Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Estatística

Estimação de Parâmetros em Modelos ARFIMA

Izabella Mendes Hatadani

Orientador: Prof. Dr. Aluísio de Souza Pinheiro

Dissertação apresentada junto ao Departamento de Estatística do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

Campinas - SP
2004

Estimação de Parâmetros em Modelos ARFIMA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Izabella Mendes Hatadani e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de novembro de 2004.

Prof. Dr. Aluísio de Souza Pinheiro
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Aluísio de Souza Pinheiro - UNICAMP
2. Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta- UNICAMP
3. Profa. Dra. Silvia Regina Costa Lopes - UFRGS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

Estimação de Parâmetros em Modelos ARFIMA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Izabella Mendes Hatadani e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de novembro de 2004.

Prof. Dr. Aluísio de Souza Pinheiro
Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Aluísio de Souza Pinheiro - UNICAMP
2. Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta- UNICAMP
3. Profa. Dra. Silvia Regina Costa Lopes - UFRGS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

Dissertação de Mestrado defendida em 05 de novembro de 2004 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). ALUÍSIO DE SOUZA PINHEIRO

Silvia Regina Costa Lopes

Prof (a). Dr (a). SILVIA REGINA COSTA LOPES

Prof (a). Dr (a). LUIZ KOODI HOTTA

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Hatadani, Izabella Mendes

H28e Estimação de parâmetros em modelos arfima / Izabella Mendes Hatadani -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2004.

Orientador : Aluísio de Souza Pinheiro

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise de séries temporais. 2. Wavelets (Matemática). 3. Análise espectral. 4. Fourier, análise de. I. Pinheiro, Aluísio de Souza. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Agradecimentos

À minha família por estar ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus pais, Arnaldo e Ruth, que sempre me apoiaram durante os anos em que morei em Campinas e proporcionaram as condições para que eu pudesse me dedicar ao curso de mestrado.

Aos meus irmão, Alexandre e Luciane, que garantiram os momentos de descontração, fundamentais ao longo desses anos.

Ao meu orientador, Aluísio, pela orientação e incentivo.

Aos membros da banca examinadora, Luiz Hotta e Silvia Lopes, pelas sugestões e contribuições dadas.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Recursos computacionais mais poderosos têm intensificado a criação e utilização de metodologias de ajuste e predição em situações em que não se tem expectativa de observações cujo grau de dependência decaia rapidamente ao longo do tempo. Essa característica de uma persistência maior da dependência, conhecida também como longa dependência, tem sido objeto de intensos estudos nas últimas décadas.

Um dos modelos mais utilizados é uma generalização, pela integração fracionária, dos modelos clássicos de Box e Jenkins. O modelo ARFIMA foi proposto por Hosking em 1981 e é caracterizado por um operador em forma de série infinita, dependente de um parâmetro d. Vários estimadores de d são encontrados na literatura. Nossos estudos se concentram nos propostos por: Geweke e Porter-Hudak(1993); Reisen(1994); e Jensen(1999). Esses estimadores podem ser conjuntamente classificados como métodos semiparamétricos, em que se transforma o processo ARFIMA em processo ARMA, de forma que os outros parâmetros do modelo possam ser estimados por metodologias usuais.

Uma importante questão nessa forma estimação é a perda de informação ocasionada pela transformação citada, uma vez que há a necessidade de truncamento da série que caracteriza a longa dependência. Estudos da informação perdida (inconclusivo) e EQM e vício por simulação foram usados para avaliar de que forma a escolha do ponto de truncamento afeta a qualidade dos estimadores. Os resultados indicam que o ponto ideal de truncamento da série varia bastante e sofre grande influência dos valores dos parâmetros do modelo. Uma ilustração é realizada em dados reais.

Abstract

The growing computer power has enable researchers to develop methodologies for estimation and prediction in time series whose observations are not necessartily weakly dependent. Among these developments, ARFIMA models have the nice property of linking themselves directly to the classical time series analysis ARMA models.

We will be studying the effects of estimating the long dependence parameter d on the *ARMA* parameters. Among the various estimators on the literature, we will be using the ones proposed by Geweke and Porter-Hudak(1993), Reisen(1994) and Jensen(1999). The aim of the study is to evaluate the importance of truncation when transforming the ARFIMA model to the ARMA model for the estimations thereof. MSE and bias are compared through simulation.

Results indicate that ideal truncation point is strongly dependent on the values of the parameters themselves but some reasonably broad measures can still be taken in order to efficiently recover information from the data.

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Introdução

Os primeiros estudos sobre séries temporais tratavam especialmente daquelas caracterizadas pela não estacionaridade ou pela independência ou quase independência entre observações muito distantes no tempo. O que se observa em alguns casos, no entanto, é a existência de dependência entre essas observações que, embora pequena, não pode ser desprezada. Essa característica é chamada longa dependência.

Para descrever a longa dependência, o primeiro modelo proposto foi o chamado de ruído gaussiano fracionário, apresentado por Mandelbrot e Van Ness (1968) e Mandelbrot (1971). De forma independente, o modelo ARFIMA foi proposto por Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981). Esse constitui uma generalização dos modelos ARIMA, dependente de um parâmetro d, e tem sido utilizado em diferentes áreas tais como a hidrologia, a astronomia e a economia. Os modelos ARFIMA serão o foco de nosso trabalho.

Um grande número de estimadores do parâmetro de longa dependência do modelo foi apresentado desde então e esses se dividem em duas diferentes abordagens. Na primeira abordagem, paramétrica, todos os parâmetros do modelo são estimados simultaneamente. Os estimadores que seguem esse método têm mostrado, em estudos realizados até hoje, resultados muito satisfatórios, embora, em geral, exijam um alto custo computacional. A segunda abordagem do problema de estimação é a semi-paramétrica, em que os parâmetros do modelo são estimados em dois passos. Primeiramente, é estimado o parâmetro de longa dependência. A série é transformada de modo a se retirar o efeito de longa dependência para que, em um segundo passo, os outros parâmetros do model possam ser estimados pelos métodos usuais de estimação em modelos ARMA. Nesse trabalho, trataremos apenas da abordagem semi-paramétrica.

Para a estimação do parâmetro de longa dependência, a decomposição em funções ortogonais desempenha um importante papel. Entre as formas de decomposição devemos destacar as transformadas de Fourier e de ondaletas como ferramentas aplicadas pelos estimadores mais usados atualmente. A primeira transformada, de Fourier, é empregada na análise de séries temporais e possibilita a análise espectral do processo. A transformada de Ondaletas, por sua vez, tem sido utilizada com freqüência cada vez maior em diversos campos da ciência e apresentado resultados excelentes, em particular, na análise de séries temporais.

Entre os estimadores mais utilizados do parâmetro de longa dependência, estão o estimadores propostos por: Geweke e Porter-Hudak (1993); Reisen (1994); e Jensen (1999). O primeiro baseia-se na relação entre as densidades espectrais dos processos ARFIMA e ARMA e utiliza o periodograma como estimador dessa densidade. O segundo utiliza a mesma relação, mas emprega o periodograma suavizado como estimador da densidade espectral. O último estimador usa a análise de ondaletas para obter uma estimativa do parâmetro de longa dependência.

Uma vez escolhido o estimador do parâmetro de longa dependência, um problema que surge é a forma de transformar o processo ARFIMA em processo ARMA para que os parâmetros restantes do modelo possam ser estimados. Essa transformação exige a escolha de um ponto de truncamento da série infinita que descreve a longa dependência. Essa escolha determina a perda de informação envolvida na transformação e, conseqüentemente, a qualidade das estimativas obtidas. Nesse trabalho estudaremos essa perda de informação do ponto de vista analítico e pelo uso do método Monte Carlo de simulação. Usando a simulação, queremos observar qual o efeito da escolha do ponto de truncamento sobre a precisão das estimativas obtidas e a relação entre o ponto ideal de truncamento e os valores dos parâmetros do modelo.

No Capítulo 1 trataremos das transformadas de Fourier e de Ondaletas, que serão usadas na definição dos estimadores do parâmetro que caracteriza a longa dependência. Apresentaremos no Capítulo 2 o modelo ARFIMA, proposto por Hosking em 1981. A estimação do parâmetro d em séries de longa dependência será abordada no Capítulo 3. Nessa parte do trabalho serão descritos os estimadores citados. Discutiremos também, sob o ponto de vista analítico, a perda de informação causada pela aplicação dessas técnicas. Desenvolveremos no Capítulo 4 um estudo de simulação para estudar a transformação de processos ARFIMA em ARMA, necessária para a aplicação dos métodos semi-paramétricos, como aqueles nesse trabalho. A análise de um conjunto de dados reais será apresentada no Capítulo 6.

1 *Análises de Fourier e de Ondaletas*

1.1 Análise de Fourier

A análise de Fourier tem sido usada em diversos campos da ciência e podemos citar a solução de equações diferenciais parcias como exemplo dessas aplicações. A utilização da análise de Fourier neste trabalho se resume a estudar uma forma de representar uma função arbitrária usando a combinação de senos e cossenos ou, de forma equivalente, de exponenciais complexas. Nessa seção trataremos de alguns conceitos básicos de Análise de Fourier que são fundamentais para a análise de séries temporais no domínio da freqüência. Essa abordagem, chamada de análise espectral, é fundamental em áreas em que o interesse principal está no estudo da periodicidade das séries. Ainda quando os dados não apresentam periodicidade, a análise de Fourier é bastante útil, como será mostrado no Capítulo 2. Resultados mais detalhados sobre essa teoria podem ser encontrados em Korner (1988) e Percival e Walden (2000).

Trataremos primeiramente dessa representação no caso de seqüências finitas. Para isso definiremos funções ortogonais para que possamos encontrar uma base para o espaço n-dimensional e definir a representação de Fourier.

Definição 1.1.1 *Sejam $\phi_k(t)$ e $\phi_j(t)$ funções assumindo valores complexos e com domínio D, um subconjunto dos reais.*

Se $\phi_k(t)$ e $\phi_j(t)$ são definidas em um conjunto D discreto, são chamadas funções *ortogonais se*

$$\sum_{t\in D}\phi_k(t)\phi_j^*(t)\begin{cases} =0 & k\neq j\\ \neq 0 & k=j.\end{cases}$$

onde $\phi_j^*(t)$ *é o conjugado complexo de* $\phi_k(t)$.

Se $\phi_k(t)$ *e* $\phi_j(t)$ *são definidas em um conjunto D contínuo, são chamadas funções ortogonais se*

$$\int_D \phi_k(t)\phi_j^*(t)\ dt\begin{cases} =0 & k\neq j\\ \neq 0 & k=j.\end{cases}$$

Nesse trabalho, nos concentraremos em funções definidas em um D discreto.

Para $k = 0, 1, 2, \ldots, [n/2]$, em que $[s]$ indica o maior inteiro menor do que ou igual a s, a coleção

$$\{sen(2\pi kt/n), cos(2\pi kt/n) : k = 0, 1, 2, \ldots, [n/2]\} = \tag{1.1.1}$$

$$\{e^{2\pi kt/n} : -\frac{n}{2}+1\leq k\leq \frac{n}{2}\ se\ n\ é\ par\ e\ \frac{-(n-1)}{2}\leq k\leq \frac{(n-1)}{2}\ se\ n\ é\ ímpar\}$$

tem exatamente n funções não identicamente iguais a zero e é coleção de funções ortogonais. Seja $z_1, z_2, \ldots, z_n$ uma seqüência de números. Essa seqüência pode ser considerada como um conjunto de coordenadas no espaço n-dimensional. Com um conjunto de n vetores, podemos construir uma base desse espaço, de tal forma que qualquer vetor nele possa ser representado como a combinação linear dos vetores que compõem a base. Sabe-se que qualquer conjunto de n vetores ortogonais forma uma base para o espaço n-dimensional. Portanto, a seqüência $\{z_t\}$ pode ser escrita como uma combinação linear das funções trigonométricas definidas por (1.1.1). Assim, a representação

$$z_t = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k cos(2\pi kt/n) + b_k sen(2\pi kt/n) \quad t = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1.2}$$

é chamada série de Fourier da seqüência $\{z_t\}$, a_k e b_k sendo chamados de coeficientes de Fourier.

Temos que

$$a_k = \begin{cases} 1/n\sum_{t=1}^n z_t cos(w_k t) & k=0\ e\ k=n/2\ se\ n\ é\ par\\ 2/n\sum_{t=1}^n z_t cos(w_k t) & k=1,2,\ldots,[(n-1)/2]\end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} z_t sen(2\pi kt/n) \quad k = 1, 2, \ldots, [(n-1)/2],$$

em que $w_k = 2\pi k/n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, [n/2]$, são chamadas freqüências de Fourier.

As funções trigonométricas e a exponencial complexa são relacionadas pela fórmula de Euler

$$e^{is} = cos(s) + i\ sen(s).$$

Dada essa relação, podemos escrever

$$z_t = \begin{cases} \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} c_k e^{iw_k t} & se\ n\ é\ ímpar \\ \sum_{k=-(n/2)-1}^{n/2} c_k e^{iw_k t} & se\ n\ é\ par \end{cases} \tag{1.1.3}$$

e c_k está relacionado aos coeficientes a_k e b_k por

$$\begin{cases} c_0 & = & a_0 & & \\ c_k & = & \frac{a_k - i\ b_k}{2} & & \\ c_{-k} & = & c_k^* & = & \frac{a_k + i\ b_k}{2}. \end{cases}$$

O mesmo tipo de representação pode ser feita de uma seqüência infinita e periódica. Uma função f(t) é periódica com período P constante se

$$f(t) = f(t+P) \qquad t \in [0, P] \tag{1.1.4}$$

sendo P o menor valor positivo para que (1.1.4) é satisfeita.

Suponha $\{z_t\}$ uma seqüência periódica com período n, onde n é um valor inteiro e positivo, isto é

$$z_t = z_{t+jn} \qquad t = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Então, para todo m positivo, a subseqüência $\{z_{m+t}, t = 1, 2, \ldots, n\}$, define toda a seqüência e pode ser escrita como (1.1.2) ou (1.1.3). Uma vez que $\{z_t\}$ é periódica, essa representação vale para todo t inteiro. Portanto, temos

$$z_{t+jn} = Z_t = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_k cos(2\pi kt/n) + b_k sen(2\pi kt/n) \quad t = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Da mesma forma podemos definir a representação de Fourier de uma seqüência não periódica. Essa representação é chamada de transformada discreta de Fourier e é de especial interesse nesse trabalho pois essa transformada desempenha importante papel na análise de séries temporais. Considere uma seqüência ou função no tempo discreto, z_t, de duração finita, tal que $z_t = 0$ para $|t| > M$. Definimos n=(2M+1) e definimos

$$y_{t+nj} = z_t, \quad \frac{-(n-1)}{2} \leq t \leq \frac{(n-1)}{2}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

uma seqüência periódica com período n. De acordo com (1.1.3), podemos expressar y_t como

$$y_t = \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} c_k e^{i2\pi kt/n},$$

em que

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} y_t e^{-i2\pi kt/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} z_t e^{-i2\pi kt/n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_t e^{-i2\pi kt/n}. \end{aligned}$$

Seja

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} z_t e^{iwt}. \tag{1.1.5}$$

Temos que

$$c_k = \frac{2\pi}{n} f(c\Delta w), \tag{1.1.6}$$

em que $\Delta w = \frac{2\pi}{n}$. Combinando-se (1.1.5) e (1.1.6)

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} \frac{2\pi}{n} f(k\Delta w) e^{ik\Delta wt} \\ &= \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} \Delta w f(k\Delta w) e^{ik\Delta wt}. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Note que cada termo da soma em (1.1.7) representa a área de um retângulo de altura $f(k\Delta w)e^{ik\Delta w}$ e largura $k\Delta w$. Quando $n \to \infty$, temos que $Y_t \to Z_t$ e $\Delta w = \frac{2\pi}{n}$. Portanto, o limite da soma se torna uma integral. Além disso, como estamos somando n intervalos de largura $2\pi/n$, o intervalo total de integração será sempre de tamanho 2π. Assim, temos

$$\begin{aligned} z_t &= \lim_{n\to\infty} Y_t \\ &= \lim_{\Delta w\to 0} \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} f(k\Delta w)e^{ik\Delta wt}\Delta w \\ &= \int_{2\pi} f(w)e^{iwt}dw. \end{aligned}$$

Como $f(w)e^{iwt}$ é uma função periódica com período 2π, podemos usar qualquer intervalo de tamanho 2π na integração. Usualmente, considera-se o intervalo $[-\pi, \pi]$.

Temos, portanto, o par

$$z_t = \int_{2\pi} f(w)e^{iwt}dw \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.1.8}$$

e

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} Z_t e^{iwt} \quad -\pi \leq w \leq \pi. \tag{1.1.9}$$

As funções em (1.1.8) e (1.1.9) são chamadas, respectivamente, de transformada de Fourier (no tempo discreto) de Z_t e de transformada inversa de Fourier de $f(w)$, respectivamente, e formam um par de transformadas de Fourier.

Até este ponto, tratamos apenas da representação de seqüências. A representação de Fourier pode ser usada também no caso de funções definidas em $\mathbb{R}$. Seja $f(\cdot)$ uma função definida em $\mathbb{R}$, periódica, com período P. A freqüência fundamental da função é definida como $w_0 = \frac{2\pi}{P}$. Para essa freqüência fundamental, o conjunto de exponenciais complexas

$$\{e^{ikw_0t} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

é um sistema periódico com período P e é ortogonal em qualquer intervalo de tamanho P.

Portanto, podemos representar a função $f(\cdot)$ como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0t}. \tag{1.1.10}$$

Se a série converge uniformemente para $f(t)$ temos

$$c_k = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)e^{-ikw_0 t}dt. \tag{1.1.11}$$

As condições apresentadas no Teorema 1.1.2 são suficientes para garantir a convergência da série em (1.1.10).

Teorema 1.1.2 *[Wei (1990)]. Seja $f(\cdot)$ uma função limitada, periódica, com período P, um número finito de máximos e mínimos em um período e um número finito de pontos de descontinuidade. Então, a sua série de Fourier converge para $f(\cdot)$ em todo ponto de continuidade de $f(\cdot)$ e para a média dos limites à direita e à esquerda nos pontos de descontinuidade de $f(\cdot)$.*

Considere agora uma função geral $f(\cdot)$, não periódica, definida em todo t real e com $f(t) = 0$ para $|t| > P/2$, definimos uma nova função

$$g(t + jP) = f(t), \quad \frac{-P}{2} \le t \le \frac{P}{2}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

A função $g(\cdot)$ é periódica com período P. De acordo com o que foi estudado para o caso de funções periódicas, podemos expressar $g(\cdot)$ como

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikw_0 t}, \tag{1.1.12}$$

em que $w_0 = 2\pi/P$ e

$$c_k = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)e^{-ikw_0 t}dt = \frac{w_0}{2\pi}\int_{-P/2}^{P/2} f(t)e^{-ikw_0 t}dt. \tag{1.1.13}$$

Substituindo (1.1.13) em (1.1.12)

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{w_0}{2\pi}\int_{-P/2}^{P/2} f(u)e^{-ikw_0 u}du\right]e^{ikw_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{w_0}{2\pi}\int_{-P/2}^{P/2} f(u)e^{ikw_0(t-u)}du \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(kw_0)w_0, \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

em que $H(kw_0) = \int_{-P/2}^{P/2} f(u)e^{ikw_0(t-u)}du$. Se $P \to \infty$, então $g(t) \to f(t)$,$w_0 \to 0$ e o limite da soma em (1.1.14) é uma integral.

$$f(t) = \lim_{P\to\infty} g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(w)dw$$

e

$$H(w) = \lim_{P\to\infty} H(kw_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iw(t-u)}du,$$

onde notamos que, no limite, $w = kw_0$ é uma variável contínua. Isto é,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iw(t-u)}dudw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iwu}du\; e^{iwt}dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(w)e^{iwt}dw \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

e

$$\mathcal{F}(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt. \tag{1.1.16}$$

A função $\mathcal{F}(\cdot)$ em (1.1.15) é chamada de transformada de Fourier de $f(\cdot)$ e $f(\cdot)$ em (1.1.16) é chamada de transformada inversa de Fourier de $\mathcal{F}(\cdot)$ e as duas formam um par de transformadas de Fourier.

As condições abaixo são suficientes para garantir a existência de $\mathcal{F}(\cdot)$.

Teorema 1.1.3 *[Wei (1990)]. Seja $f(\cdot)$ é uma função limitada. Então, $\mathcal{F}(\cdot)$ existe se*

i. $f(\cdot)$ é absolutamente integrável, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty.$$

ii. $f(\cdot)$ tem um número finito de máximos e mínimos e um número finito de pontos de descontinuidade, para cada intervalo finito.

1.1.1 Transformada de Fourier Janelada

Apesar de ser uma ferramenta importante, a transformada de Fourier, definida na seção 1.1, apresenta como um de seus maiores problemas a falta de precisão no tempo. Essa transformada usa funções periódicas para descrever o comportamento de funções que podem ser não periódicas. Quando a função descrita apresenta um pico severo, por exemplo, são necessárias exponenciais de alta freqüência para reproduzí-lo. Por outro lado, como essas exponenciais oscilam em toda a reta, são necessárias outras exponenciais para cancelar os efeitos das primeiras antes e depois da ocorrência do pico. Outro problema que podemos citar da Transformada de Fourier é a necessidade de integrarmos a função f(t) em toda a reta. Para isso, essa função deve ser totalmente conhecida, o que, em geral, não ocorre na prática e nem é de interesse.

Seja $f(t)$ uma função definida para $t \in \mathbb{R}$ e $\tilde{f}(t,w)$ uma transformada de $f(t)$. Para que se evitem os problemas citados, é desejável que se considere uma nova transformada de $f(t)$, $\tilde{f}(t,w)$, que dependa de t e que apenas considere os valores de t dentro de uma janel, isto é, dentro de um intervalo limitado. Essa característica pode ser expressa matematicamente usando-se uma função $g(\cdot)$, assumindo valores complexos e tal que *supp* $g \subset [-T,0]$, em que *supp* g representa o suporte da função $g(\cdot)$, como uma função peso. Nesse caso, T é chamado de tamanho da janela da transformada.

A transformada de Fourier Janelada (T.F.J.) nos dá informação a respeito da função $f(\cdot)$ simultaneamente no tempo e na freqüência e atende às exigências descritas acima. Seja

$$f_t(w) = \overline{g(w-t)}f(w)$$

e *supp* $f_t(w) \subset [t-T,t]$. Podemos agora definir

Definição 1.1.4 *A Transformada de Fourier Janelada de f é*

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t,w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iwu} f_t(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iwu}\overline{g(u-t)}f(u)du, \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

em que $g(\cdot)$, tal que supp $g \subset [-T,0]$, é chamada de janela e T é chamado de largura da janela.

Note-se que, se $g(\cdot)$ é uma função contínua, então o peso dado para valores de u próximos a t e $T-t$ são pequenos. A suposição de que *supp* $g \subset [-T,0]$ não é realmente necessária para garantir a existência de T.F.J. e de sua inversa e foi usada somente para dar um sentido mais intuitivo à idéia da transformada. Podemos assumir apenas que essa função é quadrado integrável.

Definição 1.1.5 *A Transformada de Fourier Janelada inversa de f é*

$$f(w) = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwu} g(u-t) \tilde{f}(t,w) \; dwdt.$$

A T.F.J. também pode ser calculada sob o ponto de vista do domínio da freqüência. Pela identidade de Parseval

$$\tilde{f}(t,w) \;\; = \langle \overline{g_{w,t}} f \rangle = \langle \overline{\hat{g}_{w,t}} \hat{f} \rangle,$$

em que $\overline{g_{w,t}(u-t)} = g(u-t)e^{2\pi iwu}$.

Podemos escrever $\tilde{f}(t,w)$ como

$$\tilde{f}(t,w) \;\; = e^{-2\pi iwt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\nu t} \overline{\hat{g}(\nu - w)} \hat{f}(\nu) d\nu. \tag{1.1.18}$$

A igualdade em (1.1.18) é quase idêntica a (1.1.18), mas com a variável u de tempo substituída pela variável ν de freqüência e a janela $\hat{g}(u-t)$ substituída pela sua transformada $g(\nu - w)$. A inclusão da quantidade $e^{-2\pi iwt}$ está relacionada à translação em tempo e freqüência. Portanto, sob o ponto de vista da freqüência, começamos com um sinal $\hat{f}(u)$ e multiplicamos esse por uma janela $\hat{g}$: $\hat{f}_w(\nu) \equiv \overline{\hat{g}(\nu - w)} f(\nu)$. Usamos, então, a transformada inversa de Fourier desse produto e multiplicamos por um fator de correção $e^{-2\pi iwt}$.

A escolha da janela $g(\cdot)$ funcionará como um balanceamento entre o tempo e a freqüência. Variações de $f(\cdot)$ em intervalos muito maiores que T serão descritos pelo comportamento temporal de $\tilde{f}(t,w)$, enquanto a variação em intervalos muito menores que T serão descritos pelo comportamento freqüêncial de $\tilde{f}(t,w)$.

Embora o uso da T.F.J. amenize o problema de falta de localização da transformada de Fourier, esse não chega a ser completamente evitado. Isso porque, quando um pico de largura muito menor que T ocorre em $f(\cdot)$, há a mesma necessidade de incluir exponenciais de alta freqüência para reproduzí-lo e outras exponenciais para anular o efeito das primeiras antes e depois da ocorrência do pico. Isso é amenizado pois só precisamos anular os efeitos das primeiras exponenciais dentro da janela $f(\cdot)$. Da mesma forma, quando usamos T.F.J., devemos combinar muitas exponenciais para reproduzir uma estrutura da função com largura muito maior que T. Portanto, se uma função apresenta um pico severo e uma estrutura com largura muito grande, qualquer que seja a largura T da janela escolhida, a T.F.J. não poderá descrever bem a função pois T é fixo ao longo da reta.

1.2 Análise de Ondaletas

A análise de ondaletas é uma ferramenta importante aplicada em diversas áreas da ciência e que, nos últimos anos, tem sido aplicada com maior freqüência no estudo de séries temporais. Essa é uma análise tempo-escala e não tempo-freqüência, como as análises apresentadas nas seções 1.1 e 1.2. Apresentatemos nesse trabalho uma rápida introdução sobre essa teoria. O leitor interessado pode consultar Kaiser (1994) para obter explicações mais detalhadas sobre a Análise de Ondaletas. Aplicações específicas à teoria de séries temporais podem ser encontradas em Percival e Walden (2000) e Vidakovic (1999).

Seja $\Psi_{a,b}(\cdot)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, a família de funções definidas como as translações e mudanças de escala de uma função $\Psi(\cdot) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

A função Ψ é chamada ondaleta mãe e satisfaz a condição

$$C_\Psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathbf{\Psi}(w)|^2}{|w|}dw < \infty, \tag{1.2.19}$$

em que $\mathbf{\Psi}(\cdot)$ representa a transformada de Fourier de $\Psi(\cdot)$.

Para qualquer função $f(\cdot)$ quadrado integrável, a transformada contínua de ondaleta de $f(\cdot)$ é definida por

$$CWT_f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\Psi_{a,b}}(x)dx.$$

Quando a condição (1.2.19) é satisfeita, é possível reconstruir $f(\cdot)$ a partir de $CWT_f(a,b)$, usando-se a transformada inversa contínua de ondaleta, que é definida por

$$f(x) = \frac{1}{C_\Psi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} CWT_f(a,b)\Psi_{a,b}(x)\frac{da\ db}{a^2},\ x \quad \in \mathbb{R}.$$

A transformada contínua de ondaleta de uma função f de uma variável é uma função de duas variáveis, o que indica que existe redundância da informação. É possível que a recuperação total da função original seja feita por pontos amostrais da inversa da transformada. Uma amostragem que preserve toda a informação deve ter freqüência pelo menos tão grande quanto a chamada amostragem crítica definida como

$$a = 2^{-j}, b = k2^{-j},\ j,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Qualquer outra amostragem com freqüência maior do que essa não permitirá a recuperação dos dados de forma única. Além disso, sob certas condições, pode-se mostrar que com a amostragem crítica, $\{\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Psi(2^j x - k),\ j,\ k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base ortogonal de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, o espaço funcional composto pelas funções quadrado integráveis.

A análise de multi-resolução (A.M.R.) nos permite entender de forma mais intuitiva a transformada de ondaletas discretizada pela amostragem crítica.

Primeiramente, vamos definir os operadores de translação, T:$\mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, e de dilatação, D:$\mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$:

$$T^n f(t) = f(t-n), \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.20}$$

$$D^m f(t) = 2^{m/2} f(2^m t), \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Definição 1.2.1 *Uma Análise de Multi-resolução em $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, o espaço das funções quadrado integráveis, é uma seqüência aninhada de subespaços fechados $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ que tenham as seguintes propriedades:*

i.Hierarquia:

$$V_j \subset V_{j+1} \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \qquad\qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

ii.União densa e Intersecção Trivial:

$$\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \qquad e \qquad \bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$$

iii.Auto-Similaridade:

$$f(2^j t) \in V_j \Leftrightarrow f(t) \in V_0 \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

iv.Existe uma função $\phi \in V_0$ tal que $\{T^k\phi(t) = \phi(t-k)\forall k \in \mathbb{Z}\}$ gere o espaço V_0, ou seja:

$$V_0 = \left\{ f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) | f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi(t-k) \right\}$$

para uma seqüência c_k apropriada e o conjunto $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ seja uma base ortonormal.

Note que a condição (iii) se refere à resolução pois $f(2^j t)$ é proporcional à versão comprimida de $f(t)$.

Quando uma seqüência de subespaços satisfaz as propriedades de uma A.M.R., para cada $j \in \mathbb{Z}$, existe uma seqüência $\{\Psi_{j,k}(x), j\ fixo, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ que forma uma base ortonormal do espaço W_j definido por

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Por construção, $W_j \perp W_k, j, k \in \mathbb{Z},\ j \neq k$ e, portanto,

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \overline{W_j}.$$

Dado que $\{\Psi_{j,k}(x), j\ fixo, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de W_j, temos que

$$\{\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Psi(2^j x - k),\ j,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

forma uma base ortonormal de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ e podemos escrever qualquer função $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ como

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{jk} \Psi_{j,k}(t)$$

em que

$$w_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\Psi_{j,k}(t)dt \tag{1.2.21}$$

Os coeficientes w_{jk} definidos em (1.2.21) são chamados coeficientes da transformada de ondaletas de $f(t)$ e serão importantes para a estimação do parâmetro de longa dependência do modelo ARFIMA. Os valores desses coeficiente estão ligados à resolução no sentido em que $w_{j\cdot}$ com j's maiores estão relacionados a resoluções mais altas.

Dado que $W_0 \subset V_1$ e $\Psi_{0,0}(x) = \Psi(x) \in V_1$, $\Psi(x)$ pode ser representada, de acordo com a definição de A.M.R. como

$$\Psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k)$$

para alguma seqüência de coeficientes $g_k,\ k \in \mathbb{Z}$. Não entraremos em detalhes a respeito da construção das funções $\phi(\cdot)$ e $\Psi(\cdot)$. Explicações mais detalhadas sobre a obtenção dessas funções estão em Kaiser (1994), Vidakovic (1999) e El-Dash (2002). Como exemplo de base podemos citar a base de Haar que é ortogonal, tem suporte compacto e é a única com essas características para a qual as funções $\phi(x)$ e $\Psi(x)$ podem ser obtidas explicitamente. Essas funções são dadas por

$$\phi(t) = \mathbb{I}_{[0,1]}(t) \ e$$

$$\Psi(t) = \mathbb{I}_{[0,1/2]}(t) - \mathbb{I}_{[1/2,1]}(t).$$

2 Modelos ARFIMA

2.1 Modelos ARMA (p,q)

A observação de um fenômeno ao longo do tempo e o estudo de seu comportamento é de grande interesse em diversas áreas da ciência como a economia, a hidrologia e a física. Nesse contexto, a teoria de séries temporais fornece ferramentas para que esses fenômenos possam ser estudados e para que se possam fazer previsões a respeito dos mesmos.

Um processo estocástico é definido como uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}$ indexadas. A realização de um processo estocástico indexado no tempo é chamado de série temporal.

Os modelos de séries temporais são usados para descrever tais séries e são a especificação da distribuição conjunta das variáveis aleatórias (v.a.'s)$\{X_t\}$ das quais $\{x_t\}$ são os valores observados. No início desse trabalho, trataremos de algumas definições básicas da teoria de Séries Temporais.

Definição 2.1.1 *Seja $\{X_t\}$ um processo estocástico com $E(X_t^2) < \infty$. A função-média de $\{X_t\}$ é*

$$\mu_X(t) = E(X_t)$$

e a função-covariância é

$$\gamma_X(t,s) = Cov(X_t, X_s).$$

Definição 2.1.2 *Um processo estocástico $\{X_t\}$ é dito estritamente estacionário se*

$$(X_1, X_2, \ldots, X_k) \stackrel{d}{=} (X_{1+h}, X_{2+h}, \ldots, X_{k+h}) \quad \forall h, k \geq 1$$

em que $\stackrel{d}{=}$ *indica que os dois vetores aleatórios têm distribuições conjuntas iguais.*

A condição da definição de estacionariedade estrita é muito forte e, com exceção do caso de v.a.'s independentes e identicamente distribuidas (i.i.d.), dificilmente pode ser verificada na prática. Por essa razão, em geral, usamos um outro conceito de estacionariedade.

Definição 2.1.3 *Um processo estocástico* $\{X_t\}$ *é dito fracamente estacionário, ou estacionário de segunda ordem, se* $\mu_X(t)$ *e* $\gamma_X(t, t+s)$ *são independentes de* t.

Nesse trabalho, quando nos referirmos à estacionariedade, estaremos considerando estacionariedade fraca. Note que, se $\{X_t\}$ é estritamente estacionário e $E(X_t)^2 < \infty$, então X_t é estacionário de segunda ordem. Além disso, estacionariedade fraca não implica em estrita. Um caso particular em que isso acontece é aquele em que a distribuição de $\{X_t\}$ é Gaussiana, pois essa distribuição é determinada apenas pelos dois primeiros momentos.

Definição 2.1.4 *Seja* $\{X_t\}$ *um processo estacionário. A função de autocovariância de* $\{X_t\}$ *é*

$$\gamma_k = Cov(X_t, X_{t+k})$$

e a função de autocorrelação (ACF)

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = Corr(X_t, X_{t+k}).$$

Além das duas funções definidas acima, a função de autocorrelação parcial é uma importante ferramenta para a identificação do modelo de uma série temporal. Podemos interpretar essa função como a correlação entre Z_t e Z_{t+k} depois de retirados os efeitos das v.a.'s entre elas.

Definição 2.1.5 *A função de autocorrelação parcial entre* Z_t *e* Z_{t+k} *é dada por*

$$\phi_{kk} = corr(Z_t, Z_{t+k} | Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1}).$$

Pode-se mostrar que ϕ_{kk} é obtido de

$$\phi_k = \Gamma_k^{-1} \gamma_k$$

em que $\Gamma_k^{-1} = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^k$, $\gamma_k = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)'$ e ϕ_{kk} é a última componente do vetor ϕ_k.

