) O conjunto $\Omega_a^+ \cap \Omega_b^+$ é não-vazio.

(H_{b^0}) O conjunto Ω_{b^0} tem bordo suave C^2.

Considerando as desigualdades de Trudinger-Moser (conforme [3]), temos que

$$e^{\beta u^2} \in L^1(\Omega),\ \forall\, u \in H^1(\Omega),\ \forall\, \beta > 0.$$

e existe $C > 0$, tal que

$$\sup_{\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega e^{\beta u^2} dx \leq C,\ \forall\, \beta \leq 2\pi, u \in H^1(\Omega).$$

Observe que $u = 0$ é solução do nosso problema, mas estamos interessados em soluções fracas não-triviais $u \in H^1(\Omega)$, para o problema (P'_λ), isto é, $u \gneq 0$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega uv dx = \int_\Omega a(x) u^q v dx + \int_\Omega b(x) h(u) e^{\alpha_0 u^2} v dx,\ \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Naturalmente, u será ponto crítico do funcional energia $I_\lambda : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + u^2\right) dx - \frac{1+\lambda}{2} \int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{1}{q+1} \int_\Omega a(x)(u^+)^{q+1} dx - \int_\Omega b(x) G(u) dx,$$

onde $G(s) = \int_0^s h(t) e^{\alpha_0 t^2} dt$.

Como h satisfaz o crescimento TM-subcrítico (c_{β_0}), com $\beta_0 = 0$, temos das desigualdades de Trudinger-Moser que I_λ está bem definido em $H^1(\Omega)$, ainda mais I_λ é C^1, veja os trabalhos de Freitas ([28], Pg. 19), Rabinowitz [49](Apêndice B) e Berestycki e Lions[10](Apêndice).

Neste capítulo, assumiremos a seguinte hipótese do tipo Ambrosetti-Rabinowitz, que aparece no trabalho de Pádua, Silva e Soares ([46], Pg. 1092).

(G) Para todo $\theta > 2$, existe $R(\theta) > 0$, tal que

$$0 < \theta G(s) \leq s h(s) e^{\alpha_0 s^2},\ \forall\, s \geq R(\theta).$$

Sob a hipótese (H), temos que toda solução fraca $u_\lambda \in H^1(\Omega)$ é uma solução clássica $u_\lambda \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $\gamma \in (0,1)$, veja *Apêndice A*. Ainda mais, sob a hipótese (H_a^0), temos do Lema 1.1, que as soluções de (P'_λ), não-triviais em Ω_a^0, são positivas em $\overline{\Omega_a^0}$. Isto nos motiva a considerar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = a(x)u^q + b(x)h(u)e^{\alpha_0 u^2} & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \overline{\Omega_a^0} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P_\lambda)$$

Assim podemos enunciar os teoremas abaixo. No Teorema 3.1, temos um resultado de existência e não-existência de solução, uma consequência do resultado central do Capítulo 1,

Teorema 3.1 *[Existência e Não-Existência] Assuma (H_{a^+}), (H_a^0) e (H), então existe $\lambda^* \in (-\infty, +\infty]$, tal que:*

1. *Para todo $\lambda < \lambda^*$ o problema (P_λ) possui ao menos uma solução, com energia negativa.*

2. *Assuma (H_{ab}). Então*

   (a) *$\lambda^* < +\infty$ e ainda mais o problema (P_λ) não possui solução, para $\lambda > \lambda^*$.*

   (b) *Assuma que $b > 0$, em $\overline{\Omega}$, (G) e $\int_\Omega a(x)dx < 0$. Então o problema (P_λ) admite ao menos uma solução para $\lambda = \lambda^*$.*

Já no Teorema 3.2, temos um resultado de multiplicidade de soluções

Teorema 3.2 *[Multiplicidade] Assuma $(H_{a^\pm})$, (H_a^0), $b \geq 0$, (H) e (G), suponha que exista $x_0 \in \partial\Omega$, tal que $a \geq a_0 > 0$, $b \geq b_0 > 0$, $u_\lambda \geq r_0 > 0$, numa bola $B_R(x_0) \cap \overline{\Omega}$, então para λ^* dado no Teorema 3.1, se $\lambda^* < 0$ ou $b > 0$ em $\overline{\Omega}$, o problema (P_λ) possui ao menos duas soluções para todo $\lambda < \lambda^*$.*

O Teorema 3.1, a menos do item $(2.b)$, é consequência do Teorema 1.1, os detalhes apresentamos a seguir. Já a demonstração do Teorema 3.2, será feita mais adiante, como consequência de uma sequência de resultados que iremos estabelecer posteriormente a demonstração do Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1: Este Teorema é uma consequência do Teorema 1.1, do Capítulo 1, para isso basta tomar $f(x,t) = b(x)h(t)e^{\alpha_0 t^2}$, como $b \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, de (H) temos que (H_f^1) é verificada. Observe que de $(H.d)$, existe $c_0, t_0 > 0$, tal que $f(x,t) \leq c_0 t$, para $0 \leq t \leq t_0$, de onde segue que (H_f^2) é verificada. Observe que de (H_{ab}) e $(H.b)$, podemos tomar uma bola $B \subset \Omega_a^0$, tal que $f(x,t) \geq 0$ em B, assim utilizando os itens (1) e (2) do Teorema 1.1, obtemos (1) e (2.a). Já para obtermos (2.b), observe que $b > 0$, em $\overline{\Omega}$ e (G), nos dá (H_f^3), juntamente com (H) nos fornece $\tilde{\Omega} = \Omega$ e $f(x,s) \geq 0$, logo de (3), no Teorema 1.1 temos (2.b). ∎

2 A Primeira Solução é um Mínimo Local

Lema 3.1 *Assuma* $(H_{a_-^+})$, (H_a^0), $\lambda < \lambda^*$, $0 \le u_\lambda \le \overline{u} := u_\mu$, *onde* u_λ *é solução do problema* (P_λ) *e* u_μ *é solução do problema* (P_μ), *com* $\lambda < \mu < \lambda^*$. *Então* $u_\lambda < \overline{u}$ *em* A, *onde* $A := \{x \in \overline{\Omega}; \overline{u} > 0\}$.

Demonstração: Seja $v = \overline{u} - u_\lambda \ge 0$ em Ω. Como u_λ é solução do problema (P_λ) e $\overline{u} = u_\mu$ é solução do problema P_μ, com $\lambda < \mu < \lambda^*$, temos

$$\begin{aligned} \Delta v &= \Delta\overline{u} - \Delta u_\lambda \\ &= -\mu\overline{u} - a(x)\overline{u}^q - b(x)h(\overline{u})e^{\alpha_0\overline{u}^2} + \lambda u_\lambda + a(x)u_\lambda^q + b(x)h(u_\lambda)e^{\alpha_0 u_\lambda^2} \\ &= (-\mu+\lambda)\overline{u} - \lambda(\overline{u} - u_\lambda) - a(x)\left(\frac{\overline{u}^q - u_\lambda^q}{\overline{u} - u_\lambda}\right)(\overline{u} - u_\lambda) + \\ &- b(x)\left(\frac{h(\overline{u})e^{\alpha_0\overline{u}^2} - h(u_\lambda)e^{\alpha_0 u_\lambda^2}}{\overline{u} - u_\lambda}\right)(\overline{u} - u_\lambda) \\ &\le -\lambda v + a^-(x)\left(\frac{\overline{u}^q - u_\lambda^q}{\overline{u} - u_\lambda}\right)v + b^-(x)\left(\frac{h(\overline{u})e^{\alpha_0\overline{u}^2} - h(u_\lambda)e^{\alpha_0 u_\lambda^2}}{\overline{u} - u_\lambda}\right)v \\ &\le m(x)v \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde

$$m(x) := \begin{cases} -\lambda + a^-(x)\left(\dfrac{\overline{u}^q - u_\lambda^q}{\overline{u} - u_\lambda}\right) + b^-(x)\left(\dfrac{h(\overline{u})e^{\alpha_0\overline{u}^2} - h(u_\lambda)e^{\alpha_0 u_\lambda^2}}{\overline{u} - u_\lambda}\right) & , \text{ se } \lambda < 0 \\ a^-(x)\left(\dfrac{\overline{u}^q - u_\lambda^q}{\overline{u} - u_\lambda}\right) + b^-(x)\left(\dfrac{h(\overline{u})e^{\alpha_0\overline{u}^2} - h(u_\lambda)e^{\alpha_0 u_\lambda^2}}{\overline{u} - u_\lambda}\right) & , \text{ se } \lambda \ge 0 \end{cases}$$

Observe que m está bem definida em A, mesmo possivelmente, onde $\overline{u} = u_\lambda$. Suponha que $v(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in A$. Caso $x_0 \in \Omega$, então existe uma bola B_1 com centro em x_0, com $\overline{B_1} \subset A \cap \Omega$. Como em B_1, $\overline{u}$ é limitada uniformemente por baixo, temos que m é uniformemente limitada em B_1. Então, pelo princípio do Máximo de Vazquez, veja ([54], Pg. 192), $v = 0$, em B_1, logo $\overline{u} = u_\lambda$ em B_1. Entretanto, como

$$-\Delta\overline{u} - \mu\overline{u} = a(x)\overline{u}^q + b(x)h(\overline{u})e^{\alpha_0\overline{u}^2} \quad \text{e} \quad -\Delta u_\lambda - \lambda u_\lambda = a(x)u_\lambda^q + b(x)h(u_\lambda)e^{\alpha_0 u_\lambda^2}$$

temos

$$(\mu - \lambda)\overline{u} = 0, \text{ qtp em } B_1,$$

o que é uma contradição pois $\mu > \lambda$ e $\overline{u} > 0$ em B_1. No caso de $x_0 \in \partial\Omega$, como A é relativamente aberto em $\overline{\Omega}$, existe uma bola B_2 com centro em x_0, tal que $B_2 \cap \overline{\Omega} \subset A$.

Como o bordo de Ω é suave, o vetor normal exterior a $B_2 \cap \overline{\Omega}$ em x_0 é igual ao vetor normal exterior a Ω em x_0. Aplicando o Lema de Hopf, veja Evans ([22], Pg. 330), para $v \geq 0$ em $x_0 \in \partial(B_2 \cap \overline{\Omega})$, temos que $\dfrac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) > 0$, no entanto isso é uma contradição, com o fato que $\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial \eta}(x_0) = \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}(x_0) = 0.$ ∎

Lema 3.2 *Assuma* $(H_{a_\pm^+})$, (H_a^0), $\lambda < \lambda^*$ *e que* u_λ *uma solução de* (P_λ)*, tal que* $0 \leq u_\lambda \leq \overline{u} := u_\mu$*, onde* u_μ *é a solução do problema* (P_μ)*, para algum* $\lambda < \mu < \lambda^*$*, ainda mais que* $I_\lambda(u_\lambda) = \inf_{u \in M} I_\lambda(u)$*, onde* $M = \{u \in H^1(\Omega); 0 \leq u \leq \overline{u},\ qtp\ x \in \Omega\}$*. Então* u_λ *é mínimo local do funcional energia* I_λ *em* $H^1(\Omega)$*.*

Demonstração: Suponha, por contradição, que exista $u_n \in H^1(\Omega)$, tal que $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, com $I_\lambda(u_n) < I_\lambda(u_\lambda) < 0$.

Defina $v_n = \max\{0, \min\{u_n, \overline{u}\}\}$, $w_n = (u_n - \overline{u})^+ = \max\{u_n - \overline{u}, 0\} \geq 0$ e $z_n = (-u_n)^+ = \max\{-u_n, 0\} \geq 0$. Observe que

$$0 \leq v_n \leq \overline{u},\ \text{logo } v_n \in M$$

e $u_n(x) \geq \overline{u}(x) \geq 0$, qtp $x \in \operatorname{supp}(w_n)$, logo $z_n(x) = 0$, qtp $x \in \operatorname{supp}(w_n)$, assim temos que $|\operatorname{supp}(w_n) \cap \operatorname{supp}(z_n)| = 0$. Além disso, temos que

1. Se $u_n(x) > \overline{u}(x)$, então $v_n(x) = \overline{u}(x)$, $w_n(x) = u_n(x) - \overline{u}(x)$ e $z_n(x) = 0$;
2. Se $u_n(x) < 0$, então $v_n(x) = 0$, $w_n(x) = 0$ e $z_n(x) = -u_n(x)$; e
3. Se $0 \leq u_n(x) \leq \overline{u}(x)$, então $v_n(x) = u_n(x)$, $w_n(x) = 0$ e $z_n(x) = 0$.

