UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Anna Paula Machado de Oliveira

Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas em Sistemas Dinâmicos Suaves Por Partes

CAMPINAS

2017

Anna Paula Machado de Oliveira

Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas em Sistemas Dinâmicos Suaves Por Partes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática.

Orientador: Ricardo Miranda Martins

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pela aluna Anna Paula Machado de Oliveira, e orientada pelo Prof. Dr. Ricardo Miranda Martins.

Campinas

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 140288/2015-5; CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4o
Oliveira, Anna Paula Machado de, 1988-
Órbitas homoclínicas e heteroclínicas em sistemas dinâmicos suaves por partes / Anna Paula Machado de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Ricardo Miranda Martins.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. Filippov, Sistemas de. I. Martins, Ricardo Miranda,1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Homoclinic and heteroclinic solutions in piecewise smooth dynamical systems
Palavras-chave em inglês:
Ordinary differential equations
Dynamical systems theory
Filippov systems
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutora em Matemática
Banca examinadora:
Ricardo Miranda Martins [Orientador]
Ketty Abaroa de Rezende
José Régis Azevedo Varão Filho
Claudio Aguinaldo Buzzi
Ana Cristina de Oliveira Mereu
Data de defesa: 21-08-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 21 de agosto de 2017 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). CLAUDIO AGUINALDO BUZZI

Prof(a). Dr(a). ANA CRISTINA DE OLIVEIRA MEREU

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

A Deus, aos meus pais e

a todos aqueles que moram em meu coração.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelos caminhos que abriu e abre em vida.

Agradeço aos meus pais, Rosângela e Antônio, por não medirem esforços para que meus sonhos possam se realizar, por me amarem incondicionalmente, pelas orações nos momentos de dificuldade e por estarem presentes apesar de toda distância geográfica.

Agradeço aos meus familiares pela torcida e pelas orações.

Agradeço à Rafaela e ao Matheus por terem se tornado verdadeiros padrinhos durante toda essa jornada. Sem o apoio incondicional, a ajuda e a amizade de vocês eu não sei se teria conseguido chegar até aqui.

Agradeço aos amigos de longa caminhada vindos da UFV: Aline, Wanderley, Luiz e Victor. Campinas foi um reencontro para nós e pôde fortalecer mais ainda nossos laços. Obrigada por tudo.

Agradeço ao Jhony pelos momentos compartilhados e por ter se tornado um amigo tão presente e importante nos últimos meses de doutorado.

Agradeço aos amigos Otávio, Kamila, Thais e Fernando que se tornaram uma verdadeira "família dinâmica". Obrigada por todo conhecimento ensinado e compartilhado e principalmente por todo apoio e amizade durante o Doutorado. Fica aqui também o meu agradecimento à todos os demais amigos e colegas do grupo de pesquisa de Sistemas Dinâmicos.

Agradeço assim a todos os amigos que fiz durante essa jornada no IMECC. Obrigada pelos ensinamentos e pelas boas experiências vividas.

Agradeço à Priscila pelo apoio, carinho, amizade, companheirismo, por ouvir minhas reclamações e acreditar mais em mim do que eu mesma. Sem seu incentivo essa tese não seria possível.

Agradeço ao Yury por sempre me colocar pra cima e sempre estar disponível para me ouvir, levantar o meu astral e me abraçar (mesmo à distância).

Agradeço ao professor Ricardo pela paciência, por ouvir meus desabafos, pela compreensão, pelas oportunidades, pelos ensinamentos e por todo apoio e ajuda que me deu nos últimos anos.

Agradeço ao professor Jaume Llibre pela orientação no período sanduíche que fiz na Espanha. Juntamente, agradeço à professora Regilene pela oportunidade desse estágio no exterior e as pessoas maravilhosas que pude conhecer durante essa experiência.

Agradeço à Banca pelas contribuições feitas ao trabalho.

Agradeço aos professores e funcionários do IMECC pelo seu profissionalismo e dedicação.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro ao trabalho, tanto o realizado na UNICAMP, quanto ao feito na UAB.

“Do not let your fire go out, spark by irreplaceable spark in the
hopeless swamps of the not quite, the not yet, and the not at all.
Do not let the hero in your soul perish in lonely frustration
for the life you deserved and have never been able to reach.
The world you desire can be won. It exists. It is real.
It is possible. It is yours.”
(Ayn Rand - Atlas Shrugged)

Resumo

Nesta tese estudamos condições para existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas em Sistemas Dinâmicos Descontínuos, usando como base a teoria desenvolvida por Filippov.

Inicialmente damos condições para a existência de órbitas homoclínicas para sistemas planares lineares por partes, em especial o caso sela-sela.

A seguir provamos a existência de um fenômeno análogo ao de Shil'nikov em sistemas dinâmicos descontínuos em dimensão 3, inclusive no caso em que existe uma T-singularidade numa vizinhança da variedade de descontinuidade.

Finalmente, estudamos a existência de conexões homoclínicas e ciclos limite em um modelo descontínuo por partes com um dos sistemas sendo um hamiltoniano não-linear e o outro uma sela linear.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias; Teoria dos sistemas dinâmicos; Filippov, Sistemas de.

Abstract

In this thesis, we study conditions for the existence of homoclinic and heteroclinic orbits in Discontinuos Dynamical Systems (using the Filippov's convention).

Initially, we give conditions for the existence of homoclinic orbits for piecewise linear planar systems, especially in the saddle-saddle case.

Then we study the existence of a similar phenomenon of Shilnikov in Discontinuos Dynamical Systems in dimension 3. We also included the case in which there exists a T-singularity in a neighborhood of the discontinuous manifold.

Finally, we study the existence of homoclinic connections and limit cycles in a piecewise discontinuous model with the associated system being nonlinear and hamiltonian and the other one a linear saddle.

Keywords: Ordinary differential equations; Dynamical systems theory; Filippov Systems.

Sumário

Introdução

O estudo de Sistemas Dinâmicos Descontínuos vem amplamente se desenvolvendo nos últimos anos e existem vários problemas em aberto, principalmente no que se refere a adaptações de resultados e fenômenos clássicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos Suaves.

Nesse contexto, o objetivo dessa tese é fazer um estudo sobre conexões homoclínicas em três diferentes situações:

i) no caso sela-sela linear em $\mathbb{R}^2$,

ii) para equações não-lineares por partes em $\mathbb{R}^2$ e

ii) em $\mathbb{R}^3$ para estudar o fenômeno de Shil'nikov.

Apesar de grandes nomes terem contribuído para os conceitos necessários para o estudo de órbitas homoclínicas, como Poincaré, Birkhoff, Van der Pol entre outros, o grande salto nesse estudo ocorreu com Stephen Smale. Na década de 60, Smale utilizou um exemplo geométrico capaz de descrever o complicado comportamento que pode ocorrer no entorno de uma órbita homoclínica.

Mais tarde Shil'nikov garantiu a ocorrência de conexões homoclínicas em que existam uma quantidade enumerável de órbitas periódicas em qualquer vizinhança dessa conexão homoclínica para sistemas dinâmicos suaves em $\mathbb{R}^3$.

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos Descontínuos. Usamos como base o artigo [6] de Guardia, Seara e Teixeira.

No Capítulo 2, tendo como pontapé inicial o artigo [13] que apresenta o estudo de órbitas homoclínicas em dimensão 2 para os casos sela-foco e sela-centro visíveis não degenerados e para o caso nó-nó degenerado com estabilidades opostas, nos inspiramos a buscar condições para a existência de órbitas homoclínicas que surgissem em sistemas lineares do tipo sela-sela. Construímos o problema para a órbita homoclínica nesse caso sela-sela e assim os resultados para órbitas heteroclínicas seguiram quase de imediato.

No Capítulo 3 adaptamos o estudo feito por Llibre, Ponce e Teruel em [8] sobre a existência de órbitas homoclínicas do tipo Shil'nikov para sistemas dinâmicos contínuos (ao invés de suaves como feito pelo próprio Shil'nikov) para sistemas dinâmicos descontínuos e verificamos resultados similares ao apresentado nesse artigo original.

No Capítulo 4 retornamos ao problema da existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas em $\mathbb{R}^2$ em sistemas dinâmicos descontínuos onde consideramos novamente em Σ^- um campo linear do tipo sela e em Σ^+ tomamos um campo não-linear como o apresentado no capítulo 6 de [9].

Capítulo 1

Sistemas de Filippov

A descrição de fenômenos naturais, físicos e de modelos reais através de sistemas de equações diferenciais é algo comum na teoria clássica de Sistemas Dinâmicos, entretanto, vários tipos de fenômenos não são bem descritos usando essa ferramenta, tais como, suspensão de pontes, vibrações, ruídos e alguns sistemas mecânicos.

A fim de conceber uma melhor descrição para os casos acima citados, surgiu a teoria de Sistemas Dinâmicos Descontínuos que podem ser obtidos através de Sistemas Suaves por partes ou também conhecidos como Sistemas de Filippov. A ideia básica é considerarmos um subconjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^n$ e subvariedades de codimensão 1 (regiões de descontinuidade) que dividam essa variedade U em "pedaços", de forma que, em cada "pedaço" podemos definir diferentes campos suaves. Para que essa teoria fique formalizada, é necessário que adaptemos as definições básicas da teoria clássica para a teoria descontínua e esse é o objetivo deste capítulo: apresentar o básico da formalização da Teoria de Sistemas Suaves por partes.

1.1 Sistemas de Filippov

Seja $\mathcal{X}^r$ o espaço dos campos de vetores $\mathcal{C}^r$ definido sobre um subconjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{R}^n$, com a topologia $\mathcal{C}^r$, $r > 1$ e seja $\mathcal{Z}^r$ o espaço dos campos de vetores Z em U tais que

$$Z(x) = \begin{cases} X(x) & \text{se} \quad f(x) > 0 \\ \\ Y(x) & \text{se} \quad f(x) < 0 \end{cases}, \tag{1.1.1}$$

onde $X, Y \in \mathcal{X}^r$, $f : U \to \mathbb{R}$ tem 0 com valor regular e $\Sigma = f^{-1}(0)$ é uma subvariedade de codimensão 1 em U. Consideramos $\mathcal{Z}^r = \mathcal{X}^r \times \mathcal{X}^r$ e um elemento $Z \in \mathcal{Z}^r$ é denotado por $Z = (X, Y)_f$ com $X, Y \in \mathcal{X}^r$ e dizemos que Z é um **sistema suave por partes**, **descontínuo** ou um **sistema de Filippov**.

Observe que Σ divide M em dois conjuntos abertos

$$\Sigma^+ = \{x \in M : f(x) > 0\} \ \text{ e } \ \Sigma^- = \{x \in M : f(x) < 0\}$$

que são exatamente os conjuntos onde definimos os campos X e Y, respectivamente.

Após definirmos sistemas de Filippov, o próximo passo é definirmos as trajetórias que passam através dos pontos de U para que assim seja possível definir a dinâmica dada por um sistema de Filippov $Z = (X, Y)_f$. As trajetórias locais são descritas pela Convenção de Filippov que apresentaremos na próxima seção. Quando não houver perigo de confusão sobre qual região de descontinuidade estamos trabalhando, abreviaremos a notação apenas para $Z = (X, Y)$.

1.2 Convenção de Filippov

Para descrevermos a trajetória local em um ponto $p \in U$, ou seja, seu fluxo $\varphi_Z(t, p)$, primeiramente precisamos observar se esse ponto pertence à Σ, Σ^+ ou Σ^-.

Se p pertence à Σ^+ ou Σ^- definimos a trajetória local nesse ponto como a trajetória dada, respectivamente, pelos campos X e Y da maneira usual.

Se p pertence a Σ devemos ter um pouco mais de cuidado ao definir trajetória local e para isso começamos observando que Σ pode ser dividido como o fecho das 3 regiões a seguir, que são definidas dependendo da forma como apontam os campos X e Y:

1. **Região de costura:** $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p).Yf(p) > 0\}$,

2. **Região de deslize estável (ou deslize):** $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0, Yf(p) > 0\}$,

3. **Região de deslize instável (ou escape):** $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0, Yf(p) < 0\}$,

onde $Xf(p) = \langle X, \nabla f\rangle(p)$ e $Yf(p) = \langle Y, \nabla f\rangle(p)$ são, respectivamente, as derivadas de Lie de f com respeito ao campos de vetores X e Y em p.

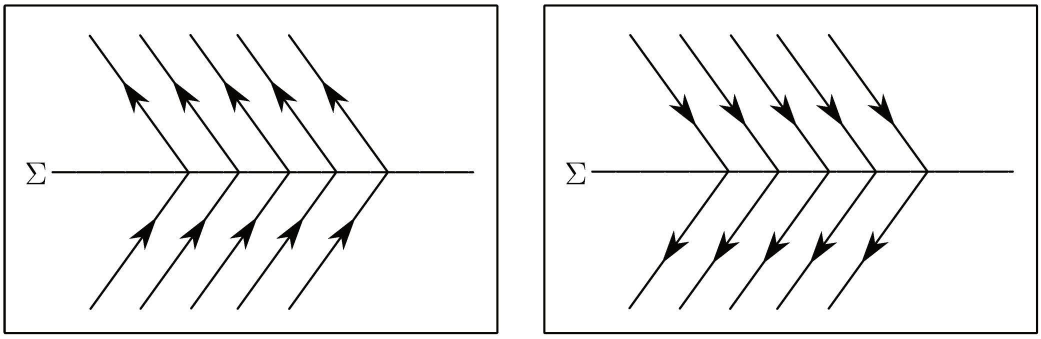

Figura 1.1: Regiões de costura

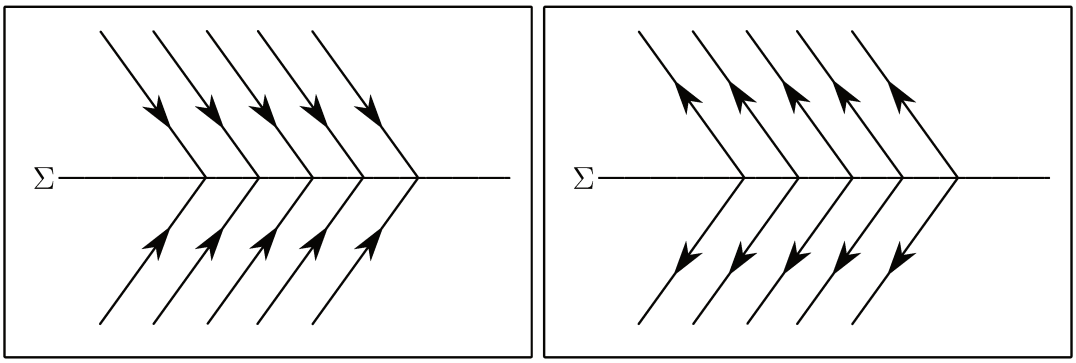

Figura 1.2: Região de deslize estável (esquerda) e Região de deslize instável (direita)

Definição 1.2.1. Seja $p \in \Sigma$. Se $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$ então p é chamado **ponto de tangência**.

Observação 1.2.2. A trajetória que passa por p só é de fato tangente à Σ se $Xf(p) = 0$ e $X(p) \neq 0$. No caso em que $Xf(p) = 0$ e $X(p) = 0$, p é ponto crítico de X em Σ e eles aparecem nas fronteiras entre as regiões Σ^c, Σ^s e Σ^e.

Existem diferentes tipos de tangência que podem ser distinguidos dependendo do contato entre a trajetória que passa pelo ponto e Σ. A seguir definiremos dois destes tipos.

Definição 1.2.3. Um campo vetorial suave X possui uma **dobra** ou **tangência quadrática** com Σ em p se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) = \langle X, \nabla Xf\rangle(p) \neq 0$.

Definição 1.2.4. Um campo vetorial suave X possui uma **cúspide** ou **tangência cúbica** com Σ em p se $Xf(p) = X^2f(p) = 0$ e $X^3f(p) \neq 0$.

De maneira não rigorosa, para definirmos trajetória em um ponto $p \in \Sigma^c$, basta sobrepormos as trajetórias de X e Y em p. Sendo assim, no caso de $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ precisamos definir o seguinte campo:

$$Z^s(p) = \frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}. \tag{1.2.1}$$

Esse campo vetorial é chamado de **campo vetorial deslizante** e a trajetória em $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ é dada por ele. Observe que o campo vetorial deslizante é dado pela combinação convexa entre $X(p)$ e $Y(p)$ e que $Z^s(p)$ é sempre tangente à Σ como podemos ver na Figura 1.3:

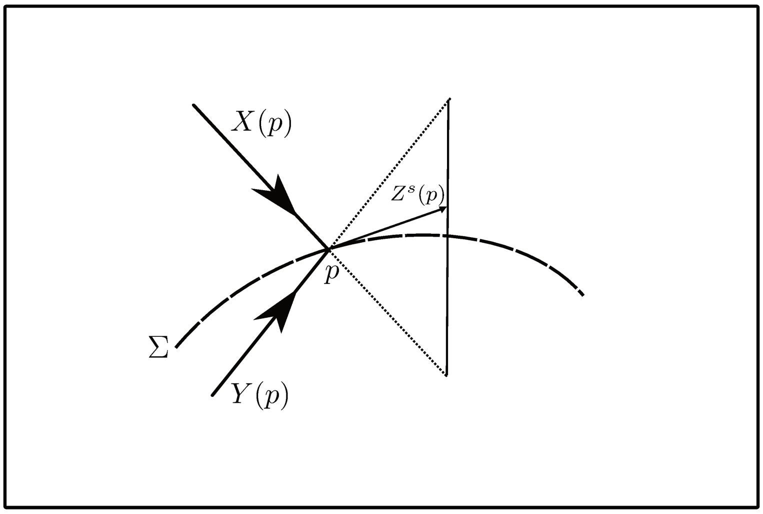

Figura 1.3: Definição de Campo Deslizante Z^s

A seguir, damos uma definição formal de trajetória:

Definição 1.2.5. A **trajetória local** de um Sistema de Filippov como (1.1.1) por um ponto p é definida da seguinte maneira:

1. Para $p \in \Sigma^+$ e $p \in \Sigma^-$, tais que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$, respectivamente, a trajetória é dada por $\varphi_Z(t,p) = \varphi_X(t,p)$ e $\varphi_Z(t,p) = \varphi_Y(t,p)$, para $t \in I \subset \mathbb{R}$, também respectivamente.