O ruído branco é um caso particular de série temporal não estacionária e de especial importância pois a partir dele são contruídos os modelos mais usados na teoria de séries temporais.

Definição 2.1.6 *Um processo $\{Z_t\}$ é dito ruído branco (WN) com média zero e variância σ^2, $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$, se $E(Z_t) = 0$ e a sua função de autocovariância de dada por*

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & se \quad k = 0; \\ 0 & c.c.. \end{cases}$$

Note que um processo ruído branco não é necessariamente um conjunto de v.a.'s i.i.d.

Outra classe importante é a dos chamados de processos lineares.

Definição 2.1.7 *$\{Y_t\}$ é um processo linear se pode ser representado na forma*

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \qquad \forall\ t$$

onde $\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2)$ e $\{\psi_j\}$ é uma seqüência de constantes tais que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

Os processos ARMA são uma classe de processos lineares. A seguir, veremos como o ruído branco pode ser usado para a construção desses modelos.

Definição 2.1.8 *$\{Y_t\}$ é um processo ARMA(p,q) se é um processo estácionário e, para todo t,*

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t \tag{2.1.1}$$

em que

$$\begin{aligned} &\{Z_t\} \sim WN(0,\sigma^2), \Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p, \\ &\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q, \\ &B \text{ é o operador tal que } B^r X_t = X_{t-r} \end{aligned}$$

e os polinômios $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$ não têm raízes comuns.

Devemos destacar a importância da condição de estacionariedade na definição de processos ARMA. O resultado abaixo nos mostra como garantir que essa condição seja satisfeita.

Proposição 2.1.9 *[Wei (1990)] Uma solução estacionária $\{Y_t\}$ de (2.1.1) existe se e somente se*

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1(B) - \ldots - \phi_p(B)^p \neq 0 \quad \forall z \;\; tal \; que \;\; |z| = 1.$$

Existem duas formas bastante úteis de representar processos lineares. A primeira é chamada média móvel e consiste em expressá-lo como uma combinação linear de uma seqüência de v.a.'s do tipo ruído branco. A existência dessa representação está ligada ao conceito de causalidade.

Definição 2.1.10 *Um processo $\{Y_t\}$ ARMA(p,q) é dito causal se existem constantes $\{\psi_j\}$ tais que $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty$ e*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \quad \forall t \in \mathbb{N} \tag{2.1.2}$$

em que $\{Z_t\} \sim WN(o, \sigma^2)$.

Causalidade é equivalente à condição de que $\{Y_t\}$, como definido em (2.1.1), obedece

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1(B) - \ldots - \phi_p(B)^p \neq 0 \quad \forall z \;\; tal \; que \;\; |z| \leq 1.$$

Podemos também representar um processo na sua forma autorregressiva, isto é, como uma combinação linear de suas observações passadas somada a uma variável aleatória de média zero. O processo que pode ser escrito dessa forma é considerado invertível.

Definição 2.1.11 *Um processo $\{Y_t\}$ ARMA(p,q) é dito invertível se existem constantes $\{\pi_j\}$ tais que $\sum_{j=0}^{\infty}|\pi_j| < \infty$ e*

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j} \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

em que $\{Z_t\} \sim WN(o, \sigma^2)$

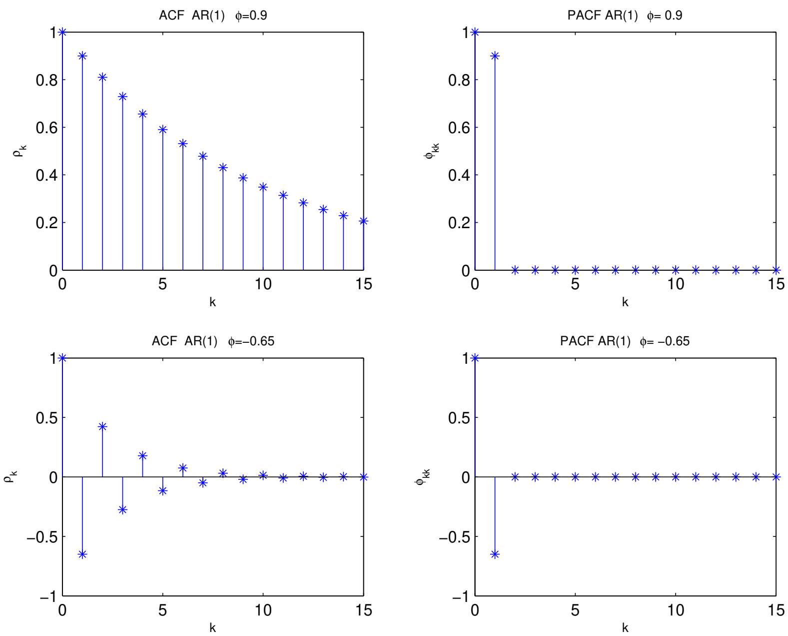

Figura 1: Exemplos de ACF e PACF de modelos AR(1)

Invertibilidade é equivalente à condição

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q \neq 0 \quad \forall z \;\; tal\ que \;\; |z| \leq 1.$$

Depois de definirmos o processo ARMA, podemos ver como as funções de autocorrelação e autocorelação parcial podem ser usadas na identificação do modelo. De acordo com os valores de p e q, essas funções apresentarão um comportamento diferente. Quando o processo é $AR(p)$, a ACF decai rapidamentemente enquanto a PACF assume valores iguais a zero para defasagens maiores que p. No processo $MA(q)$, a ACF é diferente de zero somente para defasagens menores que q e a PACF tem decaimento exponencial.

As Figuras 1 e 2 mostram exemplos de processos AR(1) e MA(1), respectivamente.

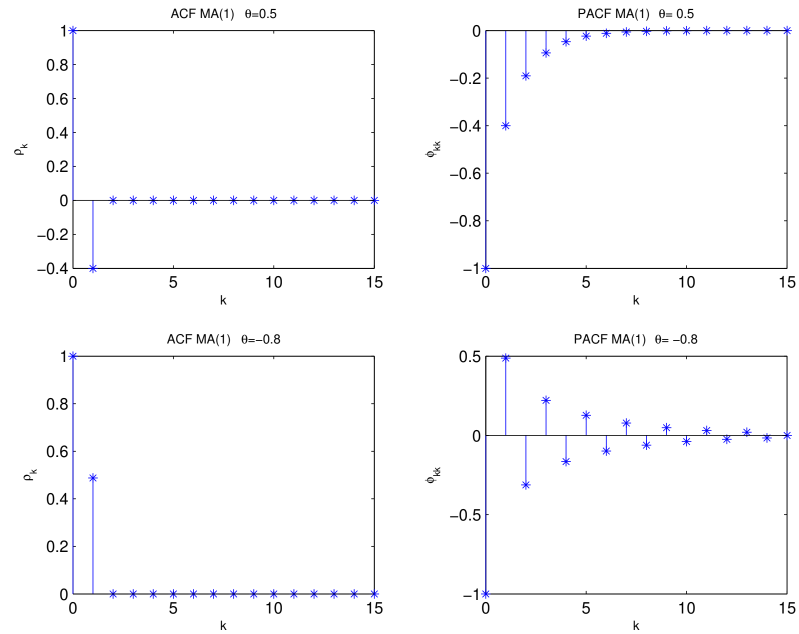

Figura 2: Exemplos de ACF e PACF de modelos MA(1)

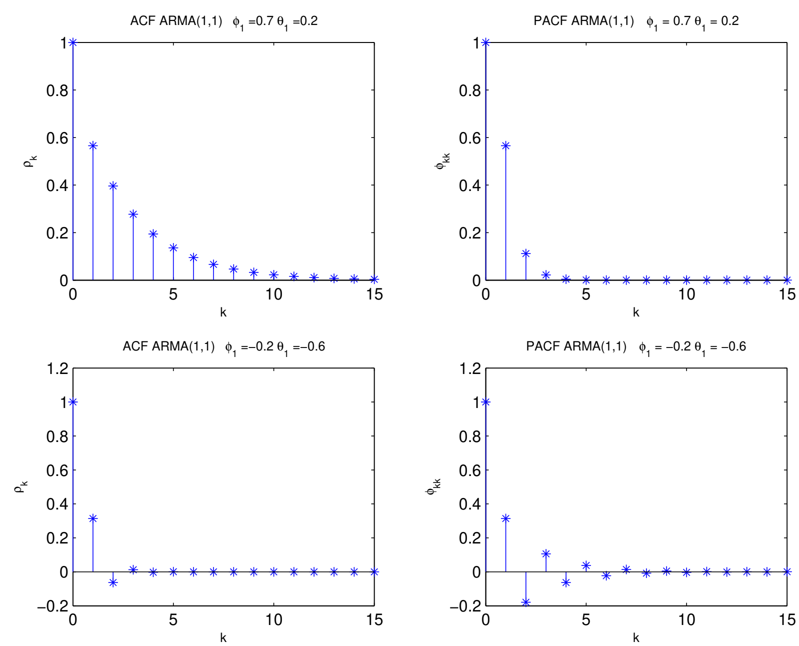

Figura 3: Exemplos de ACF e PACF de modelos ARMA(1,1)

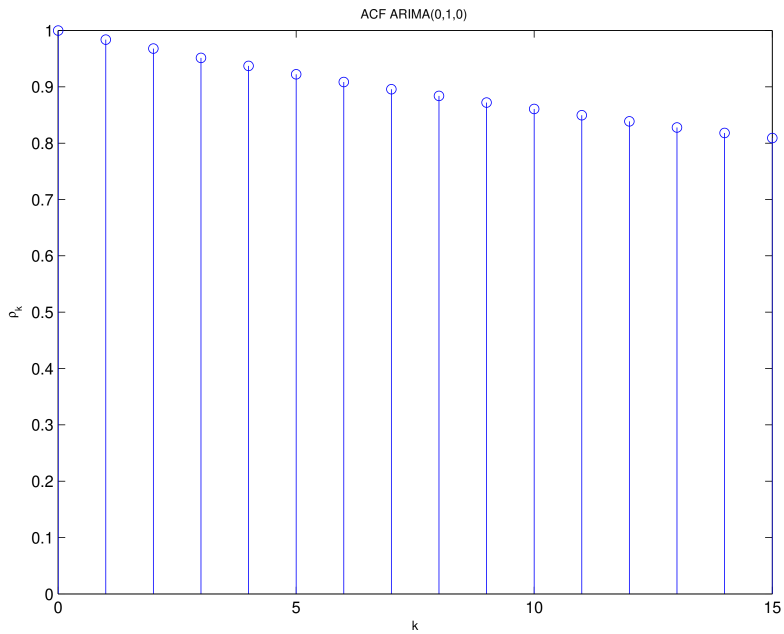

Figura 4: ACF amostral de processo ARIMA(0,1,0)

Nos modelos $ARMA(p,q)$, a ACF decai a partir de defasagens maiores que $(q-p)$ enquanto a PACF decai em defasagens maiores que $(p-q)$. Dois exemplos desses decaimentos são mostrados na Figura 3.

Por fim, definiremos a classe de modelos ARIMA, não estacionários.

Definição 2.1.12 *Um processo X_t é dito processo ARIMA(p,d,q) se $Y_t = (1-B)^d X_t$ é um processo ARMA(p,q) causal.*

Como características dos processos ARIMA devemos destacar a não estacionariedade e o decaimento lento da função de autocorrelação. As figuras 4 e 5 apresentam respectivamente as funções amostrais de autocorrelação e autocorrelação parcial de um processo ARIMA(0,1,0) de tamanho 500.

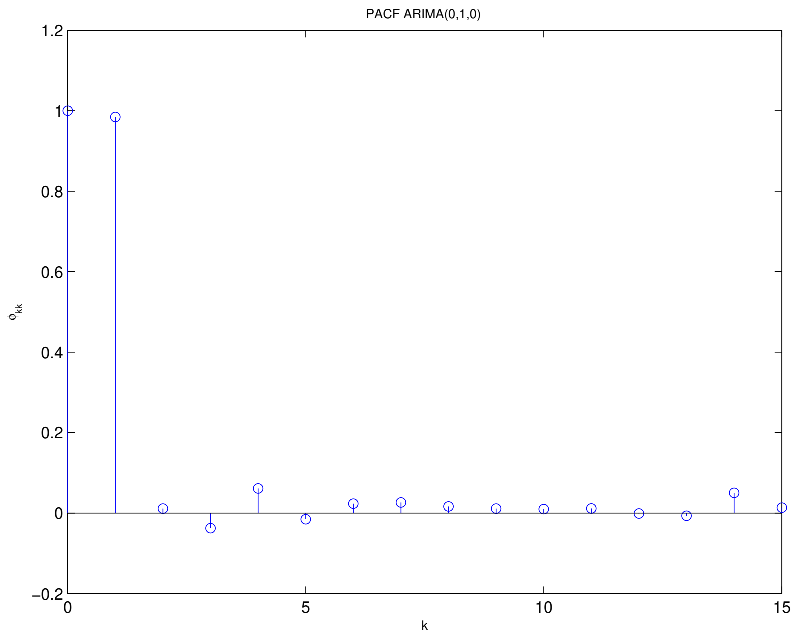

Figura 5: PACF amostral de processo ARIMA (0,1,0)

2.2 Análise Espectral de Séries Temporais

Até esse ponto do trabalho, analisamos as séries temporais no domínio do tempo. Nesta seção, trataremos da análise sob o ponto de vista espectral, isto é, no domínio da freqüência.

Seja $\{Y_t\}$ um processo estacionário com $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$. Então a transformada de Fourier de $\{\gamma_k\}$ existe e é dada por

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{-iwk} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k cos(wk) \\ &= \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k cos(wk) \quad -\pi \le w \le \pi. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

A transformada de Fourier de γ_k, $f(w)$, é chamada densidade espectral de $\{Y_t\}$. Entre as propriedades dessa função devemos destacar que

i. $f(w)$ é contínua e assume valores reais não negativos: $|f(w)| = f(w)$.

ii. $f(w)$ é periódica com período 2π: $f(w) = f(w + 2\pi)$.

iii. $f(w)$ é função par: $f(w) = f(-w)$.

iv. A função γ_k pode ser obtida de $f(w)$ por

$$\gamma_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(w) e^{iwk} dw. \tag{2.2.4}$$

Em geral $f(\cdot)$ é representada somente no intervalo $(0, \pi)$ pois, de acordo com (ii) e (iii), conhecendo-se a função nesse intervalo, conhecemos seu valor em toda a reta. A relação expressa em (iv) é a transformada inversa de Fourier e permite recuperar γ_k a partir de $f(\cdot)$. A seqüência de autocovariâncias $\{\gamma_k\}$ e a função $f(\cdot)$ formam um par de transformadas de Fourier. As análises no domínio do tempo e da freqüência são portanto equivalentes e a razão da escolha entre uma abordagem e outra está na facilidade de apresentação e interpretação dos resultados, de acordo com o objetivo da análise.

Note que, para a representação espectral de γ_k dada em (2.2.3) e (2.2.4) , estabelecemos a restrição de que $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$. De forma geral, para uma dada função de autocovariância $\{\gamma_k\}$, podemos sempre ter a sua representação espectral em termos da seguinte integral de Lebesgue-Stieltjes.

$$\gamma_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwk} dF(w) \tag{2.2.5}$$

em que $F(\cdot)$ é chamada função distribuição espectral.

A densidade espectral de um processo ARMA pode ser calculada usando-se o resultado apresentado no Teorema 2.2.1

Teorema 2.2.1 *[Brockwell e Davis (1991)] Seja $\{X_t\}$ um processo ARMA(p,q) (não necessariamente causal ou invertível) satisfazendo*

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t, \quad \{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2), \tag{2.2.6}$$

em que $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$ e $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$ não tem raízes no círculo unitário. Então $\{X_t\}$ tem densidade espectral

$$f(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-iw})|^2}{|\Phi(e^{-iw})|^2} \quad -\pi \le w \le \pi. \tag{2.2.7}$$

Como exemplo da função densidade espectral de um processo ARMA vamos considerar $\{Y_t\}$ um AR(1)

$$(1 - \phi B)X_t = Z_t.$$

e de (2.2.7) temos que

$$f(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \phi e^{-iw}|^2} \tag{2.2.8}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 + \phi^2 - 2\phi cos(w))}. \tag{2.2.9}$$

(2.2.10)

Quando a série é um ruído branco, a sua densidade espectral é constante.

A Figura 6 mostra exemplos de espectros de processos AR(1) e MA(1). O comportamento da densidade espectral de um processo AR(1) dependerá do sinal do parâmetro ϕ. Quando esse valor é positivo, a série é positivamente correlacionada e o espectro será dominado por baixas freqüências, enquanto as altas freqüências dominam quando ϕ é negativo. O comportamento de $f(\cdot)$ de um MA(1) também depende do sinal de θ mas, nesse caso, será dominado pelas altas freqüências quando o parâmetro é positivo e pelas baixas quando o valor é negativo.

2.2.1 Espectro Amostral

Dada uma série temporal, é de interesse obter uma estimativa de sua densidade espectral para que um modelo possa ser ajustado. Para isso, define-se o periodograma de um série

Definição 2.2.2 *O valor do periodograma de $\{X_t\}$ na freqüência $w_j = 2\pi j/n$, $I(w_j)$, é definido em termos da transformada de Fourier discreta por*

$$I(w_j) = |a_j|^2 = n^{-1} \left| \sum_{t=1}^{n} X_t e^{-itw_j} \right|^2.$$

O periodograma é um função da transformada de Fourier discreta de $\{X_t\}$ e também pode ser escrito como uma função da autocorrelação do processo, como

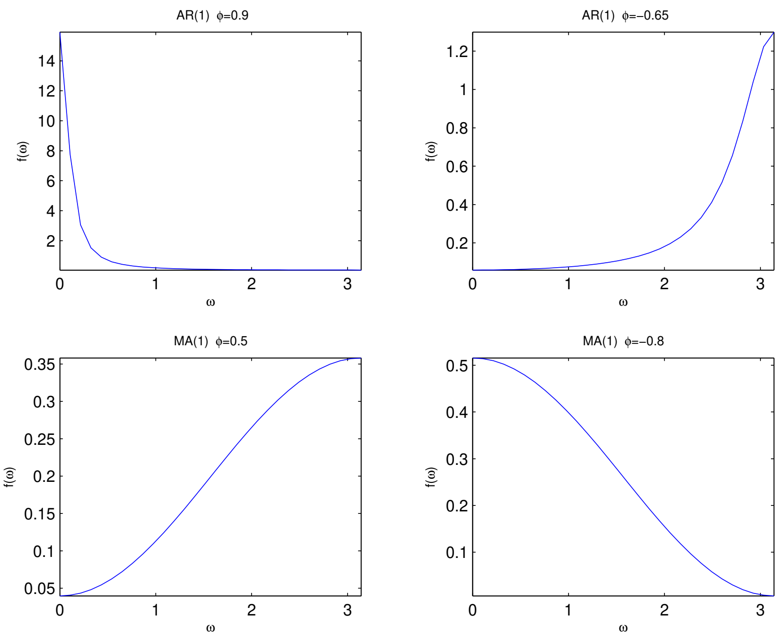

Figura 6: Exemplos de espectros de modelos AR(1)e MA(1)

mostra a Proposição 2.2.3.

Proposição 2.2.3 *[Brockwell e Davis (1991)] Seja $w_j \neq 0$ a j-ésima freqüência de Fourier. Então*

$$I(w_j) = \begin{cases} n|\bar{X}|^2 & \textit{se } w_j = 0, \\ \sum_{|k|<n} \hat{\gamma}(k)e^{-ikw_j} & \textit{c.c.}. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

em que $\hat{\gamma}(k) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n-k}(x_{t+k} - \bar{x})(x_t - \bar{x})$ é a autocorrelação amostral de $\{X_t\}$.

Para discutirmos as propriedades assintóticas do periodograma, consideramos $\{X_t\}$ uma série temporal de média μ e função de autocorrelação $\gamma(k)$, tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$. Desta forma, a densidade espectral de $\{X_t\}$ é dada por

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)e^{-ikw}, \qquad w \in [-\pi, \pi] \tag{2.2.12}$$

e o periodograma é definido nas freqüências de Fourier por

$$I_n(w_j) = \begin{cases} n|\bar{X}|^2 & se\ w_j = 0, \\ \sum_{|k|<n} \hat{\gamma}(k) e^{-ikw_j} & c.c.. \end{cases} \tag{2.2.13}$$

Comparando-se (2.2.12) e (2.2.13) vemos que um estimador natural da função densidade espectral para $w_j \neq 0$ é

$$\hat{f}(w_j) = (2\pi)^{-1} I_n(w_j).$$

Definimos agora uma extensão do periodograma que será usada para determinar suas propriedades assintóticas para qualquer freqüência $w \in [-\pi, \pi]$.

Definição 2.2.4 *Para todo $w \in [-\pi, \pi]$ o periodograma estendido é definido por*

$$I_n(w) = \begin{cases} I_n(w_k) & se\ w_k - \pi/n < w < w_k + \pi/2 \quad e \quad 0 \leq w \leq \pi \\ I_n(-w) & c.c.. \end{cases}$$

A proposição a seguir mostra a esperança assintótica do periodograma.

Proposição 2.2.5 *[Brockwell e Davis (1991)] Se $\{X_t\}$ é um processo estacionário com média μ e função de autocorrelação tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$, então*

(i) $E(I_n(0)) - n\mu^2 \to 2\pi f(0)$

(ii) $E(I_n(w)) \to 2\pi f(w)$ se $w \neq 0$

Se $\mu = 0$, então $E(I_n(w))$ converge uniformemente para $2\pi f(w)$ em $[-\pi, \pi]$.

Teorema 2.2.6 *[Brockwell e Davis (1991)] Seja $\{X_t\}$ um processo linear*

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \qquad \{Z_t\} \sim IID(0, \sigma^2),$$

em que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| < \infty$.

Seja $I_n(w)$ o periodograma de $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ e f(w) a densidade espectral de $\{X_t\}$.

(i)Se $f(w) > 0$ para todo $w \in [-\pi, \pi]$ e se $0 < w_1 < \ldots < w_m < \pi$, então o vetor aleatório $(I_n(w_1), \ldots, I_n(w_m))$ converge em distribuição para um vetor composto por

variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial cuja i-ésima componente tem média igual a $2\pi f(w_i), i = 1, 2, \ldots, m$.

(ii)Se $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k||j|^{1/2} < \infty$, $EZ_t^4 = \eta\sigma^4 < \infty$, $w_j = 2\pi j/n \geq 0$ *e* $w_k = 2\pi k/n \geq 0$, *então*

$$Cov(I_n(w_j), I_n(w_k)) = \begin{cases} 2(2\pi)^2 f^2(w_j) + O(n^{-1/2}) & se\ w_j = w_k = 0\ ou\ \pi, \\ (2\pi)^2 f^2(w_j) + O(n^{-1/2}) & se\ 0 < w_j = w_k < 0\ , \\ O(n^{-1}) & se\ w_j \neq w_k, \end{cases}$$

em que existem constantes positivas c_1 *e* c_2 *tais que os termos* $O(n^{-1/2})$ *e* $O(n^{-1})$ *podem ser uniformemente limitados em j e k respectivamente por* $c_1 n^{-1/2}$ *e* $c_2 n^{-1}$.

O Teorema mostra que $\hat{f}(w) = I_n(w)/2\pi$, apesar do vício do estimador da função espectral $f(w)$ ser assintoticamente igual a zero, esse estimador não é consistente, uma vez que sua variância não tende a zero quando o tamanho da amostra tende a infinito. Sabendo que, para valores grandes de n, os valores de $I_n(w_j)$ e $I_n(w_m)$, $j \neq m$, são aproximadamente não correlacionados com variâncias variando pouco dentro de um intervalo pequeno de freqüência, pode-se considerar um estimador de $f(w)$ que utilize a média dos valores do periodograma dentro de uma vizinhança de w. Essa idéia é desenvolvida na próxima seção.

2.2.2 Periodograma Suavizado

Como visto na seção anterior, a transformada de Fourier $\hat{f}(\cdot)$ da função de autocorrelação amostral é um estimador cujo vício é assintoticamente igual a zero mas não consistente de $f(\cdot)$. O periodograma suavizado é uma versão janelada da transformada de Fourier da autocorrelação amostral por uma função peso $\mathcal{W}_n$

$$f_{\mathcal{W}}(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}_n(w - \lambda)\hat{f}(\lambda)d\lambda$$

em que $\mathcal{W}_n$ é uma função contínua chamada janela espectral que satisfaz as condições:

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}_n(\lambda)d\lambda = 1$

(ii) $\mathcal{W}_n(\lambda) = \mathcal{W}_n(-\lambda)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}_n^2(\lambda)d\lambda = 0$.

Sob essas condições,

$$E(f_{\mathcal{W}}(w)) = f(w)$$

e

$$Var(f_{\mathcal{W}}(w)) \approx (1+\delta)\frac{2\pi}{n}(f^2(w)) \int_{-\pi}^{-\pi} \mathcal{W}_n^2(\lambda) d\lambda,$$

em que $\delta = 1$ para $\omega = 0, \pm\pi$ e $\delta = 0$ caso contrário.

Pela condição (iii) $Var(f_W(w)) \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, $f_W(w)$ é um estimador consistente de $f(w)$. Além disso, o estimador é assintoticamente não correlacionado para diferentes freqüências.

Como visto no capítulo anterior, a transformada de Fourier Janelada também pode ser feita no domínio do tempo e, usando versão discretizada da igualdade em (1.1.18) com $t = 0$, obtemos a transformada de Fourier Janelada da ACF amostral.

$$f_S(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} W_n(k) \gamma_k e^{-iwk} \tag{2.2.14}$$

em que $W_n(k)$ é uma seqüência absolutamente somável obtida de uma função $W(\cdot)$ pela relação

$$W_n(k) = W(k/M).$$

$W(x)$ deve ser uma função contínua e limitada satisfazendo:

(i) $|W(x)| \leq 1$

(ii) $W(0) = 0$

(iii) $W(x) = W(-x)$

(iv) $W(x) = 0 \quad para \quad |x| > 1.$

M é chamado valor de truncamento e deve depender do tamanho da amostra, satisfazendo $M/n \to 0$ quando $n, M \to \infty$. Se assumirmos $M = n^\beta$ onde $0 < \beta < 1$, então a condição é satisfeita. $W_n(x)$ é chamada janela de defasagem. Assintoticamente, pode-se mostrar que, quando $n \to \infty$

$$Var(f_S(w)) \approx (1+\delta)\frac{2\pi}{n}(f^2(w)) \int_{-\pi}^{-\pi} W^2(\lambda) d\lambda,$$

e

$$lim \left(\frac{n}{M}\right) Cov(f_S(w_1), f_S(w_2)) \approx 0, \qquad w_1 \neq w_2.$$

A função $\mathcal{W}_n$ e a seqüência $W_n(k)$ estão relacionadas uma vez que γ_k é a transformada inversa de Fourier de $f(w)$. Essa relação é descrita por

$$\mathcal{W}_n(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} W_n(k) e^{-iwk}$$

$$W_n(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}_n(w) e^{iwk} dw \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm M.$$

Ou seja, $\mathcal{W}_n(w)$ e $W_n(k)$ formam um par de transformadas de Fourier e as duas formas de suavização são equivalentes, como visto no estudo de T.F.J..

Como exemplos de janelas usualmente empregadas, podemos citar a janela retangular, a janela de Bartlett e a de Parzen.

A janela retangular, ou truncada, é definida da seguinte forma

$$W_n^R(k) = \begin{cases} 1 & |k| \leq M \\ 0 & |k| > M \end{cases}$$

A janela espectral correspondente é

$$\mathcal{W}_n^R(w) = \frac{1}{2\pi} \frac{sen(w(M+1/2))}{sen(w/2)}.$$

$W^B(x)$ e $\mathcal{W}_n^B(x)$ estão representadas na Figura 7.

Note que $\mathcal{W}_n^R(x)$ assume valores negativos, o que pode causar algum problema pois isso permite que $\widehat{f_W(w)}$ assuma valores negativos, o que não é desejável quando estamos estimando uma função não negativa.

A janela de Bartlett, W_n^B, é dada por

$$W_n^B(k) = \begin{cases} 1 - |k| & |k| \leq M \\ 0 & |k| > M, \end{cases}$$

e calculando-se a transformada de Fourier, encontramos

$$\mathcal{W}_n^B(w) = \frac{1}{2\pi M} \left\{ \frac{sen(wM/2))}{sen(w/2)} \right\}^2.$$

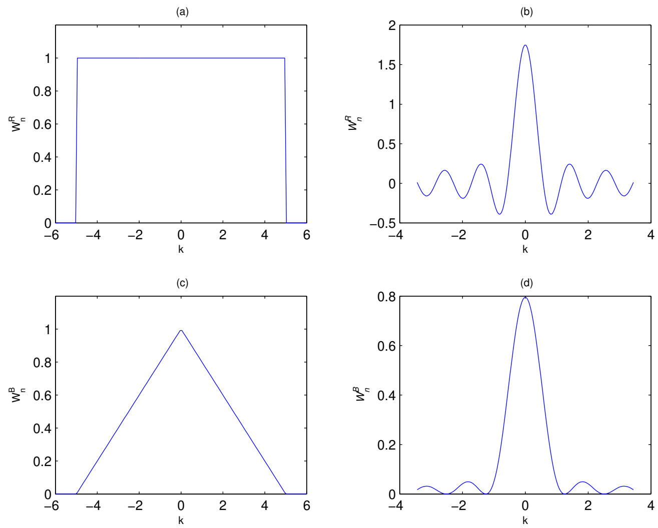

Figura 7: (a)W_n^R (b)$\mathcal{W}^R$ (c)W_n^B (d)$\mathcal{W}^B$

A janela de Parzen, que definiremos agora, é de maior interesse nesse trabalho e voltaremos a falar dela no Capítulo 4. Não apresentar estimativas negativas é uma das principais características da janela de Parzen.

$$W_n^P(k) = \begin{cases} 1 - 6(k/m)^2 + 6(|k|/M)^3 & |k| \leq M/2 \\ 2(1 - |k|/M)^3 & M/2 \leq |k| \leq M \\ 0 & |k| > M \end{cases}$$

Calculando-se a transformada de Fourier, encontramos

$$\mathcal{W}_n^P(w) = \frac{3}{8\pi M^3} \left\{ \frac{sen(wM/4))}{\frac{1}{2}sen(w/2)} \right\}^4 \{1 - 2/3[sen^2(w/2)]\}$$

$W^P(x)$ e $\mathcal{W}_n^P(x)$ estão representadas nas Figuras 8 e 9.

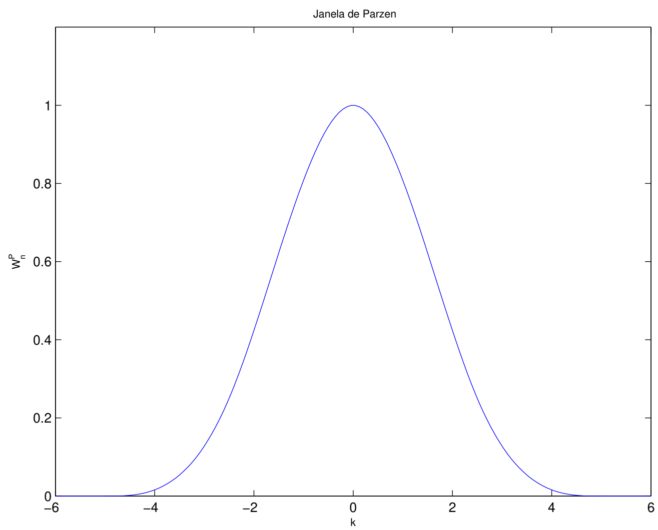

Figura 8: Janela espectral de Parzen

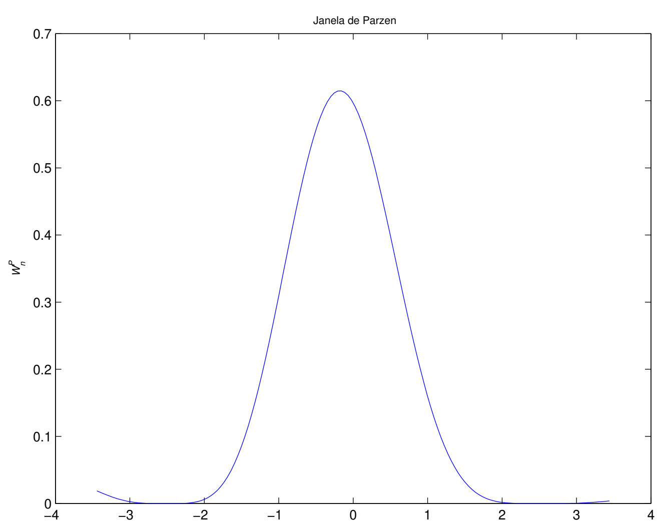

Figura 9: Janela de defasagem de Parzen

2.3 Processos ARFIMA

Os modelos ARMA, estudados até aqui, descrevem séries temporais caracterizadas pela independência ou quase independêndia entre observações muito distantes no tempo. Os modelos ARIMA por sua vez descrevem séries em que as correlações têm um decaimento bastante lento. O que se observa em muitos casos, no entanto, é que a função de correlação γ_k, embora diminua com o aumento de k, não apresenta um decaimento tão rápido quanto o exponencial mas não tão lento quanto aquele que caracteriza os modelos ARIMA. Para modelar esse tipo de comportamento, chamado de longa dependência, Hosking propôs os modelos ARFIMA(p,d,q) em 1981. Esses modelos são uma generalização dos modelos ARIMA(p,d,q) em que se assume que d pode assumir qualquer valor real.

O processo estocástico ARFIMA(0,d,0) com média zero é definido por

$$(1-B)^d X_t = Z_t$$

onde B é o operador de diferença finita $BX_t = X_{t-1}$, d é um número real e $\{Z_t\}$ é ruído branco.

O operador diferença fracionária é definido por

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} B^j, \ d \in \mathbb{R}. \tag{2.3.15}$$

Portanto, o processo ARFIMA(0,d,0) pode ser definido por

$$(1-B)^d X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} B^j X_t = Z_t.$$

O Teorema 2.3.1 descreve as principais características desse modelo.

Teorema 2.3.1 *[Hosking (1981)] Seja $\{Y_t\}$ um processo ARFIMA(0,d,0).*

(i)Quando $d < 1/2$, $\{Y_t\}$ é um processo estacionário e representação média móvel infinita dada por

$$X_t = \Psi(B) Z_t = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k Z_{t-k},$$

em que

$$\psi_k = \frac{d(1+d)\dots(k-1+d)}{k!} = \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!}.$$

Quando $k \to \infty$, $\psi_k/k^{(d-1)} \sim 1/(d-1)!$.

(ii)Quando $d > -1/2$, $\{Y_t\}$ *é invertível e tem representação autorregressiva infinita*

$$\Pi(B)X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k X_{t-k} = Z_t,$$

em que

$$\pi_k = \frac{-d(1-d)\dots(k-1-d)}{k!} = \frac{(k-d-1)!}{k!(-d-1)!}.$$

Quando $k \to \infty$, $\pi_k/k^{(-d-1)} \sim 1/(-d-1)!$.