Portanto em qualquer um dos casos, temos que $u_n = v_n + w_n - z_n$ em Ω. Considere

$$R_n = \{x \in \Omega; 0 \leq u_n(x) \leq \overline{u}(x)\},\ S_n = \operatorname{supp}(w_n) \text{ e } T_n = \operatorname{supp}(z_n).$$

A partir das definições anteriores, podemos reescrever $I_\lambda(u_n)$ da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - b(x)G(u_n)\right) dx \\
&= \int_{S_n} \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - b(x)G(u_n)\right) dx \\
&+ \int_{T_n} \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - b(x)G(u_n)\right) dx \\
&+ \int_{R_n} \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - b(x)G(u_n)\right) dx
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Como

1. Se $x \in S_n$, temos $u_n(x) = \overline{u}(x) + w_n(x) \geq 0$;

2. Se $x \in T_n$, temos $u_n(x) = -z_n(x) \leq 0$; e

3. Se $x \in R_n$, temos $u_n(x) = v_n(x) \geq 0$,

temos,

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= \frac{1}{2}\int_{S_n}(|\nabla(\overline{u}+w_n)|^2 + (\overline{u}+w_n)^2)dx - \frac{1+\lambda}{2}\int_{S_n}(\overline{u}+w_n)^2dx \\
&- \frac{1}{q+1}\int_{S_n} a(x)(\overline{u}+w_n)^{q+1}dx - \int_{S_n} b(x)G(\overline{u}+w_n)dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{T_n}(|\nabla(z_n)|^2 + z_n^2)dx + \frac{1}{2}\int_{R_n}(|\nabla v_n|^2 + v_n^2)dx - \frac{1+\lambda}{2}\int_{R_n} v_n^2dx \\
&- \frac{1}{q+1}\int_{R_n} a(x)v_n^{q+1}dx - \int_{R_n} b(x)G(v_n)dx.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como, $v_n = \overline{u}$ em S_n e $v_n = 0$ em T_n, temos

$$\begin{aligned}
I_\lambda(v_n) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(|\nabla v_n|^2 + v_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}v_n^2 - \frac{a(x)}{q+1}v_n^{q+1} - b(x)G(v_n)\right)dx \\
&= \int_{S_n}\left(\frac{1}{2}|\nabla\overline{u}|^2\overline{u}^2 - \frac{1+\lambda}{2}\overline{u}^2 - \frac{a(x)}{q+1}\overline{u}^{q+1} - b(x)G(\overline{u})\right)dx \\
&+ \int_{R_n}\left(\frac{1}{2}|\nabla v_n|^2 + v_n^2 - \frac{1+\lambda}{2}v_n^2 - \frac{a(x)}{q+1}v_n^{q+1} - b(x)G(v_n)\right)dx.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Assim de (3.3) e (3.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= I_\lambda(v_n) \\
&+ \int_{S_n}\left(\frac{|\nabla(\overline{u}+w_n)|^2 - |\nabla\overline{u}|^2}{2}\right) + \left(\frac{(\overline{u}+w_n)^2 - \overline{u}^2}{2}\right)dx \\
&- \int_{S_n}(1+\lambda)\left(\frac{(\overline{u}+w_n)^2 - \overline{u}^2}{2}\right) - \frac{a(x)}{q+1}\left((\overline{u}+w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}\right)dx \\
&+ \int_{S_n} b(x)\left(G(\overline{u}+w_n) - G(\overline{u})\right)dx \\
&+ \tfrac{1}{2}\int_{T_n}\left(|\nabla(z_n)|^2 + (z_n)^2\right)dx
\end{aligned} \tag{3.5}$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &= I_\lambda(v_n) \\
&+ \int_{S_n} \left(\nabla \overline{u} \nabla w_n + \frac{|\nabla w_n|^2}{2} + \overline{u} w_n + \frac{w_n^2}{2} - (1+\lambda) \left(\overline{u} w_n + \frac{w_n^2}{2} \right) \right) dx \\
&- \int_{S_n} \left(\frac{a(x)}{q+1} \left((\overline{u} + w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1} \right) + b(x) \left(G(\overline{u} + w_n) - G(\overline{u}) \right) \right) dx \\
&+ \int_{T_n} \left(\frac{|\nabla z_n|^2}{2} + \frac{z_n^2}{2} \right) dx.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Como $\overline{u}$ é supersolução de (P_λ), $w_n = 0$ em $\Omega \setminus S_n$, temos que

$$
\int_{S_n} (\nabla \overline{u} \nabla w_n + \overline{u} w_n) dx - (1+\lambda) \int_{S_n} \overline{u} w_n dx \geq \int_{S_n} a(x) \overline{u}^q w_n dx + \int_{S_n} b(x) h(\overline{u}) e^{\alpha_0 \overline{u}^2} w_n dx.
$$

Portanto, de (3.6) obtemos que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u_n) &\geq I_\lambda(v_n) \\
&+ \int_{S_n} \left(\frac{|\nabla w_n|^2}{2} + \frac{w_n^2}{2} \right) dx - (1+\lambda) \int_{S_n} \frac{w_n^2}{2} dx \\
&- \int_{S_n} a(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} - \overline{u}^q w_n \right) dx \\
&- \int_{S_n} b(x) \left(G(\overline{u} + w_n) - G(\overline{u}) - h(\overline{u}) e^{\alpha_0 \overline{u}^2} w_n \right) dx \\
&+ \int_{T_n} \frac{|\nabla z_n|^2}{2} dx + \int_{T_n} \frac{z_n^2}{2} dx.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Como $w_n = 0$ em $\Omega \setminus S_n$ e $z_n = 0$ em $\Omega \setminus T_n$, obtemos

$$
I_\lambda(u_n) \geq I_\lambda(v_n) + \frac{1}{2} \|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2} \|z_n\|^2_{H^1(\Omega)} - L, \tag{3.8}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1+\lambda}{2} \int_{S_n} w_n^2 dx + \int_{S_n} a(x) \left(\frac{(\overline{u} + w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} - \overline{u}^q w_n \right) dx \\
&+ \int_{S_n} b(x) \left(G(\overline{u} + w_n) - G(\overline{u}) - g(\overline{u}) w_n \right) dx.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Assuma, por enquanto, que $L \leq o(1) \|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}$. Como, por hipótese de contradição, $I_\lambda(u_n) < I_\lambda(u_\lambda)$ e também $I_\lambda(v_n) \geq I_\lambda(u_\lambda)$, pois $v_n \in M$ e $I_\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in M} I_\lambda(v)$, temos que

$$
I_\lambda(u_n) - I_\lambda(v_n) = I_\lambda(u_n) - I_\lambda(u_\lambda) + I_\lambda(u_\lambda) - I_\lambda(v_n) < 0.
$$

Portanto, da desigualdade (3.8), segue que

$$\left(\frac{1}{2}-o(1)\right)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{2}\|z_n\|^2_{H^1(\Omega)}\leq\frac{1}{2}\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}+\frac{1}{2}\|z_n\|^2_{H^1(\Omega)}-L<0. \tag{3.10}$$

Portanto, para n suficientemente grande, temos que $w_n=z_n=0$, qtp Ω, de onde segue que $u_n\in M$, o que é uma contradição, pois u_λ é mínimo de I_λ em M e que $I_\lambda(u_n)<I_\lambda(u_\lambda)$. Portanto u_λ é mínimo local de I_λ em $H^1(\Omega)$.

Vamos agora mostrar que $L\leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}$. Lembramos que

$$\begin{aligned} L &= \frac{1+\lambda}{2}\int_{S_n}w_n^2dx+\int_{S_n}a(x)\left(\frac{(\overline{u}+w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}-\overline{u}^q w_n\right)dx\\ &+ \int_{S_n}b(x)\left(G(\overline{u}+w_n)-G(\overline{u})-g(\overline{u})w_n\right)dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existem $0<\theta_i(x)<1$, $i=1,2$ tal que

$$\frac{(\overline{u}+w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}-\overline{u}^q w_n=(\overline{u}+\theta_1 w_n)^q w_n-\overline{u}^q w_n\geq 0,$$

$$G(\overline{u}+w_n)-G(\overline{u})-g(\overline{u})w_n=g(\overline{u}+\theta_2 w_n)w_n-g(\overline{u})w_n\geq 0,$$

pois g é não-descrescente, haja vista, que h é não-decrescente.

Portanto,

$$\begin{aligned} L &\leq \frac{1+\lambda}{2}\int_{S_n}w_n^2dx+\int_{S_n}a(x)\left(\frac{(\overline{u}+w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}-\overline{u}^q w_n\right)dx\\ &+ \int_{S_n}b^+(x)\left(G(\overline{u}+w_n)-G(\overline{u})-g(\overline{u})w_n\right)dx \end{aligned} \tag{3.12}$$

Observação 3.1 *A princípio, no termo que contém a, podíamos considerar apenas a^+, mas a parte a^- é essencial para controlarmos o termo que contém w_n^2 em um certo conjunto que ficará explícito mais adiante.*

Vamos, inicialmente, obter uma estimativa crucial para o nosso propósito. Do lema 2.1, temos que $|\{x\in A;\overline{u}(x)\leq u_\lambda(x)\}|=0$, como

$$\begin{aligned} |\{x\in A;\overline{u}(x)\leq u_\lambda(x)\}| &= \left|\cap_{j=1}^{+\infty}\{x\in A;\overline{u}(x)\leq u_\lambda(x)+\frac{1}{j}\}\right|\\ &= \lim_{j\to+\infty}\left|\{x\in A;\overline{u}(x)\leq u_\lambda(x)+\frac{1}{j}\}\right|, \end{aligned}$$

dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|\{x \in A; \overline{u} \leq u_\lambda + \delta\}| < \frac{\epsilon}{2}$. Como $u_n \to u_\lambda$, fortemente em $L^2(\Omega)$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n \geq n_1$, temos

$$\int_\Omega (u_n - u_\lambda)^2 dx \leq \frac{\epsilon}{2}\delta^2.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega (u_n - u_\lambda)^2 dx \geq \int_{\{x\in\Omega; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\}} (u_n - u_\lambda)^2 dx \geq \int_{\{x\in\Omega; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\}} \delta^2 dx = \delta^2 |\{x \in \Omega; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\}|.$$

Portanto $|\{x \in \Omega \cap A; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\}| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Como,

$$S_n = \{x \in \Omega; u_n > \overline{u}\} \subseteq \{x \in \Omega; u_n > \overline{u} > u_\lambda + \delta\} \cup \{x \in \Omega; \overline{u} \leq u_\lambda + \delta\}.$$

Temos que $|S_n \cap A| \leq \epsilon$, de onde segue que $|S_n \cap A| = o(1)$.

Agora vamos estimar o termo que contém b, pois é um termo que não depende dos demais termos em L. Pelo Teorema do Valor Médio, existem $0 < \theta_2(x), \theta_4(x) < 1$, tal que

$$G(\overline{u} + w_n) - G(\overline{u}) - g(\overline{u})w_n = g'(\overline{u} + \theta_4 w_n)\theta_2 w_n^2,$$

como $g'(s) = (h'(s) + 2\alpha_0 s h(s))e^{\alpha_0 s^2}$, de (H), existe $C > 0$, tal que

$$|h'(s)|, |sh(s)| \leq C s^p e^{Cs^2},$$

para algum $p > 0$. Como $e^{\alpha_0(\overline{u}+\theta_4 w_n)^2} \leq C e^{C w_n^2}$, temos que

$$\int_{S_n} b(x) \left(G(\overline{u} + w_n) - G(\overline{u}) - g(\overline{u})w_n\right) dx \leq C \int_{S_n} (\overline{u} + \theta_4 w_n)^p w_n^2 e^{C w_n^2} dx.$$

Como em $A = \{x \in \overline{\Omega}; \overline{u} > 0\}$, temos $(\overline{u} + \theta_4 w_n)^p w_n^2 \leq C w_n^2 + C w_n^{p+2}$, segue que

$$\int_{S_n \cap A} (\overline{u} + \theta_4 w_n)^p w_n^2 e^{C w_n^2} dx \leq C \int_{S_n \cap A} w_n^2 e^{C w_n^2} dx + C \int_{S_n} w_n^{p+2} e^{C w_n^2} dx.$$

Considere $r_1, r_2, s_1, s_2 > 1$, com $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$ e $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1$, por Hölder, temos

$$\int_{S_n \cap A} w_n^2 e^{C w_n^2} dx \leq \left(\int_{S_n \cap A} w_n^{2r_1} dx\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{S_n \cap A} e^{C r_2 \|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} \left(\frac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}\right)^2} dx\right)^{\frac{1}{r_2}}$$

e

$$\int_{S_n\cap A} w_n^{p+2}e^{Cw_n^2}dx \leq \left(\int_{S_n\cap A} w_n^{(p+2)s_1}dx\right)^{\frac{1}{s_1}}\left(\int_{S_n\cap A} e^{Cs_2\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}\left(\frac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}\right)^2}dx\right)^{\frac{1}{s_2}},$$

como $\|w_n\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, pois $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pela Desigualdade de Trudinger-Moser, obtemos que

$$\int_{S_n\cap A} w_n^2 e^{Cw_n^2}dx \leq C\left(\int_{S_n\cap A} w_n^{2r_1}dx\right)^{\frac{1}{r_1}}$$

e

$$\int_{S_n\cap A} w_n^{p+2}e^{Cw_n^2}dx \leq C\left(\int_{S_n\cap A} w_n^{(p+2)s_1}dx\right)^{\frac{1}{s_1}}.$$

Usando Hölder novamente, e o fato que $|S_n \cap A| = o(1)$, obtemos que

$$\int_{S_n\cap A} w_n^2 e^{Cw_n^2}dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}$$

e como $p > 0$, usando as Imersões de Sobolev e o fato que $\|w_n\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$, obtemos

$$\int_{S_n\cap A} w_n^{p+2}e^{Cw_n^2}dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

De onde segue que

$$\int_{S_n\cap A} b(x)\left(G(\overline{u}+w_n) - G(\overline{u}) - g(\overline{u})w_n\right)dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Como em $B = \Omega \setminus A$, temos $(\overline{u}+\theta_4 w_n)^p w_n^2 \leq Cw_n^{p+2}$, segue que

$$\int_{S_n\cap B} (\overline{u}+\theta_4 w_n)^p w_n^2 e^{Cw_n^2}dx \leq C\int_{S_n\cap B} w_n^{p+2}e^{Cw_n^2}dx.$$

Considere $t_1, t_2 > 1$, com $\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2} = 1$, por Hölder, temos

$$\int_{S_n\cap B} w_n^{p+2}e^{Cw_n^2}dx \leq \left(\int_{S_n\cap B} w_n^{(p+2)t_1}dx\right)^{\frac{1}{t_1}}\left(\int_{S_n\cap B} e^{Ct_2\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}\left(\frac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}\right)^2}dx\right)^{\frac{1}{t_2}},$$

como $\|w_n\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, pois $u_n \to u_\lambda$ em $H^1(\Omega)$, pela Desigualdade de Trudinger-Moser, obtemos que

$$\int_{S_n\cap B} w_n^{p+2}e^{Cw_n^2}dx \leq C\left(\int_{S_n\cap B} w_n^{(p+2)t_1}dx\right)^{\frac{1}{t_1}},$$

como $p > 0$, usando as Imersões de Sobolev e o fato que $\|w_n\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$, obtemos

$$\int_{S_n \cap B} w_n^{p+2} e^{Cw_n^2} dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

De onde segue que

$$\int_{S_n \cap B} b(x) \left(G(\overline{u} + w_n) - G(\overline{u}) - g(\overline{u})w_n\right) dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto

$$\int_{S_n} b(x) \left(G(\overline{u} + w_n) - G(\overline{u}) - g(\overline{u})w_n\right) dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Os termos que contém a e w_n^2, possuem uma dependência, conforme já observado anteriormente. Precisamente, isso ocorre quando $\lambda > -1$. Por isso vamos quebrar em dois caso, o primeiro quando $\lambda > -1$ e o segundo caso, naturalmente, quando $\lambda \leq -1$.

