
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

**Expoentes de Lyapunov e o Teorema
Ergódico Multiplicativo de Oseledec**

Luciana Aparecida Alves[†]

Dissertação de Mestrado - Campinas, SP - 2007

Prof. Dr. **Luiz Antonio Barrera San Martin**

Orientador

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Expoentes de Lyapunov e o Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luciana Aparecida Alves** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 27 de fevereiro de 2007.



Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Alves, Luciana Aparecida
AL87e Expoentes de Lyapunov e o teorema ergódico multiplicativo de
Oseledec /Luciana Aparecida Alves -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria ergódica. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Fibrados
(Matemática). I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

(mca/imecc)

Título em inglês: Lyapunov exponents and Oseledec's multiplicative ergodic theorem

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Ergodic theory. 2. Dynamical systems. 3. Fiber bundles.

Área de concentração: Sistemas dinâmicos

Titulação: Mestre em Matemática

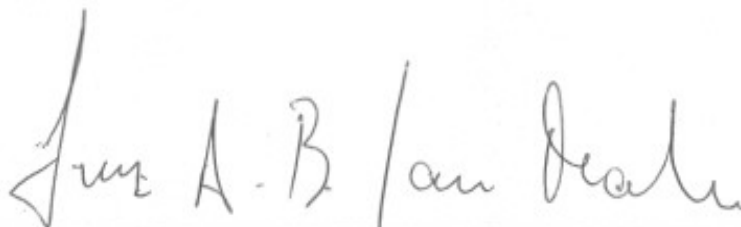
Banca examinadora: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-Unicamp)
Prof. Dr. Mauro Moraes Alves Patrão (UnB)
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (IMECC-Unicamp)

Data da defesa: 27/02/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de fevereiro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Luiz A. B. / an Deale'.

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'MAA Patrão'.

Prof. (a). Dr (a). MAURO MORAES ALVES PATRÃO

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'P. Ruffino'.

Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

À minha mãe.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus por ter vencido mais essa etapa em minha vida, já que sem a sua ajuda, nada disso seria possível.

À minha mãe Amélia, não somente a agradeço, como dedico e ofereço todos estes dois anos de trabalho a ela, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos em que o cansaço parecia ser mais forte, que foi o meu ponto de apoio e incentivo em todas as horas, e com certeza tudo o que sou até hoje devo a ela. E é por isso que não há nada no mundo que possa exprimir o quanto eu sou grata a essa pessoa, que apesar de todos os obstáculos que enfrentou e ainda enfrenta na vida, conseguiu ser essa mãe excepcional que fez com que eu nunca perdesse a vontade de vencer e lutar pelo que quero.

Agradeço muito ao meu pai Geraldino, que apesar de não entender exatamente o que eu faço, ficou ao meu lado quando decidi sair de casa para fazer o mestrado em Campinas. Também agradeço à minha irmã Monisse, uma pessoa muito determinada, que também me apoiou em todas as decisões da minha vida, e que apesar de ver através de mim o quanto a carreira acadêmica exige de estudo e dedicação pretende prestar vestibular em Matemática e também seguir na área acadêmica.

Agradeço ao meu orientador San Martin pela ajuda na elaboração desta dissertação e, principalmente, por ter me aceitado como sua orientanda, já que fazia bastante tempo que não orientava alunos de mestrado e, ainda, por ter concordado em continuar este trabalho no doutorado. Sou grata também aos professores presentes na minha banca, os Profs. Paulo Ruffino e Mauro Patrão.

Sou muito grata também à todos os meus amigos da pós-graduação que de forma

direta ou indireta contribuíram para que tudo isso se tornasse realidade. Em especial, agradeço ao Laércio, que apesar de trabalhar com coisas distintas das que eu trabalho, sempre esteve empenhado em me ajudar no que fosse preciso.

Agradeço também à minha amiga Gabriela, que por morar comigo desde sempre em Campinas, sempre foi uma das primeiras a ouvir as minhas lamentações, alegrias, tristezas e, principalmente, aguentou e teve muita paciência com as minhas crises de “pós-provas”.

Também quero fazer um agradecimento muito especial a todas as pessoas da ONG “Só por Deus” que apesar de estarem fisicamente muito distantes de mim, torceram e intercederam à Deus por mim para que tudo isso desse certo. Que Deus abençoe a todos vocês!

Finalmente, agradeço à CAPES pelo imprescindível auxílio financeiro.

Luciana Aparecida Alves
Campinas, 27 de fevereiro de 2007.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é fornecer condições para garantirmos a existência dos expoentes de Lyapunov. Inicialmente, introduzimos o conceito de expoente de Lyapunov associado a sistemas de equações diferenciais lineares não-autônomas e discutimos algumas propriedades que surgem com a introdução deste conceito. Em seguida, damos duas versões para a demonstração do Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec para fluxos em tempo discreto associados a cociclos definidos sobre fibrados vetoriais triviais. A partir disto, estendemos este teorema para sistemas em tempo contínuo, usando a extensão do Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman. Finalmente, apresentamos uma noção de fluxos em fibrados mais gerais do que fibrados triviais e obtemos, sob determinadas condições, um caso particular do Teorema de Oseledec em cada fibra de um fibrado vetorial não-trivial.

Abstract

The main result of this work provides conditions to assure the existence of Lyapunov exponents. First of all, we introduce the concept of Lyapunov exponents associated to nonautonomous linear differential equations and we discuss some properties which appear with the introduction of this concept. We give two versions for the proof of Oseledec's Multiplicative Ergodic Theorem for discrete time flows associated to cocycles which are defined in trivial vector bundles. From this, we extend this theorem for continuous time systems, using an extension of Kingman's Subadditive Ergodic Theorem. Finally, we present a notion of flows in fiber bundles more general than the trivial vector bundles and we obtain, given some conditions, a particular case of the Oseledec's Theorem in each fiber of a non trivial vector bundle.

Sumário

Resumo	xi
Abstract	xiii
Introdução	1
1 Teoria Ergódica	5
1.1 Transformações que preservam medida	5
1.1.1 Medidas Invariantes	7
1.1.2 Recorrência	9
1.1.3 O Teorema de Birkhoff	10
2 Expoentes de Lyapunov	21
2.1 Definição e Propriedades	22
2.2 Decomposição Primária	28
2.3 Expoentes de Lyapunov para Sistemas Periódicos	31
3 Demonstração do Teorema de Oseledec segundo Ruelle	35
3.1 Versão Determinística do Teorema Ergódico Multiplicativo	35
3.2 Teorema Ergódico Multiplicativo - Caso Discreto	50
4 Prova Dinâmica do Teorema Ergódico Multiplicativo	57
4.1 Apresentação do Teorema	58
4.2 Prova dos itens (i), (ii) e (iii)	59

4.3	Existência do limite em (iv)	67
5	Extensão do Teorema Ergódico Multiplicativo	85
5.1	Semifluxos em tempo contínuo	85
5.2	Fluxos em tempo discreto	90
5.3	Fluxos em tempo contínuo	92
6	Fluxos em Fibrados	95
6.1	Fibrados	95
6.1.1	Fibrados Principais	95
6.1.2	Fibrados Associados	101
6.2	Construção de fluxos em fibrados	105
6.3	Caso Particular do Teorema de Oseledec	107
A	Produto Exterior	113
	Referências Bibliográficas	117

Introdução

Seja o sistema

$$\dot{x}_t = f(x_t), \quad (1)$$

onde f é um campo não-linear de vetores com uma singularidade em x_0 , isto é, $f(x_0) = 0$. Dessa forma, podemos olhar tal sistema como uma “pequena perturbação” do sistema linearizado $\dot{x}_t = Ax_t$, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$, em uma vizinhança de x_0 . Sabemos que a dinâmica desse tipo de sistema é completamente descrita pela teoria espectral de A . Ou seja, com isso podemos determinar localmente a dinâmica do sistema (1).

A teoria de estabilidade desenvolvida por A. M. Lyapunov em sua monografia “*Problème général de la stabilité du mouvement*” em 1892 permitia, sob certas condições, adotar o mesmo procedimento para sistemas não-autônomos. De fato, Lyapunov afirma no referido texto que para sistemas lineares não-autônomos

$$\dot{x}_t = A(t)x_t, \quad (2)$$

a solução trivial é assintoticamente estável, caso os números reais dados por

$$\lambda(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\|,$$

sejam todos negativos, onde $\Phi(t)$ é a matriz fundamental para o sistema (2) e x é um vetor não-nulo. Os números reais $\lambda(x)$ são chamados de *expoentes de Lyapunov*.

O Teorema Ergódico Multiplicativo, provado por V. I. Oseledec em 1968, afirma que para uma classe importante de sistemas lineares não-autônomos da forma

$$\dot{x}_t = A(\tau^t \omega)x_t,$$

os expoentes de Lyapunov para tal sistema existem como limites quase sempre, onde para cada t , τ^t é uma transformação mensurável, em um espaço de probabilidade, que preserva medida. Este resultado marca o início da teoria moderna dos expoentes de Lyapunov.

Uma aplicação de significativa relevância do Teorema Ergódico Multiplicativo obtém-se quando dados uma variedade diferenciável compacta de dimensão d e φ_t , $t \in \mathbb{R}$, um fluxo em M , consideramos a seguinte aplicação natural no fibrado tangente

$$(x, v) \in TM \longmapsto d\varphi_t(x, v) = (\varphi_t(x), (d\varphi_t)_x v) \in TM.$$

A aplicação dada acima é um fluxo sobre o fibrado tangente. Dessa forma, é natural questionarmos de que forma se comporta a órbita de um ponto $(x, v) \in TM$ quando iterarmos $d\varphi_1$. Ou seja, basta analisarmos quando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(d\varphi_n)_x v\|$$

existe. Isto é solucionado pelo Teorema de Oseledec. Para a existência deste limite precisaremos garantir apenas que o fluxo na base do fibrado tangente preserve alguma medida.

Desde a demonstração dada por Oseledec houve várias tentativas para encontrar provas alternativas deste teorema. Nesta dissertação, veremos duas provas distintas do Teorema de Oseledec. A primeira será dada no Capítulo 3 e seguiremos a idéia da demonstração dada por Ruelle e Arnold em [18] e [1], respectivamente. Tal demonstração usa a decomposição polar de matrizes juntamente com o Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman. Já a segunda prova dada no Capítulo 4, na qual seguiremos o modelo dado por Walters em [20], estuda a ação do cociclo linear no espaço projetivo.

As provas do Teorema de Oseledec dadas nos Capítulos 3 e 4 são para sistemas em tempo discreto. No Capítulo 5, estenderemos o Teorema Ergódico Multiplicativo para sistemas em tempo contínuo.

No Capítulo 6, estudaremos fluxos em fibrados mais gerais do que fibrados vectoriais triviais e veremos, a partir de um exemplo, um caso particular do Teorema

de Oseledec para fibrados vetoriais não triviais, onde obteremos a decomposição de cada fibra do fibrado.

O Capítulo 1 terá como principal objetivo fornecer-nos as ferramentas básicas da Teoria Ergódica para o desenvolvimento desta dissertação. Particularmente, veremos neste capítulo o Teorema Ergódico de Birkhoff, que se reduz ao caso unidimensional do Teorema de Oseledec.

Capítulo 1

Teoria Ergódica

Sejam (M, Σ, μ) um espaço de medida e $\tau : M \longrightarrow M$ uma transformação mensurável. Temos que $\tau_*\mu$ é uma medida em Σ dada por $\tau_*\mu(E) = \mu(\tau^{-1}(E))$, $E \in \Sigma$. Dizemos que τ preserva medida se $\tau_*\mu = \mu$, isto é, $\mu(\tau^{-1}(E)) = \mu(E)$, para todo $E \in \Sigma$. A Teoria Ergódica trata principalmente da dinâmica das transformações que preservam medida. O objetivo deste capítulo é introduzir alguns objetos e resultados da citada teoria que serão de muita utilidade nesta dissertação.

1.1 Transformações que preservam medida

Definição 1.1.1 *Seja τ uma transformação mensurável que preserva medida. Dizemos que o subconjunto mensurável $E \subseteq M$ é invariante (ou τ -invariante) se $\tau^{-1}(E) = E$ qtp. Analogamente, dizemos que a função mensurável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é invariante (ou τ -invariante) se $f(\tau x) = f(x)$ para qtp $x \in M$.*

Lema 1.1.1 *Se $\mu(M) < \infty$ e $\tau(E) \subset E$, então $\tau^{-1}(E) = E$ qtp.*

Demonstração: De fato, observemos que $\mu(E \cup (\tau^{-1}(E) \setminus E)) = \mu(\tau^{-1}(E))$, pois $E \subset \tau^{-1}(\tau(E)) \subset \tau^{-1}(E)$. Então, $\mu(E) + \mu(\tau^{-1}(E) \setminus E) = \mu(\tau^{-1}(E))$. Assim, como $\mu(E) < \infty$, temos que $\mu(\tau^{-1}(E) \setminus E) = 0$. Portanto, $\tau^{-1}(E) = E$ qtp. $\square$

Notemos que para espaços com medida finita, a noção intuitiva que temos de invariância de um conjunto por uma transformação τ (isto é, $\tau(E) \subset E$) coincide com a definição dada. Já se $\mu(M) = \infty$ então $\tau(E) \subset E$ pode não significar invariância. De fato, seja $M = \mathbb{Z}$ com a medida de contagem, ou seja, a medida de um conjunto é igual à sua cardinalidade. Consideremos a transformação $\tau : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\tau x = x + 1$. Temos que $\tau(\mathbb{N}) = \{1, 2, \dots\} \subset \mathbb{N}$. Entretanto, $\mu(\mathbb{N} \setminus \tau(\mathbb{N})) = \mu(\{0\}) = 1$.

Definição 1.1.2 Dizemos que a transformação mensurável $\tau : M \rightarrow M$ que preserva medida é ergódica se os únicos conjuntos invariantes são os triviais, isto é, se $E \subset M$ mensurável é invariante então

$$\mu(E) = 0 \text{ ou } \mu(M \setminus E) = 0.$$

A proposição seguinte nos fornece uma importante caracterização para a ergodicidade de uma transformação definida em um espaço de probabilidade.

Proposição 1.1.1 Seja (M, Σ, μ) um espaço de probabilidade e $\tau : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva medida. Então τ é ergódica se, e somente se, toda função mensurável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, τ -invariante, é constante qtp.

Demonstração: Suponha que τ é ergódica e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável τ -invariante. Definamos

$$X(k, n) = \{x \in M : k/2^n \leq f(x) \leq (k+1)/2^n\},$$

$k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Haja vista que f é uma função mensurável τ -invariante, temos que $X(k, n)$ é um conjunto mensurável τ -invariante para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Pela ergodicidade de τ , $\mu(X(k, n)) = 0$ ou 1 . Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Notemos que $M = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X(k, n)$. Ainda convém observarmos que tal união é disjunta; logo, para cada n existe um único $k(n)$ de tal modo que $\mu(X(k(n), n)) = 1$. Consideremos $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X(k(n), n)$. Então, $\mu(X) = 1$ e f é constante em X .

Reciprocamente, seja $E \in \Sigma$, τ -invariante. Logo, a função característica χ_E é mensurável e τ -invariante. Logo, χ_E é constante qtp, ou seja, $\mu(E) = \int \chi_E d\mu = 0$ ou 1. $\square$

Podemos observar que, ainda nos casos de espaços com medida finita, a ergodicidade de τ é equivalente a dizermos que toda função τ -invariante em $L^p(M)$, $p \geq 1$, é constante em quase todo ponto.

1.1.1 Medidas Invariantes

Sejam M um conjunto e Σ uma σ -álgebra de subconjuntos de M . Considere $\mathcal{M}(M, \Sigma)$ o conjunto formado por todas as medidas com sinal definidas sobre Σ . Esse conjunto se torna um espaço vetorial quando provido das operações de soma e produto por números reais definidas de maneira natural.

Seja $\tau : M \longrightarrow M$ uma transformação mensurável. Definimos $\mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$ como sendo o conjunto das probabilidades τ -invariantes definidas sobre Σ . É fácil ver que $\mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{M}(M, \Sigma)$.

Definição 1.1.3 Dizemos que μ é uma medida τ -ergódica se $\mu \in \mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$ e τ é uma transformação ergódica de (M, Σ, μ) .

A proposição que veremos a seguir caracteriza as medidas ergódicas de τ como os pontos extremais do convexo $\mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$. Dizemos que os *pontos extremais* de um convexo C em um espaço vetorial E são os pontos $x \in C$ que não podem ser escritos como $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$, $y, z \in C$, $y \neq z$, $0 < \lambda < 1$.

Proposição 1.1.2 $\mu \in \mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$ é ergódica se, e somente se, μ é ponto extremal de $\mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$.

Demonstração: Suponhamos que $\mu \in \mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$ é ergódica e que

$$\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2,$$

com $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$ e $0 < \lambda < 1$. Observemos que $\mu_i \ll \mu$, $i = 1, 2$. Então $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2$. De fato, pelo Teorema de Radon-Nikodym (ver [17], Capítulo 11, Teorema 23, página 238), existe uma única função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $A \in \Sigma$

$$\mu(A) = \int_A f d\mu_i.$$

Notemos que f é uma função τ -invariante, pois

$$\int_A f d\mu_i = \mu(A) = \mu(\tau^{-1}(A)) = \int_{\tau^{-1}(A)} f d\mu_i = \int_A f \circ \tau d\mu_i,$$

e assim pela unicidade da f , temos que $f = f \circ \tau$ qtp. Daí, como τ é ergódica, f é constante qtp. Logo, $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2$. Portanto, μ é ponto extremal de $\mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$.

Seja $\mu \in \mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$ não-ergódica. Então, existe $A_0 \in \Sigma$ τ -invariante com $0 < \mu(A_0) < 1$. Definamos as seguintes medidas,

$$\begin{aligned} \mu_1 : \Sigma &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mu_1(A) = \frac{1}{\mu(A_0)} \mu(A \cap A_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu_2 : \Sigma &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mu_2(A) = \frac{1}{\mu(A_0^c)} \mu(A \cap A_0^c), \end{aligned}$$

onde $A_0^c = M \setminus A_0$. É fácil ver que $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$. Notemos que

$$\mu = \mu(A_0)\mu_1 + \mu(A_0^c)\mu_2.$$

Portanto, μ não é ponto extremal de $\mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$. □

Pela proposição anterior, dado $\mu \in \mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$, temos que μ é a combinação convexa de medidas ergódicas, visto que $\mathcal{M}_\tau(M, \Sigma)$ é um conjunto convexo. Dessa forma, obtemos a *decomposição ergódica de medidas invariantes*.

1.1.2 Recorrência

Considere a seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

definida em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $f \in \mathcal{C}^1$ e que todas as suas soluções estejam definidas em $\mathbb{R}$. Assim, temos um fluxo φ_t , $t \in \mathbb{R}$, associado à equação (1.1). Além disso, consideraremos f como um campo de divergência nulo, ou seja, $\nabla \cdot f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = 0$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, para todo x . Quando isto ocorre, temos que o fluxo φ_t , $t \in \mathbb{R}$, preserva a medida de Lebesgue (ver [14], Corolário, página 42).

Ainda vamos supor que tais equações possuem uma integral primeira, ou seja, uma função $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H \circ \varphi_t = H$ para todo t , o que equivale a dizermos que H é constante sobre as soluções da equação diferencial. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tais que $H^{-1}(a, b)$ é limitado. Nessas condições, Poincaré mostrou que quase toda solução de (1.1) é recorrente, ou seja, dado $\varepsilon > 0$ temos que para quase todo ponto $x \in H^{-1}(a, b)$ existe uma sequência (t_j) de números reais positivos com $t_j \rightarrow \infty$ e tais que, para todo j ,

$$\|\varphi_{t_j} - x\| \leq \varepsilon.$$

Este resultado decorre do Teorema de Recorrência de Poincaré, que demonstraremos a seguir, e foi o primeiro resultado da Teoria Ergódica. O principal interesse por este resultado surge do fato que sistemas satisfazendo tais hipóteses retornam infinitas vezes à configurações arbitrariamente próximas da inicial.

Teorema 1.1.1 *Sejam (M, Σ, μ) um espaço de medida com $\mu(M) < +\infty$ e $\tau : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva medida. Considere $A \in \Sigma$. Então, para quase todo ponto $x \in A$, temos que $\tau^n x \in A$ para infinitos $n \geq 1$.*

Demonstração: Seja $C = \{x \in A : \tau^n x \notin A, \forall n \geq 1\}$. Notemos que $C \in \Sigma$. De fato, como $A \in \Sigma$, segue que $\tau^{-n}(A)^c \in \Sigma$, para todo $n \geq 1$. Desse modo,

$$C = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(A)^c \right) \in \Sigma.$$

Além disso, temos que $C \cap \tau^{-n}(C) = \emptyset$, para todo $n \geq 1$. De fato, suponha que exista $n \geq 1$ tal que $x \in C \cap \tau^{-n}(C)$. Então, $\tau^n x \in C \subseteq A$, contradizendo o fato de que $x \in C$. Dessa forma, para todo $n, m \geq 1$, temos que $\tau^{-m}(C) \cap \tau^{-(m+n)}(C) = \emptyset$. Logo, $(\tau^{-n}(C))_{n \geq 1}$ é uma sequência disjunta de conjuntos mensuráveis de modo que $\mu(\tau^{-n}(C)) = \mu(C)$, para todo $n \geq 1$, visto que τ preserva medida. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tau^{-n}(C)) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau^{-n}(C)\right) \leq \mu(M) < +\infty,$$

implicando que $\mu(C) = 0$. Então, para todo $x \in A \setminus C$, temos que existe $n \geq 1$ tal que $\tau^n x \in A$. Afirmamos que $\tau^n x \in A$ para infinitos $n \geq 1$. De fato, como τ preserva medida, temos que τ^k preserva medida para todo $k \geq 1$. Daí, pelo que provamos anteriormente, temos que para cada k existe $C_k = \{x \in A : (\tau^k)^n x \notin A, \forall n \geq 1\} \in \Sigma$ com $\mu(C_k) = 0$ tal que para todo $x \in A \setminus C_k$, existe $n_k \geq 1$ tal que $(\tau^k)^{n_k} x \in A$. Considere $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. É claro que $N \in \Sigma$ e $\mu(N) = 0$. Assim, para todo $x \in A \setminus N$, temos que $x \in A \setminus C_k$ para todo k , isto é, existe n_k tal que $(\tau^k)^{n_k} x \in A$ para todo k . Portanto, para quase todo ponto $x \in A$, $\tau^n x \in A$ para infinitos $n \geq 1$. $\square$

Notemos que a situação apresentada no início desta Seção decorre do Teorema anterior aplicado ao espaço $H^{-1}(a, b)$ com medida de Lebesgue e à transformação φ_t , $t > 0$.

1.1.3 O Teorema de Birkhoff

No começo do século passado, surgiu um problema matemático em diversas áreas que podemos descrevê-lo da seguinte forma:

“Dadas uma transformação que preserva medida em um espaço (M, Σ, μ) e uma função integrável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sob quais condições o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\tau^j(x))$$

existe e é constante qtp?”

Em 1931, Birkhoff provou a existência deste limite qtp em espaços de medida finita, e mostrou ainda que a condição necessária e suficiente para que tal limite seja constante é que não exista nenhum conjunto $A \in \Sigma$, τ -invariante com $0 < \mu(A) < 1$, ou seja, a transformação τ é ergódica.

A seguir segue o enunciado do *Teorema Ergódico de Birkhoff*.

Teorema 1.1.2 *Sejam (M, Σ, μ) um espaço de medida com $\mu(M) < +\infty$ e $\tau : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva medida. Se $f \in L^1(M)$, então o limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\tau^j(x))$$

existe para qtp $x \in M$. Além disso, a função $\tilde{f}$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\tau^j x)$$

é integrável, τ -invariante e é tal que

$$\int_A \tilde{f} d\mu = \int_A f d\mu,$$

para todo $A \in \Sigma$ τ -invariante.

Para demonstrarmos esse teorema precisaremos do lema abaixo, conhecido como *Teorema Ergódico Maximal*.

Lema 1.1.2 *Seja $f \in L^1(M)$ e definamos*

$$E(f) = \left\{ x : \sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)) > 0 \right\}.$$

Então

$$\int_{E(f)} f d\mu \geq 0.$$

Demonstração: Seja

$$f_n(x) = \max \left\{ f(x), f(x) + f(\tau(x)), \dots, \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)) \right\}.$$

Observemos que $E(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x : f_n(x) > 0\}$. Logo, é suficiente provar que para todo $n \geq 0$

$$\int_{\{x: f_n(x) > 0\}} f d\mu \geq 0.$$

Observemos que para todo $0 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} f_n(x) &\geq \sum_{j=0}^m f(\tau^j x) \\ f_n(\tau x) + f(x) &\geq \sum_{j=0}^{m+1} f(\tau^j x) \\ f_n(\tau x) + f(x) &\geq \max_{0 \leq m \leq n} \sum_{j=0}^{m+1} f(\tau^j x) \\ f_n(\tau x) + f(x) &\geq f_n(x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Como $f_n(x) \geq f(x)$, segue da última desigualdade que $f_n(\tau x) \geq 0$. Definamos

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in M : f_n(x) > 0\} \cap \{x \in M : f_n(\tau x) > 0\}, \\ B &:= \{x \in M : f_n(x) > 0\} \cap \{x \in M : f_n(\tau x) = 0\}. \end{aligned}$$

É claro que $\{x \in M : f_n(x) > 0\} = A \cup B$. Assim,

$$\int_{\{x: f_n(x) > 0\}} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu. \tag{1.3}$$

Mas, por (1.2), temos que

$$\int_A f d\mu \geq \int_A f_n d\mu - \int_A f_n \circ \tau d\mu. \tag{1.4}$$

Logo, de (1.3) e (1.4),

$$\int_{\{x: f_n(x) > 0\}} f d\mu \geq \int_B f d\mu + \int_A f_n d\mu - \int_A f_n \circ \tau d\mu.$$

Afirmamos que se $f_n(x) > 0$ e $f_n(\tau x) = 0$, então $f_n(x) = f(x) > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq m \leq n} \sum_{j=0}^m f(\tau^{j+1}x) &= f_n(\tau x) = 0 \\ \sum_{j=0}^m f(\tau^{j+1}x) &= 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

para todo $0 \leq m \leq n$. Além disso, como $f_n(x) > 0$, segue que existe $0 \leq m \leq n$ tal que $\sum_{j=0}^m f(\tau^j x) > 0$. Dessa forma, por (1.5), $f_n(x) = f(x) > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\{x: f_n(x) > 0\}} f d\mu &\geq \int_{\{x: f_n(x) > 0\}} f_n d\mu - \int_A f_n \circ \tau d\mu \\ &= \int_{\tau^{-1}\{x: f_n(x) > 0\}} f_n \circ \tau d\mu - \int_A f_n \circ \tau d\mu. \end{aligned}$$

Entretanto, $\tau^{-1}\{x: f_n(x) > 0\} = \{x: f_n \circ \tau(x) > 0\} \supseteq A$; logo,

$$\int_{\tau^{-1}\{x: f_n(x) > 0\}} f_n \circ \tau d\mu \geq \int_A f_n \circ \tau d\mu.$$

Dessa forma,

$$\int_{\{x: f_n(x) > 0\}} f d\mu \geq 0,$$

como queríamos demonstrar. □

Corolário 1.1.1 *Se $A \subset E(f)$ é tal que $A \in \Sigma$ e $\tau^{-1}(A) = A$, então*

$$\int_A f d\mu \geq 0.$$

Demonstração: Como $\tau^{-1}(A) = A$, temos que $E(f\chi_A) = A$. Assim, pelo Lema 1.1.2,

$$0 \leq \int_{E(f\chi_A)} f\chi_A d\mu = \int_A f\chi_A d\mu = \int_A f d\mu.$$

□

Agora estamos aptos para demonstrar o Teorema de Birkhoff.

Demonstração: Se $f \in L^1(M)$, definimos $E_\alpha^+(f)$ como sendo o conjunto dos $x \in M$ tais que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)) > \alpha.$$

Analogamente, definimos $E_\alpha^-(f)$ como o conjunto dos $x \in M$ tais que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)) < \alpha.$$

Observemos que

$$E_\alpha^+(f) = E_0^+(f - \alpha), \quad (1.6)$$

$$E_\alpha^-(f) = E_{-\alpha}^+(-f). \quad (1.7)$$

Afirmamos que para $f \in L^1(M)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\int_{E_\alpha^+(f)} f d\mu \geq \alpha \mu(E_\alpha^+(f)). \quad (1.8)$$

De fato, notemos que

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha^+(f)} f d\mu &= \int_{E_\alpha^+(f)} (f - \alpha) d\mu + \int_{E_\alpha^+(f)} \alpha d\mu \\ &= \int_{E_0^+(f - \alpha)} (f - \alpha) d\mu + \alpha \mu(E_\alpha^+(f)). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Assim, como $\tau^{-1}(E_0^+(f - \alpha)) \subset E(f - \alpha)$ é tal que $\tau^{-1}(E_0^+(f - \alpha)) \in \Sigma$ e $\tau^{-1}(E_0^+(f - \alpha)) = E_0^+(f - \alpha)$, temos pelo Corolário 1.1.1 que

$$\int_{E_0^+(f - \alpha)} (f - \alpha) d\mu \geq 0.$$

Daí, tiramos da equação (1.9),

$$\int_{E_\alpha^+(f)} f d\mu \geq \alpha \mu(E_\alpha^+(f)).$$

Além disso, se $A \in \Sigma$ é tal que $A \subset E_\alpha^+(f)$ e $\tau^{-1}(A) = A$, temos que

$$\int_A f d\mu \geq \alpha \mu(A). \quad (1.10)$$

De fato, pela desigualdade (1.8),

$$\int_A f d\mu = \int_A f \chi_A d\mu = \int_{E_\alpha^+(f\chi_A)} f \chi_A d\mu \geq \alpha \mu(E_\alpha^+(f\chi_A)) = \alpha \mu(A),$$

visto que $A = E_\alpha^+(f\chi_A)$. Afirmamos ainda que se $f \in L^1(M)$, $A \in \Sigma$, é tal que $A \subset E_\beta^-(f)$ e satisfaz $\tau^{-1}(A) = A$, temos que

$$\int_A f d\mu \leq \beta \mu(A). \quad (1.11)$$

De fato, da igualdade (1.7), tiramos que $A \subset E_{-\beta}^+(-f)$. Dessa forma, pela desigualdade (1.10),

$$\int_A (-f) d\mu \geq (-\beta) \mu(A),$$

isto é, $\int_A f d\mu \leq \beta \mu(A)$. Notemos que, para $\alpha > \beta$, $\mu(E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f)) = 0$. De fato, tomando $A = E_\alpha^+(f) \cap E_\beta^-(f)$ nas desigualdades (1.10) e (1.11) temos que

$$\alpha \mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq \beta \mu(A).$$

Logo, se $\mu(A) \neq 0$ temos que $\alpha \leq \beta$. Portanto, $\mu(A) = 0$.