Em (iii)-(v), assumimos que $-1/2 < d < 1/2$.

(iii)A densidade espectral de $\{Y_t\}$ *é dada por*

$$f(w) = \left(2sen\left(\frac{w}{2}\right)\right)^{-2d} \mathbb{I}_{(0,\pi]}(w)$$

e $f(w)/w^{-2d} \sim 1$ *quando* $w \to 0$.

(iv)A função de autocovariância de $\{Y_t\}$ *é dada por*

$$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = \frac{(-1)^k(-2d)!}{(k-d)!(-k-d)!}.$$

Quando $k \to \infty$,

$$\gamma_k/|k|^{2d-1} \sim 1. \quad (2.3.16)$$

e a função de autocorrelação de $\{Y_t\}$ *é*

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(-d)!(k+d-1)!}{(d-1)!(k-d)!} \quad , \; k = 0, \pm 1, \dots.$$

Em particular $\gamma_0 = (-2d)!/\{(-d)!\}^2$ *e* $\rho_1 = d/(1-d)$. *Quando* $k \to \infty$

$$\frac{\rho_k}{k^{2d-1}} \sim \frac{(-d)!}{(d-1)!}.$$

(v)A função de autocorrelação parcial de $\{Y_t\}$ *é*

$$\phi_{kk} = \frac{d}{k-d} \quad , \; k = 1, 2, \ldots .$$

De acordo com os resultados do teorema, o decaimento da autocorrelação é hiperbólico, mais lento do que o exponencial que caracteriza os processos ARMA. Essa forma de decaimento também caracteriza a autocorrelação parcial e os coeficientes das representações AR e MA infinitas, quando essas existem.

O processo é estacionário e invertível quando $-1/2 < d < 1/2$. McLeod e Hipel (1978) definem um processo estacionário, cuja função de autocorrelação é tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho_k|$ diverge, como processos de memória longa. Em oposição, quando essa série é convergente, o processo é dito de memória curta. Para processos ARFIMA(0,d,0) , quando $0 < d < 1/2$, o processo tem memória longa e, quando $-1/2 < d < 0$, tem memória intermediária.

A densidade espectral do processo é dominada por baixas freqüências quando $0 < d < 1/2$ e nesse caso $f(w) \to \infty$ quando $w \to 0$. Quando $-1/2 < d < 0$, $f(w)$ é dominada pelas altas freqüências e é igual a zero em $w = 0$.

Exemplos de espectros desse processo estão na Figura 10.

O modelo ARFIMA(0,d,0) pode ser estendido para $\{X_t\}$ dado na forma

$$\Phi(B)(1-B)^d X_t = \Theta(B) Z_t$$

sendo $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$$

e dizemos que $\{X_t\}$ é um processo ARFIMA(p,d,q) com média zero. Nesse processo, o efeito de d em observações distantes no tempo decai hiperbolicamente, enquanto os efeitos de Φ e Θ decaem exponencialmente. Assim, o valor de d modela a longa dependência da série enquanto a curta dependência é modelada por Φ e Θ. O Teorema 2.3.2 mostra alguns resultados sobre esse processo.

Teorema 2.3.2 *[Hosking (1981)] Seja* $\{X_t\}$ *um processo ARFIMA(p,d,q). Então*

(i)$\{X_t\}$ *é estacionário, se* $d < 1/2$*, e todas as raízes de* $\Phi(z) = 0$ *estão fora do círculo unitário.*

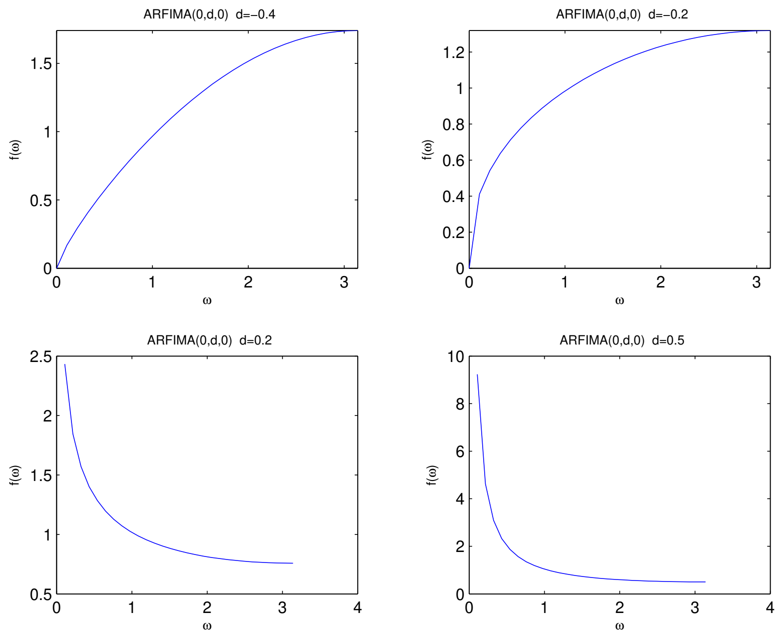

Figura 10: Exemplos de espectros de modelos ARFIMA(0,d,0)

(ii)$\{X_t\}$ *é invertível, se* $d > -1/2$, *e todas as raízes de* $\Theta(z) = 0$ *estão fora do círculo unitário.*

Se $\{X_t\}$ *é estacionário e invertível, com densidade espectral f(w) e função de autocorrelação* ρ_k, *então*

(iii) $\lim_{w\to 0} w^{2d} f(w)$ *existe, é finito e positivo;*

(iv) $\lim_{w\to\infty} k^{1-2d}\rho_k$ *existe, é finito e positivo.*

Definindo-se

$$U_t = \Theta(B)(\Phi(B))^{-1}Z_t,$$

temos

$$(1 - B)^d X_t = U_t$$

e o processo $\{U_t\}$ obtido dessa forma é um ARMA(p,q). Denotaremos a densidade espectral de $\{U_t\}$ por $f_U(\cdot)$.

A relação entre as densidades espectrais de $\{X_t\}$ e $\{U_t\}$ é dada por

$$f_X(\lambda) = (\sigma^2/2\pi)\{4sen^2(\lambda/2)\}^{-d} f_U(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]. \qquad (2.3.17)$$

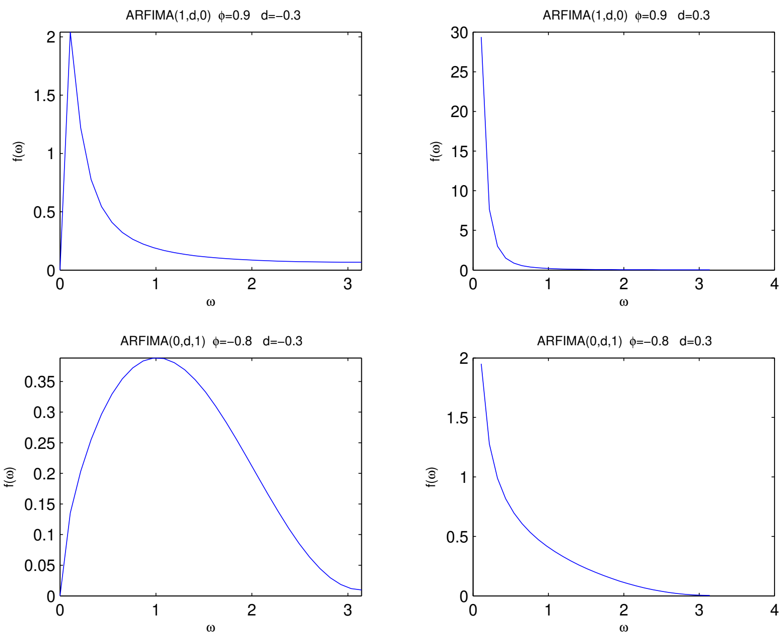

Figura 11: Exemplos de espectros de modelos ARFIMA(1,d,0)e ARFIMA(0,d,1)

A Figura 11 mostra exemplos de espectros de processos ARFIMA(p,d,q).

A respeito da representação infinita MA do modelo, temos o seguinte resultado

Teorema 2.3.3 *[Hassler (1991)] Os coeficientes da representação infinita MA do modelo ARFIMA(p,d,q), $\{X_t\}$, dado por*

$$X_t = (1-B)^{-d}\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}Z_t = \Psi(B)Z_t$$

tem valor assintótico

$$\frac{\Psi_k}{k^{d-1}} \sim \left(\frac{b}{(d-1)!}\right), \quad k \to \infty.$$

De acordo com o Teorema 2.3.3, para $d < 0$, os coeficientes do processo ARFIMA satisfazem as condições do Teorema 2.2.6, isto é, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| < \infty$ e os resultados obtidos para a distribuição do periodograma são válidos.

2.3.1 Transformação do Processo ARFIMA em ARMA

Seja $\{X_t\}$ um processo ARFIMA(p,d,q). Tomando-se $(1-B)^d X_t = U_t$ temos que $\{U_t\}$ é um ARMA(p,q) e, desta forma, os parâmetros em $\phi(B)$ e $\theta(B)$ podem ser estimados pelos métodos usuais para esse modelo. Supondo-se que o valor de d seja conhecido, a definição do operador $(1-B)^d$,

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} B^j, \; d \in \mathbb{R}, \tag{2.3.18}$$

pode ser usada para a retirada do efeito de longa dependência de um processo ARFIMA e a posterior estimação dos parâmetros do modelo pelos métodos usuais para modelos ARMA. Essa idéia é a base do algoritmo proposto por Hosking(1981) para a estimação dos parâmetros de um modelo ARFIMA(p,d,q).

Seja $\Phi(B)(1-B)^d X_t = \Theta(B)Z_t$, $S_t = (1-B)^d X_t$ e $Y_t = (\Theta(B))^{-1}\Phi(B)X_t$. Assim, $\{S_t\}$ é um ARMA(p,q) e $\{Y_t\}$ é um ARFIMA(0,d,0). O algoritmo de Hosking consiste em

(1) Estimar d no modelo ARFIMA $(1-B)^d X_t = Z_t$.

(2) Definir $S_t = (1-B)^d X_t$.

(3) Identificar p e q e estimar ϕ e θ em $\Phi(B)S_t = \Theta(B)Z_t$.

(4) Definir $Y_t = (\Theta(B))^{-1}\Phi(B)X_t$.

(5) Estimar d no processo ARFIMA(0,d,0) $(1-B)^d Y_t = Z_t$.

(6) Confirmar a convergência de d, ϕ e θ. Se não houver convergência, voltar ao passo 2.

Para usar (2.3.18), devemos estabelecer um valor m máximo para j na série infinita descrita. Assim, podemos definir

$$U_t = \sum_{j=0}^{m} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} B^j X_t \tag{2.3.19}$$

e definimos o operador ∇_m^d como

$$\nabla_m^d \, X_t = \sum_{j=0}^{m} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} B^j X_t = U_t, \tag{2.3.20}$$

em que $\{U_t\}$ se aproxima de um processo ARMA quando $m \to \infty$. A determinação de m é de grande importância pois, se m for muito pequeno, a série obtida não terá as características de um ARMA(p,q). Por outro lado, se usássemos um valor de m muito grande, teríamos uma grande perda de observações da série e, conseqüentemente, o aumento da variância dos estimadores do modelo ARMA(p,q). Além disso, o custo computacional seria maior e os coeficientes dos últimos termos da série em (2.3.19) seriam muito pequenos e fortemente afetados por erros de aproximação. Uma possível abordagem para o problema é a comparação da informação amostral para diferentes valores de m. Essa idéia será desenvolvida no Capítulo 3. Como uma segunda abordagem do problema, será apresentado no Capítulo 4 um estudo de simulação para tentar identificar quais valores de m podem ser considerados mais razoáveis e a relação de m com os parâmetros da série.

3 Estimadores do Parâmetro de Longa Dependência

3.1 Estimador GPH

O estimador descrito nessa seção foi apresentado por Geweke e Porter-Hudak (1986). Considere o modelo $(1-B)^d X_t = Z_t$, um processo ARFIMA(0,d,0). Aplicando o logaritmo aos dois lados da igualdade em (2.3.17), temos

$$\ln(f(w)) = \ln\{(\sigma^2/2\pi)\} - d\ln\{4sen^2(w/2)\} + \ln\{f_u(w)\}. \qquad (3.1.1)$$

Suponha uma amostra de tamanho n. Sejam $w_j = 2\pi j/n$, $j \in \mathbb{N}$, as freqüências de Fourier e $I_n(w_j)$ o periodograma de $\{X_t\}$. Somando-se $\ln I_n(w_j)$ e $\ln f_U(0))$ aos dois lados da igualdade em (3.1.1) temos

$$\begin{aligned} \ln I_n(w_j) &= \ln\{\sigma^2 f_U(0)/2\pi\} - d\ln\{4sen^2(w_j/2)\} \\ &\quad + \ln\{f_U(w_j)/f_U(0)\} + \ln\{I_n(w_j)/f(w_j)\}. \end{aligned}$$

Se restringirmos j a valores menores do que $g(n)$, em que $g(\cdot)$ é uma função satisfazendo $g(n) \to \infty$, $g(n)/n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos que $f_u(w_j)/f_u(0)$ é desprezível se comparado com os outros termos da igualdade e obtemos

$$\ln I_n(w_j) \approx \ln\{\sigma^2 f_u(0)/2\pi\} - d\ln\{4sen^2(w_j/2)\} + \ln\{I_n(w_j)/f(w_j)\} \qquad (3.1.2)$$

A semelhança entre a igualdade em (3.1.2) e uma regressão linear simples é a motivação do estimador GPH, d_p. Usa-se b, o coeficiente da regressão linear de

$\ln\{I_n(w_j)\}$ em $ln\{4sen^2(w_j/2)\}$, para estimar d. Se fizermos

$$\begin{aligned} y_j &= I_n(w_j) \\ x_j &= \ln(2sen(w_j/2)^2 \\ e_{j,T} &= \ln(I_n(w_j)/f(w_j)) + c \\ b = -d, & \quad a = \ln f_u(0) - c \\ e & \quad c = E(\ln(w_j/f(w_j)) \end{aligned}$$

então temos a forma

$$y_j = a + bx_j + e_j, \quad j = 1, \ldots, g(T).$$

Definiremos a seguir a função de distribuição de probabilidade Gumble para que possamos determinar a distribuição assintótica do estimador.

Definição 3.1.1 *X é dita variável aleatórica com distribuição Gumble se sua função distribuição acumulada é dada por*

$$F(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{(x-\xi)}{\beta}\right]\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Os dois primeiros momentos dessa distribuição são dados respectivamente por

$$\mu = \xi + \gamma\beta, \ \sigma^2 = \beta^2\pi^2/6 \tag{3.1.3}$$

em que $\gamma \approx 0,577216$ (constante de Euler).

Geweke e Porter-Hudak (1986) demostra que, quando $d < 0$, $I_n(w_j)$ tem distribuição assintótica exponencial com média $f(w_j)$. Quando $n \to \infty$, a seqüência $\ln(I_n(w_j)/f(w_j))$, em que $w_j = 2\pi j/n, j = 1, 2, \ldots [n/2]$, é independente e tem distribuição Gumble com média 0,577216 (constante de Euler) e variância $\pi^2/6$. Logo, a variância do estimador de mínimos quadrados

$d_p = -\frac{\sum_{j=1}^{g(n)}(x_j-\bar{x})y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)}(x_j-\bar{x})^2}$

tem as propriedades

$E(d_p) = d$ e $var(d_p) = \frac{\pi^2}{6\sum_{j=1}^{g(n)}(x_j-\bar{x})^2}$.

O Teorema 3.1.2 resume a estimação do parâmetro d por d_p.

Teorema 3.1.2 *[Geweke e Porter-Hudak (1986)] Seja $\{X_t\}$ um ARFIMA(p,d,q) com $d < 0$ e $I_n(w_j)$ o periodograma de $\{X_t\}$ nas freqüências harmônicas $\lambda_{j,n} = \pi j/n$ para uma amostra de tamanho n. Seja $b_{1,n}$ o estimador de mínimos quadrados ordinários de β_1 na equação de regressão*

$$\ln I_n(\lambda_{j,n}) = \beta_0 + \beta_1 \ln\{4sen^2(\lambda_{j,n}/2)\} + u_{j,n}, j = 0, 1, 2, ..., n.$$

Então, existe uma função g(n) (que satisfaz $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} g(n)/n = 0$) tal que, se T=g(n), então plim b_1=-d. Se, além disso, $\lim_{n\to\infty}(\ln n)^2/g(n) = 0$ então $(b_1 + d)/\{\widehat{var}(b_1)\}^{1/2} \xrightarrow{D} N(0, 1)$ onde $\widehat{var}(b_1)$ é o estimador de mínimos quadrados usual de $var(b_1)$.

Se $g(n) = cn^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, então $g(n)$ satisfaz as condições do Teorema e, para usarmos este estimador, devemos estabelecer um valor de α.

Ainda que o resultado acima seja válido somente quando $d < 0$, estudos de simulação conduzidos por Geweke e Porter-Hudak mostram que os resultados obtidos quando $d > 0$ também são satisfatórios.

3.2 Estimador de d Usando o Periodograma Suavizado

O estimador proposto por Reisen (1994), d_{sp}, é também baseado em uma regressão. Nesse caso, entretanto, o periodograma suavizado é usado como estimador do espectro. Como visto, esse é um estimador consistente. A janela de Parzen foi escolhida para o estudo de Reisen, por essa não produzir estimativas negativas do espectro. O método é análogo ao do estimador d_p, substituindo-se os valores do periodograma pelo da sua versão suavizada:

$$\ln f_S(w_j) = \ln\{\sigma^2 f_U(0)/2\pi\} - d \ln\{4sen^2(w_j/2)\} + \ln\{f_S(w_j)/f(w_j)\}$$

A distribuição assintótica da seqüência $\ln(f_S(w_j)/f_S(w_j)$ é determinada no Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.1 *[Anderson (1971)] Seja $X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k Z_{t-k}$, um processo linear, em que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| < \infty$, $\{Z_t\}$ é ruído branco, com $E(Z_t) = 0$, $E(Z_t^2) = \sigma_Z^2$ e*

$E(Z_t^4) < \infty$. Se $f_S(w)$ é um estimador da densidade espectral de $\{X_t\}$ da forma

$$f_S(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} k(s/M)\gamma_k e^{-iwk},$$

em que $f_S(w) > 0$ então $\sqrt{\frac{n}{M}} \ln f_S(w) - \ln f(w)$, em que n é o tamanho amostral, tem distribuição assintótica Normal com média zero e variância dada por

$\sigma^2 = \int k^2(u)du$ se $w \neq 0, \pm\pi$ onde $-1 < u < 1$.

Em razão da condição $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| < \infty$, os resultados são válidos somente para $d \in (-0,5;0)$.

No caso particular da janela de Parzen, definida no Capítulo 3, $\int k^2(u)du \approx 0,5393$. Logo,

$$Var(\ln f_S(w) - \ln f(w)) \sim \begin{cases} 0,539285(M/n) & se\ w \neq 0, \pi \\ 1,07856(M/n) & se\ w = 0, \pi \end{cases},$$

em que n é o tamanho amostral. Portanto, o estimador obtido pelo método de regressão utilizando o periodograma suavizado pela janela de Parzen é

$$d_{sp} = -\hat{b},\ em\ que\ \hat{b} = \frac{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x}) y_j}{\sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}$$

com

$$Var(d_{sp}) \sim 0.539285 \frac{M}{n \sum_{j=1}^{g(n)} (x_j - \bar{x})^2}. \tag{3.2.4}$$

Devemos lembrar que, para usar o estimador d_{sp}, além do valor α usado na definição do estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak, devemos definir também um valor de β para a determinação do ponto de truncamento da janela espectral usada na suvização do periodograma. Em Reisen (1994), é apresentado um estudo cuidadoso a respeito da escolha desse parâmetro no caso estacionário. O caso não-estacionário é estudado em Olbermann (1998).

3.3 Estimador por Ondaletas de d

Seja $\{X_t\}$ um ARFIMA(0,d,0) observado nos tempos $t = 0, 1, \ldots, 2^p - 1$, sendo $p \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, sejam $w_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{Z}$ os coeficientes da transformada de Ondaletas de $\{X_t\}$, definidos em (1.2.21). O Teorema 3.3.1 apresenta a distribuição assintótica dos coeficientes $w_{j,k}$ sob certas condições.

Teorema 3.3.1 *[Jensen (1999)] Quando $j \to 0$, os coeficientes $w_{j,k}$, associados ao processo ARFIMA(0,d,0) com média zero e $\mid d \mid < 1/2$, têm distribuição $N(0, \sigma^2 2^{-2jd})$, onde σ^2 é uma constante finita.*

De acordo com o Teorema 3.3.1, os coeficientes $w_{j,k}$ tem distribuição cuja variância é função do parâmetro j, mas independente de k. Definimos $R(j)$ como a variância dos coeficientes de escala j, isto é

$$R(j) = \sigma^2 2^{-2dj}.$$

Temos que

$$\ln R(j) = \ln \sigma^2 - d \ln 2^{2j}. \tag{3.3.5}$$

Assim, o parâmetro d pode ser estimado por mínimos quadrados da equação (3.3.5). Note que essa forma de estimação de d é uma regressão linear em que cada observação está relacionada a uma resolução de $\{X_t\}$.

Para usarmos esse estimador, entretanto, precisamos de um estimador para a variância populacional de $w_{j,k}$. Na escala j, definimos a variância amostral de $w_{j,k}$ como

$$\tilde{R}(j) = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{2^j - 1} w_{j,k}^2.$$

Algumas propriedades assintóticas do estimador d_o foram apresentadas em Jensen (1999) a partir da expansão de Taylor de ln $\tilde{\mathrm{R}}$(a) em torno de ln R(a). O autor prova que $\tilde{\mathrm{R}}$(j) é um estimador cujo vício tende a zero quando o tamanho da amostra tende a infinito e é consistente. Seja

$$y_i = \ln 2^{-2j} - \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \ln 2^{-2j}.$$

O estimador d_o é

$$d_o = \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j^2\right]^{-1} \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j \ln \tilde{R}(j)\right].$$

Expandindo-se d_o em uma série de Taylor em torno de R(j), temos

$$\begin{aligned} d_o &= \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j^2\right]^{-1} \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j \ln R(j)\right] + \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j^2\right]^{-1} \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j \frac{\tilde{R}(j) - R(j)}{R(j)}\right] \\ &+ O_p\left[\frac{var\tilde{R}(j)}{R(j)^2}\right]. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Logo, substituindo o primeiro R(j) por $\sigma^2 2^{-2dj}$, o vício de d_o é dado por

$$d_o - d = \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j^2\right]^{-1} \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j \frac{\tilde{R}(j) - R(j)}{R(j)}\right] + O_p\left[\frac{var\tilde{R}(j)}{R(j)^2}\right]. \tag{3.3.7}$$

Como o vício do estimador de R(j), R̃(j), tende a zero quando $j \to \infty$ e $\sum_j y_j^2$ não assume valor zero , d_o é um estimador consistente de d.

A variância de d_o pode ser encontrada calculando-se a variância dos dois primeiros termos de (3.3.6). Sabendo que $w_{j,k}$ é assintoticamente normal, com média zero e variância R(j), temos

$$\frac{var[\tilde{R}(j)]}{R(j)^2} = \frac{2(\sigma^2 2^{-j(2d+1/2)})^2}{(\sigma^2 2^{-2jd})^2} \approx 2^{1-j}, \tag{3.3.8}$$

quando $j \to \infty$.

Procedendo as substituições de forma parecida, podemos chegar ao seguinte resultado

$$var\left(\left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j^2\right] \left[\sum_{j=0}^{p-1} y_j \frac{\tilde{R}(j) - R(j)}{R(j)}\right]\right) = \vartheta 2^{-j} \tag{3.3.9}$$

em que $\vartheta = \vartheta(1, 2^{-1}, \ldots, 2^{1-p})$ é uma constante. Combinando (3.3.7), (3.3.8) e (3.3.9) temos que

$$d_o - d = \vartheta^{1/2} 2^{-j/2} Z + o_p(2^{-j/2})$$

em que Z é uma variável aleatória com variância unitária e média zero. Portanto, d_o é um estimador consistente de d e com vício assintoticamente igual a zero.

3.4 Informação Amostral

O algorítmo proposto por Hosking (1981) para a estimação dos modelos ARFIMA tem como conseqüência a perda de observações. Ao retirarmos o efeito de longa dependência aplicando o operador

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} B^j$$

à série original, m observações são perdidas, o que prejudica a estimação dos parâmetros θ's e ϕ's na etapa seguinte pois há um aumento da variância dos estimadores desses parâmetros. A escolha de m é portanto muito importante e uma forma de avaliarmos a perda causada pela escolha de valores muito altos de m é compararmos a Informação de Fisher das amostras obtidas após a retirada do efeito de longa dependência.

Definição 3.4.1 *Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra com função de verossimilhança $l(\cdot|\zeta)$. A quantidade*

$$I_\zeta = E_\zeta \left(\left(\frac{\partial \ln}{\partial \zeta} l(\boldsymbol{X}|\zeta) \right)^2 \right)$$

é chamada Informação de Fisher

A Informação de Fisher está relacionada ao estimador não viciado de menor variância de ζ, como estabelecido no Teorema 3.4.2

Teorema 3.4.2 *[Mood, Graybill e Boes (1974)] Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra com função de verossimilhança $l(\boldsymbol{X}|\zeta)$ e seja $W(\boldsymbol{X}) = W(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ um estimador tal que E(W($\boldsymbol{X}$)) é uma função diferenciável de ζ . Suponha que a função densidade de probabilidade (f.d.p.) conjunta $l(\boldsymbol{X}|\zeta)$ satisfaz*

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int \ldots \int h(\mathbf{x}) l(\mathbf{x}|\zeta) dx_1 \ldots dx_n = \int \ldots \int h(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \zeta} l(\mathbf{x}|\zeta) dx_1 \ldots dx_n,$$

para toda função $h(\cdot)$ tal que $E_\zeta |h(\mathbf{X})| < \infty$. Então,

$$Var(W(\boldsymbol{X})) \geq \frac{\frac{\partial}{\partial \zeta} E_\zeta (W(\boldsymbol{X}))^2}{E_\zeta \left(\left(\frac{\partial \log}{\partial \zeta} l(\mathbf{X}|\zeta) \right)^2 \right)}.$$

Portanto, quanto menor for a Informação de Fisher, maior será o limite inferior da variância do estimador não viciado de menor variância. Ou seja, sabemos que a menor variância de um estimador de ζ é pelo menos tão grande quanto esse limite, mas não podemos garantir a existência de um estimador que possa atingí-lo. Nosso objetivo é avaliar a perda de informação causada pela diminuição do número de observações da amostra.

Whittle (1953) sugere calcular a informação de Fisher de uma amostra de um processo estacionário usando sua densidade espectral. Seja F(y) a distribuição espectral de um processo $\{Y_t\}$ estacionário. Definimos

$$\Lambda(e^{iy}) = \frac{\partial F(y)}{\partial y} = \sum_s \gamma_s e^{isy}.$$

De acordo com o trabalho de Whittle, se $\Lambda(z)$ e $(\Lambda(z))^{-1}$ existem no círculo unitário e a distribuição de $\mathbf{X}$ depende dos parâmetros $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_h$, a Informação de Fisher é dada por

$$\begin{aligned} E_\zeta\left(\left(\frac{\partial \log}{\partial \zeta} l(X|\zeta)\right)^2\right) &= \frac{n}{4\pi i}\int\left(\frac{M'}{M}\right)^2 \frac{dz}{z} \\ &= \frac{n}{4\pi i}\int\left(\frac{\partial \log M(z)}{\partial \zeta}\right)^2 \frac{dz}{z} \\ &= \frac{n}{4\pi}\int\left(\frac{\partial \log M(z)}{\partial \zeta}\right)^2 dz, \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

em que

$$M(z) = \frac{\Lambda(z)}{\sigma^2}.$$

Usando (3.4.10) podemos encontrar a informação amostral do modelo AR(1). Sabemos que

$$f(w) = \frac{1}{2\pi(1+\phi^2 - 2\phi\cos(w))}. \tag{3.4.11}$$

Assim temos que

$$
\begin{aligned}
I &= E\left(\left(\frac{\partial \log l(x|\phi)}{\partial \phi}\right)^2\right) = \frac{n}{4\pi}\int \left(\frac{\partial \log M(z,\phi)}{\partial \phi}\right)^2 dz \\
&= \frac{n}{4\pi}\int \left(\frac{-2\phi + 2\cos(w)}{(1+\phi^2 - 2\phi\cos(w)}\right)^2 dz.
\end{aligned}
$$

No caso do modelo ARFIMA(1,d,0), a densidade espectral é dada por

$$
f(w) = \frac{(2sen(w/2))^{-2d}}{2\pi(1+\phi^2 - 2\phi\cos(w))}. \tag{3.4.12}
$$

Procedendo da mesma forma,

$$
\begin{aligned}
I_{11} &= E\left(\left(\frac{\partial \log l(x|\phi)}{\partial \phi}\right)^2\right) = \frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \log M(z,\phi)}{\partial \phi}\right)^2 dz \\
&= \frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{-2\phi + 2\cos(w)}{(1+\phi^2 - 2\phi\cos(w)}\right)^2 dw.
\end{aligned}
$$

Os outros elementos da matriz de informação são

$$
\begin{aligned}
I_{12} &= \frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \log M(z,\phi)}{\partial \phi}\right)^2 dz \\
&= \frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-2\phi + 2\cos(w))(-2\log(2sen(w/2)))}{(1+\phi^2 - 2\phi\cos(w)} dw
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
I_{22} &= \frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \log M(z,\phi)}{\partial \phi}\right)^2 dz \\
&= \frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(-2\log(2sen(w/2))\right)^2 dw.
\end{aligned}
$$

A informação amostral do processo ARFIMA(0,d,1) é dada por

$$I_{11} = \frac{n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2\theta - 2\cos(w)}{(1 + \theta^2 - 2\theta\cos(w)} \right)^2 dw,$$

$$I_{12} = \frac{n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(2\theta - 2\cos(w))(-2\log(2sen(w/2)))}{(1 + \theta^2 - 2\theta\cos(w)} dw$$

e

$$I_{22} = \frac{n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (-2\log(2sen(w/2)))^2 \, dw.$$

Como nosso interesse neste trabalho é saber de que forma a informação amostral é afetada pela retirada do efeito de longa dependência, vamos considerar um processo ARFIMA(p,d,q)

$$\Phi(B)(1-B)^d X_t = \Theta(B) Z_t$$

e o processo $\{U_t\}$ gerado da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\Gamma(j - \hat{d})}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\hat{d})} X_{t-k} = U_t. \tag{3.4.13}$$

Seja $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_X(k)$ e $Cov(U_t, U_{t-j}) = \gamma_U(j)$. Por em (3.4.13) podemos encontrar a covariância do processo $\{U_t\}$ em função da covariância de $\{X_t\}$, obtendo-se

$$\gamma_U(j) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} C_{k,\hat{d}} C_{l,\hat{d}} \gamma_X(j - l + k).$$

em que $C_{k,\hat{d}} = \frac{\Gamma(j-\hat{d})}{\Gamma(j+1)\Gamma(-\hat{d})}$.

Assim, dado o valor de $\hat{d}$, a densidade espectral de U_t é

$$\begin{aligned}
f_{U|\hat{d}}(w) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-iwh}\gamma_U(h) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-iwh}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} C_{k,\hat{d}}C_{l,\hat{d}}\gamma_X(h-l+k) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} C_{k,\hat{d}}C_{l,\hat{d}}\sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-iwh}\gamma_X(h-l+k) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} C_{k,\hat{d}}C_{l,\hat{d}}e^{-iw(l-k)}\sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-iw(h-l+k)}\gamma_X(h-l+k) \\
f_{U|\hat{d}}(w) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} C_{k,\hat{d}}C_{l,\hat{d}}e^{iw(l-k)}f(w).
\end{aligned}$$

Assumindo-se que a distribuição de $\hat{d}$ seja aproximadamente Normal com média d e variância $\sigma^2_{\hat{d}}$, podemos usar a transformada de Fourier dessa distribuição para encontrar $f_U(w)$:

$$f_U(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U|\hat{d}}(w)f_{\hat{d}}(w-t)dt \tag{3.4.14}$$

em que $f_{\hat{d}}(t)$ é a transformada de Fourier da função densidade Normal

$$f_{\hat{d}}(t) = exp\left\{id - \frac{w^2\sigma^2_{\hat{d}}}{2}\right\}. \tag{3.4.15}$$

Substituindo-se (3.4.15) em (3.4.14),

$$f_U(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} C_{k,t}C_{l,t}e^{it(l-k)}f(t)exp\left\{id - \frac{(w-t)^2\sigma^2_{\hat{d}}}{2}\right\}dt,$$

em que $f(w)$ é a densidade espectral de $\{X_t\}$.

No caso do modelo ARFIMA(1,d,0) temos

$$I_{11} = \frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\frac{AB(2sen(t/2))^{-2d}(-2\phi+2cos(t))}{2\pi(\pi(1+\phi^2-2\phi cos(t))^2)}dt}{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\frac{AB(2sen(t/2))^{-2d}}{2\pi(\pi(1+\phi^2-2\phi cos(t))^2)}dt}dw$$

onde $A = C_{k,t}C_{l,t}$ e $B = exp\left\{-it(l-k) + id(w-t) - \frac{(w-t)^2}{2}\sigma^2_{\hat{d}}\right\}$

Como podemos ver pela equação acima, encontrar a informação da série transformada pelo operador truncado não é uma questão simples pois seria necessária a utilização de integração numérica. Para esse tipo de aproximação, o controle sobre o valor do erro cometido é uma questão bastante complexa. Em vista disso, é de interesse a realização de um estudo de simulação, em que a estimação dos parâmetros correspondentes ao modelo ARMA possa ser avaliada. Nesse caso, os resultados assintóticos garantem que o aumento do número de replicações da simulação implica em aumento da precisão das estimativas da variância dos estimadores avaliados.

4 Simulação

Como já comentado no Capítulo 2, valor de m no operador ∇_m^d é de fundamental importância na estimação dos parâmetros de um modelo ARFIMA(p,d,q) pois a escolha desse valor pode determinar a qualidade da aproximação obtida. Assim, é de interesse comparar as estimativas obtidas usando diferentes valores de m, para que se possa observar quais os valores de m que produzem estimativas mais precisas. Nosso objetivo é estudar os valores de m que minimizam o EQM e o vicio dos estimadores dos parâmetros de $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$, no modelo ARFIMA. Para a simulação foi usado o *software Matlab 6.5*.

Amostras do modelo ARFIMA(p,d,q) podem ser geradas pelo método proposto por Hosking (1984), que é baseado na distribuição condicional de Y_t dados $Y_{t-1}, \ldots, Y_1$. O algoritmo abaixo descreve como obter uma amostra um processo ARFIMA(0,d,0).