2. Para $p \in \Sigma^c$, temos dois casos:

(a) Se $Xf(p), Yf(p) > 0$ e tomando a origem do tempo em p, definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t,p) = \begin{cases} \varphi_X(t,p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \\ \varphi_Y(t,p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

(b) Se $Xf(p).Yf(p) < 0$ e tomando a origem do tempo em p, definimos a trajetória por:

$$\varphi_Z(t,p) = \begin{cases} \varphi_Y(t,p), & t \in I \cap \{t \geq 0\}, \\ \\ \varphi_X(t,p), & t \in I \cap \{t \leq 0\}. \end{cases}$$

3. Para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) \neq 0$, definimos $\varphi_Z(t,p) = \varphi_{Z^s}(t,p)$ para $t \in I$, onde Z^s é o campo vetorial deslizante dado pela equação (1.2.1).

4. Para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que as trajetórias para pontos em Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidem, a trajetória por p é essa trajetória estendida. Nesse caso dizemos que p é um ponto de tangência regular.

5. Para pontos p que não se enquadram nos itens acima, definimos $\varphi_Z(t,p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$. Esse é o caso dos pontos críticos de X e Y em $\Sigma^{\pm}$, e dos pontos críticos do campo deslizante Z^s em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$. Também estão incluídos os pontos de tangência em Σ que não são regulares, chamados pontos de tangência singulares.

Definição 1.2.6. A **órbita local** de um ponto $p \in U$, é o conjunto

$$\gamma(p) = \{\varphi_Z(t,p);\ t \in I\}.$$

Observe que do ponto de vista topológico, o comportamento do fluxo na região de costura ou em pontos de $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ é o mesmo.

Observação 1.2.7. Como trabalharemos com sistemas autônomos utilizaremos os conceitos de trajetória e órbita de forma indistinta, quando não houver chance de confusão.

A convenção de Filippov mantém uma das principais características da teoria de sistemas dinâmicos suaves: o espaço de fase continua sendo formado pelo pela união disjunta de todas as órbitas.

Definição 1.2.8. Consideramos como **singularidade** ou **equilíbrio** do sistema (1.1.1) os pontos:

1. $p \in \Sigma^{\pm}$ tal que $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$ (pontos de equilíbrio de X ou de Y que pertençam, respectivamente à Σ^+ ou Σ^-).

2. $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) = 0$. Nesse caso p é chamado de **pseudo-equilíbrio**.

3. $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$ (pontos de tangência entre Z e Σ).

   Qualquer ponto que não seja classificado como singularidade (ou seja, se encaixe nos casos acima), será chamado de **ponto regular**.

Diferentemente do caso suave, em sistemas de Filippov, a trajetória através de singularidades não é necessariamente o próprio ponto e por isso necessitamos de definições um pouco mais específicas.

Definição 1.2.9. As singularidades do sistema (1.1.1) podem ser divididas da seguinte forma:

1. Uma singularidade p é dita **distinguida** se $\gamma(p) = \{p\}$.

2. Uma singularidade p é dita **não distinguida** se p é um ponto de tangência regular, e assim, mesmo não sendo pontos regulares, possuem órbita local homeomorfa à $\mathbb{R}$.

No caso das singularidades distinguidas, podemos ainda fazer uma classificação mais específica como temos a seguir:

Observação 1.2.10. Um ponto $p \in U$ é uma singularidades distinguida se p satisfaz um dos casos a seguir:

1. $p \in \Sigma^{\pm}$ tal que $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$.

2. $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) = 0$.

3. $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ é um ponto de tangência singular.

Uma observação importante é que, como as componentes X e Y do sistema de Filippov $Z = (X, Y)_f$ estão definidas, respectivamente, em vizinhanças abertas de $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, existem pontos críticos de X e Y que não pertencem à $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente. Esse tipo de ponto crítico será chamado de **ponto crítico não admissível** ou **invisível** em contrapartida, os pontos críticos do Sistema de Filippov $Z = (X, Y)_f$ que são pontos críticos de X ou Y serão chamados **pontos críticos admissíveis** ou **visíveis**. Note que pontos críticos não admissíveis não são considerados pontos críticos de $Z = (X, Y)_f$.

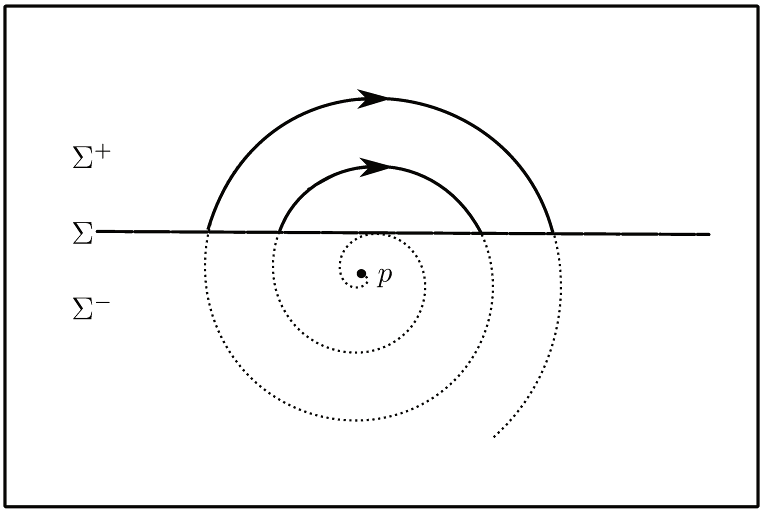

Figura 1.4: Exemplo de foco não admissível

A mesma definição de "não admissível" acima fica também válida para os objetos invariantes (órbitas periódicas, variedades estáveis e instáveis) dos campos X e Y que não pertençam, respectivamente a $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$.

Mesmo escolhendo a definição de órbita de maneira a termos unicidade da órbita que passa por um $p \in U$, um ponto $p \in \Sigma$ pode pertencer ao fecho de muitas órbitas. Sendo assim, se faz necessária a seguinte definição:

Definição 1.2.11. Dados um ponto $p \in \Sigma$ e uma trajetória $\varphi_Z(t, q) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, dizemos que p é um ponto de partida de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 < 0$ tal que $\lim_{t \to t_0^+} \varphi_Z(t, q) = p$ e diremos que é um ponto de chegada de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 > 0$ tal que $\lim_{t \to t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$.

Observe que, de acordo com a nossa definição de fluxo, se $p \in \Sigma^c$, então p é o **ponto de partida** de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer ponto q pertencente à órbita $\gamma^+(p) = \{\varphi_Z(t, q); t \in I \cap [0, \infty)\}$ e é o **ponto de chegada** de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer ponto q pertencente à órbita

$\gamma^-(p) = \{\varphi_Z(t,q); t \in I \cap (-\infty, 0]\}$. Assim, para um ponto $p \in \Sigma^c$ temos que

$$\gamma(p) = \{p\} \cup \gamma^+(p) \cup \gamma^-(p).$$

Definição 1.2.12. Uma **órbita regular maximal** de Z é uma curva suave por partes γ tal que:

1. $\gamma \cap \Sigma^+$ e $\gamma \cap \Sigma^-$ é uma união de órbitas dos campos vetoriais suaves X e Y, respectivamente.

2. A interseção $\gamma \cap \Sigma$ é formada apenas por pontos de costura e pontos de tangência regulares em $\partial \Sigma^c$.

3. γ é maximal com respeito a essas condições.

Note que uma órbita regular nunca atinge Σ^s ou Σ^e.

Definição 1.2.13. Uma **órbita deslizante maximal** (ou órbita singular) de Z é uma curva suave $\gamma \subset \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^e}$ que é uma órbita maximal do campo vetorial suave Z^s.

Exemplos dessas definições apresentadas anteriormente juntamente com informações mais aprofundadas dessa teoria podem ser encontradas em [6].

1.3 Ciclos, Separatrizes e Órbitas Periódicas

Nessa seção apresentamos as definições de objetos dinâmicos usuais em Sistemas de Filippov. Comecemos com a definição que utilizaremos para separatriz:

Definição 1.3.1. Seja $p \in U$ um ponto de sela para X ou Y em $\overline{\Sigma^\pm}$ ou uma singularidade distinguida em Σ. Sob essas condições temos:

- Se p é um ponto de sela para X em $\overline{\Sigma^+}$, então a **separatriz instável** de p é a variedade invariante instável, denotada por $W^u(p)$, dada por

$$W^u(p) = \{q \in U | \varphi_Z(t,q) \text{ está definido para } (-\infty, 0] \text{ e } \lim_{t \to -\infty} \varphi_Z(t,q) = p\}.$$

  Temos uma definição análoga para $p \in \overline{\Sigma^-}$.

- Se $p \in \Sigma$ é uma singularidade distinguida, então a **separatriz instável** é uma órbita regular que possui p como ponto de partida. Denotaremos esta separatriz por $W^u_\pm(p)$, onde o subscrito $\pm$ significa que a órbita está contida em $\Sigma^\pm$.

De maneira análoga, definimos a **separatriz estável** de um ponto $p \in U$ que será denotada por $W^s(p)$ e $W^s_\pm(p)$ em relação a cada um dos casos acima.

Da definição anterior, observe que no primeiro caso, a trajetória sobre a separatriz alcança p em tempo infinito, como no caso de Sistemas Suaves. No segundo caso, isso pode ocorrer em tempo finito.

Definição 1.3.2. Se uma separatriz é estável e instável, ao mesmo tempo, dizemos que ela é uma **conexão de separatrizes**.

No que se refere à órbitas periódicas, além das de X em $\overline{\Sigma^+}$ ou de Y em $\overline{\Sigma^-}$, existem aquelas que não estão contidas em $\Sigma^\pm$ mas apresentam o mesmo comportamento e a seguir iremos defini-las.

Definição 1.3.3. Uma órbita periódica regular é uma órbita regular $\gamma = \{\varphi_Z(t,p) : t \in \mathbb{R}\}$ que pertence à $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ e satisfaz $\varphi_Z(t+T,p) = \varphi_Z(t,p)$ para algum $T > 0$.

Observe que segundo as definições de trajetória aqui apresentadas, não podem existir órbitas periódicas formada por pontos de $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ e $\Sigma^s \cup \Sigma^e$ simultaneamente. Dessa forma, faz-se necessária a definição a seguir para lidar com movimentos periódicos que tenham movimentos regulares e deslizantes.

Definição 1.3.4. Um **ciclo** é o fecho de um conjunto finito de pedaços de órbitas, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, tal que γ_{2k} é um pedaço de órbita deslizante e γ_{2k+1} é uma órbita regular maximal e os pontos de chegada e de partida de γ_{2k+1} pertecem ao fecho das órbitas γ_{2k} e γ_{2k+2}, respectivamente. Definimos o **período** do ciclo como sendo a soma dos tempos que são gastos em cada parte da trajetória γ_i, $i = 1, ..., n$

Outra importante definição quando se trata de equivalências topológicas e bifurcações em Sistemas de Filippov será apresentada a seguir:

Definição 1.3.5. Definimos um **pseudociclo** como o fecho de um conjunto de órbitas regulares $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ tal que uma das extremidades (os pontos de chegada e de partida) de qualquer γ_i coincide com uma extremidade de γ_{i-1} e a outra, com uma extremidade de γ_{i+1} (e também entre γ_1 e γ_n) formando uma curva homeomorfa a $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, de modo que, em algum ponto, dois pontos de chegada ou partida coincidem.

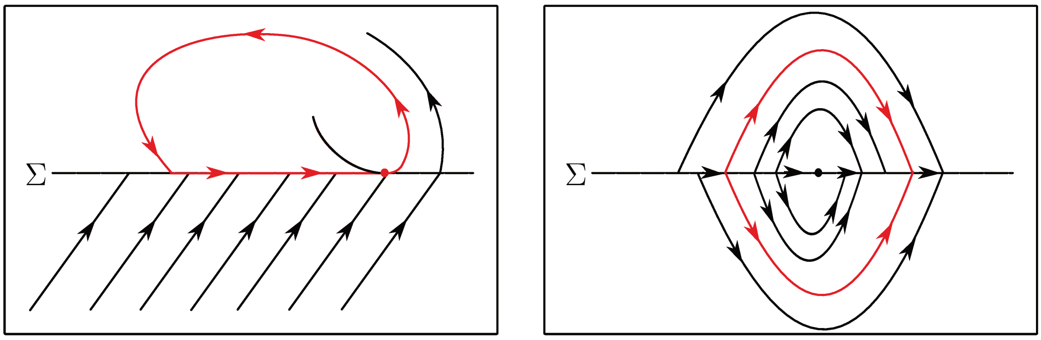

Figura 1.5: Exemplos de um ciclo (esquerda) e de um pseudociclo (direita).

Na próxima seção apresentaremos dois tipo de equivalência para Sistemas de Filippov de forma a preservarem os objetos definidos nessa seção que aqui se encerra.

1.4 Equivalência Topológica em Sistemas de Filippov

Nessa seção apresentaremos dois tipos de equivalências para Sistemas de Filippov: $\Sigma-$equivalência e equivalência topológica.

Definição 1.4.1. Dois sistemas de Filippov Z e $\tilde{Z}$ definidos em abertos U e $\tilde{U}$, com regiões de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente, são $\Sigma-$**equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \to \tilde{U}$ que preserva orientação e que leva órbitas de Z em órbitas de $\tilde{Z}$ e Σ em $\tilde{\Sigma}$.

Uma $\Sigma-$equivalênica preserva órbitas regulares, singularidades distinguidas pontos de chegada e partida e, consequentemente, $\overline{\Sigma^c}$, $\overline{\Sigma^s}$ e $\overline{\Sigma^e}$ são preservados e portanto leva órbitas deslizantes em órbitas deslizantes e faz o mesmo com separatrizes e suas conexões, órbitas periódicas, ciclos e pseudociclos.

A seguir temos outro tipo de equivalência que deve ser considerada:

Definição 1.4.2. Dois sistemas de Filippov $Z, \tilde{Z} \in \mathcal{Z}^r$ definidos em aberto U e $\tilde{U}$ com regiões de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente, são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \to \tilde{U}$ que preserva orientação e que leva órbitas de Z em órbitas de $\tilde{Z}$.

Segue das duas últimas definições que se dois Sistemas de Filippov são $\Sigma-$equivalentes então eles são topologicamente equivalentes, porém a implicação contrária não ocorre.

Diferentemente da $\Sigma-$equivalência, no caso de equivalência topológica a região de descontinuidade não é preservada entretanto essa definição garante que o comportamento qualitativo de Z e $\tilde{Z}$ é topologicamente similar.

No nosso caso, para obtermos uma equivalência topológica entre Sistemas de Filippov, trabalharemos com conjugações aplicadas as componentes X e Y de um sistema $Z = (X, Y)_f$ como veremos na próxima proposição.

Proposição 1.4.3. Consideremos qualquer difeomorfismo $h : U \to \tilde{U}$ que conjuga simultaneamente X em $\Sigma^+ \subset U$ e $\tilde{X}$ em $\tilde{\Sigma}^+ \subset \tilde{U}$ além de Y em $\Sigma^- \subset U$ e $\tilde{Y}$ em $\tilde{\Sigma}^- \subset \tilde{U}$. Então h também conjuga os campos vetoriais deslizantes Z^s e $\tilde{Z}^s$. Portanto temos uma equivalência topológica entre $Z = (X, Y)_f$ e $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})_{\tilde{f}}$.

Demonstração: Como h conjuga X e $\tilde{X}$ além de Y e $\tilde{Y}$ temos que $h_*X = \tilde{X}$ e $h_*Y = \tilde{Y}$ onde $h_*X(p) = Dh(h^{-1}(p))X(h^{-1}(p))$ e $h_*Y(p) = Dh(h^{-1}(p))Y(h^{-1}(p))$, $p \in \tilde{U}$.

Sendo $\Sigma = \{p \in U : f(p) = 0\}$ segue que $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{p} \in \tilde{U} : f \circ h^{-1}(\tilde{p}) = 0\}$. Lembrando que para uma função $g : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, V aberto, temos $h_*g = g \circ h^{-1}$ o objetivo é mostrar que $h_*Z^s = \tilde{Z}^s$. Para isso observe que:

$$\begin{aligned}
h_*(Xf)(\tilde{p}) &= Xf(h^{-1}(\tilde{p})) = X(h^{-1}(\tilde{p})).\nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) = I_n X(h^{-1}(\tilde{p})).\nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) \\
&= Dh^{-1}(\tilde{p})Dh(h^{-1}(\tilde{p}))X(h^{-1}(\tilde{p})).\nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) = Dh^{-1}(\tilde{p})h_*X(\tilde{p}).\nabla f(h^{-1}(\tilde{p})) \\
&= h_*X(\tilde{p}).(\nabla f(h^{-1}(\tilde{p})))^{tr}(Dh^{-1}(\tilde{p}))^{tr} = h_*X(\tilde{p}).\nabla(f \circ h^{-1})(\tilde{p}) \\
&= h_*X(\tilde{p}).\nabla(h_*f)(\tilde{p}) = h_*Xh_*f(\tilde{p}) = \tilde{X}\tilde{f}(\tilde{p}).
\end{aligned}$$

Analogamente, $h_*(Yf)(\tilde{p}) = \tilde{Y}\tilde{f}(\tilde{p})$.

E assim usando a definição de campo deslizante e as igualdades que acabamos de encontrar temos

$$h_*Z^s(\tilde{p}) = \tilde{Z}^s(\tilde{p}).$$

□

Note que as equivalências topológicas construídas na Proposição 1.4.3 também são $\Sigma-$equivalências pois preservam Σ.

Observação 1.4.4. Como as equivalências não são difeomorfismos, não temos conjugações entre campos deslizantes. Entretanto, esse ponto só é relevante se o objetivo do estudo em questão são órbitas deslizantes.