Finalmente, tomemos (α_n) uma sequência densa em $\mathbb{R}$. Notemos que

$$\begin{aligned} & \left\{ x : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)) > \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)) \right\} \\ &= \bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} E_{\alpha_n}^+(f) \cap E_{\alpha_m}^-(f). \end{aligned}$$

Como $\mu(E_{\alpha_n}^+(f) \cap E_{\alpha_m}^-(f)) = 0$, temos que $\mu \left(\bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} E_{\alpha_n}^+(f) \cap E_{\alpha_m}^-(f) \right) = 0$. Daí,

para todo $x \notin \left(\bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} E_{\alpha_n}^+(f) \cap E_{\alpha_m}^-(f) \right)$, temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)).$$

Logo, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(\tau^j(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(\tau^j(x))$$

para qtp $x \in M$.

Provaremos agora a segunda parte do Teorema. Para mostrarmos que $\tilde{f}$ é integrável, notemos que

$$|\tilde{f}(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f(\tau^j x)|,$$

onde garantimos a existência qtp do limite acima na primeira parte do Teorema. Assim, pelo Lema de Fatou (ver [17], Teorema 8, página 83),

$$\int_M |\tilde{f}| d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_M |f \circ \tau^j| d\mu = \int_M |f| d\mu,$$

onde usamos na última igualdade o fato de que $\int_M |f \circ \tau^j| d\mu = \int_M |f| d\mu$, $j \geq 1$, visto que τ preserva medida. Desse modo, $\tilde{f}$ é integrável. Além disso, é claro que $\tilde{f}$ é τ -invariante. Resta mostrarmos que $\int_A f d\mu = \int_A \tilde{f} d\mu$, para $A \in \Sigma$ τ -invariante. Seja, para cada $n \geq 1$ e $k \in \mathbb{Z}$,

$$D_{n,k} = \left\{ x \in A : \frac{k}{n} \leq \tilde{f}(x) < \frac{k+1}{n} \right\}.$$

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{D_{n,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forma uma partição de A . Ainda temos que $D_{n,k} = E_{k/n}^+(f) \cap E_{(k+1)/n}^-(f)$. Assim, segue da desigualdade (1.10),

$$\int_{D_{n,k}} f d\mu \geq \frac{k}{n} \mu(D_{n,k}).$$

Logo, pela definição de $D_{n,k}$,

$$\int_{D_{n,k}} \tilde{f} d\mu \leq \frac{k+1}{n} \mu(D_{n,k}) \leq \frac{1}{n} \mu(D_{n,k}) + \int_{D_{n,k}} f d\mu.$$

Somando sobre k , tem-se que, para todo n ,

$$\int_A \tilde{f} d\mu \leq \frac{\mu(A)}{n} + \int_A f d\mu.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, $\int_A \tilde{f} d\mu \leq \int_A f d\mu$. Procedendo analogamente para $-f$, obtemos

$$\int_A \widetilde{(-f)} d\mu \leq \int_A (-f) d\mu;$$

como $\widetilde{(-f)} = -\tilde{f}$, segue que $\int_A \tilde{f} d\mu \geq \int_A f d\mu$. Isso conclui a demonstração. $\square$

Seja χ_A a função característica de um subconjunto mensurável $A \subset M$. Definamos

$$\tilde{f}_A(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{0 \leq j \leq n-1 : \tau^j x \in A\}.$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, $\tilde{f}_A$ está bem definida. Notemos que $\tilde{f}_A(x)$ representa a média do número de vezes em que a órbita de x por τ volta ao conjunto A . Por esse motivo, é natural dizermos que a função $\tilde{f}$ associada a $f \in L^1$ é chamada de *média orbital* de f .

Com o Teorema Ergódico de Birkhoff, garantimos a existência do limite dado no início desta seção, entretanto, para assegurarmos que tal limite é constante precisaremos da ergodicidade da transformação τ . Esse resultado segue facilmente da segunda parte do Teorema de Birkhoff, como veremos a seguir.

Proposição 1.1.3 *Sejam (M, Σ, μ) um espaço de probabilidade e $\tau : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva medida. As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) τ é ergódica;
- (ii) Se $f \in L^1(M)$ é τ -invariante, então $f = c$ qtp, onde c é uma constante;
- (iii) Se $f \in L^p(M)$ é τ -invariante, então $f = c$ qtp, onde c é uma constante;
- (iv) Para todo $A, B \in \Sigma$ vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(\tau^{(-i)}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)$;
- (v) Para toda função $f \in L^1(M)$, $\tilde{f} = \int_M f d\mu$ qtp, onde $\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau^i(x))$.

Demonstração: Por uma observação feita logo após a Proposição 1.1.1 vimos que $(i) \Leftrightarrow (ii)$ e $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

$(ii) \Rightarrow (v)$: Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, temos que $\tilde{f} \in L^1$ e é τ -invariante.

Assim, $\tilde{f}$ é constante. Portanto, $\tilde{f} = \int_M f d\mu$.

$(v) \Rightarrow (iv)$: Para todo $A \in \Sigma$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(\tau^j x) = \tilde{f}_A(x) = \int_M \chi_A d\mu = \mu(A) \text{ qtp.}$$

Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada, temos que para todo $A, B \in \Sigma$,

$$\begin{aligned} \mu(A)\mu(B) &= \int_M \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(\tau^j x) \right) \chi_B d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_M \chi_A(\tau^j x) \chi_B d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(\tau^{-j}(A) \cap B). \end{aligned}$$

$(iv) \Rightarrow (i)$: Seja $A \in \Sigma$ conjunto τ -invariante. Então, por (iv) ,

$$\mu(A)\mu(M \setminus A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(\tau^{-j}(A) \cap (M \setminus A)) = 0,$$

visto que τ preserva medida. Logo, $\mu(A) = 0$ ou 1 . □

Assim, podemos concluir que a média de uma função ao longo de uma transformação ergódica é a integral da função dada. Voltando ao caso em que $f = \chi_A$, $A \in \Sigma$, temos que se a transformação τ é ergódica

$$\tilde{f}_A(x) = \int_M \chi_A d\mu = \mu(A),$$

para qtp $x \in M$. Ou seja, se τ é ergódica então a média do número de vezes que $\tau^k(x)$ voltam a A é igual ao “tamanho” de A .

O corolário seguinte será de muita utilidade na demonstração do Teorema Ergódico Multiplicativo (Teorema 3.2.2).

Corolário 1.1.2 *Sob as mesmas condições do Teorema Ergódico de Birkhoff, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(\tau^{n-1}x) = 0$$

para qtp $x \in M$.

Demonstração: Observemos que

$$f \circ \tau^n = f + \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ \tau - f) \circ \tau^i.$$

Como $f \in L^1$, é claro que $f \circ \tau - f \in L^1$. Então, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff, o limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ \tau - f)(\tau^i x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(\tau^n x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(\tau^{n-1} x) \end{aligned} \quad (1.12)$$

existe para qtp $x \in M$. Resta mostrarmos que o limite (1.12) é zero para qtp $x \in M$. Seja

$$\Omega = \left\{ x \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(\tau^{n-1}x) \neq 0 \right\}.$$

É claro que $\Omega \in \Sigma$. Além disso, Ω é τ -invariante. Notemos que $x \in \Omega$ se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $n \geq 0$, $|f(\tau^{n-1}x)| \geq \varepsilon n$. Como Ω é τ -invariante, temos que essa afirmação é equivalente a dizermos que $|f(x)| \geq \varepsilon n$ para todo $n \geq 0$. Assim, podemos escrever

$$\Omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n,$$

onde

$$\Omega_n := \{x \in M : |f(x)| \geq \varepsilon n\}.$$

Assim, como $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n$ para todo n , e $\mu(M) < \infty$, temos que

$$\mu(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) = 0,$$

visto que $f \in L^1$.

□

Capítulo 2

Expoentes de Lyapunov

Seja

$$\dot{x}_t = f(x_t) \tag{2.1}$$

um sistema não-linear autônomo, onde $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ aberto, e possui uma singularidade em $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $f(x_0) = 0$.

O sistema (2.1) pode ser escrito como um sistema quase-linear da forma

$$\dot{x}_t = Ax_t + g(x_t),$$

onde $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$. A dinâmica de tal sistema em uma vizinhança de x_0 é completamente determinada pela dinâmica do sistema linear autônomo $\dot{x}_t = Ax_t$, estabelecida pelos autovalores de A . Já no caso de sistemas lineares não-autônomos

$$\dot{x}_t = A(t)x_t,$$

estudar os autovalores de $A(t)$ não nos fornecerá informações acerca das propriedades assintóticas das soluções. Precisaremos, então, encontrar uma formulação dinâmica da teoria espectral de $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$, isto é, uma formulação que descreva os objetos espectrais em termos do comportamento assintótico das soluções. Para isso, definiremos na próxima seção os *expoentes de Lyapunov*.

2.1 Definição e Propriedades

Antes de definirmos o objeto principal desta seção, provaremos um resultado que será muito útil ao longo deste capítulo.

Lema 2.1.1 *Sejam $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{N}$, $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, e definamos*

$$\lambda(f) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|f(t)\| \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

o índice de Lyapunov de f , onde $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^d$. Então:

- (i) *Se f é uma função constante não-nula, então $\lambda(f) = 0$ (definamos $\lambda(0) = -\infty$);*
- (ii) *$\lambda(\alpha f) = \lambda(f)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;*
- (iii) *$\lambda(f + g) \leq \max\{\lambda(f), \lambda(g)\}$ com igualdade se $\lambda(f) \neq \lambda(g)$;*
- (iv) *Se $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, então*

$$\lambda\left(\sum_{k=0}^n f(k)\right) \leq \lambda(f) \quad \text{se } \lambda(f) \geq 0,$$

$$\lambda\left(\sum_{k=n}^{\infty} f(k)\right) \leq \lambda(f) \quad \text{se } \lambda(f) < 0.$$

Demonstração: As afirmações (i) e (ii) seguem diretamente da definição de $\lambda(f)$. Para mostrarmos o item (iii), observemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \log \|(f + g)(t)\| &\leq \frac{1}{t} \log(\|f(t)\| + \|g(t)\|) \\ &\leq \frac{1}{t} \log 2 \max\{\|f(t)\|, \|g(t)\|\} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max\left\{\frac{1}{t} \log \|f(t)\|, \frac{1}{t} \log \|g(t)\|\right\} = \max\{\lambda(f), \lambda(g)\}; \end{aligned}$$

logo, $\lambda(f + g) \leq \max\{\lambda(f), \lambda(g)\}$. Agora, suponhamos, sem perda de generalidade, que $\lambda(f) > \lambda(g)$. Então,

$$\lambda(f + g) \leq \max\{\lambda(f), \lambda(g)\} = \lambda(f) = \lambda(f - g + g) \leq \max\{\lambda(f + g), \lambda(g)\}.$$

Caso $\max\{\lambda(f+g), \lambda(g)\} = \lambda(g)$, obteríamos $\lambda(f) \leq \lambda(g)$ na desigualdade anterior, contradizendo que $\lambda(f) > \lambda(g)$. Dessa forma, $\max\{\lambda(f+g), \lambda(g)\} = \lambda(f+g)$, e assim, $\lambda(f+g) = \lambda(f)$.

No item (iv), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \left\| \sum_{k=0}^n f(k) \right\| &\leq \frac{1}{n} \log \sum_{k=0}^n \|f(k)\| \\ &\leq \frac{1}{n} \log (n \cdot \max \{ \|f(0)\|, \dots, \|f(n)\| \}) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max \{ \|f(0)\|, \dots, \|f(n)\| \}. \end{aligned}$$

Como $\lambda(f) \geq 0$, temos que para n suficientemente grande

$$\max \{ \|f(0)\|, \dots, \|f(n)\| \} = \|f(n)\|.$$

$$\text{Então, } \lambda \left(\sum_{k=0}^n f(k) \right) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|f(n)\| = \lambda(f).$$

Entretanto, se $\lambda(f) < 0$ então

$$\lambda \left(\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \right\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{k=n}^{\infty} \|f(k)\|.$$

Visto que $\lambda(f) < 0$, podemos ver a expressão $\sum_{k=n}^{\infty} \|f(k)\|$ como uma progressão geométrica de razão $e^{\lambda(f)}$, ou seja,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \|f(k)\| = K(n) \cdot \frac{\|f(n)\|}{1 - e^{\lambda(f)}},$$

onde $K(n)$ é uma função polinomial, indicando o erro obtido nessa aproximação.

Assim, como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{K(n)}{1 - e^{\lambda(f)}} = 0,$$

obtemos o resultado desejado. □

É interessante observar que o índice de Lyapunov não depende da norma tomada em $\mathbb{R}^d$. De fato, sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ normas em $\mathbb{R}^d$. Como todas as normas em $\mathbb{R}^d$ são equivalentes, temos que existem $a, b \in \mathbb{R}$ positivos tais que

$$a\|f(t)\|_2 \leq \|f(t)\|_1 \leq b\|f(t)\|_2.$$

Desse modo, concluímos que $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|f(t)\|_1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|f(t)\|_2$.

Definição 2.1.1 *O expoente de Lyapunov (em tempo positivo) de uma solução $\Phi(t)x$ de um sistema linear não-autônomo*

$$\begin{cases} \dot{x}_t = A(t)x_t \\ x_0 = x \end{cases}$$

é definido como sendo o índice de Lyapunov de $\Phi(t)x$, ou seja,

$$\lambda^+(x) = \lambda(x) := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\|.$$

Para $t \leq 0$, definimos o expoente de Lyapunov (em tempo negativo) de $\Phi(t)x$ como sendo o índice de Lyapunov de $\Phi(-t)x$,

$$\lambda^-(x) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(-t)x\| = \limsup_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{|t|} \log \|\Phi(t)x\|.$$

Suponha que $A(t)$ é limitada. Então, pelo Lema 2.1.1, $\lambda(\cdot)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\lambda(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, e $\lambda(0) = -\infty$;
- (ii) $\lambda(\alpha x) = \lambda(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (iii) $\lambda(x + y) \leq \max\{\lambda(x), \lambda(y)\}$ com igualdade se $\lambda(x) \neq \lambda(y)$.

Obviamente, $\lambda^-(\cdot)$ também satisfaz tais propriedades.

Dizemos que uma aplicação $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ satisfazendo as propriedades acima é chamada de *expoente característico*.

O lema a seguir fornece-nos uma importante informação acerca das propriedades da função λ .

Lema 2.1.2 *Sejam $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tais que $\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)$ são distintos. Então, os vetores $x_1, \dots, x_m$ são linearmente independentes.*

Demonstração: Suponha que os vetores $x_1, \dots, x_m$ sejam linearmente dependentes, ou seja, existem constantes reais $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, não todas nulas, tais que

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0.$$

Assim, pelo Lema 2.1.1,

$$-\infty = \lambda(0) = \lambda(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m) = \max\{\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)\} \neq -\infty,$$

visto que $\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)$ são todos distintos. Portanto, os vetores $x_1, \dots, x_m$ são linearmente independentes. $\square$

Assim, λ pode assumir no máximo d valores para $x \neq 0$. Seja $s \leq d$ o número de valores que a função λ assume. Sejam

$$-\infty \leq \lambda_s < \lambda_{s-1} < \dots < \lambda_1 < \infty$$

os diferentes valores de λ . Tais números são chamados de *expoentes de Lyapunov* do sistema.

Para cada $1 \leq i \leq s$, defina $V_i := \{x \in \mathbb{R}^d : \lambda(x) \leq \lambda_i\}$. Tais conjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^d$. De fato, sejam $x, y \in V_i$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então pelas propriedades (ii) e (iii) acima

$$\begin{aligned} \lambda(x + y) &\leq \max\{\lambda(x), \lambda(y)\} \leq \lambda_i, \\ \lambda(\alpha x) &= \lambda(x) \leq \lambda_i; \end{aligned}$$

isto é, $x + y, \alpha x \in V_i$. Além disso, tais conjuntos formam uma *filtração* (*flag* de subespaços) em $\mathbb{R}^d$, isto é,

$$\{0\} =: V_{s+1} \subsetneq V_s \subsetneq \dots \subsetneq V_i \subsetneq \dots \subsetneq V_1 = \mathbb{R}^d,$$

e, $\lambda(x) = \lambda_i$ se, e somente se, $x \in V_i \setminus V_{i+1}$, $i = 1, \dots, s$.

Seja $d_i := \dim V_i - \dim V_{i+1}$. Dizemos que d_i é a *multiplicidade de* λ_i . O conjunto $\{(\lambda_i, d_i) : i = 1, \dots, s\}$ é chamado de *espectro (positivo) de Lyapunov*.

Dizemos que o sistema $\dot{x}_t = A(t)x_t$ é *regular positivo* se

$$\sum_{i=1}^s d_i \lambda_i = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)|. \quad (2.2)$$

Para um sistema regular positivo os limites superiores são substituídos por limites.

Proposição 2.1.1 *Se o sistema $\dot{x}_t = A(t)x_t$ é regular positivo, então os expoentes de Lyapunov (em tempo positivo) existem como limites, ou seja,*

$$\lambda(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\|.$$

Demonstração: Primeiramente, temos pelo Lema de Hadamard (ver [15], página 201), que

$$|\det \Phi(t)| \leq \prod_{j=1}^d \|\Phi(t)e_j\|,$$

onde $\{e_1, \dots, e_d\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^d$. Assim,

$$\frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)| \leq \sum_{j=1}^d \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)e_j\| \leq \sum_{i=1}^s d_i \lambda_i;$$

implicando, pela regularidade do sistema, que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)| \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)|.$$

Ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)| = \sum_{i=1}^s d_i \lambda_i. \quad (2.3)$$

Consideremos, para cada t , a decomposição polar de $\Phi(t)$, ou seja,

$$\Phi(t) = V(t)D(t)O(t),$$

onde $V(t)$ e $O(t)$ são matrizes ortogonais, e $D(t)$ é uma matriz diagonal com entradas estritamente positivas (ver [13], Seção 17.E, página 220). Denotaremos por $\delta_i(\Phi(t))$ o i -ésimo elemento da diagonal de $D(t)$. Seja $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ de tal modo que $x = O(t)^{-1}y$, para algum $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Assim,

$$\|\Phi(t)x\| = \|D(t)y\| = \left(\delta_1(\Phi(t))^2 y_1^2 + \cdots + \delta_d(\Phi(t))^2 y_d^2 \right)^{1/2},$$

onde $y = (y_1, \dots, y_d)$. Pela igualdade acima, podemos observar que para mostrarmos esta proposição, basta mostrarmos que os limites, dados por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta_i(\Phi(t)),$$

existem para todo $i = 1, \dots, d$. De fato, como o limite (2.3) existe e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(t)| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \prod_{i=1}^d \delta_i(\Phi(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta_1(\Phi(t)) + \cdots + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta_d(\Phi(t)), \end{aligned}$$

temos que usando indução sobre i os limites $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta_i(\Phi(t))$ existem, para todo $i = 1, \dots, d$. $\square$

Para $t \leq 0$, podemos definir analogamente o que fizemos acima para $\lambda^-(\cdot)$. Sejam s^- o número de diferentes valores que $\lambda^-(\cdot)$ assume. Consideremos

$$-\infty \leq \lambda_{s^-}^- < \cdots < \lambda_1^- < \infty$$

tais valores com suas respectivas multiplicidades d_i^- . A filtração correspondente é dada por

$$\{0\} =: V_{s^-+1}^- \subset \cdots \subset V_1^- = \mathbb{R}^d,$$

e $\lambda^-(x) = \lambda_i^-$ se, e somente se, $x \in V_i^- \setminus V_{i+1}^-$. Dizemos ainda que o sistema $\dot{x}_t = A(t)x_t$ é *regular negativo* se

$$\sum_{i=1}^s d_i^- \lambda_i^- = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\det \Phi(-t)|.$$

Definição 2.1.2 Dizemos que o sistema $\dot{x}_t = A(t)x_t$, $t \in \mathbb{R}$, é regular se

- (i) $\dot{x}_t = A(t)x_t$ é regular positivo e negativo;
- (ii) $s = s^-$, $d_i = d_{s+1-i}^-$, $\lambda_i = -\lambda_{s+1-i}^-$, $i = 1, \dots, s$;
- (iii) $V_{i+1} \cap V_{s+1-i}^- = \{0\}$, $i = 1, \dots, s-1$.

Observemos que de (ii) e (iii), $V_{i+1} \oplus V_{s+1-i}^- = \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, s-1$. Definamos

$$W_i := V_i \cap V_{s+1-i}^-, \quad i = 1, \dots, s.$$

É claro que $\dim W_i = d_i$. Além disso, tais conjuntos formam uma decomposição de $\mathbb{R}^d$, isto é,

$$\mathbb{R}^d = W_1 \oplus \dots \oplus W_s.$$

Além disso, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\| = \lambda_i$ se, e só se, $x \in W_i \setminus \{0\}$. De fato, como $\lambda_i = -\lambda_{s+1-i}^-$, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\| = \lambda_i &\iff x \in V_i \setminus V_{i+1}, \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{|t|} \log \|\Phi(t)x\| = \lambda_{s+1-i}^- &\iff x \in V_{s+1-i}^- \setminus V_{s+2-i}^-. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\| = \lambda_i$ se, e somente se, $x \in M_i := (V_i \setminus V_{i+1}) \cap (V_{s+1-i}^- \setminus V_{s+2-i}^-)$. Então, $M_i = V_i \cap (\mathbb{R}^d \setminus V_{i+1}) \cap V_{s+1-i}^- \cap (\mathbb{R}^d \setminus V_{s+2-i}^-)$. Como $V_{i+1} \cap V_{s+1-i}^- = \{0\}$, para todo $i = 1, \dots, s-1$, temos que

$$\begin{aligned} V_{s+1-i}^- \cap (\mathbb{R}^d \setminus V_{i+1}) &= V_{s+1-i}^- \setminus \{0\}, \\ V_i \cap (\mathbb{R}^d \setminus V_{s+2-i}^-) &= V_i \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Ou seja, $M_i = W_i \setminus \{0\}$.

2.2 Decomposição Primária

Nesta seção, obteremos uma decomposição do espaço euclidiano, chamada de *decomposição primária*, de tal forma que os expoentes de Lyapunov terão um comportamento semelhante àqueles relacionados a um sistema regular. Os resultados

obtidos aqui serão muito úteis em alguns exemplos que aparecerão ao longo desta dissertação.

Seja $L : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ um isomorfismo linear. Considere $L_{\mathbb{C}}$ a complexificação de L , ou seja,

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{C}^d \\ u + iv &\longmapsto L_{\mathbb{C}} := L(u) + iL(v). \end{aligned}$$

Para cada autovalor λ de $L_{\mathbb{C}}$, seja $V_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ o autoespaço generalizado associado a λ , ou seja,

$$V_{\lambda}^{\mathbb{C}} := \{v \in \mathbb{C}^d : (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^k v = 0\},$$

onde k é a multiplicidade algébrica de λ .

Lema 2.2.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 + n + \cdots + n^k) = 0$, para alguma $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Demonstração: Basta aplicarmos a regra de L'Hôpital. □

Lema 2.2.2 Se $v \in V_{\lambda}^{\mathbb{C}}$, então $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{\mathbb{C}}^n v\| = \log |\lambda|$.

Demonstração: Note que

$$L_{\mathbb{C}}^n = ((L_{\mathbb{C}} - \lambda I) + \lambda I)^n = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} C_i^n (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^i,$$

onde $C_i^n := \frac{n!}{(n-i)!i!}$. Para $v \in V_{\lambda}^{\mathbb{C}}$, temos que $(L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^k v = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Desse modo, $L_{\mathbb{C}}^n v = 0$, para todo $n \geq k$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{\mathbb{C}}^n v\| &= \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{n-i} C_i^n (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^i v \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log |\lambda|^n \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-i} C_i^n (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^i v \right\| \\ &= \log |\lambda| + \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-i} C_i^n (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^i v \right\|. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-i} C_i^n (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^i v \right\| = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-i} C_i^n (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^i v \right\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \lambda^{-i} C_i^n (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^i v \right\| \\ &= a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k, \end{aligned}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $a_k > 0$. Pelo Lema 2.2.1, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k) = 0$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \left\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{-i} C_i^n (L_{\mathbb{C}} - \lambda I)^i v \right\| = 0.$$

E assim, tem-se o resultado desejado. $\square$

Para λ autovalor de $L_{\mathbb{C}}$, definamos

$$\begin{aligned} V_{\lambda} &:= V_{\lambda}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^d \quad \text{se } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e} \\ V_{\lambda, \bar{\lambda}} &:= (V_{\lambda}^{\mathbb{C}} \oplus V_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}) \cap \mathbb{R}^d \quad \text{se } \lambda \notin \mathbb{R}, \end{aligned}$$

onde $\bar{\lambda}$ denota o complexo conjugado para $\lambda \in \mathbb{C}$. Tais conjuntos são ditos *autoespaços generalizados reais associados ao autovalor λ* . Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os autovalores distintos de $L_{\mathbb{C}}$. Então,

$$\mathbb{R}^d = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k} \oplus V_{\lambda_{k+1}, \bar{\lambda}_{k+1}} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r, \bar{\lambda}_r} \quad (2.4)$$

(veja [16], Apêndice A, Subseção A.4.1, página 434-435).

Proposição 2.2.1 *Usando a notação dada anteriormente, sejam $\chi_1 < \cdots < \chi_m$ os valores distintos de $\log |\lambda_i|$, $i = 1, \dots, r$. Sejam*

$$E_{\chi_l} := \sum_{i, j \in \Sigma_l} V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_j, \bar{\lambda}_j},$$

onde $\Sigma_l := \{i : \log |\lambda_i| = \chi_l\}$, $1 \leq l \leq m$. Então, os subespaços E_{χ_l} , $1 \leq l \leq m$, são L -invariantes e

$$\mathbb{R}^d = E_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus E_{\chi_m},$$

de tal modo que para $v \in E_{\chi_l} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L^n v\| = \chi_l,$$

onde $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer em $\mathbb{R}^d$.

Demonstração: A demonstração segue do Lema 2.2.2. □

2.3 Expoentes de Lyapunov para Sistemas Periódicos

Nesta seção, ilustraremos um sistema linear periódico não-autônomo, no qual é possível calcularmos explicitamente os expoentes de Lyapunov.

Seja o seguinte sistema

$$\dot{x}_t = A(t)x_t, \tag{2.5}$$

onde $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ é uma função contínua e periódica de período $\omega > 0$, isto é, $A(t + \omega) = A(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nesse caso, dizemos que o sistema (2.5) é um *sistema periódico*. Para sistemas desse tipo o Teorema de Floquet diz-nos que a sua matriz fundamental é escrita como o produto de uma matriz periódica com período 2ω e uma solução matricial de um sistema com coeficientes constantes. O lema seguinte é fundamental para a demonstração deste teorema e pode ser encontrado em [6].

Lema 2.3.1 *Seja B uma matriz real não-singular. Então, existe uma matriz A tal que $e^A = B^2$.*

Teorema 2.3.1 *Seja Φ uma matriz fundamental para o sistema (2.5), então*

$$\Psi(t) = \Phi(t + \omega), \quad t \in \mathbb{R},$$

é uma solução de (2.5). Ainda temos que existe uma matriz periódica não-singular P , com período 2ω , e uma matriz constante R tal que

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR}. \quad (2.6)$$

Demonstração: Visto que Φ é uma matriz fundamental para (2.5) e A é uma matriz periódica, temos que

$$\Psi'(t) = \Phi'(t + \omega) = A(t + \omega)\Phi(t + \omega) = A(t)\Psi(t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Além disso, como $\det \Psi(t) = \det \Phi(t + \omega) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, concluimos que Ψ é uma solução para (2.5). Dessa forma, existe uma matriz constante não-singular C tal que

$$\Phi(t + \omega) = \Phi(t)C. \quad (2.7)$$

Sabemos também pelo Lema 2.3.1 que existe uma matriz constante R tal que

$$C^2 = e^{2\omega R}. \quad (2.8)$$

Por (2.7), $\Phi(t + 2\omega) = \Phi(t + \omega)C = \Phi(t)C^2$ e pela equação (2.8), segue que

$$\Phi(t + 2\omega) = \Phi(t)e^{2\omega R}. \quad (2.9)$$

Definimos para $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = \Phi(t)e^{-tR}.$$

Assim, por (2.9),

$$P(t + 2\omega) = \Phi(t + 2\omega)e^{-(t+2\omega)R} = \Phi(t)e^{2\omega R}e^{-(t+2\omega)R} = \Phi(t)e^{-tR} = P(t),$$

concluimos que P é periódica de período 2ω . Além disso, como $\Phi(t)$ e e^{-tR} são matrizes não-singulares para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $P(t)$ é não-singular. $\square$

Seja J a forma canônica de Jordan associada à matriz R . Então existe uma matriz constante T não-singular tal que $T^{-1}RT = J$. Sejam $\Phi_1 := \Phi T$ e $P_1 := PT$. Daí, por (2.6),

$$\Phi_1(t) = P_1(t)e^{tJ} \quad (2.10)$$

e, obviamente, P_1 é uma matriz periódica de período 2ω . Sejam ρ_j 's os autovalores de R . Desse modo,

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{tJ_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{tJ_p} \end{bmatrix},$$

onde

$$e^{tJ_0} = \begin{bmatrix} e^{t\rho_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\rho_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\rho_q} \end{bmatrix}$$

e

$$e^{tJ_j} = e^{t\operatorname{Re}(\rho_{q+j})} \begin{bmatrix} e^{t\operatorname{Im}(\rho_{q+j})i} & t & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\operatorname{Im}(\rho_{q+j})i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\operatorname{Im}(\rho_{q+j})i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{r_j-1}}{(r_j-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{r_j-2}}{(r_j-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que $\operatorname{Re}(\rho_j)$ e $\operatorname{Im}(\rho_j)$ denotam, respectivamente, a parte real e imaginária de ρ_j , $j = 1, \dots, p$; $q + \sum r_j = d$. É claro que $e^{\omega\rho_j}$ são os autovalores de $C = e^{\omega R}$.