1. Gerar uma variável aleatória da distribuição Normal$(0, \sigma_0^2)$, em que

$\sigma_0^2 = (-2d)!/[(-d)!]^2$;

2. Calcular ϕ_{tj}, recursivamente, por

$\phi_{tt} = \frac{d}{t-d} \quad t = 1, 2, \ldots;$

$\phi_{tj} = \phi_{t-1,j} - \phi_{tt}\phi_{t-1,t-j} \quad j = 1, 2, \ldots t-1;$

3. Calcular

$M_t = \sum_{j=1}^{t} \phi_{tj} Y_{t-j};$

$V_t = (1 - \phi_{tt}^2) V_{t-1};$

em que $V_0 = \sigma_0^2$;

4. Gerar $Y_t \sim N(M_t, V_t)$; e

5. Repetir passos 2-4 para $t = 1, 2, \ldots, n-1$.

O método descrito acima é aproximado e a partir dessa amostra podemos gerar uma amostra de um processo ARFIMA(p,d,q). Para isso, Hosking propõe uma forma exata e outra aproximada. Entre os dois métodos, optamos por usar o aproximado. Assim, devemos dividir o modelo

$$\Phi(B)(1-B)^d X_t = \Theta(B) Z_t$$

em

$$\Phi(B) X_t = \Theta(B) Y_t$$

e

$$(1-B)^d Y_t = Z_t.$$

$\{Y_t\}$ é obtido pelo algoritmo descrito acima e $\{X_t\}$ é gerado recursivamente por

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} \phi_j X_{t-j} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j Y_{t-j} + Y_t. \tag{4.0.1}$$

Para aplicarmos (4.0.1), é necessário que tenhamos uma amostra de tamanho (n+q) de $\{Y_t\}$ e valores de $\{X_t\}$ para inicializar o processo quando houver uma forma autorregressiva. Hosking(1984) sugere gerar $\{X_t\}$, $-r \leq t \leq n$, em que r é um número inteiro; e considerar $\{X_t = 0\}$, $t \leq -r$, eliminando-se X_t, $-r \leq t \leq 0$. O valor de r deve ser escolhido de tal forma que satisfaça $|\alpha|^r \leq \Psi$ onde α é a menor raiz da equação em z, $1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j z^{-j} = 0$ e Ψ é um número positivo pequeno, por exemplo $\Psi = 0,01$. Nesse trabalho consideramos r=50. A comparação de diferentes métodos de geração de modelos ARFIMA é feita em Cerezer (1999).

A simulação Monte Carlo foi utilizada para estudar o efeito que o valor de m tem sobre as estimações dos parâmetros de $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$. Foram geradas amostras do processo ARFIMA(p,d,q) e a essas foi aplicado o operador ∇_m^d com diferentes valores de m. Para as séries resultantes, foram estimados os parâmetros de $\Phi(B)$ e $\Theta(B)$ e calculados o EQM e o vício dessas estimativas. Além do valor verdadeiro de d, usado na simulação das séries, consideramos também os valores dos estimadores d_o, d_p e d_{sp}.

O objetivo de usar o valor verdadeiro de d é descobrir de que forma o valor de m afeta as estimativas sem que qualquer erro na estimação de d seja um fator. Usando os valores estimados de d, queremos estudar as diferenças entre os resultados obtidos por cada estimador e definir qual valor seria mais apropriado para ser usado na prática, quando d não é conhecido.

Os modelos estudados foram o ARFIMA(1,d,0) e o ARFIMA(0,d,1). Os valores de d estão no intervalo [-0,4 ; 0,4] e os valores de ϕ e θ no intervalo (-1;1). De acordo com o que foi estudado anteriormente, isso garante que as séries geradas são estacionárias e invertíveis. O tamanho da amostra é 512 e foi escolhido entre potências de 2 para que o estimador d_o pudesse ser aplicado sem que dados fossem acrescentados ou suprimidos . Em cada caso, foram realizadas 1000 replicações e a avaliação das aproximações foi feita observando os valores do EQM e do vício dos estimadores, em que

$EQM = \sum_{s=1}^{K} \frac{(d_s-d)^2}{K}$ e $Vicio = \sum_{s=1}^{K} \frac{(d_s-d)}{K}$ em que K é o número de replicações.

Como vimos no Capítulo 4, para calcularmos d_p e d_{sp} devemos definir um valor para α tal que $n^{\alpha} \to \infty$ e $n^{\alpha}/n \to 0$ quando $n \to \infty$. Nesse estudo, foi usado $\alpha = 0,5$, de acordo com os resultados obtidos por Geweke e Porter-Hudak (1986). Além disso, para definirmos d_{sp}, devemos atribuir um valor a M, o ponto de truncamento da janela de defasagem usada na suavização do periodograma. Com base nos resultados obtidos por Reisen (1994), optamos por usar $M = n^{\beta}$, com $\beta = 0,9$. Apesar dos resultados teóricos desses estimadores serem válidos apenas para $d \in (-0,5;0)$, eles também foram usados quando d é positivo, pois os estudos citados mostraram que, também nesse caso, os resultados obtidos são bons.

Trataremos primeiramente dos resultados obtidos quando o valor de d no operador ∇_m^d é o seu valor verdadeiro e depois trataremos daqueles obtidos quando d é estimado por d_o, d_p e d_{sp}. Como esses resultados são bastante extensos, apresentaremos as tabelas no Apêndice. Entre essas tabelas não estão incluídos os resultados para d=-0,3; -0,1; 0,1; 0,3, embora esses valores também tenham sido estudados e considerados na análise. Uma vez que as mesmas tendências são observadas em vários modelos, optamos por escolher apenas alguns deles para a ilustração da análise dos resultados. Esses resultados serão apresentados em forma de gráfico e o leitor interessado pode consultar as tabelas completas no Apêndice. Usaremos a notação m^* e $\tilde{m}$ para denotar os valores de m que minimizam o EQM e o vício, respectivamente. Na análise dos resultados, iremos observar:

(i) A relação entre m^* , $\tilde{m}$ e o parâmetro d;

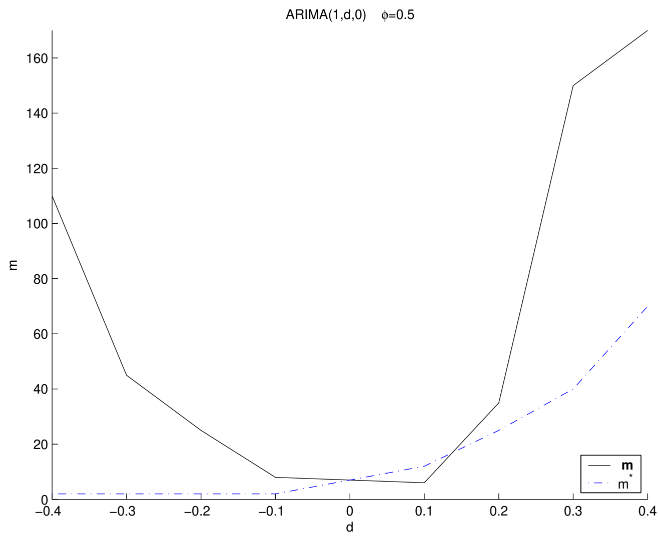

Figura 12: Valores de m^* e $\tilde{m}$ para o modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d verdadeiro e ϕ=0,5)

(ii) A relação entre m^* , $\tilde{m}$ e os parâmetros ϕ e θ;

(iii) Os valores observados de m^* e $\tilde{m}$; e

(iv) A ilustração dos resultados por gráficos de alguns modelos.

Na primeira parte do trabalho, usamos o valor de d verdadeiro e temos que:

(i) os valores de $\tilde{m}$ e m^* aumentam com o aumento do valor de $|d|$ e são menores para d negativo;

(ii) De forma geral, valores maiores de m^* e $\tilde{m}$ estão relacionados a valores dos parâmetros ϕ e θ próximos de 1;

(iii) Os valores observados de m^* e $\tilde{m}$ variam dentro do intervalo [0,170]. Esse intervalo é bastante grande, o que dificulta a escolha de um valor de m ideal para todo modelo ARFIMA. Além disso os valores de m^* são menores que os de $\tilde{m}$; e

(iv) Para ilustrar essa relações, apresentamos os gráficos referentes aos modelos ARFIMA(1,d,0) com $d = 0,4$ e $\phi = 0,5$ e ARFIMA(0,d,1), com $d = 0,4$ e $\theta = 0,5$. As Figuras (12) e (13) mostram os gráficos dos valores de m^* e $\tilde{m}$ em função de d. Nesses gráficos podemos observar o aumento desses valores decorrente do aumento de $|d|$.

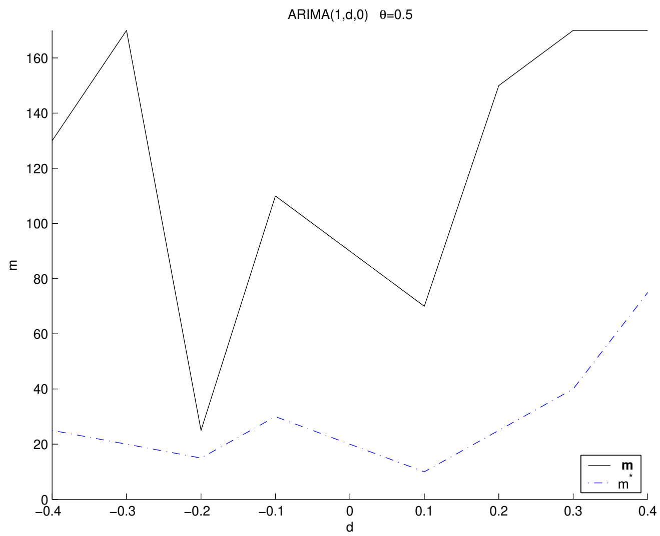

Figura 13: Valores de m^* e $\tilde{m}$ para o modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d verdadeiro e θ=0,5)

O quadrado do vício e o EQM desses mesmos modelos são apresentados nas Figuras 14 e 15. Note que, quando $d = 0,4$ e $m > 50$, nos dois modelos, o EQM é praticamente estável. Portanto, a escolha de um m próximo a 50 não traria um prejuízo alto na precisão das estimativas. Por outro lado, quando $d < 0,4$, o EQM aumenta de forma acentuada após atingir o mínimo.

A variação de m^* e $\tilde{m}$ em função de ϕ e θ pode ser vista nas Figuras 16 e 17 em que podemos confirmar que valores maiores de ϕ e θ estão relacionados a valores maiores de m^* e $\tilde{m}$.

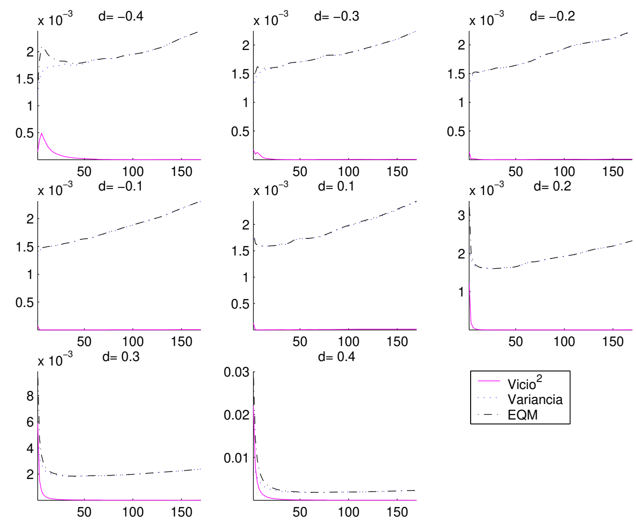

Figura 14: EQM, variância e vício quadrático do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d verdadeiro e ϕ=0,5)

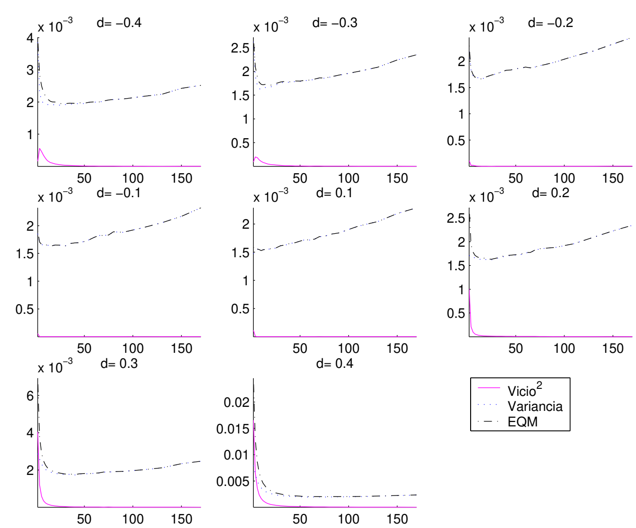

Figura 15: EQM, variância e vício quadrático do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d verdadeiro e θ=0,5)

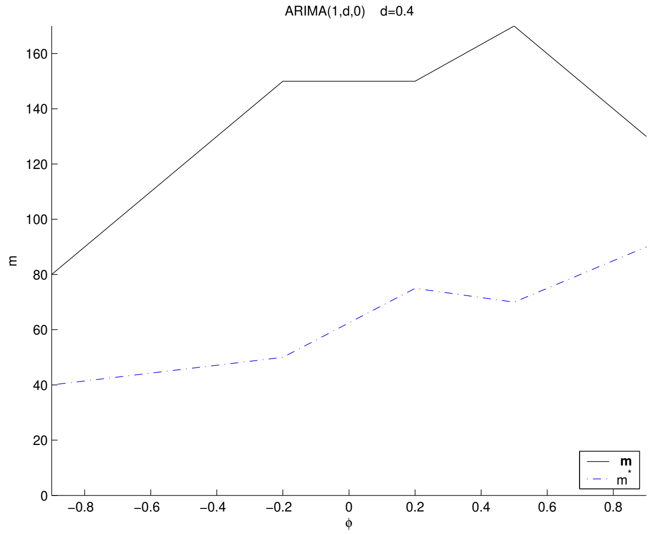

Figura 16: Valores de m^* e $\tilde{m}$ para o modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d verdadeiro d=0,4)

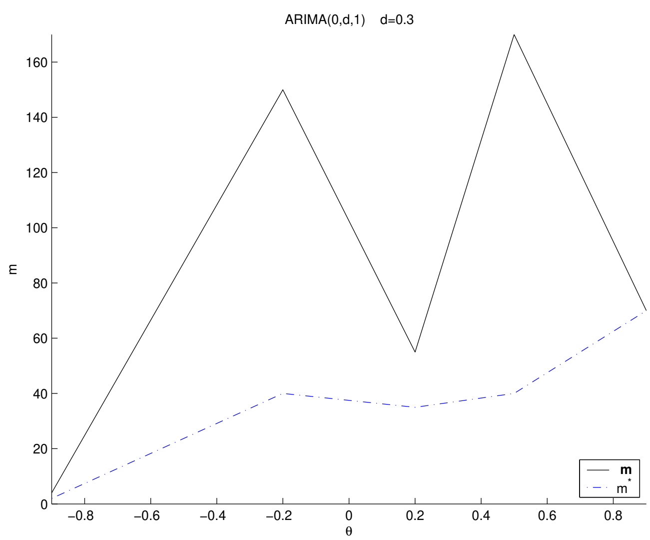

Figura 17: Valores de m^* e $\tilde{m}$ para o modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d verdadeiro d=0,3)

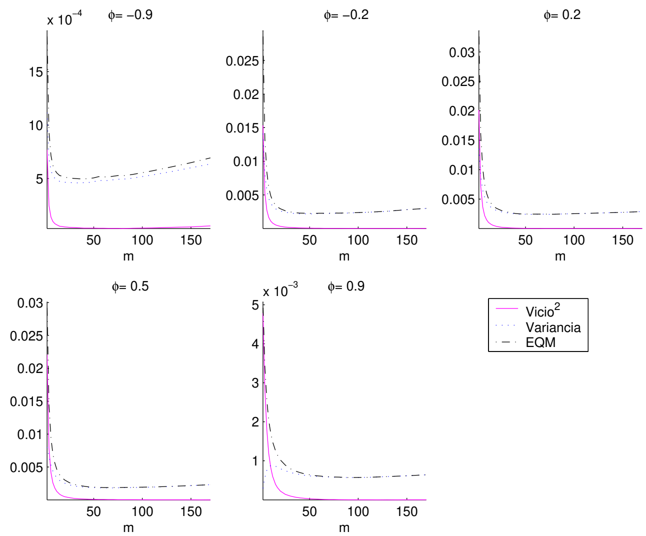

Figura 18: EQM, variância e vício quadrático do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d verdadeiro d=0,4)

Os valores do EQM e do vício ao quadrado desses modelos estão nas Figuras 18 e 19. Podemos ver que, quando ϕ e θ são negativos, o aumento de EQM para $m > m^*$ é maior, portanto a escolha de um m muito grande implica maior perda de precisão do que a que ocorre quando ϕ e θ são positivos .

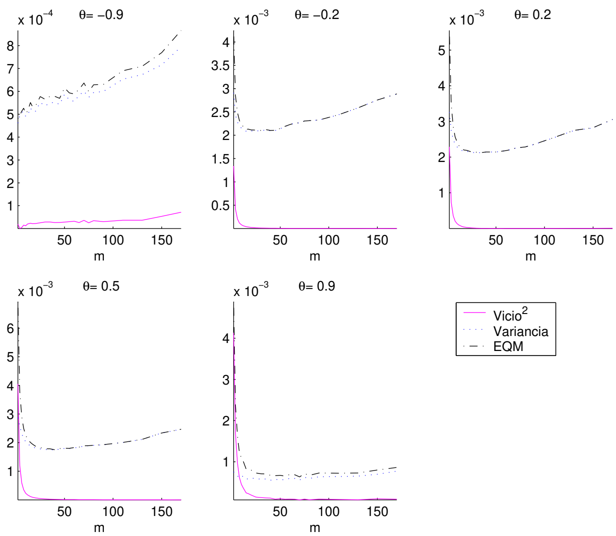

Figura 19: EQM, variância e vício quadrático do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d verdadeiro d=0,3)

Em uma segunda parte do estudo, foi usado o valor de d estimado por d_o, d_p e d_{sp}. Como as relações descritas em (i) e (ii) são bastante parecidas ao usarmos os três estimadores, a ilustração dos resultados por gráficos será feita apenas quando d é estimado por d_{sp}.

Quando d é estimado por d_o, observamos:

(i) valores maiores de $|d|$ estão relacionados a valores maiores de m^* e $\tilde{m}$, em especial quando d é positivo. Quando d negativo, m^* e $\tilde{m}$ são muito baixos e em diversos casos esses valores são iguais a zero, o que significa que as estimativas obtidas a partir da série original foram melhores do que aquelas obtidas das séries transformadas com qualquer valor de m. Por isso, para $d < 0$, a relação entre os valores de m^* e $\tilde{m}$ e d, ainda que possa ser percebida, é bastante baixa;

(ii)Em relação a ϕ e θ, os maiores valores de m^* e $\tilde{m}$ ocorrem nos modelos em que ϕ e θ estão próximos de 0. Quando ϕ e θ estão próximos de 1, o estimador de d deve ter sofrido influência dos efeitos de $|\phi|$ e $|\theta|$ e as estimativas foram comprometidas e o vicio encontrado foi muito alto;

(iii) Há uma diminuição de $\tilde{m}$ e m^* em relação as simulações com d verdadeiro principalmente quando $d < 0$ e $|\phi|$ e $|\theta|$ se aproximam de 1. Os valores observados de $\tilde{m}$ e m^* estão em todo o intervalo [1,170] mas a maior parte deles é menor do que

50. Também nesse caso, os valores de $\tilde{m}$ são maiores que os de m^* .

O comportamento geral de m^* e $\tilde{m}$ parece se manter quando usamos d_p:

(i) Observamos valores maiores de m^* e $\tilde{m}$ quando d é positivo e $|d|$ está próximo 0,5;

(ii) Quando ϕ e θ estão próximos de 0, m^* e $\tilde{m}$ são maiores. Com esse estimador, entretanto, se observa uma forte diminuição do EQM e do vício quando $|\phi|$ e $|\theta|$ estão próximos de 1. Nesses casos, m^* e $\tilde{m}$ são maiores quando usamos d_p e não d_o; e

(iii) m^* e $\tilde{m}$ assumem valores em todo intervalo [0,170] e são em geral um pouco maires que os observados quando d é estimado por d_o.

Estimando-se d por d_{sp}, vemos que as relações:

(i) e (ii) são equivalentes às descritas para d_p. No entanto, o EQM e do vício observado quando $|\phi|$ e $|\theta|$ estão próximos de 1 é ainda menor quando usamos d_{sp}; e

(iii)Os valores de m^* e $\tilde{m}$, de forma geral, são maiores do que os observados quando d é estimado por d_p.

(iv) As Figuras 20 e 21 mostram os mesmos modelos das Figuras 12 e 13 mas agora com o valor de d estimado por d_{sp}. Há uma tendência de aumento de m^* com o aumento de $|d|$, principalmente quando esse é positivo. Observando $\tilde{m}$, vemos que, quando d é negativo, esse tende a ser muito baixo e sofre o grande salto para d positivo e próximo de 0.5.

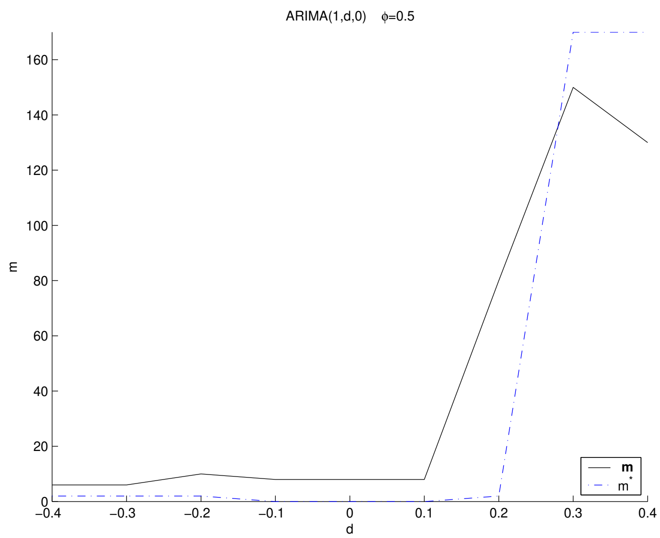

Figura 20: Valores de m^* e $\tilde{m}$ para o modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_{sp} e ϕ=0,5)

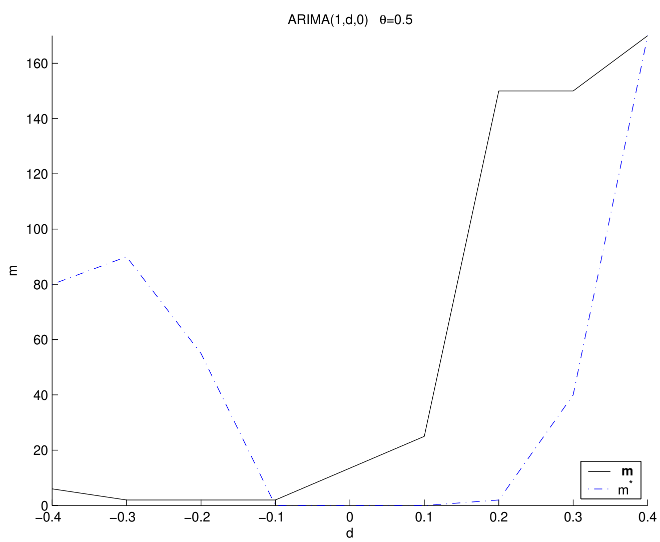

Figura 21: Valores de m^* e $\tilde{m}$ para o modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_{sp} e θ=0,5)

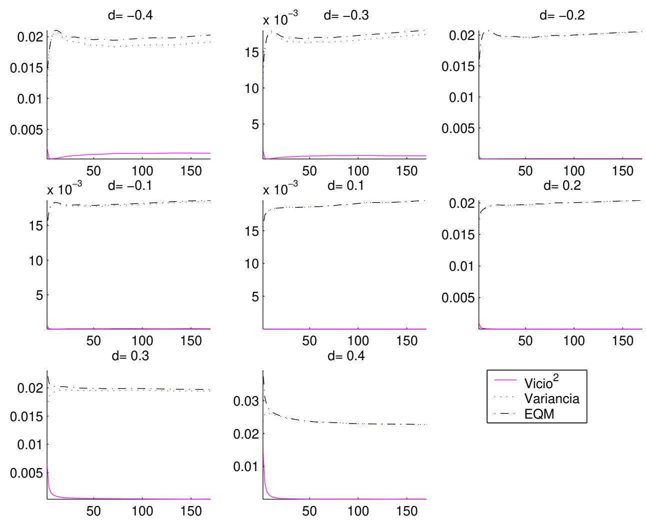

Figura 22: EQM, variância e vício quadrático do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_{sp} e ϕ=0,5)

As Figuras 22 e 23 mostram os valores do EQM e do vício nesses modelos. Note que, nos modelos em que d está próximo de 0,5, apesar de m^* e $\tilde{m}$ assumirem valores próximos a 170, o EQM e o vício não variam muito para $m > 100$. Isso foi observado, de forma geral, nos modelos em que m^* e $\tilde{m}$ assumem valores muito altos.

Os gráficos de m^* e $\tilde{m}$ dos modelos ARFIMA(1,d,0) e ARFIMA(0,d,1) com d=0,4 e 0,3 respectivamente, estão nas Figuras 24 e 25. É claro o aumento de m^* e $\tilde{m}$ quando ϕ e θ estão próximos de zero.

As Figuras 26 e 27 mostram o EQM e o vício ao quadrado e a variância dos estimadores nesses modelos. Nos gráficos, podemos observar valores altos do EQM quando d=0,4 e $\phi = 0,9$.

De acordo com os resultados obtidos no estudo de simulação, os valores de m^* e $\tilde{m}$ variam, assumindo valores em todo o intervalo [0,170], em que m foi considerado. Devemos chamar a atenção para os modelos em que m^* e $\tilde{m}$ assumiram valores altos. Nesses casos, como foi ilustrado nas Figuras 22 e 23, a variação do EQM e do vício não foi muito grande quando m é maior que 100 . Portanto, mesmo para esses modelos, é razoável escolher valores de m menores do que 100, pois isso não provocaria grande perda de precisão das estimativas. Por outro lado, a escolha de m menor do que 10, em geral, leva a vícios mais altos dos estimadores de ϕ e θ. Desta forma, para o tamanho de amostra considerado no estudo (n=512), poderíamos

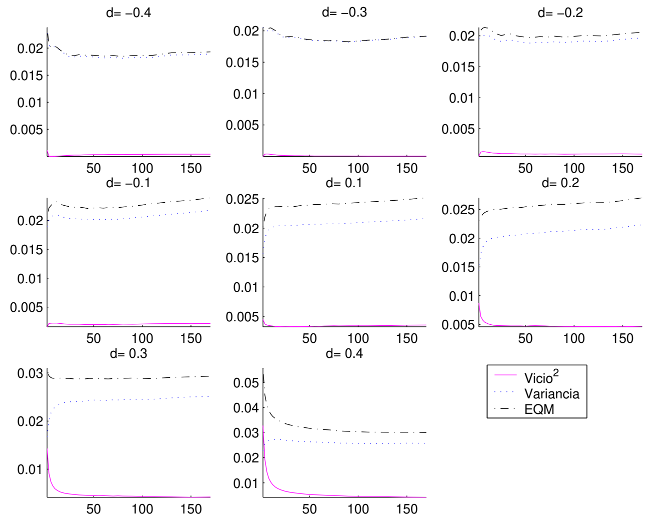

Figura 23: EQM, variância e vício quadrático do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_{sp} e θ=0,5)

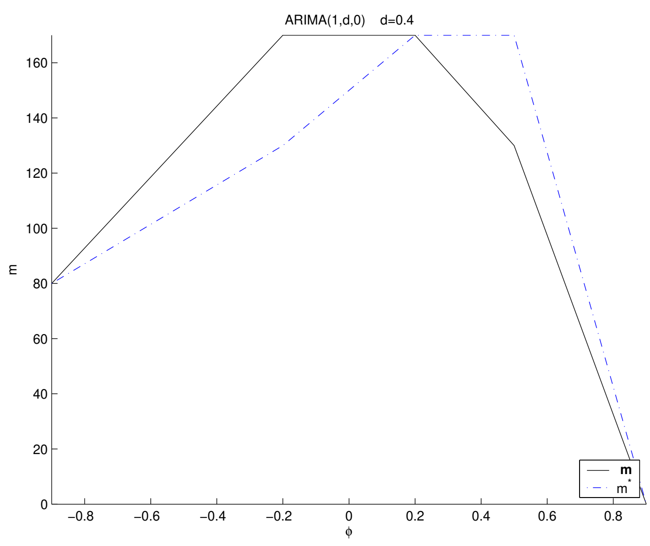

Figura 24: Valores de m^* e $\tilde{m}$ para o modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_{sp} e d=0,4)

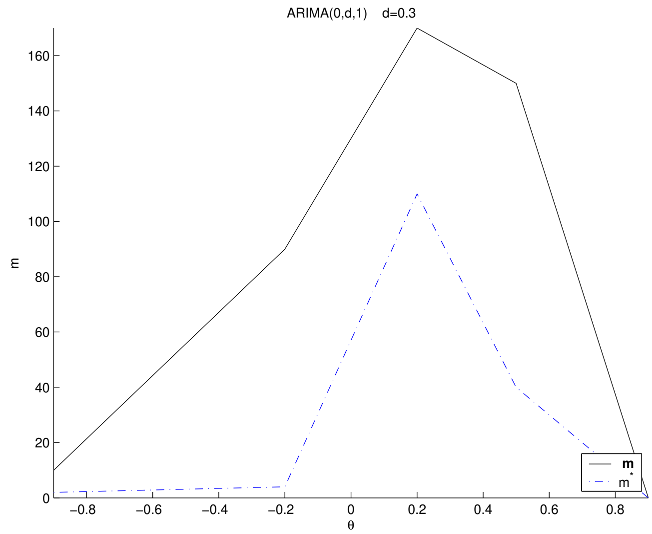

Figura 25: Valores de m^* e $\tilde{m}$ para o modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_{sp} e d=0,3)

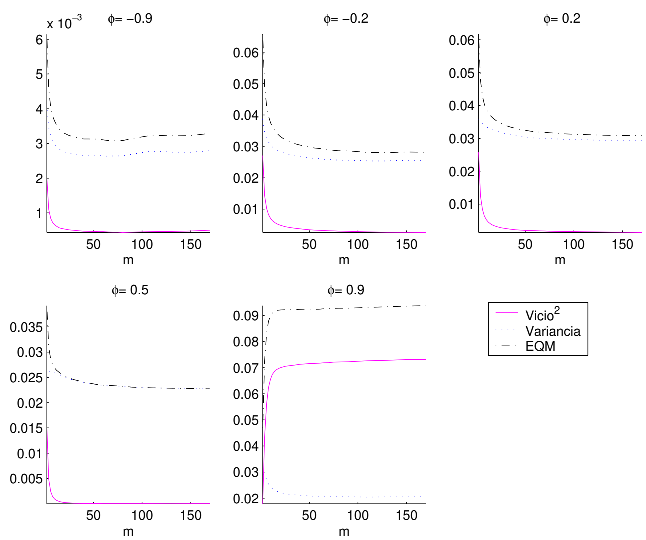

Figura 26: EQM, variância e vício quadrático do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_{sp} e d=0,4)

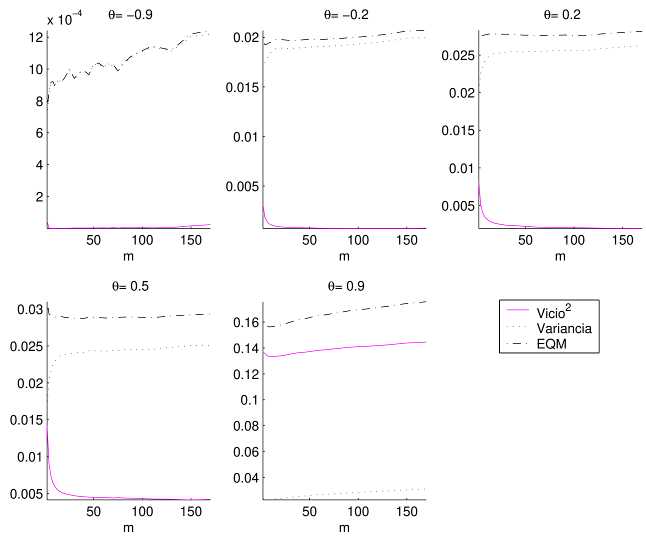

Figura 27: EQM, variância e vício quadrático do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_{sp} e d=0,3)

restringir a escolha dos valores de m dentro ao intervalo [10, 100].

Além disso a relação entre m^* , $\tilde{m}$ e os parâmetros d, ϕ e θ é forte e por isso não podemos definir um valor ideal de m para todo modelo ARFIMA(0,d,1) ou ARFIMA(0,d,1). A escolha do valor de m pode ser feita com base em estimativas preliminares dos parâmetros, considerado-se valores menores de m quando a estimativa de d estiver próxima de zero e as ϕ e θ estiverem próximas de 1 ou -1.

Por sugestão da banca examinadora, foi realizado um estudo de simulação para modelo ARFIMA(1,d,1). Neste caso, também foram considerados os valores de ϕ e θ dentro do intervalo (-1,1). Em razão do grande o tempo necessário para a realização as simulações , consideramos para esse modelo apenas o valor verdadeiro de d. Os resultados obtidos mostraram que:

(i) valores de $|d|$ maiores implicam maiores m^* e $\tilde{m}$. Quando d é negativo, m^* e $\tilde{m}$ são mais baixos e muitas vezes iguais a zero;

(ii) O efeito da variação de ϕ é mais evidente do que o de θ e valores maiores de $\tilde{m}$ e m^* estão relacionados a valores de ϕ próximos de 0, como foi observado no caso dos modelos ARFIMA(1,d,0). De forma geral, quando o valor de ϕ está próximo de 0, o efeito de θ é o mesmo do efeito observado para os modelos ARFIMA(0,d,1), isto é, quando esse parâmetros é próximo de 0, os valores de $\tilde{m}$ e m^* são maiores. Por outro lado, quando ϕ está próximos de 1, os valores de $\tilde{m}$ e m^* não são apresentam relação clara com θ . Esse comportamento já era esperado pois, quando o valor de ϕ é próximo de zero, seu efeito é menor e podemos perceber com maior clareza o efeito da variação do valor de θ.

(iii) Os valores observados de $\tilde{m}$ são maiores do que os de m^* . De forma geral, esses valores estão distribuidos em todo o intervalo (0,170) e são um pouco mais baixos do que os observados para os modelos ARFIMA(1,d,0) e ARFIMA(0,d,1).

5 *Análise de Dados Reais*

Para ilustrar o efeito do valor de m na estimação de parâmetros do modelo ARFIMA, analisaremos, nesse capítulo, um conjunto de dados reais. A série analisada foi obtida na página Statlib (http://lib.stat.cmu.edu/). Ela é formada pela medição diária da velocidade do vento em uma estação metereológica da Irlanda. Apesar do conjunto de dados originais ser formado de mais de 6000 observações, consideramos nessa análise as 512 primeiras.