Caso $\lambda > -1$: Neste caso, primeiro vamos estimar os termos sobre o conjunto A. Considere $r, s > 1$, tais que, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, pela Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda+1}{2} \int_{S_n \cap A} w_n^2 dx &\leq \frac{\lambda+1}{2} \left(\int_{S_n \cap A} 1 dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{S_n \cap A} w_n^{2s} dx\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq C|S_n \cap A|^{\frac{1}{r}} \|w_n\|^2_{L^{2s}(\Omega)} \\ &\leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Observe que $\Omega_{a^+} \subset A$ e $B \subset \Omega \setminus \Omega_a^+$, assim

$$\int_{S_n \cap (A \setminus \Omega_{a^+})} a(x) \left(\frac{(\overline{u} - w_n)^{q+1} - \overline{u}^{q+1}}{q+1} + \overline{u}^q w_n\right) dx \leq 0,$$

ainda mais, $\overline{u} > 0$ em $\overline{\Omega_a^0}$ e $\Omega_a^+ \subset \overline{\Omega_a^0}$, então existe $\delta > 0$, tal que $\overline{u}(x) \geq \delta$, para todo $x \in \Omega_{a^+}$, portanto pelo Teorema do Valor Intermediário, obtemos $0 < \theta_1(x), \theta_3(x) < 1$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx &\leq \int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a^+(x)\left((\overline{u}+\theta_1 w_n)^q-\overline{u}^q\right)w_n dx\\
&= \int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a^+(x)q(\overline{u}+\theta_3\theta_1 w_n)^{q-1}\theta_1 w_n^2 dx\\
&\leq C\int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} \delta^{q-1} w_n^2 dx\\
&\leq C\int_{S_n\cap A} w_n^2 dx\\
&\leq C|S_n\cap A|^{\frac{2}{N}}\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&\leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Em $B = \Omega \setminus A$, observe que $\overline{u} = 0$, em B e $B \subset \Omega_{a^-}$. Agora definimos

$$U_n = \left\{x \in \Omega_{a^-}; w_n(x) \geq \left(\frac{2a^-(x)}{(\lambda+1)(q+1)}\right)^{\frac{1}{1-q}}\right\}.$$

Como $u_n \to u_\lambda$, em $H^1(\Omega)$ e $u_\lambda \leq \overline{u}$, em Ω, temos que $w_n = (\overline{u} - u_n)^+ \to 0$ em $H^1(\Omega)$, logo $|U_n| \to 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap B} w_n^2 dx &\leq \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap(B\setminus U_n)} w_n^2 dx + \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap U_n} w_n^2 dx\\
&= \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap(B\setminus U_n)} w_n^{1-q}w_n^{q+1} dx + \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap U_n} w_n^2 dx\\
&\leq \int_{S_n\cap(B\setminus U_n)} \frac{a^-(x)}{q+1} w_n^{q+1} dx + \frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap U_n} w_n^2 dx\\
&\leq \int_{S_n\cap B} \frac{a^-(x)}{q+1} w_n^{q+1} dx + o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde usamos na segunda desigualdade, a definição de U_n e na terceira desigualdade, a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev. Como

$$-\int_{S_n\cap B} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx = -\int_{S_n\cap B} \frac{a^-(x)}{q+1} w_n^{q+1} dx$$

pois $\overline{u} = 0$, em $B \subset \Omega_{a^-}$, temos que

$$\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n\cap B} w_n^2 dx - \int_{S_n\cap B} a^-(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto, temos que se $\lambda > -1$,

$$\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n} w_n^2 dx - \int_{S_n} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Caso $\lambda \leq -1$: Neste caso, temos que

$$\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n} w_n^2 dx \leq 0 \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Para o termo que contém a, observe que não precisamos mais do termo onde $a \leq 0$, já que o mesmo era somente necessário para controlar o termo que contém w_n^2. Observe que $\Omega_{a^+} \subset A$ e $B \subset \Omega \setminus \Omega_a^+$, assim

$$\int_{S_n\cap(A\setminus\Omega_{a^+})} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx \leq 0$$

ainda mais, $\overline{u} > 0$ em $\overline{\Omega_a^0}$ e $\Omega_a^+ \subset \overline{\Omega_a^0}$, então existe $\delta > 0$, tal que $\overline{u}(x) \geq \delta$, para todo $x \in \Omega_{a^+}$, portanto pelo Teorema do Valor Intermediário, obtemos $0 < \theta_1(x), \theta_3(x) < 1$, tal que

$$\begin{aligned}
\int_{S_n} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx &\leq \int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a^+(x)\left((\overline{u}+\theta_1 w_n)^q-\overline{u}^q\right)w_n dx \\
&= \int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} a^+(x)q(\overline{u}+\theta_3\theta_1 w_n)^{q-1}\theta_1 w_n^2 dx \\
&\leq C\int_{S_n\cap\Omega_{a^+}} \delta^{q-1} w_n^2 dx \\
&\leq C\int_{S_n\cap A} w_n^2 dx \\
&\leq C|S_n\cap A|^{\frac{2}{N}}\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&\leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que se $\lambda < -1$,

$$\frac{\lambda+1}{2}\int_{S_n} w_n^2 dx - \int_{S_n} a(x)\left(\frac{(\overline{u}-w_n)^{q+1}-\overline{u}^{q+1}}{q+1}+\overline{u}^q w_n\right)dx \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Assim, independente do valor de λ, temos

$$L \leq o(1)\|w_n\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

De onde segue o resultado do Lema. ∎

3 O Problema Modificado

Considere $\lambda < \lambda^*$ e u_λ a solução dada pelo Teorema 3.1. Considere agora, o problema modificado

$$\begin{cases} -\Delta v - \lambda v = a(x)\left((u_\lambda + v)^q - u_\lambda^q\right) + b(x)\left(h(u_\lambda + v)e^{\alpha_0(u_\lambda+v)^2} - h(u_\lambda)e^{\alpha_0(u_\lambda)^2}\right) & \text{em } \Omega \\ v \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{P''_λ}$$

Observe que se v é solução do problema (P''_λ), então $u = u_\lambda + v$ resolve (P_λ).

Defina

$$\tilde{h}(x,t) = a(x)\left((u_\lambda + t^+)^q - u_\lambda^q\right) + b(x)\left(h(u_\lambda + t^+)e^{\alpha_0(u_\lambda + t^+)} - h(u_\lambda)e^{\alpha_0 u_\lambda^2}\right)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x,s) &= \int_0^s h(x,t)dt \\ &= a(x)\left(\frac{(u_\lambda + s^+)^{q+1} - u_\lambda^{q+1}}{q+1} - s^+ u_\lambda^q\right) + b(x)\left((G(u_\lambda + s^+) - G(u_\lambda)) - s^+ g(u_\lambda)\right) \end{aligned}$$

onde $g(s) = h(s)e^{\alpha_0 s^2}$. O funcional energia associado ao problema (P''_λ)

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2\right)dx - \frac{1+\lambda}{2}\int_\Omega v^{+2}dx - \int_\Omega \tilde{H}(x,v)dx.$$

Sem muita dificuldade, mostra-se que

$$J_\lambda(v) = I_\lambda(u_\lambda + v^+) - I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{2}\|v^-\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Proposição 3.1 *Assuma as hipóteses do Lema 3.2, então 0 é mínimo local de J_λ em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração: Conforme o Lema 3.2, u_λ é mínimo local de I_λ em $H^1(\Omega)$. Portanto, existe $\delta > 0$, tal que

$$I_\lambda(u_\lambda) \leq I_\lambda(u), \text{ para todo } \|u_\lambda - u\|_{H^1(\Omega)} < \delta$$

Da identidade (3.15), temos que

$$J_\lambda(0) = 0 \leq I_\lambda(u_\lambda + v^+) - I_\lambda(u_\lambda) + \frac{1}{2}\|v^-\|^2_{H^1(\Omega)} = J_\lambda(v)$$

para todo $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \|u_\lambda - u\|_{H^1(\Omega)} < \delta$. Portanto, 0 é mínimo local de J_λ em $H^1(\Omega)$. ∎

Proposição 3.2 *Se I_λ satisfaz $(PS)_{c+I_\lambda(u_\lambda)}$, para algum $c \in \mathbb{R}$, então o funcional J_λ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Demonstração: Seja v_n uma sequência $(PS)_c$ para J_λ, $c \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$J_\lambda(v_n) \to c \quad \text{e} \quad J'_\lambda(v_n) \to 0, \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

De (3.15), temos

$$\langle J'_\lambda(v_n), {v_n}^- \rangle = I'_\lambda(u_\lambda + {v_n}^+){v_n}^- + \|v^-\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v^-\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Portanto $v_n^- \to 0$, em $H^1(\Omega)$. Colocando $u_n = u_\lambda + v_n^+$, temos de (3.15)

$$I_\lambda(u_n) \to I_\lambda(u_\lambda) + c$$

e

$$\langle I'_\lambda(u_n), \phi \rangle = o(1)\|\phi\|_{H^1(\Omega)}, \ \forall\ \phi \in H^1(\Omega).$$

Portanto u_n é uma sequência $(PS)_{I_\lambda(u_\lambda)+c}$ para o funcional I_λ. Portanto, a menos de subsequência, u_n é convergente em $H^1(\Omega)$, logo v_n é convergente em $H^1(\Omega)$. ∎

4 Limitação das Sequências de Palais-Smale

Lema 3.3 *Assuma $(H_{a_-^+})$, (H_a^0), $b \geq 0$, (H) e (G), então se $\lambda^* < 0$ ou $b > 0$ em $\overline{\Omega}$, toda sequência $(PS)_c$ é limitada em $H^1(\Omega)$.*

Demonstração: De fato, considere $u_n \in H^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$, ou seja,

$$I_\lambda(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0,$$

a última convergência em $H^{-1}(\Omega)$, o dual de $H^1(\Omega)$. De fato, podemos assumir que $I_\lambda(u_n) \leq C$ e $I'_\lambda(u_n)(u_n) = o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$, tomando $\theta > 2$ fixado, obtemos que

$$\frac{\theta}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - \frac{\theta(1+\lambda)}{2}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\theta}{q+1}\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega b(x)\theta G(u_n)dx \leq C$$

e

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} - (1+\lambda)\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx - \int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx = o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}.$$

Subtraindo a equação acima da desigualdade anterior e usando (G) e que $b \geq 0$ em Ω, obtemos

$$\left(\frac{\theta}{2}-1\right)\left(\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)}-(1+\lambda)\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right)-\left(\frac{\theta}{q+1}-1\right)\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx < C+o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.16}$$

Considere o primeiro caso, onde assumimos que $\lambda^* < 0$, neste caso da desigualdade (3.16), e das imersões de Sobolev, temos que

$$\left(\frac{\theta}{2}-1\right)\left(\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)}-(1+\lambda)\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq C\left(1+\|u_n\|^{q+1}_{H^1(\Omega)}+\|u_n\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Como $0 \leq q < 1$ e $\lambda < \lambda^* < 0$, temos que $\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)}$ é limitada, já que o primeiro autovalor do operador Laplaciano com condição de Neumann em $H^1(\Omega)$ é zero.

Para o segundo caso, em que $\lambda^* \geq 0$, assumimos que $b > 0$ em $\overline{\Omega}$, portanto existe $t_4, c_4 > 0$, tal que $F(x,t) \geq c_4 t^2$ para todo $t \geq t_4$, procedendo como em [24], observe que existe $t_5 \geq t_4$ e $c_5 > 0$, tal que $F(x,t) \geq c_5 t^2 + 1$, $\forall\ t \geq t_5$. Dividindo (G) por $tG(t)$, com $t \geq t_5$, obtemos

$$\frac{\theta}{t} \leq \frac{g(t)}{G(t)}.$$

Integrando de t_5 a t obtemos

$$\ln\left(\frac{t}{t_5}\right)^\theta \leq \ln\left(\frac{G(t)}{G(t_5)}\right).$$

e aplicando a exponencial à desigualdade, obtemos

$$\left(\frac{t}{t_5}\right)^\theta \leq \frac{G(t)}{G(t_5)}.$$

Portanto

$$G(t) \geq G(t_5)\left(\frac{t}{t_5}\right)^\theta.$$

Logo

$$G(t) \geq Ct^\theta,\ \forall\ t \geq t_5 \tag{3.17}$$

e alguma constante $C > 0$.