Finalizamos esse capítulo com as definições gerais de órbitas homoclínicas e heteroclínicas em que os equilíbrios envolvidos são visíveis e de forma que essa órbita corte Σ apenas na região de costura.

Definição 1.4.5. Uma órbita contida em $\Sigma^c \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ é chamada **homoclínica** se tem ambos os conjuntos ω-limite e α-limite consistidos do mesmo ponto de equilíbrio admissível, chamado equilíbrio limite, que, juntamente com a órbita homoclínica, constituem o loop homoclínico. Nesse caso, também diremos que temos a ocorrência de uma conexão homoclínica.

Definição 1.4.6. Uma órbita contida em $\Sigma^c \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ é chamada **heteroclínica** se tem como conjuntos ω-limite e α-limite dois equilíbrios admissíveis distintos, que, juntos com a órbita heteroclínica, constituem o loop heteroclínico. Nesse caso, também diremos que temos a ocorrência de uma conexão heteroclínica.

Apresentaremos mais a frente definições especiais desse tipo de órbita para os casos nos quais os equilíbrios envolvidos nessas definições são pseudo-equilíbrios.

Nos próximos capítulos trabalharemos com Sistemas de Filippov com o objetivo de garantirmos a existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas em diversas situações.

Capítulo 2

Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas em Sistemas Planares Lineares Por Partes

A principal proposta deste capítulo é estudar o problema da existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas em sistemas de Filippov planares e lineares. Apresentaremos condições necessárias e suficientes para a existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas nesses sistemas para o caso sela-sela visíveis.

Em [13], Xu *et al.* estudaram os casos sela-foco e sela-centro visíveis não degenerados e o caso nó-nó degenerado com estabilidades opostas em $\mathbb{R}^2$ e com o objetivo de completar esse estudo optamos por estudar o caso sela-sela visíveis. Utilizamos também como referências para esse capítulo os trabalhos de Artés *et al.* em [3] e o trabalho de Homburg e Sandstede em [7].

2.1 Construindo o Problema

Considere a função $h(x, y) = x + y + 1$ e $\Sigma = h^{-1}(0)$, ou seja, a região de descontinuidade que trabalharemos é a reta $x + y + 1 = 0$.

A escolha dessa reta se justifica por nossa opção em deixar a origem "livre", de maneira que, na origem ocorrerá uma das selas com a qual trabalharemos já que isso não tira a generalidade dos resultados.

Comecemos construindo o campo X que será definido em $\Sigma^+ \subset \mathbb{R}^2$. Para esse campo, queremos que a sela linear ocorra em $O = (0,0)$ e que os autovalores associados a essa sela sejam $\mu_1 > 0$ e $-\lambda_1 < 0$. Para descrevermos os autovetores associados a esses autovalores indicaremos os pontos nos quais as variedades invariantes interceptam Σ já que dessa maneira, os autovetores ficarão automaticamente definidos. Consideraremos $(\alpha_1, -\alpha_1 - 1) = W^u_X(O) \cap \Sigma$ e $(\beta_1, -\beta_1 - 1) = W^s_X(O) \cap \Sigma$ onde $W^u_X(O)$ e $W^s_X(O)$ representam, respectivamente, as variedades instável e estável da sela O. Observe que o índice X que acrescentamos a $W^s_X(O)$ e $W^u_X(O)$ tem a função de especificar a qual campo essa variedade está associada e pode ser dispensado quando não houver perigo de confusão. O mesmo acontecerá para a construção do próximo campo.

Dessa forma, o campo que construímos é dado por $X(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \Sigma^+$ onde

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1\beta_1(\alpha_1+1) + \mu_1\alpha_1(\beta_1+1)}{\alpha_1 - \beta_2} & \dfrac{\alpha_1\beta_1(\lambda_1+\mu_1)}{\alpha_1 - \beta_1} \\ -\dfrac{(\alpha_1+1)(\beta_1+1)(\lambda_1+\mu_1)}{\alpha_1 - \beta_1} & -\dfrac{\alpha_1\lambda_1(\beta_1+1) + \beta_1\mu_1(\alpha_1+1)}{\alpha_1 - \beta_1} \end{pmatrix}.$$

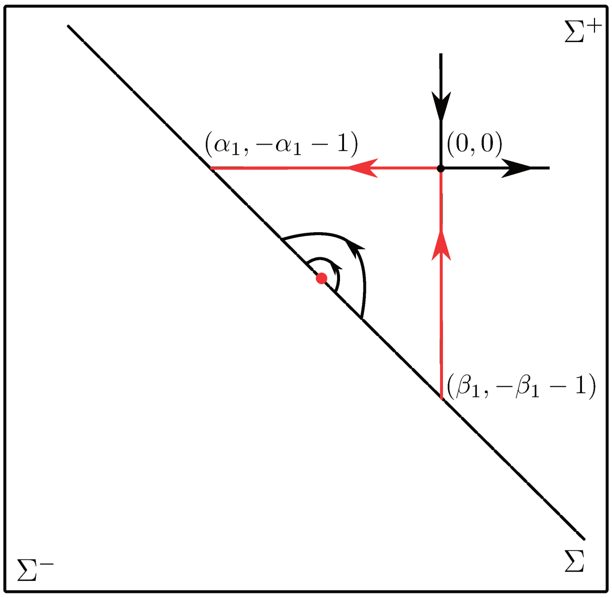

Figura 2.1: Campo X

De forma análoga, construímos o campo Y em $\Sigma^- \subset \mathbb{R}^2$. Para esse campo, queremos que a sela ocorra em $E = (-\varepsilon_1, -\varepsilon_2)$ e para que essa sela seja visível (admissível), devemos impor que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 1$. Os autovalores serão dados por $\mu_2 > 0$ e $-\lambda_2 < 0$ e ainda $(\alpha_2, -\alpha_2 - 1) = W^s_Y(E) \cap \Sigma$

e $(\beta_2, -\beta_2-1) = W_Y^u(E)\cap\Sigma$ onde $W_Y^u(E)$ e $W_Y^s(E)$ representam, respectivamente, as variedades instável e estável da sela E.

Assim, o campo que construímos é dado por $Y(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{e}$ onde

$$B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{\mu_2(\beta_2+\varepsilon_1)(\alpha_2-\varepsilon_2+1)+\lambda_2(\alpha_2+\varepsilon_1)(\beta_2-\varepsilon_2+1)}{(\alpha_2-\beta_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-1)},\\
b_2 &= \frac{(\varepsilon_1+\beta_2)(\varepsilon_1+\alpha_2)(\mu_2+\lambda_2)}{(\alpha_2-\beta_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-1)},\\
c_2 &= \frac{\left[(\varepsilon_2-1)^2+(\alpha_2+\beta_2)(1-\varepsilon_2)+\alpha_2\beta_2\right](\lambda_2+\mu_2)}{(\alpha_2-\beta_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-1)},\\
d_2 &= \frac{(1-\varepsilon_2)(\alpha_2\mu_2+\beta_2\lambda_2)+(\lambda_2+\mu_2)(\alpha_2\beta_2-\varepsilon_1\varepsilon_2)+\varepsilon_1\lambda_2(\alpha_2+1)+\varepsilon_1\mu_2(\beta_2+1)}{(\alpha_2-\beta_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-1)},
\end{aligned}$$

e $\mathbf{e} = (a_2\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2, c_2\varepsilon_1 + d_2\varepsilon_2)$.

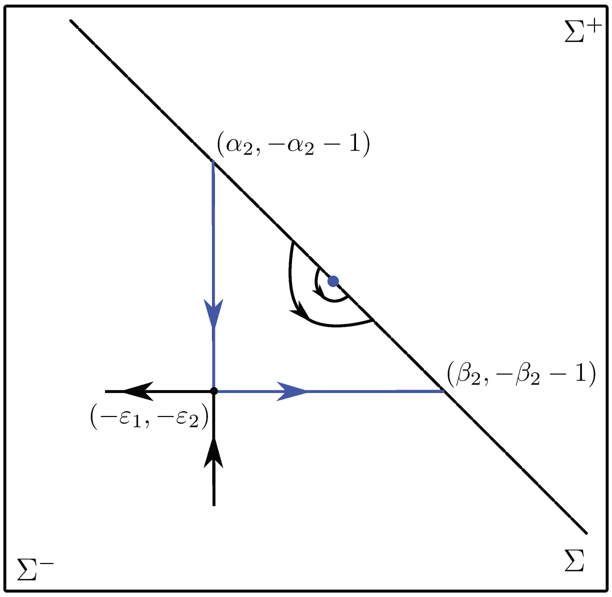

Figura 2.2: Campo Y

A seguir, apresentamos algumas propriedades inerentes aos campos X restrito a Σ^+, Y restrito a Σ^- e Z. Para os próximos lemas, suponha sempre que $\alpha_2 \le \alpha_1 < \beta_1 \le \beta_2$.

Lema 2.1.1. O campo de vetores $X(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, para $\mathbf{x} = (x, y) \in \Sigma^+$ satisfaz:

1. $X(0,0) = \mathbf{0}$.

2. os autovetores de A são $v_1 = -(\alpha_1, -\alpha_1 - 1)$ (associado à $\mu_1 > 0$) e $w_1 = -(\beta_1, -\beta_1 - 1)$ (associado à $-\lambda_1 < 0$).

3. o ponto $\left(\dfrac{\alpha_1\lambda_1 + \beta_1\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, -\dfrac{\alpha_1\lambda_1 + \lambda_1 + \beta_1\mu_1 + \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}\right) \in \Sigma$ é o ponto de tangência de X com Σ.

Demonstração: Os dois primeiros itens são consequência direta da construção dos campos. Sendo assim, demonstraremos apenas o terceiro item. Temos que $Xh(x,y) = \nabla(h(x,y)).X(x,y)$, como $\nabla(h(x,y)) = (1,1)$ (pois $h(x,y) = x + y + 1$), segue que

$$Xh(x,y) = -\frac{x(\alpha_1\lambda_1 + \lambda_1 + \beta_1\mu_1 + \mu_1) + y(\alpha_1\lambda_1 + \beta_1\mu_1)}{\alpha_1 - \beta_1}.$$

As tangências do campo X com Σ são encontradas através da solução do sistema

$$\begin{cases} Xh(x,y) = 0 \\ \\ h(x,y) = 0 \end{cases}$$

e disso, segue que $\left(\dfrac{\alpha_1\lambda_1 + \beta_1\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, -\dfrac{\alpha_1\lambda_1 + \lambda_1 + \beta_1\mu_1 + \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}\right)$ é o ponto de tangência de X com Σ.

□

Lema 2.1.2. O campo de vetores $Y(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{e}$, para $\mathbf{x} = (x,y) \in \Sigma^-$ satisfaz:

1. $Y(-\varepsilon_1, -\varepsilon_2) = \mathbf{0}$.

2. os autovetores de B são $v_2 = (\beta_2 + \varepsilon_1, -\beta_2 + \varepsilon_2 - 1)$ (associado à $\mu_2 > 0$) e $w_2 = (\alpha_2 + \varepsilon_1, -\alpha_2 + \varepsilon_2 - 1)$ (associado à $-\lambda_2 < 0$).

3. o ponto $\left(\dfrac{\alpha_2\mu_2 + \beta_2\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}, -\dfrac{\beta_2\lambda_2 + \mu_2 + \lambda_2 + \alpha_2\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}\right) \in \Sigma$ é o ponto de tangência de Y com Σ.

Demonstração: Seguindo a mesma ideia do lema anterior e usando que

$$
\begin{aligned}
Yh(x,y) = & \frac{x(\alpha_2\mu_2+\beta_2\lambda_2-\lambda_2\varepsilon_2-\mu_2\varepsilon_2+\lambda_2+\mu_2)+y(\alpha_2\mu_2+\beta_2\lambda_2+\mu_2\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_1)}{\alpha_2-\beta_2} \\
& + \frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\alpha_2\mu_2+\beta_2\lambda_2)+\varepsilon_1(\lambda_2+\mu_2)}{\alpha_2-\beta_2},
\end{aligned}
$$

segue que $\left(\dfrac{\alpha_2\mu_2+\beta_2\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}, -\dfrac{\beta_2\lambda_2+\mu_2+\lambda_2+\alpha_2\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}\right)$ é o ponto de tangência de Y com Σ. □

Agora, definimos o seguinte campo de vetores linear por partes

$$
Z(x,y) = \begin{cases} X(x,y), & (x,y) \in \Sigma^+ \\ \\ Y(x,y), & (x,y) \in \Sigma^- \end{cases} \tag{2.1.1}
$$

e denotamos por $Z = (X,Y)$.

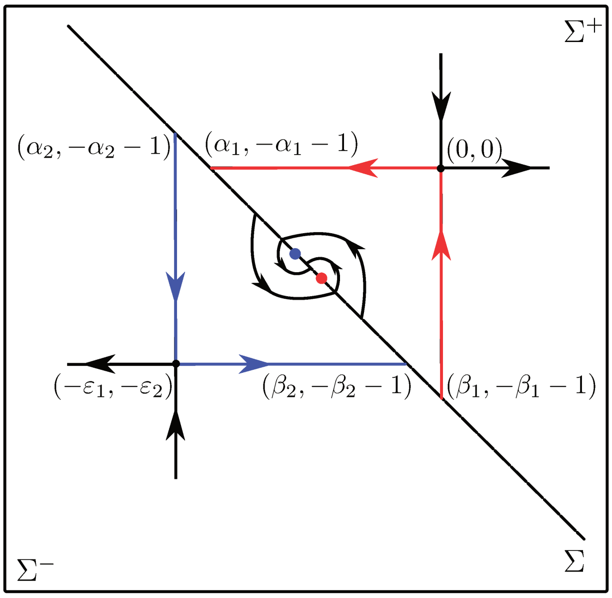

Figura 2.3: Campo $Z = (X,Y)$

A seguir temos o primeiro resultado referente ao campo Z.

Teorema 2.1.3. O campo de vetores $Z = (X,Y)$ tem:

1. tangências coincidentes em Σ se

$$
\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\frac{(\alpha_1\lambda_1-\alpha_2\lambda_1+\beta_1\mu_1-\alpha_2\mu_1)}{\alpha_1\lambda_1-\beta_2\lambda_1+\beta_1\mu_1-\beta_2\mu_1}.
$$

2. tangências distintas em Σ, caso contrário.

Demonstração: Basta compararmos os pontos de tangência dos campos X e Y dados respectivamente pelos Lemas 2.1.1 e 2.1.2. $\square$

2.2 O Campo Deslizante

Nos casos em que as tangências são distintas, surge uma região de deslize em Σ entre essas tangências. Utilizando $Xh(x,y)$ e $Yh(x,y)$ encontrados nas demonstrações dos lemas 2.1.1 e 2.1.2 e lembrando que estamos sobre Σ, portanto, $y=-x-1$ temos

$$Z^s(x) = \left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}, -\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)\right)$$

onde

$a = -\alpha_2\lambda_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_2\mu_1 - \beta_2\lambda_1\mu_2 - \beta_2\mu_1\mu_2 - \varepsilon_1\lambda_1\lambda_2 - \varepsilon_1\lambda_1\mu_2 + \varepsilon_2\lambda_2\mu_1 + \varepsilon_2\mu_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 - \mu_1\mu_2$

$b = \alpha_2\beta_2\lambda_1\lambda_2 + \alpha_2\beta_2\lambda_1\mu_2 + \alpha_2\beta_2\lambda_2\mu_1 + \alpha_2\beta_2\mu_1\mu_2 + \alpha_2\varepsilon_1\lambda_1\mu_2 - \alpha_2\varepsilon_2\mu_1\mu_2 + \beta_2\varepsilon_1\lambda_1\lambda_2 - \beta_2\varepsilon_2\lambda_2\mu_1 - \alpha_2\lambda_1\lambda_2 + \alpha_2\mu_1\mu_2 - \beta_2\lambda_1\mu_2 + \beta_2\lambda_2\mu_1 - \varepsilon_1\lambda_1\lambda_2 - \varepsilon_1\lambda_1\mu_2$

$c = \alpha_2\beta_2\lambda_1\lambda_2 + \alpha_2\beta_2\lambda_1\mu_2 + \alpha_2\varepsilon_1\lambda_1\mu_2 + \beta_2\varepsilon_1\lambda_1\lambda_2$

$d = \alpha_2\lambda_1 + \alpha_2\mu_1 - \beta_2\lambda_1 - \beta_2\mu_1 + \varepsilon_1\lambda_2 + \varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\lambda_2 + \varepsilon_2\mu_2 - \lambda_2 - \mu_2$

$e = -\alpha_2\varepsilon_1\mu_2 - \alpha_2\varepsilon_2\mu_2 - \beta_2\varepsilon_1\lambda_2 - \beta_2\varepsilon_2\lambda_2 + \alpha_2\lambda_1 + \alpha_2\mu_2 - \beta_2\lambda_1 + \beta_2\lambda_2$

Seja p a tangência associada ao campo X e q a tangência associada ao campo Y. Suponha, sem perda de generalidade, que a 1ª coordenada de p seja menor que a 1ª coordenada de q. Pela construção dos campos $X=(X_1,X_2)$ e $Y=(Y_1,Y_2)$[1] segue que $X_1(p)<0$, $X_2(p)>0$, $X_1(q)>0$, $X_2(q)<0$, $Y_1(p)<0$, $Y_2(p)<0$, $Y_1(q)>0$ e $Y_2(q)>0$.

Como $h(x,y)=x+y+1$ temos que $\nabla h(x,y)=(1,1)$ daí:

$$Xh(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x}).\nabla h(\mathbf{x}) = (X_1(\mathbf{x}),X_2(\mathbf{x})).(1,1) = X_1(\mathbf{x})+X_2(\mathbf{x})$$
$$Yh(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x}).\nabla h(\mathbf{x}) = (Y_1(\mathbf{x}),Y_2(\mathbf{x})).(1,1) = Y_1(\mathbf{x})+Y_2(\mathbf{x})$$

Assim,

$$Xh(p)=0 \Rightarrow X_1(p)+X_2(p)=0 \Rightarrow X_1(p) = -X_2(p)$$
$$Yh(q)=0 \Rightarrow Y_1(q)+Y_2(q)=0 \Rightarrow Y_1(q) = -Y_2(q)$$

[1]Cuidado, aqui estamos apenas nos referindo às coordenadas dos campos X e Y e não usando a notação de Sistemas de Filippov.