A Figura 28 apresenta o gráfico dos dados. Podemos ver que a série parece ser estacionária e a variância não parece se alterar com o tempo. A série tem média 12,49 e variância amostral 28,43.

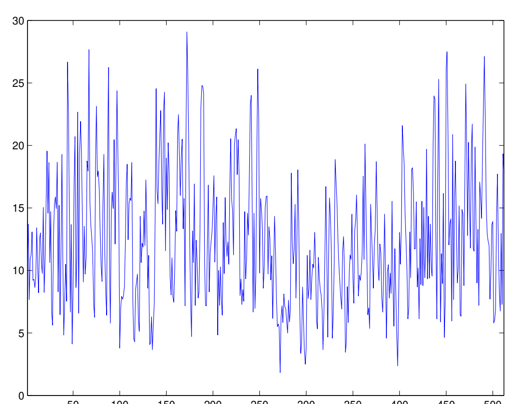

Figura 28: Gráfico da série de velocidades de ventos

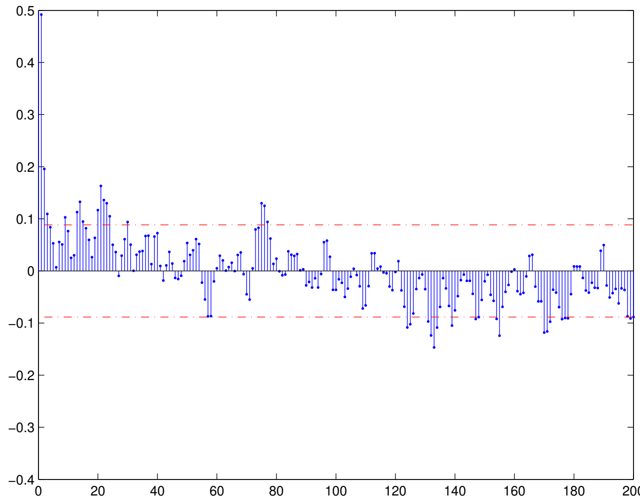

Figura 29: ACF amostral da série original de velocidades de ventos

A função de autocorrelação amostral está na Figura29 e podemos ver que queda lenta da autocorrelação parecendo indicar a existência de longa dependência na série.

O modelo para série foi ajustado considerando-se os três estimadores apresentados no Capítulo 3. Estudaremos o modelo usando-se $d_{sp} = 0,29$ de forma mais detalhada e ilustrada. Os resultados obtidos para os outros estimadores serão apresentados mais a frente. Desta forma, o valor de d no modelo ARFIMA(0,d,0) foi estimado por d_{sp} e a estimativa obtida foi $d_{sp} = 0,29$ com $v\hat{a}r(d_{sp}) = (0,071)^2$. A variância do estimador foi calculada pela fórmula aproximada em (3.2.4). Podemos usar a aproximação normal da distribuição desse estimador para testar a hipótese $H_0 : d = 0$, $H_1 : d \neq 0$. Assim, temos que, $z = d_{sp}/\sqrt{v\hat{a}r(d_{sp})} = 4,0841$. Portanto, a evidência de que $d \neq 0$ é altamente significativa ($p - valor < 0,0001$).

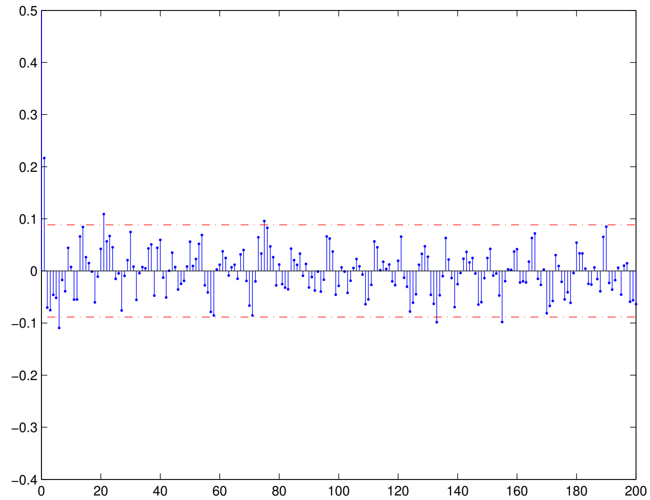

Figura 30: ACF amostral dos resíduos do modelo ARFIMA(0,d,0)

A Figura 30 apresenta a ACF dos resíduos obtidos a partir do ajuste do modelo ARFIMA(0,d,0). Como podemos ver, a autocorrelação amostral desses resíduos não é desprezível, o que indica que o ajuste de um modelo ARFIMA(p,d,q) deva ser mais apropriado.

O modelo ARFIMA(1,d,0) foi ajustado e as estimativas de ϕ foram obtidas considerando-se os valores de m estudados no capítulo anterior. Os quadrados médios dos resíduos (QMR) obtidos estão na Tabela 1, assim como os valores das estimativas de ϕ. Podemos ver que os valores de $\hat{\phi}$ são robustos em relação a variação de m. O QMR é mínimo quando m é igual a 150 e, nesse caso, obtivemos $\hat{\phi} = 0,247$.

O modelo ajustado é portanto

$$(1 - B)^{0,291}(1 - 0,247B)(X_t - 12,495) = Z_t,$$

onde $Z_t \sim N(0; 20,124)$.

Usando-se o estimador d_{gph}, o modelo ajustado é bastante parecido com o obtido anteriormente

$$(1 - B)^{0,302}(1 - 0,238B)(X_t - 12,495) = Z_t,$$

onde $Z_t \sim N(0; 20,154)$.

Ao considerarmos o estimador d_j, o valor de d estimado é mais baixo do que o obtido pelos outros estimadores. Ainda assim, o modelo que melhor ajustou os

m	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\phi}$
2	21,737	0,21478
4	21,843	0,22076
6	22,006	0,22389
8	22,048	0,22384
10	22,093	0,22501
12	22,173	0,22439
15	22,225	0,22359
17	22,303	0,22372
20	22,332	0,2251
25	22,321	0,2266
30	22,345	0,22618
35	22,364	0,235
40	22,189	0,2372
45	21,749	0,23766
50	21,63	0,24334
55	21,29	0,25678
60	20,938	0,25678
65	20,968	0,25836
70	20,796	0,26307
75	20,601	0,25737
80	20,787	0,25407
90	20,25	0,26376
110	20,259	0,257
130	20,572	0,25483
150	20,124	0,24694
170	20,3	0,24825

Tabela 1: Quadrado médio dos resíduos e estimativas de ϕ para cada valor de m.

dados foi o ARIMA(1,d,0) e obtivemos

$$(1-B)^{0,177}(1-0,348B)(X_t-12,495)=Z_t,$$

onde $Z_t \sim N(0;19,904)$.

Também para esses dois últimos modelos o valor mínimo do QMR foi observado em m=150. Note que, nos três modelos ajustados, o valor de d estimado é positivo e $\hat{\phi}$ não está próximo de 1. De acordo com as conclusões obtidas pelas simulações, essas duas características estavam relacionadas a valores maiores de m^* e $\tilde{m}$. Portanto, o valor de m que minimiza o quadrado médio dos erros do modelo é consistente com o resultado obtido nas simulações.

Apresentamos agora, análise de resíduos feita para o modelo obtido quando m=150e d é estimado por d_{sp}. O gráfico dos resíduos padronizados está na Figura 31 e a função de autocorrelação amostral na Figura 32. De acordo com os dois gráficos, não há indícios de tendência dos resíduos ou de autocorrelações altas entre eles.

A normalidade dos resíduos pode ser investigada pelos gráficos das Figuras 33 e 34, que apresentam os escores normais e o histograma dos resíduos padronizados. Esses gráficos não indicam evidências de que os resíduos não tenham distribuição Normal.

Assim, analisando-se a série de velocidade de vento, o modelo obtido apresenta

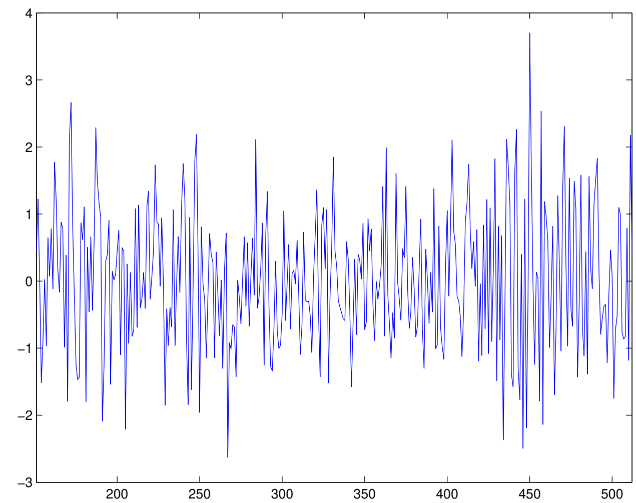

Figura 31: Resíduos Padronizados

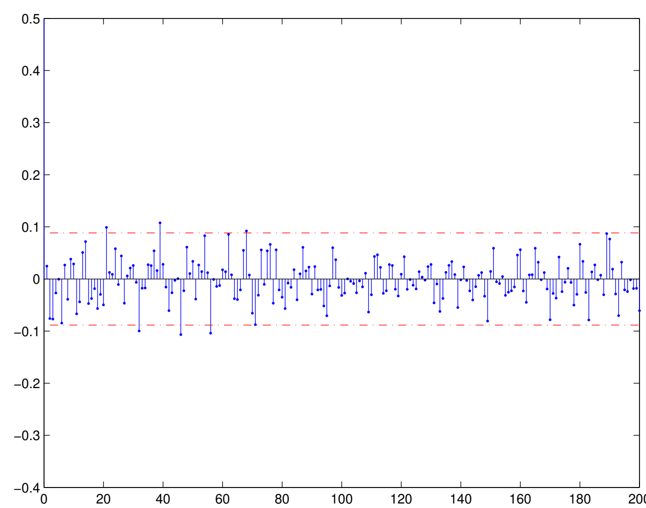

Figura 32: ACF amostral dos resíduos do modelo ARFIMA(1,d,0)

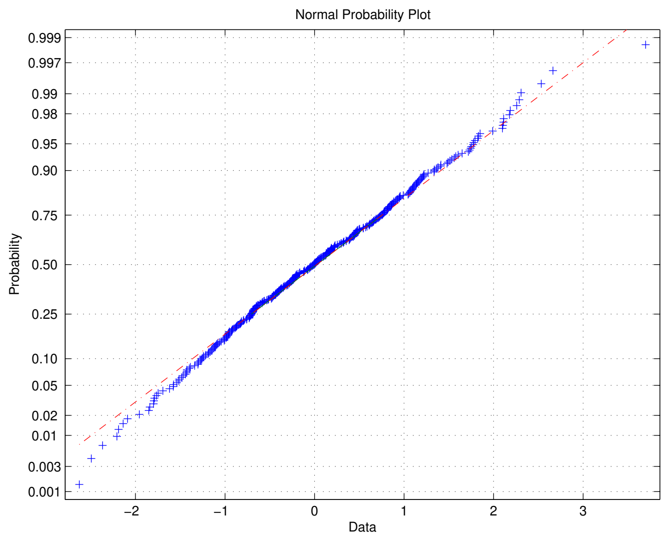

Figura 33: Escores Normais dos resíduos padronizados

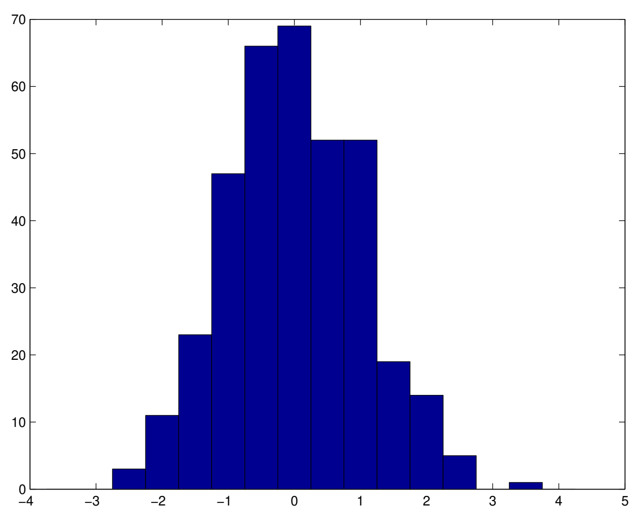

Figura 34: Histograma dos resíduos padronizados

série	d_j	d_{gph}	d_{sp}
1	0.17773	0.30214	0.29165
2	0.12546	0.10256	0.13111
3	0.26029	0.30199	0.29721
4	0.20519	0.25694	0.2956
5	0.25227	0.26923	0.28221
6	0.24039	0.31207	0.23809
7	0.23078	0.48743	0.36015
8	0.18056	0.45273	0.39402
9	0.12949	0.17788	0.23482
10	0.1184	0.17504	0.2428
11	0.06958	0.14183	0.084271
12	0.16581	0.44212	0.32039

Tabela 2: Estimativas de d divedindo-se a série de velocidades de vento em blocos de 512 observações.

o quadrado médio dos resíduos mínimo quando m=150 e esse valor é consistente com os resultados obtidos pela simulação.

Nesta análise, consideramos apenas as primeiras 512 observações da série completa. Para observarmos se existe diferença entre os valores estimados de d ao longo dessa série, consideramos a divisão dela em blocos de 512 observações. A Tabela 2 apresenta as estimativas de d das 12 séries obtidas. Desta forma, a série de número 1 refere-se às primeiras 512 observações da série original, a série 2, às observações de número 513 até 1024 e assim por diante.

Como podemos ver pela Tabela 2, existe uma grande variação dos valores de d estimados ao longo da série, em especial quando d é estimado por d_{gph} ou *dsp*. Isso pode indicar que o valor de d se altera ao longo da série completa.

6 Conclusões

A estimação dos parâmetros do modelo ARFIMA(p,d,q) feita por métodos semi-paramétricos depende fortemente da determinação do valor de m no operador ∇_m^d quando esse é utilizado na transformação do processo ARFIMA em ARMA. Encontrar a informação da série transformada pelo operador truncado não é uma questão simples pois seria necessária a utilização de integração numérica. Para esse tipo de aproximação, o controle sobre o valor do erro cometido é uma questão bastante complexa. Por essa razão, para estudar a relação entre o valor de m e a precisão das estimativas encontradas, realizamos um estudo de simulação. Nesse caso, os resultados assintóticos garantem que o aumento do número de replicações da simulação implica em aumento da precisão das estimativas da variância dos estimadores avaliados.

Os resultados da simulação mostram que m^* e $\tilde{m}$, os valores de m que minimizam, respectivamente, o EQM e o vício dos parâmetros da série obtida pela aplicação do operador ∇_m^d , variam muito em função dos valores reais de ϕ, θ e d.

Quando d é conhecido, de forma geral, os valores $\tilde{m}$ e m^* são maiores para valores de $|d|$ próximos de 0,5. Nesse caso, o efeito da longa dependência é mais forte e os últimos coeficientes de ∇_m^d , mesmo quando m é alto, não são desprezíveis. Além disso, observarmos que $\tilde{m}$ e m^* são maiores também para ϕ e θ próximos de 0. Uma explicação para isso é o efeito relativamente pequeno desses parâmetros quando estes estão próximos de 0 e que se confunde com o efeito de longa dependência não retirado da série quando m escolhido é muito baixo.

Ao estudarmos o mesmo problema considerando d estimado por d_p, d_{sp}, d_o observamos que os valores de $\tilde{m}$ e m^* foram em geral mais baixos do que os ocorridos para d verdadeiro. As relações entre esses valores e os parâmetros d, ϕ e θ foram mantidas. Os resultados sugerem que $\tilde{m}$ e m^* são maiores quando d é estimado por

d_{sp} e menores quando usamos d_o.

Na prática, o que se sugere é que o valor de m usado seja maior quanto d for positivo e $|d|$ estiver próximo de 0,5. Para o tamanho de amostra usado na simulação, a escolha do um valor de m entre 10 e 100, em geral, deve produzir bons resultados. Isso porque, ainda que o EQM não seja mínimo para esses valores, o vício dos estimadores não é tão grande quanto o observado para m menores.

A análise de dados reais apresentada ilustrou o uso dos métodos semi-paramétricos de estimação de d. O QMR do modelo ajustado para a série de velocidade de ventos foi coerente com os resultados obtidos pela simulação. Dado que d estimado é próximo de 0.5 e que $\hat{\phi}$ é próximo de 0, era esperado que o EQM fosse mínimo para um valor de m alto, próximo a 170.

Nesse trabalho, foi estudado apenas um tamanho de amostra. A análise de como a variação desse tamanho pode influenciar a escolha de m é uma questão interessante a ser estudada. Outro possível interesse é o estudo de modelos mais complexos, com maior números de parâmetros na sua forma ARMA. Por fim, o uso do algoritmo iterativo proposto por Hosking e descrito no Capítulo 2 possibilitaria a observação da influência da escolha de m sobre a velocidade de convergência do algoritmo e sobre a qualidade das estimativas de d.

Apêndice

d	-0.2					-0.4				
m	ϕ=-0.9	ϕ=-0.2	ϕ=0.2	ϕ=0.5	ϕ=0.9	ϕ=-0.9	ϕ=-0.2	ϕ=0.2	ϕ=0.5	ϕ=0.9
0	0.00056597	0.021281	0.037475	0.041844	0.019978	0.0010995	0.056259	0.10873	0.14289	0.11478
2	**0.0004018**	0.0020073	**0.0018235**	**0.0014045**	0.0026578	0.00053181	0.0032754	0.0028213	**0.0013594**	0.0089817
4	0.00042137	0.0018958	0.0018816	0.0014348	0.0010938	0.00045655	0.0029092	0.0029929	0.0018615	0.0025165
6	0.00043717	**0.0018861**	0.0018598	0.0015127	0.0006757	**0.00045242**	0.0026649	0.0026459	0.0020984	0.0010821
8	0.00045215	0.0018891	0.0018573	0.001528	0.00052807	0.00046363	0.0025532	0.0024666	0.0020672	0.00063123
10	0.00045803	0.0019104	0.0018612	0.0015259	0.00046985	0.00046728	0.002452	0.0023693	0.0020232	0.00047162
12	0.00046036	0.0019075	0.0018668	0.0015236	0.00044822	0.00047425	0.0024255	0.0022694	0.0019638	0.00041189
15	0.00046527	0.0019229	0.0018585	0.001525	0.00043759	0.00049026	0.002389	0.0022216	0.001903	**0.00039368**
17	0.00046516	0.0019325	0.0018687	0.0015496	**0.00043697**	0.00048087	0.0023451	0.0021949	0.0018772	0.00039786
20	0.00046929	0.001945	0.0018598	0.0015605	0.00044311	0.0004818	0.0023676	0.0021595	0.001865	0.00040822
25	0.00047416	0.0019768	0.0018548	0.0015733	0.00044868	0.00048154	0.0023539	**0.0021002**	0.0018278	0.00043311
30	0.00047241	0.0019814	0.0018678	0.0015975	0.0004583	0.00048893	0.0023339	0.0021292	0.0018263	0.00045547
35	0.00047141	0.0019894	0.0018951	0.0015981	0.00046865	0.00048937	**0.0023188**	0.0021319	0.0017944	0.00047353
40	0.00047681	0.0020129	0.0019146	0.0016129	0.0004706	0.00049425	0.0023223	0.0021407	0.0017811	0.00048264
45	0.00048064	0.0020265	0.0019351	0.0016234	0.00047149	0.00050268	0.0023349	0.0021551	0.0017878	0.00048663
50	0.00048222	0.0020506	0.0019496	0.0016456	0.00047406	0.00050835	0.0023533	0.002174	0.0018027	0.00049061
55	0.00048661	0.0020836	0.0019771	0.001664	0.00047518	0.00051427	0.0023621	0.0021757	0.0018279	0.00050093
60	0.00049054	0.0021188	0.0020158	0.0016892	0.00047925	0.0005204	0.0023845	0.0021682	0.0018569	0.00051058
65	0.00049915	0.0021621	0.0020342	0.0017129	0.00048795	0.00051842	0.0024513	0.0022014	0.0018612	0.00052217
70	0.00050727	0.0021854	0.0020252	0.0017497	0.00049252	0.00052736	0.0024869	0.0022372	0.0018737	0.0005231
75	0.00050832	0.0022234	0.0020545	0.0017974	0.00051152	0.00052839	0.002505	0.0022217	0.0018798	0.00053097
80	0.00051829	0.0022508	0.0020873	0.0018305	0.00052026	0.00053994	0.0025251	0.0022155	0.0018718	0.00053195
90	0.00052689	0.0023103	0.0021109	0.001874	0.00053794	0.00056181	0.0025525	0.0023135	0.0019245	0.00053916
110	0.00055174	0.0023711	0.0021684	0.001999	0.00057421	0.00060689	0.0026098	0.0024349	0.0019818	0.00055537
130	0.00058778	0.0024778	0.0023291	0.0020579	0.00060287	0.00065483	0.0027619	0.0025662	0.0020856	0.0005776
150	0.00063584	0.0026086	0.0024863	0.0021127	0.00064445	0.00070596	0.0030422	0.0026905	0.0022531	0.00061213
170	0.00069375	0.0028116	0.0026198	0.0022459	0.00067904	0.0007519	0.0032383	0.0028886	0.0023887	0.00066751

Tabela 3: EQM do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d verdadeiro

d	0.2					0.4				
m	ϕ=-0.9	ϕ=-0.2	ϕ=0.2	ϕ=0.5	ϕ=0.9	ϕ=-0.9	ϕ=-0.2	ϕ=0.2	ϕ=0.5	ϕ=0.9
0	0.0030511	0.058907	0.062648	0.044105	0.0042757	0.067751	0.47931	0.31971	0.15717	0.008383
2	0.00051053	0.0026271	0.0028832	0.0033717	0.0015891	0.0018865	0.029476	0.033658	0.03012	0.0050789
4	0.00043187	0.0022877	0.0022516	0.0020499	0.00092876	0.00093735	0.013348	0.015943	0.014463	0.0034173
6	0.00041382	0.0021864	0.0021089	0.0018002	0.00069098	0.00071516	0.0083754	0.010169	0.009424	0.0025444
8	0.00040885	0.002146	0.0020398	0.0017128	0.00058874	0.00062337	0.0061242	0.0074754	0.006989	0.0020331
10	0.00040772	0.0021291	0.0020141	0.001676	0.00054246	0.00057939	0.0048778	0.0059767	0.0055787	0.0017067
12	0.00040879	**0.0021254**	0.001995	0.0016458	0.00051434	0.00055273	0.0041372	0.0050554	0.0046602	0.0014856
15	**0.00040618**	0.0021441	**0.0019946**	0.0016279	0.00048917	0.00052813	0.0034833	0.0041954	0.0038085	0.0012582
17	0.00040708	0.0021475	0.0019899	0.0016184	0.00047856	0.00052381	0.003208	0.0038319	0.0034342	0.0011459
20	0.00041102	0.0021551	0.001998	0.0016155	0.00046561	0.00051278	0.0029414	0.0034517	0.0030304	0.0010223
25	0.00041119	0.0021407	0.0019953	**0.0015971**	0.00045907	0.00050515	0.0026489	0.003065	0.0026065	0.00088972
30	0.0004164	0.0021343	0.002008	0.0016087	0.00044991	0.00050116	0.0024814	0.0028344	0.0023369	0.00080025
35	0.00041598	0.0021437	0.0020454	0.0016148	0.00044731	0.00049752	0.002361	0.0026838	0.0021864	0.00074332
40	0.00042335	0.0021816	0.0020609	0.0016342	**0.00044785**	**0.00049676**	0.0023001	0.0025375	0.0020655	0.00070048
45	0.00042505	0.0021949	0.0020795	0.0016325	0.00044904	0.00049973	0.0022712	0.0024855	0.0019785	0.00066468
50	0.00043339	0.0022085	0.0020571	0.0016516	0.00044725	0.00050574	**0.0022462**	0.0024646	0.0019415	0.00064125
55	0.00044479	0.0022095	0.0020575	0.0016906	0.00046078	0.00051763	0.0022627	0.0024404	0.0018969	0.0006225
60	0.00044586	0.0022221	0.0021061	0.0017404	0.00046361	0.0005158	0.0022725	0.0024358	0.0018702	0.00061093
65	0.00044795	0.0022414	0.0021191	0.0017778	0.00047423	0.00051524	0.0022772	0.0024385	0.0018651	0.00060088
70	0.00044951	0.002279	0.0021315	0.0017833	0.00047744	0.00052145	0.002286	0.0024501	**0.0018625**	0.00059446
75	0.00046016	0.0023038	0.0021544	0.0018063	0.00048762	0.00052804	0.0023103	**0.002422**	0.0018677	0.00058563
80	0.00046805	0.0023332	0.0021581	0.0018378	0.00049573	0.0005259	0.0022907	0.0024299	0.0018892	0.00058126
90	0.0004698	0.0023637	0.0021885	0.0018845	0.0005073	0.0005386	0.0023232	0.0024816	0.0018996	**0.0005724**
110	0.00051	0.0024135	0.0023121	0.0019695	0.0005415	0.0005714	0.0024325	0.0025592	0.0019481	0.0005764
130	0.0005527	0.0025467	0.0024024	0.0021049	0.0005863	0.0006087	0.0025701	0.0026505	0.002051	0.0005969
150	0.0005751	0.0027245	0.0025224	0.0021924	0.0006153	0.0006482	0.0028094	0.0027417	0.0021805	0.0006162
170	0.0006144	0.0029266	0.0026867	0.0023336	0.0006686	0.0006935	0.0030039	0.0028728	0.0023091	0.0006437

Tabela 4: EQM do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d verdadeiro (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,0025591	0,035817	0,045902	0,038317	0,0033902	0,0094402	0,15272	0,17687	0,12105	0,0055726
2	0,0008142	**0,0019731**	0,0022388	0,0022944	0,0015147	0,0012358	0,0022039	0,0035567	0,0040135	0,003805
4	0,00060972	0,0020771	0,0020919	0,0018428	0,00091479	0,00078196	0,0025504	0,0029195	0,0028549	0,0024566
6	0,00059863	0,0020578	**0,0020492**	0,001746	0,00079741	0,00060497	0,0024221	0,0025669	0,0025048	0,0014618
8	**0,00059135**	0,002072	0,0020505	0,0016962	0,00068765	**0,00053137**	0,002368	0,0024221	0,0023014	0,0011849
10	0,00055647	0,0020691	0,002068	0,0017	0,00071097	0,00054871	0,0022881	0,0023144	0,0021848	0,0011001
12	0,00061029	0,0020978	0,0020514	0,0016828	0,00063114	0,00056423	0,0022677	0,0022367	0,0021012	0,0010138
15	0,00059606	0,0021231	0,0020512	**0,0016578**	0,00062323	0,00059384	0,0022288	0,0022208	0,0020258	0,00093215
17	0,00060726	0,0021245	0,0020533	0,0016786	0,00060397	0,00060474	0,002227	0,0021993	0,002006	0,00088991
20	0,00060184	0,0021409	0,0020973	0,0017052	0,00063163	0,00056283	0,0022069	**0,0021549**	0,0020029	0,00084769
25	0,00064778	0,0021787	0,002105	0,0017366	0,00058821	0,00060129	**0,0022038**	0,0021719	**0,001952**	0,0007769
30	0,00063128	0,0021649	0,0021353	0,0017601	0,00058502	0,00056014	0,0022316	0,0021721	0,0019539	0,00072897
35	0,00065261	0,0021974	0,0021512	0,0017942	0,00060235	0,00057318	0,0022405	0,0021753	0,0019645	0,00070376
40	0,00067416	0,0021672	0,0021881	0,0018275	0,00060694	0,00060439	0,0022314	0,0021982	0,0019591	**0,00069094**
45	0,00064957	0,0021965	0,002198	0,0018331	0,0006039	0,0006388	0,0022448	0,0022032	0,0019772	0,00071671
50	0,00067178	0,0022036	0,0022537	0,0018586	0,00060579	0,00062656	0,0022539	0,0021956	0,001962	0,00071058
55	0,00069649	0,0022354	0,0022853	0,001866	**0,00057119**	0,00066388	0,0022948	0,0022398	0,0019962	0,00069603
60	0,0006873	0,0022386	0,0023054	0,0018886	0,00061981	0,00064074	0,0023269	0,002276	0,0020059	0,00071422
65	0,00066581	0,002263	0,0022991	0,0018736	0,00058661	0,00063326	0,0023632	0,0022907	0,002	0,00070936
70	0,00070422	0,0023203	0,0023542	0,0018922	0,00065389	0,00065372	0,0024105	0,0023179	0,0020375	0,00077622
75	0,00070291	0,0023722	0,0023529	0,001916	0,00060066	0,00069557	0,00242	0,0023464	0,0020644	0,00076515
80	0,0006945	0,0023981	0,002375	0,0019358	0,00062808	0,00068947	0,0024595	0,0023621	0,0020808	0,00073187
90	0,0007516	0,0024138	0,0024597	0,0019815	0,0006364	0,0006697	0,0024674	0,002431	0,002096	0,0007573
110	0,0007835	0,0025449	0,0025858	0,0020954	0,0006856	0,0007573	0,0025578	0,0025201	0,0021753	0,0008353
130	0,0008741	0,0027578	0,0026642	0,0021958	0,0007639	0,0008314	0,0027022	0,0026055	0,0022447	0,0007958
150	0,0008805	0,0028391	0,0028174	0,0023264	0,000794	0,0008781	0,0028724	0,0027187	0,0024258	0,000896
170	0,0009412	0,0029855	0,0029746	0,0024546	0,0009417	0,0009222	0,0031115	0,0029642	0,0025222	0,0008961

Tabela 5: EQM do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d verdadeiro

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,00089862	0,033465	0,051752	0,052707	0,023737	0,0028754	0,16054	0,27239	0,29706	0,15775
2	**0,00045919**	0,0023462	0,0027323	0,0027163	0,002427	0,00056453	0,013623	0,023062	0,024543	0,011223
4	0,00052606	0,0020998	0,00241	0,001935	0,0012664	**0,00048313**	0,006715	0,011905	0,012791	0,0057291
6	0,00051479	0,0020615	0,0022793	0,0017823	0,00092168	0,00050878	0,004779	0,0081032	0,0086377	0,0038554
8	0,00052334	**0,0020455**	0,0022157	0,0017153	0,0007592	0,00050945	0,0038631	0,0062229	0,0065865	0,0030213
10	0,00053997	0,0020459	0,0022006	0,001684	0,00072204	0,00050084	0,0033775	0,0051572	0,0053632	0,002485
12	0,0005303	0,0020468	0,0021744	0,0016653	0,00068742	0,00050383	0,003068	0,0044525	0,0045686	0,0021309
15	0,00055262	0,0020524	0,0021431	0,0016472	0,00066254	0,00054307	0,0027825	0,0038284	0,0038284	0,0017675
17	0,00054044	0,0020603	0,0021258	0,0016562	0,00062776	0,00053843	0,0026526	0,0035468	0,0034916	0,0016277
20	0,00055495	0,0020645	**0,0021176**	0,001637	0,0006926	0,00058336	0,0025207	0,0032484	0,0031398	0,0015164
25	0,00059146	0,0020881	0,0021335	**0,0016318**	**0,00062099**	0,00055114	0,0024026	0,0029688	0,0027274	0,0012677
30	0,00061412	0,002109	0,0021507	0,0016545	0,00063395	0,00057174	0,0023855	0,0028057	0,0025245	0,001142
35	0,00059623	0,0021148	0,0021403	0,0016863	0,00065508	0,00057318	0,0023569	0,0027058	0,0023531	0,0010774
40	0,00060513	0,0021183	0,0021311	0,0017074	0,00068108	0,00058252	**0,002316**	0,0026374	0,0022486	0,0010171
45	0,00061007	0,0021565	0,0021459	0,0017186	0,00064979	0,00059658	0,0023455	0,0026075	0,0021711	0,00094417
50	0,00063511	0,00219	0,0021736	0,001726	0,00066689	0,0006284	0,0023552	0,0025722	0,0021161	0,00090885
55	0,00058854	0,0022084	0,002179	0,0017334	0,00063561	0,00062786	0,0023612	0,0025385	0,002052	0,00093519
60	0,00060175	0,002241	0,0022281	0,0017729	0,00068611	0,00062346	0,0023735	0,0025134	0,0020359	0,00089192
65	0,00066056	0,0022595	0,0022311	0,001775	0,00068762	0,00067055	0,0023684	**0,0025317**	0,0020427	0,00083707
70	0,00068087	0,0022555	0,0022639	0,0018282	0,00064597	0,00064815	0,0024016	0,0025361	0,0020299	0,0008263
75	0,00067564	0,002258	0,0022938	0,0018543	0,00073716	0,00068091	0,0024119	0,0025359	**0,0020085**	0,00083635
80	0,00073436	0,0022856	0,0022767	0,0018634	0,00070461	0,00068663	0,0024166	0,0025603	0,0020277	**0,00081592**
90	0,0007126	0,0023563	0,0023208	0,0018785	0,0007674	0,0006828	0,0024484	0,0025846	0,0020268	0,000816
110	0,0007148	0,0024651	0,0024147	0,00196	0,000778	0,000837	0,0025492	0,0026298	0,0020471	0,0008789
130	0,0008057	0,002621	0,0025692	0,0020956	0,000801	0,0007579	0,0026152	0,0027528	0,0021485	0,0008756
150	0,0008354	0,0027786	0,0027048	0,0022273	0,0009028	0,0008193	0,0027354	0,002906	0,0022348	0,0009347
170	0,0009067	0,0030013	0,0028904	0,0023475	0,0009378	0,000845	0,0029569	0,0030464	0,0023399	0,0009634