Defina então $h(x,t) = b(x)g(t) + (1+\lambda)t$ e $H(x,t) = \int_0^t h(x,s)ds$. Vamos mostrar que para $\epsilon > 0$, tal que $2 < \theta - \epsilon$, existe $t_6 > 0$, tal que

$$(\theta-\epsilon)H(x,t) \leq th(x,t),\ \forall\ t \geq t_6. \tag{3.18}$$

De fato,

$$(\theta-\epsilon)H(x,t)=(\theta-\epsilon)b(x)G(t)+(\theta-\epsilon)(1+\lambda)\frac{t^2}{2}.$$

Usando que $b>0$, em $\overline{\Omega}$, (G) e (3.17), para t grande, temos que

$$(\theta-\epsilon)H(x,t)\leq b(x)tg(t)-\epsilon C t^{\theta}+\left(\frac{\theta-\epsilon}{2}\right)(1+\lambda)t^2.$$

Portanto

$$(\theta-\epsilon)H(x,t)\leq th(x,t)-\left(\epsilon C t^{\theta-2}-\left(\frac{\theta-\epsilon}{2}-1\right)(1+\lambda)\right)t^2.$$

Como $\theta>2$, existe $t_6>0$, tal que

$$\epsilon C t^{\theta-2}\geq\left(\frac{\theta-\epsilon}{2}-1\right)(1+\lambda)$$

e assim temos (3.18).

Voltando a prova da limitação de u_n, como $I_\lambda(u_n)\leq C$ e $\langle I'_\lambda(u_n),u_n\rangle=o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$, obtemos que

$$\frac{\theta-\epsilon}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)}-\frac{\theta-\epsilon}{q+1}\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx-\int_\Omega(\theta-\epsilon)\left(b(x)G(u_n)+\frac{(1+\lambda)u_n^2}{2}\right)dx\leq C$$

e

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)}-\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx-\int_\Omega\left(b(x)g(u_n)u_n+(1+\lambda)u_n^2\right)dx=o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}.$$

Subtraindo a equação acima da desigualdade anterior e usando (3.18), obtemos

$$\left(\frac{\theta-\epsilon}{2}-1\right)\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)}-\left(\frac{\theta-\epsilon}{q+1}-1\right)\int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx<C+o(1)\|u_n\|_{H^1(\Omega)}.$$

Das imersões de Sobolev, temos

$$\left(\frac{\theta-\epsilon}{2}-1\right)\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)}\leq C\left(1+\|u_n\|^{q+1}_{H^1(\Omega)}+\|u_n\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Como $0\leq q<1$, temos que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)}$ é limitada. ■

5 Multiplicidade de Soluções

5.1 Condição de Palais-Smale

Nesta seção seguimos as ideias de De Figueiredo, Do Ó e Ruf ([27], Pg. 466) e Pádua, Silva e Soares ([46], Pg. 1103).

Lema 3.4 *Considere as hipóteses dos Lema 3.3. Se $u = 0$ e $u = u_\lambda$ são os únicos pontos críticos de I_λ, então I_λ satisfaz a condição $(PS)_c$, para*

$$c < c^* = I_\lambda(u_\lambda) + \frac{\pi}{\alpha_0}.$$

Demonstração: Considere uma sequência $u_n \in H^1(\Omega)$, que satisfaz $(PS)_c$, isto é,

$$I_\lambda(u_n) \to c, \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0$$

a última convergência em $H^{-1}(\Omega)$, o dual de $H^1(\Omega)$.

Sabemos do Lema 3.3 que u_n é limitada em $H^1(\Omega)$. Portanto,

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup u, \text{ em } H^1(\Omega) \\ &u_n \to u, \text{ em } L^s(\Omega), \ 1 \le s < +\infty \\ &u_n \to u, \text{ qtp em } \Omega \end{aligned}$$

Além de que existe uma função $M \in L^p(\Omega)$, tal que $u_n(x) \le M(x)$, para todo $x \in \Omega$ e $p \ge 1$. Pelo crescimento TM-crítico de g, temos que

$$|b(x)g(s)s| \le C|s|e^{\beta s^2}, \ x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R}.$$

Usando a Desigualdade de Hölder, juntamente com a Desigualdade de Trudinger-Moser, obtemos que

$$\int_E |b(x)g(u_n)u_n| dx \le C \int_E M(x)^s dx,$$

onde E é qualquer subconjunto mensurável de Ω. Então, $b(x)g(u_n)u_n$ é uniformente integrável e pelo Teorema de Vitali, temos que

$$\int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx \to \int_\Omega b(x)g(u)u dx.$$

Como na prova do Lema 6.1, em [50], obtemos que

$$\int_\Omega b(x)G(u_n) \to \int_\Omega b(x)G(u).$$

Caso 1: Se $u = 0$, como $I_\lambda(u_n) = c + o(1)$, temos

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}(|\nabla u_n|^2 + u_n^2) - \frac{1+\lambda}{2}(u_n^+)^2 - \frac{a(x)}{q+1}(u_n^+)^{q+1} - b(x)G(u_n) \right) dx = c + o(1)$$

Portanto, como $I_\lambda(u_\lambda) < 0$, temos

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} - o(1) = 2c < 2\left(I_\lambda(u_\lambda) + \frac{\pi}{\alpha_0} \right) < \frac{2\pi}{\alpha_0}$$

Considere $t, s > 1$, tais que $\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = 1$, então temos

$$\left| \int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx \right| \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |h(u_n)| e^{\alpha_0 u_n^2} |u_n| dx \leq C \|u_n\|_{L^t(\Omega)}^t \left(\int_\Omega |h(u_n)|^s e^{s\alpha_0 u_n^2} dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Como $u_n \to u, \text{ em } L^s(\Omega), \ 1 \leq s$, temos que

$$\left| \int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx \right| \leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |h(u_n)| e^{\alpha_0 u_n^2} |u_n| dx \leq o(1) \left(\int_\Omega |h(u_n)|^s e^{s\alpha_0 u_n^2} dx \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Para obtermos que

$$\left| \int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx \right| = o(1),$$

basta mostrar que

$$\int_\Omega |h(u_n)|^s e^{s\alpha_0 u_n^2} dx \leq C.$$

De fato, como h tem crescimento TM-subcrítico, para todo $\alpha > \alpha_0$, temos que

$$\int_\Omega |h(u_n)|^s e^{s\alpha_0 u_n^2} dx \leq \int_\Omega e^{s\alpha \|u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}} \right)^2} dx.$$

Pela Desigualdade de Trudinger-Moser, basta mostrar que

$$s\alpha \|u_n\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 2\pi.$$

Tome $\alpha > \alpha_0$, de modo que

$$c < \frac{\pi}{\alpha}.$$

Para $0 < \epsilon < \dfrac{2\pi}{\alpha} - 2c$, temos

$$s\alpha \|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq s\alpha(2c+\epsilon) < s\alpha\frac{2\pi}{\alpha} = s2\pi.$$

Como $s > 1$ é arbitrário, é possível tomar s próximo de 1, tal que $s\alpha\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \leq 2\pi$. Logo

$$\left| \int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx \right| = o(1).$$

Como $\langle I'_\lambda(u_\lambda), u_n\rangle = o(1)$, temos que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$, ou seja, u_n é relativamente compacta em $H^1(\Omega)$.

Caso 2: Se $u = u_\lambda$, como $I_\lambda(u_n) = c + o(1)$, temos

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} = c + d + o(1)$$

onde

$$d := \frac{1+\lambda}{2}\int_\Omega u_\lambda^2 dx - \frac{a(x)}{q+1}\int_\Omega u_\lambda^{q+1} dx - \int_\Omega b(x)G(u_\lambda)dx.$$

Observe que $d = \dfrac{1}{2}\|u_\lambda\|^2_{H^1(\Omega)} - I_\lambda(u_\lambda)$. Considere $v_n = \frac{u_n}{\|u_\lambda\|^2_{H^1(\Omega)}}$, então

$$v_n \to v = \frac{u_\lambda}{[2(c+d)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Seja $\alpha > \alpha_0$, tal que

$$c < I_\lambda(u_\lambda) + \frac{\pi}{\alpha}.$$

Observe que

$$1 - \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = 1 - \frac{\|u_\lambda\|^2_{H^1(\Omega)}}{2(c+d)} = \frac{2(c+d) - \|u_\lambda\|^2_{H^1(\Omega)}}{2(c+d)} = \frac{2c - 2I_\lambda(u_\lambda)}{2(c+d)} < \frac{2\pi}{2\alpha(c+d)}.$$

Logo

$$2\alpha(c+d)\frac{\alpha}{2\pi} < \frac{1}{1 - \|v\|^2_{H^1(\Omega)}}.$$

Como $\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \to 2(c+d)$, existe $r > 0$, tal que

$$2\alpha(c+d)\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} < r < \frac{1}{1 - \|v\|^2_{H^1(\Omega)}}.$$

Da desigualdade

$$\int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx \leq C\int_\Omega e^{\alpha u_n^2}dx \leq C\int_\Omega e^{r2\pi\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}}\right)^2},$$

pelo Lema 3.5 de [3], temos que $\int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx$ é uniformemente limitada, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que

$$\int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx \to \int_\Omega b(x)g(u_\lambda)u_\lambda dx.$$

Como $\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle = o(1)$, e

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} = \langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle + (1+\lambda)\int_\Omega u_n^2 dx + \int_\Omega a(x)u_n^{q+1}dx + \int_\Omega b(x)g(u_n)u_n dx,$$

temos que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} \to (1+\lambda)\int_\Omega u_\lambda^2 dx + \int_\Omega a(x)u_\lambda^{q+1}dx + \int_\Omega b(x)g(u_\lambda)u_\lambda dx = \|u_\lambda\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

pois u_λ é ponto crítico de I_λ. Logo em ambos os casos, temos que u_n é relativamente compacta, portanto I_λ satisfaz $(PS)_c$, para $c < I_\lambda(u_\lambda) + \frac{\pi}{\alpha_0}$. ■

5.2 Nível de Energia

Para obtermos a segunda solução não-trivial para (P_λ), utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz. Aqui seguimos as ideias de Pádua, Silva e Soares ([46], Pg. 1106-1109) e Prashanth e Sreenadh ([47], Pg. 1253).

Teorema 3.3 *Assuma as hipóteses do Lema 3.3. Suponha que exista $x_0 \in \partial\Omega$, tal que $a > a_0 > 0$ e $u_\lambda \geq r_0 > 0$, numa bola $B_R(x_0) \cap \overline{\Omega}$. Então para todo $\lambda < \lambda^*$, o problema (P_λ) tem ao menos duas soluções.*

Demonstração: Vamos inicialmente estimar o nível de energia do funcional, para o uso do Teorema do Passo da Montanha. Pelo Lema 3.3 de [3], sem perda de generalidade, existe R>0, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existem funções $W_n \in H^1(\Omega)$, para $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < R$, com as seguintes características:

1. $W_n \geq 0$, com $\operatorname{supp} W_n \subset B(x_0, R) \cap \overline{\Omega}$.

2. $\|W_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

3. W_n é constante em $B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ e $W_n^2 = \frac{1}{\pi}\log nR + O(1)$, quando $n \to +\infty$.

onde W_n, conforme construção na prova do Lema 3.3 de [3], são obtidas a partir das funções de Moser (ver [41]), definidas por:

$$M_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\log nR)^{\frac{1}{2}} & \text{se } 0 \le |x - x_0| \le \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{\log(R/|x-x_0|)}{(\log nR)^{\frac{1}{2}}} & \text{se } \dfrac{1}{n} \le |x - x_0| \le R \\ 0 & \text{se } |x - x_0| \ge R \end{cases},$$

considerando $\overline{M}_n := M_n|_\Omega$, ou seja, a restrição de M_n ao conjunto Ω e tomando $W_n := \dfrac{\overline{M}_n}{\|\overline{M}_n\|_{H^1(\Omega)}}$. Algumas estimativas importantes a cerca dessas funções são dadas na prova do Lema 3.3 de [3], que utilizaremos posteriormente:

$$\int_\Omega |\overline{M}_n|^2 dx = O\left(\frac{1}{\log nR}\right)$$

e

$$\|\overline{M}_n\|^2_{H^1(\Omega)} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\log nR}\right).$$

Vamos agora mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\max_{t\ge 0} I_\lambda(u_\lambda + tW_n) < I_\lambda(u_\lambda) + \frac{\pi}{\alpha_0}.$$

Suponha por contradição que

$$\max_{t\ge 0} I_\lambda(u_\lambda + tW_n) \ge I_\lambda(u_\lambda) + \frac{\pi}{\alpha_0}, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Primeiro, vamos mostrar que $\lim\limits_{t\to+\infty} I_\lambda(u_\lambda + tW_n) = -\infty$. De fato,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + tW_n) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda + t\nabla W_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_\lambda + tW_n)^2 dx \\ &- \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_\lambda + tW_n)^{q+1} dx - \int_\Omega b(x)G(u_\lambda + tW_n)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_\lambda|^2 + 2t\nabla u_\lambda \nabla W_n + t^2|\nabla W_n|^2\right) dx + \\ &- \frac{\lambda}{2}\int_\Omega \left(u_\lambda^2 + 2tu_\lambda W_n + t^2 W_n^2\right) dx + \\ &- \frac{1}{q+1}\int_\Omega a(x)(u_\lambda + tW_n)^{q+1} dx + \int_\Omega b(x)G(u_\lambda + tW_n)dx, \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + tW_n) &= I_\lambda(u_\lambda) + t\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla W_n dx - t\lambda \int_\Omega u_\lambda W_n dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla W_n|^2 dx + \\ &- \frac{t^2\lambda}{2}\int_\Omega W_n^2 dx - \int_\Omega a(x)\left(\frac{(u_\lambda + tW_n)^{q+1} - u_\lambda^{q+1}}{q+1}\right) dx + \\ &- \int_\Omega b(x)\left(G(u_\lambda + tW_n) - G(u_\lambda)\right) dx. \end{aligned}$$