Consideremos $\rho_1, \dots, \rho_r$ os autovalores distintos de R . Sejam $-\infty \leq \lambda_s < \dots < \lambda_1$ as diferentes partes reais dos autovalores de R . Tomemos x um vetor não-nulo em $E_{\lambda_l} = \sum_{i,j \in \Sigma_l} V_{e^{2\omega\rho_i}} \oplus V_{e^{2\omega\rho_j}, e^{2\omega\bar{\rho}_j}}$, onde $\Sigma_l := \{i : \log |e^{2\omega\rho_i}| = 2\omega\lambda_l\}$, $1 \leq l \leq s$, e $V_{e^{2\omega\rho_i}}$, $V_{e^{2\omega\rho_j}, e^{2\omega\bar{\rho}_j}}$ são os autoespaços generalizados reais associados aos autovalores $e^{2\omega\rho_i}$ e $e^{2\omega\rho_j}$ de $e^{2\omega R}$, respectivamente. Daí,

$$\lambda(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|P(t)e^{tR}x\|;$$

fazendo $t = 2n\omega$, usando a Proposição 2.2.1 e o fato de que $P(0) = \operatorname{Id}$, temos que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\omega} \log \|P(0)(e^{2\omega R})^n x\| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\omega} \log \|(e^{2\omega R})^n x\| = \frac{1}{2\omega} 2\omega\lambda_l = \lambda_l. \end{aligned}$$

Assim, ainda pela Proposição 2.2.1, temos que

$$\mathbb{R}^d = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_s}$$

de tal forma que

$$\lambda(x) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi(t)x\| = \lambda_t,$$

para todo $x \in E_{\lambda_t} \setminus \{0\}$.

Concluimos então que os expoentes de Lyapunov para sistemas lineares não-autônomos periódicos são dados pelas diferentes partes reais dos autovalores de R .

Capítulo 3

Demonstração do Teorema de Oseledec segundo Ruelle

Neste capítulo, provaremos o Teorema Ergódico Multiplicativo segundo a versão dada por Ruelle em [18]. Na verdade, a demonstração do Teorema de Oseledec segue quase que diretamente do Teorema 3.1.2, que é chamado de *versão determinística do Teorema Ergódico Multiplicativo*. Entretanto, a prova desta versão (Teorema 3.1.2) é bem trabalhosa, pois envolve a construção de subespaços invariantes nos quais o menor expoente de Lyapunov é dado por um limite. Essencialmente, o Teorema de Oseledec seguirá deste teorema e de um corolário (Proposição 3.2.1) do Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman.

3.1 Versão Determinística do Teorema Ergódico Multiplicativo

O objetivo desta seção será demonstrar o teorema que veremos a seguir, que é uma versão determinística do Teorema Ergódico Multiplicativo. Essa versão determinística será usada na demonstração do Teorema Ergódico Multiplicativo. Antes de enunciarmos o teorema, observemos que a *decomposição polar de matrizes* diz

que para toda matriz $A \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ existem matrizes ortogonais $P, Q \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ tais que $A = PDQ$, onde $D = (d_{ij})$ é uma matriz diagonal, isto é, $d_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Além disso, seja r o posto da matriz A ; então para $i = 1, \dots, r$, tem-se que $d_{ii} = \sigma_i > 0$, σ_i^2 é um autovalor de A^*A , onde A^* denota a matriz tranposta de A , e para $i > r$, $d_{ii} = 0$.

O lema seguinte terá um papel fundamental na demonstração da primeira parte da versão determinística do Teorema Ergódico Multiplicativo.

Lema 3.1.1 *Seja S uma matriz simétrica $d \times d$ de modo que $S = \sum \lambda_k P_k$, onde λ_k são os autovalores de S e P_k são as projeções ortogonais sobre os autoespaços U_k correspondentes a λ_k . Considere $S_n = \sum \lambda_k(n) P_k(n)$ uma sequência de matrizes tais que as seguintes propriedades são válidas para $n \rightarrow \infty$:*

i) $\lambda_k(n) \rightarrow \lambda_i$ para $k \in \Sigma_i \neq \emptyset$, onde Σ_i é um conjunto de índices;

ii) $\bar{P}_i(n) := \sum_{k \in \Sigma_i} P_k(n) \rightarrow P_i$.

Então, $S_n \rightarrow S$.

Demonstração: Observemos que

$$\begin{aligned} S_n - S &= \sum_i \left[\left(\sum_{k \in \Sigma_i} \lambda_k(n) P_k(n) \right) - \lambda_i P_i \right] \\ &= \sum_i \left[\sum_{k \in \Sigma_i} (\lambda_k(n) - \lambda_i) P_k(n) + \lambda_i \left(\left(\sum_{k \in \Sigma_i} P_k(n) \right) - P_i \right) \right]. \end{aligned}$$

Assim, como $\|P_k(n)\| \leq 1$, para todo n , segue o resultado. $\square$

Seja $(T_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de matrizes reais $d \times d$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_n\| \leq 0.$$

Considere $T^n = T_n \cdots T_2 \cdot T_1$, e suponha que os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(T^n)^{\wedge i}\| = \gamma_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad (3.1)$$

existem para $1 \leq i \leq d$. Para cada $n \geq 1$, seja $V_n D_n O_n$, $D_n = \text{diag}(\delta_1(T^n), \dots, \delta_d(T^n))$, a decomposição polar de T^n , isto é, $T^n = V_n D_n O_n$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \leq \delta_d(T^n) \leq \dots \leq \delta_1(T^n)$. Como os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(T^n)^{\wedge i}\| = \gamma_i$$

existem, para $i = 1, \dots, d$, segue do Lema A.0.2 que $\|(T^n)^{\wedge i}\| = \prod_{p=1}^i \delta_p(T^n)$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(T^n)^{\wedge i}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\log \delta_1(T^n) + \dots + \log \delta_{i-1}(T^n) + \log \delta_i(T^n)).$$

Como o limite (3.1) existe para todo i , temos que, usando indução sobre i ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta_i(T^n)$$

existe para todo $i = 1, \dots, d$. Denotemos por $\Lambda_i := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta_i(T^n)$. Logo, é claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^{1/n} = \text{diag}(e^{\Lambda_1}, \dots, e^{\Lambda_d}).$$

Usando a notação acima, a primeira parte da versão determinística do Teorema Ergódico Multilplicativo seguirá facilmente do teorema seguinte.

Teorema 3.1.1 *Sejam $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$ os valores distintos em $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_d\}$, e $U_i(n)$ o subespaço gerado pelos autovetores de $(T^{n*} T^n)^{1/2n} = O_n^* D_n^{1/n} O_n$ correspondentes aos autovalores $\delta_{k(i)}(T^n)^{1/n} \rightarrow e^{\lambda_i}$. Considere $P_i(n)$ a projeção ortogonal sobre $U_i(n)$. Então, $P_i(n) \rightarrow P_i$, quando $n \rightarrow \infty$, $i = 1, \dots, d$.*

Demonstração: Podemos assumir que $d \geq 2$, visto que o caso $d = 1$ é trivial. Considere d_i a multiplicidade de λ_i . Analisemos primeiramente quando $s = 1$. Então, $D_n^{1/n} \rightarrow e^{\lambda_1} I$ e $P_1(n) = I$.

Suponha agora que $s \geq 2$. Vamos assumir que $\lambda_s > -\infty$. As modificações necessárias caso $\lambda_s = -\infty$ são óbvias ou serão dadas ao longo da prova. Sejam

$$\Delta_i := \lambda_i - \lambda_{i+1}, i = 1, \dots, s-1, \Delta := \min_{i=1, \dots, s-1} \Delta_i > 0.$$

Dado $\varepsilon \in (0, \Delta)$, existe N_ε tal que para $i = 1, \dots, s$, $n \geq N_\varepsilon$,

$$\left| \frac{1}{n} \log \delta_{k(i)}(T^n) - \lambda_i \right| < \varepsilon,$$

onde $k(i)$ percorre o grupo Σ_i de d_i índices tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta_{k(i)}(T^n) = \lambda_i.$$

Seja $U_i(n) := \text{span} \{O_n^* e_{d_1 + \dots + d_{i-1} + 1}, \dots, O_n^* e_{d_1 + \dots + d_{i-1} + d_i}\}$ e $V_i(n) := U_s(n) \oplus \dots \oplus U_i(n)$, $i = 1, \dots, s$. A sequência de subespaços dada por

$$F(n) = (V_s(n) \subset \dots \subset V_i(n) \subset \dots \subset V_1(n))$$

forma uma filtração em $\mathbb{R}^d$, correspondendo para cada $\varepsilon \in (0, \Delta)$ e $n \geq N_\varepsilon$ ao vetor de dimensão $\tau = (d_s, d_s + d_{s-1}, \dots, d_s + \dots + d_1 = d)$, independente de ε e n .

Seja $F_\tau(d)$ o conjunto de todas as filtrações correspondentes aos vetores de dimensão τ . Tal conjunto tem uma estrutura de variedade compacta $\mathcal{C}^\infty$. Definamos uma métrica completa em $F_\tau(d)$. Tomemos $F = (V_s \subset \dots \subset V_1) \in F_\tau(d)$ e definamos $U_s = V_s$, e U_i como sendo o complemento ortogonal de V_{i+1} em V_i , para $i = 1, \dots, s-1$. Então, $V_i = U_s \oplus \dots \oplus U_i$, $i = 1, \dots, s$.

Seja $h = \frac{\Delta}{s-1}$. Definamos para $F, \bar{F} \in F_\tau(d)$,

$$\delta(F, \bar{F}) := \max_{\substack{i, j=1, \dots, s \\ i \neq j}} \max_{\substack{x \in U_i, y \in U_j \\ \|x\|=\|y\|=1}} |\langle x, y \rangle|^{h/|\lambda_i - \lambda_j|} \quad (3.2)$$

Se $\lambda_s = -\infty$, basta substituímos $h/|\lambda_s - \lambda_j|$ e $h/|\lambda_i - \lambda_s|$ por $\frac{1}{d-1}$. Desse modo, a aplicação $\delta(\cdot, \cdot)$ é uma métrica completa em $F_\tau(d)$ compatível com a topologia natural (ver [8]).

Pela expressão da norma de um operador

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\langle Ax, y \rangle|,$$

segue que para quaisquer projeções ortogonais P, Q em um espaço de Hilbert

$$\|PQ\| = \|QP\| = \max \{|\langle x, y \rangle|; x \in \text{Im}P, y \in \text{Im}Q, \|x\| = 1, \|y\| = 1\}.$$

Então, dado $F \in F_\tau(d)$, seja P_i a projeção ortogonal sobre U_i ; logo, reescrevendo (3.2),

$$\delta(F, \bar{F}) = \max_{\substack{i,j=1,\dots,s \\ i \neq j}} \|P_i \bar{P}_j\|^{h/|\lambda_i - \lambda_j|} \quad (3.3)$$

Para prosseguirmos na demonstração deste teorema precisaremos do seguinte lema.

Lema 3.1.2 *Tem-se que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta(F(n), F(n+1)) \leq -h. \quad (3.4)$$

Particularmente, a sequência $(F(n))$ é de Cauchy e portanto converge em $F_\tau(d)$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = F,$$

de tal modo que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta(F(n), F) \leq -h. \quad (3.5)$$

Antes de mostrarmos este lema, vamos usá-lo para concluirmos a prova do teorema.

Afirmamos que se $F(n) = (V_s(n) \subset \dots \subset V_1(n)) \longrightarrow F = (V_s \subset \dots \subset V_1)$ então, para cada i , $U_i(n) \longrightarrow U_i$ em $\text{Gr}_{d_i}(\mathbb{R}^d)$, a Grassmaniana formada por subespaços de dimensão d_i em $\mathbb{R}^d$, de modo que a métrica completa em $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ é dada por

$$\delta(U, \bar{U}) := \|(I - P)\bar{P}\| = \|(I - \bar{P})P\|,$$

onde P e $\bar{P}$ são as projeções ortogonais em $U, \bar{U} \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$, respectivamente. De fato, sejam P_i e $P_i(n)$ as projeções ortogonais sobre U_i e $U_i(n)$, respectivamente.

Então, usando o fato de que $I = \sum_{j=1}^s P_j(n)$, temos que

$$\delta(U_i, U_i(n)) = \|(I - P_i(n))P_i\| = \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s P_j(n)P_i \right\| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \|P_j(n)P_i\|.$$

Notemos que $\|P_j(n)P_i\|^{h/|\lambda_i-\lambda_j|} \leq \delta(F(n), F)$ para todo $i, j = 1, \dots, s, i \neq j$. Como $\delta(F(n), F) \rightarrow 0$, então $\|P_j(n)P_i\| \rightarrow 0$ para todo $i, j = 1, \dots, s, i \neq j$. Logo, $U_i(n) \rightarrow U_i$ em $\text{Gr}_{d_i}(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, \dots, s$.

Segue de um resultado da Análise Funcional (ver [9], Teorema 6.34(i), página 56) que se P e $\bar{P}$ são projeções ortogonais com $\dim \text{Im}(P) = \dim \text{Im}(\bar{P})$ e $\|(I - P)\bar{P}\| = c < 1$, então

$$\|P - \bar{P}\| = \|(I - P)\bar{P}\| = \|(I - \bar{P})P\| = c. \quad (3.6)$$

Então, $P_i(n) \rightarrow P_i$ para todo i . □

No lema a seguir obteremos uma simplificação para o Lema 3.1.2.

Lema 3.1.3 *Se $\lambda(\Delta_{ij}(n)) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \Delta_{ij}(n) \leq -|\lambda_i - \lambda_j|$, para todo $i, j = 1, \dots, s, i \neq j$, onde*

$$\Delta_{ij}(n) := \|P_i(n)P_j(n+1)\| = \|P_j(n+1)P_i(n)\|,$$

então o Lema 3.1.2 é satisfeito.

Demonstração: De fato, como

$$\delta(F(n), F) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \delta(F(k), F(k+1)),$$

temos que (3.5) segue de (3.4) pelo Lema 2.1.1(iv). Portanto, basta provarmos a desigualdade (3.4). E para mostrarmos tal desigualdade, observemos que como $\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -|\lambda_i - \lambda_j|$, temos que $\lambda(\Delta_{ij}(n)^{h/|\lambda_i-\lambda_j|}) = \frac{h}{|\lambda_i - \lambda_j|} \lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -h$, para todo i, j com $i \neq j$. Assim, pela definição da métrica δ em $F_\tau(d)$ dada por (3.3), segue a desigualdade desejada. □

Demonstração do Lema 3.1.2: Pelo lema anterior, basta provarmos que $\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -|\lambda_i - \lambda_j|$, para todo $i, j = 1, \dots, s, i \neq j$.

1º Caso: $i > j$

Sejam $x \in U_i(n)$ e y a projeção ortogonal de x em $U_j(n+1)$. Vamos mostrar então que

$$\|y\| \leq \|x\| \exp [(-|\lambda_i - \lambda_j| + \varepsilon)n]. \quad (3.7)$$

De fato, como $x \in U_i(n)$, temos que para todo $n \geq N_{\varepsilon/3}$

$$\|T^{n+1}x\| \leq \|T_{n+1}\| \|T^n x\| \leq \|T_{n+1}\| \|x\| \exp [(\lambda_i + \varepsilon/3)n].$$

Por outro lado, como $y \in U_j(n+1)$,

$$\|T^{n+1}x\| = (\|T^{n+1}y\|^2 + \|T^{n+1}(x-y)\|^2)^{1/2} \geq \|T^{n+1}y\| \geq \|y\| \exp [(\lambda_j - \varepsilon/3)n],$$

para todo $n \geq N_{\varepsilon/3}$. Como $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_n\| \leq 0$, podemos supor que para n suficientemente grande

$$\|T_{n+1}\| \leq \exp \left(n \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Portanto, a desigualdade (3.7) segue das três desigualdades acima para $i > j$. Logo, como

$$\Delta_{ij}(n) \leq \frac{\|P_i(n)y\|}{\|x\|} \leq \frac{\|y\|}{\|x\|} \leq \exp [(-|\lambda_i - \lambda_j| + \varepsilon)n],$$

para todo $x \in U_i(n)$ tal que $y = P_j(n+1)x$. Dessa forma, segue que para $i > j$

$$\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -|\lambda_i - \lambda_j|.$$

2º Caso: $i < j$

Como $\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -|\lambda_i - \lambda_j|$ para $i > j$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(I - P_i(n+1))P_i(n)\| = 0$$

para todo $i = 1, \dots, s$. De fato, basta usarmos indução sobre i . Para $i = s$, usando o fato de que $I = \sum_{j=1}^s P_j(n+1)$,

$$\|(I - P_s(n+1))P_s(n)\| = \left\| \sum_{j=1}^{s-1} P_j(n+1)P_s(n) \right\| \leq \sum_{j=1}^{s-1} \Delta_{sj}(n) \longrightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Suponhamos que provamos a afirmação para $i \leq s$. Mostraremos para $i - 1 \geq 1$. Para isso, observemos primeiramente que

$$I = \sum_{j=1}^{i-2} P_j(n+1) + P_{i-1}(n+1) + \sum_{j=i}^s P_j(n+1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|P_{i-1}(n)(I - P_{i-1}(n+1))\| &\leq \sum_{j=1}^{i-2} \|P_{i-1}(n)P_j(n+1)\| + \sum_{j=i}^s \|P_{i-1}(n)P_j(n+1)\| \\ &= \sum_{j=1}^{i-2} \Delta_{i-1,j}(n) \\ &\quad + \sum_{j=i}^s \|P_{i-1}(n)(I - P_j(n) + P_j(n))P_j(n+1)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{i-2} \Delta_{i-1,j}(n) + \sum_{j=i}^s \|(I - P_j(n))P_j(n+1)\|. \end{aligned}$$

Como $i - 1 > j$ para todo $j = 1, \dots, i - 2$, e $\|(I - P_j(n))P_j(n+1)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $j \geq i$ (pela hipótese de indução), temos que o último termo na desigualdade anterior converge para 0 fazendo $n \rightarrow \infty$. Dessa forma,

$$\|P_{i-1}(n)(I - P_{i-1}(n+1))\| \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Daí, usando (3.6), temos que para todo $i = 1, \dots, s$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_i(n) - P_i(n+1)\| = 0.$$

Podemos assumir então que $\|P_i(n) - P_i(n+1)\| \leq 1/2$ para n suficientemente grande. Antes de prosseguirmos observemos que dadas duas projeções ortogonais P e P' tais que $\|P - P'\| \leq 1/2$ e B um operador qualquer limitado, então

$$\|P'PB\| \geq \|PB\|/2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\|P'PB\| &= \|P^2B - (P - P')PB\| \geq \|P^2B\| - \|(P - P')PB\| \\ &\geq \|PB\|(1 - \|P - P'\|) \geq \|PB\|/2.\end{aligned}$$

Fixemos i, j tais que $i < j$. Então, como $I = \sum_{k=1}^s P_k(n)$,

$$\sum_{k=1}^s P_i(n+1)P_k(n)P_j(n+1) = P_i(n+1)P_j(n+1) = 0.$$

Por conseguinte,

$$P_i(n+1)P_i(n)P_j(n+1) = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s P_i(n+1)P_k(n)P_j(n+1). \quad (3.8)$$

Pelo que foi observado acima,

$$\|P_i(n+1)P_i(n)P_j(n+1)\| \geq \frac{1}{2} \|P_i(n)P_j(n+1)\|. \quad (3.9)$$

Logo, de (3.8) e (3.9), e usando o fato de que $P_k^2(n) = P_k(n)$, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}(n) &\leq 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s \|P_i(n+1)P_k(n)P_j(n+1)\| \\ &\leq 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s \|P_i(n+1)P_k(n)\| \|P_k(n)P_j(n+1)\| = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s \Delta_{kj}(n) \Delta_{ki}(n).\end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão acima,

$$\Delta_{ij}(n) \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{i-1} \Delta_{ki}(n) \Delta_{kj}(n) + \sum_{k=i+1}^{j-1} \Delta_{ki}^0(n) \Delta_{kj}(n) + \sum_{k=j}^s \Delta_{ki}^0(n) \Delta_{kj}^0(n) \right), \quad (3.10)$$

onde os termos com índice 0 indicam os termos nos quais o caso $i > j$ aplica-se.

Usando o fato de que $\Delta_{ij}(n) \leq 1$, calculemos o índice de Lyapunov do último termo na expressão (3.10),

$$\lambda \left(\sum_{k=j}^s \Delta_{ki}^0(n) \Delta_{kj}^0(n) \right) \leq \lambda \left(\sum_{k=j}^s \Delta_{ki}^0(n) \right) = \max_{k=j, \dots, s} (-|\lambda_k - \lambda_i|) = -|\lambda_j - \lambda_i|.$$

Mostraremos agora que

$$\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -\min\{\Delta_1, \dots, \Delta_i\} \leq -\Delta < 0. \quad (3.11)$$

A prova deste fato segue por indução sobre i . Seja $i = 1$; então, por (3.10) e usando que $\Delta_{ij}(n) \leq 1$,

$$\Delta_{1j}(n) \leq 2 \left(\sum_{k=2}^{j-1} \Delta_{k1}^0(n) + \sum_{k=j}^s \Delta_{k1}^0(n) \Delta_{kj}^0(n) \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_{1j}(n)) &\leq \lambda \left(\sum_{k=2}^{j-1} \Delta_{k1}^0(n) + \sum_{k=j}^s \Delta_{k1}^0(n) \Delta_{kj}^0(n) \right) \\ &\leq \max \left\{ \lambda \left(\sum_{k=2}^{j-1} \Delta_{k1}^0(n) \right), \lambda \left(\sum_{k=j}^s \Delta_{k1}^0(n) \Delta_{kj}^0(n) \right) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{k=2, \dots, j-1} (-|\lambda_k - \lambda_1|), -|\lambda_j - \lambda_1| \right\} \\ &= -\min_{k=2, \dots, j} |\lambda_k - \lambda_1| = -\Delta_1 \leq -\Delta < 0. \end{aligned}$$

Para $i = 2$, segue de (3.10) que

$$\Delta_{2j}(n) \leq 2 \left(\Delta_{1j}(n) + \sum_{k=3}^{j-1} \Delta_{k2}^0(n) + \sum_{k=j}^s \Delta_{k2}^0(n) \Delta_{kj}^0(n) \right),$$

onde usamos que $\Delta_{ij}(n) \leq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_{2j}(n)) &\leq \max \left\{ -\Delta_1, \max_{k=3, \dots, j-1} (-|\lambda_k - \lambda_2|), -|\lambda_j - \lambda_2| \right\} \\ &= \max \left\{ -\Delta_1, \max_{k=3, \dots, j} (-|\lambda_k - \lambda_2|) \right\} \\ &= \max \{-\Delta_1, -\Delta_2\} = -\min\{\Delta_1, \Delta_2\}. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue por indução que $\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -\min\{\Delta_1, \dots, \Delta_i\}$.

O próximo passo é obtermos uma estimativa melhor para $\lambda(\Delta_{ij}(n))$. Notemos que

para os termos da primeira soma do lado direito da desigualdade (3.10) temos $k < i < j$. Daí, por (3.11),

$$\lambda(\Delta_{ki}(n)\Delta_{kj}(n)) \leq -2\Delta.$$

Já para os termos da segunda soma,

$$\lambda(\Delta_{ki}^0(n)\Delta_{kj}(n)) \leq -|\lambda_k - \lambda_i| - \Delta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_{ij}(n)) &\leq \max \left\{ -2\Delta, \max_{k=i+1, \dots, j-1} (-|\lambda_k - \lambda_i| - \Delta), -|\lambda_i - \lambda_j| \right\} \\ &= \max \{ -2\Delta, -\Delta_i - \Delta, -|\lambda_i - \lambda_j| \} \\ &= \max \{ -2\Delta, -|\lambda_i - \lambda_j| \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora obteremos dois casos distintos:

- $-|\lambda_i - \lambda_j| \geq -2\Delta$;
- $-|\lambda_i - \lambda_j| < -2\Delta$.

Ocorrendo o primeiro caso, não há mais nada a ser feito, visto que $\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -|\lambda_i - \lambda_j|$. Já no segundo caso, obteremos uma nova estimativa para $\lambda(\Delta_{ij}(n))$. Para o primeiro termo da desigualdade (3.10),

$$\begin{aligned} \lambda \left(\sum_{k=1}^{i-1} \Delta_{ki}(n)\Delta_{kj}(n) \right) &\leq \max_{k=1, \dots, i-1} \lambda(\Delta_{ki}(n)\Delta_{kj}(n)) \\ &\leq \max_{k=1, \dots, i-1} (\lambda(\Delta_{ki}(n)) + \lambda(\Delta_{kj}(n))). \end{aligned}$$

Pela estimativa (3.12) e pela definição de Δ , segue que para todo $k = 1, \dots, i-1$

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_{ki}(n)) &\leq \max \{ -2\Delta, -|\lambda_k - \lambda_i| \} \\ &\leq \max_{k=1, \dots, i-1} \{ -2\Delta, -|\lambda_k - \lambda_i| \} \leq -\Delta. \end{aligned}$$

Por outro lado, para todo $k = 1, \dots, i-1$,

$$-|\lambda_k - \lambda_j| < -|\lambda_i - \lambda_j| < -2\Delta,$$

implicando em

$$\lambda(\Delta_{kj}(n)) \leq \max_{k=1, \dots, i-1} \{-2\Delta, -|\lambda_k - \lambda_j|\} = -2\Delta.$$

Finalmente, concluímos que

$$\lambda \left(\sum_{k=1}^{i-1} \Delta_{ki}(n) \Delta_{kj}(n) \right) \leq -3\Delta.$$

Já para o segundo termo do lado direito da desigualdade (3.10), temos que

$$\begin{aligned} \lambda \left(\sum_{k=i+1}^{j-1} \Delta_{ki}^0(n) \Delta_{kj}(n) \right) &\leq \max_{k=i+1, \dots, j-1} (\lambda(\Delta_{ki}^0(n)) + \lambda(\Delta_{kj}(n))) \\ &= \lambda(\Delta_{k_0 i}^0(n)) + \lambda(\Delta_{k_0 j}(n)), \end{aligned}$$

para algum $k_0 \in \{i+1, \dots, j-1\}$. Assim, pela estimativa (3.12),

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_{k_0 i}^0(n)) + \lambda(\Delta_{k_0 j}(n)) &\leq -|\lambda_{k_0} - \lambda_i| + \max \{-2\Delta, -|\lambda_{k_0} - \lambda_j|\} \\ &= \begin{cases} -|\lambda_{k_0} - \lambda_i| - |\lambda_{k_0} - \lambda_j| = -|\lambda_i - \lambda_j|, & \text{se } |\lambda_{k_0} - \lambda_j| \leq 2\Delta, \\ -|\lambda_{k_0} - \lambda_i| - 2\Delta \leq -3\Delta, & \text{se } |\lambda_{k_0} - \lambda_j| > 2\Delta. \end{cases} \end{aligned}$$

Para o último termo da desigualdade (3.10) sabemos que

$$\lambda \left(\sum_{k=j}^s \Delta_{ki}^0(n) \Delta_{kj}^0(n) \right) \leq -|\lambda_i - \lambda_j|.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \lambda(\Delta_{ij}) &\leq \max \left\{ \lambda \left(\sum_{k=1}^{i-1} \Delta_{ki} \Delta_{kj} \right), \lambda \left(\sum_{k=i+1}^{j-1} \Delta_{ki}^0(n) \Delta_{kj} \right), \lambda \left(\sum_{k=j}^s \Delta_{ki}^0 \Delta_{kj}^0 \right) \right\} \\ &\leq \max \{-3\Delta, -|\lambda_i - \lambda_j|\}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde o índice n está subentendido. Novamente temos dois casos:

- $-|\lambda_i - \lambda_j| \geq -3\Delta;$

- $-|\lambda_i - \lambda_j| < -3\Delta$.

No primeiro caso, não há mais nada para ser feito. Já no segundo caso, aplicamos (3.13) para obtermos a nova estimativa

$$\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq \max \{-4\Delta, -|\lambda_i - \lambda_j|\}.$$

Continuaremos esse processo (finito) até obtermos

$$\lambda(\Delta_{ij}(n)) \leq -|\lambda_i - \lambda_j|,$$

concluindo a demonstração. $\square$

Agora estamos aptos a demonstrar a versão determinística do Teorema de Oseledec.