Lembrando que

$$Z^s(\mathbf{x}) = \frac{Yh(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) - Xh(\mathbf{x})Y(\mathbf{x})}{Yh(\mathbf{x}) - Xh(\mathbf{x})},$$

para $\mathbf{x} \in \Sigma$, nosso objetivo é encontrar pontos $\mathbf{x} \in \Sigma$ tais que $Z^s(\mathbf{x}) = 0$, ou seja, $\mathbf{x} \in \Sigma$ tais que $Yh(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) - Xh(\mathbf{x})Y(\mathbf{x}) = 0$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
Yh(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) - Xh(\mathbf{x})Y(\mathbf{x}) =& (Y_1(\mathbf{x}), Y_2(\mathbf{x}))(X_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x})) - (X_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x}))(Y_1(\mathbf{x}), Y_2(\mathbf{x})) \\
=& (X_1(\mathbf{x})Y_1(\mathbf{x}) + X_1(\mathbf{x})Y_2(\mathbf{x}) - X_1(\mathbf{x})Y_1(\mathbf{x}) - X_2(\mathbf{x})Y_1(\mathbf{x}) \\
& , X_2(\mathbf{x})Y_1(\mathbf{x}) + X_2(\mathbf{x})Y_2(\mathbf{x}) - X_1(\mathbf{x})Y_2(\mathbf{x}) - X_2(\mathbf{x})Y_2(\mathbf{x})) \\
=& (X_1(\mathbf{x})Y_2(\mathbf{x}) - X_2(\mathbf{x})Y_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x})Y_1(\mathbf{x}) - X_1(\mathbf{x})Y_2(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

Observe então, que nesse caso, para zerarmos $Yh(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) - Xh(\mathbf{x})Y(\mathbf{x})$ devemos zerar $X_1(\mathbf{x})Y_2(\mathbf{x}) - X_2(\mathbf{x})Y_1(\mathbf{x})$.

Lembrando que $X_1(p) < 0$, $X_2(p) > 0$, $X_1(q) > 0$, $X_2(q) < 0$, $Y_1(p) < 0$, $Y_2(p) < 0$, $Y_1(q) > 0$, $Y_2(q) > 0$, $X_1(p) = -X_2(p)$ e $Y_1(q) = -Y_2(q)$.

Em p temos

$$\begin{aligned}
X_1(p)Y_2(p) - X_2(p)Y_1(p) &= X_1(p)Y_2(p) + X_1(p)Y_1(p) \\
&= X_1(p)[Y_1(p) + Y_2(p)] > 0
\end{aligned}$$

Em q temos

$$\begin{aligned}
X_1(q)Y_2(q) - X_2(q)Y_1(q) &= X_1(q)Y_2(q) + X_2(q)Y_2(q) \\
&= [X_1(q) + X_2(q)]Y_2(q) < 0
\end{aligned}$$

Nesse caso particular que construímos, $X_1(\mathbf{x})Y_2(\mathbf{x}) - X_2(\mathbf{x})Y_1(\mathbf{x})$ restrito à Σ é um polinômio de grau 2 como vimos anteriormente. Além disso, esse polinômio é positivo em p e negativo em q, então segue do teorema do valor intermediário que existe $c_0 \in \Sigma$ tal que $X_1(c_0)Y_2(c_0) - X_2(c_0)Y_1(c_0) = 0$. A unicidade de c_0 é garantida pelo fato de termos um polinômio de grau 2.

Se a 1ª coordenada de p for maior que a 1ª coordenada de q as contas são análogas. Sendo assim, temos o seguinte resultado

Proposição 2.2.1. Considerando $Z = (X, Y)$ o campo de vetores definido nesse capítulo, temos que se as tangências de X e Y em Σ não coincidem então existirá uma região de deslize em Σ que será instável ou estável dependendo das posições dessas tangências em Σ. Em ambos os casos, o campo deslizante admitirá a existência de um único pseudo-equilíbrio.

2.3 Caso Homoclínico

Nessa seção apresentamos condições necessárias e suficientes para a existência de loop homoclínico com equilíbrio limite na origem. A seguir, combinaremos esse resultado com as possibilidades existentes para os posicionamentos dos pontos de tangência de cada um dos campos X e Y.

Teorema 2.3.1. O campo de vetores $Z = (X, Y)$ tem um loop homoclínico com equilíbrio limite na origem se, e somente se,

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\ln\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \beta_2}\right)\left(\ln\left(\frac{\beta_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)\right)^{-1}.$$

Demonstração: Inicialmente calculamos a órbita do campo Y que passa por $\mathbf{x} = (\alpha_1, -\alpha_1 - 1)$ e assim temos:

$$\gamma_{\mathbf{x}}(t) = (x(t), y(t)),$$

onde:

$$\begin{aligned}
x(t) = &-\frac{1}{(\alpha_2 + 1 - \varepsilon_2)(\beta_2 + 1 - \varepsilon_2)}\Big[(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\beta_2 + \beta_2\varepsilon_2 + \alpha_1 - \beta_2) \\
&.(\alpha_2\varepsilon_2 - \alpha_2\beta_2 - \varepsilon_1\beta_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_2 - \varepsilon_1)\frac{\exp(-\lambda_2 t)}{\alpha_2 - \beta_2} \\
&+ (\alpha_1\beta_2 - \alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2\beta_2 + \alpha_2\varepsilon_1 - \beta_2\varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_2 + \varepsilon_1)\frac{\exp(\mu_2 t)}{\alpha_2 - \beta_2} \\
&- \varepsilon_1\varepsilon_2(\alpha_2 + \beta_2 - \varepsilon_2 - 2) + \varepsilon_1(\alpha_2\beta_2 + \alpha_2 + \beta_2 + 1)\Big]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
y(t) = &-(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\beta_2 + \beta_2\varepsilon_2 + \alpha_1 - \beta_2)\frac{\exp(-\lambda_2 t)}{\alpha_2 - \beta_2} \\
&+ (\alpha_1\beta_2 - \alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_1 - \alpha_2)\frac{\exp(\mu_2 t)}{\alpha_2 - \beta_2} - \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Precisamos agora garantir que essa órbita passe por $(\beta_1, -\beta_1 - 1)$ e para isso precisamos ter $x(t_0) = \beta_1$ e $y(t_0) = -\beta_1 - 1$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Assim, resolvendo o sistema que se forma, chegamos que para $t_0 = \ln\left(\frac{\beta_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right).\frac{1}{\mu_2}$, o ponto $(\beta_1, -\beta_1 - 1) \in \gamma_{\mathbf{x}}$ sob a condição:

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\ln\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \beta_2}\right)\left(\ln\left(\frac{\beta_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)\right)^{-1}.$$

$\square$

Corolário 2.3.2. O campo de vetores $Z = (X, Y)$ tem um único ponto de tangência em Σ e um loop homoclínico com equilíbrio limite na origem se, e somente se,

1. $$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\ln\left(\dfrac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\beta_2}\right)(\beta_2-\beta_1)+\ln\left(\dfrac{\beta_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\right)(\beta_1-\alpha_2)}{\ln\left(\dfrac{\beta_1-\beta_2}{\alpha_1-\beta_2}\right)(\alpha_1-\beta_2)+\ln\left(\dfrac{\beta_1-\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\right)(\alpha_2-\alpha_1)}$$

2. $$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\frac{(\alpha_1\lambda_1-\alpha_2\lambda_1+\beta_1\mu_1-\alpha_2\mu_1)}{\alpha_1\lambda_1+\beta_1\mu_1-\beta_2\lambda_1-\beta_2\mu_1}$$

Demonstração: A condição de tangências coincidentes é dada pelo Teorema 2.1.3 e da existência de loop homoclínico é dada pelo Teorema 2.3.1, portanto basta fazer uma combinação desses dois resultado que chegamos no resultado esperado. $\square$

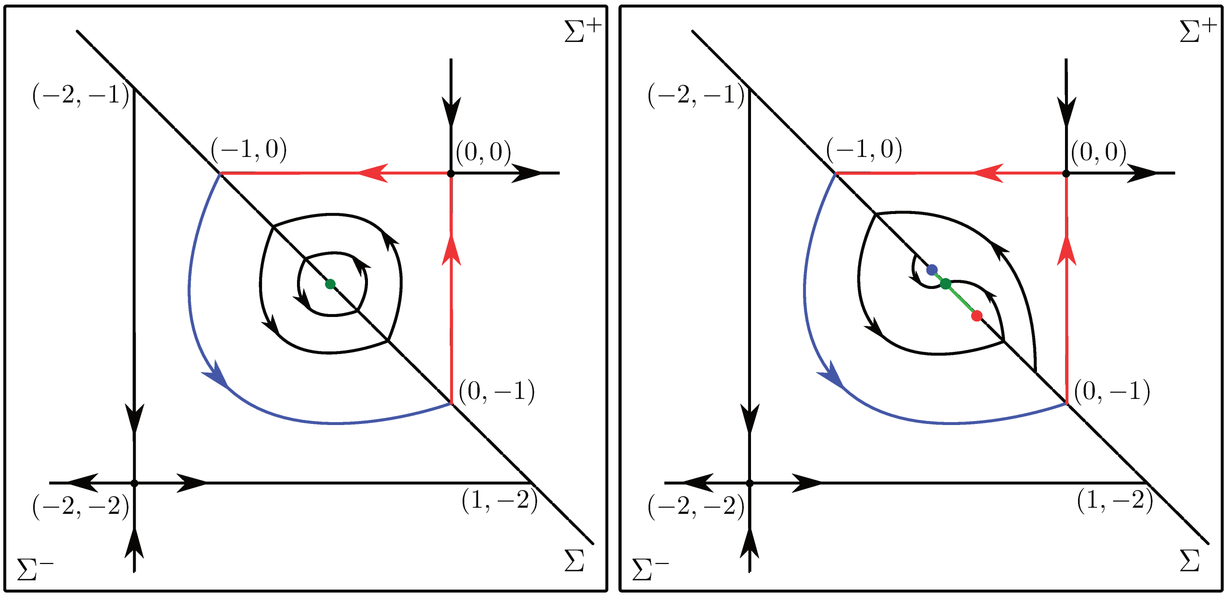

Figura 2.4: Exemplos de órbitas homoclínicas com: tangências coincidentes para os parâmetros $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ (esquerda) e tangências distintas para os parâmetros $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ (direita)

No primeiro caso do exemplo acima, não temos a existência de região de deslize já que as tangências coincidem no ponto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. No segundo caso, as tangências ocorrem nos pontos $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (para o campo X) e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (para o campo Y). Surge um campo deslizante formado por uma região de deslize estável entre essas tangências, que contém um pseudo-equilíbrio atrator no ponto $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}, \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{33}\right)$.

2.4 Caso Heteroclínico

O caso heteroclínico, de forma geral é mais simples que o homoclínico pela maneira como construímos o problema. Como tomamos na construção os pontos de interseção das variedades invariantes de cada sela com Σ, para que ocorram órbitas heteroclínicas, basta que esses pontos coincidam, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2$ ou $\beta_1 = \beta_2$.

Teorema 2.4.1. O campo de vetores $Z = (X, Y)$ tem pontos de tangência coincidentes em Σ e exatamente uma órbita heteroclínica se, e somente se

1. $\dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = -\dfrac{\mu_1(\beta_1 - \alpha)}{\mu_1(\beta_1 - \beta_2) + \lambda_1(\alpha - \beta_2)}$, no caso $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.
2. $\dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = -\dfrac{\lambda_1(\alpha_1 - \alpha_2) + \mu_1(\beta - \alpha_2)}{\lambda_1(\alpha_1 - \beta)}$, no caso $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

Demonstração: Utilizando o resultado encontrado no Teorema 2.1.3 e as hipóteses de $\alpha_1 = \alpha_2$ ou $\beta_1 = \beta_2$ segue o resultado. □

Corolário 2.4.2. O campo de vetores $Z = (X, Y)$ tem pontos de tangência coincidentes em Σ e exatamente duas órbitas heteroclínicas se, e somente se $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ e $\dfrac{\lambda_1}{\mu_1} = \dfrac{\mu_2}{\lambda_2}$.

Demonstração: Novamente utilizando o resultado encontrado no Teorema 2.1.3 e que $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\beta_1 = \beta_2$ são as condições para termos duas órbitas heteroclínicas, temos o resultado. □

Nos exemplos em que temos 2 órbitas heteroclínicas (Figura 2.5), na imagem à esquerda, não temos a existência de região de deslize já que as tangências coincidem no ponto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. No caso à direita, as tangências ocorrem nos pontos $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (para o campo X) e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (para o campo Y) e surge um campo deslizante formado por uma região de deslize estável entre essas tangências, que contém um pseudo-equilíbrio atrator no ponto $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{33}, -\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{33}\right)$.

Nos exemplos que contém apenas uma órbita heteroclínica (Figura 2.6), na imagem à esquerda, não temos a existência de região de deslize já que as tangências coincidem no ponto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Na imagem à direita, as tangências ocorrem nos pontos $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (para o campo X) e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ (para o campo Y) e surge um campo deslizante formado por uma região de deslize instável entre essas tangências, que contém um pseudo equilíbrio repulsor no ponto $(-5 + 2\sqrt{6}, 4 - 2\sqrt{6})$.

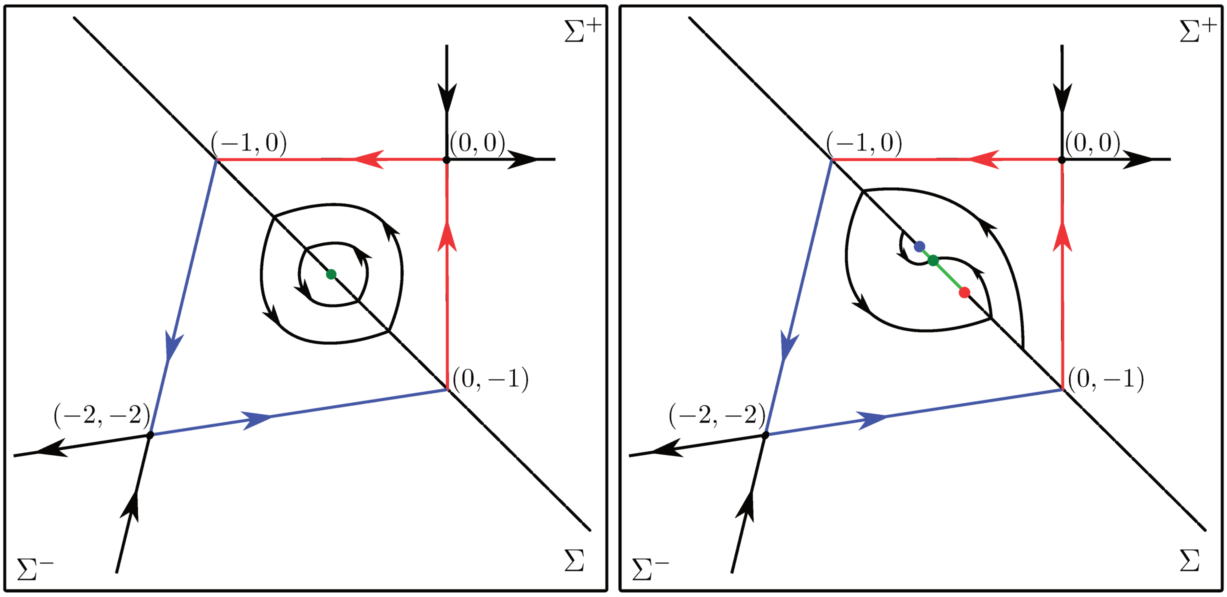

Figura 2.5: Exemplos com 2 órbitas heteroclínicas com: tangências coincidentes para os parâmetros $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ (esquerda) e tangências distintas para os parâmetros $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ (direita)

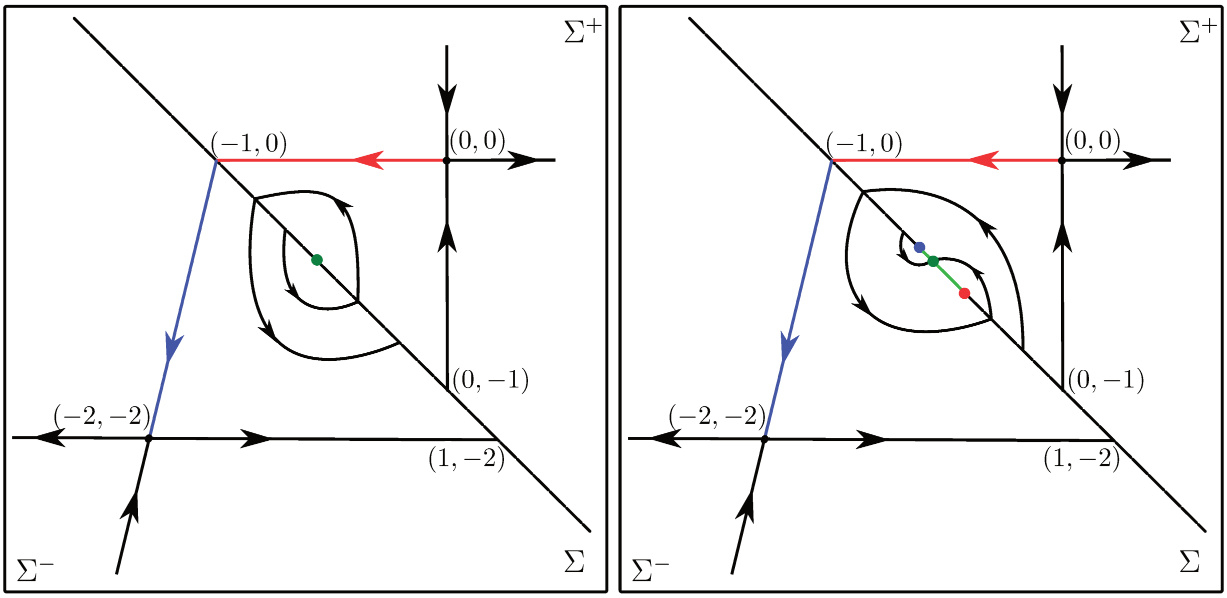

Figura 2.6: Exemplos com 1 órbita heteroclínica com: tangências coincidentes para os parâmetros $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ (esquerda) e tangências distintas para os parâmetros $\mu_1 = \mu_2 = \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ (direita)

Observação 2.4.3. Observe que nos exemplos anteriores em que temos tangências coincidentes e há uma órbita homoclínica ou duas órbitas heteroclínicas, apresentamos casos em que essa única tangência é do tipo centro. Procuramos exemplos em que tivéssemos um foco nesses casos e não obtivemos sucesso, portanto conjecturamos que nos casos em que temos tangências coincidentes e temos ou uma órbita homoclínicas ou duas órbitas heteroclínicas, o ponto de tangência será do tipo centro devido a linearidade do campos e suas simetrias.