Do fato que u_λ é solução de (P_λ), obtemos que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u_\lambda + tW_n) &= I_\lambda(u_\lambda) + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2(1+\lambda)}{2}\int_\Omega W_n^2 dx \\ &- \int_\Omega a(x)\left(\frac{(u_\lambda + tW_n)^{q+1} - u_\lambda^{q+1}}{q+1} - tu_\lambda^q W_n\right) dx \\ &- \int_\Omega b(x)\left(G(u_\lambda + tW_n) - G(u_\lambda) - tg(u_\lambda)W_n\right) dx. \end{aligned}$$

Conforme [44], temos a desigualdade a seguir,

$$\frac{(r+s)^{q+1} - r^{q+1}}{q+1} - r^q s \leq C(q)s^{q+1}, \ \forall\ r, s \geq 0$$

e como feito na prova do Lema 3.3,do fato que $b > 0$ em $\overline{\Omega}$, temos que $G(t) \geq Ct^2$, para s grande, portanto de (G), fixado $\theta > 2$, existe $s_1 > 0$, tal que

$$G(s) \geq Cs^\theta, s \geq s_1.$$

Considere $E \subset \operatorname{supp} W_n$, $|E| > 0$, tal que $W_n \geq \delta > 0$ em E, então para t suficientemente grande, temos

$$I_\lambda(u_\lambda + tW_n) \leq I_\lambda(u_\lambda) + C\frac{t^2}{2} + Ct^{q+1} - Ct^\theta \int_\Omega W_n^\theta dx + C + Ct.$$

Como $\theta > 2$, temos que $\lim_{t\to+\infty} I_\lambda(u_\lambda + tW_n) = -\infty$. Logo existe $t_n \geq 0$, tal que,

$$I_\lambda(u_\lambda + t_nW_n) = \max_{t\geq 0} I_\lambda(u_\lambda + tW_n) \geq I_\lambda(u_\lambda) + \frac{\pi}{\alpha_0} > I_\lambda(u_\lambda).$$

Em particular, $t_n > 0$. Como g é não-decrescente, a e b são não-negativas em $B_R(x_0)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\alpha_0} &\leq I_\lambda(u_\lambda + t_nW_n) - I_\lambda(u_\lambda) \\
&= \frac{t_n^2}{2} - \frac{t_n^2(1+\lambda)}{2}\int_\Omega W_n^2 dx \\
&- \int_\Omega a(x)\left(\frac{(u_\lambda + t_nW_n)^{q+1} - u_\lambda^{q+1}}{q+1} - t_n u_\lambda^q W_n\right) dx \\
&- \int_\Omega b(x)\left(G(u_\lambda + t_nW_n) - G(u_\lambda) - t_n g(u_\lambda)W_n\right) dx \\
&\leq \frac{t_n^2}{2} - \frac{t_n^2(1+\lambda)}{2}\int_\Omega W_n^2 dx \\
&\leq \frac{t_n^2}{2} + Ct_n^2\int_\Omega W_n^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Como W_n é limitada em $H^1(\Omega)$, mais precisamente $\|W_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$, temos que $\inf t_n > 0$. Portanto existe $0 < T_1 \leq t_n$.

Vamos mostrar que t_n é limitada superiormente. Pela definição de t_n, temos que $\langle I'_\lambda(u_\lambda + t_nW_n), t_nW_n\rangle = 0$, portanto

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \nabla(u_\lambda + t_nW_n)\nabla(t_nW_n)dx + \int_\Omega (u_\lambda + t_nW_n)(t_nW_n)dx + \\
&- (1+\lambda)\int_\Omega (u_\lambda + t_nW_n)(t_nW_n)dx - \int_\Omega a(x)(u_\lambda + t_nW_n)^q(t_nW_n)dx + \\
&- \int_\Omega b(x)g(u_\lambda + t_nW_n)(t_nW_n)dx.
\end{aligned}$$

Como $u_\lambda \geq r_0 > 0$, temos por Hölder,

$$\begin{aligned}
t_n\|u_\lambda + t_nW_n\|_{H^1(\Omega)} &\geq \int_\Omega \left[(1+\lambda)(u_\lambda + t_nW_n)^2 + a(x)(u_\lambda + t_nW_n)^{q+1}\right]\left(\frac{t_nW_n}{u_\lambda + t_nW_n}\right) dx \\
&+ \int_\Omega \left[b(x)g(u_\lambda + t_nW_n)(u_\lambda + t_nW_n)\right]\left(\frac{t_nW_n}{u_\lambda + t_nW_n}\right) dx.
\end{aligned}$$

De $(H.b)$ e $(H.c)$, como $g(s) = h(s)e^{\alpha_0 s^2}$, existe $C > 0$, tal que

$$(1+\lambda)(u_\lambda + t_nW_n)^2 + a(x)(u_\lambda + t_nW_n)^{q+1} + b(x)g(u_\lambda + t_nW_n)(u_\lambda + t_nW_n) \geq e^{\alpha_0(u_\lambda + t_nW_n)^2} - C,$$

qtp $x \in B_R(x_0) \cap \overline{\Omega}$, pois $b(x) \geq b_0 > 0$. Portanto,

$$t_n\|u_\lambda + t_nW_n\|_{H^1(\Omega)} \geq \int_{B_{\frac{1}{n}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{\alpha_0 t_n^2 W_n^2}\left(\frac{t_nW_n}{u_\lambda + t_nW_n}\right) dx - C\int_{B_R(x_0)\cap\overline{\Omega}}\left(\frac{t_nW_n}{u_\lambda + t_nW_n}\right) dx.$$

Como $t_n \nrightarrow 0$ e $W_n^2 = \frac{1}{\pi}\log nR + O(1)$, em $B_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap \overline{\Omega}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{t_n W_n}{u_\lambda + t_n W_n}, \text{ qtp } x \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap \overline{\Omega}, n \geq n_0.$$

Juntamente com o fato que

$$\frac{t_n W_n}{u_\lambda + t_n W_n} \leq 1, \text{ qtp } x \in B_R(x_0) \cap \overline{\Omega}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} t_n \|u_\lambda + t_n W_n\|_{H^1(\Omega)} &\geq |B_{\frac{1}{n}}(x_0)| e^{\alpha_0 t_n^2 \left(\frac{1}{\pi}\log nR + O(1)\right)} \cdot \frac{1}{2} - C \\ &= \frac{\pi}{2n^2} e^{\frac{\alpha_0 t_n^2}{\pi}(\log nR + O(1))} - C \\ &= \frac{\pi}{2} e^{\frac{\alpha_0 t_n^2}{\pi}(\log nR + O(1)) - 2\log n} - C \\ &= \frac{\pi}{2} e^{2\log n \left[\frac{\alpha_0 t_n^2}{2\pi}\left(\frac{\log nR + O(1)}{\log n}\right) - 1\right]} - C. \end{aligned}$$

Logo,

$$t_n \|u_\lambda\|_{H^1(\Omega)} + t_n^2 \|W_n\|_{H^1(\Omega)} \geq \frac{\pi}{2} e^{2\log n \left[\frac{\alpha_0 t_n^2}{2\pi}\left(\frac{\log nR + O(1)}{\log n}\right) - 1\right]} - C.$$

Portanto, t_n tem que ser limitada superiormente, ou seja, existe $T_2 > 0$, tal que, $T_1 \leq t_n \leq T_2$, para $n \geq n_0$. Ainda mais, a menos de subsequência, temos que $t_n \to t_0$. Como

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\alpha_0 t_n^2}{2\pi} \left(\frac{\log nR + O(1)}{\log n}\right) \leq 1.$$

temos que

$$\frac{\alpha_0 t_0^2}{2\pi} \leq 1.$$

Portanto $t_0^2 \leq \dfrac{2\pi}{\alpha_0}$.

De (3.19), temos que

$$\frac{\pi}{\alpha_0} \leq \frac{t_n^2}{2} + C t_n^2 \int_\Omega W_n^2 dx.$$

Usando o Teorema da Convergência Dominada, podemos mostrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega W_n^2 dx = 0.$$

Como t_n é limitada, passando o limite na desigualdade anterior, obtemos que $t_0^2 \geq \dfrac{2\pi}{\alpha_0}$. Portanto $t_n^2 \to \dfrac{2\pi}{\alpha_0}$.

Por outro lado, analogamente ao feito anteriormente, temos

$$t_n\|u_\lambda+t_nw_n\|_{H^1(\Omega)} \geq \int_\Omega \left[(1+\lambda)(u_\lambda+t_nw_n)+a(x)(u_\lambda+t_nw_n)^q+b(x)g(u_\lambda+t_nw_n)\right](t_nw_n)dx.$$

Pelas hipóteses sobre b e h, existe $C>0$, tal que

$$(1+\lambda)(u_\lambda+t_nw_n)+a(x)(u_\lambda+t_nw_n)^q+b(x)g(u_\lambda+t_nw_n) \geq e^{\alpha_0 t_n^2 w_n^2}-C.$$

Como t_n é limitada, temos

$$\begin{aligned}
t_n\|u_\lambda+t_nw_n\|_{H^1(\Omega)} &\geq \int_{B_{\frac{1}{n}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{\alpha_0 t_n^2 w_n^2}(t_nw_n)dx - C\\
&\geq e^{\alpha_0 t_n^2\left(\frac{1}{\pi}\log nR+O(1)\right)}\cdot t_n\cdot\left[\tfrac{1}{\pi}\log nR+O(1)\right]^{\frac{1}{2}}\tfrac{\pi}{n^2}-C\\
&\geq \pi R^2 t_n\left[\tfrac{1}{\pi}\log nR+O(1)\right]^{\frac{1}{2}} e^{\alpha_0 t_n^2\left(\frac{1}{\pi}\log nR+O(1)\right)-2\log nR}-C\\
&\geq \pi R^2 t_n\left[\tfrac{1}{\pi}\log nR+O(1)\right]^{\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{\alpha_0}{2\pi}t_n^2+O(1)-1\right)2\log nR}-C\\
&\geq \sqrt{\pi}R^4 t_n(\log nR)^{\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{\alpha_0}{2\pi}t_n^2+O(1)-1\right)2\log nR}-C.
\end{aligned}$$

De (3.19), temos das estimativas de W_n e que t_n é limitada, que

$$\frac{\pi}{\alpha_0} \leq \frac{t_n^2}{2}+Ct_n^2\int_\Omega W_n^2dx \leq \frac{t_n^2}{2}+\frac{C}{\log nR}.$$

ou seja,

$$t_n^2 \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}-\frac{C}{\log nR}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
t_n\|u_\lambda+t_nW_n\|_{H^1(\Omega)} &\geq \sqrt{\pi}R^2t_n(\log nR)^{\frac{1}{2}}e^{\left(\frac{\alpha_0}{2\pi}t_n^2+O(1)-1\right)2\log nR}-C\\
&\geq \sqrt{\pi}R^2t_n(\log nR)^{\frac{1}{2}}e^{\left(O(1)-\frac{C}{\log nR}\right)2\log nR}-C\\
&\geq C(\log nR)^{\frac{1}{2}}-C,
\end{aligned}$$

O que é uma contradição, já que o lado esquerdo é limitado. Portanto existe $n\in\mathbb{N}$, tal que

$$\max_{t\geq 0} I_\lambda(u_\lambda+tW_n) < I_\lambda(u_\lambda)+\frac{\pi}{\alpha_0}. \tag{3.20}$$

Vamos agora aplicar o Teorema do Passo da Montanha. Como já vimos, $J_\lambda(sW_n) \to -\infty$, quando $s \to +\infty$. Da Proposição 3.1, 0 é mínimo local de J_λ em $H^1(\Omega)$, portanto existe $r > 0$ tal que $J_\lambda(u) \geq J_\lambda(0) = 0$, para todo $u \in H^1(\Omega)$, com $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq r$. Então existe $w_\lambda \in H^1(\Omega)$, com $\|w_\lambda\|_{H^1(\Omega)} > r$ tal que $J_\lambda(w_\lambda) < 0$. Da Proposicao 3.2 e do Lema 3.4, J_λ satisfaz $(PS)_c$, para $c < \dfrac{\pi}{\alpha_0}$. Defina

$$\Gamma = \Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0,1]; H^1(\Omega)); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = w_\lambda\}$$

e

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{s \in [0,1]} J_\lambda(\gamma(s)).$$

Da Proposição 3.1, temos que $c_\lambda \geq 0$ e $J_\lambda(\partial B_r(0)) \geq 0$. De (3.15) e (3.20), temos que $c_\lambda < \dfrac{\pi}{\alpha_0}$, como $\max\{J_\lambda(0), J_\lambda(w_\lambda)\}| \leq 0$, temos as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha Relaxado, vide Corolário 5.11, em [35], que nos dá uma solução não-trivial v_λ para o problema modificado, observe que v_λ é não-negativa, portanto $u = u_\lambda + v_\lambda$ é uma segunda solução do problema (P_λ). ■

Demonstração do Teorema 3.2: Segue do Teorema 3.3. ■

Apêndice A

Regularidade

Para obtermos resultados de regularidade para as soluções encontradas, seguimos as ideias de Brezis e Kato [12], veja também Struwe [51](Apêndice B), que versam sobre a regularidade de soluções para problemas de Dirichlet, mas que podem ser adaptadas para problemas de Neumann, veja [1](Apêndice). Ainda mais, procedemos como em Brezis e Nirenberg [14] para obtermos regularidade $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $\gamma \in (0,1)$.