Teorema 3.1.2 *Seja $(T_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de matrizes reais $d \times d$ tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_n\| \leq 0.$$

Considere $T^n = T_n \cdots T_2 \cdot T_1$, e assuma que os limites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(T^n)^{\wedge i}\| = \gamma_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

existem para $1 \leq i \leq d$. Então,

(i) O limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^{n*} T^n)^{1/2n} =: \Psi$$

existe e os autovalores de Ψ coincidem com e^{Λ_i} , onde Λ_i são definidos por $\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_i := \gamma_i$, $i = 1, \dots, d$ e satisfazem

$$\Lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta_i(T^n), \quad i = 1, \dots, d,$$

onde $\delta_i(T^n)$ é o i -ésimo autovalor de T^n .

(ii) Sejam $e^{\lambda_s} < e^{\lambda_{s-1}} < \cdots < e^{\lambda_1}$ os autovalores de Ψ (pode ser que $\lambda_s = -\infty$) e

$U_s, \dots, U_1$ os autoespaços correspondentes. Considere $V_{s+1} := \{0\}$ e $V_i := U_s \oplus \dots \oplus U_i$, $i = 1, \dots, d$; assim,

$$V_s \subset \dots \subset V_i \subset \dots \subset V_1 = \mathbb{R}^d$$

define uma filtração em $\mathbb{R}^d$. Então, para cada $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, o expoente de Lyapunov

$$\lambda(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T^n x\|,$$

existe e, $\lambda(x) = \lambda_i$ se, e somente se, $x \in V_i \setminus V_{i+1}$, onde $V_i = \{x \in \mathbb{R}^d : \lambda(x) \leq \lambda_i\}$.

Demonstração: Vimos anteriormente que $\delta_{k(i)}(T^n)^{1/n} \rightarrow e^{\lambda_i}$ e $P_i(n) \rightarrow P_i$ (Teorema 3.1.1). Assim, pelo Lema 3.1.1, $(T^{n*}T^n)^{1/2n} \rightarrow \sum e^{\lambda_i} P_i = \Psi$, concluindo, assim, a primeira parte do teorema. Para provarmos a segunda parte, assumiremos que $d \geq 2$. Suponhamos inicialmente que $s = 1$. Assim, A filtração em (ii) é trivial, isto é, $V_1 = \mathbb{R}^d$. Resta mostrarmos que para cada $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T^n x\| = \lambda_1.$$

Seja $O_n x = x_n$. Visto que a matriz V_n é ortogonal, temos que

$$\|T^n x\| = \|D_n x_n\| = ((\delta_1(T^n))^2 (x_n^1)^2 + \dots + (\delta_d(T^n))^2 (x_n^d)^2)^{1/2}.$$

Como $\frac{1}{n} \log \delta_i(T^n) \rightarrow \lambda_i$, temos para todo $\varepsilon > 0$

$$e^{n(\lambda_1 - \varepsilon)} \leq \delta_i(T^n) \leq e^{n(\lambda_1 + \varepsilon)},$$

para n suficientemente grande. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que para todo n e $i = 1, \dots, d$,

$$\frac{1}{C_\varepsilon} e^{n(\lambda_1 - \varepsilon)} \leq \delta_i(T^n) \leq C_\varepsilon e^{n(\lambda_1 + \varepsilon)}.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ independente de x tal que para todo n e $x \neq 0$,

$$\|x\| \frac{1}{C_\varepsilon} e^{n(\lambda_1 - \varepsilon)} \leq \|T^n x\| \leq \|x\| C_\varepsilon e^{n(\lambda_1 + \varepsilon)},$$

onde usamos o fato de que $\|x_n\| = \|O_n x\| = \|x\|$, visto que O_n é uma matriz ortogonal. Então, $\lambda(x) = \lambda_1$, para todo $x \neq 0$. A idéia é análoga para $\lambda_1 = -\infty$. Suponha agora que $s > 1$. Sejam $i \in \{1, \dots, s\}$ e $x \in V_i \setminus V_{i+1}$, $\|x\| = 1$, fixos. Podemos escrever

$$x = \sum_{j=1}^s P_j(n)x = \sum_{j=i}^s P_j x,$$

com $P_i x \neq 0$. O conjunto $\{T^n P_1(n)x, \dots, T^n P_s(n)x\}$ é ortogonal e $\|T^n P_j(n)x\| = \delta_{k(j)}(T^n) \|P_j(n)x\|$, para $k(j) \in \Sigma_j$. Assim,

$$\|P_j(n)x\| \underline{\delta}_j(T^n) \leq \|T^n P_j(n)x\| \leq \|P_j(n)x\| \bar{\delta}_j(T^n),$$

onde

$$\underline{\delta}_j(T^n) := \min_{\Sigma_j} \delta_{k(j)}(T^n), \quad \bar{\delta}_j(T^n) := \max_{\Sigma_j} \delta_{k(j)}(T^n),$$

com $\lambda(\underline{\delta}_j(T^n)) = \lambda(\bar{\delta}_j(T^n)) = \lambda_j$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^s \|P_j(n)x\|^2 (\underline{\delta}_j(T^n))^2 \leq \|T^n x\|^2 \leq \sum_{j=1}^s \|P_j(n)x\|^2 (\bar{\delta}_j(T^n))^2, \quad (3.14)$$

visto que $\{T^n P_i(n)x\}_{i=1, \dots, s}$ é ortogonal. Logo, é fácil ver que $\|P_i(n)x\| \underline{\delta}_i(T^n) \leq \|T^n x\|$. Também temos que como $P_i(n) \rightarrow P_i$, segue que $\|P_i(n)x\| \rightarrow \|P_i(x)\| > 0$. Daí,

$$\lambda_i \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T^n x\|.$$

Seja $j = i, \dots, s$. Observemos que como $\|P_j(n)x\| \leq 1$, temos que

$$\frac{1}{n} \log \|P_j(n)x\| \bar{\delta}_j(T^n) \leq \frac{1}{n} \log \bar{\delta}_j(T^n).$$

Assim, $\lambda(\|P_j(n)x\| \bar{\delta}_j(T^n)) \leq \lambda_i$.

Consideremos agora $j = 1, \dots, i-1$. Notemos que

$$\|P_j(n)x\| = \|P_j(n) \sum_{k=i}^s P_k x\| \leq \sum_{k=i}^s \|P_j(n) P_k\|;$$

logo

$$\lambda(\|P_j(n)x\| \bar{\delta}_j(T^n)) \leq \lambda(\|P_j(n)x\|) + \lambda(\bar{\delta}_j(T^n)) \leq \max_{k=i, \dots, s} \lambda(\|P_j(n) P_k\|) + \lambda_j.$$

De (3.5) tiramos que $\lambda(\|P_j(n)P_k\|) \leq -|\lambda_j - \lambda_k|$; dessa forma, a desigualdade acima torna-se

$$\lambda(\|P_j(n)x\|\bar{\delta}_j(T^n)) \leq \max_{k=i,\dots,s} \lambda(\|P_j(n)P_k\|) + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_j) + \lambda_j = \lambda_i.$$

Pela equação (3.14),

$$\|T^n x\|^2 \leq \sum_{j=1}^s (\|P_j(n)x\|\bar{\delta}_j(T^n))^2 \leq \max_{j=1,\dots,s} (\|P_j(n)x\|\bar{\delta}_j(T^n))^2.$$

Daí, $\|T^n x\| \leq \|P_{\bar{j}}(n)x\|\bar{\delta}_{\bar{j}}(T^n)$, para algum $\bar{j} \in \{1, \dots, s\}$. Assim, como

$$\lambda(\|P_j(n)x\|\bar{\delta}_j(T^n)) \leq \lambda_i,$$

para todo $j = 1, \dots, s$, temos que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T^n x\| \leq \lambda_i$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T^n x\| = \lambda_i,$$

concluindo a demonstração do teorema. □

3.2 Teorema Ergódico Multiplicativo - Caso Discreto

Seja (M, Σ, μ) um espaço de probabilidade. Inicialmente, consideraremos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

Definição 3.2.1 Dizemos que o grupo a 1-parâmetro $\{\tau^t\}_{t \in \mathbb{T}}$, $\tau^t : M \longrightarrow M$, é um fluxo mensurável se a aplicação $(x, t) \in M \times \mathbb{T} \longmapsto \tau^t x$ é mensurável e satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\tau^0 = \text{id}_M$;
- (ii) $\tau^{s+t} = \tau^s \circ \tau^t$, para todo $s, t \in \mathbb{T}$.

Além disso, se para cada $t \in \mathbb{T}$, τ^t é uma transformação mensurável que preserva medida, dizemos que $\{\tau^t\}_{t \in \mathbb{T}}$ é um fluxo mensurável que preserva medida.

Agora iremos definir um cociclo multiplicativo sobre um determinado sistema dinâmico $\{\tau^t\}_{t \in \mathbb{T}}$.

Definição 3.2.2 Dizemos que a aplicação $(x, t) \in M \times \mathbb{T} \mapsto T_x^t \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ é um cociclo (multiplicativo) se $T_x^{s+t} = T_{\tau^s x}^t \cdot T_x^s$, para todo $s, t \in \mathbb{T}$.

Observemos que um cociclo é um caso particular de um fluxo em um fibrado trivial.

Sejam $T : M \rightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ uma função mensurável e $\tau : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva medida. Observemos que quando $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, temos que o cociclo é dado por

$$T_x^n = T(\tau^{n-1}x) \cdots T(\tau x) \cdot T(x),$$

ou seja, neste caso $T(x) = T_x^1$. Nesta seção provaremos o Teorema Ergódico Multiplicativo para $\mathbb{T} = \mathbb{N}$, enquanto que no Capítulo 5 faremos a extensão do mesmo para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Assim, a partir de agora consideraremos $\tau : M \rightarrow M$ uma transformação mensurável que preserva medida e os cociclos sobre $\mathbb{N}$.

Definição 3.2.3 Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis em M . Dizemos que tal sequência é subaditiva se

$$f_{m+n} \leq f_n \circ \tau^m + f_m \text{ qtp ,}$$

para todo $m, n \geq 1$.

Exemplo: Seja $T : M \rightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ uma função mensurável. Definimos a norma $\|\cdot\|$ de uma matriz A como

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

A sequência $f_n(x) = \log \|T_x^n\|$ é subaditiva, pois como T_x^n é um cociclo temos

$$\|T_x^{m+n}\| \leq \|T^n(\tau^m x)\| \cdot \|T^m x\|,$$

implicando que $f_{m+n}(x) \leq f_n(\tau^m x) + f_m(x)$. □

O Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman, cuja demonstração pode ser encontrada em [10], trata da convergência de uma sequência subaditiva de funções mensuráveis e é de grande importância para a demonstração do Teorema Ergódico Multiplicativo.

Teorema 3.2.1 *Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis de M em $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ satisfazendo as seguintes condições:*

- a) *Integrabilidade: $f_1^+ \in L^1(M)$;*
- b) *Subaditividade: $f_{m+n} \leq f_m + f_n \circ \tau^m$ qtp.*

Então, existe uma função mensurável τ -invariante $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que $f^+ \in L^1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n = f \text{ qtp}$$

e,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int f_n(x) d\mu(x) = \inf_n \frac{1}{n} \int f_n(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

A proposição que provaremos a seguir é um corolário imediato do Teorema Ergódico Subaditivo.

Proposição 3.2.1 *Seja $T : M \longrightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ uma função mensurável tal que*

$$\log^+ \|T(\cdot)\| \in L^1.$$

Consideremos $T_x^n = T(\tau^{n-1}x) \cdots T(\tau x) \cdot T(x)$ (cociclo multiplicativo). Então, existe uma função mensurável τ -invariante $\chi : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que $\chi^+ \in L^1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_x^n\| = \chi(x)$$

para quase todo $x \in M$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int \log \|T_x^n\| d\mu(x) = \inf_n \frac{1}{n} \int \log \|T_x^n\| d\mu(x) = \int \chi(x) d\mu(x).$$

Demonstração: Pelo exemplo visto anteriormente, a sequência $f_n(x) = \log \|T_x^n\|$ é subaditiva. Logo, a Proposição segue diretamente do Teorema Ergódico Subaditivo. $\square$

Teorema 3.2.2 *Seja $T : M \longrightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ uma função mensurável tal que*

$$\log^+ \|T(\cdot)\| \in L^1.$$

Considere $T_x^n = T(\tau^{n-1}x) \cdots T(\tau x) \cdot T(x)$. Então, existe $\Gamma \subset M$ τ -invariante com $\mu(\Gamma) = 1$ tal que as seguintes propriedades são válidas para $x \in \Gamma$:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_x^{n*} T_x^n)^{1/2n} =: \Psi(x) \geq 0$ existe;
- (ii) *Sejam $\exp \lambda_1(x) > \cdots > \exp \lambda_{s(x)}(x)$ os autovalores de $\Psi(x)$ e $U_1(x), \dots, U_{s(x)}(x)$ os autoespaços correspondentes com suas multiplicidades $d_i(x) := \dim U_i(x)$. Considere $V_{s(x)+1} := \{0\}$ e $V_i(x) := U_{s(x)}(x) \oplus \cdots \oplus U_i(x)$, $i = 1, \dots, s(x)$; dessa forma,*

$$V_{s(x)}(x) \subset \cdots \subset V_i(x) \subset \cdots \subset V_1(x) = \mathbb{R}^d$$

define uma filtração em $\mathbb{R}^d$. Então, para cada $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, o expoente de Lyapunov

$$\lambda_x(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_x^n v\|$$

existe como limite e, $\lambda_x(v) = \lambda_i(x)$ se, e somente se, $v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x)$, onde $V_i(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : \lambda_x(v) \leq \lambda_i(x)\}$.

Demonstração: Como $\log^+ \|T(\cdot)\| \in L^1$ e $\tau : M \longrightarrow M$ preserva medida, temos pelo Corolário 1.1.2 que existe $\Gamma_1 \subset M$, τ -invariante com $\mu(\Gamma_1) = 1$ tal que para $x \in \Gamma_1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log^+ \|T(\tau^{n-1}x)\| = 0. \quad (3.15)$$

Sabemos que $\|T^{\wedge i}\| \leq \|T\|^i$. Logo, $\log^+ \|T^{\wedge i}\| \in L^1$. Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(T_x^n)^{\wedge i}\|$ existe para todo $i = 1, \dots, d$.

De fato,

$$(T_x^n)^{\wedge i} = (T(\tau^{n-1}x) \cdots T(\tau x) T(x))^{\wedge i} = T(\tau^{n-1}x)^{\wedge i} \cdots T(x)^{\wedge i}.$$

Assim, pela Proposição 3.2.1, temos que existe $\Gamma_2 \subset M$, τ -invariante com $\mu(\Gamma_2) = 1$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(T_x^n)^{\wedge i}\|$$

existe para todo $i = 1, \dots, d$.

Seja $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. É claro que Γ é τ -invariante e $\mu(\Gamma) = 1$. Então, para $x \in \Gamma$, o Teorema Ergódico Multiplicativo segue diretamente do Teorema 3.1.2 para $T_n = T(\tau^{n-1}x)$. $\square$

Assumiremos, a partir daqui, que as aplicações

$$\begin{aligned} x \in \Gamma &\longmapsto s(x) \in \mathbb{N}, \\ x \in \{x \in \Gamma : s(x) \geq i\} &\longmapsto \lambda_i(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ x \in \{x \in \Gamma : s(x) \geq i\} &\longmapsto V_i(x) \in \text{Gr}(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

são mensuráveis. Tal mensurabilidade será provada no Capítulo 4, Lema 4.2.2. Assumindo este fato, podemos observar ainda que tais aplicações são τ -invariantes.

Corolário 3.2.1 *Sejam $x \in \Gamma$, $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$; então o limite*

$$\lambda_x(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_x^n v\|$$

existe, sendo finito ou $-\infty$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$, o subespaço linear

$$V_\lambda(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : \lambda_x(v) \leq \lambda\}$$

é uma função mensurável de $x \in \Gamma$.

Demonstração: É claro que existe i tal que $v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x)$. Então, $\lambda_x(v) = \lambda_i(x)$. Além disso, notemos que

$$V_\lambda(x) = \bigcup_i \{V_i(x) : \lambda_i(x) \leq \lambda\} = V_r(x),$$

onde r é o menor índice tal que $\lambda_r(x) \leq \lambda$. Como a função $x \in \Gamma \longmapsto V_i(x) \in \text{Gr}(\mathbb{R}^d)$ é mensurável, é óbvio que a aplicação $x \in \Gamma \longmapsto V_\lambda(x) \in \text{Gr}(\mathbb{R}^d)$ é mensurável. $\square$

Observemos que

$$\lambda_{\tau x}(T(x)v) = \lambda_x(v). \quad (3.16)$$

Logo, temos que $T(x)(V_\lambda(x)) \subset V_\lambda(\tau x)$, isto é, $T(x)(V_r(x)) \subset V_r(\tau x)$. Notemos que se $\lambda_{s(x)}(x) \neq -\infty$, então $T(x) \in \text{Gl}(d, \mathbb{R})$. Assim, como $\dim V_r(x) = \dim V_r(\tau x)$, temos que $T(x)(V_\lambda(x)) = V_\lambda(\tau x)$.

O conjunto

$$\{(\lambda_i(x), d_i(x)) : i = 1, \dots, s(x)\}$$

é o espectro de (τ, T) , ou simplesmente de T , em $x \in M$. Se τ é uma transformação ergódica, temos que o espectro de T é μ -qtp constante, visto que as funções $x \in \Gamma \mapsto s(x)$, $x \in \Gamma \mapsto \lambda_i(x)$ e $x \in \Gamma \mapsto d_i(x)$ são τ -invariantes.

Exemplo: Suponha que a transformação $\tau : M \longrightarrow M$ possua inversa mensurável que preserve medida. Seja

$$\hat{\Psi}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{T}_x^{n*} \hat{T}_x^n)^{1/2n},$$

onde $\hat{T}_x^n = T^*(\tau^{-n+1}x) \cdots T^*(\tau^{-1}x) \cdot T^*(x)$ é o cociclo de $T^* : M \longrightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ com relação a τ^{-1} . Como o espectro de (τ^{-1}, T^*) é τ -invariante, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{T}_x^{n*} \hat{T}_x^n)^{1/2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\check{T}_x^{n*} \check{T}_x^n)^{1/2n} \text{ qtp},$$

onde $\check{T}_x^{n*} = T^*(x) \cdot T^*(\tau x) \cdots T^*(\tau^{n-1}x)$. Assim, como $\check{T}_x^{n*} \check{T}_x^n = T_x^{n*} T_x^n$, temos que o espectro de (τ, T) é igual ao espectro de (τ^{-1}, T^*) qtp. $\square$

Exemplo: Seja $T : M \longrightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ uma transformação mensurável tal que $T(x)$ é invertível para qtp $x \in M$ e $\log^+ \|T(\cdot)^{-1}\| \in L^1$. Denotaremos por T^{*-1} a transformação mensurável dada por $T^{*-1}(x) := [T(x)^*]^{-1}$ para qtp $x \in M$. Seja

$$\tilde{\Psi}(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{T}_x^{n*} \tilde{T}_x^n)^{1/2n},$$

onde $\tilde{T}_x^n = T^{*-1}(\tau^{n-1}x) \cdots T^{*-1}(\tau x) \cdot T^{*-1}(x)$. Observemos que $\tilde{\Psi}(x) = \Psi(x)^{-1}$. Dessa forma, o espectro de (τ, T^{*-1}) é obtido trocando o sinal do espectro de (τ, T) ,

isto é, $\tilde{\lambda}_i(x) = -\lambda_{s(x)-i+1}(x)$. A filtração associada a (τ, T^{*-1}) é ortogonal à filtração associada a (τ, T) , ou seja, $\tilde{V}_i(x) = V_{s(x)-i}(x)^\perp$. $\square$

Voltaremos a citar os exemplos anteriores no Capítulo 5, Seção 5.2, onde iremos demonstrar o Teorema Ergódico Multiplicativo para o caso invertível, ou seja, de tal modo que $T(x) \in \text{Gl}(d, \mathbb{R})$.

Exemplo: Sejam $X = \{a, b\}$ tal que $\mu(a) = \mu(b) = 1/2$ e a aplicação $\tau : X \longrightarrow X$ é dada pelo ciclo (ab) . Consideremos ainda $A, B \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ e T uma aplicação de X em $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ tal que $T(a) = A$ e $T(b) = B$. É fácil vermos que:

$$\begin{aligned} T_a^n &= \begin{cases} (BA)^{n/2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ A(BA)^{(n-1)/2}, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \end{cases} \\ T_b^n &= \begin{cases} (AB)^{n/2}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ B(AB)^{(n-1)/2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Segue do Teorema Ergódico Multiplicativo que para $v \in V_i(a) \setminus V_{i+1}(a)$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|(BA)^{n/2}v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A(BA)^{(n-1)/2}v\| = \lambda_i(a),$$

onde $\lambda_i(a)$ é autovalor de $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_a^{n*} T_a^n)^{1/2n}$. Notemos que a transformação τ é ergódica, dessa forma, $\lambda_i(a) = \lambda_i(b)$. Além disso, da equação (3.16) segue que $AV_i(a) \subseteq V_i(b)$ e $BV_i(b) \subseteq V_i(a)$ com igualdade se A e B forem matrizes inversíveis.

Generalizando o que foi feito acima, basta considerarmos o espaço $X = \{a_1, \dots, a_p\}$ com $\mu(a_i) = 1/p$, a aplicação τ de X em X dada pelo ciclo $(a_1 \dots a_p)$ e $T(a_i) = A_i \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, p$. Desse modo,

$$\begin{aligned} T_{a_1}^{pn} &= (A_p \dots A_2 A_1)^n \\ T_{a_2}^{pn} &= (A_1 \dots A_3 A_2)^n \\ &\vdots \\ T_{a_p}^{pn} &= (A_{p-1} \dots A_1 A_p)^n. \end{aligned}$$

Assim, usando o Teorema de Oseledec e a ergodicidade de τ temos que os expoentes de Lyapunov são todos iguais e a filtração é tal que $T(a_j)V_i(a_j) \subseteq V_i(\tau(a_j))$. $\square$

Capítulo 4

Prova Dinâmica do Teorema Ergódico Multiplicativo

Neste capítulo, veremos uma outra demonstração do Teorema de Oseledec dada por Peter Walters em [20]. A demonstração que daremos aqui será dinâmica, livre de cálculos matriciais, como fez-se necessário no capítulo anterior. A existência dos expoentes de Lyapunov e da filtração associada será feita como no Capítulo 2. A parte mais trabalhosa deste capítulo será mostrarmos que os expoentes de Lyapunov são dados por limites, e isto será feito nos Teoremas 4.3.1 e 4.3.2; neste último, consideraremos uma transformação mensurável em $X \times P(\mathbb{R}^d)$ de tal forma que para a definirmos precisaremos assumir que $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ e $x \mapsto \log^+ \|A_x^{-1}\|$ são integráveis. E como foi visto no capítulo anterior, para demonstrarmos o Teorema Ergódico Multiplicativo, não é necessário supor que $A_x \in \text{Gl}(d, \mathbb{R})$, entretanto, neste caso, $\lambda_{s(x)}$ poderá ser $-\infty$. Denotaremos por $P(\mathbb{R}^d)$ o espaço projetivo, obtido identificando cada elemento neste espaço com uma reta passando pela origem em $\mathbb{R}^d$.

Uma diferença muito importante com relação a demonstração dada no capítulo anterior será a exigência de que o espaço de medida, além de finito, seja completo, isto é, a σ -álgebra deste espaço contém todos os subconjuntos dos conjuntos de medida nula. Entretanto, o fato de assumirmos esta hipótese não torna essa versão

mais fraca que a demonstrada anteriormente, já que todo espaço de medida pode ser completado (ver [17], Proposição 4, página 221).

4.1 Apresentação do Teorema

Denotaremos por $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de probabilidade completo e $T : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável que preserva medida.

Teorema 4.1.1 *Seja $x \mapsto A_x$ uma aplicação mensurável de X em $\text{Gl}(d, \mathbb{R})$ tal que as funções reais*

$$x \mapsto \log^+ \|A_x\|, \quad x \mapsto \log^+ \|(A_x)^{-1}\|$$

são integráveis. Então, existe $Y \in \mathcal{B}$ T -invariante com $m(Y) = 1$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) *existe uma função mensurável $s : Y \rightarrow \mathbb{N}$ com $s \circ T = s$;*

(ii) *para cada $x \in Y$, existem números reais*

$$\lambda_{s(x)}(x) < \lambda_{s(x)-1}(x) < \cdots < \lambda_2(x) < \lambda_1(x),$$

com $\lambda_i(Tx) = \lambda_i(x)$, e a aplicação $x \mapsto \lambda_i(x)$ é mensurável em $\{x \in Y : s(x) \geq i\}$, para todo $i = 1, \dots, s(x)$;

(iii) *para cada $x \in Y$, existem subespaços vetoriais*

$$\{0\} =: V_{s(x)+1}(x) \subset V_{s(x)}(x) \subset \cdots \subset V_2(x) \subset V_1(x) = \mathbb{R}^d$$

tais que $A_x V_i(x) = V_i(Tx)$, e $x \mapsto V_i(x)$ é uma aplicação mensurável de X em $\text{Gr}(\mathbb{R}^d)$, a Grassmaniana de $\mathbb{R}^d$;

(iv) *para todo $x \in Y$, $v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_{T^{n-1}x} \cdots A_{Tx} \cdot A_x v\| = \lambda_i(x),$$

onde $\|\cdot\|$ denota uma norma qualquer em $\mathbb{R}^d$.

Os números $\lambda_i(x)$ são os expoentes de Lyapunov de (T, A) em x . Para simplificarmos a notação, denotaremos para $n > 0$,

$$A_x^n := A_{T^{n-1}x} \cdots A_{Tx} \cdot A_x.$$

Isto é, A_x^n é o cociclo multiplicativo sobre o sistema dinâmico $\{T^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Assim, podemos dizer ainda que os números $\lambda_i(x)$ são os expoentes de Lyapunov associado ao fluxo $\Phi_n(x, v) = (T^n x, A_x^n v)$ no fibrado trivial $X \times \mathbb{R}^d$.

4.2 Prova dos itens (i), (ii) e (iii)

Lema 4.2.1 *Seja $A : X \rightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ uma aplicação tal que $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ é integrável. Definimos*

$$\begin{aligned} \chi : X \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ (x, v) &\longmapsto \chi(x, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\|. \end{aligned}$$

Então,

(i) *existe $X_1 \in \mathcal{B}$ T -invariante, com $m(X_1) = 1$, tal que $\chi(x, v) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, para todo $x \in X_1$, $v \in \mathbb{R}^d$;*

(ii) *$\chi(x, 0) = -\infty$, para todo $x \in X$;*

(iii) *$\chi(x, v) = \chi(x, av)$, para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $v \in \mathbb{R}^d$, $x \in X$;*

(iv) *$\chi(x, v_1 + v_2) \leq \max\{\chi(x, v_1), \chi(x, v_2)\}$, para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d$, $x \in X$;*

(v) *$\chi(Tx, A_x v) = \chi(x, v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^d$, $x \in X$.*

Demonstração: Notemos que, para todo $x \in X$ e $v \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log^+ \|A_{T^i x}\| \|v\|.$$

Como a função $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ é integrável, temos pelo Teorema Ergódico de Birkhoff (Teorema 1.1.2) que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log^+ \|A_{T^i x}\|$$

existe para qtp $x \in X$. Logo, existe $X_1 \in \mathcal{B}$ T -invariante, com $m(X_1) = 1$, tal que $\chi(x, v) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, para todo $v \in \mathbb{R}^d$, $x \in X_1$.

As afirmações (ii), (iii) e (iv) seguem diretamente do Lema 2.1.1. Para a afirmação (v), basta observarmos que

$$\begin{aligned} \chi(Tx, A_x v) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^{n+1} v\| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \log \|A_x^{n+1} v\| = \chi(x, v), \end{aligned}$$

para todo $x \in X$, $v \in \mathbb{R}^d$. □

Corolário 4.2.1 *Usando a notação do Lema 4.2.1, temos:*

- (i) $V_t(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : \chi(x, v) \leq t\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$, para todo $x \in X_1$, $t \in \mathbb{R}$. Além disso, $A_x V_t(x) \subset V_t(Tx)$ e $V_s(x) \subseteq V_t(x)$, se $s \leq t$;
- (ii) para todo $x \in X_1$, $\chi(x, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ assume apenas um número finito, $s(x)$, de valores diferentes $\lambda_{s(x)}(x) < \lambda_{s(x)-1}(x) < \dots < \lambda_1(x)$, onde $\lambda_{s(x)}$ pode ser $-\infty$. Ainda temos que, $s(Tx) \geq s(x)$ e, $\lambda_i(x) \in \{\lambda_j(Tx) : 1 \leq j \leq s(Tx)\}$, para todo $1 \leq i \leq s(x)$;
- (iii) para cada $x \in X_1$, definamos $V_i(x) := V_{\lambda_i(x)}(x)$, $1 \leq i \leq s(x)$. Então,

$$\{0\} =: V_{s(x)+1}(x) \subset V_{s(x)}(x) \subset \dots \subset V_2(x) \subset V_1(x) = \mathbb{R}^d.$$

Além disso, $v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x)$ se, e somente se, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| = \lambda_i(x)$, $1 \leq i \leq s(x)$.

Demonstração: (i) Segue claramente do Lema 4.2.1, itens (iii) e (iv), que $V_t(x)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$, para todo $x \in X_1$, $t \in \mathbb{R}$. Seja $v \in V_t(x)$. Pelo Lema 4.2.1(v), $\chi(Tx, A_x v) = \chi(x, v) \leq t$. Portanto, $A_x V_t(x) \subset V_t(Tx)$. Finalmente, a última afirmação é clara.