Capítulo 3

O Fenômeno de Shil'nikov em Sistemas Diferenciais Descontínuos Lineares Por Partes em $\mathbb{R}^3$

Em 1965 Shil'nikov garantiu, sob certas hipóteses nos autovalores da linearização, que podem existir infinitas órbitas periódicas instáveis em cada vizinhança de uma órbita homoclínica associada à um ponto de equilíbrio do tipo sela-foco para sistemas diferenciais suaves em $\mathbb{R}^3$.

Nesse caso considerou-se um sistema como

$$\begin{cases} \dot{x} = -\rho x - \omega y + f_1(x, y, z) \\ \dot{y} = \omega x - \rho y + f_2(x, y, z) \\ \dot{z} = \gamma x + f_3(x, y, z) \end{cases} \tag{3.0.1}$$

onde ρ, $\gamma > 0$, $\omega \neq 0$ e f_1, f_2, f_3 são funções suaves em $\mathbb{R}^3$ que se anulam na origem.

Esse sistema possui uma sela-foco na origem tendo a variedade estável de dimensão 2 e a variedade instável de dimensão 1.

Teorema 3.0.1. (Shilnikov, 1965) Suponha que o sistema (3.0.1) possua uma órbita homoclínica Γ na origem. Se $0 < \frac{\rho}{\gamma} < 1$, então existe uma quantidade enumerável de órbitas periódicas em qualquer vizinhança de Γ.

Mais tarde, em 2007, Llibre, Ponce e Teruel provaram em [8] que essa dinâmica de Shilnikov também ocorre em sistemas lineares contínuos, estudados previamente por Arneodo, Coullet e Tresser em [1].

Nosso objetivo é mostrar que a dinâmica de Shilnikov também pode ocorrer em sistemas descontínuos lineares e ao fim desse capítulo provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.0.2. Considerando o sistema (3.1.1) e supondo que $(\lambda, \delta, R) \in G$ onde G é a superfície definida pela equação

$$R(\lambda, \delta) = \frac{\sqrt{3}}{4e^{\theta^*}\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*)\lambda} + \mathcal{O}(\lambda)$$

onde θ^* é a única raiz em $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$ da função $f(\theta) = 2e^{3\theta}\cos\left(\sqrt{3}\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 1$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Se $0 < \delta \leq 1$, então existe uma quantidade infinita enumerável de órbitas periódicas acumulando-se na órbita homoclínica $\Gamma_{\lambda,\delta}$ (ou seja, ocorre um fenômeno similar à ferradura de Smale).

2. Se $\delta > 1$ mas suficientemente próximo de 1, então uma quantidade infinita enumerável de órbitas periódicas do item acima persistem mas não mais se acumulam na órbita homoclínica $\Gamma_{\lambda,\delta}$.

Em trabalhos como [11], de Novaes e Teixeira, o fenômeno de Shil'nikov já foi tratado para Sistemas de Filippov, com a diferença que o equilíbrio limite se encontrava na região de descontinuidade, diferentemente do caso que trabalharemos. Utilizamos também como referências para esse capítulo os estudos feitos recentemente por Novaes, Ponce e Varão em [10] e o trabalho de Gouveia *et al.* em [5].

3.1 O Sistema

Considere o seguinte sistema linear por partes, inspirado no sistema apresentado por Arneodo *et al.* em [1981]:

$$\dot{\mathrm{x}} = \begin{cases} A_+\mathrm{x} + b & \text{se} \quad x \in \Sigma^+ \\ \\ A_-\mathrm{x} + c & \text{se} \quad x \in \Sigma^- \end{cases} \tag{3.1.1}$$

onde $\mathrm{x} = (x, y, z)$, $A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mu & -1 & -\beta \end{pmatrix}$, $A_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & -1 & -\beta \end{pmatrix}$, $b = (0,0,k)^T$, $c = (0,0,1)^T$, $f(x,y,z) = x$, $\Sigma = f^{-1}(0)$, $\Sigma^+ = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathrm{x}) > 0\}$, $\Sigma^- = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathrm{x}) < 0\}$, $\beta = \lambda(2\delta - 1)$, $\alpha = \lambda(2\lambda^2\delta + 1)$, $\mu = (1 + 4R^2 + 4\lambda\delta R - 2\lambda R)(2R + 2\lambda\delta - \lambda)$. Suponha que $\alpha > 0$ e $\mu > 0$.

Nesse caso, a região de descontinuidade será dada pelo plano yz, ou seja, $\Sigma = f^{-1}(0)$ onde $f(x,y,z) = x$, Σ^+ será dado pelos pontos em que $x > 0$ e Σ^- será dado pelos pontos em que $x < 0$. Nas próximas seções descreveremos o comportamento do fluxo em cada um desses conjuntos.

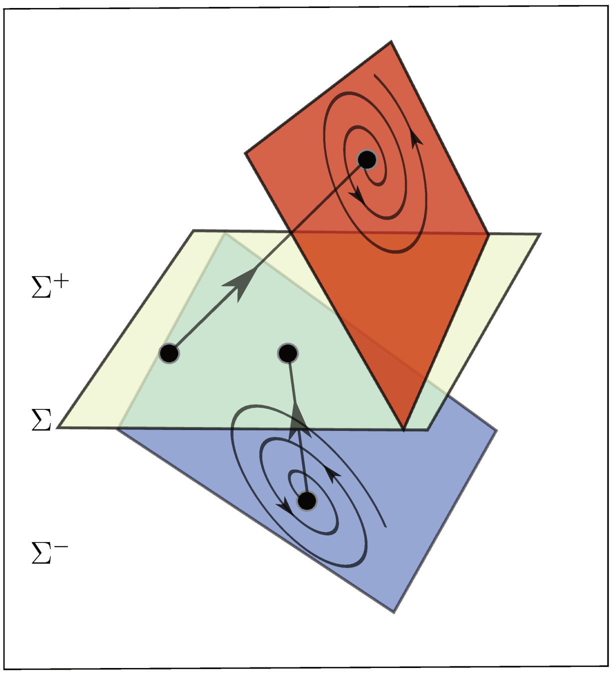

Figura 3.1: Comportamento de soluções do sistema (3.1.1).

3.2 O Fluxo em Σ^+

Fazendo $A_+\mathrm{x} + b = 0$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mu & -1 & -\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

temos que a solução desse sistema nos dá o ponto em que ocorre a singularidade (sela), que nesse caso será no ponto $e_+ = (k/\mu, 0, 0)$. Temos ainda que os autovalores de A_+ são $-L$, $R + i\Omega$ e $R - i\Omega$ cujos autovetores associados são $(1, -L, L^2)$, $(1, R+i\Omega, (R+i\Omega)^2)$ e $(1, R-i\Omega, (R-i\Omega)^2)$, respectivamente, onde $L = 2R + \lambda(2\delta - 1)$, $\Omega^2 = 1 + R(4\lambda\delta - 2\lambda + 3R)$ e $\Omega > 0$.

A variedade estável $W^s(e_+)$ está contida na semirreta

$$\mathcal{L}_+ = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y = -Lx + \frac{k}{1 + 2LR}, z = -Ly \right\}$$

e fazendo $x = 0$ temos que essa semirreta corta Σ no ponto

$$m_+ = \mathcal{L}_+ \cap \Sigma = \left(0, \frac{k}{1 + 2LR}, \frac{-kL}{1 + 2LR} \right).$$

A variedade instável $W^u(e_+)$ está contido no semiplano

$$\mathcal{P}_+ = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, (1 + 2LR)x - 2Ry + z - \frac{k}{L} = 0 \right\}$$

e fazendo $x = 0$ temos que esse semiplano intercepta Σ na reta

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{P}_+ \cap \Sigma = \left\{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{k}{L} + 2Ry \right\}.$$

Finalmente, o fluxo em Σ^+ com condição inicial no ponto $p = (x_p, y_p, z_p)$ é dado por

$$\begin{cases} x_p^+(s) &= C_p^1 e^{Rs}\cos(\Omega s) + C_p^2 e^{Rs}\mathrm{sen}(\Omega s) + C_p^3 e^{-Ls} + k/\mu \\ \\ y_p^+(s) &= (C_p^1 R + C_p^2\Omega)e^{Rs}\cos(\Omega s) + (C_p^2 R - C_p^1\Omega)e^{Rs}\mathrm{sen}(\Omega s) - C_p^3 L e^{-Ls} \\ \\ z_p^+(s) &= [C_p^1(R^2-\Omega^2) + 2C_p^2\Omega R]e^{Rs}\cos(\Omega s) \\ \\ & +[C_p^2(R^2-\Omega^2) - 2C_p^1\Omega R]e^{Rs}\mathrm{sen}(\Omega s) + C_p^3 L^2 e^{-Ls} \end{cases}$$

onde $C_p = (C_p^1, C_p^2, C_p^3)^T$ é obtido através de

$$C_p = \frac{1}{(L+R)^2+\Omega^2} M^+(p - e_+)$$

e M^+ é a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} L(2R+L) & 2R & -1 \\ \\ -\dfrac{L(R^2+RL-\Omega^2)}{\Omega} & \dfrac{L^2-R^2+\Omega^2}{\Omega} & \dfrac{R+L}{\Omega} \\ \\ R^2+\Omega^2 & -2R & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $x_p = 0$ e $y_p > 0$, então $e_1.\dot{p} = \dot{x_p} > 0$ onde $e_1 = (1,0,0)$ e $\dot{p}$ é o valor do campo de vetores associados ao sistema (3.1.1) no ponto p. Sendo assim, a órbita γ_p que passa por p cruza Σ de Σ^- para Σ^+.

Como o sistema (3.1.1) é linear em $\Sigma \cup \Sigma^+$ e as variedades invariantes de e_+ interceptam Σ transversalmente, temos que se $p \notin W^s(e_+)$, existe um $s_p^+ > 0$ tal que $x_p^+(s_p^+) = 0$ e $x_p^+(s) > 0$ para $s \in (0, s_p^+)$. Dessa maneira, se $x_p = 0$ e $y_p > 0$ então podemos definir a semiaplicação de Poincaré, Π_+, como $\Pi_+(p) = (0, y_p^+(s_p^+), z_p^+(s_p^+))$.

3.3 O Fluxo em Σ^-

Fazendo $A_-\mathrm{x} + c = 0$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & -1 & -\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

temos que a solução desse sistema nos dá o ponto em que ocorre a singularidade (sela), que nesse caso será no ponto $e_- = (-1/\alpha, 0, 0)$. Os autovalores de A_- são dados por λ, $-\lambda\delta + i\omega$ e $-\lambda\delta - i\omega$ cujos autovetores associados são $(1, \lambda, \lambda^2)$, $(1, -\lambda\delta + i\omega, (-\lambda\delta + i\omega)^2)$ e $(1, -\lambda\delta - i\omega, (-\lambda\delta - i\omega)^2)$, respectivamente, onde $\omega^2 = 1 + \lambda^2\delta(2 - \delta)$ e $\omega > 0$.

A variedade instável $W^u(e_-)$ está contida na semirreta

$$\mathcal{L}_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \leq 0, y = \lambda x + \frac{1}{1 + 2\lambda^2\delta}, z = \lambda y\}$$

e fazendo $x = 0$ temos que essa semirreta corta Σ no ponto

$$m_- = \mathcal{L}_- \cap \Sigma = \left(0, \frac{1}{1 + 2\lambda^2\delta}, \frac{\lambda}{1 + 2\lambda^2\delta}\right).$$

A variedade estável $W^s(e_-)$ está contida no semiplano

$$\mathcal{P}_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \leq 0, \lambda(1 + 2\lambda^2\delta)x + 2\lambda^2\delta y + \lambda z + 1 = 0\}$$

e fazendo $x = 0$ temos que esse semiplano intercepta Σ na reta

$$\mathcal{D}_- = \mathcal{P}_- \cap \Sigma = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \frac{-1}{\lambda} - 2\lambda\delta y\}.$$

Finalmente, o fluxo em Σ^- com condição inicial em um ponto $p = (x_p, y_p, z_p)$ é dado por

$$\begin{cases} x_p^-(s) &=& D_p^1 e^{-\lambda\delta s}\cos(\omega s) + D_p^2 e^{-\lambda\delta s}\mathrm{sen}(\omega s) + D_p^3 e^{\lambda s} - 1/\alpha \\ \\ y_p^-(s) &=& (D_p^2\omega - D_p^1\lambda\delta)e^{-\lambda\delta s}\cos(\omega s) - (D_p^1\omega - D_p^2\lambda\delta)e^{-\lambda\delta s}\mathrm{sen}(\omega s) + D_p^3\lambda e^{\lambda s} \\ \\ z_p^-(s) &=& [D_p^1(\lambda^2\delta^2 - \omega^2) - 2D_p^2\lambda\delta\omega]e^{-\lambda\delta s}\cos(\omega s) + \\ \\ && [D_p^2(\lambda^2\delta^2 - \omega^2) + 2D_p^1\lambda\delta\omega]e^{-\lambda\delta s}\mathrm{sen}(\omega s) + D_p^3\lambda^2 e^{\lambda s} \end{cases}$$

onde $D_p = (D_p^1, D_p^2, D_p^3)^T$ é obtido através de

$$D_p = \frac{1}{\lambda^2(1+\delta)^2 + \omega^2} M^-(p - e_-)$$

e M^- é a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda^2(1+2\delta) & -2\lambda\delta & -1 \\ \\ \dfrac{\lambda(\lambda^2\delta + \lambda^2\delta^2 - \omega^2)}{\omega} & \dfrac{\lambda^2 - \lambda^2\delta^2 + \omega^2}{\omega} & -\dfrac{\lambda(1+\delta)}{\omega} \\ \\ \lambda^2\delta^2 + \omega^2 & 2\lambda\delta & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $x_p = 0$ e $y_p < 0$, então $e_1.\dot{p} = \dot{x_p} < 0$ onde $e_1 = (1, 0, 0)$ e $\dot{p}$ é o valor do campo de vetores associados ao sistema (3.1.1) no ponto p. Sendo assim, a órbita γ_p que passa por p cruza Σ de Σ^+ para Σ^-.

Como o sistema (3.1.1) é linear em $\Sigma \cup \Sigma^-$ e as variedades invariantes de e_- interceptam Σ transversalmente, temos que se $p \notin W^s(e_-)$, existe um $s_p^- > 0$ tal que $x_p^-(s_p^-) = 0$ e $x_p^-(s) < 0$ para $s \in (0, s_p^-)$. Dessa maneira, se $x_p = 0$ e $y_p < 0$ então podemos definir a semiaplicação de Poincaré Π_- como $\Pi_-(p) = (0, y_p^-(s_p^-), z_p^-(s_p^-))$.

3.4 O Fluxo em Σ

Como $f(x, y, z) = x$, segue que $\nabla f(x, y, z) = (1, 0, 0)$. Então

$$Xf(\mathrm{x}) = \nabla f(\mathrm{x}).X(\mathrm{x}) = y$$
$$Yf(\mathrm{x}) = \nabla f(\mathrm{x}).Y(\mathrm{x}) = y,$$

onde $X(\mathrm{x}) = A_+\mathrm{x} + b$ e $Y(\mathrm{x}) = A_-\mathrm{x} + c$.

As tangências dos dois campos de vetores em Σ coincidem, e ocorrem no eixo z. Assim, a região formada por

$$\Sigma \backslash \{(x, y, z); x = y = 0\}$$

é a região de costura pois

$$Xf(p).Yf(p) = y^2 > 0$$

para cada $p \in \Sigma \backslash \{(x, y, z); x = y = 0\}$. Concluímos também que não existe nenhuma região de deslize nesse caso.

Observação 3.4.1. Os sistemas de Filippov $Z = (X, Y)_f$ que satisfazem

$$Xf(\mathrm{x}) = Yf(\mathrm{x})$$

para todo $\mathrm{x} \in \Sigma$, como no nosso caso, são chamados de **Sistemas Refrativos**.

Na próxima seção trabalharemos para dar condições sobre os parâmetros para a existência do loop homoclínico.

3.5 A Existência de Órbita Homoclínica

Nessa seção chegaremos ao resultado que nos dá condições sobre os parâmetros para a existência do loop homoclínico. Observe que procuramos uma órbita homoclínica que cortará Σ nos pontos m_- e $\Pi_+(m_-)$. Sendo assim, o que faremos é dar condições para que a órbita que passa através de m_- retornar de forma à chegar a variedade estável de e_- e assim "fechar" a órbita homoclínica.