Assuma $N \geq 2$, Ω um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$ e considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = f(x,u), &\quad \text{em} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, &\quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{A.1}$$

com $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Hölder contínua em x e localmente Hölder contínua em u. Ainda mais assumimos que f satisfaz a seguinte condição

$$\begin{aligned} &\text{Para } N \geq 3,\ |f(x,u)| \leq C(1+|u|^{2^*-1}),\ x \in \overline{\Omega},\ u \in \mathbb{R}, \\ &\text{Para } N = 2,\ \exists\ t > 1;\ f(x,u) \in L^t(\Omega),\ \forall\ u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{A.2}$$

1 A solução pertence a $L^\infty(\overline{\Omega})$

Lema A.1 *Seja Ω um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua em x e localmente Hölder contínua em u, satisfazendo (A.2). Considere $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema (A.1), então $u \in L^s(\Omega)$, para todo $1 \leq s < +\infty$. Ainda mais, $u \in L^\infty(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Sob essas hipóteses, temos regularidade interior $C^2(\Omega)$, vide [38, 53], veja também Struwe [51](Apêndice B). Vamos nos preocupar com a limitação L^∞ até o bordo do domínio da solução, veja o Teorema 3 de Trudinger [53] e Teorema 1 de Cherrier [20].

Considere o primeiro caso em (A.2). Sejam $l, m \geq 1$ e

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ t^m, & \text{se } 0 \leq t \leq l \\ ml^{m-1}t - (m-1)l^m, & \text{se } l \leq t \end{cases}$$

Definimos

$$G(t) = \frac{H(t) \cdot H'(t)}{m} = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ t^{m(m-1)}, & \text{se } 0 \leq t \leq l \\ l^{m-1}(ml^{m-1}t - (m-1)l^m), & \text{se } l \leq t \end{cases}$$

Conforme Cherrier ([20], Pg. 160), $H(u)$, $G(u) \in H^1(\Omega)$, ainda mais, vale que os traços $\gamma(H(u)) = H(\gamma(u))$ e $\gamma(G(u)) = G(\gamma(u))$ sobre $\partial\Omega$. Sejam

$$E = \{x \in \Omega, u(x) \geq 1\} \quad \text{e} \quad E' = \{y \in \partial\Omega; u(y) \geq 1\}.$$

Denote χ_A a função característica de um conjunto A. Como em $\Omega \setminus E$ temos $0 \leq G(u) \leq 1$, segue que

$$|f(x, u)|G(u)\chi_{\Omega\setminus E} \leq A_1 := \sup\{|f(x, t)|, 0 \leq t \leq 1, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Considere agora

$$\tilde{f}(x, u) = \frac{f(x, u)}{u}\chi_E.$$

Pelas imersões de Sobolev, juntamente com a condição (A.2), $\tilde{f}(\cdot, u) \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$.

Seja $p \in \overline{\Omega}$, U uma vizinhança limitada de p e $\phi \geq 0$, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto e igual a 1 sobre U. Como u é solução fraca do problema (A.1), temos para a função teste $\phi^2 G(u)$, que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \nabla u \nabla(\phi^2 G(u))dx - \int_\Omega f(x, u)\phi^2 G(u)dx \\ &= \int_\Omega \nabla u(2\phi\nabla\phi G(u) + \phi^2 G'(u)\nabla u)dx - \int_\Omega f(x, u)\phi^2 G(u)dx. \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi^2 G'(u)|\nabla u|^2 dx &\leq 2\int_\Omega \phi|\nabla u \nabla\phi|G(u)dx + \int_\Omega |f(x, u)|\phi^2 G(u)dx \\ &\leq 2\int_\Omega \phi|\nabla u \nabla\phi|G(u)dx + \int_E |\tilde{f}(x, u)|u\phi^2 G(u)dx + A_1|\Omega \setminus E|, \end{aligned}$$

onde $|\Omega \setminus E|$, representa a medida de $\Omega \setminus E$. Defina $A = A_1|\Omega \setminus E|$, temos então

$$\int_\Omega \phi^2 G'(u)|\nabla u|^2 dx \leq 2\int_\Omega \phi|\nabla u \nabla\phi|G(u)dx + \int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|u\phi^2 G(u)dx + A. \tag{A.3}$$

Como para números reais a, b vale $(2ab \leq \frac{1}{2}a^2 + 2b^2)$, para isso basta considerar $(a-2b)^2 \geq 0$, temos que

$$2|(\phi\nabla u)\cdot(u\nabla\phi)|\frac{G(u)}{u} \leq \frac{1}{2}\phi^2|\nabla u|^2\frac{G(u)}{u} + 2u|\nabla\phi|^2 G(u)u. \tag{A.4}$$

Observe que

$$G(u) \leq uG'(u), \quad uG(u) \leq (H(u))^2 \quad \text{e} \quad (H'(u))^2 \leq mG'(u).$$

Considere $\psi = H(u)$, pelas desigualdades anteriores, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m}\int_\Omega \phi^2|\nabla\psi|^2 dx &= \frac{1}{2m}\int_\Omega \phi^2|H'(u)\nabla u|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2m}\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2 mG'(u)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2 G'(u)dx.
\end{aligned}$$

Assim, por (A.3), (A.4) temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2 G'(u)dx &\leq_{(A.3)} \int_\Omega \phi|\nabla u\cdot\nabla\phi|u\frac{G(u)}{u}dx + \\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|u\phi^2 G(u)dx + \frac{A}{2} \\
&\leq_{(A.4)} \frac{1}{4}\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2\frac{G(u)}{u}dx + \int_\Omega |\nabla\phi|^2 uG(u)dx + \\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|\phi^2(H(u))^2 dx + \frac{A}{2} \\
&\leq \frac{1}{4}\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2 G'(u)dx + \int_\Omega |\nabla\phi|^2(H(u))^2 dx + \\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|(\phi\psi)^2 dx + \frac{A}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2 G'(u)dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^2(H(u))^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|(\phi\psi)^2 dx + \frac{A}{2}.$$

Pela Desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2G'(u)dx &\leq 2\int_\Omega |\nabla\phi|^2(H(u))^2dx + \int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|(\phi\psi)^2dx + A\\ &\leq 2\int_\Omega |\nabla\phi|^2(H(u))^2dx + \|\tilde{f}(\cdot,u)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\operatorname{supp}\phi)}\|\phi\psi\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + A.\end{aligned} \tag{A.5}$$

Pelas Imersões de Sobolev

$$\|\phi\psi\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} \leq K\left(\|\nabla(\phi\psi)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi\psi\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

e como

$$|\nabla(\phi\psi)|^2 = |\nabla\phi\psi + \phi\nabla\psi|^2 \leq 2\left(|\nabla\phi|^2\psi^2 + \phi^2|\nabla\psi|^2\right),$$

temos

$$\begin{aligned}\|\phi\psi\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} &\leq 2K\int_\Omega \left(|\nabla\phi|^2\psi^2 + \phi^2|\nabla\psi|^2\right)dx + K\int_\Omega |\phi\psi|^2dx\\ &\leq 2K\int_\Omega \phi^2|\nabla\psi|^2dx + K\int_\Omega \left(2|\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\right)|\psi|^2dx.\\ &= 2K\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2(H'(u))^2dx + K\int_\Omega \left(2|\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\right)|\psi|^2dx.\\ &= 2Km\int_\Omega \phi^2|\nabla u|^2G'(u)dx + K\int_\Omega \left(2|\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\right)|\psi|^2dx.\end{aligned}$$

Usando (A.5), temos

$$\begin{aligned}\|\phi\psi\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} &\leq 4mK\left(2\int_\Omega |\nabla\phi|^2(H(u))^2dx + \|\tilde{f}(\cdot,u)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\operatorname{supp}\phi)}\|\phi\psi\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + A\right) +\\ &+K\int_\Omega \left(2|\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\right)|\psi|^2dx\\ &\leq 4mK\left(\|\tilde{f}(\cdot,u)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\operatorname{supp}\phi)}\|\phi\psi\|^2_{L^{2^*}(\Omega)} + A\right)\\ &+K\int_\Omega \left((4m+1)2|\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\right)|\psi|^2dx.\end{aligned}$$

Escolhendo o suporte de ϕ, de modo que

$$4mK\|\tilde{f}(\cdot,u)\|_{L^{\frac{N}{2}}(\operatorname{supp}\phi)} \leq \frac{1}{2}.$$

Obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\psi\|^2_{L^{2^*}(U)} &= \frac{1}{2}\|\phi\psi\|^2_{L^{2^*}(U)} \leq \frac{1}{2}\|\phi\psi\|^2_{L^{2^*}(\operatorname{supp}\phi)}\\ &\leq 8mKA + K\int_\Omega \left((4m+1)2|\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\right)|\psi|^2dx.\end{aligned}$$

Observamos que, para $l \to +\infty$, temos que $\psi = H(u) \to (u^+)^m$, qtp $x \in \Omega$. Tomando $m = \frac{2^*}{2}$, passando o limite, quando $l \to +\infty$ e usando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\|u^+\|^{2^*}_{L^{\frac{(2^*)^2}{2}}(U)} \leq C\left(\|u^+\|^{2^*}_{L^{2^*}(U)} + 1\right) < +\infty.$$

Analogamente vale o mesmo para u^-. Portanto, pela compacidade de $\overline{\Omega}$, temos que $u \in L^{\frac{(2^*)^2}{2}}(\Omega)$.

Observe que $\frac{(2^*)^2}{2} > 2^*$. Agora vamos repetir o mesmo raciocínio feito até aqui, considerando $a' = \dfrac{(2^*)^2}{2(2^*-2)} > \dfrac{N}{2}$ e $a = \dfrac{2a'}{a'-1} \in (2, 2^*)$. Como $\tilde{f}(x,u) = \dfrac{f(x,u)}{u}\chi_E$, temos que

$$|\tilde{f}(x,u)|^{a'} \leq C(1 + u^{(2^*-2)a'}) < +\infty.$$

Como u é solução fraca do problema (A.1), temos

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla G(u) - f(x,u)G(u))\,dx = 0.$$

Portanto

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u)dx \leq \int_\Omega |f(x,u)|G(u)dx = \int_E |f(x,u)|G(u)dx + \int_{\Omega\setminus E} |f(x,u)|G(u)dx.$$

Logo

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u)dx \leq \int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|uG(u)dx + A. \tag{A.6}$$

Como $G(u) \leq uG'(u)$, $\quad uG(u) \leq (H(u))^2 \quad$ e $\quad (H'(u))^2 \leq mG'(u)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dx &= \frac{1}{m}\int_\Omega (H'(u))^2|\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega G'(u)|\nabla u|^2 dx \\
&\leq_{(A.6)} \int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|uG(u)dx + A \\
&\leq \int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|(H(u))^2 dx + A \\
&= \int_\Omega |\tilde{f}(x,u)|\psi^2 dx + A \\
&\leq \|\tilde{f}(\cdot,u)\|_{L^{a'}(\Omega)}\|\psi\|^2_{L^a(\Omega)} + A.
\end{aligned}$$

Portanto, existe C_1 que não depende de m, tal que

$$\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\sqrt{m}\left(\|\psi\|_{L^a(\Omega)} + 1\right).$$

Pelas Imersões de Sobolev e a desigualdade anterior, vem

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{L^{2^*}(\Omega)} &\leq C\left(\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\leq C\left(C_1\sqrt{m}\left(\|\psi\|_{L^a(\Omega)} + 1\right) + C_2\|\psi\|_{L^a(\Omega)}\right)\\
&\leq C_3\sqrt{m}\left(\|\psi\|_{L^a(\Omega)} + 1\right),
\end{aligned}$$

onde C_3 independe de m. Passando o limite nessa desigualdade, quando $l \to +\infty$, como $u \in L^{2^*}(\Omega)$ temos

$$\|u^+\|^m_{L^{m2^*}(\Omega)} \leq C_3\sqrt{m}\left(\|u^+\|^m_{L^{am}(\Omega)} + 1\right).$$

Tomando $\lambda := \dfrac{2^*}{a} > 1$, temos

$$\|u^+\|^m_{L^{\lambda am}(\Omega)} \leq C_3\sqrt{m}\left(\|u^+\|^m_{L^{am}(\Omega)} + 1\right). \tag{A.7}$$

Considere os valores $m_k = \lambda^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Como $\lambda > 1$, temos $m_k \to +\infty$, de onde segue que $u^+ \in L^p(\Omega)$, $\forall\ p < +\infty$. Ainda mais, se

$$\limsup_{m\to+\infty} \|u^+\|_{L^{am}(\Omega)} \leq 1,$$

obtemos que $\|u^+\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Por outro lado, se

$$\limsup_{m\to+\infty} \|u^+\|_{L^{am}(\Omega)} > 1,$$

tome $m_n = \lambda^{n-1}m_0$, $n = 1, 2, \ldots$, para algum $m_0 > 1$ fixado. Portanto, existe uma subsequência m_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, tal que

$$\|u^+\|_{L^{am_{n_k}}(\Omega)} \geq 1,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Assim de (A.7), segue que

$$\|u^+\|^{m_{n_k}}_{L^{\lambda am_{n_k}}(\Omega)} \leq 2C_3\sqrt{m_{n_k}}\|u^+\|^{m_{n_k}}_{L^{am_{n_k}}(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|u^+\|_{L^{\lambda am_{n_k}}(\Omega)} \leq \left(2C_3\sqrt{m_{n_k}}\right)^{\frac{1}{m_{n_k}}} \|u^+\|_{L^{am_{n_k}}(\Omega)}.$$

Portanto, dessa desigualdade, por indução em k segue que

$$\|u^+\|_{L^{\lambda^{n_k} am_0}(\Omega)} \leq (2C_3\sqrt{m_0})^{s_k}\,.\lambda^{s'_k}\|u^+\|_{L^{am_0}(\Omega)},$$

onde $s_k = \frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda^{n_{i-1}}}$ e $s'_k = \frac{1}{2m_0}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_{i-1}}{\lambda^{n_{i-1}}}$.