(ii) A primeira parte é feita analogamente ao Lema 2.1.2. Como $\chi(x, v) = \chi(Tx, A_x v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^d$, temos que $\lambda_i(x) \in \{\lambda_j(Tx) : 1 \leq j \leq s(Tx)\}$, $1 \leq i \leq s(x)$. Logo, $s(Tx) \geq s(x)$.

(iii) Segue do item anterior. □

Lema 4.2.2 *Usando a notação do Lema 4.2.1, temos que*

- (i) $s : X_1 \longrightarrow \mathbb{N}$ é mensurável e existe $X_2 \in \mathcal{B}$ T -invariante, com $m(X_2) = 1$, tal que $s \circ T = s$ em X_2 ;
- (ii) $\lambda_i : \{x \in X_1 : s(x) \geq i\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ é mensurável e T -invariante em $X_2 \cap \{x \in X_1 : s(x) \geq i\}$;
- (iii) $x \longmapsto V_i(x)$ é uma aplicação mensurável de $\{x \in X_1 : s(x) \geq i\}$ em $\text{Gr}(\mathbb{R}^d)$ e $A_x V_i(x) \subset V_i(Tx)$.

Demonstração: A mensurabilidade das aplicações dadas neste lema será discutida a seguir. Pelo Corolário 4.2.1(ii), $s(Tx) \geq s(x)$, para todo $x \in X_1$. Seja $A = \{x \in X_1 : s(Tx) > s(x)\}$. Afirmamos que A tem medida nula. De fato, suponha que $m(A) > 0$. Assim, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré (Teorema 1.1.1) tem-se que para qtp $x \in A$, $T^n x \in A$, para infinitos $n \geq 1$. Assim, para qtp $x \in A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in A$ e $s(T^n x) > s(x)$, o que contradiz a definição de s . Seja então $X_2 = X_1 \setminus A$.

Assim, as outras afirmações seguem facilmente dos itens (i) e (ii) do Corolário 4.2.1. □

Mensurabilidade

Para mostrarmos a mensurabilidade das aplicações dadas no lema anterior, precisaremos de alguns resultados preliminares. Seja Y um espaço métrico completo e separável. Denotaremos por $\mathcal{P}_K(Y)$ a coleção de todos os subconjuntos compactos e não-vazios de Y . É possível colocarmos uma métrica de Hausdorff neste conjunto de tal forma que o mesmo se torne um espaço métrico completo e separável (ver [5], Capítulo II, Seção 1, página 38). Os próximos resultados serão imprescindíveis na demonstração do Teorema 4.2.3 e encontram-se demonstrados também em [5].

Teorema 4.2.1 *Sejam $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de probabilidade completo e Y um espaço métrico completo e separável. Seja $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{P}_K(Y)$ uma aplicação. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) Γ é mensurável (com a σ -álgebra de Borel em $\mathcal{P}_K(Y)$);
- (ii) para todo aberto U em Y , temos que $\{x \in X : \Gamma(x) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{B}$;
- (iii) existe uma sequência $\{\sigma_n\}$ de aplicações mensuráveis $\sigma_n : X \longrightarrow Y$, com $\sigma_n(x) \in \Gamma(x)$, para todo $x \in X$, e $\Gamma(x) = \overline{\{\sigma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}}$;
- (iv) $\text{Graf}(\Gamma) = \{(x, y) : y \in \Gamma(x)\} \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(Y)$.

Teorema 4.2.2 *Sejam $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de probabilidade completo e Y um espaço métrico completo e separável. Considere $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ a projeção canônica sobre a primeira coordenada. Se $D \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(Y)$, então $\pi(D) \in \mathcal{B}$.*

O teorema que veremos a seguir será decisivo para mostrarmos a mensurabilidade das aplicações dadas no Lema 4.2.2.

Teorema 4.2.3 *Sejam $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de probabilidade completo e $V : X \longrightarrow \text{Gr}(\mathbb{R}^d)$ uma aplicação. Defina $d : X \longrightarrow \mathbb{N}$ por $d(x) = \dim V(x)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) V é uma aplicação mensurável;

(ii) $\{(x, v) : x \in X, v \in V(x)\} \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;

(iii) $\{(x, y) : x \in X, y \in P(V(x))\} \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(P(\mathbb{R}^d))$;

(iv) $x \mapsto P(V(x))$ é uma aplicação mensurável de X em $\mathcal{P}_K(P(\mathbb{R}^d))$;

(v) $d : X \longrightarrow \mathbb{N}$ é mensurável e para cada k , $V_k = V|_{d^{-1}\{k\}} : d^{-1}\{k\} \longrightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ é mensurável;

(vi) $d : X \longrightarrow \mathbb{N}$ é mensurável e para cada k , existem aplicações mensuráveis $v_1, \dots, v_k : d^{-1}\{k\} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tais que, para todo $x \in d^{-1}\{k\}$, $\{v_1(x), \dots, v_k(x)\}$ é uma base ortonormal para $V(x)$;

(vii) $d : X \longrightarrow \mathbb{N}$ é mensurável e para cada k , existe

$$f_k : \{(x, v) : x \in d^{-1}\{k\}, v \in V(x)\} \longrightarrow d^{-1}\{k\} \times \mathbb{R}^k$$

bijeção bimensurável, a qual é linear nas fibras e cobre a aplicação identidade de X ;

(viii) $d : X \longrightarrow \mathbb{N}$ é mensurável e para cada k , existem aplicações mensuráveis $u_1, \dots, u_k : d^{-1}\{k\} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tais que, para todo $x \in d^{-1}\{k\}$, $\{u_1(x), \dots, u_k(x)\}$ é uma base para $V(x)$.

Demonstração: (vi) $\Leftrightarrow$ (viii): Basta usarmos o processo de Gram-Schmidt.

(viii) $\Rightarrow$ (vii): Fixemos $x \in d^{-1}\{k\}$. Então, para todo $v \in V(x)$, existem $\alpha_{1x}, \dots, \alpha_{kx} \in \mathbb{R}$ de modo que $v = \sum_{j=1}^k \alpha_{jx} u_j(x)$. Seja

$$\begin{aligned} f_k : \{(x, v) : x \in d^{-1}\{k\}, v \in V(x)\} &\longrightarrow d^{-1}\{k\} \times \mathbb{R}^k \\ (x, v) &\longmapsto (x, (\alpha_{1x}, \dots, \alpha_{kx})). \end{aligned}$$

Temos que f_k é a aplicação desejada.

(vii) $\Rightarrow$ (viii): Sabemos que, para cada k , existe $f_k : \{(x, v) : x \in d^{-1}\{k\}, v \in V(x)\} \longrightarrow d^{-1}\{k\} \times \mathbb{R}^k$. Como f_k é linear nas fibras (logo, f_k^{-1} também o é), temos que

para todo $x \in d^{-1}\{k\}$, $\{\pi_2 f_k^{-1}(x, e_1), \dots, \pi_2 f_k^{-1}(x, e_k)\}$ gera $V(x)$, onde $\{e_1, \dots, e_k\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^k$ e π_2 é a projeção na segunda coordenada. Portanto, $\{\pi_2 f_k^{-1}(x, e_1), \dots, \pi_2 f_k^{-1}(x, e_k)\}$ é uma base para $V(x)$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv): A aplicação

$$\begin{aligned} \xi : \text{Gr}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathcal{P}_K(P(\mathbb{R}^d)) \\ E &\longmapsto \xi(E) = P(E) \end{aligned}$$

é injetiva e contínua. Portanto, ξ é um homeomorfismo sobre sua imagem. Desse modo, ξ é mensurável. Se V é mensurável, então a aplicação $x \mapsto P(V(x)) = \xi \circ V(x)$ é mensurável. Reciprocamente, se $x \mapsto P(V(x))$ é mensurável, então $V(x) = \xi^{-1}(P(V(x)))$ é mensurável.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): Notemos que $\{(x, y) : x \in X, y \in P(V(x))\} = \text{Graf}(\Gamma)$, onde

$$\begin{aligned} \Gamma : X &\longrightarrow \mathcal{P}_K(P(\mathbb{R}^d)) \\ x &\longmapsto P(V(x)). \end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema 4.2.1, temos que $\text{Graf}(\Gamma) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(P(\mathbb{R}^d))$ se, e somente se, Γ é mensurável.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Seja a aplicação

$$\begin{aligned} f : X \times \text{Gr}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow X \times \mathcal{P}_K(P(\mathbb{R}^d)) \\ (x, E) &\longmapsto f(x, E) = (x, P(E)). \end{aligned}$$

Tem-se que f é contínua e portanto, mensurável. Assim,

$$f^{-1}(\{(x, y) : x \in X, y \in P(V(x))\}) = \{(x, v) : x \in X, v \in V(x)\} \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Queremos mostrar que $\text{Graf}(\Gamma) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(P(\mathbb{R}^d))$, ou seja, pelo Teorema 4.2.1, basta provarmos que para todo aberto U em $P(\mathbb{R}^d)$, temos que $\{x \in X : P(V(x)) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{B}$. Consideremos $\pi_1 : X \times \mathbb{R}^d \longrightarrow X$ a projeção sobre a primeira coordenada e $\pi : \mathbb{R}^d \longrightarrow P(\mathbb{R}^d)$ a projeção canônica. Observemos que

$$\{x \in X : P(V(x)) \cap U \neq \emptyset\} = \pi_1 \left(\{(x, v) : x \in X, v \in V(x)\} \cap (X \times \pi^{-1}(U)) \right).$$

Pela hipótese, temos que $\{(x, v) : x \in X, v \in V(x)\} \cap (X \times \pi^{-1}(U)) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Portanto, pelo Teorema 4.2.2, $\{x \in X : P(V(x)) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{B}$.

(i) $\Rightarrow$ (v): A aplicação

$$\begin{aligned} f : \text{Gr}(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ E &\longmapsto \dim E \end{aligned}$$

é contínua. Logo, como $d = f \circ V$, e V é mensurável, temos que d é mensurável.

Assim, é claro que V_k é mensurável para cada k .

(v) $\Rightarrow$ (i): Seja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Observemos que

$$V^{-1}(A) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (V_k^{-1}(A) \cap d^{-1}\{k\}).$$

Sabemos que, para cada k , $V_k^{-1}(A) \cap d^{-1}\{k\} \in \mathcal{B}$. Logo, $V^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Portanto, V é mensurável.

(v) $\Rightarrow$ (viii): Seja $E \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$. Então, $\mathbb{R}^d = E \oplus E^\perp$ e, dessa forma, existe uma vizinhança $\mathcal{V}(E)$ de E tal que cada $U \in \mathcal{V}(E)$ é o gráfico de uma aplicação linear $L_U : E \longrightarrow E^\perp$. Seja $\{a_1, \dots, a_k\}$ base de E . Então, $\{(a_1, L_U(a_1)), \dots, (a_k, L_U(a_k))\}$ é uma base de U .

Como $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ é compacto, temos que existe uma cobertura finita disjunta $\mathcal{V}(E_1), \dots, \mathcal{V}(E_r)$ deste espaço. Para cada k ,

$$d^{-1}\{k\} = \{x \in X : \dim V(x) = k\} = \{x \in X : V(x) \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d)\}.$$

Seja $x \in d^{-1}\{k\}$. Então, $V(x) \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{V}(E_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}(E_r)$. Logo, $V(x) \subseteq \mathcal{V}(E_i)$, para algum $i = 1, \dots, r$. Daí, existem $\xi_1, \dots, \xi_k : \mathcal{V}(E_i) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ aplicações contínuas tais que $\{\xi_1(V(x)), \dots, \xi_k(V(x))\}$ é uma base para $V(x)$. Tomemos

$$\begin{aligned} u_i : d^{-1}\{k\} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\longmapsto u_i(x) = \xi_i \circ V_k(x). \end{aligned}$$

Pela hipótese, temos que u_i são funções mensuráveis. Além disso, para todo $x \in d^{-1}\{k\}$, $\{u_1(x), \dots, u_k(x)\}$ é uma base para $V(x)$.

(viii) $\Rightarrow$ (v): Seja $x \in d^{-1}\{k\}$. Então, $\{u_1(x), \dots, u_k(x)\}$ é uma base para $V(x)$. Para cada $y \in d^{-1}\{k\}$, existe uma aplicação linear $L_y : V(x) \longrightarrow V(x)^\perp$ com gráfico $V(y)$, dependendo mensuravelmente de y . Dessa forma, V_k é mensurável para todo k . $\square$

De agora em diante, $\{V(x)\}_{x \in X}$ é um *subfibrado mensurável* de $X \times \mathbb{R}^d$ quando uma, e portanto todas, das afirmações do Teorema 4.2.3 são válidas.

Sejam $\{U(x)\}_{x \in X}$, $\{V(x)\}_{x \in X}$ subfibrados mensuráveis de $X \times \mathbb{R}^d$ com $U(x) \subset V(x)$. Se $W(x)$ é o complemento ortogonal de $U(x)$ em $V(x)$, ou seja, $V(x) = U(x) \oplus W(x)$, então $\{W(x)\}_{x \in X}$ é subfibrado mensurável. Para vermos isto, basta notarmos que a afirmação (vi) é satisfeita para $W(x)$.

Estamos aptos a demonstrar a mensurabilidade das aplicações dadas no Lema 4.2.2.

Continuação da prova do Lema 4.2.2: Desde que a aplicação $x \mapsto A_x \in \text{Gl}(d, \mathbb{R})$ é mensurável, temos que a aplicação $\chi : X \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ dada no Lema 4.2.1 é mensurável. Assim, $\lambda_1(x) = \sup \{\chi(x, v) : v \in \mathbb{R}^d\} = \max \{\chi(x, e_i) : 1 \leq i \leq d\}$ é mensurável. Consideremos $\Lambda_2 = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d : \chi(x, v) < \lambda_1(x)\} \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Seja $\pi_1 : X \times \mathbb{R}^d \longrightarrow X$ a projeção sobre a primeira coordenada. Então, pelo Teorema 4.2.2, $\pi_1(\Lambda_2) \in \mathcal{B}$. Entretanto, $\pi_1(\Lambda_2) = \{x \in X : s(x) > 1\}$. Seja a aplicação $x \mapsto \pi_1^{-1}\{x\} \cap \Lambda_2$ em $\pi_1(\Lambda_2)$. Pelo Teorema 4.2.3, existem aplicações mensuráveis $d : \pi_1(\Lambda_2) \longrightarrow \mathbb{N}$ e $u_1, \dots, u_k : d^{-1}\{k\} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tais que, para todo $x \in d^{-1}\{k\}$, $\{u_1(x), \dots, u_k(x)\}$ é uma base para $\pi_1^{-1}\{x\} \cap \Lambda_2$. Desse modo, $\lambda_2(x) = \sup \{\chi(x, v) : (x, v) \in \Lambda_2\} = \max \{\chi(x, u_i(x)) : 1 \leq i \leq k\}$ é mensurável. Seja $\Lambda_3 = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d : \chi(x, v) < \lambda_2(x)\}$. É claro que $\Lambda_3 \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Assim, novamente pelo Teorema 4.2.2, $\{x \in X : s(x) > 2\} = \pi_2(\Lambda_3) \in \mathcal{B}$. Repetindo esse processo, é possível mostrarmos que $s : X \longrightarrow \mathbb{N}$ e $\lambda_i : \{x : s(x) \geq i\} \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável para cada i . Observemos ainda que, para cada i ,

$$\{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d : x \in X, v \in V_i(x)\} = \{(x, v) : \chi(x, v) \leq \lambda_i(x)\} \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

já que χ e λ_i são mensuráveis. Portanto, pelo Teorema 4.2.3, $x \mapsto V_i(x)$ é mensurável. $\square$

4.3 Existência do limite em (iv)

Para concluirmos a demonstração do Teorema de Oseledec basta garantirmos a existência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\|.$$

Nesta seção, assumiremos que m é uma medida T -ergódica; isto pode ser feito pois é suficiente mostrarmos o limite acima supondo que m é uma medida ergódica. De fato, assumindo este fato, consideremos o seguinte subconjunto mensurável de $X \times \mathbb{R}^d$

$$\Delta = \left\{ (x, v) \in X \times \mathbb{R}^d : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| \text{ existe} \right\}.$$

Seja $X' := \pi_1(\Delta) \setminus \pi_1(\pi_1^{-1}\pi_1(\Delta) \setminus \Delta) = \{x \in X : \{x\} \times \mathbb{R}^d \subset \Delta\}$, onde $\pi_1 : X \times \mathbb{R}^d \rightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada. Observemos pelo Teorema 4.2.2 que $X' \in \mathcal{B}$ e, além disso, $m(X') = 1$. Portanto, dada uma medida μ T -invariante, podemos escrever μ como uma combinação linear convexa de medidas ergódicas m_i , $i = 1, \dots, r$, ou seja, existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mu = \sum_{i=1}^r \lambda_i m_i,$$

com $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$. Logo, como $m_i(X') = 1$, para todo i , temos que $\mu(X') = 1$.

O principal objetivo agora é reduzir nosso problema a um caso especial provando o Teorema 4.3.1. Antes precisaremos de um lema que será muito útil na demonstração de tal teorema.

Lema 4.3.1 *Considere $T : X \rightarrow X$ uma transformação ergódica e $x \mapsto A_x$ uma aplicação mensurável de X em $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ tal que $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ é integrável. Suponha*

que $\{U(x)\}_{x \in X}$ é um subfibrado mensurável de $X \times \mathbb{R}^d$ com $A_x U(x) \subset U(Tx)$. Então, o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| A_x^n|_{U(x)} \right\|$$

existe e é constante qtp, mas pode ser $-\infty$.

Além disso, suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| A_x^n|_{U(x)} \right\| \leq \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$. Para $\varepsilon > 0$, definimos

$$a_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \left(\left\| A_x^n|_{U(x)} \right\| e^{-n(\rho+\varepsilon)} \right).$$

Então, $\frac{1}{n} \log a_\varepsilon(T^n x) \longrightarrow 0$ qtp.

Demonstração: A primeira parte segue diretamente da Proposição 3.2.1. Para mostrarmos a última parte, basta observarmos que, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| A_x^n|_{U(x)} \right\| \leq \rho$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $n \geq n_0$,

$$\left\| A_x^n|_{U(x)} \right\| e^{-n(\rho+\varepsilon)} \leq 1.$$

Seja $\bar{n} \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$ tal que

$$\left\| A_x^{\bar{n}}|_{U(x)} \right\| e^{-\bar{n}(\rho+\varepsilon)} = \max_{i=1, \dots, n_0-1} \left(\left\| A_x^i|_{U(x)} \right\| e^{-i(\rho+\varepsilon)} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(x) &\leq \max \left\{ \left\| A_x^{\bar{n}}|_{U(x)} \right\| e^{-\bar{n}(\rho+\varepsilon)}, 1 \right\} \\ \log a_\varepsilon(x) &\leq \max \left\{ \log^+ \left\| A_x^{\bar{n}}|_{U(x)} \right\| - \bar{n}(\rho + \varepsilon), 0 \right\} \end{aligned}$$

O lado direito da última desigualdade é integrável, portanto $\log a_\varepsilon(\cdot) \in L^1$. Assim, pelo Corolário 1.1.2 do Teorema Ergódico de Birkhoff, temos que

$$\frac{1}{n} \log a_\varepsilon(T^n x) \longrightarrow 0 \text{ qtp.}$$

□

Teorema 4.3.1 *Seja $T : X \longrightarrow X$ uma transformação ergódica. Considere a aplicação A de X em $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ tal que $x \longmapsto \log^+ \|A_x\|$ é integrável. Sejam $\{U(x)\}_{x \in X}$, $\{V(x)\}_{x \in X}$ subfibrados mensuráveis de $X \times \mathbb{R}^d$ tais que $U(x) \subset V(x)$, $A_x U(x) \subset U(Tx)$ e $A_x V(x) \subset V(Tx)$, para todo $x \in X$. Sejam $Y \in \mathcal{B}$ o conjunto T -invariante, com $m(Y) = 1$, e $\rho, \lambda \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n u\| \leq \rho$$

e

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| = \lambda,$$

para todo $u \in U(x) \setminus \{0\}$, $v \in V(x) \setminus U(x)$, $x \in Y$. Suponha que $\rho < \lambda$. Seja $\{W(x)\}_{x \in X}$ o subfibrado mensurável tal que $V(x) = U(x) \oplus W(x)$. Sejam as funções lineares

$$C_x : W(x) \longrightarrow W(Tx) \text{ e } B_x : W(x) \longrightarrow U(Tx),$$

tais que para $w \in W(x)$, $A_x(w) = B_x(w) \oplus C_x(w)$. Então, existe $Y' \in \mathcal{B}$ conjunto T -invariante, com $m(Y') = 1$, tal que para cada $x \in Y'$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\|,$$

para todo $w \in W(x) \setminus \{0\}$, $u \in U(x)$. Além disso, se existem $w \in W(x) \setminus \{0\}$ e $x \in Y'$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\|$ existe, então o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\|$ existe, para todo $u \in U(x)$, e é igual a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\|$.

Demonstração: Consideremos $u \in U(x)$ e $w \in W(x)$. Observemos que

$$A_x^n(u \oplus w) = [A_x^n u + D_x^{(n)} w] \oplus C_x^n w,$$

onde $D_x^{(n)} : W(x) \longrightarrow U(T^n x)$ é dado por $D_x^{(n)} w = \sum_{i=0}^{n-1} A_{T^{i+1}x}^{n-i-1} B_{T^i x} C_x^i w$. Pelo Lema 2.1.1(iii),

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\|^2 = \\ & \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n u + D_x^{(n)} w\|^2, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

para todo $u \in U(x)$, $w \in W(x)$. Fazendo $u = 0$ e $w \neq 0$ em (4.1), temos

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n w\| = \\ & \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x^{(n)} w\|, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Seja $\varepsilon > 0$. Considere

$$a_\varepsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \left(\left\| A_x^n|_{U(x)} \right\| e^{-n(\rho+\varepsilon)} \right).$$

Tomemos (ε_k) uma sequência tal que $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Assim, usando o Lema 4.3.1 e o Corolário 1.1.2, segue que, para cada k , existe $Y_k \subset Y$ com $m(Y_k) = 1$ tal que, para todo $x \in Y_k$,

$$\frac{1}{n} \log a_{\varepsilon_k}(T^n x) \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{n} \log^+ \|A_{T^n x}\| \rightarrow 0.$$

Mostraremos agora que, para todo $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k$ e $w \neq 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n w\|.$$

Suponha que existem $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k$ e $w \neq 0$ tais que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \tau < \lambda' = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n w\|.$$

Seja k tal que $\max\{\tau, \rho\} + \varepsilon_k < \lambda'$. Então, existe $n_0(x, w, k)$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\|C_x^n w\| < e^{n(\tau+\varepsilon_k)}. \quad (4.3)$$

Observemos ainda que

$$\begin{aligned} \|D_x^{(n)} w\| & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|A_{T^{i+1}x}^{n-i-1}\| \|B_{T^i x}\| \|C_x^i w\| \\ & \leq n \max \{ \|A_{T^{i+1}x}^{n-i-1}\| \|B_{T^i x}\| \|C_x^i w\| : 0 \leq i \leq n-1 \} \\ & = n \|A_{T^{i_n+1}x}^{n-i_n-1}\| \|B_{T^{i_n} x}\| \|C_x^{i_n} w\|, \end{aligned}$$

para algum $0 \leq i_n(x, w) \leq n - 1$. Obviamente, (i_n) é uma sequência crescente. Assim, se (i_n) é ilimitada temos que, para n suficientemente grande, $i_n \geq n_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \|D_x^{(n)} w\| &\leq \frac{1}{n} \log n + \frac{1}{1 + i_n} \log a_{\varepsilon_k}(T_x^{1+i_n}) + \frac{n-1}{n}(\rho + \varepsilon_k) \\ &+ \frac{n-1}{n}(\max\{\tau, \rho\} - \rho) + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{i_n} \log^+ \|A_{T_x^{i_n}}\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x^{(n)} w\| \leq \max\{\tau, \rho\} + \varepsilon_k < \lambda' = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n w\|,$$

contradizendo a equação (4.2).

Se, por outro lado, (i_n) é limitada, ou seja, $i_n \leq M$ para todo n , então

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \|D_x^{(n)} w\| &\leq \frac{1}{n} \log n + \frac{1}{n} \log \|A_{T_{i_n+1}^x}^{n-i_n-1}\| + \frac{1}{n} \log \|B_{T^{i_n} x}\| + \frac{1}{n} \log \|C_x^{i_n} w\| \\ &\leq \frac{1}{n} \log n + \max \left\{ \frac{1}{n} \log \|A_{T^{i+1} x}^{n-i-1}\| : 0 \leq i \leq M \right\} \\ &+ \max \left\{ \frac{1}{n} \log \|B_{T^i x}\| : 0 \leq i \leq M \right\} \\ &+ \max \left\{ \frac{1}{n} \log \|C_x^i w\| : 0 \leq i \leq M \right\}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x^{(n)} w\| \leq \rho < \max\{\tau, \rho\} + \varepsilon_k < \lambda',$$

contradizendo a equação (4.2).

Portanto, para todo $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k \equiv Y'$ e $w \in W(x) \setminus \{0\}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n w\|.$$

Assim, usando o fato que $\rho < \lambda$, a equação (4.1) torna-se

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\| \\
&= \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n u + D_x^{(n)} w\|, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| \right\} \\
&= \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n u\|, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x^{(n)} w\|, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| \right\} \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\|,
\end{aligned}$$

para todo $x \in Y'$, $u \in U(x)$ e $w \in W(x) \setminus \{0\}$.

Suponhamos agora que existem $w \in W(x) \setminus \{0\}$ e $x \in Y'$ tais que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\|$$

existe. Assim,

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\| \\
&\geq \max \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n u + D_x^{(n)} w\|, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| \right\} \\
&\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\|.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $u \in U(x)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\|.$$

□

Façamos, para cada i fixado, $U(x) = V_{i+1}(x)$ e $V(x) = V_i(x)$ no Teorema 4.3.1. Seja $W_i(x)$ o complemento ortogonal de $V_{i+1}(x)$ em $V_i(x)$. Dessa forma, considere-mos a seguinte aplicação

$$C_x : W_i(x) \longrightarrow W_i(Tx),$$

como no Teorema 4.3.1. Pelo Corolário 4.2.1, temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n w\| = \lambda_i(x),$$

para todo $w \in W(x) \setminus \{0\}$. Assim, ainda pelo Teorema 4.3.1, para todo $w \in W(x) \setminus \{0\}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \lambda_i(x). \quad (4.4)$$

Se substituirmos o “limite superior” por “limite” em (4.4), temos pela última parte do Teorema 4.3.1 que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\|$ existe, para todo $v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x)$. Dessa forma, podemos reduzir nosso problema considerando, para cada i , uma família $\{C_x\}$ para a qual o limite superior toma o mesmo valor em todos os vetores não-nulos. Para lidarmos com este caso, consideraremos a aplicação induzida por A_x no espaço projetivo $P(\mathbb{R}^d)$. Para definirmos tal aplicação precisaremos que cada A_x seja invertível e, de fato, é suficiente mostrarmos o Teorema de Oseledec neste caso, desde que $\log^+ \|A_x\|$ seja integrável, como mostra o seguinte lema.

Corolário 4.3.1 *Seja T uma transformação ergódica. Para provar o Teorema de Oseledec para o caso em que $A_x \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ e $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ é integrável, é suficiente prová-lo para o caso em que $A_x \in \text{Gl}(d, \mathbb{R})$ qtp e $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ é integrável.*

Demonstração: Se $A_x \notin \text{Gl}(d, \mathbb{R})$, então $A_x v = 0$, para algum $v \neq 0$. Assim, $\lambda_{s(x)} = -\infty$. Se isto ocorre em um subconjunto de medida positiva, então $\lambda_{s(x)} = -\infty$ qtp. Seja o subfibrado mensurável $\{W(x)\}_{x \in X}$ dado por $W(x) = V_{s(x)}(x)^\perp$ de modo que $V_1(x) = \mathbb{R}^d = V_{s(x)}(x) \oplus W(x)$. Logo, a aplicação

$$C_x : W(x) \longrightarrow W(Tx),$$

dada pelo Teorema 4.3.1, é a projeção ortogonal de $A_x w$ sobre $W(Tx)$, para $w \in W(x)$. Notemos que a aplicação $x \mapsto \log^+ \|C_x\|$ é integrável. De fato, para todo $w \in W(x) \setminus \{0\}$, temos

$$\|C_x(w)\| \leq \|A_x\| \|w\|,$$

isto é, $\|C_x\| \leq \|A_x\|$. Logo,

$$\log^+ \|C_x\| \leq \log^+ \|A_x\|.$$

Visto que a aplicação $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ é integrável, concluímos que $x \mapsto \log^+ \|C_x\|$ é integrável. Além disso, C_x é invertível para cada $x \in X$. De fato, pelo Teorema 4.3.1, temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\|,$$

para todo $w \in W(x) \setminus \{0\}$, $u \in V_{s(x)}(x)$ e para qtp $x \in X$. Logo, $u \oplus w \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x)$, para algum $i = 1, \dots, s(x) - 1$. Assim, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n(u \oplus w)\| = \lambda_i(x) \neq -\infty$. Então, se $C_x w = 0$, tem-se que $w = 0$. Portanto, C_x é invertível. Ainda temos que os expoentes de Lyapunov para a aplicação $x \mapsto C_x$ são $\lambda_{s(x)-1}(x) < \dots < \lambda_1(x)$ e $V_{s(x)-1}(x) \cap W(x) \subset \dots \subset V_1(x) \cap W(x)$ é a respectiva filtração. Suponha que provamos o Teorema 4.1.1 para $x \mapsto C_x$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \lambda_j(x)$$

para qtp $x \in X$ e todo $w \in (V_j(x) \cap W(x)) \setminus (V_{j+1}(x) \cap W(x)) = (V_j(x) \setminus V_{j+1}(x)) \cap W(x)$. Daí, pela última parte do Teorema 4.3.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\|,$$

para qtp $x \in X$ e todo $v \in V_j(x) \setminus V_{j+1}(x)$. Então, o Teorema de Oseledec é válido para $x \mapsto A_x \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$. $\square$

Dessa forma, assumiremos, a partir de agora, que $A_x \in \text{Gl}(d, \mathbb{R})$ para todo $x \in X$. Definamos

$$\varphi : (x, l) \in X \times P(\mathbb{R}^d) \mapsto \varphi(x, l) = \log \frac{\|A_x \tilde{u}\|}{\|\tilde{u}\|}, \quad (4.5)$$

onde $\tilde{u}$ é um vetor não nulo em l . Tal função é mensurável e, além disso, para cada $x \in X$, a aplicação parcial $\varphi_x : l \in P(\mathbb{R}^d) \mapsto \varphi_x(l) = \varphi(x, l)$ é contínua, visto que $\varphi_x \circ \pi$ é contínua, onde $\pi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}^d)$ é a projeção canônica.