Vamos então analisar a variedade estável $W^s(e_-)$ que sabemos estar contida em

$$\mathcal{P}_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \leq 0, \lambda(1 + 2\lambda^2\delta)x + 2\lambda^2\delta y + \lambda z + 1 = 0\}.$$

Lembremos que como vimos na seção anterior, as tangências dos campos X e Y coincidem sempre e são formadas pelo eixo z, portanto a variedade estável de e_- contém uma órbita

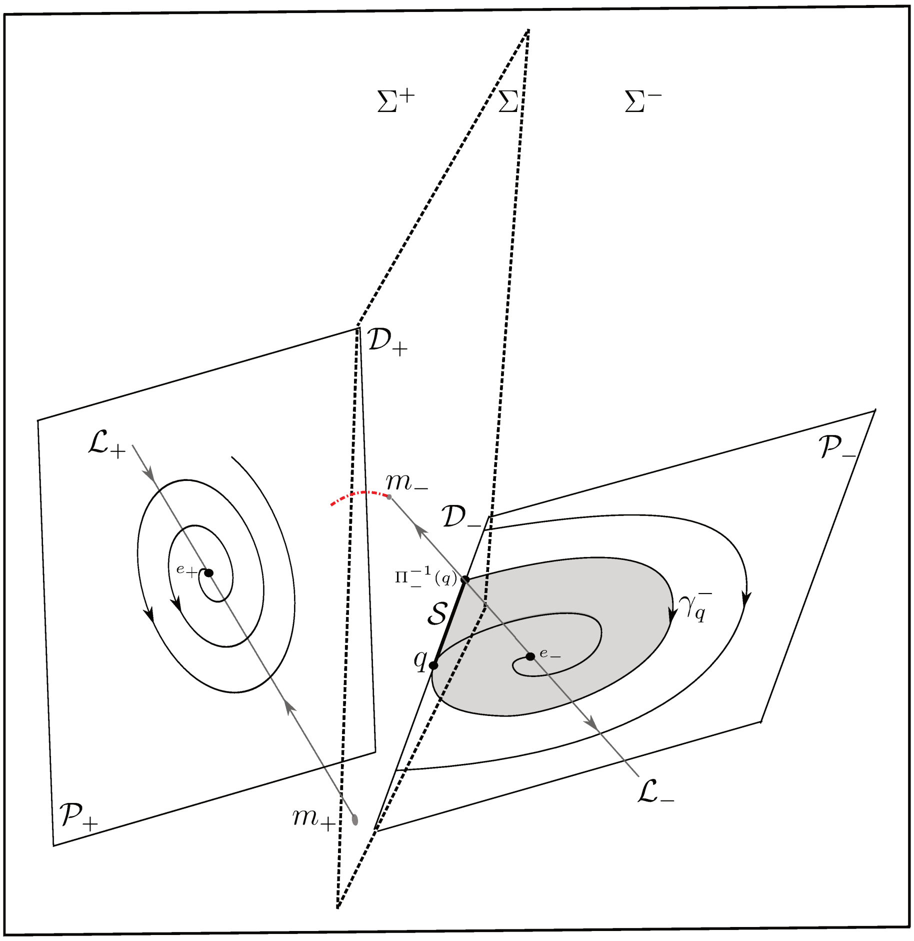

Figura 3.2: Variedades Invariantes de e_+ e e_-.

espiral que tangencia Σ no ponto $q = (0, 0, -1/\lambda)$. Considere $\mathcal{S}$ o segmento cujos extremos sejam q e $\Pi_-^{-1}(q)$, onde Π_-^{-1} denota a inversa da semiaplicação de Poincaré Π_-. Observe que $\mathcal{S} \subset W^s(e_-) \cap \mathcal{D}_-$. Sendo assim, uma condição para a existência de órbita homoclínica é que

$$\Pi_+(m_-) \in \mathcal{S}.$$

Calculando a solução do sistema (3.1.1) com condição inicial $\mathbf{x}(0) = q$ temos

$$\begin{cases} x_q^-(-s) &=& \dfrac{1}{a}\left[e^{s\delta\lambda}\cos(\omega s) - \dfrac{\lambda\delta}{\omega}e^{s\delta\lambda}\mathrm{sen}(\omega s) - 1\right], \\ \\ y_q^-(-s) &=& \dfrac{1}{\omega\lambda}e^{s\delta\lambda}\mathrm{sen}(\omega s) \\ \\ z_q^-(-s) &=& \dfrac{1}{\lambda}e^{s\delta\lambda}\cos(\omega s) - \dfrac{\delta}{\omega}e^{s\delta\lambda}\mathrm{sen}(\omega s) \end{cases}$$

No próximo resultado (ver [8]) apresentamos uma aproximação para o tempo de viagem $s^-_{\Pi_-^{-1}(q)}$ do ponto $\Pi_-^{-1}(q)$ até q e da segunda coordenada do ponto $\Pi_-^{-1}(q)$.

Lema 3.5.1. Se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno e $\delta \in (0, 1.3]$ então o tempo de viagem $s_{\Pi_-^{-1}(q)}$ da órbita que passa por $\Pi_-^{-1}(q)$ desse ponto até q satisfaz:

$$s_{\Pi_-^{-1}(q)} = 2\pi - 2\sqrt{\pi\delta\lambda} + \frac{2}{3}(\pi\delta\lambda)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Mais ainda, a segunda coordenada do ponto $\Pi_-^{-1}(q)$ é

$$y_q^-(-s_{\Pi_-^{-1}(q)}) = -2\sqrt{\frac{\pi\delta}{\lambda}} - 2\pi\delta\sqrt{\pi\delta\lambda} + \mathcal{O}(\lambda).$$

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [8]. $\square$

Observação 3.5.2. Se compararmos o sistema estudado em [8] por Llibre *et al.* com o sistema (3.1.1) podemos observar que fizemos modificações apenas no campo que está em Σ^+, portanto todos os resultados lá feitos para o campo em Σ^- podem aqui ser utilizados diretamente sem necessidade de uma nova demonstração como no caso do lema anterior.

Agora, denote por $\mathcal{P}_+^*$ o plano paralelo a $\mathcal{P}_+$ e que passa por m_-, ou seja,

$$\mathcal{P}_+^* = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, (1 + 2LR)x - 2Ry + z - \frac{\lambda - 2R}{1 + 2\lambda^2\delta} = 0\right\}.$$

Seja $\mathcal{D}_+^*$ a interseção de $\mathcal{P}_+^*$ com Σ e seja $\mathcal{B}$ a região do semiplano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y < 0\}$ limitada pelas retas $\mathcal{D}_+^*$ e $\mathcal{D}_+$. Devido ao comportamento espiral do fluxo, somado ao fato de $\mathcal{P}_+$ conter uma variedade invariante de X, segue que $\Pi_+(m_-) \in \mathcal{B}$.

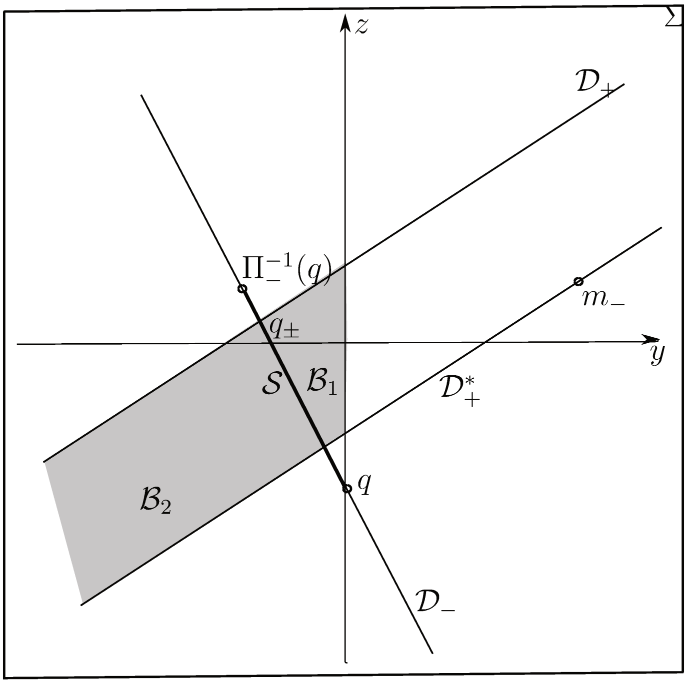

Figura 3.3: Região $\mathcal{B}$ em Σ.

Observe ainda que como $\mathcal{D}_+$ tem inclinação positiva e $\mathcal{D}_-$ tem inclinação negativa, $\mathcal{D}_-$ divide $\mathcal{B}$ em duas regiões $\mathcal{B}_1$ (que será a limitada) e $\mathcal{B}_2$. Veja a Figura 3.3.

A seguir, construímos uma condição sobre o parâmetro R para que $\mathcal{B} \cap \mathcal{D}_- \subset \mathcal{S}$.

Lema 3.5.3. Se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, $\delta \in (0, 1.3]$, $k \geq 1$ e

$$R \geq \frac{1}{4\sqrt{\pi\delta\lambda}} + \left(\frac{k}{2} - \delta\right)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{5}{2}}),$$

então $\mathcal{B} \cap \mathcal{D}_- \subset \mathcal{S}$.

Demonstração: Seja $q_\pm$ a interseção de $\mathcal{D}_+$ e $\mathcal{D}_-$, assim

$$q_\pm = \left(0, \frac{-L - k\lambda}{L\lambda(2R + 2\lambda\delta)}, \frac{2\lambda^2\delta k - 2RL}{L\lambda(2R + 2\lambda\delta)}\right).$$

Se $\|q - q_\pm\| \leq \|q - \Pi_-^{-1}(q)\|$ então $\mathcal{B} \cap \mathcal{D}_- \subset \mathcal{S}$, portanto vamos procurar condições para essa desigualdade ser verdadeira. Como $\Pi_-^{-1}(q) \in \mathcal{D}_-$, segue que

$$\Pi_-^{-1}(q) = \left(0, y^*, -\frac{1}{\lambda} - 2\lambda\delta y^*\right)$$

para algum $y^* \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, como $q = \left(0, 0, -\frac{1}{\lambda}\right)$, segue que

$$\|q - \Pi_-^{-1}(q)\| = \|(0, -y^*, 2\lambda\delta y^*)\| = \sqrt{y^{*2} + 4\lambda^2\delta^2 y^{*2}} = |y^*|\sqrt{1 + 4\lambda^2\delta^2}.$$

Pelo Lema 3.5.1, temos

$$y^* = -2\sqrt{\frac{\pi\delta}{\lambda}} - 2\pi\delta\sqrt{\pi\delta\lambda} + \mathcal{O}(\lambda).$$

Logo $|y^*|> 2\sqrt{\frac{\pi\delta}{\lambda}}$ e assim,

$$\|q - \Pi_-^{-1}(q)\|> 2\sqrt{\frac{\pi\delta}{\lambda}}\sqrt{1+4\lambda^2\delta^2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|q - q_\pm\|=&\left\|\left(0, \frac{-L-k\lambda}{L\lambda(2R+2\lambda\delta)}, \frac{2\lambda\delta(-L-k\lambda)}{L\lambda(2R+2\lambda\delta)}\right)\right\|\\ =&\sqrt{\frac{(L+k\lambda)^2}{[L\lambda(2R+2\lambda\delta)]^2} + \frac{4\lambda^2\delta^2(L+k\lambda)^2}{[L\lambda(2R+2\lambda\delta)]^2}}\\ =&\left|\frac{L+k\lambda}{L\lambda(2R+2\delta\lambda)}\right|\sqrt{1+4\lambda^2\delta^2}.\end{aligned}$$

Como $k \geq 1$ então $L+k\lambda \geq 0$ e logo $\frac{L+k\lambda}{L\lambda(2R+2\lambda\delta)} \geq 0$. Assim, para termos a desigualdade procurada, basta termos

$$\frac{L+k\lambda}{L\lambda(2R+2\lambda\delta)} < 2\sqrt{\frac{\pi\delta}{\lambda}}.$$

Portanto,

$$\frac{L+k\lambda}{L\lambda(2R+2\lambda\delta)} < 2\sqrt{\frac{\pi\delta}{\lambda}} \Leftrightarrow L+k\lambda < (2R+2\lambda\delta-\lambda)(2R+2\lambda\delta).2\sqrt{\pi\delta\lambda}.$$

Desenvolvendo essa inequação, chegamos que $aR^2+bR+c>0$ onde

$$\begin{aligned}a =&8\sqrt{\pi\delta\lambda} > 0\\ b =&16\lambda\delta\sqrt{\pi\delta\lambda} - 4\lambda\sqrt{\pi\delta\lambda} - 2\\ c =&8\lambda^2\delta^2\sqrt{\pi\delta\lambda} - 4\delta\lambda^2\sqrt{\pi\delta\lambda} - 2\lambda\delta + \lambda - k\lambda.\end{aligned}$$

Como λ é suficientemente pequeno, fazemos a expansão das raízes de $ax^2+bx+c=0$ em séries de potência e assim temos

$$R_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2} - \delta\right)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{5}{2}}) \quad \text{e} \quad R_2 = \frac{1}{4\sqrt{\pi\delta\lambda}}\left(\frac{k}{2} - \delta\right)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{5}{2}}).$$

Observe que $\frac{1}{2} - \frac{k}{2} - \delta < 0$ pois $k \geq 1$, logo, $R_1 < 0$. Daí, como R_1 é próximo de zero, $a > 0$, $R_2 > R_1$ e procuramos $R > 0$ tal que $aR^2+bR+c>0$, segue que $R > R_2$, ou seja,

$$R > \frac{1}{4\sqrt{\pi\delta\lambda}}\left(\frac{k}{2} - \delta\right)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{5}{2}}),$$

e provamos o resultado. □

Observação 3.5.4. Nesse capítulo, esse é o primeiro resultado inédito, apesar de inspirado em um lema feito por Llibre *et al.* em [8].Originalmente, os autores também construíram uma restrição para R nessas mesmas condições, porém essa restrição é diferente da nossa já que aqui temos o parâmetro k a mais.

Usando o resultado desse lema, vamos descrever R através dos já conhecidos parâmetros λ e δ e de um novo parâmetro a, da seguinte maneira:

$$R = \frac{1}{B\lambda} + a\lambda$$

onde $B = \frac{4\sqrt{3}}{3}e^{\theta^*}\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*)$ e θ^* é a única raiz de $f(\theta) = 2e^{3\theta}\cos(\sqrt{3}\theta - \pi/3) - 1$ em $(0, \pi/\sqrt{3})$. Essa escolha para B será justificada adiante nas demonstrações. Observe que também usamos o fato de λ ser suficientemente pequeno para garantir que $\dfrac{1}{\lambda} > \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

A ideia agora será expandir $\Pi_+(m_-)$ em séries de potência de λ a fim de encontrar valores para a para os quais $\Pi_+(m_-)$ pertença a $\mathcal{B}_1$ ou $\mathcal{B}_2$. Entretanto, é necessário começarmos com a seguinte estimativa:

Lema 3.5.5. Se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, $\delta \in (0, 1.3]$, $k \geq 1$ e $R = \dfrac{1}{B\lambda} + a\lambda$, então o tempo de viagem $s^+_{m_-}$ satisfaz

$$s^+_{m_-} < \frac{\sqrt{3}\pi B\lambda}{3} + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Demonstração: Comecemos observando que

$$\begin{aligned} m_+ &= \left(0, \frac{k}{1+2LR}, \frac{-kL}{1+2LR}\right) = \left(0, \frac{kL}{(1+2LR)L}, \frac{-kL^2}{(1+2LR)L}\right) \\ &= \left(0, \frac{kL}{\mu}, \frac{-kL^2}{\mu}\right) = \left(\frac{k}{\mu}, 0, 0\right) - \frac{k}{\mu}\left(1, -L, L^2\right) = e_+ + \sigma_1(1, -L, L^2), \end{aligned}$$

onde $\sigma_1 = -\frac{k}{\mu}$ e lembrando que $e_+ = \left(\frac{k}{\mu}, 0, 0\right)$.

Seja $m_+^* = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{P}_+^*$. Utilizando as equações de $\mathcal{L}_+$ e $\mathcal{P}_+^*$ chegamos que

$$\begin{aligned} m_+^* = \Bigg(&\frac{1}{1+4RL+L^2}\left(\frac{\lambda - 2R}{1+2\lambda^2\delta} + \frac{k(2R+L)}{1+2RL}\right), \\ &\frac{1}{1+4RL+L^2}\left(\frac{\lambda-2R}{1+2\lambda^2\delta} - \frac{k}{L}\right), \\ &\frac{1}{1+4RL+L^2}\left(\frac{\lambda-2R}{1+2\lambda^2\delta} - \frac{k}{L}\right) + \frac{k}{(1+2RL)L}\Bigg) \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$m_+^* = e_+ + \sigma_0(1, -L, L^2)$$

onde $\sigma_0 = \dfrac{1}{1+4RL+L^2}\left(\dfrac{\lambda-2R}{1+2\lambda^2\delta} - \dfrac{k}{L}\right)$ e $e_+ - \left(\frac{k}{\mu}, 0, 0\right)$.

Se expandirmos σ_1 e σ_0 através de séries de potência em λ temos:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\frac{kB}{8}\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^5) < 0\\ \sigma_0 &= -\frac{B}{6}\lambda + \mathcal{O}(\lambda^3) < 0\end{aligned}$$

Dessas aproximações, podemos concluir que $|\sigma_1| < |\sigma_0|$, ou seja, a 1ª coordenada de m_+^* é menor que a 1ª coordenada de m_+, logo $m_+^* \in \Sigma^-$.

Nesse momento, vamos assumir que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = A_+\mathbf{x} + (0,0,k)$ está definido em todo $\mathbb{R}^3$. Calculamos a órbita que passa por m_+^* e depois igualamos as coordenadas encontradas às coordenadas de m_+ para encontrarmos o tempo de viagem de m_+^* à m_+ que deverá satisfazer $e^{Ls_L}\sigma_0 = \sigma_1$. Portanto,

$$s_L = -\frac{1}{L}\ln\left|\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right| = \mathcal{O}(\lambda\ln\lambda),$$

lembrando que $R = \dfrac{1}{B\lambda} + a\lambda$, e daí $L = 2R + \lambda(2\delta - 1) = \mathcal{O}(\lambda^{-1})$.