Seja $s = \lim_{k\to+\infty} s_k$ e $s' = \lim_{k\to+\infty} s'_k$. Como

$$\limsup_{k\to+\infty}\|u^+\|_{L^{\lambda^{n_k}am_0}(\Omega)} \le \left(2C_3\sqrt{m_0}\right)^s .\lambda^{s'}\|u^+\|_{L^{am_0}(\Omega)} < +\infty,$$

temos que $u^+ \in L^\infty(\Omega)$. De maneira análoga, mostra-se que $u^- \in L^\infty(\Omega)$ e portanto $u \in L^\infty(\Omega)$.

Agora considere o segundo caso em (A.2), ou seja, quando $N = 2$. Neste caso $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $\forall\ p < +\infty$. Seja $q \ge 1$ e $r = \dfrac{2q}{q-1}$. Como u é solução fraca do problema (A.1), temos

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla G(u) - f(x,u)G(u))\,dx = 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u)dx &\le \int_\Omega |f(x,u)|G(u)dx = \int_E |f(x,u)|G(u)dx + \int_{\Omega\setminus E}|f(x,u)|G(u)dx\\ &\le \int_E |f(x,u)|uG(u)dx + A_1|\Omega\setminus E|.\end{aligned}$$

Logo

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u)dx \le \int_\Omega |f(x,u)|uG(u)dx + A. \tag{A.8}$$

Como $G(u) \le uG'(u)$, $\quad uG(u) \le (H(u))^2 \quad$ e $\quad (H'(u))^2 \le mG'(u)$, para $\psi = H(u)$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\int_\Omega |\nabla\psi|^2dx &= \frac{1}{m}\int_\Omega (H'(u))^2|\nabla u|^2dx \le \int_\Omega G'(u)|\nabla u|^2dx\\ &\le_{(A.8)} \int_\Omega |f(x,u)|uG(u)dx + A\\ &\le \int_\Omega |f(x,u)|(H(u))^2dx + A\\ &= \int_\Omega |f(x,u)|\psi^2dx + A\\ &\le \|f(\cdot,u)\|_{L^q(\Omega)}\|\psi\|^2_{L^r(\Omega)} + A.\end{aligned}$$

Portanto, existe C_1 que não depende de m, tal que

$$\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \le C_1\sqrt{m}\left(\|\psi\|_{L^r(\Omega)} + 1\right).$$

Pelas Imersões de Sobolev

$$\|\psi\|_{L^{2r}(\Omega)} \le C\left(\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}\right) \le C_3\sqrt{m}\left(\|\psi\|_{L^r(\Omega)} + 1\right),$$

onde C_3 independe de m. Passando o limite nessa desigualdade, quando $l \to +\infty$, temos que $\psi = H(u) \to (u^+)^m$ temos

$$\|u^+\|^m_{L^{2rm}(\Omega)} \leq C_3\sqrt{m}\left(\|u^+\|^m_{L^{rm}(\Omega)} + 1\right).$$

Se

$$\limsup_{m\to+\infty} \|u^+\|_{L^{rm}(\Omega)} \leq 1,$$

obtemos que $\|u^+\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Por outro lado, se

$$\limsup_{m\to+\infty} \|u^+\|_{L^{rm}(\Omega)} > 1,$$

tome $m_n = 2^{n-1}m_0$, $n = 1, 2, ...,$ para algum $m_0 > 1$ fixado. Portanto, existe uma subsequência m_{n_k}, $k = 1, 2, ...,$ tal que

$$\|u^+\|_{L^{rm_{n_k}}(\Omega)} \geq 1, \ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para todo k, temos

$$\|u^+\|^{m_{n_k}}_{L^{2rm_{n_k}}(\Omega)} \leq 2C_3\sqrt{m_{n_k}}\|u^+\|^{m_{n_k}}_{L^{rm_{n_k}}(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|u^+\|_{L^{\lambda 2rm_{n_k}}(\Omega)} \leq \left(2C_3\sqrt{m_{n_k}}\right)^{\frac{1}{m_{n_k}}} \|u^+\|_{L^{rm_{n_k}}(\Omega)}.$$

Portanto, dessa desigualdade, por indução em $k \geq 1$ segue que

$$\|u^+\|_{L^{2^{n_k}rm_0}(\Omega)} \leq (2C_3\sqrt{m_0})^{s_k}.2^{s'_k}\|u^+\|_{L^{rm_0}(\Omega)},$$

onde $s_k = \frac{1}{m_0}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{n_{i-1}}}$ e $s'_k = \frac{1}{2m_0}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_{i-1}}{2^{n_{i-1}}}$.

Seja $s = \lim_{k\to+\infty} s_k$ e $s' = \lim_{k\to+\infty} s'_k$. Como

$$\limsup_{k\to+\infty} \|u^+\|_{L^{2^k rm_0}(\Omega)} \leq (2C_3\sqrt{m_0})^{s}.2^{s'}\|u^+\|_{L^{rm_0}(\Omega)} < +\infty,$$

temos que $u^+ \in L^\infty(\Omega)$. De maneira análoga, mostra-se que $u^- \in L^\infty(\Omega)$ e portanto $u \in L^\infty(\Omega)$.

Temos até aqui que $u \in L^\infty(\Omega)$. Vamos mostrar agora que o traço $\gamma(u) \in L^\infty(\partial\Omega)$. De fato, seja $u_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, com $u_j \to u$ em $H^1(\Omega)$ e qtp $x \in \overline{\Omega}$.

Seja $\delta > 0$, $T = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ e $v : \mathbb{R} \to [0,1]$, uma função $C^\infty(\mathbb{R})$, $v \equiv 1$ em $[-T-\delta, T+\delta]$, $v \equiv 0$ em $(-\infty, -T-2\delta) \cup (T+2\delta, +\infty)$. Considere $\phi_j = v \circ u_j$, observe que pela definição de v, temos que $\phi_j \to u$, qtp $x \in \Omega$, pelo teorema da Convergência Dominada, temos que $\phi_j \to u$ em $L^2(\Omega)$ e então em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Assim

$$\|\nabla \phi_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |v'(t)| \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \leq C := cte,$$

ainda mais $\|\phi_j\|_{H^1(\Omega)} \leq +\infty$. Como $H^1(\Omega)$ é reflexivo e o traço $\gamma : H^1 \to L^2(\partial\Omega)$ é compacta, existe uma subsequência $\phi_{j_i} \rightharpoonup u$ fracamente em $H^1(\Omega)$ e $\gamma(\phi_{j_i}) \to \gamma(u)$ fortemente em $L^2(\partial\Omega)$ e em toda parte de $\partial\Omega$. Consequentemente $\|\gamma(u)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq T$, pois para todo $i \in \mathbb{N}$, $\gamma(\phi_{j_i}) = \phi_{j_i}|_{\partial\Omega}$ é limitado por $T + 2\delta$ com $\delta > 0$ arbitrário.

Logo $u \in L^\infty(\overline{\Omega})$, ainda mais $\|\gamma(u)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. ■

2 $u \in W^{1,p}$ implica $u \in W^{2,p}$

Lema A.2 *Seja Ω um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua em x e localmente Hölder contínua em u, satisfazendo (A.2). Suponha $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema (A.1), com $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 2$, então $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Sob essas hipóteses, temos regularidade interior $C^{2,\gamma}(\Omega)$, vide [38, 53], veja também Struwe [51](Apêndice B). Temos do Lema A.1, que $u \in L^\infty(\overline{\Omega})$. Agora procedemos como no Teorema 1 de Cherrier [20], para concluirmos o resultado do lema.

Considere a seguinte notação: $B_N(r) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N; |x| < r\}$ e $B_N^+(r) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in B_N(r); x_N > 0\}$.

Vamos estudar a regularidade numa vizinhança de $\partial\Omega$. Seja $P \in \partial\Omega$, (U_1, ψ) uma carta em $\overline{\Omega}$, com $p \in U = \psi^{-1}(B_N^+(r))$ e $U \cap \partial\Omega = \psi^{-1}(B_{N-1}(r))$, para algum $r > 0$ e sejam $V = \psi^{-1}\left(B_N^+\left(\frac{3r}{4}\right)\right)$, $W = \psi^{-1}\left(B_N^+\left(\frac{r}{2}\right)\right)$ e $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi \equiv 1$ sobre W e $\phi \equiv 0$ sobre V^c.

A partir desde ponto h denotará um vetor em $\mathbb{R}^N$, paralelo ao hiperplano $\mathbb{R}^{N-1} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N; x_N = 0\}$, com $0 < |h| < \dfrac{r}{4}$ e todas as constantes consideradas não dependem de h. Identificamos u sobre U com sua expressão local $u \circ \psi^{-1}$ sobre $B_N^+(r)$ e com prolongamento nulo fora de $B_N^+(r)$.

Considere então

$$D^h u(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{|h|}, & \text{se } x \in U \\ 0, & \text{se } x \notin U \end{array} \right\}$$

Sabemos que $u \in H^1(\Omega)$, é limitada por T em Ω e seu traço $\gamma(u)$ também é limitada por T sobre $\partial\Omega$. Vamos mostrar que $\partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(W)$, $\forall\ i = 1, ..., N$. Considere $\xi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, como $D^h(\phi u) \in H^1(\Omega)$, temos conforme um clássico cálculo de Agmon [4] e do fato que u é solução fraca de (A.1), que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla(D^h(\phi u))\nabla\xi dx &= \int_\Omega \nabla u \nabla(\phi D^{-h}\xi)dx + I(u,\xi) \\ &= -\int_\Omega f(x,u)\phi D^{-h}\xi dx + I(u,\xi) \end{aligned}$$

onde $|I(u,\xi)| \leq A_1\|u\|_{H^1(U)}\|\xi\|_{H_1(\Omega)}$, com A_1 dependendo de N, r, ϕ. Pela continuidade de f, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,u)\phi D^{-h}\xi dx &\leq \sup\{|f(x,t)|; |t| \leq T, x \in V\} \int_V |D^{-h}\xi| dx \\ &\leq C\|\nabla\xi\|_{L^1(U)} \leq A_2\|\nabla\xi\|_{L^2(U)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla(D^h(\phi u))\nabla\xi dx \leq A_1\|u\|_{H^1(U)}\|\xi\|_{H_1(\Omega)} + A_2\|\nabla\xi\|_{L^2(U)}$$

Considere $S = \{\xi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\}$. Portanto para todo $\xi \in S$, temos

$$\left|\int_\Omega \nabla(D^h(\phi u))\nabla\xi dx\right| \leq A_1\|u\|_{H^1(U)} + A_2 =: C(u),$$

onde A_2 depende de u e de $T = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. Pela Proposição A.1 a seguir, temos que

$$\|\nabla v\|_{L^p(U)} \leq K(N_{1,p}(v) + \|v\|_{L^P(\Omega)}),\ \forall\ v \in W^{1,p}(\Omega),$$

onde $N_{1,p}(v) := sup\{\left|\int_\Omega \nabla v \nabla\xi dx\right|; \xi \in S\}$. Tomando $v = D^h(\phi u)$, temos

$$\|\nabla D^h(\phi u)\|_{L^p(U)} \leq K\left(C(u) + \|D^h(\phi u)\|_{L^P(\Omega)}\right).$$

Como $\|D^h(\phi u)\|_{L^P(\Omega)} \leq A_3\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, temos

$$\|\nabla D^h(\phi u)\|_{L^p(U)} \leq K\left(C(u) + A_3\|u\|_{W^{1,p}(U)}\right) = K_1.$$

Observe que K_1 não depende de h, temos do resultado do Lema 3.3' de Agmon [4], que

$$\partial_i(\phi u) \in W^{1,p}(U), \ \forall \ i = 1, ..., N-1.$$

Lembrando que $\phi \equiv 1$ sobre W, temos $\partial_i(u) \in W^{1,p}(W), \ \forall \ i = 1, ..., N-1$. Portanto

$$\partial^2_{ij}(u) \in L^p(W), \ \forall \ (i,j) \neq (N,N).$$

Como u é solução de

$$-\Delta u = f(x,u)$$

pela continuidade de f e limitação $L^\infty(\Omega)$ de u, podemos concluir que $\partial^2_{NN}(u) \in L^p(W)$. Logo $u \in W^{2,p}(W)$ e consequentemente $u \in W^{2,p}(\Omega)$. ∎

Proposição A.1 *Seja Ω um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$. Seja $p > 1$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, $S = \{\xi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1\}$. Então existe uma $K(N, p, \overline{\Omega})$ tal que $\forall \ u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq K(N_{1,p}(u) + \|u\|_{L^p(\Omega)}),$$

onde $N_{1,p}(u) = \sup\left\{\left|\int_\Omega \nabla u \nabla \xi dx\right|; \xi \in S\right\}$.

Demonstração: Procedemos como no Teorema 1 de Cherrier [20], para concluirmos o resultado do lema. Considere a seguinte notação:

$$B_N(r) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N; |x| < r\},$$

$$B_N^+(r) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in B_N(r); x_N > 0\}$$

e

$$B_N^-(r) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in B_N(r); x_N < 0\}.$$

Também considere

$$B_{N-1}(r) = B_N(r) \cap \mathbb{R}^{N-1},$$

onde $\mathbb{R}^{N-1} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N; x_N = 0\}$.

Pela compacidade $\overline{\Omega}$, é suficiente provar, que para todo $P \in \overline{\Omega}$, existe um vizinhança U de P e uma constante $K(N, P, U)$ tal que, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|\nabla u\|_{L^p(U)} \leq K(N_{1,p}(u) + \|u\|_{L^p(U)}).$$

Quando $P \in \Omega$, esta afirmação é um resultado imediato do Corolário 5.1 de Agmon [4].