Tabela 6: EQM do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d verdadeiro (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	-0,01687	-0,14091	-0,1891	-0,20059	-0,13751	-0,02983	-0,2343	-0,32729	-0,37569	-0,33597
2	-0,00364	0,005566	0,004613	-0,01182	-0,04656	-0,01359	0,023403	0,031896	-0,01243	-0,09181
4	**-6,59E-5**	0,005231	0,003624	0,00358	-0,02607	-0,00711	0,022556	0,030995	0,019289	-0,04582
6	0,001527	0,003938	0,001581	0,004539	-0,01667	-0,00343	0,018054	0,025187	0,022108	-0,02649
8	0,002392	0,002991	**0,000161**	0,00382	-0,01154	-0,00113	0,014836	0,021302	0,020134	-0,01616
10	0,002927	0,00252	-0,00072	0,002905	-0,00842	**0,000373**	0,012579	0,019028	0,018087	-0,00995
12	0,003218	0,002245	-0,00137	0,002184	-0,00645	0,001454	0,010576	0,017053	0,01602	-0,00604
15	0,004403	0,001708	-0,0018	0,001547	-0,00463	0,006758	0,009342	0,014926	0,013644	-0,00256
17	0,004224	0,001329	-0,00196	0,001266	-0,00385	0,005979	0,008076	0,013924	0,012415	-0,00108
20	0,003691	0,001045	-0,00225	0,000821	-0,00314	0,003204	0,007203	0,01253	0,010863	0,00029
25	0,004051	0,001016	-0,00283	**0,00025**	-0,00264	0,004619	0,006226	0,010663	0,009177	0,001163
30	0,003762	0,000861	-0,00328	-0,0003	**-0,00261**	0,003658	0,005151	0,008859	0,007502	0,001268
35	0,003792	0,00048	-0,00322	-0,00066	-0,00263	0,003911	0,00503	0,008395	0,006503	0,001053
40	0,003773	0,000435	-0,00361	-0,00085	-0,0027	0,003683	0,00466	0,007873	0,005455	0,000689
45	0,003777	0,000462	-0,00379	-0,00099	-0,00292	0,003868	0,004176	0,007149	0,005095	0,00033
50	0,003736	**0,000373**	-0,00391	-0,00121	-0,00296	0,00389	0,004048	0,006402	0,004455	**-4,16E-5**
55	0,003797	0,000677	-0,00385	-0,00116	-0,00299	0,003953	0,003714	0,005897	0,003865	-0,00046
60	0,003811	0,000731	-0,00412	-0,00136	-0,00309	0,004064	0,00359	0,005319	0,00333	-0,00069
65	0,003868	0,000688	-0,00409	-0,00163	-0,00319	0,00412	0,003296	0,005063	0,002482	-0,00097
70	0,003977	0,000684	-0,00417	-0,00188	-0,00342	0,00413	0,002922	0,004672	0,001868	-0,00116
75	0,004091	0,000521	-0,00416	-0,00207	-0,0036	0,00413	0,002962	0,004265	0,001772	-0,00134
80	0,004204	0,000874	-0,00429	-0,00219	-0,00372	0,004013	0,003099	0,003519	0,001368	-0,00146
90	0,004211	0,000865	-0,0042	-0,00227	-0,00403	0,004017	0,002873	0,003055	0,001106	-0,0017
110	0,004223	0,000932	-0,00387	-0,00277	-0,00446	0,003994	**0,00236**	0,002101	0,00053	-0,00222
130	0,004361	0,001084	-0,0041	-0,00233	-0,00494	0,004461	0,002551	0,002074	-0,00061	-0,00268
150	0,004506	0,001094	-0,00411	-0,00291	-0,00537	0,004975	0,003316	**0,00174**	-0,00086	-0,00337
170	0,00494	0,000665	-0,00484	-0,00291	-0,00569	0,005437	0,003265	0,002018	**-0,00084**	-0,00387

Tabela 7: Vício do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d verdadeiro

d	0,2					0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	0,047833	0,23579	0,24521	0,2068	0,064545	0,23056	0,6789	0,56032	0,39462	0,091396
2	0,009614	0,019175	0,019883	0,035291	0,035465	0,027759	0,12393	0,14186	0,1487	0,069171
4	0,006136	0,011175	0,009006	0,013585	0,022205	0,01576	0,072695	0,084569	0,088613	0,053321
6	0,005013	0,00851	0,005522	0,008001	0,014564	0,011802	0,052068	0,060472	0,064353	0,042261
8	0,00452	0,006968	0,00349	0,005552	0,00965	0,00994	0,040691	0,046979	0,050963	0,034443
10	0,004305	0,006094	0,002294	0,003994	0,006394	0,008807	0,033258	0,038216	0,042228	0,02878
12	0,004157	0,005584	0,001573	0,003153	0,004235	0,00817	0,02833	0,032025	0,035911	0,024521
15	**0,003797**	0,005156	0,000716	0,002325	0,002123	0,007355	0,023367	0,025805	0,029339	0,01991
17	0,00382	0,004992	**0,00015**	0,001813	**0,001173**	0,007158	0,020912	0,022732	0,026008	0,017628
20	0,003938	0,00482	-0,00031	0,001233	0,000215	0,006906	0,018288	0,01928	0,022174	0,015001
25	0,003836	0,004602	-0,00066	0,000797	-0,00084	0,006547	0,014735	0,014991	0,018052	0,011916
30	0,003861	0,00437	-0,00116	0,000437	-0,00131	0,006432	0,01277	0,012361	0,014929	0,009862
35	0,003815	**0,003988**	-0,00167	**5,41E-05**	-0,00166	0,006209	0,011305	0,010066	0,012814	0,008313
40	0,00396	0,004046	-0,00176	-0,00022	-0,00183	0,006001	0,009892	0,008362	0,01126	0,006981
45	0,004024	0,004089	-0,00198	-0,00029	-0,00205	0,006012	0,008678	0,007073	0,009946	0,006095
50	0,004135	0,004101	-0,00213	-0,00057	-0,00207	0,005958	0,007665	0,005982	0,008789	0,005238
55	0,004171	0,004204	-0,00219	-0,00074	-0,00235	0,005941	0,006935	0,005406	0,008035	0,004546
60	0,00415	0,00429	-0,0025	-0,00107	-0,00245	0,005937	0,006452	0,004955	0,007479	0,003906
65	0,004188	0,004499	-0,00271	-0,00125	-0,00253	0,005838	0,005948	0,004377	0,006833	0,003355
70	0,004122	0,004488	-0,00298	-0,0013	-0,00262	0,005801	0,00565	0,003833	0,006224	0,002895
75	0,004207	0,004547	-0,00307	-0,00144	-0,00277	0,005837	0,005279	0,003398	0,005852	0,002496
80	0,004328	0,004488	-0,00317	-0,00167	-0,00285	**0,005682**	0,004948	0,003039	0,005418	0,002107
90	0,00451	0,004307	-0,00332	-0,0016	-0,00289	0,0059	0,004354	2,40E-03	0,004852	0,001631
110	0,004715	0,004206	-0,00371	-0,00133	-0,00324	0,006183	0,003332	0,001283	0,003618	0,000488
130	0,004939	0,004217	-0,0044	-0,00131	-0,00368	0,006565	0,00265	0,000796	0,002997	**-0,00021**
150	0,005022	0,0041	-0,00393	-0,00121	-0,00397	0,006897	**0,002529**	**8,98E-05**	0,001951	-0,00092
170	0,005067	0,004057	-0,00493	-0,00184	-0,00463	0,007548	0,002597	-0,00053	**0,001901**	-0,00166

Tabela 8: Vício do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d verdadeiro (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,03906	0,18211	0,20921	0,19247	0,055242	0,083566	0,38603	0,41812	0,34671	0,072143
2	0,014336	-0,00679	-0,00901	0,010571	0,031348	0,025023	-0,01844	-0,03247	0,012574	0,05688
4	0,008794	-0,00683	-0,00817	-0,00426	0,015949	0,015263	-0,02097	-0,02838	-0,02362	0,039872
6	0,007319	-0,0054	-0,00625	-0,00443	0,006208	0,01074	-0,01767	-0,02271	-0,02145	0,017204
8	0,007712	-0,00436	-0,005	-0,00343	**0,00074**	0,008421	-0,015	-0,01883	-0,01853	0,003854
10	0,006015	-0,00384	-0,00425	-0,00251	-0,00201	0,007593	-0,01254	-0,01642	-0,01589	**-0,00367**
12	0,006494	-0,0036	-0,00382	-0,00168	-0,00303	0,007126	-0,01058	-0,01427	-0,01331	-0,00872
15	**0,00543**	-0,00313	-0,00293	-0,00092	-0,00485	**0,003511**	-0,00935	-0,01194	-0,01096	-0,01126
17	0,006454	-0,00295	-0,00264	-0,00083	-0,00571	0,003677	-0,00865	-0,01103	-0,01005	-0,01199
20	0,006757	-0,0026	-0,00233	-0,00052	-0,00658	0,005597	-0,00747	-0,00964	-0,00867	-0,01307
25	0,006912	-0,00205	-0,00204	**2,65E-06**	-0,00476	0,005585	-0,00632	-0,00813	-0,00701	-0,01261
30	0,007119	-0,00194	-0,0018	0,000126	-0,00629	0,00537	-0,00532	-0,00722	-0,00574	-0,01194
35	0,007005	-0,00188	-0,00184	0,000437	-0,00603	0,005349	-0,00445	-0,00615	-0,00532	-0,01104
40	0,007591	-0,00186	-0,00207	0,00045	-0,00577	0,005373	-0,00381	-0,00553	-0,00482	-0,01049
45	0,006901	**-0,00168**	-0,00214	0,000842	-0,00577	0,006833	-0,00323	-0,00524	-0,0041	-0,01133
50	0,007551	-0,00183	-0,00197	0,000701	-0,00549	0,006492	-0,0029	-0,00453	-0,00324	-0,01098
55	0,007483	-0,00195	-0,00175	0,000798	-0,00541	0,00634	-0,00285	-0,004	-0,00293	-0,01025
60	0,007289	-0,00181	-0,00153	0,001026	-0,00609	0,006932	-0,00235	-0,00371	-0,00296	-0,01058
65	0,007446	-0,00178	-0,00164	0,000873	-0,00505	0,006723	-0,00226	-0,00395	-0,00245	-0,00977
70	0,007985	-0,00191	-0,00184	0,000972	-0,00595	0,00678	-0,00213	-0,00364	-0,0024	-0,01075
75	0,00716	-0,00189	-0,00177	0,000971	-0,00509	0,007062	-0,0021	-0,00348	-0,0021	-0,01037
80	0,008208	-0,00213	-0,00173	0,001099	-0,0053	0,006265	-0,00205	-0,00305	-0,00199	-0,00942
90	0,0081632	-0,002063	-0,0014	0,0013652	-0,00505	0,0065406	-0,00224	-0,002708	-0,0016	-0,00952
110	0,0086048	-0,002538	**-0,00129**	0,0012611	-0,00628	0,0075745	-0,00182	-0,002818	-0,00077	-0,01035
130	0,0087137	-0,001741	-0,00141	0,0013598	-0,00698	0,0085634	-0,00141	-0,002075	**-1,53E-06**	-0,00956
150	0,0085531	-0,00197	-0,00221	0,0015645	-0,00587	0,0079959	-0,0012	-0,001977	-6,07E-06	-0,010077
170	0,009458	-0,002293	-0,00146	0,0017955	-0,00666	0,0088324	**-0,00064**	**-0,001497**	-3,13E-05	-0,00995

Tabela 9: Vício do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d verdadeiro

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	-0,02382	-0,17833	-0,2226	-0,2252	-0,14931	-0,05098	-0,39564	-0,51437	-0,53681	-0,3927
2	**-0,00016**	-0,01477	-0,02011	-0,03178	-0,04319	-0,0103	-0,08857	-0,118	-0,12877	-0,0973
4	0,002826	-0,00827	-0,01107	-0,0146	-0,02744	-0,00325	-0,0521	-0,07394	-0,08089	-0,06513
6	0,00372	-0,00605	-0,00747	-0,00984	-0,02073	**-0,00023**	-0,03767	-0,05463	-0,06035	-0,05032
8	0,005118	-0,0048	-0,00535	-0,00757	-0,01647	0,001298	-0,02955	-0,04372	-0,04842	-0,04202
10	0,005465	-0,00408	-0,00424	-0,00643	-0,01454	0,002101	-0,02425	-0,03663	-0,04081	-0,03646
12	0,005333	-0,00361	-0,00337	-0,00553	-0,01269	0,003242	-0,02077	-0,03123	-0,03525	-0,03281
15	0,004913	-0,00295	-0,00248	-0,00476	-0,01087	0,003829	-0,01687	-0,02574	-0,02959	-0,02819
17	0,004916	-0,00266	-0,00207	-0,00431	-0,00966	0,00429	-0,01508	-0,02295	-0,0266	-0,02597
20	0,005716	-0,00242	-0,00166	-0,00405	-0,01015	0,005184	-0,01297	-0,01991	-0,02323	-0,02434
25	0,005838	-0,00213	-0,00111	-0,00351	-0,00825	0,004265	-0,01068	-0,01634	-0,01935	-0,02106
30	0,006503	-0,00202	-0,00084	-0,00315	-0,00762	0,00485	-0,0088	-0,01401	-0,01665	-0,01936
35	0,005653	-0,00185	-0,00059	-0,00312	-0,00786	0,004835	-0,00773	-0,01235	-0,01465	-0,01831
40	0,006871	-0,00139	-0,00028	-0,00286	-0,00828	0,004775	-0,0063	-0,01103	-0,01313	-0,0169
45	0,005817	**-0,00129**	**-2,54E-5**	-0,00293	-0,00792	0,005613	-0,0057	-0,00999	-0,01197	-0,01586
50	0,00593	-0,00142	0,000161	-0,00235	-0,00699	0,005854	-0,00521	-0,00913	-0,0108	-0,0153
55	0,005566	-0,00148	0,000192	-0,00258	-0,00777	0,005644	-0,00468	-0,00842	-0,0102	-0,01582
60	0,006408	-0,00139	0,000182	-0,00258	-0,00766	0,005404	-0,00437	-0,00758	-0,00913	-0,01456
65	0,006121	-0,00163	0,000326	-0,00242	-0,00761	0,00673	-0,00394	-0,00698	-0,00873	-0,0134
70	0,006729	-0,00169	0,00011	-0,0024	**-0,00683**	0,006159	-0,00362	-0,00649	-0,00814	-0,01317
75	0,007509	-0,00173	0,000123	-0,00223	-0,00817	0,00665	-0,00347	-0,00632	-0,00766	-0,01335
80	0,007095	-0,00184	-6,75E-05	-0,00193	-0,00774	0,006652	-0,00312	-0,00579	-0,00734	-0,01259
90	0,0069602	-0,001938	3,42E-04	-0,001541	-0,00784	0,0064715	-0,002618	-0,004785	-0,0061	-0,01231
110	0,0073892	-0,001977	2,25E-04	-0,001225	-0,007634	0,0073513	-0,001948	-0,004272	-0,005702	**-0,011355**
130	0,0074442	-0,002546	4,04E-04	-0,000901	-0,007898	0,0073106	-0,001125	-0,003562	-0,005238	-0,011788
150	0,0075593	-0,002845	4,34E-04	**-0,000585**	-0,008015	0,0074724	-0,00052	-0,003088	-0,004207	-0,01204
170	0,0082208	-0,003087	8,45E-04	-0,001354	-0,007982	0,0087368	**8,22E-05**	**-0,002052**	**-0,003727**	-0,012442

Tabela 10: Vício do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d verdadeiro (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	**0,00056597**	0,021281	0,037475	**0,041844**	**0,019978**	0,0010995	0,056259	0,10873	0,14289	**0,11478**
2	0,00099618	**0,0087725**	**0,0099014**	0,051172	0,35114	**0,00051387**	**0,0056634**	**0,014175**	**0,065732**	0,41029
4	0,001968	0,0096991	0,010392	0,050751	0,38734	0,00055161	0,0059541	0,016709	0,066895	0,42872
6	0,0027118	0,0098347	0,0106	0,050497	0,38917	0,00066169	0,0059865	0,017878	0,068664	0,42875
8	0,0032911	0,0098364	0,010698	0,050462	0,38609	0,00076742	0,0060486	0,01851	0,069763	0,4259
10	0,0037212	0,0098413	0,010761	0,05046	0,38264	0,00085302	0,0059793	0,018868	0,070393	0,42296
12	0,0040395	0,0098083	0,010768	0,050473	0,37995	0,00092948	0,0059683	0,019131	0,070865	0,42074
15	0,0056031	0,0097617	0,010772	0,05048	0,3765	0,00132	0,0059686	0,019428	0,071287	0,41807
17	0,0054975	0,0096423	0,010776	0,050454	0,37459	0,0012594	0,0059501	0,019585	0,07154	0,41676
20	0,0047899	0,0095059	0,010786	0,050423	0,37245	0,0010703	0,0059041	0,019693	0,071733	0,41506
25	0,0054465	0,0096041	0,010792	0,050465	0,37054	0,0011729	0,0058877	0,0199	0,071963	0,41372
30	0,0051999	0,0095768	0,010805	0,050566	0,36979	0,0010949	0,005843	0,0201	0,072179	0,41298
35	0,005449	0,0094551	0,010845	0,050575	0,36921	0,001148	0,0058375	0,020196	0,072173	0,41267
40	0,0054513	0,0094052	0,010881	0,05052	0,36902	0,0011169	0,0058384	0,020268	0,072303	0,41237
45	0,0055601	0,0094245	0,010878	0,050553	0,369	0,0011717	0,0058952	0,020345	0,072275	0,41241
50	0,0055656	0,0093967	0,0109	0,050658	0,36896	0,00115	0,0058243	0,020488	0,072353	0,41271
55	0,0057083	0,0094855	0,01091	0,050649	0,369	0,0011867	0,0058361	0,020559	0,072492	0,41287
60	0,0057074	0,0096068	0,010985	0,050669	0,3692	0,0011702	0,0058219	0,020669	0,072564	0,41278
65	0,0057683	0,009682	0,010981	0,05079	0,36925	0,0011697	0,0059566	0,020679	0,072656	0,41305
70	0,0058655	0,009843	0,010939	0,050963	0,36946	0,0011504	0,0059886	0,020718	0,072823	0,41277
75	0,0058937	0,0098633	0,010974	0,050995	0,36968	0,0011764	0,0060772	0,020767	0,072814	0,41263
80	0,0059557	0,01001	0,011019	0,05105	0,36961	0,0011891	0,0060745	0,020888	0,072854	0,41254
90	0,006068	0,0101	0,010971	0,05109	0,37009	0,00121	0,006147	0,021042	0,072933	0,41259
110	0,00631	0,010373	0,01103	0,05125	0,37075	0,001285	0,00623	0,021242	0,072748	0,41221
130	0,006485	0,010662	0,011193	0,05105	0,37159	0,001351	0,006294	0,02132	0,073148	0,4128
150	0,006688	0,010922	0,01133	0,051357	0,37182	0,001436	0,006676	0,021414	0,073216	0,41344
170	0,006929	0,011139	0,011539	0,051639	0,37328	0,001504	0,006824	0,02164	0,07316	0,4133

Tabela 11: EQM do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_o

d	0,2					0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	**0,0030511**	0,058907	0,062648	0,044105	**0,0042757**	0,067751	0,47931	0,31971	0,15717	**0,008383**
2	0,0092651	0,021235	**0,0060356**	**0,02381**	0,24161	0,052755	0,10577	0,037566	**0,014115**	0,1973
4	0,012046	0,020213	0,0062531	0,028848	0,28633	0,051786	0,076288	0,022339	0,01644	0,22177
6	0,013708	0,019872	0,0064326	0,0293	0,28982	**0,051735**	0,064171	0,017282	0,018139	0,22611
8	0,014856	0,019622	0,0065284	0,029373	0,28796	0,051944	0,057318	0,014844	0,019221	0,22679
10	0,015688	0,019519	0,0065905	0,029442	0,28555	0,052175	0,052784	0,013354	0,019953	0,22662
12	0,016326	0,019461	0,0066459	0,029409	0,28326	0,052428	0,04964	0,012378	0,020478	0,22633
15	0,017498	0,019428	0,006696	0,029389	0,28088	0,052948	0,046322	0,01141	0,021039	0,2261
17	0,017753	**0,019423**	0,0067038	0,029411	0,27983	0,053218	0,044657	0,010944	0,021319	0,22572
20	0,017977	0,019456	0,0067339	0,029469	0,27857	0,053515	0,042742	0,010443	0,021653	0,22546
25	0,018726	0,019474	0,0067796	0,029358	0,27719	0,054106	0,040281	0,0098137	0,021853	0,22542
30	0,019229	0,019459	0,0068253	0,029303	0,27617	0,054546	0,038616	0,0093853	0,022095	0,22528
35	0,019764	0,01944	0,0068828	0,029372	0,27574	0,054998	0,037332	0,00911	0,022254	0,22519
40	0,020245	0,019525	0,0068972	0,029392	0,27547	0,055367	0,036281	0,0088003	0,022324	0,22542
45	0,020801	0,019593	0,0068864	0,029374	0,27538	0,055803	0,035395	0,0085912	0,022403	0,22545
50	0,021254	0,019598	0,0068294	0,029398	0,27505	0,056091	0,03458	0,0084369	0,022539	0,22551
55	0,0217	0,019635	0,0068259	0,029427	0,27502	0,056434	0,033944	0,0082944	0,022553	0,22545
60	0,022094	0,019684	0,0068225	0,029583	0,27513	0,056713	0,033442	0,0081788	0,022612	0,22548
65	0,022446	0,019705	0,0067987	0,029615	0,27532	0,05688	0,032997	0,0080584	0,022679	0,22575
70	0,022788	0,019752	0,0068157	0,029682	0,27548	0,057138	0,032614	0,0080317	0,022741	0,22574
75	0,02315	0,019749	0,0068689	0,029789	0,27577	0,057297	0,032329	0,0079264	0,022792	0,2261
80	0,023629	0,019762	0,0068839	0,029891	0,27618	0,057455	0,031964	0,0078927	0,022876	0,22611
90	0,02435	0,019757	0,006931	0,029935	0,27594	0,058134	0,03156	0,0078	0,022895	0,22597
110	0,02538	0,019938	0,007012	0,029887	0,27638	0,059618	0,030677	0,007797	0,023106	0,22652
130	0,026449	0,020097	0,007049	0,029922	0,27671	0,060526	0,030373	**0,007776**	0,023242	0,22664
150	0,027212	0,020259	0,007249	0,029961	0,27726	0,06174	0,030248	0,007828	0,023445	0,22699
170	0,027925	0,020493	0,007515	0,030233	0,27787	0,063081	**0,030233**	0,007803	0,023467	0,22711

Tabela 12: EQM do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_o (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,002559	0,035817	0,045902	**0,038317**	**0,00339**	0,00944	0,15272	0,17687	**0,12105**	0,005573
2	0,002154	**0,007364**	0,01024	0,04464	0,086655	0,003891	**0,011892**	0,007557	0,017261	**0,00395**
4	0,002013	0,007787	0,010541	0,048219	0,13858	0,003215	0,014336	0,007353	0,020296	0,025092
6	0,002027	0,007928	0,010485	0,049169	0,1241	0,002963	0,015303	0,007241	0,019569	0,03048
8	0,002105	0,007965	0,010426	0,049979	0,11467	**0,002869**	0,015962	0,007247	0,019412	0,028807
10	**0,001995**	0,00802	0,01033	0,050404	0,1082	0,002927	0,016377	0,007149	0,019244	0,026772
12	0,002093	0,008062	0,010282	0,05078	0,10521	0,002951	0,016724	0,007056	0,018954	0,024935
15	0,002087	0,008083	0,010213	0,05101	0,10292	0,003013	0,016917	0,007097	0,018647	0,023885
17	0,002131	0,008105	0,010165	0,051561	0,10138	0,003012	0,017067	0,007056	0,018577	0,023082
20	0,002134	0,008174	0,01007	0,051861	0,1007	0,00298	0,017161	0,007091	0,018501	0,022344
25	0,002185	0,00829	**0,009973**	0,051923	0,10013	0,003094	0,017307	0,00723	0,01819	0,021586
30	0,002176	0,008298	0,010019	0,052582	0,099535	0,002961	0,017549	0,007199	0,018046	0,021387
35	0,00221	0,008294	0,010052	0,052924	0,099851	0,002932	0,017723	0,007198	0,017984	0,020843
40	0,002281	0,008265	0,010094	0,053104	0,10053	0,003007	0,017771	0,007145	0,017947	0,02069
45	0,002203	0,008303	0,010113	0,053271	0,10006	0,00327	0,017905	0,007172	0,017932	0,020461
50	0,002267	0,008295	0,010133	0,053548	0,10074	0,00322	0,018014	**0,007087**	0,017745	0,020706
55	0,002293	0,00832	0,010135	0,053704	0,10039	0,003216	0,018077	0,00713	0,017772	0,020663
60	0,00229	0,008411	0,01018	0,053735	0,10098	0,003217	0,018207	0,007178	0,017755	0,02068
65	0,002304	0,008475	0,010254	0,054057	0,10124	0,003221	0,018303	0,007236	0,017744	0,020305
70	0,00237	0,008544	0,01037	0,05427	0,10059	0,003283	0,018277	0,007315	0,017908	0,02057
75	0,002358	0,008651	0,010363	0,054312	0,10084	0,003312	0,01829	0,00729	0,017917	0,020533
80	0,002396	0,008643	0,010417	0,054542	0,10093	0,003288	0,018259	0,007359	0,017917	0,020435
90	0,002461	0,008662	0,010433	0,054577	0,1009	0,003192	0,01827	0,007506	0,017834	0,020535
110	0,002586	0,008782	0,010646	0,054879	0,10244	0,003428	0,018389	0,007596	0,017784	0,020739
130	0,002677	0,009079	0,010904	0,05521	0,10206	0,003656	0,018616	0,007542	0,017923	0,020376
150	0,002702	0,009205	0,011073	0,054988	0,10242	0,003759	0,01867	0,007594	0,017974	0,020276
170	0,002807	0,009331	0,011156	0,055548	0,1021	0,003908	0,019218	0,007826	0,018057	0,020308

Tabela 13: EQM do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_o

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,000899	0,033465	0,051752	0,052707	**0,023737**	0,002875	0,16054	0,27239	0,29706	**0,15775**
2	**0,000815**	**0,00463**	0,025418	**0,094601**	0,43956	**0,000627**	0,019211	0,078366	0,1887	0,54789
4	0,00103	0,004709	0,024561	0,097572	0,41874	0,000754	0,01238	0,060528	0,17554	0,54356
6	0,00105	0,004828	0,024173	0,099759	0,40369	0,000863	0,010296	0,053011	0,16848	0,54866
8	0,00109	0,004898	0,023894	0,10113	0,40021	0,000862	0,009314	0,048666	0,16391	0,55828
10	0,001089	0,004949	0,023799	0,10217	0,40126	0,000867	0,008713	0,045847	0,16061	0,56766
12	0,001083	0,004959	0,023713	0,103	0,40276	0,000911	0,008238	0,043667	0,15826	0,57658
15	0,001128	0,005022	0,023574	0,104	0,40651	0,000936	0,007839	0,041366	0,1556	0,58887
17	0,001113	0,005064	0,023518	0,10462	0,41005	0,000953	0,00764	0,040171	0,15417	0,59628
20	0,001143	0,005061	0,023455	0,10512	0,41454	0,001027	0,00739	0,038875	0,15245	0,60615
25	0,001219	0,005062	0,023426	0,10595	0,42074	0,000972	0,007167	0,037245	0,15014	0,62175
30	0,001208	0,005101	0,023474	0,10665	0,42618	0,001016	0,007015	0,036118	0,14843	0,6344
35	0,001179	0,005106	0,023428	0,1072	0,43193	0,000993	0,006869	0,035263	0,14708	0,64597
40	0,001249	0,005118	**0,023391**	0,10748	0,43657	0,001006	0,006737	0,034557	0,14621	0,65668
45	0,001254	0,005148	0,023391	0,10792	0,4416	0,001053	0,006671	0,034023	0,1453	0,66611
50	0,001263	0,00518	0,023418	0,1081	0,44579	0,001068	0,006609	0,033476	0,14447	0,67445
55	0,001196	0,005197	0,023449	0,10856	0,45062	0,001083	0,006544	0,033039	0,14391	0,68291
60	0,001248	0,005241	0,023493	0,10914	0,45362	0,00106	0,006447	0,032636	0,14344	0,68986
65	0,001294	0,005268	0,02356	0,10938	0,4569	0,001131	0,006405	0,032355	0,14289	0,6968
70	0,001346	0,005268	0,023681	0,10981	0,45972	0,001107	0,006368	0,032063	0,14272	0,7034
75	0,001355	0,005278	0,023778	0,11	0,46345	0,001159	0,006359	0,031907	0,14231	0,70889
80	0,001436	0,005318	0,023781	0,11	0,46605	0,001156	0,006346	0,031607	0,14202	0,71497
90	0,001377	0,005392	0,02378	0,11023	0,47112	0,001123	**0,006302**	0,031241	0,14139	0,72559
110	0,001396	0,005468	0,024036	0,11091	0,48047	0,001328	0,006388	0,030869	0,14075	0,7432
130	0,00152	0,005636	0,02433	0,1112	0,48897	0,001266	0,006481	0,030413	0,14011	0,75786
150	0,001525	0,00576	0,024415	0,11167	0,49531	0,001323	0,006535	0,030289	0,13977	0,77153
170	0,001706	0,00599	0,024366	0,11246	0,50118	0,001353	0,00665	**0,029999**	**0,13929**	0,78425

Tabela 14: EQM do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_o (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	**-0,01687**	-0,14091	-0,1891	**-0,20059**	**-0,13751**	-0,02983	-0,2343	-0,32729	-0,37569	**-0,33597**
2	0,017877	0,055976	**-0,06455**	-0,21419	-0,58686	-0,00973	0,010427	**-0,08994**	**-0,24617**	-0,63531
4	0,031678	0,059588	-0,067	-0,21296	-0,61704	**-0,0011**	0,009827	-0,10101	-0,24776	-0,64955
6	0,039368	0,059195	-0,0689	-0,21267	-0,61857	0,004074	0,005917	-0,10737	-0,25165	-0,64958
8	0,044302	0,058624	-0,07005	-0,21277	-0,61604	0,007445	0,003154	-0,11088	-0,25418	-0,64739
10	0,047711	0,058276	-0,07085	-0,21291	-0,61318	0,009801	0,001092	-0,11297	-0,25564	-0,64514
12	0,050017	0,058072	-0,07133	-0,21303	-0,61095	0,011523	**-0,00078**	-0,1145	-0,25672	-0,64341
15	0,060448	0,057498	-0,07165	-0,21309	-0,60806	0,02047	-0,00187	-0,11596	-0,25771	-0,64135
17	0,059657	0,056951	-0,07186	-0,21308	-0,60649	0,019291	-0,00303	-0,11661	-0,25824	-0,64033
20	0,054692	0,056425	-0,07213	-0,21304	-0,60471	0,014585	-0,00381	-0,11748	-0,25869	-0,63901
25	0,05858	0,056482	-0,0726	-0,21308	-0,60312	0,01715	-0,00484	-0,11861	-0,25917	-0,63795
30	0,056748	0,056304	-0,07285	-0,2133	-0,60251	0,015333	-0,0059	-0,11969	-0,25961	-0,63739
35	0,058114	0,055831	-0,0728	-0,21333	-0,60207	0,016073	-0,006	-0,11989	-0,25958	-0,63714
40	0,057847	0,055657	-0,07312	-0,21316	-0,60191	0,015413	-0,00618	-0,12012	-0,25987	-0,6369
45	0,05839	0,055697	-0,07326	-0,21321	-0,60189	0,01597	-0,00659	-0,12045	-0,25977	-0,63691
50	0,058225	**0,055543**	-0,07331	-0,21343	-0,60182	0,015685	-0,00676	-0,12091	-0,25987	-0,63713
55	0,058738	0,05581	-0,07323	-0,21338	-0,60181	0,015989	-0,00719	-0,12127	-0,26014	-0,63728
60	0,058646	0,055993	-0,07335	-0,21338	-0,60197	0,01594	-0,00724	-0,12167	-0,26029	-0,63718
65	0,059033	0,056011	-0,07323	-0,21357	-0,60201	0,016071	-0,00732	-0,12155	-0,2604	-0,63735
70	0,059133	0,05626	-0,07328	-0,21385	-0,60221	0,01591	-0,00773	-0,12178	-0,26059	-0,63708
75	0,059482	0,056058	-0,07322	-0,21391	-0,60237	0,016027	-0,00753	-0,12202	-0,26052	-0,63691
80	0,059576	0,056467	-0,07327	-0,21399	-0,60229	0,015831	-0,00744	-0,12252	-0,26054	-0,63686
90	0,059795	0,05652	-0,07309	-0,21396	-0,6026	0,01578	-0,00742	-0,12288	-0,26057	-0,63684
110	0,060407	0,056807	-0,07271	-0,21407	-0,60302	0,015813	-0,0078	-0,12318	-0,26013	-0,6364
130	0,060785	0,057128	-0,07285	-0,21339	-0,60363	0,016345	-0,00754	-0,12296	-0,26062	-0,63671
150	0,061176	0,057242	-0,07285	-0,21367	-0,60367	0,016887	-0,00664	-0,1231	-0,26072	-0,63705
170	0,061874	0,056852	-0,0735	-0,21378	-0,6046	0,017423	-0,00675	-0,12279	-0,26043	-0,63689

Tabela 15: Vício do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_o

d	0,2					0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	**0,047833**	0,23579	0,24521	0,2068	**0,064545**	0,23056	0,6789	0,56032	0,39462	**0,091396**
2	0,088665	0,12476	**-0,0004**	**-0,13403**	-0,47828	0,19868	0,2831	0,13725	**-0,01076**	-0,42198
4	0,10078	0,11834	-0,01001	-0,15228	-0,52666	0,19372	0,23209	0,08241	-0,07241	-0,45888
6	0,10702	0,11593	-0,01302	-0,15384	-0,53093	0,19154	0,20918	0,059838	-0,0918	-0,46581
8	0,11105	0,11435	-0,01472	-0,15399	-0,52947	0,19045	0,19556	0,04725	-0,10139	-0,46728
10	0,11379	0,1135	-0,01567	-0,1542	-0,52727	0,18966	0,18623	0,039087	-0,10713	-0,46741
12	0,11579	0,113	-0,01633	-0,15412	-0,52509	0,18917	0,17957	0,033391	-0,11107	-0,46726
15	0,11957	0,11254	-0,01699	-0,154	-0,5228	0,18873	0,17249	0,027624	-0,1149	-0,46707
17	0,12028	0,11235	-0,01749	-0,15408	-0,52178	0,18859	0,16881	0,024797	-0,11673	-0,46671
20	0,12062	0,11219	-0,01783	-0,15425	-0,52056	0,18836	0,16465	0,021518	-0,11885	-0,46645
25	0,12275	0,11198	-0,0181	-0,15401	-0,51918	0,18818	0,15916	0,017477	-0,1208	-0,46644
30	0,12383	0,1118	-0,01843	-0,15393	-0,51821	0,18798	0,15569	0,014915	-0,12241	-0,46626
35	0,12508	**0,11149**	-0,01894	-0,15411	-0,5178	0,18786	0,15297	0,0127	-0,12338	-0,46618
40	0,12609	0,11149	-0,01899	-0,15417	-0,51749	0,18769	0,15043	0,010957	-0,12407	-0,46645
45	0,12723	0,11163	-0,01914	-0,15417	-0,51739	0,18781	0,14827	0,009651	-0,12462	-0,46645
50	0,1282	0,11171	-0,01928	-0,15434	-0,51713	0,18775	0,14633	0,008476	-0,12515	-0,46653
55	0,12903	0,11178	-0,01935	-0,15441	-0,51707	0,18787	0,1448	0,007835	-0,12536	-0,46645
60	0,12971	0,11188	-0,01958	-0,15468	-0,51711	0,18785	0,14367	0,007332	-0,12565	-0,46646
65	0,13034	0,11203	-0,01979	-0,15484	-0,51727	0,18776	0,14253	0,006699	-0,12593	-0,46667
70	0,13086	0,11198	-0,02006	-0,15496	-0,51735	0,18776	0,14163	0,006092	-0,12622	-0,46663
75	0,13146	0,11202	-0,02015	-0,15504	-0,51756	**0,18772**	0,14087	0,00558	-0,12634	-0,46698
80	0,13222	0,112	-0,02026	-0,15531	-0,51794	0,18763	0,14	0,00516	-0,12659	-0,46693
90	0,13351	0,11184	-0,02045	-0,15521	-0,51768	0,18793	0,13863	0,004496	-0,12672	-0,46675
110	0,13503	0,11173	-0,02089	-0,15465	-0,51792	0,18909	0,13632	0,00337	-0,12734	-0,4673
130	0,13664	0,11185	-0,02138	-0,1543	-0,51811	0,18988	0,13486	0,00275	-0,1275	-0,46725
150	0,13753	0,11179	-0,02108	-0,15409	-0,51849	0,19124	0,13418	0,00195	-0,12822	-0,46751
170	0,13851	0,11154	-0,02184	-0,15454	-0,51912	0,19296	**0,13362**	**0,001247**	-0,12803	-0,46738