Seja

$$\Phi : x \in X \mapsto \Phi(x) = \sup \{ \varphi(x, l) : l \in P(\mathbb{R}^d) \}.$$

Observemos que $\Phi(x) = \log \|A_x\|$. Desse modo, $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ é integrável se, e somente se, Φ^+ é integrável.

Definamos

$$S : (x, l) \in X \times P(\mathbb{R}^d) \mapsto S(x, l) = (Tx, A_x l) \in X \times P(\mathbb{R}^d),$$

onde $A_x : P(\mathbb{R}^d) \rightarrow P(\mathbb{R}^d)$ é o homeomorfismo induzido por $A_x : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ e, sem perda de generalidade, consideraremos a mesma notação para as duas aplicações.

Seja $\tilde{u} \neq 0$ em $l \in P(\mathbb{R}^d)$. Então,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, l)) = \log \|A_x^n \tilde{u}\| - \log \|\tilde{u}\|.$$

Desse modo,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, l)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n \tilde{u}\|. \quad (4.6)$$

Definição 4.3.1 *Sejam $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de probabilidade e E um espaço de Banach separável com espaço dual E^* . Definimos $L_m^1 = L_m^1(X, E)$ como sendo o conjunto de todas as m -classes de equivalência das funções $f : X \rightarrow E$ mensuráveis tais que $\int \|f(x)\| dm(x) < \infty$. Duas funções são m -equivalentes se são iguais m -qtp.*

Temos que $(L_m^1(X, E), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, onde

$$\|\cdot\| : f \in L_m^1(X, E) \mapsto \|f\| = \int \|f(x)\| dm(x).$$

Observemos que até agora quando nos referíamos aos espaços L^p , estávamos considerando $E = \mathbb{R}$.

Definição 4.3.2 *Sejam $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de probabilidade e E um espaço de Banach separável com espaço dual E^* . Definimos $L_m^\infty = L_m^\infty(X, E^*)$ como sendo o conjunto de todas as m -classes de equivalência das funções $\gamma : X \rightarrow E^*$ tais que $x \mapsto \gamma_x(v)$ é limitada e mensurável para cada $v \in E$. Duas funções $\gamma^{(1)}$ e $\gamma^{(2)}$ são m -equivalentes se as funções $x \mapsto \gamma_x^{(1)}(v)$ e $x \mapsto \gamma_x^{(2)}(v)$ são iguais m -qtp para todo $v \in E$.*

Da Análise Funcional é sabido que $L_m^\infty(X, E^*)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$ dada por

$$\|\cdot\|_\infty : \gamma \in L_m^\infty(X, E^*) \longmapsto \|\gamma\|_\infty = \text{ess.sup.} \|\gamma_x\|,$$

onde $\text{ess.sup.} \|\gamma_x\| := \inf \{ \sup \{ \|\gamma_x\| : x \notin N \} : N \in \mathcal{B}, m(N) = 0 \}$. Além disso, temos que $\|\gamma\|_\infty < \infty$, para todo $\gamma \in L_m^\infty$. De fato, seja $N \in \mathcal{B}$ tal que $m(N) = 0$. Pela própria definição de L_m^∞ , temos que $\sup_{x \in X \setminus N} |\gamma_x(v)| < \infty$, para cada $v \in E$. O *Princípio da Limitação Uniforme* (ver [22], Teorema 1, página 68) afirma que, dados E um espaço de Banach, F um espaço vetorial normado e $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}(E, F)$, onde I é um conjunto de índices quaisquer tais que $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < \infty$ para cada $x \in E$, então $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E, F)} < \infty$. Assim,

$$\sup_{x \in X \setminus N} \|\gamma_x\| < \infty.$$

Logo, $\|\gamma\|_\infty < \infty$. Desse modo, a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : L_m^\infty(X, E^*) &\longrightarrow (L_m^1(X, E))^* \\ \gamma &\longmapsto \Psi\gamma : f \in L_m^1(X, E) \longmapsto (\Psi\gamma)(f) = \int \gamma_x(f_x) dm(x) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico (ver [3]).

O caso que nos interessa é quando $E = \mathcal{C}(P; \mathbb{R}) = \{f : P \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$, onde P é um espaço métrico compacto. Seja $\mathcal{M}(P)$ o espaço de todas as medidas em P definidas sobre $\mathcal{B}(P)$, a σ -álgebra de Borel em P , com norma dada por

$$\|\mu\| = \mu(P),$$

para toda medida $\mu \in \mathcal{M}(P)$. Consideremos ainda $M(P)$ como sendo o espaço de todas as probabilidades em P . Um resultado decorrente do *Teorema de Representação de Riesz* (ver [17], Corolário 9, página 311) afirma que o espaço dual $\mathcal{C}(P; \mathbb{R})^*$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{M}(P)$.

Seja

$$L_m(M(P)) = \{\alpha : X \longrightarrow M(P) : \alpha \text{ é mensurável}\}.$$

Dado $\alpha \in L_m(M(P))$, temos que, para cada $x \in X$, $\alpha_x := \alpha(x) \in M(P)$. Visto que $M(P)$ é um subconjunto de $\mathcal{M}(P)$, usando a identificação $\mathcal{C}(P; \mathbb{R})^* \approx \mathcal{M}(P)$, temos que, para cada $x \in X$, associamos o seguinte funcional linear em $\mathcal{C}(P; \mathbb{R})$

$$f \in \mathcal{C}(P; \mathbb{R}) \mapsto F(f) = \int_P f d\alpha_x.$$

Dessa forma, para cada $f \in \mathcal{C}(P; \mathbb{R})$, a aplicação $x \mapsto \int_P f d\alpha_x$ é limitada, visto que P é um espaço métrico compacto e α_x é uma probabilidade. Assim, temos que $L_m(M(P)) \subset L_m^\infty(X, \mathcal{C}(P; \mathbb{R}))$. Na verdade, ainda temos que $L_m(M(P))$ é um subconjunto fechado em $L_m^\infty(X, \mathcal{C}(P; \mathbb{R}))$ com relação a topologia fraca*. De fato, seja (α_n) uma sequência em $L_m(M(P))$ tal que $\alpha_n \xrightarrow{w^*} \alpha$, onde w^* denota a convergência fraca* em $L_m^\infty(X, \mathcal{C}(P; \mathbb{R}))$. Logo, $\alpha_n(x) \rightarrow \alpha(x)$, para todo $x \in X$. Assim, $\|\alpha_n(x)\| \rightarrow \|\alpha(x)\|$, para todo x ; entretanto, para cada $n \geq 1$, $\|\alpha_n(x)\| = 1$. Assim, $\alpha(x) \in M(P)$, para todo $x \in X$. Além disso, como o limite da sequência de funções mensuráveis é mensurável, concluímos que $\alpha \in L_m(M(P))$.

Dado $\alpha \in L_m(M(P))$, α_x é uma probabilidade, para cada $x \in X$. Assim, concluímos que $L_m(M(P))$ é um subconjunto fechado contido na esfera unitária em $L_m^\infty(X, \mathcal{C}(P; \mathbb{R}))$. Como a bola fechada unitária é compacta na topologia fraca* (ver [12], Teorema 3, página 120), temos que $L_m(M(P))$ é compacto.

Seja $M_m(X \times P)$ o conjunto das probabilidades μ em $X \times P$ tais que a projeção de μ em X é m . Podemos identificar tal conjunto com $L_m(M(P))$ através da aplicação $\alpha \in L_m(M(P)) \mapsto \bar{\alpha} \in M_m(X \times P)$ de tal forma que

$$\int_{X \times P} f_x(y) d\bar{\alpha}(x, y) = \int_X \left(\int_P f_x(y) d\alpha_x(y) \right) dm(x),$$

onde $x \mapsto f_x$ está em $L_m^1(X, \mathcal{C}(P; \mathbb{R}))$.

A aplicação $\varphi : X \times P(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, definida em (4.5), induz a seguinte função

$$\psi : x \in X \mapsto \psi(x) = \varphi_x \in \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d); \mathbb{R}),$$

onde φ_x é a aplicação parcial de φ .

Já vimos que $\sup \{\varphi(x, l) : l \in P(\mathbb{R}^d)\} = \log \|A_x\|$. Notemos que

$$\inf \{\varphi(x, l) : l \in P(\mathbb{R}^d)\} = -\log \|A_x^{-1}\|.$$

Assim, $\varphi \in L_m^1(X, \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^d); \mathbb{R}))$ se, e somente se, $x \mapsto \log \|A_x\|$ e $x \mapsto \log \|A_x^{-1}\|$ são integráveis; ou equivalentemente, se, e só se, $x \mapsto \log^+ \|A_x\|$ e $x \mapsto \log^+ \|A_x^{-1}\|$ são integráveis. Por este motivo, precisaremos da integrabilidade dessas duas condições na última parte da prova.

Seja S uma transformação mensurável de $X \times P$ cobrindo T , isto é, $\pi_1 S(x, u) = T(x)$, onde $\pi_1 : X \times P \rightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada. Denotaremos por $M_m(X \times P, S)$ o subconjunto de $M_m(X \times P)$ formado pelas probabilidades S -invariantes de $X \times P$.

Teorema 4.3.2 *Seja $(X, \mathcal{B}, m)$ um espaço de probabilidade. Consideremos $T : X \rightarrow X$ uma transformação ergódica. Sejam P um espaço métrico compacto e $S : X \times P \rightarrow X \times P$ uma aplicação mensurável dada por $S(x, u) = (Tx, S_x u)$, onde, para cada $x \in X$, a aplicação $S_x : P \rightarrow P$ é contínua. Consideremos ainda a função $\varphi : X \times P \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável tal que, para cada $x \in X$, $\varphi_x \equiv \varphi(x, \cdot) : P \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Se $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\Phi(x) = \sup \{\varphi(x, u) : u \in P\}$ e é tal que $\Phi^+ \in L_m^1$, então para m -qtp $x \in X$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in P} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) = \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \mu \in M_m(X \times P, S) \right\}.$$

Demonstração: Sabemos da Proposição 1.1.2 que os pontos extremais do conjunto convexo $M_m(X \times P, S)$ são as medidas ergódicas deste.

Como $\varphi : X \times P \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e $\varphi(x, \cdot) : P \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua para cada $x \in X$, temos que a aplicação $x \mapsto \sup_{u \in P} \varphi(x, u)$ é mensurável. De fato, visto que P é um espaço métrico compacto, temos que P é separável. Então,

$$\sup_{u \in P} \varphi(x, u) = \sup_{n \geq 1} \varphi(x, u_n).$$

Dessa forma, temos que a aplicação $x \mapsto \sup_{u \in P} \varphi(x, u)$ é mensurável. Seja

$$M_n(x) = \sup_{u \in P} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)).$$

Logo, M_n é mensurável e $M_1^+(x) = \Phi^+(x) \in L_m^1$. Além disso, $M_{m+n}(x) \leq M_m(x) + M_n(T^m(x))$. Assim, pelo Teorema Ergódico Subaditivo, existe uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ T -invariante tal que $f^+ \in L^1(X)$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M_n(x) = f(x),$$

para qtp $x \in X$. Assim, como T é ergódica e f é T -invariante, temos que f é uma função constante pela Proposição 1.1.1. Sejam $c := f(x)$, para quase todo $x \in X$, e

$$b := \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \mu \in M_m(X \times P, S) \right\}.$$

Queremos mostrar que $c = b$. Notemos que c, b podem ser $-\infty$. Mostremos primeiramente que $c \geq b$. De fato, suponha que $b \neq -\infty$ (se $b = -\infty$, não há nada para provar). Então, para cada $\varepsilon > 0$, podemos tomar uma medida ergódica $\mu_\varepsilon \in M_m(X \times P, S)$ tal que

$$\int \varphi d\mu_\varepsilon > b - \varepsilon.$$

Como μ_ε é ergódica, temos pela Proposição 1.1.3 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) = \int \varphi d\mu_\varepsilon,$$

para qtp $(x, u) \in X \times P$. Entretanto, para todo $u \in P$,

$$M_n(x) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)).$$

Assim,

$$b - \varepsilon < \int \varphi d\mu_\varepsilon \leq c.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $b \leq c$. Resta mostrarmos então que $c \leq b$. Consideremos, para cada $n \geq 1$, o conjunto

$$\Delta_n = \left\{ (x, u) \in X \times P : \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) = M_n(x) \right\}.$$

É claro que $\Delta_n \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(P)$. Além disso, temos que $\pi_1(\Delta_n) = X$, onde $\pi_1 : X \times P \rightarrow X$ é a projeção na primeira coordenada, e o conjunto $\{u \in P : (x, u) \in \Delta_n\}$ é fechado para cada $x \in X$, visto que as aplicações $S_x : P \rightarrow P$ e $\varphi_x : P \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas para todo $x \in X$. Assim, como P é um espaço compacto, temos que $\{u \in P : (x, u) \in \Delta_n\}$ é compacto. Consideremos a seguinte aplicação

$$\Gamma : x \in X \mapsto \{u \in P : (x, u) \in \Delta_n\} \in \mathcal{P}_K(P).$$

Como P é um espaço métrico compacto, temos que P é completo e separável. Além disso, é fácil verificarmos que

$$\text{Graf}(\Gamma) = \Delta_n \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(P).$$

Assim, pelo Teorema 4.2.1, existe uma sequência (ω_k) de aplicações mensuráveis $\omega_k : X \rightarrow P$, com $\omega_k(x) \in \Gamma(x)$, para todo $x \in X$, ou seja, $(x, \omega_k(x)) \in \Delta_n$, para todo $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}$. Particularmente, quando $k = n$, tem-se que $(x, \omega_n(x)) \in \Delta_n$, para todo $x \in X$. Logo,

$$M_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, \omega_n(x))).$$

Considere, para cada $n \geq 1$, o funcional linear α_n em $L_m^1(X, \mathcal{C}(P; \mathbb{R}))$ dado por

$$\psi \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \psi S^i(x, \omega_n(x)) dm(x).$$

Observemos que $\alpha_n \in L_m(M(P))$. Como $L_m(M(P))$ é compacto com relação à topologia fraca* em L_m^∞ , temos que existe (α_{n_j}) subsequência de (α_n) tal que $\alpha_{n_j} \xrightarrow{w^*} \alpha \in L_m(M(P))$. Visto que $L_m(M(P)) \approx M_m(X \times P)$, seja $\bar{\alpha} \in M_m(X \times P)$ a medida correspondente a α em $L_m(M(P))$. Assim, para todo $\psi \in L_m^1$,

$$\int \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} \psi S^i(x, \omega_{n_j}(x)) dm(x) \rightarrow \int \psi d\bar{\alpha}. \quad (4.7)$$

Seja $\varphi_N = \max\{\varphi, -N\}$, $N \geq 1$. É claro que $\varphi_N \in L_m^1$. Observemos que

$$M_{n_j}(x) = \sum_{i=0}^{n_j-1} \varphi(S^i(x, \omega_{n_j}(x))) \leq \sum_{i=0}^{n_j-1} \varphi_N(S^i(x, \omega_{n_j}(x))).$$

Fazendo $j \rightarrow \infty$, temos por (4.7) que, para todo $N \geq 1$,

$$c \leq \int \varphi_N d\bar{\alpha}.$$

Dessa maneira, concluimos que $c \leq \int \varphi d\bar{\alpha}$. Afirmamos que $\bar{\alpha} \in M_m(X \times P, S)$. De fato, temos que para $\psi \in L_m^1$

$$\begin{aligned} \left| \int \psi \circ S d\bar{\alpha} - \int \psi d\bar{\alpha} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j} \left| \int \left[\psi S^{n_j}(x, \omega_{n_j}(x)) - \psi(x, \omega_{n_j}(x)) \right] dm(x) \right| \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2}{n_j} \int \|\psi(x, \cdot)\| dm(x) = 0. \end{aligned}$$

Assim, sejam $A \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}(P)$. Então,

$$\int_{S^{-1}(A)} \psi d\bar{\alpha} = \int_A \psi \circ S d\bar{\alpha} = \int_A \psi d\bar{\alpha}.$$

Tomando $\psi \equiv 1$, temos que

$$\bar{\alpha}(S^{-1}(A)) = \bar{\alpha}(A).$$

Portanto, $\bar{\alpha} \in M_m(X \times P, S)$. E assim, $c \leq \int \varphi d\bar{\alpha} \leq b$, isto é, $c = b$. □

Corolário 4.3.2 *Além das hipóteses do Teorema 4.3.2, assuma que*

$$\int \varphi d\mu = b,$$

para todo $\mu \in M_m(X \times P, S)$, e que a aplicação $x \mapsto \inf_{u \in P} \varphi(x, u)$ está em L_m^1 . Então, para m -qtp $x \in X$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) \longrightarrow b$$

uniformemente em $u \in P$.

Demonstração: Pelo Teorema 4.3.2, temos que existe $A \in \mathcal{B}$ com $m(A) = 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in P} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) = b,$$

para todo $x \in X \setminus A$. Aplicando o Teorema 4.3.2 a $(-\varphi)$, temos que existe $B \in \mathcal{B}$ com $m(B) = 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in P} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) = b,$$

para todo $x \in X \setminus B$. É claro que $m(A \cup B) = 0$. Então, para todo $x \notin A \cup B$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) \longrightarrow b,$$

uniformemente em $u \in P$. □

Finalmente, vamos concluir a prova do Teorema de Oseledec. Como, para cada $x \in X$, $A_x \in \text{Gl}(d, \mathbb{R})$, temos que $\lambda_{s(x)} \neq -\infty$ qtp. Segue do Lema 4.2.2 e da Proposição 1.1.1 que, existe $X_3 \in \mathcal{B}$, T -invariante com $m(X_3) = 1$, tal que as aplicações

$$x \longmapsto s(x)$$

$$x \longmapsto \lambda_i(x)$$

$$x \longmapsto \dim V_i(x)$$

são constantes para cada i . Ainda pelo Lema 4.2.2(iii), temos que a aplicação

$$x \in X_3 \longmapsto V_i(x) \in \text{Gr}(\mathbb{R}^d)$$

é mensurável. Seja $s := s(x)$. Daí, pelo Teorema 4.2.3, existe

$$f_{rs} : \{V_s(x)\}_{x \in X_3} \longrightarrow X_3 \times \mathbb{R}^{rs}$$

bijeção mensurável, a qual é linear nas fibras e cobre a aplicação identidade de X , onde $\dim V_s(x) = r_s$. Definamos então

$$\varphi : (x, u) \in X_3 \times P(\mathbb{R}^{r_s}) \mapsto \varphi(x, u) = \log \frac{\|A_x \tilde{u}\|}{\|\tilde{u}\|} \in \mathbb{R},$$

onde $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{r_s}$ é um vetor não-nulo no espaço gerado por u e que podemos supor, sem perda de generalidade, que esteja contido em $V_s(x)$. Pelo Corolário 4.2.1(iii), temos que, para todo $v \in V_s(x) \setminus \{0\}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_x^n v\| = \lambda_s.$$

Assim, segue de (4.6) que, para todo $u \in P(\mathbb{R}^{r_s})$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) = \lambda_s.$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff,

$$\lambda_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) = \int \varphi d\mu,$$

para toda medida $\mu \in M_m(X_3 \times P(\mathbb{R}^{r_s}), S)$. Além disso, como $x \mapsto \log \|A_x^{-1}\| = -\inf \{\varphi(x, u) : u \in P(\mathbb{R}^{r_s})\}$ é integrável, temos que as hipóteses do Corolário 4.3.2 são válidas. Logo, existe $X_4 \in \mathcal{B}$ T -invariante, com $m(X_4) = 1$, tal que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(S^i(x, u)) \longrightarrow \lambda_s$$

uniformemente em $u \in P(\mathbb{R}^{r_s})$. Portanto, para todo $v \in V_s(x) \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| \longrightarrow \lambda_s.$$

Consideremos $\{V_{s-1}(x)\}_{x \in X_4}$. Visto que $V_s(x) \subset V_{s-1}(x)$, podemos escrever

$$V_{s-1}(x) = V_s(x) \oplus W(x).$$

Pelo Teorema 4.3.1, temos que para qtp $x \in X$ e $w \in W(x) \setminus \{0\}$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| = \lambda_{s-1},$$

onde $C_x : W(x) \longrightarrow W(Tx)$ é a aplicação induzida por A_x . Observemos que:

1. $\{W(x)\}$ é um subfibrado mensurável;
2. As aplicações $x \mapsto \log \|C_x\|$ e $x \mapsto \log \|C_x^{-1}\|$ são integráveis, já que $\|C_x\| \leq \|A_x\|$ e $\|C_x^{-1}\| \leq \|A_x^{-1}\|$.

Aplicando o argumento acima para $x \mapsto C_x$, temos que, para qtp x ,

$$\frac{1}{n} \log \|C_x^n w\| \longrightarrow \lambda_{s-1},$$

para todo $w \in W(x) \setminus \{0\}$. Daí, pela segunda parte do Teorema 4.3.1, para qtp x ,

$$\frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| \longrightarrow \lambda_{s-1},$$

para todo $v \in V_{s-1}(x) \setminus V_s(x)$. A prova segue repetindo o argumento acima. $\square$

Capítulo 5

Extensão do Teorema Ergódico Multiplicativo

Neste capítulo, estenderemos o Teorema de Oseledec para fluxos em tempo contínuo. Inicialmente, provaremos tal teorema para semifluxos mensuráveis em tempo contínuo, e veremos que a demonstração seguirá, quase que imediata, da extensão do Teorema Ergódico Subaditivo de Kingman. Feito isso, provaremos na Seção 5.2, o Teorema de Oseledec para fluxos definidos sobre fibrados vetoriais em tempo discreto. Tal demonstração será de grande utilidade para a extensão do mesmo para fluxos em tempo contínuo, pois discretizando o tempo, teremos condições de aplicar o Teorema de Oseledec para fluxos em tempo discreto. É interessante observarmos que os fluxos com os quais trabalharemos, estão associados a cociclos definidos sobre fibrados vetoriais triviais. Denotaremos por (M, Σ, μ) um espaço de probabilidade.

5.1 Semifluxos em tempo contínuo

Nesta seção, denotaremos por $\{\tau^t\}_{t \geq 0}$ o semifluxo mensurável que preserva medida, isto é, tal que a aplicação $(x, t) \in M \times \mathbb{R}^+ \mapsto \tau^t x \in M$ é mensurável e satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\tau^0 = \text{id}_M$;

(ii) $\tau^{s+t} = \tau^s \circ \tau^t$, para todo $s, t \geq 0$.

Além disso, para cada $t \geq 0$, $\tau^t : M \longrightarrow M$ preserva medida.

A seguir faremos a extensão do Teorema Ergódico Subaditivo para o caso contínuo.

Teorema 5.1.1 *Seja a aplicação mensurável $(x, t) \in M \times \mathbb{R}^+ \longmapsto f_t(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) *Integrabilidade:*

$$\varphi_1 = \sup_{0 \leq u \leq 1} f_u^+, \quad \varphi_2 = \sup_{0 \leq u \leq 1} f_{1-u}^+ \circ \tau^u \in L^1;$$

(b) *Subaditividade:* $f_{s+t} \leq f_s + f_t \circ \tau^s$ qtp.

Então existe uma função mensurável τ^t -invariante $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que $f^+ \in L^1$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} f_t = f \text{ qtp}$$

e,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int f_t(x) d\mu(x) = \inf_t \frac{1}{t} \int f_t(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x),$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração: Seja $n := [t]$ a parte inteira de t , isto é, $t = n + \{t\}$ com $0 \leq \{t\} \leq$

1. Usando a subaditividade de f_t é fácil vermos que

$$f_{n+1} - \varphi_2 \circ \tau^n \leq f_t \leq f_n + \varphi_1 \circ \tau^n. \quad (5.1)$$

Como $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1$, temos pelo Corolário 1.1.2 que, para qtp $x \in M$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varphi_1 \circ \tau^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \varphi_2 \circ \tau^n(x) = 0.$$

Pelo Teorema 3.2.1, temos que existe uma função mensurável τ^t -invariante $f : M \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que $f^+ \in L^1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f_n = f$ qtp. Visto que $\frac{n}{t} \rightarrow 1$, temos que para qtp $x \in M$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (f_{n+1} - \varphi_2 \circ \tau^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f_{n+1} - \varphi_2 \circ \tau^n) = f, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (f_n + \varphi_1 \circ \tau^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f_n + \varphi_1 \circ \tau^n) = f. \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade (5.1), $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} f_t = f$. Ainda pelo Teorema 3.2.1, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int f_n(x) d\mu(x) = \inf_n \frac{1}{n} \int f_n(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada e a desigualdade (5.1), obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int f_t(x) d\mu(x) = \inf_t \frac{1}{t} \int f_t(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

□

Corolário 5.1.1 *Suponha que o cociclo $(x, t) \in M \times \mathbb{R}^+ \mapsto T_x^t \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ é mensurável e que as funções*

$$\varphi_1(x) = \sup_{0 \leq u \leq 1} \log^+ \|T_x^u\| \quad (5.2)$$

$$\varphi_2(x) = \sup_{0 \leq u \leq 1} \log^+ \|T_{\tau^u x}^{1-u}\| \quad (5.3)$$

são integráveis. Então, para quase todo $x \in M$, o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|(T_x^t)^{\wedge i}\|$$

existe para todo $i = 1, \dots, d$.

Demonstração: Basta verificarmos o Teorema Ergódico Subaditivo para $f_t(x) = \log \|(T_x^t)^{\wedge i}\|$. □

Lema 5.1.1 *Sob as mesmas condições do Corolário anterior, tem-se que*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup_{0 \leq u \leq 1} \log \|T_{\tau^u x}^{1+u}\| \leq 0,$$

para quase todo $x \in M$.

Demonstração: Seja n a parte inteira de t , isto é, $t = n + \{t\}$ com $0 \leq \{t\} \leq 1$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \|T_{\tau^t x}^{1+u}\| &= \|T_{\tau^{n+1}x}^{u+\{t\}} \cdot T_{\tau^{\{t\}}(\tau^n x)}^{1-\{t\}}\| \leq \|T_{\tau^{n+1}x}^{u+\{t\}}\| \cdot \|T_{\tau^{\{t\}}(\tau^n x)}^{1-\{t\}}\| \\ \|T_{\tau^{n+1}x}^{u+\{t\}}\| &= \|T_{\tau^{n+2}x}^{u+\{t\}-1} \cdot T_{\tau^{n+1}x}^1\| \leq \|T_{\tau^{n+2}x}^{u+\{t\}-1}\| \cdot \|T_{\tau^{n+1}x}^1\|, \quad u + \{t\} > 1. \end{aligned}$$

Daí,

$$\log \|T_{\tau^t x}^{1+u}\| \leq \log^+ \|T_{\tau^t x}^{1+u}\| \leq \log^+ \|T_{\tau^{n+2}x}^{u+\{t\}-1}\| + \log^+ \|T_{\tau^{n+1}x}^1\| + \log^+ \|T_{\tau^{\{t\}}(\tau^n x)}^{1-\{t\}}\|;$$

implicando que

$$\sup_{0 \leq u \leq 1} \log \|T_{\tau^t x}^{1+u}\| \leq \varphi_1(\tau^{n+2}x) + \varphi_1(\tau^{n+1}x) + \varphi_2(\tau^n x).$$

Portanto, segue do Corolário 1.1.2 e do fato que $\frac{n}{t} \rightarrow 1$, que para quase todo $x \in M$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sup_{0 \leq u \leq 1} \log \|T_{\tau^t x}^{1+u}\| \leq 0.$$

□

Assim, podemos demonstrar o Teorema Ergódico Multiplicativo para semifluxos mensuráveis.

Teorema 5.1.2 *Seja $(x, t) \in M \times \mathbb{R}^+ \mapsto T_x^t \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ um cociclo mensurável tais que as funções φ_1 e φ_2 definidas por (5.2) e (5.3), respectivamente, são integráveis. Então, existe $\Gamma \subset M$ τ^t -invariante para todo $t \geq 0$, com $\mu(\Gamma) = 1$, tal que as seguintes propriedades são válidas para $x \in \Gamma$:*

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} (T_x^{t*} T_x^t)^{1/2t} =: \Psi(x) \geq 0$ existe;
- (ii) *Sejam $\exp \lambda_1(x) > \dots > \exp \lambda_{s(x)}(x)$ os autovalores de $\Psi(x)$ e $U_1(x), \dots, U_{s(x)}(x)$ os autoespaços correspondentes com suas multiplicidades $d_i(x) := \dim U_i(x)$. A função $x \mapsto \lambda_i(x)$ é τ -invariante. Considere $V_{s(x)+1} := \{0\}$ e $V_i(x) := U_{s(x)}(x) \oplus \dots \oplus U_i(x)$, $i = 1, \dots, s(x)$; dessa forma,*

$$V_{s(x)}(x) \subset \dots \subset V_i(x) \subset \dots \subset V_1(x) = \mathbb{R}^d$$

define uma filtração em $\mathbb{R}^d$. Então, para cada $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, o expoente de Lyapunov

$$\lambda_x(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T_x^t v\|$$

existe como limite e, $\lambda_x(v) = \lambda_i(x)$ se, e somente se, $v \in V_i(x) \setminus V_{i+1}(x)$, onde $V_i(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : \lambda_x(v) \leq \lambda_i(x)\}$.