Suponha então $P \in \partial\Omega$. Seja V um aberto em $\overline{\Omega}$, com $P \in V$ e o difeomorfismo $\psi : V \to B_N^+(r)$, com $\psi(V \cap \partial\Omega) = B_{N-1}(r)$. Nós identificamos toda função v com sua expressão local $v \circ \psi^{-1}$ sobre o sistema de coordenadas local $(x_1, x_2, ..., x_N) = (y, x_N)$, $y \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, façamos a seguinte extensão à restrição de u sobre $B_N^+(r)$ à um elemento de $W^{1,p}(B_N(r))$, colocando $u(y, x_N) = u(y, -x_N)$, $x_N < 0$. Se $\xi \in C^\infty(B_N(r))$, temos

$$\int_{B_{N-1}(r)} u\frac{\xi}{\eta} dS = -\int_{B_{N-1}(r)} u\frac{\xi}{\overline{\eta}} dS$$

onde $\overline{\eta}$ é o vetor unitário normal à $B_{N-1}(r)$, exterior a $B_{N-1}^-(r)$. Ainda mais, temos a fórmula de Stokes

$$\int_{B_N(r)} u\Delta\xi dx = \int_{B_N^+(r)} \nabla u \nabla \xi dx + \int_{B_N^-(r)} \nabla u \nabla \xi dx.$$

Pela definição de $N_{1,p}(u)$ temos

$$\left| \int_{B_N^+(r)} \nabla u \nabla \xi dx \right| \leq N_{1,p}(u) \|\xi\|_{W^{1,q}(B_N^+(r))},$$

por outro lado, pondo $\hat{\xi}(y, t) = \xi(y, -t)$, temos

$$\left| \int_{B_N^-(r)} \nabla u \nabla \xi dx \right| = \left| \int_{B_N^+(r)} \nabla u \nabla \hat{\xi} dx \right| \leq N_{1,p}(u) \|\hat{\xi}\|_{W^{1,q}(B_N^+(r))}.$$

como $\|\hat{\xi}\|_{W^{1,q}(B_N^+(r))} = \|\xi\|_{W^{1,q}(B_N^-(r))}$, temos

$$\left| \int_{B_N(r)} u\Delta\xi dx \right| \leq N_{1,p}(u) \|\xi\|_{W^{1,q}(B_N(r))}.$$

Desta desigualdade e do Lema 5.1 de [4], obtemos que existe um número real $r' < r$ e uma constante K dependendo apenas de N, p, r, tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}(B_N(r'))} \leq 2K(N_{1,p}(u) + \|u\|_{L^p(B_N(r))}),$$

como $\|u\|_{W^{1,p}(B_N(r'))} = 2\|u\|_{W^{1,p}(B_N^+(r'))}$, obtemos a desigualdade desejada com $U = \psi^{-1}(B_N^+(r'))$.
■

Proposição A.2 *Seja Ω um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Hölder contínua em x e localmente Hölder contínua em u, satisfazendo (A.2). Considere $u \in H^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema (A.1), então $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \gamma < 1$.*

Demonstração: Usaremos aqui a Proposição A.1, de forma iterativa. Iniciamos com $p_0 = 2$, como $u \in W^{1,2}(\Omega)$, pela Proposição A.1 temos que $u \in W^{2,2}(\Omega)$, pelas Imersões de Sobolev, $u \in W^{1,p_1}(\Omega)$, com p_1 arbitrário, se $N = 2$ e $p_1 = 2^*$, se $N \geq 3$. Iterando $k-1$ vezes, de modo que $2k \leq N$, temos $u \in W^{1,p_k}(\Omega)$, onde p_k é qualquer se $N = 2k$ e $p_k = \dfrac{2N}{N-2k}$, se $N > 2$, pela Proposição A.1, temos que $u \in W^{2,p_k}(\Omega)$, como $p_k > N$, e $\partial\Omega$ é suave, temos que $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Agora basta proceder usando a teoria de Schauder, veja o Teorema 6.31 de Gilbarg e Trudinger ([36], Pg. 128 e as observações subsequentes na Pg. 130), veja também o trabalho de García-Mellián, Rossi e Sabina de Lis ([31], Pg. 8), para obter que $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ e é uma solução clássica para o problema (A.1). ■

Considerações Finais

Este trabalho nos propiciou discutir, compreender e apresentar um pouco sobre as particularidades que os problemas elípticos semilineares críticos possuem, bem como algumas diferenças que aparecem no tratamento de problemas com a condição de neumann homogênia na fronteira.

Paralelamente, essa pesquisa nos deixou uma gama de indagações e possibilidades, diversas questões ficaram em aberto, como no Teorema 2.4 do capítulo 2, não foi mostrado se ocorre multiplicidade ou unicidade de soluções no caso em que $N \geq 6$ e $\lambda \leq 0$, como no trabalho de Naito & Sato ([42], Teorema 1.4), existe um resultado de unicidade nesse sentido, essa situação pode ocorrer para esse problema.

Fica também como projeto futuro, a generalização desses resultados para o operador p-Laplaciano, bem como a generalização do problema em $\mathbb{R}^2$, olhando para $b(x)$ mudando de sinal, e ainda mais com o coeficiente de criticidade α_0 como uma função essencialmente limitada em Ω.

Referências Bibliográficas

[1] E. A. M. Abreu, P. C. Carrião & O. H. Miyagaki. *Multiplicity of Solutions For a Convex-concave Problem With a Nonlinear Boundary Condition*. Advanced Nonlinear Studies 6 (2006), 133-148.

[2] Adimurthi. *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problems with critical growtrh for the N-Laplacian*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 17 (4) (1990), 393-413.

[3] Adimurthi & S. L. Yadava. *Critical exponent problem in $\mathbb{R}^2$ with Neumann boundary condition*. Comm. Partial Differential Equations 15 (4) (1990), 461-501.

[4] S. Agmon. *The L^p approach to the Dirichlet problem. Part I: regularity theorems*, Ann. Scuola Norm. Sup Pisa Cl. Sci. 3^e série 13 (4) (1959), 405-448.

[5] S. Alama. *Semilinear elliptic equation with sublinear indefinite nonlinearities*. Advanced Differential Equations 4 (1999), 813-842.

[6] S. Alama & M. Del Pino. *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking*. Ann. Inst. Henri Poincaré 13 (1) (1996), 95-115.

[7] S. Alama & G. Tarantello. *Elliptic Problems with Nonlinearities Indefinite in Sign*. Journal of Functional Analysis 141 (1996), 159-215.

[8] A. Ambrosetti, H. Brezis & G. Cerami. *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems*. Journal of Functional Analysis 122 (1994), 519-543.

[9] A. Ambrosetti & P. H. Rabinowitz. *Dual Variational Methods in Critical Points Theory and Applications*. Journal of Functional Analysis 14 (1973), 349-381.

[10] H. Berestícki & P. L. Lions. *Nonlinear scalar fiels equations, I. Existence of ground state*. Arch. Ration. Mech. Anal. 82 (1983), 313-345.

[11] H. Brèzis. *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*. 5a. Ed. Paris: Masson (1983).

[12] H. Brèzis & T. Kato. *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials*. J. Math. Pures Appl. 58 (1979), 137-151.

[13] H. Brèzis & L. Nirenberg. *Positive Solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*. Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[14] H. Brèzis & L. Nirenberg. *H^1 versus C^1 local minimizers*. C. R. Acad. Sci. Paris, 317 (1993), 465-472.

[15] H. Brèzis & L. Oswald. *Remarks on sublinear elliptic equations*. Nonlinear Analysis 10 (1986), 55-64.

[16] J. Chabrowski. *On the nonlinear Neumann problem with indefinite weight and Sobolev critical nonlinearity*. Bull. Polish Acad. Sci. 50 (2002), 323-333.

[17] J. Chabrowski. *The critical Neumann problem for semilinear elliptic equations with concave perturbations*. Ricerche di matematica - Springer Milan 56 (2007), 297-319.

[18] J. Chabrowski & J. Yang. *Multiple Solutions of a Nonlinear Elliptic Equation Involving Neumann Conditions and a Critical Sobolev Exponent*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 110 (2003).

[19] J. Chabrowski & M. Willem. *Least energy solutions of a critical Neumann problem with weight*. Calc. Var. Partial Diff. Equat. 15 (2002), 421-431.

[20] P. Cherrier. *Problèmes de Neumann non linéaires sur le variétés riemanniennes*. Journal of Functional Analysis. 57 (1984), 154-206.

[21] Y. Deng & S. Peng. *Existence of multiple positive solutions for inhomogeneous Neumann problem*. Journal of Mathematical Analysis and Applicatios 271 (2002), 155-174.

[22] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Rhode Island: American Math. Society (1999).

[23] D. G. de Figueiredo. *Lectures on the Ekeland Variational Principle with applications and Detours*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, vol. 81, Springer-Verlag, Bombay (1989).

[24] D. G. de Figueiredo, J.-P. Gossez & P. Ubilla. *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*. Journal of Functional Analysis 199 (2003), 452-467.

[25] D. G. de Figueiredo, J.-P. Gossez & P. Ubilla. *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity*. J. Eur. Math. Soc. 8 (2005), 269-286.

[26] D. G. de Figueiredo, J.-P. Gossez & P. Ubilla. *Local "superlinearity"and "sublinearity"for the p-Laplacian*. Journal of Functional Analysis 257 (3) (2009), 721-752.

[27] D. G. de Figueiredo, J. M. do Ó & B. Ruf. *Elliptic Equations and Systems with Critical Trudinger-Moser Nonlinearities*. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A 30 (2011), 455-476.

[28] L. R. de freitas. *Existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas quasilineares com crescimento crítico exponencial. Tese de Doutorado*. ICMC-USP-São Carlos (2010).

[29] J. Garcia-Azorero, I. Peral & J. D. Rossi. *A convex-concave problem with a nonlinear boundary condition*. J. Differential Equations 198 (2004), 91-128.

[30] J. García-Melián, J. D. Rossi & J. C. Sabina de Lis. *A bifurcation problem governed by the boundary condition, I*. Nonlinear Differential Equations Appl. 14 (5/6) (2007), 499-525.

[31] J. García-Melián, J. D. Rossi & J. C. Sabina de Lis. *A bifurcation problem governed by the boundary condition, II*. Proc. London Math. Soc. 94 (2007), 1-25.

[32] J. García-Melián, J. D. Rossi & J. C. Sabina de Lis. *A convex-concave elliptic problem with a parameter on the boundary condition*. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series A 32 (4) (2012), 1095-1124.

[33] J. Giacomoni, J. V. Prajapat & M. Ramaswamy. *Positive Solutions for Elliptic Problems With Critical Indefinite Nonlinearity in Bounded Domains*. Elect. Journal of Diff. Equations 15 (2007), 107-126.

[34] J. Giacomoni, S. Prashanth & K. Sreenadh. *A global multiplicity result for N-laplacian with critical nonlinearity of concace-convex type*. Journal of Diff. Equations 232 (2007), 544-572.

[35] N. Ghoussoub. *Duality and Pertubation Methods in Critical Point Theory*. New York: Springer-Verlag (1998).

[36] D. Gilbarg & N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. New York: Cambridge University Press (1993).

[37] I. Kuzin & S. Pohozaev. *Entire Solutions of Semilinear Elliptic Equations*. Berlim: Birkhäuser (1997).

[38] O. A. Ladyzhenskaya & N. N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. New York: Academic Press (1968).

[39] P. L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 1*. Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1) (1985), 145-201.

[40] P. L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 2*. Rev. Mat. Iberoamericana 1 (2) (1985), 45-121.

[41] J. Moser. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*. Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 1077-1092.

[42] Y. Naito & T. Sato. *Non-homogeneous Semilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent*. Annali di Matematica 191 (1) (2012), 25-51.

[43] J. M. B. do Ó. *Quasilinear Elliptic Equations with Exponential Nonlinearities*. Comm. Appl. Nonlinear Anal. 3 (1995), 63-72.

[44] F. O. de V. Paiva. *Nonnegative solutions for indefinite sublinear elliptic problems*. Communications in Contemporary Mathematics 14 (3) (2012), 1250021-20pp.

[45] F. O. de V. Paiva. *Nonnegative solutions of elliptic problems with sublinear indefinite nonlinearity*. Journal of Functional Analysis 261 (2012), 2569-2586.

[46] J. C. N. Pádua, E. A. B. Silva & S. H. M Soares. *Positive Solutions of Critical Semilinear Problems Involving a Sublinear Term at the Origin*. Indiana University Mathematics Journal 55 (2006), 1091-1112.

[47] S. Prashanth & K. Sreenadh. *Multiple positive solutions for a superlinear elliptic problem in $\mathbb{R}^2$ with a sublinear Neumann boundary condition*. Nonlinear Analysis 67 (2007) 1246-1254.

[48] S. Prashanth & K. Sreenadh. *Corrigendum to 'Multiple positive solutions for a superlinear elliptic problem in $\mathbb{R}^2$ with a sublinear Neumann boundary condition'*. Nonlinear Analysis 68 (2008) 226-227.

[49] P. H. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with applications to differential equations*. American Mathematical Society (1988).

[50] E. A. B. Silva & S. H. M. Soares. *Liouville-Gelfand type problems for the N-Laplacian on bounded domains of* $\mathbb{R}^N$. Ann. Scuola norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 28 (4) (1999), 1-30.

[51] M. Struwe. *Variationals Methods*. Berlin: Springer (1990).

[52] G. Tarantello. *Multiplicity Results for an Inhomogeneous Neumann Problem with Critical Exponent*. Manuscripta Mathematica 81 (1993), 57-78.

[53] N. S. Trudinger. *On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications*. J. Math. Phys. 17 (1967), 473-484.

[54] J. L. Vazquez. *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*. Appl. Math. Optim. 12 (3) (1984), 191-202.

[55] X.-J. Wang. *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. J. Differential Equations 93 (1991), 283-310..

[56] M. Willem. *Min-max theorems*. Boston: Birkhäuser (1996).