Tabela 16: Vício do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_o (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,03906	0,18211	0,20921	**0,19247**	**0,055242**	0,083566	0,38603	0,41812	0,34671	0,072143
2	0,03325	0,048281	-0,06741	-0,19614	-0,2263	0,051418	**0,080258**	-0,02609	**-0,0874**	**0,041049**
4	0,031161	**0,050247**	-0,06833	-0,20663	-0,35344	0,044906	0,090965	-0,02363	-0,11459	-0,09171
6	0,030878	0,05155	-0,06742	-0,2087	-0,33803	0,042325	0,095832	-0,01825	-0,11198	-0,13934
8	0,032008	0,052632	-0,06679	-0,2103	-0,32477	0,041469	0,099012	-0,01458	-0,1105	-0,14361
10	**0,03059**	0,053054	-0,06627	-0,21109	-0,31504	0,041478	0,10126	-0,01226	-0,10916	-0,14117
12	0,031348	0,053416	-0,06595	-0,21181	-0,31003	0,041317	0,10309	-0,01034	-0,1074	-0,13763
15	0,031172	0,053749	-0,06536	-0,21232	-0,30619	0,041196	0,10405	-0,00804	-0,10589	-0,13413
17	0,031843	0,053813	-0,06505	-0,21335	-0,30385	**0,040918**	0,10464	-0,00712	-0,10536	-0,13194
20	0,031983	0,054142	-0,06452	-0,21393	-0,30241	0,041094	0,10541	-0,00565	-0,10451	-0,13016
25	0,032109	0,054696	-0,06415	-0,21385	-0,30125	0,042086	0,1063	-0,00467	-0,10313	-0,12786
30	0,032271	0,054791	-0,06407	-0,21493	-0,30055	0,041189	0,1071	-0,00366	-0,10203	-0,12643
35	0,032207	0,054741	-0,06404	-0,21529	-0,3009	0,041097	0,10762	-0,0027	-0,10184	-0,12477
40	0,032872	0,054683	-0,06425	-0,21549	-0,30171	0,041224	0,10795	-0,00204	-0,10144	-0,124
45	0,032242	0,054924	-0,06432	-0,21572	-0,30119	0,042839	0,10854	-0,00177	-0,10076	-0,12398
50	0,032696	0,054718	-0,06413	-0,21628	-0,30181	0,042762	0,10876	-0,00099	-0,09984	-0,1239
55	0,032882	0,054535	-0,06383	-0,21644	-0,30135	0,042186	0,10903	-0,00051	-0,09969	-0,12353
60	0,032504	0,054558	**-0,06374**	-0,21628	-0,30226	0,042935	0,10928	-0,0003	-0,09975	-0,12327
65	0,032914	0,054738	-0,06399	-0,21696	-0,30225	0,04267	0,10931	-0,00057	-0,09932	-0,1225
70	0,0334	0,054603	-0,0643	-0,21716	-0,30147	0,043038	0,10931	-0,00038	-0,09954	-0,12318
75	0,032874	0,054662	-0,06414	-0,21707	-0,30157	0,043255	0,10917	-0,00017	-0,09908	-0,1228
80	0,033626	0,0542	-0,06419	-0,21726	-0,30191	0,042503	0,1089	**0,000104**	-0,09904	-0,1228
90	0,033762	0,054324	-0,064	-0,21705	-0,30179	0,042511	0,10877	0,000276	-0,09862	-0,12239
110	0,034216	0,053738	-0,06399	-0,21748	-0,30375	0,043515	0,10899	0,000184	-0,09772	-0,12295
130	0,034074	0,054522	-0,06428	-0,21756	-0,30312	0,044749	0,10903	0,000854	-0,09704	-0,12176
150	0,034367	0,054497	-0,06509	-0,21706	-0,30294	0,04464	0,10904	0,001121	-0,09682	-0,12194
170	0,035024	0,053927	-0,06444	-0,21752	-0,30227	0,045644	0,10966	0,001538	-0,09675	-0,1214

Tabela 17: Vício do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_o

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	-0,02382	-0,17833	-0,2226	**-0,2252**	**-0,14931**	-0,05098	-0,39564	-0,51437	-0,53681	**-0,3927**
2	**0,011715**	-0,00746	-0,14306	-0,30027	-0,65614	**-0,00097**	-0,09999	-0,25778	-0,42116	-0,73561
4	0,015667	-0,00133	-0,13804	-0,30448	-0,64124	0,00643	-0,06466	-0,22156	-0,40474	-0,73262
6	0,016494	**0,00073**	-0,1357	-0,30747	-0,62934	0,009585	-0,05049	-0,20476	-0,39561	-0,73571
8	0,018021	0,001991	-0,13417	-0,30931	-0,62647	0,010788	-0,04264	-0,19464	-0,38954	-0,74178
10	0,018123	0,00258	-0,13333	-0,31067	-0,62722	0,011567	-0,03757	-0,18789	-0,38516	-0,74767
12	0,017988	0,003063	-0,13266	-0,31164	-0,62839	0,01261	-0,03402	-0,18259	-0,38201	-0,75327
15	0,017757	0,00368	-0,13192	-0,31296	-0,63125	0,012931	-0,03038	-0,17678	-0,37838	-0,76086
17	0,017655	0,00395	-0,13155	-0,31372	-0,63398	0,013442	-0,02858	-0,17374	-0,37641	-0,7654
20	0,018321	0,004119	-0,1311	-0,3143	-0,63744	0,01436	-0,02648	-0,1704	-0,37405	-0,77136
25	0,018499	0,004374	-0,1307	-0,3153	-0,64203	0,013316	-0,02423	-0,16623	-0,3709	-0,78074
30	0,01905	0,00441	-0,13054	-0,31611	-0,64602	0,013684	-0,02237	-0,16342	-0,36857	-0,7882
35	0,018416	0,004482	-0,13038	-0,31677	-0,65022	0,0137	-0,02109	-0,1614	-0,3668	-0,79485
40	0,019708	0,004951	-0,1301	-0,31708	-0,65355	0,013633	-0,01976	-0,15963	-0,36559	-0,80106
45	0,018825	0,005043	-0,12997	-0,3176	-0,657	0,014572	-0,01904	-0,15831	-0,36433	-0,8064
50	0,018783	0,004982	-0,12993	-0,31772	-0,65995	0,014817	-0,01848	-0,15702	-0,36318	-0,81105
55	0,018328	0,004864	-0,12986	-0,31826	-0,6633	0,014505	-0,01794	-0,15593	-0,36241	-0,81577
60	0,0193	0,004865	**-0,12984**	-0,31897	-0,66529	0,014135	-0,01757	-0,15499	-0,36172	-0,81959
65	0,018928	0,004613	-0,12994	-0,31921	-0,66746	0,015386	-0,01716	-0,15423	-0,36103	-0,82334
70	0,019491	0,004517	-0,13029	-0,31975	-0,66933	0,014792	-0,01683	-0,15334	-0,36074	-0,82695
75	0,020441	0,004551	-0,13042	-0,31985	-0,67179	0,015451	-0,01664	-0,15303	-0,36023	-0,82989
80	0,020089	0,00437	-0,13058	-0,31969	-0,67344	0,015426	-0,01617	-0,15225	-0,35978	-0,83316
90	0,01991	0,004267	-0,13027	-0,31985	-0,67674	0,01502	-0,01564	-0,15103	-0,35874	-0,83873
110	0,020322	0,004227	-0,1305	-0,32028	-0,68265	0,016022	-0,01494	-0,14995	-0,35773	-0,8479
130	0,020572	0,003708	-0,13058	-0,32022	-0,68791	0,016251	-0,01376	-0,14857	-0,35669	-0,85534
150	0,020287	0,003463	-0,13056	-0,3204	-0,69168	0,016547	-0,01299	-0,14798	-0,35587	-0,86213
170	0,02132	0,00317	-0,13006	-0,32115	-0,69508	0,01765	**-0,01245**	**-0,14652**	**-0,35494**	-0,86823

Tabela 18: Vício do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_o (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	**0,000566**	0,021281	0,037475	0,041844	**0,019978**	0,0011	0,056259	0,10873	0,14289	**0,11478**
2	0,00069	**0,020091**	**0,027551**	**0,023341**	0,11556	**0,000726**	**0,019931**	**0,023217**	**0,022139**	0,13232
4	0,001075	0,0238	0,032836	0,027767	0,13357	0,000787	0,024876	0,030399	0,027344	0,13387
6	0,001421	0,025379	0,034801	0,029434	0,13822	0,000935	0,027156	0,033123	0,030252	0,13384
8	0,001725	0,026297	0,035632	0,030194	0,1396	0,001077	0,028527	0,034408	0,031661	0,1336
10	0,001943	0,02671	0,036078	0,03059	0,1399	0,001192	0,028999	0,035262	0,032393	0,13327
12	0,00211	0,026816	0,036271	0,030685	0,13978	0,001305	0,029252	0,035502	0,03279	0,1332
15	0,002936	0,02684	0,036248	0,030734	0,13929	0,002088	0,029343	0,035488	0,03278	0,13309
17	0,002845	0,026643	0,036139	0,030633	0,13878	0,001969	0,029103	0,035371	0,032721	0,13302
20	0,00252	0,026146	0,035925	0,030452	0,13806	0,001591	0,028746	0,035086	0,032482	0,13279
25	0,002737	0,025805	0,035673	0,030356	0,13725	0,001746	0,028498	0,034655	0,032345	0,13266
30	0,00265	0,02574	0,03576	0,030382	0,13679	0,001693	0,028517	0,034481	0,03246	0,13256
35	0,00281	0,025843	0,035857	0,030376	0,13635	0,001652	0,028618	0,034688	0,032403	0,13258
40	0,002865	0,025756	0,035879	0,030367	0,13614	0,00173	0,028229	0,034579	0,032256	0,13249
45	0,002822	0,025798	0,035769	0,030337	0,13619	0,001605	0,027777	0,034106	0,032146	0,13248
50	0,002851	0,025624	0,0357	0,030299	0,13614	0,001721	0,027403	0,03399	0,032072	0,13252
55	0,002754	0,025819	0,035744	0,030298	0,1361	0,001638	0,027634	0,033948	0,032107	0,13267
60	0,002923	0,025856	0,035852	0,030355	0,13629	0,001697	0,02754	0,034097	0,032092	0,13265
65	0,002636	0,025771	0,035772	0,030447	0,13624	0,001672	0,02733	0,034	0,031999	0,13273
70	0,002791	0,025829	0,035552	0,030492	0,13633	0,001626	0,02742	0,034028	0,031875	0,13255
75	0,002662	0,025955	0,035546	0,030633	0,13638	0,001663	0,027145	0,034158	0,031929	0,13254
80	0,002688	0,026169	0,035503	0,030648	0,13637	0,001643	0,027616	0,034293	0,032046	0,13239
90	0,00264	0,026004	0,035636	0,030672	0,13664	0,001711	0,027655	0,034176	0,032068	0,13263
110	0,00268	0,02581	0,035664	0,030824	0,13704	0,001776	0,027623	0,034179	0,032094	0,13288
130	0,002808	0,026231	0,035772	0,030987	0,13744	0,00169	0,027674	0,033981	0,031995	0,13301
150	0,003028	0,026588	0,036044	0,031202	0,13743	0,001841	0,028265	0,034116	0,032299	0,13362
170	0,002929	0,026768	0,036405	0,031319	0,13823	0,001943	0,028664	0,034371	0,032397	0,13386

Tabela 19: EQM do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_p

d	0,2					0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	0,003051	0,058907	0,062648	0,044105	**0,004276**	0,067751	0,47931	0,31971	0,15717	**0,008383**
2	**0,00161**	**0,025762**	**0,031746**	**0,025866**	0,083243	0,006852	0,064188	0,062547	0,042739	0,086126
4	0,001881	0,027264	0,032282	0,027733	0,11773	0,006043	0,051458	0,052835	0,037854	0,11746
6	0,002079	0,027975	0,032772	0,028084	0,1283	**0,005949**	0,046763	0,049479	0,036422	0,12832
8	0,002214	0,028341	0,033154	0,02828	0,1318	0,005986	0,044312	0,047791	0,035811	0,13268
10	0,002319	0,028579	0,033346	0,028488	0,13281	0,006043	0,042701	0,04674	0,035525	0,13461
12	0,002403	0,028715	0,033498	0,028616	0,13277	0,006112	0,041618	0,046002	0,035312	0,1355
15	0,002522	0,028889	0,033639	0,028747	0,1322	0,006256	0,040441	0,045315	0,035051	0,13623
17	0,00255	0,028918	0,033701	0,028783	0,13182	0,006281	0,039839	0,044944	0,034914	0,13638
20	0,002597	0,029024	0,033769	0,028876	0,13113	0,006288	0,039142	0,044417	0,034674	0,13649
25	0,002682	0,029118	0,03374	0,028828	0,13031	0,006487	0,038253	0,04381	0,034308	0,13661
30	0,002803	0,029195	0,033849	0,02879	0,1295	0,006604	0,037659	0,04342	0,034067	0,13672
35	0,002903	0,029366	0,033924	0,028836	0,12909	0,006718	0,037255	0,043139	0,033849	0,13678
40	0,003018	0,029388	0,033953	0,0289	0,12876	0,006851	0,036885	0,042837	0,033656	0,13693
45	0,003133	0,029445	0,033978	0,028964	0,12869	0,007004	0,036602	0,042618	0,033509	0,13693
50	0,003234	0,029502	0,033943	0,028994	0,1285	0,007095	0,036365	0,042464	0,033389	0,13706
55	0,00333	0,029539	0,034051	0,029004	0,12858	0,007192	0,036059	0,042302	0,033271	0,13702
60	0,003387	0,029643	0,034049	0,029174	0,12858	0,007205	0,035964	0,042138	0,033243	0,13712
65	0,003471	0,029744	0,034051	0,029195	0,12867	0,007224	0,035724	0,042092	0,033255	0,13736
70	0,003506	0,029781	0,034075	0,029194	0,1288	0,007314	0,035557	0,042095	0,033241	0,13737
75	0,003587	0,02977	0,034098	0,02927	0,12884	0,007413	0,035457	0,042012	0,033137	0,1376
80	0,003644	0,029822	0,034137	0,029364	0,12909	0,007495	0,035399	0,041906	0,033162	0,13755
90	0,003745	0,029797	0,034177	0,029382	0,12879	0,007696	0,035376	0,041716	0,03294	0,13759
110	0,004075	0,030191	0,0343	0,02942	0,12898	0,007971	0,034986	0,041682	0,032867	0,13787
130	0,004246	0,030524	0,034565	0,029445	0,12928	0,008164	**0,034951**	**0,04156**	**0,032791**	0,13819
150	0,004389	0,030976	0,035063	0,029513	0,1296	0,008452	0,035162	0,041668	0,032838	0,13863
170	0,004789	0,031232	0,035307	0,029646	0,12987	0,008839	0,03516	0,04155	0,032911	0,13873

Tabela 20: EQM do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_p (cont.)

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,002559	0,035817	0,045902	0,038317	**0,00339**	0,00944	0,15272	0,17687	0,12105	**0,005573**
2	0,001494	**0,022317**	**0,034521**	**0,029585**	0,075783	0,002249	**0,019664**	**0,03651**	0,03506	0,022426
4	**0,001415**	0,025165	0,037902	0,031239	0,096031	0,001816	0,025	0,039422	0,032836	0,047792
6	0,001451	0,026278	0,03898	0,032292	0,089168	0,001714	0,02683	0,041771	**0,032527**	0,046103
8	0,001451	0,02696	0,039578	0,032795	0,085333	**0,00162**	0,027752	0,043353	0,033423	0,043675
10	0,001495	0,027211	0,039977	0,03295	0,082929	0,001737	0,028095	0,044021	0,033817	0,041682
12	0,001552	0,027282	0,040023	0,033283	0,081166	0,001717	0,028124	0,044128	0,033969	0,040085
15	0,001607	0,027305	0,039804	0,033338	0,079399	0,001954	0,028574	0,044544	0,034024	0,039883
17	0,001569	0,027205	0,039654	0,033238	0,078147	0,001978	0,028499	0,044243	0,033828	0,038976
20	0,001532	0,027107	0,039438	0,033067	0,077351	0,001781	0,027899	0,043977	0,033757	0,039002
25	0,001627	0,027169	0,03914	0,032868	0,075989	0,00188	0,027811	0,043961	0,033119	0,038565
30	0,001572	0,027112	0,03916	0,033353	0,076476	0,00178	0,027946	0,04405	0,033488	0,038693
35	0,001657	0,027212	0,039026	0,033353	0,077108	0,001819	0,028003	0,043958	0,033905	0,038362
40	0,001661	0,027152	0,039125	0,033123	0,076588	0,0019	0,028071	0,043659	0,033825	0,038567
45	0,00165	0,027031	0,038967	0,033012	0,077169	0,001966	0,02783	0,043506	0,033914	0,038689
50	0,001649	0,027136	0,038956	0,032899	0,076191	0,001899	0,027753	0,043424	0,033893	0,038666
55	0,001746	0,027203	0,039148	0,032772	0,076704	0,001952	0,028054	0,043589	0,033782	0,038966
60	0,001692	0,027155	0,039266	0,03285	0,077194	0,001927	0,028084	0,043607	0,033754	0,03915
65	0,001739	0,027195	0,039283	0,032925	0,076964	0,001966	0,028138	0,043645	0,033774	0,038396
70	0,001681	0,0272	0,039274	0,032748	0,077153	0,002003	0,028187	0,043326	0,033834	0,038248
75	0,00176	0,0272	0,0391	0,032698	0,077228	0,002003	0,028162	0,043538	0,033687	0,038814
80	0,001741	0,027153	0,039289	0,032736	0,078127	0,001944	0,028234	0,043748	0,033264	0,039079
90	0,001834	0,02733	0,039245	0,032587	0,077541	0,001951	0,028209	0,043663	0,033641	0,038926
110	0,001958	0,027331	0,039282	0,032816	0,079008	0,001978	0,028316	0,043091	0,033679	0,03908
130	0,001937	0,027744	0,039723	0,032824	0,079168	0,002041	0,028414	0,043544	0,034189	0,039234
150	0,002049	0,027896	0,040132	0,033015	0,079712	0,002125	0,02843	0,04371	0,034329	0,038949
170	0,002038	0,027953	0,0402	0,033395	0,079539	0,002205	0,028674	0,043942	0,034583	0,03937

Tabela 21: EQM do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_p

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	**0,000899**	0,033465	0,051752	0,052707	0,023737	0,002875	0,16054	0,27239	0,29706	**0,15775**
2	0,001051	0,025511	**0,029912**	**0,025657**	0,12884	**0,001134**	0,035004	0,049359	0,053422	0,16518
4	0,001278	**0,025404**	0,033245	0,028419	0,13044	0,001226	0,031497	0,045391	0,047212	0,16167
6	0,001288	0,025694	0,034149	0,029732	0,12686	0,001357	0,030707	0,043797	0,045079	0,16073
8	0,001292	0,02595	0,034549	0,030439	0,12505	0,001339	0,030424	0,043092	0,044009	0,16081
10	0,001305	0,026212	0,034929	0,030771	0,12444	0,001332	0,030151	0,04262	0,043143	0,16083
12	0,001362	0,026318	0,03511	0,03114	0,12392	0,001357	0,029908	0,042264	0,042677	0,16118
15	0,001367	0,026601	0,035267	0,031448	**0,12387**	0,001368	0,029749	0,041873	0,042126	0,16144
17	0,001333	0,026736	0,035324	0,031494	0,12401	0,00139	0,029628	0,041718	0,041729	0,16153
20	0,001405	0,026731	0,035372	0,03157	0,12447	0,001422	0,029475	0,041444	0,041392	0,16216
25	0,001439	0,026731	0,035435	0,031702	0,12495	0,001398	0,029232	0,040962	0,040809	0,16312
30	0,001413	0,026714	0,035486	0,03182	0,12581	0,001454	0,029244	0,040513	0,040257	0,16383
35	0,001436	0,026759	0,035451	0,032014	0,12697	0,001411	0,029217	0,040425	0,039929	0,16445
40	0,001502	0,026867	0,035591	0,03196	0,12745	0,001415	0,029166	0,040098	0,03969	0,16518
45	0,001438	0,026877	0,035619	0,031993	0,12823	0,001483	0,029193	0,040066	0,039562	0,16579
50	0,001455	0,026886	0,035696	0,032175	0,12863	0,001509	0,029173	0,039968	0,039347	0,1662
55	0,001416	0,026924	0,035772	0,032234	0,12936	0,001536	0,029064	0,039769	0,039123	0,16712
60	0,001427	0,026987	0,035893	0,032307	0,12985	0,001475	0,029033	0,039734	0,039081	0,16747
65	0,001513	0,027181	0,035927	0,032366	0,13011	0,001558	0,029026	0,039628	0,038948	0,16788
70	0,001557	0,027282	0,036063	0,032502	0,13041	0,001533	0,02901	0,039537	0,038856	0,16832
75	0,001518	0,027366	0,036073	0,032645	0,13118	0,001652	0,029023	0,039501	0,038768	0,16868
80	0,001654	0,027367	0,035949	0,032612	0,13166	0,001551	0,029018	0,039395	0,038573	0,16905
90	0,001563	0,027541	0,03615	0,032671	0,13231	0,00158	0,028839	0,039412	0,038609	0,17
110	0,001619	0,027547	0,036348	0,032967	0,13408	0,001755	**0,028651**	0,039399	0,038268	0,17144
130	0,001749	0,027693	0,036546	0,033013	0,13546	0,001742	0,028772	0,039333	**0,038263**	0,17301
150	0,001645	0,027866	0,036523	0,033295	0,13691	0,001739	0,028943	**0,039307**	0,038445	0,17458
170	0,001866	0,028201	0,036619	0,033767	0,13798	0,001765	0,029226	0,039274	0,038467	0,17605

Tabela 22: EQM do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_p (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	-0,01687	-0,14091	-0,1891	-0,20059	**-0,13751**	-0,02983	-0,2343	-0,32729	-0,37569	-0,33597
2	**-0,00238**	**0,012839**	**-0,00074**	-0,04091	-0,30158	-0,01636	0,003773	**2,81E-05**	-0,05941	-0,3309
4	0,003014	0,019711	0,008616	-0,02096	-0,32333	-0,01047	0,010783	0,00708	-0,02979	-0,32495
6	0,005909	0,021442	0,010719	-0,01661	-0,329	-0,00685	0,011151	0,006735	-0,0252	-0,32178
8	0,007676	0,022169	0,011225	-0,01554	-0,33065	-0,00444	0,010979	0,006277	**-0,02515**	-0,32006
10	0,008888	0,022371	0,011288	**-0,01534**	-0,33098	-0,00276	0,010269	0,005815	-0,02582	-0,31902
12	0,009623	0,022249	0,010919	-0,01581	-0,33083	-0,00154	0,008983	0,00484	-0,02681	-0,31862
15	0,012992	0,021605	0,010461	-0,0163	-0,33021	0,00501	0,008017	0,003255	-0,02845	-0,3185
17	0,012553	0,02088	0,010058	-0,01676	-0,32962	0,00404	0,00662	0,002301	-0,02955	-0,31851
20	0,010898	0,019981	0,009465	-0,01737	-0,32875	0,000539	0,005289	0,000838	-0,03109	**-0,31843**
25	0,011779	0,01939	0,008613	-0,018	-0,32784	0,002321	0,003973	-0,00098	-0,03272	-0,3187
30	0,011271	0,019158	0,008416	-0,01842	-0,32745	0,001203	0,003394	-0,00249	-0,03376	-0,31888
35	0,01152	0,018884	0,00872	-0,01855	-0,32701	0,001464	0,003753	-0,0025	-0,03443	-0,31924
40	0,011567	0,018659	0,008338	-0,01871	-0,32679	0,001353	0,003052	-0,00306	-0,0354	-0,31946
45	0,011425	0,018692	0,008013	-0,01902	-0,32684	0,001232	0,00215	-0,00403	-0,03583	-0,31971
50	0,011442	0,018516	0,007789	-0,01929	-0,32668	0,001456	0,001741	-0,00497	-0,03643	-0,32
55	0,011461	0,019016	0,007886	-0,01932	-0,32662	0,001439	0,001642	-0,00523	-0,0367	-0,32031
60	0,011613	0,019088	0,007738	-0,01936	-0,3267	0,00157	0,001452	-0,00551	-0,03705	-0,3204
65	0,011365	0,018892	0,007679	-0,01984	-0,32672	0,001636	0,000849	-0,00595	-0,03793	-0,32053
70	0,011477	0,018884	0,007419	-0,02017	-0,32694	0,001405	0,000581	-0,00621	-0,03865	-0,32034
75	0,011648	0,018861	0,007271	-0,02024	-0,32711	0,00163	0,000383	-0,00641	-0,03869	-0,32026
80	0,011697	0,019207	0,007269	-0,02037	-0,32706	**0,001251**	0,000974	-0,00687	-0,03884	-0,32011
90	0,011714	0,019039	0,0073702	-0,02026	-0,32736	0,001343	0,000931	-0,00748	-0,03892	-0,32031
110	0,01182	0,018963	0,0076249	-0,0206	-0,32774	0,00136	**0,000334**	-0,00839	-0,03927	-0,32037
130	0,012105	0,019597	0,0075685	-0,01973	-0,32827	0,001688	0,000591	-0,0082	-0,04016	-0,3206
150	0,012428	0,019901	0,0076235	-0,01979	-0,32842	0,00247	0,001496	-0,00843	-0,04035	-0,32118
170	0,012732	0,019579	0,0069262	-0,01972	-0,32924	0,002947	0,001608	-0,00802	-0,04014	-0,32137

Tabela 23: Vício do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_p

d	0,2					0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	0,047833	0,23579	0,24521	0,2068	**0,064545**	0,23056	0,6789	0,56032	0,39462	**0,091396**
2	0,014986	0,030173	0,008949	**-0,00577**	-0,22077	0,039318	0,12354	0,10648	0,073714	-0,20395
4	0,013407	0,026783	0,005173	-0,02049	-0,28704	0,029514	0,08404	0,063263	0,022505	-0,27303
6	**0,013146**	0,025886	0,003884	-0,02331	-0,30741	0,026224	0,068338	0,045788	**0,004131**	-0,29696
8	0,013149	0,025166	0,002958	-0,02451	-0,3148	0,02473	0,059642	0,036173	-0,00551	-0,30723
10	0,013224	0,024722	0,002358	-0,02542	-0,3175	0,023791	0,054013	0,030063	-0,01163	-0,31222
12	0,013246	0,024543	0,002028	-0,02584	-0,31808	0,023235	0,050183	0,025789	-0,0159	-0,31491
15	0,013257	0,02442	0,001555	-0,02628	-0,31775	0,022585	0,046284	0,021491	-0,0202	-0,31716
17	0,013302	0,024433	0,001259	-0,02655	-0,31737	0,022396	0,044325	0,019338	-0,02229	-0,31787
20	0,013401	0,024596	0,001022	-0,02689	-0,31656	0,022103	0,042137	0,016991	-0,02467	-0,3186
25	0,013443	0,024613	0,000931	-0,02682	-0,31546	0,0218	0,039161	0,014026	-0,02712	-0,31945
30	0,013529	0,024641	0,000702	-0,02686	-0,31443	0,021709	0,037423	0,012075	-0,02902	-0,31989
35	0,01358	**0,024398**	0,000386	-0,02699	-0,31386	0,021484	0,036116	0,010279	-0,03022	-0,32025
40	0,013841	0,02454	0,00037	-0,0272	-0,31342	0,021346	0,034707	0,00898	-0,0312	-0,32077
45	0,014045	0,024747	0,000229	-0,02713	-0,3133	0,021376	0,033555	0,008015	-0,03199	-0,32093
50	0,014236	0,024854	0,000145	-0,02733	-0,31298	0,021355	0,032705	0,007315	-0,03274	-0,32121
55	0,014357	0,025032	0,000121	-0,02748	-0,31307	0,021371	0,031864	0,006833	-0,03318	-0,32133
60	0,014377	0,025176	**3,44E-05**	-0,02779	-0,31306	0,021373	0,031298	0,006421	-0,03351	-0,32149
65	0,014463	0,025441	-8,02E-05	-0,02795	-0,31311	0,021262	0,030745	0,006011	-0,03399	-0,32183
70	0,014428	0,025488	-0,0003	-0,02799	-0,31327	**0,021234**	0,030312	0,00551	-0,0344	-0,32194
75	0,01453	0,025567	-0,00034	-0,0281	-0,3134	0,02126	0,029825	0,005134	-0,03456	-0,32228
80	0,014738	0,025693	-0,0004	-0,02812	-0,3137	0,021158	0,029483	0,004769	-0,03497	-0,3223
90	0,015045	0,025495	-0,00041	-0,0279	-0,31341	0,021454	0,028891	0,004249	-0,03538	-0,32245
110	0,015432	0,025538	-0,00093	-0,02762	-0,31367	0,021757	0,027682	0,003264	-0,03648	-0,32316
130	0,015668	0,025798	-0,00113	-0,02763	-0,31394	0,022098	0,02701	0,002823	-0,03701	-0,32349
150	0,015923	0,025948	-0,00086	-0,02755	-0,31421	0,022518	0,026813	0,002098	-0,03793	-0,324
170	0,016103	0,025748	-0,00174	-0,02787	-0,31463	0,023227	**0,026666**	**0,001458**	-0,03816	-0,32406

Tabela 24: Vício do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_p (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,03906	0,18211	0,20921	0,19247	**0,055242**	0,083566	0,38603	0,41812	0,34671	0,072143
2	0,017402	0,016891	**-0,00075**	**-0,00857**	-0,14266	0,030955	0,020509	0,014649	0,030625	**0,015477**
4	0,012778	0,008288	-0,00471	-0,0186	-0,21211	0,022085	0,013428	**0,009671**	0,00118	-0,06733
6	0,01138	0,006173	-0,00581	-0,01984	-0,21232	0,018641	**0,013263**	0,011235	0,000365	-0,08135
8	0,011511	0,005439	-0,00604	-0,01982	-0,20897	0,016325	0,014161	0,012558	**0,000209**	-0,08147
10	0,009898	**0,005402**	-0,00599	-0,01947	-0,2058	0,015568	0,015544	0,013803	0,001	-0,08025
12	0,010374	0,005555	-0,00559	-0,01913	-0,20336	0,014968	0,016842	0,015077	0,002673	-0,08027
15	0,008346	0,006016	-0,00476	-0,01855	-0,2014	**0,009923**	0,017253	0,01682	0,004597	-0,08025
17	**0,009333**	0,006226	-0,00403	-0,01816	-0,19999	0,010322	0,018064	0,017761	0,005687	-0,07845
20	0,010568	0,006962	-0,0034	-0,01806	-0,199	0,013757	0,019704	0,019327	0,006914	-0,07951
25	0,009913	0,007443	-0,00282	-0,01716	-0,19668	0,012123	0,021084	0,020679	0,009187	-0,07869
30	0,010472	0,007425	-0,0029	-0,01743	-0,19726	0,013371	0,02164	0,021488	0,010025	-0,07877
35	0,00991	0,007317	-0,00277	-0,01734	-0,19777	0,01246	0,022428	0,021933	0,009579	-0,07862
40	0,011034	0,00723	-0,00289	-0,01712	-0,19728	0,01352	0,022799	0,022863	0,010361	-0,07857
45	0,010406	0,007668	-0,00293	-0,01686	-0,19813	0,013959	0,023873	0,023521	0,011068	-0,07902
50	0,010845	0,00745	-0,00244	-0,01678	-0,19688	0,014368	0,024413	0,024102	0,011617	-0,07972
55	0,010659	0,00726	-0,00243	-0,01675	-0,1969	0,014053	0,024109	0,024573	0,011744	-0,0792
60	0,010603	0,0074	-0,00247	-0,01632	-0,19786	0,01451	0,024614	0,024596	0,011874	-0,0793
65	0,010956	0,00747	-0,00238	-0,0166	-0,19764	0,014069	0,02534	0,024299	0,012184	-0,07862
70	0,011426	0,007451	-0,00266	-0,0164	-0,19781	0,014358	0,025249	0,024804	0,01198	-0,0791
75	0,010902	0,007337	-0,00256	-0,01646	-0,19748	0,014535	0,025075	0,024792	0,012414	-0,07912
80	0,011763	0,007091	-0,0026	-0,01632	-0,19854	0,01362	0,024906	0,024765	0,012676	-0,07862
90	0,011928	0,007309	-0,00221	-0,01617	-0,19717	0,013939	0,024779	0,025159	0,013106	-0,07811
110	0,012374	0,006858	-0,0023	-0,01668	-0,19957	0,014606	0,025111	0,025477	0,013551	-0,07965
130	0,012158	0,007451	-0,00266	-0,01683	-0,19955	0,015858	0,025285	0,025629	0,013799	-0,07996
150	0,012222	0,00733	-0,00385	-0,01672	-0,19872	0,014969	0,025648	0,025263	0,014082	-0,07839
170	0,012409	0,007029	-0,00327	-0,01636	-0,19852	0,01574	0,025756	0,025158	0,013819	-0,07972