Demonstração: Pelo Corolário 5.1.1, existe $\Gamma \subset M$ τ^t -invariante para todo $t \geq 0$, com $\mu(\Gamma) = 1$, tal que para $x \in \Gamma$ o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|(T_x^t)^{\wedge i}\|$$

existe para todo $i = 1, \dots, d$.

Seja $x \in \Gamma$. Então, para cada $t \geq 0$, seja $V_t(x)D_t(x)O_t(x)$ a decomposição polar de T_x^t . Assim, procedendo de maneira análoga ao que foi feito para a demonstração do Teorema 3.1.2, obtemos uma sequência $(F(t, x))_{t \geq 0}$ em $F_{\tau(x)}(d)$, onde

$$F(t, x) = (V_{s(x)}(t, x) \subset \dots \subset V_i(t, x) \subset \dots \subset V_1(t, x))$$

e $F_{\tau(x)}(d)$ é o conjunto de todas as filtrações correspondentes aos vetores de dimensão $\tau(x) = (d_{s(x)}(x), d_{s(x)}(x) + d_{s(x)-1}(x), \dots, d_{s(x)}(x) + \dots + d_1(x) = d)$. Afirmamos que tal sequência converge em $F_{\tau(x)}(d)$ para $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n, x)$, onde a existência desse limite segue do Lema 3.1.2 aplicado para $T_n = T(\tau^{n-1}x)$. Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta(F(t, x), F(x)) \leq -h,$$

onde $h = \frac{\Delta}{s(x) - 1}$, $\Delta = \min\{\lambda_i(x) - \lambda_{i+1}(x) : i = 1, \dots, s(x) - 1\}$. De fato, notemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta(F(n, x), F(n + s, x)) \leq -h$$

uniformemente em $s \in [0, 1]$. Seja n a parte inteira de t , isto é, $t = n + \{t\}$ com $0 \leq \{t\} \leq 1$. Logo, usando a desigualdade anterior e o fato que $\frac{n}{t} \rightarrow 1$ temos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta(F(n, x), F(t, x)) \leq -h.$$

Dessa forma, $F(t, x) \longrightarrow F(x)$, já que como $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n, x) = F(x)$ de tal forma que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \delta(F(n, x), F(x)) \leq -h$ (ver equação (3.5)) e pela desigualdade anterior segue que

$$\delta(F(t, x), F(x)) \leq \delta(F(t, x), F(n, x)) + \delta(F(n, x), F(x)) \leq e^{-th} + e^{-nh} \longrightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$. Além disso,

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta(F(t, x), F(x)) \\ & \leq \max \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta(F(n, x), F(t, x)), \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \delta(F(n, x), F(x)) \right) \leq -h. \end{aligned}$$

Portanto, procedendo analogamente à demonstração do Teorema 3.1.2, podemos provar o Teorema Ergódico Multiplicativo para semifluxos mensuráveis. $\square$

5.2 Fluxos em tempo discreto

Nesta seção, denotaremos por $\tau : M \longrightarrow M$ uma aplicação mensurável com inversa mensurável tal que ambas preservam medida. O teorema que veremos a seguir é uma versão do Teorema Ergódico Multiplicativo para fluxos em tempo discreto.

Teorema 5.2.1 *Seja $T : M \longrightarrow \text{Gl}(d, \mathbb{R})$ uma transformação mensurável tal que*

$$\log^+ \|T(\cdot)\|, \log^+ \|T(\cdot)^{-1}\| \in L^1.$$

Considere

$$\begin{aligned} T_x^n &= T(\tau^{n-1}x) \cdots T(\tau x) \cdot T(x), \\ T_x^0 &= I, \\ T_x^{-n} &= [T(\tau^{-n}x)]^{-1} \cdots [T(\tau^{-2}x)]^{-1} \cdot [T(\tau^{-1}x)]^{-1}. \end{aligned}$$

Então, existe $\Delta \subset M$ τ -invariante com $\mu(\Delta) = 1$, de tal modo que, para cada $x \in \Delta$, existe uma decomposição de $\mathbb{R}^d$, ou seja, $\mathbb{R}^d = W_1(x) \oplus \cdots \oplus W_{s(x)}(x)$. Além disso,

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{k} \log \|T_x^k v\| = \lambda_i(x),$$

para todo $v \in W_i(x) \setminus \{0\}$.

Demonstração: Seja $\{(\lambda_i(x), d_i(x)) : i = 1, \dots, s(x)\}$ o espectro de (τ, T) em x . Considere $V_{s(x)}(x) \subset \cdots \subset V_1(x) = \mathbb{R}^d$ a filtração associada. Denotemos por $T^{-1} \circ \tau^{-1}$, a transformação mensurável de M em $\text{Gl}(d, \mathbb{R})$, dada por $T^{-1} \circ \tau^{-1}(x) := [T(\tau^{-1}x)]^{-1}$. Pelos exemplos vistos na Seção 3.2, temos que o espectro de $(\tau^{-1}, T^{-1} \circ \tau^{-1})$ em x é dado por

$$\lambda_{s(x)}^-(x) < \cdots < \lambda_1^-(x),$$

onde $\lambda_i^-(x) = -\lambda_{s(x)+1-i}$ com multiplicidade $d_i^-(x) = d_{s(x)+1-i}(x)$. Seja

$$V_{s(x)}^-(x) \subset \cdots \subset V_1^-(x)$$

a filtração associada. Seja $S = \{x \in M : V_{i+1}(x) \cap V_{s(x)+1-i}^-(x) \neq \{0\}\}$. Afirmamos que tal conjunto tem medida nula. De fato, dado $\delta > 0$, considere, para cada $n \geq 1$, o subconjunto S_n de S tal que para cada $x \in S_n$, fixado $i \in \{1, \dots, s(x) - 1\}$, tem-se que

$$\|T_x^n u\| \leq \|u\| \exp[n(\lambda_{i+1}(x) + \delta/2)], \quad (5.4)$$

$$\|T_x^{-n} u\| \leq \|u\| \exp[n(-\lambda_i(x) + \delta/2)], \quad (5.5)$$

para todo $u \in V_{i+1}(x) \cap V_{s(x)+1-i}^-(x)$. De (5.5), temos que se $x \in \tau^{-n}(S_n)$,

$$\|T_x^n u\| \geq \|u\| \exp[n(\lambda_i(x) - \delta/2)], \quad (5.6)$$

para todo $u \in V_{i+1}(x) \cap V_{s(x)+1-i}^-(x)$. Seja $x \in S_n \cap \tau^{-n}(S_n)$; logo, pelas desigualdades (5.4) e (5.6), concluímos que $\lambda_i(x) - \lambda_{i+1}(x) \leq \delta$. Observemos ainda que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(S_n \cap \tau^{-n}(S_n)) = \mu(S)$. Logo, $\lambda_i(x) - \lambda_{i+1}(x) \leq \delta$ para quase todo $x \in S$. Assim, como δ é arbitrário, temos que $\mu(S) = 0$. Portanto, $V_{i+1}(x) \cap V_{s(x)+1-i}^-(x) = \{0\}$ qtp.

Observemos que, para cada $x \in \Delta$, obtemos as propriedades (i) e (ii) da Definição 2.1.2. Assim, procedendo de forma análoga ao que fizemos após tal definição, é possível mostrarmos que

$$V_{i+1}(x) \oplus V_{s(x)+1-i}^-(x) = \mathbb{R}^d.$$

Além disso, os conjuntos $W_i(x) := V_i(x) \cap V_{s(x)+1-i}^-$ formam uma decomposição de $\mathbb{R}^d$ da tal forma que

$$\lambda_x(v) = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{k} \|T_x^k v\| = \lambda_i(x),$$

se, e somente se, $v \in W_i(x) \setminus \{0\}$. □

5.3 Fluxos em tempo contínuo

Finalmente, estenderemos o Teorema Ergódico Multiplicativo para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Teorema 5.3.1 *Seja $(x, t) \in M \times \mathbb{R} \mapsto T_x^t \in \text{Gl}(d, \mathbb{R})$ um cociclo mensurável tal que as funções*

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \sup_{0 \leq u \leq 1} \log^+ \|T_x^u\| \\ \psi_2(x) &= \sup_{0 \leq u \leq 1} \log^+ \|T_x^{-u}\| \end{aligned}$$

são integráveis. Então, existe $\Delta \subset M$ τ^t -invariante para todo $t \in \mathbb{R}$, com $\mu(\Delta) = 1$, e tal que, para cada $x \in \Delta$, existe uma decomposição de $\mathbb{R}^d$, ou seja, $\mathbb{R}^d = W_1(x) \oplus \cdots \oplus W_{s(x)}(x)$. Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|T_x^t v\| = \lambda_i(x),$$

para todo $v \in W_i(x) \setminus \{0\}$.

Demonstração: Seja k a parte inteira de $t \in \mathbb{R}$. Então, $t = k + \{t\}$, onde $0 \leq \{t\} \leq 1$. Pela definição de cociclo, temos que para todo $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{|t|} \log \|T_x^{k+1} v\| - \frac{1}{|t|} \psi(\tau^k x) \leq \frac{1}{|t|} \log \|T_x^t v\| \leq \frac{1}{|t|} \psi_1(\tau^k x) + \frac{1}{|t|} \log \|T_x^k v\|, \quad (5.7)$$

onde $\psi(x) := \sup_{0 \leq u \leq 1} \log^+ \|T_{\tau^u x}^{1-u}\|$. Observemos que, como $\psi_1, \psi_2 \in L^1$, temos que $\psi \in L^1$.

Ainda pela integrabilidade de ψ_1 e ψ_2 , segue que as funções $\log^+ \|T(\cdot)\|$ e $\log^+ \|T(\cdot)^{-1}\|$ são integráveis, onde $T(x) := T_x^1$. Assim, pelo Teorema 5.2.1, temos que existe $\Delta \subset M$ com $\mu(\Delta) = 1$, tal que para cada $x \in \Delta$ existe uma decomposição $W_1(x) \oplus \cdots \oplus W_{s(x)}(x)$ de $\mathbb{R}^d$, de tal forma que para todo $v \in W_i(x) \setminus \{0\}$

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{k} \log \|T_x^k v\| = \lambda_i(x).$$

Visto que $\psi, \psi_1 \in L^1$ e τ, τ^{-1} preservam medida, segue do Corolário 1.1.2 que, para qtp $x \in M$,

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{k} \psi(\tau^k x) = \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{k} \psi_1(\tau^k x) = 0.$$

Assim, como $\frac{k}{t} \rightarrow 1$, temos que para qtp $x \in M$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \psi(\tau^k x) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \psi_1(\tau^k x) = 0.$$

Dessa forma, fazendo $t \rightarrow \pm\infty$ em (5.7), temos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log \|T_x^t v\| = \lambda_i(x),$$

para todo $v \in W_i(x) \setminus \{0\}$. □

No Capítulo 2, calculamos os expoentes de Lyapunov de um sistema do seguinte tipo

$$\dot{x}_t = A(t)x_t,$$

onde $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ é uma função contínua e periódica de período $\omega > 0$. No próximo exemplo, associaremos a tal sistema um cociclo sobre um determinado fluxo mensurável $\{\tau^t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Exemplo: Consideremos o sistema dado acima. Seja $(\mathbb{S}^1, \mathcal{B}, m)$ um espaço de medida, onde $\mathcal{B}$ é a σ -álgebra de Borel de $\mathbb{S}^1$ e m é a medida de Lebesgue. Para

cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos

$$x \in \mathbb{S}^1 \longmapsto \tau^t x := x + t \pmod{\omega} \in \mathbb{S}^1,$$

onde estamos identificando $\mathbb{S}^1$ a $[0, \omega)$, via o homeomorfismo

$$x \in [0, \omega) \longmapsto \exp(2\pi i x / \omega).$$

É claro que o grupo a 1-parâmetro $\{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um fluxo mensurável que preserva medida, visto que tal grupo é formado por translações módulo ω .

Dada uma matriz fundamental Φ para o sistema dado acima, temos pelo Teorema 2.3.1 que existe uma matriz periódica não-singular P com período 2ω e uma matriz constante R tal que $\Phi(t) = P(t)e^{tR}$. Seja a seguinte aplicação

$$(x, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \longmapsto T_x^t := \Phi(\tau^t x) \Phi(x)^{-1} = P(\tau^t x) e^{tR} P(x)^{-1} \in \text{Gl}(d, \mathbb{R}).$$

Como $\{\tau_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um fluxo mensurável, segue que a aplicação dada acima é um cociclo mensurável.

Consideremos $\rho_1, \dots, \rho_r$ os autovalores distintos de R . Sejam $-\infty \leq \lambda_s < \dots < \lambda_1$ as diferentes partes reais dos autovalores de R . Tomemos v um vetor não-nulo em

$$E_{\lambda_l} = \sum_{i,j \in \Sigma_l} V_{e^{2\omega\rho_i}} \oplus V_{e^{2\omega\rho_j}, e^{2\omega\bar{\rho}_j}}, \text{ onde } \Sigma_l := \{i : \log |e^{2\omega\rho_i}| = 2\omega\lambda_l\}, 1 \leq l \leq s, \text{ e } V_{e^{2\omega\rho_i}},$$

$V_{e^{2\omega\rho_j}, e^{2\omega\bar{\rho}_j}}$ são os autoespaços generalizados reais associados aos autovalores $e^{2\omega\rho_i}$ e $e^{2\omega\rho_j}$ de $e^{2\omega(P(x)RP(x)^{-1})}$, respectivamente. Dessa forma,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T_x^t v\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|P(\tau^t x) e^{tR} P(x)^{-1} v\|;$$

fazendo $t = 2n\omega$ e usando a Proposição 2.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T_x^t v\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\omega} \log \|P(x)(e^{2\omega R})^n P(x)^{-1} v\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\omega} \log \|e^{2\omega(P(x)RP(x)^{-1})n} v\| = \lambda_l. \end{aligned}$$

Portanto, ainda pela Proposição 2.2.1, temos que $\mathbb{R}^d = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$, de tal forma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T_x^t v\| = \lambda_l,$$

para qtp $x \in \mathbb{S}^1$ e todo $v \in E_{\lambda_l} \setminus \{0\}$. □

Capítulo 6

Fluxos em Fibrados

O principal objetivo deste capítulo será estudarmos fluxos em fibrados mais gerais que fibrados triviais. Para isso, o nosso primeiro passo será estudarmos os fluxos em fibrados principais; feito isto, conseguiremos induzir um fluxo na base do fibrado. Assim, poderemos obter um fluxo em fibrados associados que, se provenientes de representações do grupo estrutural, estarão em correspondência biunívoca com os fibrados vetoriais. Desse modo, com o objetivo de facilitar a leitura, na seção seguinte veremos alguns exemplos e propriedades importantes que serão utilizadas posteriormente sobre fibrados principais e associados.

6.1 Fibrados

6.1.1 Fibrados Principais

Definição 6.1.1 Dizemos que $P(M, G)$ é um fibrado principal se as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (i) G age livremente à direita em P : $(p, g) \in P \times G \mapsto pg \in P$;
- (ii) O espaço das órbitas dessa ação é M , isto é, existe uma aplicação sobrejetora

$$\pi : P \longrightarrow M$$

tal que as órbitas de G são os conjuntos $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$;

(iii) P é localmente trivial, ou seja, dado $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma aplicação bijetora da seguinte forma

$$\begin{aligned}\psi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \\ p &\longmapsto \psi(p) = (\pi(p), \phi(p)),\end{aligned}$$

onde $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ é uma aplicação satisfazendo a seguinte condição

$$\phi(pg) = \phi(p)g, \quad (6.1)$$

para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ e $g \in G$.

Denotaremos um fibrado principal por $P(M, G, \pi)$, $P(M, G)$ ou simplesmente P . Dizemos que P é o *espaço total*, M o *espaço base*, G o *grupo estrutural* e π a *projeção*.

O fibrado P é dito um *fibrado topológico* se os espaços envolvidos são espaços topológicos e as aplicações envolvidas são contínuas e homeomorfismos quando bi-jetoras. O fibrado principal P é de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, se os espaços envolvidos são variedades diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^k$ (particularmente, G é um grupo de Lie) e as aplicações envolvidas são diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^k$ e difeomorfismos quando forem bijeções. Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}\{x\}$ é uma subvariedade fechada de P , chamada de *fibra sobre x* . Denotaremos as fibras do fibrado principal por $P_x = \pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$.

Notemos que a condição (ii) é equivalente a dizermos que M é o espaço obtido do quociente de P pela seguinte relação de equivalência

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } y = xg.$$

Logo, $M = P/G$, e os conjuntos $\pi^{-1}\{x\}$ são as órbitas de G .

Exemplo: Sejam um grupo de Lie G e uma variedade diferenciável M . O produto $P = M \times G$ é um fibrado principal com base M e grupo estrutural G , cuja ação à direita de G em P é dada por

$$((x, g), h) \in P \times G \longmapsto (x, gh) \in P.$$

Dizemos que o fibrado principal $P(M, G)$ obtido é *trivial*. $\square$

O próximo exemplo será muito importante para definirmos fluxos sobre fibrados.

Exemplo: Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e TM seu fibrado tangente. O *fibrado das bases* ou *fibrado dos referenciais* de M é o conjunto BM de todas as bases de TM , isto é, um elemento $p \in BM$ é uma base

$$\{f_1, \dots, f_n\} \quad (6.2)$$

de algum espaço tangente $T_x M$, $x \in M$. Equivalentemente, podemos ver $p \in BM$ como sendo uma aplicação linear inversível ou um *referencial* $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$, $x \in M$. De fato, dada a aplicação p , o conjunto

$$\{p(e_1), \dots, p(e_n)\}$$

é uma base de $T_x M$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Reciprocamente, a base (6.2) de $T_x M$, $x \in M$, determina a seguinte aplicação linear inversível p de $\mathbb{R}^n$ em $T_x M$ dada por

$$p(x_1, \dots, x_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n.$$

Considere a aplicação $\pi : BM \longrightarrow M$ que associa a cada $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$ o ponto $x \in M$. Ainda temos que existe uma ação natural à direita de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em BM dada por

$$(p, g) \in BM \times \text{Gl}(n, \mathbb{R}) \longmapsto pg := p \circ g \in BM.$$

Visto que os elementos de BM são aplicações lineares inversíveis, temos que a ação definida anteriormente é livre. Observemos que BM tem uma estrutura de variedade diferenciável. De fato, seja $u = (u^1, \dots, u^n)$ um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança U de $x \in M$. O conjunto

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n} \right)_x \right\}$$

é uma base de $T_x M$, onde $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x$ é uma derivação que associa a cada $f \in \mathcal{F}(x)$ associa o número real $\frac{\partial(f \circ u^{-1})}{\partial u^i}$, onde $\mathcal{F}(x)$ é a álgebra das funções diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^1$ definidas em alguma vizinhança de x . Seja $p_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$ a aplicação linear tal que $p_u(e_i) = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x$, $i = 1, \dots, d$. Então, para cada $p \in BM$, existe $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $p = p_u g$. Dessa forma, existe uma correspondência biunívoca entre $\pi^{-1}(U)$ e $U \times \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ e assim, $p \in \pi^{-1}(U) \longmapsto (u, g) \in \mathbb{R}^n \times \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ é um sistema de coordenadas locais em $\pi^{-1}(U)$. Portanto, BM é um fibrado principal com base M e grupo estrutural $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$. $\square$

Assim como na definição de variedade diferenciável, na qual as funções de mudanças de coordenadas devem satisfazer certas condições, a propriedade de trivialidade local na definição de fibrado principal também está relacionada com uma certa classe de funções de transição satisfazendo certas propriedades. A seguir faremos uma breve discussão sobre tal classe de funções.

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal. Considere $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ uma trivialização local e $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ a segunda coordenada de ψ . O conjunto

$$\psi^{-1}\{(x, 1) : x \in U\}$$

é uma subvariedade em $\pi^{-1}(U)$ e, como a primeira coordenada de ψ é a projeção sobre M , temos que tal subvariedade cruza cada fibra $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in U$, em um único ponto que denotaremos por $\sigma(x)$. Então, obtemos uma aplicação $\sigma : U \longrightarrow P$ de tal modo que $\pi(\sigma(x)) = x$, ou seja, σ é uma seção local de P . Como $\sigma(x) \in \psi^{-1}\{(x, 1) : x \in U\}$, temos que $\phi(\sigma(x)) = 1$. Assim, pela propriedade (6.1), temos que para todo $g \in G$

$$\phi(\sigma(x)g) = \phi(\sigma(x))g = g,$$

onde $\pi^{-1}\{x\} = \{\sigma(x)g : g \in G\}$. Assim,

$$\psi(\sigma(x)g) = (x, g). \quad (6.3)$$

Sejam $\psi_1 : \pi^{-1}(U_1) \longrightarrow U_1 \times G$ e $\psi_2 : \pi^{-1}(U_2) \longrightarrow U_2 \times G$ trivializações locais tais que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Denotaremos por ϕ_1 e ϕ_2 as segundas coordenadas de ψ_1 e ψ_2 , respectivamente, e, σ_1 e σ_2 , as respectivas seções locais.

Para cada $x \in U_1 \cap U_2$, como $\pi(\sigma_i(x)) = x$, $i = 1, 2$, temos que $\sigma_1(x), \sigma_2(x) \in \pi^{-1}\{x\}$; dessa forma, existe $\theta(x) \in G$ tal que

$$\sigma_2(x) = \sigma_1(x)\theta(x).$$

Com isso, podemos definir a função $\theta : U_1 \cap U_2 \longrightarrow G$ e assim, obtemos a mudança de coordenadas.

$$\begin{array}{ccc} (U_1 \cap U_2) \times G & \xrightarrow{\psi_1 \psi_2^{-1}} & (U_1 \cap U_2) \times G \\ \psi_2^{-1} \downarrow & \nearrow \psi_1 & \\ \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) & & \end{array}$$

De fato, pela equação (6.3),

$$\psi_2^{-1}(x, g) = \sigma_2(x)g,$$

e portanto,

$$\psi_1 \psi_2^{-1}(x, g) = \psi_1(\sigma_1(x)\theta(x)g) = (x, \theta(x)g).$$

A função θ é dita *função de transição* entre as trivializações ψ_1 e ψ_2 (nessa ordem). A função de transição fornece a mudança de coordenadas entre duas trivializações, mas não as trivializações propriamente ditas. Entretanto, é possível reconstruirmos o fibrado principal se as funções satisfizerem algumas condições, as quais veremos a seguir.

Seja $\psi_3 : \pi^{-1}(U_3) \longrightarrow U_3 \times G$ uma outra trivialização de tal modo que U_3 intercepta $U_1 \cap U_2$. Denotaremos por θ_{ij} a função de transição entre ψ_i e ψ_j , nessa ordem. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \psi_1 \psi_2^{-1}(x, g) &= (x, \theta_{12}(x)g), \\ \psi_2 \psi_3^{-1}(x, g) &= (x, \theta_{23}(x)g), \\ \psi_1 \psi_3^{-1}(x, g) &= (x, \theta_{13}(x)g). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\psi_1\psi_3^{-1}(x, g) = \psi_1\psi_2^{-1}\psi_2\psi_3^{-1}(x, g) = \psi_1\psi_2^{-1}(x, \theta_{23}(x)g) = (x, \theta_{12}(x)\theta_{23}(x)g).$$

Assim, $\theta_{13}(x) = \theta_{12}(x)\theta_{23}(x)$.

Geralmente, dado um fibrado principal $P(M, G)$ é possível tomarmos uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_\alpha$ de M , de modo que para cada α existe um difeomorfismo ψ_α de $\pi^{-1}(U_\alpha)$ em $U_\alpha \times G$ dado por $\psi_\alpha(p) = (\pi(p), \phi_\alpha(p))$, onde $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$ é uma aplicação satisfazendo a seguinte condição

$$\phi_\alpha(pg) = \phi_\alpha(p)g,$$

para todo $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, $g \in G$.

Seja $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Então, existe $\theta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ função de transição de tal modo que

$$\psi_\alpha\psi_\beta^{-1}(x, g) = (x, \theta_{\alpha\beta}(x)g).$$

Assim, a família de funções $\{\theta_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}$ satisfaz a seguinte igualdade

$$\theta_{\alpha\beta}(x) = \theta_{\alpha\gamma}(x) \cdot \theta_{\gamma\beta}(x), \tag{6.4}$$

para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$. Supondo que tal igualdade é satisfeita, podemos reconstruir o fibrado principal a partir das funções de transição.

Teorema 6.1.1 *Sejam M uma variedade, $\{U_\alpha\}_\alpha$ uma cobertura aberta de M e G um grupo de Lie. Dada uma aplicação $\theta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, satisfazendo a relação (6.4), existe um fibrado principal P com base M e grupo estrutural G com funções de transição $\theta_{\alpha\beta}$.*

Demonstração: Ver [11]. □

6.1.2 Fibrados Associados

Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal, F uma variedade diferenciável e uma ação à esquerda do grupo estrutural G em F .

O grupo G age à direita no produto $P \times F$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} (P \times F) \times G &\longrightarrow P \times F \\ ((p, v), g) &\longmapsto (p, v) \cdot g := (pg, g^{-1}v). \end{aligned}$$

Essa ação determina a seguinte relação de equivalência $\sim$ em $P \times F$:

$$(p, v) \sim (q, w) \iff \exists g \in G: q = pg \text{ e } w = g^{-1}v.$$

A classe de equivalência do par $(p, v) \in P \times F$ será denotada por $p \cdot v$ ou $[p, v]$. Denotaremos o espaço quociente de $P \times F$ pela relação de equivalência definida acima por $E = P \times_G F$. Dizemos que E é o *fibrado associado com fibra típica F e base M* .

Notemos que se $(p, v) \sim (q, w)$ então p e q estão na mesma fibra de P , isto é, a aplicação $\pi_E : P \times_G F \longrightarrow M$ dada por $\pi_E(p \cdot v) = \pi(p)$ está bem definida. A aplicação π_E é dita *projeção* de E sobre M . Para cada $x \in M$, o conjunto $E_x = \pi_E^{-1}\{x\}$ é chamado de *fibra de E sobre x* .

Proposição 6.1.1 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal, F uma variedade diferenciável e uma ação à esquerda do grupo estrutural G em F . Considere $E = P \times_G F$ o fibrado associado a P . Então, para cada $p \in P$, existe uma bijeção de F em E_x dada por*

$$v \in F \longmapsto p \cdot v \in E_x, \quad x = \pi(p). \quad (6.5)$$

Demonstração: Para cada $p \in P$, temos que (p, v) é equivalente a (p, w) se, e somente se, $v = w$. De fato, se $(p, v) \sim (p, w)$ então existe $g \in G$ tal que $p = pg$ e $w = g^{-1}v$. Como a ação à direita de G em P é livre, temos que $g = 1$; assim, $v = w$. Logo, a aplicação (6.5) está bem definida e, além disso é injetora. Resta mostrarmos que (6.5) é sobrejetora. De fato, seja $q \cdot w \in E_x$, $\pi(q) = x$. Como $\pi(p) = x$, temos

que existe $g \in G$ tal que $q = pg$. Dessa forma, $q \cdot w = p \cdot (gw)$, mostrando que (6.5) é sobrejetora. $\square$

A bijeção obtida na proposição anterior mostra-nos que cada $p \in P$ parametriza a fibra E_x , $x = \pi(p)$, pela fibra tipo F .

Seja $\sigma : U \longrightarrow P$ uma seção local de P . Então, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\sigma : U \times F &\longrightarrow \pi_E^{-1}(U) \\ (x, v) &\longmapsto \sigma(x) \cdot v \end{aligned}$$

é uma bijeção. De fato, é claro que ψ_σ está bem definida. Sejam $(x, v), (y, w) \in U \times F$ tais que $\sigma(x) \cdot v = \sigma(y) \cdot w$. Logo, existe $g \in G$ tal que $\sigma(x) = \sigma(y)g$ e $w = g^{-1}v$. Assim,

$$x = \pi(\sigma(x)) = \pi(\sigma(y)g) = \pi(\sigma(y)) = y;$$

daí, como a ação de G em P é livre, temos que $g = 1$. Portanto, ψ_σ é injetora. Para verificarmos que tal aplicação é sobrejetora, seja $p \cdot w \in \pi_E^{-1}(U)$. Como $\pi(\sigma(\pi(p))) = \pi(p)$, segue que existe $g \in G$ tal que $p = \sigma(\pi(p))g$. Desse modo, $\psi_\sigma(\pi(p), gw) = p \cdot w$. Portanto, os fibrados associados admitem trivializações locais herdadas das trivializações do fibrado principal.

Consideremos $\sigma_1 : U_1 \longrightarrow P$ outra seção local de P de tal modo que $U \cap U_1 \neq \emptyset$. Então, como vimos na Seção anterior existe $\theta(x) \in G$ tal que $\sigma_1(x) = \sigma(x)\theta(x)$, para todo $x \in U \cap U_1$. Assim, $\sigma_1(x) \cdot v = \sigma(x) \cdot \theta(x)v$ e, tomando ψ_{σ_1} a trivialização correspondente a σ_1 , obtemos a seguinte relação entre ψ_σ e ψ_{σ_1}

$$\psi_\sigma^{-1} \circ \psi_{\sigma_1}(x, v) = (x, \theta(x)v), \quad (6.6)$$

para todo $x \in U \cap U_1$. Portanto, usando essas trivializações locais é possível colocarmos uma estrutura de variedade diferenciável em E .