Vamos agora mostrar que $s_{m_-}^+ < \frac{\pi}{\Omega}$. Para isso, suponha que $s_{m_-}^+ \geq \frac{\pi}{\Omega}$. Como $\frac{\pi}{\Omega} > 0$ então $\frac{\pi}{\Omega} \in (0, s_{m_-}^+)$ e daí $\mathbf{x}_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) \in \Sigma^+$. Afirmamos que $\mathbf{x}_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)$ pertence ao plano gerado por $\mathcal{L}_+$ e m_-. De fato, tal plano, que chamaremos de $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_+,m_-}$, tem equação dada por

$$\left(\frac{L(L+\lambda)}{1+2\delta\lambda^2}\right)x + \left(\frac{Lk}{1+2RL} + \frac{\lambda}{1+2\delta\lambda^2}\right)y + \left(\frac{k}{2RL} - \frac{1}{1+2\delta\lambda^2}\right)z - \frac{k(L+\lambda)}{(1+2\delta\lambda^2)(1+2RL)} = 0$$

e o ponto $\mathbf{x}_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = \left(x_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right), y_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right), z_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)\right) \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_+,m_-}$.

Agora, considere o segmento que liga $\mathbf{x}_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)$ e m_-. Observe que $\mathbf{x}_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)$ deve pertencer ao semiplano determinado por $\mathcal{L}_+$ distinto daquele ao qual m_- pertence pois há uma variedade invariante contida em $\mathcal{L}_+$. Assim, o segmento que liga $\mathbf{x}_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)$ e m_- intercepta $\mathcal{L}_+$ em um ponto que será chamado de $\tilde{m}$. Como m_- e $\mathbf{x}_{m_-}^+\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)$ pertencem a Σ^+, segue que

$$\tilde{m} \in \Sigma^+. \tag{3.5.1}$$

Por outro lado, como $\Omega = \sqrt{1 + R(4\delta\lambda - 2\lambda + 3R)}$ e $R = \frac{1}{B\lambda} + a\lambda$ temos que

$$\Omega = \frac{\sqrt{3}}{B\lambda} + \mathcal{O}(\lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{\Omega} = \mathcal{O}(\lambda).$$

Para λ suficientemente pequeno, segue que $|\lambda| < |\lambda\ln\lambda|$ e portanto $\frac{\pi}{\Omega} < s_L$.

Observe que m_+^* é a projeção de m_- sobre $\mathcal{L}_+$ se seguirmos de forma paralela ao plano em que está contida a variedade instável. De fato, se considerarmos o plano $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_+,m_-}$ e olharmos para sua interseção com $\mathcal{P}_+$, temos uma reta cujo vetor diretor é dado por

$$(1, p_2, p_3)$$

onde

$$p_2 = \frac{(1+2RL)[1+L^2+L(2R+\lambda)-k(1+2\delta\lambda^2)]}{(1+2RL)(2R-\lambda)-k(L+2R)(1+2\delta\lambda^2)}$$
$$p_3 = \frac{(1+2RL)[2L^2R+\lambda+4RL\lambda+k(L+2L\lambda^2\delta)]}{(1+2RL)(2R-\lambda)-k(L+2R)(1+2\delta\lambda^2)}.$$

Calculando agora a reta que tem esse vetor como diretor e que passa por m_- podemos verificar que m_+^* pertence a essa reta o que mostra que m_+^* é a projeção de m_- sobre $\mathcal{L}_+$ se seguirmos de forma paralela ao plano em que está contida a variedade instável.

Seja m_+^{**} essa mesma projeção mas referente ao ponto $\mathbf{x}_{m_-}^+(\frac{\pi}{\Omega})$. A órbita que liga m_- e $\mathbf{x}_{m_-}^+(\frac{\pi}{\Omega})$ é projetada em $\mathcal{L}_+$ em um segmento de reta, que chamaremos de $S_{\mathcal{L}_+}$ e cujas extremidades são m_+^* e m_+^{**}.

Como $m_+^* \in \Sigma^- \cup \Sigma$ e s_L é o tempo levado para irmos de m_+^* até m_+ e como $\frac{\pi}{\Omega} < s_L$ segue que $S_{\mathcal{L}_+} \subset \Sigma^-$ já que os extremos são as projeções de m_- e $\mathbf{x}_{m_-}^+(\frac{\pi}{\Omega})$. Como $\tilde{m} \in S_{\mathcal{L}_+}$ segue que

$$\tilde{m} \in \Sigma^- \tag{3.5.2}$$

Comparando (3.5.1) e (3.5.2) chegamos a uma contradição e logo

$$s_{m_-}^+ < \frac{\pi}{\Omega} = \frac{B\pi\lambda}{\sqrt{3}} + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

□

Utilizando esse lema, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.5.6. Se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno, $\delta \in (0, 1.3]$, $k \geq 1$ e $R = \dfrac{1}{B\lambda} + a\lambda$, o tempo de viagem $s_{m_-}^+$ de m_- até $\Pi_+(m_-)$ é dado por

$$s_{m_-}^+ = \theta^* B\lambda + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Mais ainda, as coordenadas do ponto $\Pi_+(m_-)$ são

$$\begin{cases} x^+_{m_-}(s^+_{m_-}) &= 0 \\ \\ y^+_{m_-}(s^+_{m_-}) &= \frac{e^{-2\theta^*}}{3} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{3}\theta^*) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ \\ z^+_{m_-}(s^+_{m_-}) &= -\frac{1}{\lambda} + (-aB + \delta m_1 + m_2)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{cases}$$

onde $m_1 = \frac{1}{9}(9 - 3\sqrt{3}\cot(\sqrt{3}\theta^*) + 3\sqrt{3}e^{-3\theta^*}\csc(\sqrt{3}\theta^*) + 8\sqrt{3}e^{\theta^*}(\theta^* - 1)\mathrm{sen}(\sqrt{3}\theta^*))$ e $m_2 = \frac{1}{27}e^{-\theta^*}(27e^{2\theta^*}\cos(\sqrt{3}\theta^*) - \mathrm{sen}(\sqrt{3}\theta^*)(\sqrt{(3)}(-2 + 6k + 3e^{2\theta^*}(-7 + 4\theta^*)) + 2e^{3\theta^*}(\sqrt{3}(1 - 3k + 6\theta^*)\cos(\sqrt{3}\theta^*) + 3(3 - 3k + 2\theta^*)\mathrm{sen}(\sqrt{3}\theta^*))))$.

Demonstração: Como $R = \frac{1}{B\lambda} + a\lambda$ e $L = 2R + 2\delta\lambda - \lambda$ temos

$$L = \frac{2}{B\lambda} + \lambda(2a - 2\delta - 1) \quad \text{e} \quad \Omega = \frac{\sqrt{3}}{B\lambda} + \frac{\sqrt{3}}{6}(B - 2 + 4\delta - 6a)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Dessa forma, $Rs = \frac{s}{B\lambda} + as\lambda$ e $Ls = \frac{2s}{B\lambda} + (2a + 2\delta - 1)\lambda s$, daí para $s < s_{m_-} = \mathcal{O}(\lambda)$ temos

$$e^{Rs} = e^{\frac{s}{B\lambda}}(1 + as\lambda) + \mathcal{O}(\lambda^2 s^2) \quad \text{e} \quad e^{-Ls} = e^{\frac{-2s}{B\lambda}}[1 + \lambda s(1 - 2a - 2\delta)] + \mathcal{O}(\lambda^2 s^2)$$

Mais ainda, sabendo que $\Omega s = \frac{\sqrt{3}s}{B\lambda} + \frac{\sqrt{3}}{6}(B - 2 + 4\delta + 6a)\lambda s + \mathcal{O}(\lambda^2 s)$ temos

$$\cos(\Omega s) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{B\lambda}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}(B - 2 + 4\delta + 6a)\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}s}{B\lambda}\right)\lambda s + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

e

$$\mathrm{sen}(\Omega s) = \mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}s}{B\lambda}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}(B - 2 + 4\delta + 6a)\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{B\lambda}\right)\lambda s + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Substituindo agora essas aproximações que fizemos na primeira coordenada da solução que passa por m_- e usando que

$$\begin{aligned} C^1_{m_-} =& \frac{B\lambda}{6} + \mathcal{O}(\lambda^2), \\ C^1_{m_-} =& \frac{\sqrt{3}B\lambda}{6} + \mathcal{O}(\lambda^2), \\ C^1_{m_-} =& -\frac{B\lambda}{6} + \mathcal{O}(\lambda^3), \\ \frac{k}{\mu} =& \mathcal{O}(\lambda^3), \end{aligned}$$

temos

$$x^+_{m_-}(s) = C^1_{m_-} e^{Rs}\cos(\Omega s) + C^2_{m_-} e^{Rs}\text{sen}(\Omega s) + C^3_{m_-} e^{-Ls} + \frac{k}{\mu}.$$

Lembrando que $s = \mathcal{O}(\lambda)$ temos que

$$x^+_{m_-} = \frac{B\lambda}{6}\left[e^{\frac{s}{B\lambda}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{B\lambda}\right) + \sqrt{3}e^{\frac{s}{B\lambda}}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}s}{B\lambda}\right) - e^{-\frac{-2s}{B\lambda}}\right] + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Como consideremos θ^* a única raiz de $\tilde{f}(\theta) = e^{-2\theta} f(\theta) = e^{\theta}\cos(\sqrt{3}\theta) + \sqrt{3}e^{\theta}\text{sen}(\sqrt{3}\theta) - e^{-2\theta}$ em $(0, \pi/\sqrt{3})$, temos então que uma boa aproximação para $s^+_{m_-}$ é dada por

$$\tilde{s}^+_{m_-} = \theta^* B\lambda.$$

Vamos assim, verificar a qualidade dessa aproximação. Pelo teorema do valor médio, temos que

$$s^+_{m_-} - \tilde{s}^+_{m_-} = \frac{x^+_{m_-}(s^+_{m_-}) - x^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-})}{y^+_{m_-}(\xi)},$$

onde ξ percorre o intervalo de $s^+_{m_-}$ à $\tilde{s}^+_{m_-}$.

Observe que

$$y^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-}) = \frac{e^{-2\theta^*}}{3} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{3}\theta^*) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

assim, enquanto λ varia em ξ, o que se modifica é o termo de ordem λ^2. Portanto o valor de $y^+_{m_-}(\xi)$ tende a $\dfrac{e^{-2\theta^*}}{3} + \dfrac{2}{3}\cos(\sqrt{3}\theta^*)$ quando $\lambda \longrightarrow 0$. Logo, a ordem do erro de $s^+_{m_-} - \tilde{s}^+_{m_-}$ é o mesmo de $x^+_{m_-}(s^+_{m_-}) - x^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-})$, portanto,

$$s^+_{m_-} = \tilde{s}^+_{m_-} + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Para a última coordenada de $\Pi_+(m_-)$ temos a seguinte aproximação

$$z^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-}) = -\frac{1}{\lambda} + (-aB + \delta m_1 + m_2)\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

onde

$$\begin{aligned}
m_1 =& \frac{1}{9}(9 - 3\sqrt{3}\cot(\sqrt{3}\theta^*) + 3\sqrt{3}e^{-3\theta^*}\csc(\sqrt{3}\theta^*) + 8\sqrt{3}e^{\theta^*}(\theta^* - 1)\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*))\\
m_2 =& \frac{1}{27}e^{-\theta^*}(27e^{2\theta^*}\cos(\sqrt{3}\theta^*) - \text{sen}(\sqrt{3}\theta^*)(\sqrt{(3)}(-2 + 6k + 3e^{2\theta^*}(-7 + 4\theta^*))\\
&+ 2e^{3\theta^*}(\sqrt{3}(1 - 3k + 6\theta^*)\cos(\sqrt{3}\theta^*) + 3(3 - 3k + 2\theta^*)\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*)))).
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\left.\frac{dy^+_{m_-}}{ds}\right|_{s=s^+_{m_-}} = z^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-}) = \mathcal{O}(\lambda^{-1})$$
$$\left.\frac{dz^+_{m_-}}{ds}\right|_{s=s^+_{m_-}} = -\mu x^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-}) - y^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-}) - \beta z^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-}) + k = \mathcal{O}(\lambda^0)$$

Sendo assim, quando $s^+_{m_-} = \tilde{s}^+_{m_-} + \mathcal{O}(\lambda^3)$, segue do teorema do valor médio que $y^+_{m_-}(s^+_{m_-}) = y^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-}) + \mathcal{O}(\lambda^2)$ e $z^+_{m_-}(s^+_{m_-}) = z^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_-}) + \mathcal{O}(\lambda^3)$. □

Por fim, chegamos ao resultado principal da seção.

Teorema 3.5.7. Suponha $k \geq 1$. No espaço de parâmetros (λ, δ, R) existe uma superfície contínua G de dimensão dois tal que, se $(\lambda, \delta, R) \in G$, o sistema (3.1.1) tem uma órbita homoclínica $\Gamma_{\lambda,\delta}$ com equilíbrio limite em e_-. Mais ainda, se $\lambda > 0$ é suficientemente pequeno e $\delta \in (0, 1.3]$ a superfície G pode ser definida pela equação

$$R(\lambda, \delta) = \frac{\sqrt{3}}{4e^{\theta^*}\operatorname{sen}(\sqrt{3}\theta^*)\lambda} + \mathcal{O}(\lambda)$$

onde θ^* é a única raiz em $\left(0, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$ da função $f(\theta) = 2e^{3\theta}\cos\left(\sqrt{3}\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

Demonstração: Da Proposição 3.5.6, segue que

$$\begin{aligned} 2\lambda\delta y^+_{m_-}(s^+_{m_-}) + z^+_{m_-}(s^+_{m_-}) &= \left(\frac{e^{-2\theta^*}}{3} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{3}\theta^*)\right) + \left(-\frac{1}{\lambda} + (-aB + \delta m_1 + m_2)\lambda\right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\ &= -\frac{1}{\lambda} + \left[-aB + \delta m_1 + m_2 + \frac{2\delta e^{-2\theta^*}}{3} + \frac{4\delta}{3}\cos(\sqrt{3}\theta^*)\right]\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

Considere

$$a^* = \frac{\delta m_1 + m_2 + \frac{2\delta e^{-2\theta^*}}{3} + \frac{4\delta}{3}\cos(\sqrt{3}\theta^*)}{B}$$

e λ suficientemente pequeno. Assim:

- Se $a_1 < a^*$ então
$$R_1 = \frac{1}{B\lambda} + a_1\lambda.$$
Disso temos $\Pi_+(m_-) \in \mathcal{B}_1$.

- Se $a_2 > a^*$ então
$$R_2 = \frac{1}{B\lambda} + a_2\lambda.$$
Disso temos $\Pi_+(m_-) \in \mathcal{B}_2$.

Assim, pelo teorema da continuidade das soluções de um sistema diferencial com respeito às condições iniciais e parâmetros, conclui-se que para λ suficientemente pequeno e $\delta \in (0, 1.3]$, existe um valor de parâmetro $R = R(\lambda, \delta)$ entre R_1 e R_2 para o qual o sistema inicial tem órbita homoclínica $\Gamma_{\lambda,\delta}$ cujo equilíbrio limite é e_-. Logo,

$$R(\lambda, \delta) = \frac{\sqrt{3}}{4e^{\theta^*}\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*)}\frac{1}{\lambda} + \mathcal{O}(\lambda),$$

o que completa a prova do teorema. $\square$

3.6 A Existência de Ferraduras

3.6.1 Ferradura de Smale

Nesta subseção apresentaremos brevemente a construção para a ferradura de Smale que na próxima subseção garantiremos que ocorre para o sistema 3.1.1 sob algumas hipóteses. Utilizamos como principais referências para essa seção [2] e [12].

Para começar, seja $S = [0, 1] \times [0, 1]$, $f : S \to S$ e considere os conjuntos H_j e V_j, $j = 1, 2$ como na seguinte figura:

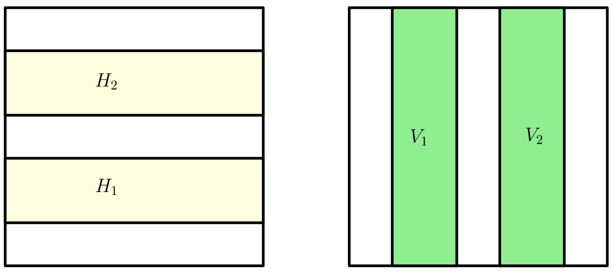

Figura 3.4: H_j e V_j em S.

Vamos descrever geometricamente a ação de f sobre S e vamos assumir que $f(H_j) = V_j$, $S \cap f^{-1}(S) = H_1 \cup H_2$ e se $p \in H_1 \cup H_2$,

$$Df(p) = \begin{pmatrix} a_p & 0 \\ 0 & b_p \end{pmatrix}$$

com $|a_p| = a < \frac{1}{2}$ e $|b_p| = b > 2$.

Considere agora $N = S \cup A \cup B$ como na seguinte figura

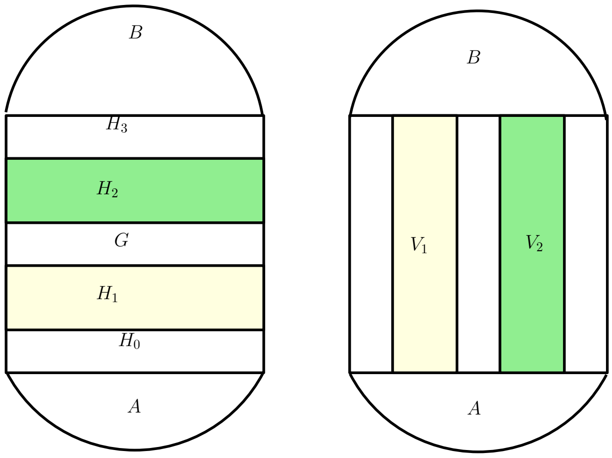

Figura 3.5: $N = S \cup A \cup B$.

Vamos estender f para N de maneira que $f(G) \subset \mathcal{B}$ de modo que a imagem de G fique colada entre o topo de V_1 e o topo de V_2. Vamos supor ainda que isto será feito de modo que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(q)\right| = a$, para todo $q \in G$.