Tabela 25: Vício do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_p

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	-0,02382	-0,17833	-0,2226	-0,2252	**-0,14931**	-0,05098	-0,39564	-0,51437	-0,53681	-0,3927
2	**0,003598**	**0,002996**	-0,01794	-0,06263	-0,31069	-0,00402	-0,05525	-0,09269	-0,13958	-0,37274
4	0,006553	0,004351	-0,00879	-0,04646	-0,31497	**0,002459**	-0,02548	-0,05147	-0,09505	-0,36446
6	0,007348	0,005082	-0,0064	-0,04159	-0,31103	0,004947	-0,01359	-0,03512	-0,07617	-0,36168
8	0,0083	0,005718	-0,00517	-0,0393	-0,30841	0,006054	-0,00727	-0,02633	-0,06533	-0,36063
10	0,008731	0,0063	-0,0044	-0,03816	-0,30767	0,007043	-0,00319	-0,02052	-0,05883	-0,35944
12	0,008777	0,006763	-0,00376	-0,03737	-0,30719	0,008017	**-0,00042**	-0,01618	-0,05403	-0,35897
15	0,008125	0,007053	-0,00317	-0,03672	-0,3068	0,0081	0,002519	-0,01169	-0,04922	-0,35817
17	0,008144	0,007274	-0,00279	-0,0365	-0,30674	0,008476	0,003872	-0,00946	-0,04696	-0,35768
20	0,008838	0,007333	-0,00253	-0,03625	-0,30766	0,009223	0,005493	-0,00724	-0,04415	-0,35751
25	0,009109	0,007338	-0,00244	-0,03614	-0,30788	0,008177	0,007199	-0,00454	-0,04087	-0,35756
30	0,009553	0,007191	-0,00255	-0,03625	-0,309	0,008913	0,008643	-0,00278	-0,03883	-0,35753
35	0,00887	0,00726	-0,00242	-0,03614	-0,30993	0,008602	0,009563	-0,00122	-0,03724	**-0,35748**
40	0,009803	0,007745	-0,00228	-0,03623	-0,31037	0,008784	0,010648	**-0,00039**	-0,03597	-0,35775
45	0,00888	0,007754	-0,00228	-0,03629	-0,31078	0,009562	0,011219	0,000561	-0,03485	-0,35767
50	0,009093	0,007738	**-0,0022**	-0,03581	-0,31111	0,009847	0,011517	0,001455	-0,03382	-0,35763
55	0,00826	0,007563	-0,00221	-0,0365	-0,31187	0,009606	0,012187	0,002091	-0,0332	-0,35859
60	0,009585	0,007593	-0,00223	-0,03662	-0,31221	0,009244	0,012358	0,002889	-0,03245	-0,35829
65	0,00898	0,007282	-0,00232	-0,03636	-0,31246	0,010621	0,012669	0,003273	-0,03202	-0,3581
70	0,009691	0,007176	-0,00255	-0,03635	-0,31282	0,009984	0,012794	0,003747	-0,03168	-0,35833
75	0,010505	0,007062	-0,00275	-0,03622	-0,31367	0,010392	0,012927	0,004021	-0,03115	-0,3584
80	0,010355	0,006834	-0,00294	-0,03596	-0,31381	0,010764	0,013315	0,004437	-0,03065	-0,35848
90	0,00976	0,006707	-0,0025	-0,0359	-0,31436	0,010422	0,01365	0,005251	-0,02967	-0,35902
110	0,010641	0,006298	-0,0028	-0,03572	-0,3159	0,010987	0,014352	0,00567	-0,02902	-0,35952
130	0,010947	0,005649	-0,00285	-0,03585	-0,31687	0,011136	0,015361	0,006415	-0,02838	-0,36061
150	0,010851	0,005286	-0,00291	**-0,03565**	-0,31815	0,011812	0,016099	0,006882	-0,02736	-0,36124
170	0,011864	0,005006	-0,00255	-0,03641	-0,3187	0,012483	0,016639	0,007889	**-0,02681**	-0,36186

Tabela 26: Vício do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_p (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	0,000566	0,021281	0,037475	0,041844	0,019978	0,0011	0,056259	0,10873	0,14289	0,11478
2	**0,000549**	**0,014792**	**0,018188**	**0,015128**	**0,085272**	0,000681	**0,014288**	**0,014668**	**0,01388**	0,11257
4	0,00073	0,017091	0,021949	0,018763	0,10063	**0,000649**	0,017529	0,019369	0,017479	0,11254
6	0,000856	0,017999	0,023112	0,0201	0,10557	0,000678	0,01889	0,02098	0,019596	0,1123
8	0,000952	0,018527	0,023478	0,020583	0,10743	0,000718	0,019623	0,021693	0,020547	0,11216
10	0,001013	0,018574	0,023613	0,020782	0,10817	0,000738	0,0197	0,022011	0,021007	**0,11204**
12	0,001042	0,018523	0,023489	0,020681	0,10846	0,000759	0,019499	0,021933	0,021063	0,11208
15	0,001211	0,018268	0,023217	0,020489	0,10837	0,000897	0,019155	0,0215	0,020787	0,11223
17	0,001168	0,017915	0,022917	0,020321	0,10811	0,000855	0,018776	0,021107	0,020538	0,11225
20	0,001056	0,017407	0,022541	0,020021	0,10758	0,000786	0,018237	0,020603	0,02017	0,11214
25	0,001091	0,017006	0,022052	0,019819	0,10693	0,000803	0,017606	0,020096	0,019887	0,11224
30	0,001073	0,016924	0,022013	0,019777	0,10652	0,000784	0,017586	0,019923	0,019974	0,1122
35	0,001079	0,01692	0,021944	0,019771	0,1061	0,000801	0,017719	0,019946	0,019852	0,1123
40	0,00109	0,016646	0,021903	0,019755	0,10602	0,000787	0,017341	0,019903	0,019738	0,11233
45	0,001081	0,016608	0,02181	0,019672	0,10599	0,000791	0,016936	0,019537	0,019576	0,11243
50	0,001081	0,016506	0,021682	0,019641	0,10591	0,000799	0,016703	0,019382	0,019533	0,11248
55	0,001096	0,016639	0,021754	0,019598	0,10584	0,000799	0,016768	0,019456	0,019602	0,11254
60	0,001107	0,016539	0,021861	0,01967	0,10601	0,000829	0,016876	0,019493	0,019607	0,11255
65	0,001116	0,016456	0,021773	0,019763	0,10598	0,000807	0,016653	0,019321	0,019494	0,11265
70	0,001112	0,016584	0,021544	0,019818	0,10604	0,000813	0,01662	0,019416	0,019437	0,11251
75	0,00113	0,016641	0,021599	0,019901	0,10605	0,000812	0,016452	0,019431	0,019457	0,11245
80	0,001133	0,01682	0,021613	0,019934	0,10601	0,000824	0,016558	0,019539	0,019541	0,11231
90	0,0011447	0,016823	0,021727	0,019911	0,10628	0,00085144	0,01688	0,019673	0,019653	0,11242
110	0,0011981	0,016828	0,021933	0,020083	0,10667	0,00088807	0,016901	0,01978	0,019828	0,11248
130	0,0012426	0,017322	0,022132	0,020258	0,10713	0,00093261	0,016765	0,019896	0,019815	0,11263
150	0,0013341	0,017681	0,022453	0,02044	0,10709	0,00098459	0,017347	0,020141	0,020062	0,11315
170	0,0013743	0,017688	0,022728	0,020532	0,10797	0,0010181	0,017591	0,020364	0,020275	0,11341

Tabela 27: EQM do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_{sp}

d	0,2					0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	0,003051	0,058907	0,062648	0,044105	**0,004276**	0,067751	0,47931	0,31971	0,15717	**0,008383**
2	**0,001471**	**0,021167**	**0,023997**	**0,017456**	0,044394	0,006146	0,065736	0,061677	0,039208	0,0468
4	0,001538	0,021761	0,024341	0,018559	0,077216	0,004559	0,049057	0,047672	0,03099	0,072615
6	0,001588	0,022062	0,024678	0,018897	0,089581	0,004039	0,042902	0,042777	0,028565	0,083183
8	0,001618	0,022178	0,024925	0,019115	0,094423	0,003789	0,039662	0,040313	0,027464	0,087785
10	0,001643	0,022256	0,025068	0,01929	0,096229	0,003644	0,037599	0,038749	0,02685	0,089929
12	0,001655	0,022299	0,025175	0,019411	0,096722	0,003538	0,036209	0,03768	0,026422	0,091017
15	0,001669	0,022346	0,025261	0,019558	0,096606	0,003412	0,034783	0,036672	0,025964	0,091809
17	0,001658	0,022364	0,025288	0,019602	0,096354	0,003354	0,034057	0,036093	0,02571	0,091965
20	0,001649	0,022388	0,025316	0,019675	0,095831	0,003295	0,033184	0,035411	0,025376	0,092101
25	0,001639	0,022429	0,025275	0,019643	0,095114	0,003229	0,032092	0,034548	0,024891	0,092188
30	0,001637	0,022415	0,025393	0,019627	0,094334	0,003187	0,031412	0,033895	0,024551	0,09222
35	0,001645	0,02244	0,025445	0,019639	0,093937	0,003149	0,030884	0,033441	0,024304	0,09227
40	0,001667	0,02244	0,02549	0,019666	0,093645	0,003129	0,030439	0,033029	0,024052	0,092355
45	0,001685	0,022466	0,025489	0,019693	0,093546	0,003131	0,030108	0,032656	0,023884	0,09239
50	0,001705	0,022485	0,025461	0,019682	0,093324	0,003127	0,02983	0,032444	0,023719	0,092447
55	0,001742	0,022557	0,025479	0,019705	0,093298	0,003129	0,029502	0,032199	0,023542	0,092349
60	0,001751	0,022636	0,025509	0,019841	0,093325	0,003104	0,02933	0,031998	0,023483	0,092412
65	0,001751	0,022729	0,025504	0,01982	0,093345	0,003084	0,029085	0,031905	0,023427	0,092564
70	0,001759	0,022743	0,02553	0,019817	0,093434	0,00309	0,028931	0,031839	0,023374	0,092555
75	0,001766	0,022703	0,025538	0,019912	0,093476	0,003086	0,028758	0,031716	0,023293	0,092748
80	0,001784	0,022679	0,02554	0,019996	0,093657	**0,003084**	0,028607	0,031607	0,023263	0,092785
90	0,00179	0,022704	0,025542	0,019999	0,093504	0,003142	0,028547	0,031358	0,023059	0,0928
110	0,001863	0,022972	0,025549	0,020071	0,093809	0,003238	0,028079	0,031154	0,022923	0,093083
130	0,001926	0,023224	0,02572	0,020192	0,094154	0,00322	**0,027991**	0,030954	0,022866	0,093336
150	0,001973	0,023724	0,026069	0,020289	0,094567	0,003225	0,028201	0,030878	0,022817	0,093606
170	0,002025	0,024046	0,026317	0,020408	0,094888	0,003292	0,028154	**0,030801**	**0,022737**	0,093785

Tabela 28: EQM do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_{sp} (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,002559	0,035817	0,045902	0,038317	**0,00339**	0,00944	0,15272	0,17687	0,12105	**0,005573**
2	0,001181	**0,013564**	**0,023173**	0,020004	0,045831	0,001709	**0,012487**	**0,021484**	0,023842	0,009014
4	**0,001086**	0,015999	0,025157	0,020883	0,070234	0,001274	0,016596	0,022669	0,020592	0,021626
6	0,00109	0,016739	0,025826	0,02124	0,066166	0,001106	0,017909	0,023875	0,020091	0,021936
8	0,001105	0,017022	0,026133	0,021367	0,062948	**0,001023**	0,018429	0,024673	0,020183	0,020321
10	0,001128	0,017096	0,02624	0,021267	0,060403	0,001081	0,018555	0,024932	0,02029	0,019404
12	0,001155	0,01706	0,02603	0,021256	0,058515	0,001072	0,018523	0,024776	0,020178	0,018422
15	0,001214	0,016868	0,025755	0,020856	0,056511	0,001215	0,018564	0,024571	0,019717	0,017777
17	0,001215	0,016682	0,025433	0,020615	0,055406	0,001252	0,018396	0,024129	0,019448	0,017143
20	0,001131	0,016488	0,025092	0,020342	0,054051	0,001132	0,017857	0,02375	0,019139	0,01643
25	0,001183	0,016431	0,02479	0,020051	0,052941	0,001181	0,017666	0,023411	0,018593	0,015759
30	0,001177	0,016391	0,024783	0,02023	0,053039	0,001122	0,017749	0,02368	0,018615	0,015704
35	0,001207	0,016389	0,024594	0,020292	0,053373	0,001117	0,01773	0,023532	0,018795	0,015809
40	0,001215	0,016255	0,024513	0,020007	0,053032	0,001198	0,017765	0,023325	0,018704	0,015912
45	0,001211	0,016148	0,024511	0,01989	0,052858	0,001278	0,017562	0,023138	0,018715	0,015374
50	0,001249	0,016133	0,024498	0,019784	0,05257	0,001207	0,017559	0,023056	0,018682	0,01549
55	0,001309	0,01624	0,024511	**0,019734**	0,05273	0,001228	0,017701	0,023225	0,018613	0,015404
60	0,001274	0,016193	0,024591	0,01977	0,053305	0,001217	0,017699	0,023151	0,018538	0,015521
65	0,001251	0,016181	0,024616	0,019861	0,052719	0,001223	0,017713	0,023241	0,018555	0,015222
70	0,001254	0,016159	0,024726	0,019807	0,052936	0,001292	0,017791	0,023162	0,018624	0,015191
75	0,001318	0,016174	0,024593	0,019813	0,052538	0,001294	0,017932	0,023272	0,018532	0,015338
80	0,001319	0,016162	0,02467	0,019934	0,05326	0,001258	0,017935	0,023243	**0,018478**	0,015512
90	0,001348	0,016327	0,024699	0,019784	0,052587	0,001237	0,017924	0,023344	0,018631	0,015251
110	0,001479	0,016526	0,024807	0,020052	0,053945	0,001343	0,017882	0,023249	0,018645	0,015361
130	0,001461	0,016954	0,024983	0,019972	0,053652	0,00144	0,018088	0,023676	0,019147	0,015451
150	0,001526	0,017064	0,025386	0,020329	0,054017	0,001478	0,018238	0,023803	0,019165	0,015403
170	0,001524	0,017219	0,025373	0,020566	0,053883	0,001521	0,018498	0,024048	0,01932	0,015593

Tabela 29: EQM do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_{sp}

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,000899	0,033465	0,051752	0,052707	**0,023737**	0,002875	0,16054	0,27239	0,29706	**0,15775**
2	**0,000762**	**0,016949**	**0,022496**	**0,023068**	0,14437	**0,000875**	0,029885	0,049897	0,055676	0,18134
4	0,0009	0,017232	0,024151	0,023708	0,1474	0,000902	0,024238	0,041138	0,045036	0,17867
6	0,000898	0,017554	0,02472	0,024164	0,14309	0,000964	0,022569	0,038141	0,040935	0,17787
8	0,000893	0,017726	0,025039	0,024442	0,14091	0,000936	0,021836	0,036523	0,038767	0,17805
10	0,000922	0,017863	0,025351	0,024631	0,13997	0,000969	0,021314	0,035584	0,037421	0,17786
12	0,000947	0,018008	0,025503	0,024764	0,13939	0,000959	0,020906	0,034862	0,036511	0,17828
15	0,000944	0,01812	0,02566	0,024884	0,1392	0,000969	0,020553	0,03413	0,035534	0,17841
17	0,00093	0,018251	0,025677	0,024961	0,13929	0,001004	0,020418	0,033741	0,035087	0,17857
20	0,000975	0,018221	0,025681	0,024974	0,13961	0,001036	0,020187	0,033269	0,034505	0,17897
25	0,001014	0,018287	0,025786	0,025046	0,14018	0,001009	0,019915	0,032584	0,033592	0,1801
30	0,00098	0,018235	0,025861	0,025173	0,14114	0,00103	0,019805	0,031962	0,033057	0,18073
35	0,000988	0,018223	0,025833	0,02528	0,14221	0,001003	0,019633	0,031661	0,032555	0,18137
40	0,001019	0,018278	0,025907	0,02527	0,14274	0,001017	0,019473	0,031312	0,032242	0,18217
45	0,001022	0,018329	0,025986	0,025313	0,14335	0,001055	0,019418	0,031116	0,032007	0,18286
50	0,001006	0,018395	0,026021	0,02546	0,14393	0,001064	0,019322	0,030945	0,031713	0,18341
55	0,000977	0,018456	0,026094	0,025537	0,14478	0,001073	0,019194	0,030755	0,031508	0,18417
60	0,001012	0,018513	0,026207	0,025587	0,14512	0,001059	0,019084	0,030573	0,031386	0,18463
65	0,001065	0,01861	0,026238	0,025682	0,14552	0,001097	0,019107	0,030475	0,031215	0,1848
70	0,001132	0,018623	0,026348	0,025762	0,14576	0,001098	0,019064	0,030375	0,031083	0,18523
75	0,001042	0,018695	0,026398	0,025891	0,14653	0,00113	0,019074	0,030256	0,030902	0,18564
80	0,001181	0,018767	0,026358	0,025879	0,14716	0,001119	0,018968	0,030085	0,030651	0,18609
90	0,001082	0,01892	0,026424	0,025879	0,14794	0,001131	0,018839	0,029985	0,030512	0,18718
110	0,001114	0,019032	0,026789	0,026135	0,14962	0,001277	**0,018665**	0,029885	0,030198	0,18839
130	0,001221	0,019234	0,026942	0,026176	0,15102	0,00123	0,018721	0,029758	0,030183	0,19022
150	0,001197	0,01936	0,026998	0,026515	0,15259	0,00125	0,018765	0,029706	0,030183	0,19157
170	0,001338	0,019603	0,026984	0,027029	0,15358	0,001235	0,018813	**0,029632**	**0,030051**	0,19284

Tabela 30: EQM do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_{sp} (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	-0,01687	-0,14091	-0,1891	-0,20059	**-0,13751**	-0,02983	-0,2343	-0,32729	-0,37569	-0,33597
2	**-0,00233**	**0,027238**	**0,016414**	-0,02322	-0,2665	-0,01734	0,011435	0,008011	-0,04647	-0,31315
4	0,00235	0,032549	0,02335	-0,00377	-0,28749	-0,0122	0,016135	0,011134	-0,01775	-0,30681
6	0,004629	0,033394	0,02419	-0,00017	-0,29401	-0,00931	0,015185	0,008738	**-0,0142**	-0,30396
8	0,005854	0,033613	0,023971	0,000285	-0,29638	-0,00751	0,014026	0,006866	-0,01512	-0,30262
10	0,006657	0,033272	0,023529	**-2,08E-05**	-0,29728	-0,00631	0,012633	0,005546	-0,01625	-0,30199
12	0,007088	0,032937	0,022833	-0,00077	-0,29761	-0,0055	0,010825	0,003971	-0,0178	**-0,30185**
15	0,009207	0,031877	0,021932	-0,00172	-0,29741	**-0,00141**	0,009099	0,001683	-0,02006	-0,30214
17	0,008812	0,030972	0,021287	-0,00241	-0,29706	-0,00218	0,007313	**0,000217**	-0,02172	-0,30234
20	0,007552	0,029829	0,020305	-0,00327	-0,29639	-0,00439	0,005672	-0,00184	-0,02367	-0,30248
25	0,008117	0,02915	0,019121	-0,00429	-0,29559	-0,00341	0,003773	-0,0042	-0,02595	-0,30309
30	0,007697	0,028834	0,018676	-0,00485	-0,29524	-0,00416	0,002946	-0,00597	-0,02729	-0,30335
35	0,007801	0,028511	0,018741	-0,00512	-0,29474	-0,00393	0,003222	-0,00617	-0,02812	-0,30377
40	0,007775	0,028077	0,018218	-0,00544	-0,29463	-0,00416	0,002291	-0,0068	-0,0293	-0,30409
45	0,007736	0,027991	0,017738	-0,00581	-0,29459	-0,004	0,001266	-0,00789	-0,0299	-0,30442
50	0,007651	0,027832	0,017421	-0,00604	-0,29445	-0,00394	0,000849	-0,00882	-0,03058	-0,30471
55	0,007774	0,028382	0,017591	-0,00601	-0,29428	-0,00385	0,000566	-0,00912	-0,03088	-0,30492
60	0,007746	0,028302	0,017452	-0,00613	-0,29436	-0,00372	0,000783	-0,00959	-0,03128	-0,30502
65	0,007832	0,028056	0,01741	-0,00645	-0,29437	-0,00372	0,000232	-0,01003	-0,03218	-0,30512
70	0,007863	0,028135	0,017137	-0,00674	-0,29457	-0,00371	-0,00022	-0,01021	-0,03286	-0,30493
75	0,008007	0,027994	0,017135	-0,00678	-0,29464	-0,00364	-0,00025	-0,0105	-0,03295	-0,30477
80	0,008105	0,028457	0,017206	-0,00691	-0,29455	-0,00385	**2,87E-05**	-0,0111	-0,03304	-0,30462
90	0,008089	0,028456	0,017369	-0,00678	-0,29494	-0,00378	2,79E-04	-0,0115	-0,03317	-0,3047
110	0,008226	0,028503	0,017632	-0,00697	-0,2953	-0,00375	-3,71E-04	-0,01231	-0,03331	-0,30451
130	0,008364	0,029156	0,017733	-0,00603	-0,29588	-0,00322	-1,09E-04	-0,01192	-0,03407	-0,30471
150	0,008662	0,029453	0,017868	-0,00635	-0,29589	-0,00266	1,08E-03	-0,01198	-0,03411	-0,30531
170	0,009061	0,028997	0,016966	-0,00623	-0,29681	-0,0023	1,11E-03	-0,01156	-0,03357	-0,3055

Tabela 31: Vício do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_{sp}

d	0,2					0,4				
m	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9	ϕ=-0,9	ϕ=-0,2	ϕ=0,2	ϕ=0,5	ϕ=0,9
0	0,047833	0,23579	0,24521	0,2068	**0,064545**	0,23056	0,6789	0,56032	0,39462	**0,091396**
2	0,01917	0,060172	0,049503	0,031936	-0,16542	0,044991	0,16453	0,16047	0,12402	-0,13372
4	0,017187	0,055168	0,042988	0,015286	-0,23742	0,033191	0,11961	0,11156	0,069551	-0,2085
6	0,016594	0,053512	0,040651	0,011322	-0,26208	0,02899	0,10125	0,091182	0,048908	-0,237
8	0,016416	0,052299	0,039206	0,009426	-0,27178	0,02695	0,090844	0,079762	0,037798	-0,24975
10	0,016347	0,051579	0,038201	0,008149	-0,27569	0,025688	0,08415	0,072391	0,030724	-0,25612
12	0,016243	0,051182	0,037556	0,00742	-0,27698	0,024876	0,079536	0,067216	0,025717	-0,25968
15	0,016098	0,050813	0,036818	0,006693	-0,27713	0,023858	0,07485	0,062034	0,020652	-0,26256
17	0,016054	0,050701	0,036343	0,006291	-0,27686	0,023552	0,072505	0,059481	0,018203	-0,2635
20	0,016088	0,050644	0,035956	0,005786	-0,27617	0,023185	0,06984	0,056593	0,015384	-0,26448
25	0,016021	0,050556	0,035699	0,005684	-0,2751	0,022637	0,066287	0,053002	0,012496	-0,26552
30	0,016008	0,0505	0,035368	0,005601	-0,27397	0,022361	0,064219	0,050592	0,010173	-0,26607
35	**0,016002**	**0,050212**	0,035026	0,005361	-0,27336	0,022011	0,062639	0,048558	0,008699	-0,26645
40	0,016181	0,050266	0,03494	0,005154	-0,27288	0,021731	0,061031	0,046981	0,00746	-0,267
45	0,016316	0,050371	0,034761	0,005154	-0,27272	0,021676	0,059666	0,045837	0,006511	-0,2672
50	0,016426	0,050459	0,034665	0,004967	-0,27234	0,021569	0,058595	0,044814	0,005607	-0,26752
55	0,016483	0,050611	0,034641	0,004823	-0,27235	0,021484	0,057585	0,044212	0,005028	-0,26764
60	0,016505	0,050686	0,034438	0,004514	-0,27239	0,02142	0,056914	0,043692	0,004548	-0,2678
65	0,016528	0,050928	0,034325	0,004366	-0,27242	0,021267	0,056252	0,043146	0,004023	-0,26809
70	0,016487	0,050938	0,034111	0,004349	-0,27255	0,021192	0,055782	0,042502	0,003457	-0,26822
75	0,016547	0,051012	0,034036	0,004183	-0,27269	0,021141	0,055241	0,042013	0,003229	-0,26856
80	0,016701	0,051002	0,034036	**0,004113**	-0,273	**0,020967**	0,054681	0,041623	0,002766	-0,26865
90	0,016932	0,050821	0,033761	0,0043	-0,27278	0,021139	0,053909	0,040981	0,002266	-0,26879
110	0,017206	0,050912	0,033229	0,00453	-0,27316	0,021427	0,052283	0,039761	0,000948	-0,26955
130	0,017373	0,051106	0,03297	0,004511	-0,2735	0,021626	0,051425	0,039162	**0,000323**	-0,26986
150	0,017574	0,051152	0,033218	0,004653	-0,2739	0,021866	0,051183	0,038261	-0,00072	-0,27036
170	0,017617	0,050973	**0,03237**	0,004335	-0,2745	0,0224	**0,050844**	**0,037416**	-0,00099	-0,2705

Tabela 32: Vício do estimador do parâmetro ϕ do modelo ARFIMA(1,d,0) usando-se d_{sp} (cont.)

d	-0,2					-0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	0,03906	0,18211	0,20921	0,19247	**0,055242**	0,083566	0,38603	0,41812	0,34671	0,072143
2	0,014945	**-0,00524**	-0,02184	**-0,02271**	-0,10486	0,027934	0,008464	**-0,00065**	0,033568	0,042694
4	0,00979	-0,01201	-0,02509	-0,03473	-0,19101	0,018762	**0,003339**	-0,0023	0,001728	**-0,01643**
6	0,008126	-0,01309	-0,02525	-0,03567	-0,19592	0,014865	0,004311	0,001089	**0,00145**	-0,03693
8	0,00852	-0,01316	-0,02495	-0,03542	-0,19389	0,012544	0,005775	0,003653	0,00249	-0,03988
10	0,006849	-0,01291	-0,02462	-0,03466	-0,19009	0,011775	0,007547	0,005345	0,003955	-0,04045
12	0,007208	-0,0125	-0,02407	-0,03418	-0,18724	0,011017	0,009201	0,007363	0,00613	-0,04205
15	**0,005511**	-0,01162	-0,02289	-0,03299	-0,18423	0,006718	0,010034	0,009969	0,008583	-0,04184
17	0,006177	-0,01125	-0,02206	-0,03247	-0,18277	**0,00691**	0,011177	0,011263	0,010087	-0,03998
20	0,007445	-0,01028	-0,02124	-0,03201	-0,18084	0,009798	0,012862	0,012962	0,011772	-0,04038
25	0,007213	-0,00973	-0,02041	-0,03085	-0,17859	0,009205	0,014493	0,015089	0,014212	-0,03887
30	0,007482	-0,00949	-0,02025	-0,03085	-0,17884	0,00965	0,015143	0,015834	0,015541	-0,03891
35	0,007199	-0,00956	-0,02008	-0,03085	-0,17925	0,009126	0,016139	0,016618	0,015547	-0,039
40	0,008152	-0,00956	-0,01997	-0,03036	-0,17861	0,009727	0,016638	0,01781	0,016436	-0,03894
45	0,007255	-0,00901	-0,0199	-0,03003	-0,17866	0,010649	0,017713	0,018374	0,017149	-0,03914
50	0,008139	-0,00913	-0,0196	-0,03003	-0,17811	0,010481	0,018171	0,019241	0,017946	-0,03929
55	0,008116	-0,00935	**-0,01938**	-0,03003	-0,17784	0,010475	0,017958	0,01963	0,018064	-0,03864
60	0,007974	-0,0092	-0,01937	-0,02959	-0,17875	0,01102	0,018591	0,019795	0,018125	-0,03843
65	0,008068	-0,00902	-0,01943	-0,02991	-0,17779	0,010601	0,019049	0,019355	0,018595	-0,03794
70	0,008188	-0,00913	-0,01955	-0,02986	-0,17812	0,010964	0,018988	0,019952	0,018406	-0,0385
75	0,00799	-0,00924	-0,01959	-0,02993	-0,17739	0,011266	0,018712	0,020021	0,018747	-0,03828
80	0,008481	-0,00941	-0,01959	-0,02991	-0,17828	0,010319	0,018766	0,020272	0,018698	-0,03808
90	0,008734	-0,00944	-0,01939	-0,0295	-0,17757	0,010637	0,01853	0,020337	0,019197	-0,03757
110	0,009111	-0,01009	-0,01969	-0,02994	-0,17944	0,011156	0,018838	0,020261	0,019681	-0,03835
130	0,008984	-0,00967	-0,01994	-0,03005	-0,17889	0,012106	0,018826	0,020556	0,02007	-0,03891
150	0,008983	-0,00962	-0,02107	-0,03023	-0,17854	0,011621	0,018996	0,020331	0,020071	-0,03835
170	0,009698	-0,01002	-0,02048	-0,02988	-0,17809	0,012362	0,019372	0,020207	0,019841	-0,03849

Tabela 33: Vício do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_{sp}

d	0,2					0,4				
m	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9	θ=-0,9	θ=-0,2	θ=0,2	θ=0,5	θ=0,9
0	-0,02382	-0,17833	-0,2226	-0,2252	**-0,14931**	-0,05098	-0,39564	-0,51437	-0,53681	-0,3927
2	-0,00208	-0,03344	-0,05314	-0,09314	-0,34496	-0,01135	-0,1021	-0,14565	-0,18118	-0,40174
4	**0,000749**	-0,02987	-0,04523	-0,07995	-0,35201	-0,00508	-0,06926	-0,10471	-0,13902	-0,39653
6	0,000997	-0,0285	-0,04243	-0,07586	-0,3477	-0,00227	-0,05573	-0,08734	-0,11996	-0,3947
8	0,002318	-0,02743	-0,04067	-0,07355	-0,34489	-0,00079	-0,04843	-0,07753	-0,10863	-0,39424
10	0,002411	-0,02666	-0,03949	-0,07234	-0,34396	**-0,00024**	-0,04366	-0,071	-0,10157	-0,3932
12	0,00263	-0,02605	-0,03855	-0,07131	-0,34348	0,000915	-0,04039	-0,06609	-0,09632	-0,39308
15	0,002084	-0,02537	-0,03768	-0,0703	-0,34325	0,001229	-0,03695	-0,06099	-0,09088	-0,39252
17	0,002078	-0,02506	-0,03722	-0,0698	-0,34336	0,001412	-0,03537	-0,05839	-0,08822	-0,39217
20	0,002532	-0,02496	-0,03687	-0,06943	-0,34417	0,002412	-0,03356	-0,05568	-0,08516	**-0,39203**
25	0,003071	-0,02484	-0,03656	-0,06918	-0,34475	0,001552	-0,03162	-0,0527	-0,08146	-0,39255
30	0,003491	-0,02486	-0,03656	-0,06904	-0,34584	0,002024	-0,02994	-0,05067	-0,07895	-0,39266
35	0,002716	-0,02465	-0,03643	-0,06892	-0,34682	0,001754	-0,02885	-0,04902	-0,07715	-0,39281
40	0,003694	-0,02432	-0,03622	-0,06893	-0,3475	0,002055	-0,02765	-0,04792	-0,07577	-0,3931
45	0,002833	**-0,02427**	-0,03615	-0,06895	-0,34796	0,00283	-0,02701	-0,04681	-0,07439	-0,3933
50	0,002952	-0,02442	-0,03606	-0,06857	-0,34855	0,00308	-0,02647	-0,04589	-0,07325	-0,39346
55	0,002374	-0,02458	-0,03602	-0,069	-0,34951	0,002889	-0,02589	-0,04513	-0,07251	-0,39419
60	0,00352	-0,02453	-0,03611	-0,06922	-0,34965	0,002349	-0,0256	-0,04426	-0,07186	-0,39421
65	0,003036	-0,0248	**-0,03601**	-0,06899	-0,35013	0,003969	-0,02528	-0,04387	-0,07125	-0,3939
70	0,003555	-0,02491	-0,0365	-0,06897	-0,35044	0,003369	-0,02494	-0,04329	-0,07074	-0,39426
75	0,004252	-0,02496	-0,03658	-0,06864	-0,35124	0,003779	-0,02481	-0,043	-0,07012	-0,39431
80	0,003794	-0,02512	-0,03675	-0,06861	-0,35177	0,003789	-0,02444	-0,04256	-0,06959	-0,39451
90	0,003585	-0,02537	-0,03632	-0,0684	-0,35245	0,003525	-0,02386	-0,04158	-0,06836	-0,39536
110	0,004331	-0,02572	-0,03668	-0,06821	-0,35378	0,004654	-0,02304	-0,041	-0,06771	-0,39581
130	0,004389	-0,02612	-0,03697	-0,06817	-0,35493	0,004445	-0,02189	-0,03992	-0,06702	-0,39701
150	0,004095	-0,02655	-0,03688	**-0,06785**	-0,35642	0,004868	-0,02098	-0,03935	-0,06588	-0,39776
170	0,005429	-0,02674	-0,03662	-0,06862	-0,35704	0,005864	**-0,02035**	**-0,03831**	**-0,06527**	-0,3983

Tabela 34: Vício do estimador do parâmetro θ do modelo ARFIMA(0,d,1) usando-se d_{sp} (cont.)

Referências Bibliográficas

ANDERSON, T. W. *The statistical analysis of time series*. New York: Wiley, 1971.

BROCKWELL, P.; DAVIS, R. *Time Series: Theory and Methods*. New York: Springer-Verlag, 1991.

CEREZER, S. *Estimação do Parâmetro d em Modelos ARFIMA(p, d, q) Utilizando o Método de Simulação Exata*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 1999.

EL-DASH, N. A. *Estimação não-paramétrica de volatilidade em modelos contínuos*. Dissertação (Mestrado) — Dep. Estatística, IMECC, UNICAMP, Campinas, 2002.

GEWEKE, J.; PORTER-HUDAK. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, v. 4, n. 4, p. 221–238, 1986.

HASSLER, U. *Regression of spectral estimator with fractionally integrates series*. Berlin: Institute of Statistics and Econometrics, Free University, 1991.

HOSKING, J. Fractional differencing. *Biometrika*, v. 68, n. 1, p. 165–176, 1981.

HOSKING, J. Modelling persistence in hidrological time series using fractional differencing. *Water Resourses Res.*, v. 20, p. 1898–1908, 1984.

JENSEN, M. J. Using wavelets to obtain a consistent ordinary least square estimator of long-memory parameter. *Journal of Forecast*, v. 18, p. 17–32, 1999.

KAISER, G. *A Friendly guide to wavelets*. [S.l.]: Birkhäuser, 1994.

KORNER, T. W. *Fourier Analysis*. Cambridge: Cambridge Universisty Press, 1988.

MCLEOD, A.; HIPEL, K. Preservation of rescaled adjusted range.1. a reassessment of the hurst phenomenon. *Water Resourses Res.*, v. 14, p. 491–508, 1978.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. *Introduction to the Theory of Statistics*. [S.l.]: McGraw-Hill., 1974.

OLBERMANN, B. *Estimação do Parâmetro de Diferenciação em Séries Temporais Não Estacionárias com Características de Longa Dependência.* Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 1998.

PERCIVAL, D.; WALDEN, A. T. *Wavelet Method for Time Series Analysis.* Cambridge: Cambridge Universisty Press, 2000.

REISEN, V. A. Estimation of the fractional difference parameter in the arfima(p,d,q) model using the smoothed periodogram. *Journal of Time Series Analysis*, v. 15, p. 335–350, 1994.

VIDAKOVIC, B. *Statistical modeling by wavelets.* New York: Wiley, 1999.

WEI, W. *Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods.* [S.l.]: Addison-Wesley, 1990.

WHITTLE, P. Estimation and information in time series. *Arkiv för Matematik*, v. 2, p. 423–434, 1953.