Proposição 6.1.2 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal diferenciável e F uma variedade diferenciável. Suponha que exista uma ação diferenciável (à esquerda) do grupo estrutural G em F . Então, $E = P \times_G F$ é uma variedade diferenciável tal*

que a projeção $\pi_E : E \longrightarrow M$ é uma submersão. Além disso, as fibras E_x são subvariedades fechadas e mergulhadas e, as parametrizações $v \in F \longmapsto p \cdot v \in E_x$, $x = \pi(p)$, são difeomorfismos.

Demonstração: Para mostrarmos que E tem a estrutura de variedade diferenciável, basta tomarmos as seções locais $\sigma : U \longrightarrow P$ e, como a ação de G em F é diferenciável, temos que as mudanças de coordenadas $(x, v) \longmapsto (x, \theta(x)v)$ são aplicações diferenciáveis. Logo, as trivializações ψ_σ formam um atlas diferenciável em E . A projeção π_E é uma submersão, pois ela é identificada com a projeção na primeira coordenada através do difeomorfismo ψ_σ . Logo, as fibras E_x são subvariedades fechadas e mergulhadas. Finalmente, para mostrarmos que as parametrizações $v \in F \longmapsto p \cdot v \in E_x$, $x = \pi(p)$, são difeomorfismos, basta tomarmos cartas locais de E . $\square$

Exemplo: Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . Na seção anterior construímos o fibrado principal $BM(M, \text{Gl}(n, \mathbb{R}))$ a partir dos referenciais do fibrado tangente TM . Considerando a ação linear canônica de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$, podemos obter TM de BM associando-o ao fibrado associado $BM \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$, ou seja, existe uma bijeção entre TM e $BM \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$. De fato, considere a aplicação α que a cada elemento $p \cdot v \in BM \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ associa o vetor tangente $\alpha(p \cdot v) = p(v) \in T_x M$, $x = \pi(p)$, onde $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M$ é um elemento de BM . Se $(p, v) \sim (q, w)$ então $(q, w) = (pg, g^{-1}v)$, $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, e assim pela ação linear canônica de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$ segue que $p(v) = q(w)$, isto é, α está bem definida. Reciprocamente, sejam $p \cdot v, q \cdot w \in BM \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ tais que $p(v) = q(w)$. Daí, como $\pi(p) = \pi(q) = x$, temos que $q = pg$, $g \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$. Logo, como p é injetora, segue que $w = g^{-1}v$, ou seja, $p \cdot v = q \cdot w$. Portanto, α é injetora. Resta mostrarmos que α é sobrejetora. Considere $w \in T_x M$, $x = \pi(p)$, para algum $p \in BM$. Assim, como p é sobrejetora, temos que existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $p(v) = w$. $\square$

No próximo exemplo, generalizaremos a construção feita acima para fibrados vetoriais quaisquer.

Exemplo: Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal diferenciável e $\rho : G \longrightarrow \text{Gl}(V)$ uma representação de G no espaço vetorial de dimensão finita V , isto é, um homomorfismo diferenciável entre grupos de Lie no qual o contradomínio é um grupo linear. Considere a ação à esquerda de G em V dada por

$$(g, v) \in G \times V \longmapsto \rho(g)v \in V.$$

Desse modo, obtemos o fibrado associado $E = P \times_G V$. Pelo que vimos anteriormente, podemos notar que E é um fibrado vetorial. De fato, existe uma aplicação $\pi : E \longrightarrow M$ de modo que para cada $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e um difeomorfismo φ de $\pi^{-1}(U)$ em $U \times V$ tal que o diagrama abaixo comuta, isto é, $\pi_1 \circ \varphi = \pi$, onde $\pi_1 : U \times V \longrightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times V \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ U & & \end{array}$$

Além disso, pela Proposição 6.1.1, temos que cada fibra E_x , $x \in M$, tem a estrutura de espaço vetorial. E finalmente, segue da equação (6.6) que $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ preservam as fibras e são lineares nas mesmas. Portanto, E é um fibrado vetorial.

Reciprocamente, qualquer fibrado vetorial $E \longrightarrow M$ pode ser construído como um fibrado associado. De fato, basta definirmos o fibrado das bases BE de E formado pelos isomorfismos lineares $p : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x$, onde $\dim E_x = k$. Isto é, BE é um fibrado principal com base M e grupo estrutural $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$. Assim, analogamente ao que fizemos no exemplo anterior, considerando a ação linear canônica de $\text{Gl}(k, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^k$, obtemos E associando-o ao fibrado associado $BE \times_{\text{Gl}(k, \mathbb{R})} \mathbb{R}^k$. $\square$

Convém observar que no exemplo anterior exigimos que a dimensão do espaço vetorial V seja finita para que possamos colocar uma estrutura de variedade diferenciável em V , e assim pela Proposição 6.1.2, $E = P \times_G V$ é uma variedade diferenciável.

6.2 Construção de fluxos em fibrados

Nosso objetivo nesta seção é definirmos um fluxo em um fibrado associado a partir de um fluxo em um fibrado principal. Mas isso é equivalente a definirmos um fluxo sobre um fibrado vetorial, já que como vimos anteriormente, todo fibrado associado, cuja ação provém de uma representação do grupo estrutural, pode ser identificado a um fibrado vetorial.

Seja $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ um fluxo sobre o fibrado principal $P(M, G)$ que comuta com a ação à direita de G em P , isto é, $\phi_t(pg) = \phi_t(p)g$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $p \in P$ e $g \in G$. Essa propriedade implica que ϕ_t leva fibras em fibras, ou seja, ϕ_t leva a órbita $p \cdot G$ em $\phi_t(p) \cdot G$, $p \in P$. Equivalentemente, como M é o espaço das órbitas da ação à direita de G em P , temos que ϕ_t preserva as fibras P_x , $x \in M$. Dessa forma, podemos induzir um fluxo na base M do fibrado principal. Denotaremos tal fluxo por $(x, t) \in M \times \mathbb{R} \mapsto t \cdot x := \pi(\phi_t(p)) \in M$, $\pi(p) = x$. Consideremos então uma variedade diferenciável F e uma ação à esquerda de G em F . É possível induzirmos um fluxo φ_t sobre o fibrado associado $E = P \times_G F$ dado por $\varphi_t(p \cdot v) := \phi_t(p) \cdot v$, $(p, v) \in P \times F$.

Sejam $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$. Consideremos as vizinhanças U_1 de x e U_2 de $t \cdot x$ e as seções locais $\sigma_i : U_i \rightarrow P$, $i = 1, 2$. Observemos que $\phi_t(\sigma_1(x))$ e $\sigma_2(t \cdot x)$ estão na mesma fibra, visto que

$$\pi(\phi_t(\sigma_1(x))) = t \cdot \pi(\sigma_1(x)) = t \cdot x = \pi(\sigma_2(t \cdot x)).$$

Logo, devido à ação à direita de G em P , existe $\rho_{\sigma_1, \sigma_2}(x, t) \in G$ tal que

$$\phi_t(\sigma_1(x)) = \sigma_2(t \cdot x) \rho_{\sigma_1, \sigma_2}(x, t). \quad (6.7)$$

A aplicação $\rho_{\sigma_1, \sigma_2}$ é dita *cociclo local definido por σ_1 e σ_2* . A proposição seguinte justifica a terminologia usada para tal aplicação.

Proposição 6.2.1 *Sejam $x \in M$ e $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $x \in U_1$, $t \cdot x \in U_2$ e $s \cdot (t \cdot x) = (s + t) \cdot x \in U_3$. Consideremos ainda as seções locais $\sigma_i : U_i \rightarrow P$, $i = 1, 2, 3$. Então,*

$$\rho_{\sigma_1, \sigma_3}(x, t + s) = \rho_{\sigma_2, \sigma_3}(t \cdot x, s) \rho_{\sigma_1, \sigma_2}(x, t).$$

Demonstração: Pela mesma idéia usada anteriormente temos que

$$\begin{aligned}\phi_t(\sigma_1(x)) &= \sigma_2(t \cdot x) \rho_{\sigma_1, \sigma_2}(x, t), \\ \phi_{t+s}(\sigma_1(x)) &= \sigma_3((t+s) \cdot x) \rho_{\sigma_1, \sigma_3}(x, t+s), \\ \phi_s(\sigma_2(t \cdot x)) &= \sigma_3((t+s) \cdot x) \rho_{\sigma_2, \sigma_3}(t \cdot x, s).\end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em $\phi_{s+t}(\sigma_1(x)) = \phi_s \circ \phi_t(\sigma_1(x))$, obtemos

$$\sigma_3((t+s) \cdot x) \rho_{\sigma_1, \sigma_3}(x, t+s) (\rho_{\sigma_2, \sigma_3}(t \cdot x, s) \rho_{\sigma_1, \sigma_2}(x, t))^{-1} = \sigma_3((t+s) \cdot x).$$

Como a ação de G em P é livre,

$$\rho_{\sigma_1, \sigma_3}(x, t+s) = \rho_{\sigma_2, \sigma_3}(t \cdot x, s) \rho_{\sigma_1, \sigma_2}(x, t).$$

□

Notemos que se tivermos com um fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}\sigma(x) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto \sigma(x)(v) = (x, v).\end{aligned}$$

Sejam φ_t e ϕ_t os fluxos em $M \times \mathbb{R}^n$ e $B(M \times \mathbb{R}^n)(M, \text{Gl}(n, \mathbb{R}))$, respectivamente. Assim, pela correspondência entre o fibrado associado $B(M \times \mathbb{R}^n) \times_{\text{Gl}(n, \mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ e o fibrado trivial dado, temos que $p \cdot v$ está relacionado a $(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n$, $x = \pi(p)$. Visto que $\sigma(t \cdot x)$ e $\phi_t(p)$ estão na mesma fibra, temos que existe $\rho(x, t) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $\phi_t(p) = \sigma(t \cdot x) \rho(x, t)$ (analogamente ao que fizemos em (6.7)). Logo, como $\varphi_t(x, v) = \phi_t(p) \cdot v$, segue que

$$\varphi_t(x, v) = \sigma(t \cdot x) \rho(x, t) v = (t \cdot x, \rho(x, t) v).$$

Assim, obtemos o fluxo no fibrado trivial, coincidindo exatamente com aquele até então trabalhado nos capítulos anteriores. De fato, $t \cdot x$ é o fluxo na base do fibrado e $\rho(x, t)$ é o cociclo T_x^t na notação dos capítulos anteriores.

É interessante observarmos que se tomarmos seções locais $\sigma'_i : U'_i \longrightarrow P$ de tal modo que $U_i \cap U'_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, os cociclos $\rho_{\sigma_1, \sigma_2}$ e $\rho_{\sigma'_1, \sigma'_2}$ estão relacionados pela seguinte expressão

$$\rho_{\sigma'_1, \sigma'_2}(x, t) = \theta_2(t \cdot x) \rho_{\sigma_1, \sigma_2}(x, t) \theta_1^{-1}(x), \quad (6.8)$$

para $x \in U_1 \cap U'_1$ e $t \cdot x \in U_2 \cap U'_2$. De fato, para todo $x \in U_1 \cap U'_1$ e $t \cdot x \in U_2 \cap U'_2$, temos que

$$\sigma'_1(x) = \sigma_1(x) \theta_1(x) \text{ e } \sigma'_2(t \cdot x) = \sigma_2(t \cdot x) \theta_2(t \cdot x).$$

Substituindo as expressões acima em $\phi_t(\sigma'_1(x)) = \sigma'_2(t \cdot x) \rho_{\sigma'_1, \sigma'_2}(x, t)$ e usando que a ação de G em P é livre, obtemos (6.8).

Como P é fibrado principal, temos que P é localmente trivial. Dessa forma, podemos supor que $P = U \times G$. Assim, localmente temos que $\phi_t(x, g) = (f_1(x), f_2(x, g))$ é tal que $f_2(x, gh) = f_2(x, g)h$. Assim, podemos induzir um fluxo em $E = U \times F$ dado por $\varphi_t(x, v) = (f_1(x), f_2(x, g)v)$.

6.3 Caso Particular do Teorema de Oseledec

A seguir veremos um exemplo, no qual definiremos um fluxo sobre um fibrado vetorial satisfazendo algumas condições e será possível calcularmos explicitamente os expoentes de Lyapunov para tal sistema. Além disso, a partir da decomposição do espaço euclidiano dada pelo Teorema de Oseledec, poderemos obter uma decomposição semelhante de cada fibra via a bijeção do espaço euclidiano com a mesma. Durante toda esta seção, consideraremos (M, Σ, μ) um espaço de probabilidade. Antes, contudo, introduziremos uma definição que será necessária ao desenvolvimento do exemplo.

Definição 6.3.1 *Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial, onde (M, Σ) é um espaço de medida. Dizemos que $F : E \longrightarrow E$ é um automorfismo (mensurável) se F é bijeção mensurável com inversa mensurável tal que o diagrama abaixo é comutativo,*

ou seja, $\pi \circ F = f \circ \pi$, onde $f : M \longrightarrow M$ é um isomorfismo e, para cada $x \in M$, $F_x := F|_{E_x} \longrightarrow E_{f(x)}$, $E_x := \pi^{-1}\{x\}$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Exemplo: Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial sobre uma variedade M de modo que $\dim E_x = n$, $x \in M$. Considere G um grupo e Φ uma ação à esquerda de G em E tal que, para cada $g \in G$, $\Phi_g \equiv \Phi(g, \cdot) : E \longrightarrow E$ é um automorfismo. Tal ação induz uma ação à esquerda φ de G em M . Dessa forma, o diagrama abaixo é comutativo, isto é, $\varphi_g \circ \pi = \pi \circ \Phi_g$, $\varphi_g \equiv \varphi(g, \cdot) : M \longrightarrow M$.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi_g} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\varphi_g} & M \end{array}$$

Suponhamos ainda que esta ação deixa invariante a probabilidade μ , isto é, $\varphi_{g*}\mu = \mu$, onde $\varphi_{g*}\mu(A) = \mu(\varphi_g^{-1}(A))$ para todo $A \in \Sigma$.

Sejam $BE(M, \text{Gl}(n, \mathbb{R}))$ o fibrado das bases de E e a ação à esquerda de G em BE , obtida pelo levantamento da ação em E , ou seja,

$$(g, p) \in G \times BE \longmapsto gp := \Phi_g \circ p \in BE.$$

Considere σ uma seção mensurável de BE , $\rho : G \longrightarrow \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ um homomorfismo e $k : G \times M \longrightarrow K$ um cociclo mensurável, onde K é um subgrupo compacto de $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$ centralizando $\rho(G)$, isto é, se $A \in K$ temos que $A\rho(g) = \rho(g)A$, para todo $g \in G$. Suponhamos ainda que

$$g\sigma(x) = \sigma(gx)k(g, x)\rho(g) \quad (6.9)$$

para todo $g \in G$ e qtp $x \in M$, onde estamos denotando por gx a ação de G em M . Afirmamos que, para cada $g \in G$, os expoentes de Lyapunov para a $\mathbb{Z}$ -ação gerada por g são os números $\log |\lambda|$, onde λ são os autovalores de $\rho(g)$.

De fato, seja $\psi_x := \Phi_g|_{E_x} : E_x \longrightarrow E_{gx}$, $x \in M$. Note que ψ_x está bem definida, pois se $v \in E_x$ então $\pi(v) = x$. Logo, $gx = \varphi_g(x) = \varphi_g \circ \pi(v) = \pi \circ \Phi_g(v)$, ou seja, $\Phi_g(v) \in \pi^{-1}\{gx\} = E_{gx}$. Tal aplicação é uma bijeção, visto que Φ_g é um automorfismo. Além disso, ψ_x é linear, já que cada fibra é isomorfa (linearmente) a $\mathbb{R}^n$. Portanto, ψ_x é um isomorfismo linear.

Seja

$$(m, v) \in \mathbb{Z} \times E \longmapsto \psi_x^m v := \psi_{g^{m-1}x} \cdots \psi_{gx} \psi_x v \in E, \quad \pi(v) = x,$$

a $\mathbb{Z}$ -ação gerada por g . Dessa forma, usando m vezes a equação (6.9), temos que

$$\begin{aligned} \psi_x^m \sigma(x) &= \psi_{g^{m-1}x} \cdots \psi_{gx} \psi_x \sigma(x) \\ &= \psi_{g^{m-1}x} \cdots \psi_{gx} \sigma(gx) k(g, x) \rho(g) \\ &\quad \vdots \\ &= \sigma(g^m x) k(g, g^{m-1}x) \rho(g) \cdots k(g, gx) \rho(g) k(g, x) \rho(g). \end{aligned}$$

Logo, como ρ é um homomorfismo e k é um cociclo que centraliza $\rho(G)$, concluímos que, para todo $g \in G$ e qtp $x \in M$,

$$\psi_x^m \sigma(x) = \sigma(g^m x) k(g^m, x) \rho(g)^m. \quad (6.10)$$

Como $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial, temos que E_x tem a estrutura de espaço vetorial. Logo, para cada $x \in M$, seja $\|\cdot\|_x$ uma norma em E_x . Seja $\|\cdot\|$ uma norma k -invariante em $\mathbb{R}^n$, onde a existência de tal norma deve-se ao fato de K ser um subgrupo compacto. Definamos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} |\cdot|_x : E_x &\longmapsto \mathbb{R}^+ \\ u &\longmapsto |u|_x := \|\sigma(x)^{-1}u\|. \end{aligned}$$

Como $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$ e $\sigma(x)$ é um isomorfismo linear, temos que $|\cdot|_x$ é uma norma em E_x . Notemos ainda que $\sigma(x)$ é uma isometria com relação a essa norma. De fato, $|\sigma(x)v|_x = \|\sigma(x)^{-1}\sigma(x)v\| = \|v\|$, $v \in \mathbb{R}^n$. As normas $\|\cdot\|_x$ e $|\cdot|_x$ em E_x , $x \in M$, são equivalentes. De fato, seja $u \in E_x$; logo, existe um único $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma(x)v = u$. Assim,

$$\|u\|_x = \|\sigma(x)v\|_x \leq \|\sigma(x)\| \|v\| = \|\sigma(x)\| \|\sigma(x)^{-1}u\| = \|\sigma(x)\| |u|_x.$$

Por outro lado,

$$|u|_x = \|\sigma(x)^{-1}u\| \leq \|\sigma(x)^{-1}\| \|u\|_x,$$

ou seja, $\|u\|_x \geq \frac{1}{\|\sigma(x)^{-1}\|} |u|_x$. Logo,

$$\frac{1}{\|\sigma(x)^{-1}\|} |u|_x \leq \|u\|_x \leq \|\sigma(x)\| |u|_x. \quad (6.11)$$

Consideremos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os autovalores distintos de $\rho(g)$. Sejam $\chi_1 > \dots > \chi_s$ os valores distintos em $\{\log |\lambda_1|, \dots, \log |\lambda_r|\}$. Tomemos v um vetor não-nulo em $E_{\chi_l} = \sum_{i,j \in \Sigma_l} V_{\lambda_i} \oplus V_{\lambda_j, \bar{\lambda}_j}$, onde $\Sigma_l := \{i : \log |\lambda_i| = \chi_l\}$, $1 \leq l \leq s$, e V_{λ_i} , $V_{\lambda_j, \bar{\lambda}_j}$ são os autoespaços generalizados reais associados aos autovalores λ_i e λ_j de $\rho(g)$, respectivamente. Como $\sigma(x)$ é um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^n$ em E_x , temos que existe $u \in E_x$ tal que $\sigma(x)^{-1}u = v$. Assim, usando a equação (6.10) e a norma $|\cdot|_{g^m x}$ em $E_{g^m x}$,

$$\frac{1}{m} \log |\psi_x^m u|_{g^m x} = \frac{1}{m} \log |\psi_x^m \sigma(x)v|_{g^m x} = \frac{1}{m} \log |\sigma(g^m x)k(g^m, x)\rho(g^m)v|_{g^m x}.$$

Como $\|\cdot\|$ é uma norma k -invariante em $\mathbb{R}^n$ e $\sigma(g^m x)$ é uma isometria com relação a norma $|\cdot|_{g^m x}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \log |\psi_x^m u|_{g^m x} &= \frac{1}{m} \log \|k(g^m, x)\rho(g)^m v\| \\ &= \frac{1}{m} \log \|\rho(g)^m v\|; \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 2.2.1,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |\psi_x^m u|_{g^m x} = \chi_l,$$

com relação a norma $|\cdot|_{g^m x}$ em $E_{g^m x}$. Resta mostrarmos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\psi_x^m u\|_{g^m x} = \chi_l, \quad (6.12)$$

onde $\|\cdot\|_{g^m x}$ é a norma dada em $E_{g^m x}$. Por (6.11), temos que

$$\frac{1}{\|\sigma(g^m x)^{-1}\|} |\psi_x^m u|_{g^m x} \leq \|\psi_x^m u\|_{g^m x} \leq \|\sigma(g^m x)\| |\psi_x^m u|_{g^m x}.$$

Assim, para obtermos (6.12), basta mostrarmos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \|\sigma(g^m x)\| = 0.$$

Seja $A = \{x \in M : \|\sigma(x)\| \leq c\}$. Tendo em vista que a aplicação $x \in M \mapsto \|\sigma(x)\|$ é mensurável, temos que $A \in \Sigma$. Para cada $g \in G$, $\varphi_g : M \rightarrow M$ é uma transformação mensurável que preserva medida. Logo, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré (Teorema 1.1.1), temos que para qtp $x \in A$, $g^m x \in A$ para infinitos $m \geq 1$. Logo, $\frac{1}{m} \log \|\sigma(\varphi_g^m(x))\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Dessa forma,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\psi_x^m u\|_{\varphi_g^m x} = \chi_l,$$

para todo $g \in G$ e qtp $x \in A$. Notemos que se a norma dada do isomorfismo $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow E_x$ for uniformemente limitada sobre x , os expoentes de Lyapunov existiriam para qtp $x \in M$. Analogamente caso M seja uma variedade compacta.

Ainda pela Proposição 2.2.1, obtemos uma decomposição de $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = E_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus E_{\chi_s}.$$

Identificando cada fibra E_x , $x \in M$, com $\mathbb{R}^n$ via o isomorfismo linear $\sigma(x)$ obtemos uma decomposição de E_x como no Teorema Ergódico Multiplicativo de tal modo que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|\psi_x^m u\|_{\varphi_g^m x} = \log \chi_l,$$

para qtp $x \in M$ e todo $u \in \sigma(x)(E_{\chi_l}) \setminus \{0\}$. □

Apêndice A

Produto Exterior

Seja E um espaço vetorial de dimensão d e para cada inteiro $1 \leq k \leq d$, seja $\wedge^k E$ o k -produto exterior de E , ou seja, o espaço vetorial das formas k -lineares alternadas no espaço dual E^* . O espaço $\wedge^k E$ pode ser identificado com o conjunto dos elementos

$$\sum_{i=1}^m c_i (u_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge u_k^{(i)}),$$

onde $m \in \mathbb{N}$, $c_i \in \mathbb{R}$ e $u_j^{(i)} \in E$ e,

$$(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k)(f_1, f_2, \dots, f_k) := \det(f_i(u_j))_{ij},$$

$f_1, f_2, \dots, f_k \in E^*$. É claro que as seguintes propriedades são válidas em $\wedge^k E$:

- $u_1 \wedge \cdots \wedge (u_j + u_j') \wedge \cdots \wedge u_k = (u_1 \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_k) + (u_1 \wedge \cdots \wedge u_j' \wedge \cdots \wedge u_k)$;
- $u_1 \wedge \cdots \wedge cu_j \wedge \cdots \wedge u_k = c(u_1 \wedge \cdots \wedge u_j \wedge \cdots \wedge u_k)$;
- para qualquer permutação τ de $\{1, \dots, k\}$, $u_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge u_{\tau(k)} = \text{sgn}(\tau) u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$.

Um elemento em $\wedge^k E$ da forma $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ é chamado de k -vetor decomponível.

Lema A.0.1 *Seja $\wedge^k E$ o k -produto exterior de E , onde $1 \leq k \leq d = \dim E$.*

(i) *Se $e_1, \dots, e_d$ é uma base de E , então $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq d\}$ é uma base de $\wedge^k E$.*

(ii) O conjunto $\{u_1, \dots, u_k\}$ em E é linearmente independente se, e somente se, $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$ é não-nulo.

(iii) Os conjuntos linearmente independentes $\{u_1, \dots, u_k\}$, $\{v_1, \dots, v_k\}$ em E possuem o mesmo subespaço gerado se, e somente se, $u_1 \wedge \dots \wedge u_k = \lambda(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)$, para algum $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em E . Então, a forma bilinear

$$\langle u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle := \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{ij}$$

define um produto interno em $\wedge^k E$. Particularmente, podemos definir uma norma em $\wedge^k E$ proveniente do produto interno, isto é, para $u_1, \dots, u_k \in E$ temos que

$$\|u_1 \wedge \dots \wedge u_k\| = \sqrt{\det(\langle u_i, u_j \rangle)_{ij}}.$$

Considere T um operador linear em E ; definamos $T^{\wedge k}$ um operador linear em $\wedge^k E$ dado por

$$T^{\wedge k}(u_1 \wedge \dots \wedge u_k) = Tu_1 \wedge \dots \wedge Tu_k$$

$u_1, \dots, u_k \in E$. Seja $\{e_1, \dots, e_d\}$ uma base ortonormal em E . Dessa forma, podemos associar a transformação linear $T^{\wedge k}$ à uma matriz em $\mathbb{R}^m$, $m = \binom{d}{k}$, com relação à base $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}\}$. Além disso, convém observarmos que se T é uma matriz ortogonal, então $T^{\wedge k}$ é uma isometria com relação à norma definida em $\wedge^k E$. De fato, para todo $u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \wedge^k E$,

$$\begin{aligned} \langle T^{\wedge k}(u_1 \wedge \dots \wedge u_k), T^{\wedge k}(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \rangle &= \det(\langle Tu_i, Tv_j \rangle)_{ij} = \det(\langle u_i, v_j \rangle)_{ij} \\ &= \langle u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle. \end{aligned}$$

Seja

$$\|T^{\wedge k}\| = \sup \{ \|T^{\wedge k}w\| : w \in \wedge^k E \text{ e } \|w\| = 1 \}.$$

Logo, é fácil ver que para quaisquer transformações lineares T_1 e T_2 em E ,

$$(T_1 T_2)^{\wedge k} = (T_1^{\wedge k})(T_2^{\wedge k}) \text{ e } \|(T_1 T_2)^{\wedge k}\| \leq \|T_1^{\wedge k}\| \|T_2^{\wedge k}\|.$$

Lema A.0.2 *Seja T uma matriz em $\mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ e $\delta_1(T) \geq \dots \geq \delta_d(T) \geq 0$ os valores singulares de T . Então, para todo inteiro $1 \leq k \leq d$,*

$$\|T^{\wedge k}\| = \prod_{i=1}^k \delta_i(T).$$

Demonstração: Seja PDQ , $D = \text{diag}(\delta_1(T), \dots, \delta_d(T))$, a decomposição de T a valores singulares, isto é, $T = PDQ$. Como $P^{\wedge k}$ e $Q^{\wedge k}$ são isometrias em $\wedge^k \mathbb{R}^d$, temos que

$$\|T^{\wedge k}\| = \|D^{\wedge k}\|$$

Entretanto,

$$D^{\wedge k}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \delta_{i_1}(T) \dots \delta_{i_k}(T)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}).$$

Dessa forma,

$$\|T^{\wedge k}\| = \sup \{ \delta_{i_1}(T) \dots \delta_{i_k}(T) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d \} = \prod_{i=1}^k \delta_i(T).$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] Arnold, L., *Random Dynamical Systems*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 1998.
- [2] Barreira, L., Pesin, Ya., *Lectures on Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Proc. Sympos. Pure Math., 69, 3-106, Amer. Math. Soc., 2001.
- [3] Bourbaki N., *Intégration*, Vol. VI, Chapitre 6, Hermann, 1959.
- [4] Braga Barros, C.J., San Martin, L.A.B., *Chain transitive sets for flows on flag bundles*, Forum Math., to appear.
- [5] Castaing, C., Valadier, M., *Convex analysis and measurable multifunctions*, nº 580, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975.
- [6] Coddington, E. A., Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [7] Feres, R., *Dynamical Systems and Semisimple Groups: An Introduction*, Cambridge University Press, 1998.
- [8] Goldsheid, I. Y., Margulis, G. A., *Lyapunov indices of a product of random matrices*, Russian Mathematical Surveys, 44:11-71, Number 5, 1989.
- [9] Kato, T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, second edition edition, 1980.

-
- [10] Kingman, J. F. C., *Subadditive processes*, in École d'été des probabilités de Saint-Flour, Lecture Notes in Math., nº **539**, Berlin, Springer, 1976.
 - [11] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, John Wiley & Sons, Vol. 1, 1963.
 - [12] Lax, P. D., *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, 2002.
 - [13] Lima, E. L., *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2000.
 - [14] Mañé, R., *Teoria Ergódica*, Coleção Projeto Euclides, IMPA, 1983.
 - [15] Oseledec, V. I., *A multiplicative ergodic theorem. Ljapunov characteristic numbers for dynamical systems*, Trans. Moscow Math. Soc. **19** (1968), 197-231.
 - [16] San Martin, L. A. B., *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, Campinas, 1999.
 - [17] Royden, H. L., *Real Analysis*, Second edition, The Macmillan Company, New York, 1968.
 - [18] Ruelle, D., *Ergodic theory of differentiable systems*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **50** (1979), 27-58.
 - [19] Ruffino, P. R. C., *Produto de Matrizes Aleatórias*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1992.
 - [20] Walters, P., *A dynamical proof of the multiplicative ergodic theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 335, Number 1, January 1993.
 - [21] Walters, P., *Ergodic Theory - Introductory Lectures*, Lectures Notes in Math., nº **458**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975.
 - [22] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, Second Edition, 1968.