Considere ainda que a imagem de $H_0 \cup H_3$ ficará contida em A, $f(A) \subset A$ com f uma contração em A. Dessa forma, existe $p_0 \in A$ que é ponto fixo de f .E mais, vamos supor que $f(B) \subset A$. Dessa maneira, definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ supondo que qualquer ponto fora de N entra em N na primeira iteração. Por fim, consideramos $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ supondo que p_∞ é um ponto fixo repulsor.

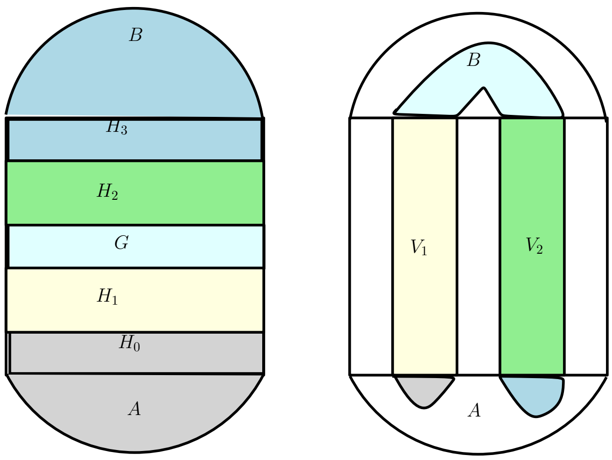

Figura 3.6: A aplicação f em S.

Na prática, o que fazemos é esticar N verticalmente, comprimi-lo horizontalmente de maneira que ao "entortá-lo" consigamos encaixar H_j em V_j, para $j = 1, 2$. A figura formada nessa transformação assemelha-se a uma ferradura da onde vem o nome dado por Smale.

Agora que sabemos calcular $f(N)$ podemos calcular $f^2(N)$ e assim chegamos a seguinte imagem

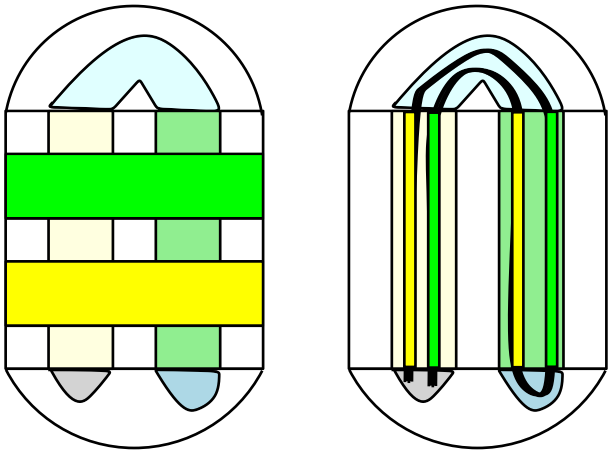

Figura 3.7: A aplicação f em $f(S)$.

Após n iterações podemos chegar as seguintes conclusões:

- $f(S)$ é a união de duas faixas verticais de largura a;
- $f^2(S)$ é a união de quatro faixas verticais de largura a^2;
- dessa forma obteremos que, $f^n(S)$ é a união de 2^n faixas verticais de largura a^n.

Sendo assim, podemos concluir que o conjunto $\cap_{j\in\mathbb{N}} f^j(S)$ pode ser descrito como

$$\cap_{j\in\mathbb{N}} f^j(S) = C_1 \times [0,1]$$

onde C_1 é um conjunto de Cantor.

De maneira análoga, podemos repetir toda essa construção para f^{-1} e formar uma ferradura "deitada" de maneira que

- $f^{-1}(S)$ é a união de duas faixas horizontais de altura $\frac{1}{b}$;
- $f^{-2}(S)$ é a união de quatro faixas horizontais de altura $\frac{1}{b^2}$;
- dessa forma obteremos que, $f^{-n}(S)$ é a união de 2^n faixas horizontais de altura $\frac{1}{b^n}$.

Portanto

$$\cap_{j\in\mathbb{N}} f^{-j}(S) = [0,1] \times C_2$$

onde C_2 é um conjunto de Cantor.

Dessa forma,

$$\Lambda = \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^j(S) = C_1 \times C_2,$$

o produto de dois conjuntos de Cantor.

A seguir apresentamos o exemplo do caso $\cap_{j=-2}^{2} f^j(S)$, representados pelos quadrados amarelos.

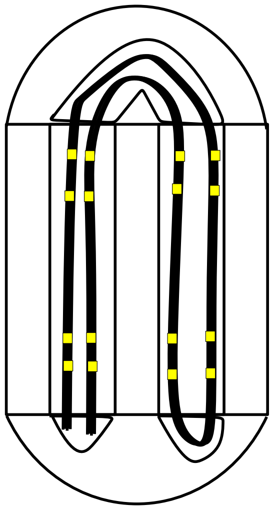

Figura 3.8: Representação do conjunto $\cap_{j=-2}^{2} f^j(S)$.

Como Λ é um conjunto invariante segue que

$$f|_\Lambda \colon \Lambda \to \Lambda$$

define uma dinâmica que não parece muito simples já que está definida em um produto de conjuntos de Cantor.

Vamos agora falar um pouco sobre Dinâmica simbólica. Considere Σ_2 o conjunto de todas as sequências bi-infinitas em $\{0,1\}$ e defina $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ por $\sigma(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (a_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}}$.

Dadas $s, t \in \Sigma_2$, a distância entre s e t é dada por

$$d(s,t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(s_j, t_j)}{4^{|j|}}$$

que induz uma métrica em Σ_2. Sendo assim faz sentido falarmos em proximidade e vizinhança dos elementos de Σ_2.

É possível mostrar que existe uma sequência $t \in \Sigma_2$, a saber:

$$t = (...\underline{0}110111001011101111000100110101011110011011111...)$$

cuja órbita por σ é densa em Σ_2, ou seja, essa órbita pode se aproximar arbitrariamente de qualquer elemento de Σ_2. O traço abaixo do termo significa a posição zero na sequência que é importante ser conhecida já que σ é o que chamamos de um "shift".

Teorema 3.6.1. $f|_{\Lambda}\colon \Lambda \to \Lambda$ é topologicamente conjugada à $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$.

Associação é feita através de uma função h da seguinte maneira. Dado $(s_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_2$, associamos s ao único ponto $x \in \Lambda$ tal que:

- $x \in H_{s_0+1}$;
- $f(x) \in H_{s_1+1}$, $f^2(x) \in H_{s_2+1}$, de maneira geral, $f^n(x) \in H_{s_n+1}$;
- $f^{-1}(x) \in V_{s_{-1}+1}$, $f^{-2}(x) \in V_{s_{-2}+1}$, de maneira geral, $f^{-n}(x) \in V_{s_{-n}+1}$;

É possível mostrar que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$

Isso significa que, do ponto de vista topológico, temos uma equivalência entre o comportamento de ferradura de Smale e do shift no alfabeto de dois símbolos. Em particular, obtemos que $f|_{\Lambda}$ possui uma órbita densa e órbitas periódicas de qualquer período. Assim como o "caos" de σ é reproduzido exatamente na ferradura.

Aplicando essa teoria a sistemas dinâmicos temos que para o caso suave, a existência de um cruzamento transversal entre as variedades estáveis e instáveis de um ponto de sela implicam na existência de ferraduras, de maneira que, no caso de fluxos, as afirmações se tornam válidas para a aplicação de Poincaré associada.

Na próxima subseção mostraremos a existência de ferraduras para o sistema (3.1.1).

3.6.2 Ferraduras no Sistema (3.1.1)

Nessa subseção faremos uma construção que garante a existência de ferraduras no entorno da órbita homoclínica para a qual demos condições de existência na seção anterior.

Sendo assim, para cada $0 < h < \frac{1}{\lambda}$, considere o ponto $q_h = (0, 0, -\frac{1}{\lambda} + h)$ no eixo z e o segmento

$$T_h = \{q_{h,t} = (1-t)q_h + t\Pi_-^{-1}(q_h); t \in [0, 1)\}.$$

Segue da continuidade do fluxo que $\Pi_-(T_h)$ é homeomorfo à $\mathbb{S}^1$.

Seja $\mathcal{C}_{\Pi_-(T_h)}$ a região em Σ limitada por $\Pi_-(T_h)$. Como T_h tende à $\mathcal{S}$ quando $h \longrightarrow 0$, o tempo $s^-_{q_{h,t}}$ tende a infinito quando $h \longrightarrow 0$. Portanto, para h suficientemente pequeno, a órbita que passa através de $q_{h,t}$ espirala no entorno da variedade instável quantas vezes forem necessárias e disso podemos concluir que $m_- \in \mathcal{C}_{\Pi_-(T_h)}$.

Nosso objetivo será encontrar condições para que T_h e $\Pi_+\Pi_-(T_h)$ se interceptem transversalmente. Para isso, usaremos o lema apresentado a seguir e provado em [8].

Lema 3.6.2. Considere o sistema linear por partes (3.1.1) com parâmetros $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, $\delta \in (0, 1.3]$ e $R = R(\lambda, \delta)$. Se h é suficientemente pequeno, então o círculo topológico $\Pi_-(T_h)$ está contido na região anelar centrada no ponto m_- com raios

$$\rho_1 = h^\delta(\lambda^{\delta-1} - 4\sqrt{\pi\delta}\lambda^{\delta-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^\delta)) \quad \text{e}$$
$$\rho_2 = h^\delta(\lambda^{\delta-1} + 4\sqrt{\pi\delta}\lambda^{\delta-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^\delta)).$$

Demonstração: Observe que para esse resultado, não se usa nada que envolva o campo em Σ^+, portanto podemos considerar a prova feita em [8]. □

Observação 3.6.3. Na demonstração desse lema dá-se que a aproximação $\tilde{s}^-_{q_{h,t}}$ do tempo $s^-_{q_{h,t}}$ pode ser escrita como $\tilde{s}^-_{q_{h,t}} = \tilde{s}_0(h,t) + \tilde{s}_1(h,t)h^\delta$ onde

$$\tilde{s}_0 = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{1+\lambda^2+4\lambda^2\delta}{h\lambda(1+2\lambda^2\delta)(1-t-te^{-\lambda s_0})}\right) + t\mathcal{O}(\lambda) \tag{3.6.1}$$

e $\tilde{s}_1(h,t)$ é escolhido convenientemente para que alguns termos sejam cancelados em $x^-_{q_{h,t}}(\tilde{s}^-_{q_{h,t}})$. Fizemos essa descrição pois essa informação será necessária mais à frente.

Agora, considere

$$\mathcal{C}_\rho = \{m_- + \rho(0, \cos(\theta), \text{sen}(\theta)); \theta \in [0, 2\pi)\}$$

como sendo o círculo centrado em m_- de raio ρ. Considerando $m_{\rho,\theta}$ os pontos desses círculos, temos o seguinte resultado:

Lema 3.6.4. Para as órbitas que passam através dos pontos $m_{\rho,\theta}$ temos que

$$\begin{aligned} x^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) =& 0,\\ y^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) =& y^+_{m_-}(s^+_{m_-}) + \rho[y^+_{m_-}(s^+_{m_-})\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^2)] + \mathcal{O}(\rho^2),\\ z^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) =& z^+_{m_-}(s^+_{m_-}) + \rho[z^+_{m_-}(s^+_{m_-})\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^0)] + \mathcal{O}(\rho^2). \end{aligned}$$

Demonstração: Comecemos observando que

$$\begin{pmatrix} C^1_{m_{\rho,\theta}} \\ \\ C^2_{m_{\rho,\theta}} \\ \\ C^3_{m_{\rho,\theta}} \end{pmatrix} = \frac{1}{(L+R)^2+\Omega^2} M^+ \begin{pmatrix} -\frac{k}{\mu} \\ \\ \frac{\lambda}{a} + \rho\cos(\theta) \\ \\ \frac{\lambda^2}{a} + \rho\mathrm{sen}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_{m_-} \\ \\ C^2_{m_-} \\ \\ C^3_{m_-} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} C^1_{\theta} \\ \\ C^2_{\theta} \\ \\ C^3_{\theta} \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} C^1_\theta &= 2R\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta),\\ C^2_\theta &= \frac{L^2 - R^2 + \Omega^2}{\Omega}\cos(\theta) + \frac{R+L}{\Omega}\mathrm{sen}(\theta),\\ C^3_\theta &= -2R\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Seja

$$g_\theta = C^1_\theta e^{Rs}\cos(\Omega s) + C^2_\theta e^{Rs}\mathrm{sen}(\Omega s) + C^3_\theta e^{-Ls}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g'_\theta(s) &= e^{Rs}\cos(\Omega s)[C^1_\theta R + C^2_\theta \Omega] + e^{Rs}\mathrm{sen}(\Omega s)[C^2_\theta R - C^1_\theta\Omega] - LC^3_\theta e^{-Ls}\\ g''_\theta(s) &= e^{Rs}\cos(\Omega s)[C^1_\theta(R^2-\Omega^2) + C^2_\theta(2R\Omega)] + e^{Rs}\mathrm{sen}(\Omega s)[C^2_\theta(R^2-\Omega^2) - C^1_\theta(2R\Omega)] + L^2C^3_\theta e^{-Ls}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
x^+_{m_{\rho,\theta}}(s) =& C^1_{m_{\rho,\theta}} e^{Rs}\cos(\Omega s) + C^2_{m_{\rho,\theta}} e^{Rs}\text{sen}(\Omega s) + C^3_{m_{\rho,\theta}} e^{-Ls} + \frac{k}{\mu}\\
=& x^+_{m_-}(s) + \rho g_\theta(s).\\
y^+_{m_{\rho,\theta}}(s) =& (C^1_{m_{\rho,\theta}} R + C^2_{m_{\rho,\theta}}\Omega) e^{Rs}\cos(\Omega s) + (C^2_{m_{\rho,\theta}} R - C^1_{m_{\rho,\theta}}\Omega) e^{Rs}\text{sen}(\Omega s) - C^3_{m_{\rho,\theta}} L e^{-Ls}\\
=& y^+_{m_-}(s) + \rho g'_\theta(s).\\
z^+_{m_{\rho,\theta}}(s) =& [C^1_{m_{\rho,\theta}}(R^2-\Omega^2) + 2R\Omega C^2_{m_{\rho,\theta}}] e^{Rs}\cos(\Omega s) +\\
& [C^2_{m_{\rho,\theta}}(R^2-\Omega^2) - 2R\Omega C^1_{m_{\rho,\theta}}] e^{Rs}\text{sen}(\Omega s) + C^3_{m_{\rho,\theta}} L^2 e^{-Ls}\\
=& z^+_{m_-}(s) + \rho g''_\theta(s).
\end{aligned}$$

Para um certo valor t_0 temos que $\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}} = s^+_{m_-} + t_0\rho$ tende a $s^+_{m_{\rho,\theta}}$ quando ρ tende a zero. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
x^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) =& x^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) + \rho g_\theta(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}})\\
=& [y^+_{m_-}(s^+_{m_-})t_0 + g_\theta(s^+_{m_-})]\rho + \mathcal{O}(\rho^2).\\
y^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) =& y^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) + \rho g'_\theta(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}})\\
=& y^+_{m_-}(s^+_{m_-}) + \rho(t_0 z^+_{m_-}(s^+_{m_-}) + g'_\theta(s^+_{m_-})) + \mathcal{O}(\rho^2).\\
z^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) =& z^+_{m_-}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) + \rho g''_\theta(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}})\\
=& z^+_{m_-}(s^+_{m_-}) + \rho[g''_\theta(s^+_{m_-}) + t_0(k - \mu x^+_{m_-}(s^+_{m_-}) - y^+_{m_-}(s^+_{m_-}) - \beta z^+_{m_-}(s^+_{m_-}))] + \mathcal{O}(\rho^2)
\end{aligned}$$

Fazendo

$$t_0 = -\frac{g_\theta(s^+_{m_-})}{y^+_{m_-}(s^+_{m_-})}$$

temos $x^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) = \mathcal{O}(\rho^2)$. Além disso $\dfrac{dx^+_{m_{\rho,\theta}}}{ds}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) = y^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) = \mathcal{O}(\rho^0)$.

Assim, pelo teorema do valor médio

$$s^+_{m_{\rho,\theta}} = \tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}} + \mathcal{O}(\rho^2) = s^+_{m_-} + t_0\rho + \mathcal{O}(\rho^2).$$

Daí temos

$$y^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) = y^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) + \mathcal{O}(\rho^2)$$

pois $\dfrac{dy^+_{m_{\rho,\theta}}}{ds}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) = z^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) = \mathcal{O}(\rho^0)$ e

$$z^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) = z^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) + \mathcal{O}(\rho^2)$$

pois $\dfrac{dz^+_{m_{\rho,\theta}}}{ds}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) = \mathcal{O}(\rho^0)$.

Da Proposição 3.5.6 temos $s^+_{m_-} = \theta^* B\lambda + \mathcal{O}(\lambda^3)$. Assim

$$
\begin{aligned}
C^1_\theta =& \frac{1}{6}B\lambda\cos(\theta) - \frac{1}{12}B^2\lambda^2\text{sen}(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^3),\\
C^2_\theta =& \frac{\sqrt{3}}{6}B\lambda\cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{12}B^2\lambda^2\text{sen}(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^3),\\
C^3_\theta =& -\frac{1}{6}B\lambda\cos(\theta) + \frac{1}{12}B^2\lambda^2\text{sen}(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^3).
\end{aligned}
$$

Logo, usando que $e^{\theta^*}\cos(\sqrt{3}\theta^*) + \sqrt{3}e^{\theta^*}\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*) - e^{-2\theta^*} = 0$, ou seja, $e^{3\theta^*}\cos(\sqrt{3}\theta^*) + \sqrt{3}e^{3\theta^*}\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*) - 1 = 0$ e assim $\sqrt{3}e^{3\theta^*}\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*) = 1 - e^{3\theta^*}\cos(\sqrt{3}\theta^*)$. Temos

$$
\begin{aligned}
g_\theta(s^+_{m_-}) =& \frac{\sqrt{3}}{6}B^2e^{3\theta^*}\text{sen}(\theta)\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*)\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3);\\
g'_\theta(s^+_{m_-}) =& \frac{1}{3}[e^{-2\theta^*} + 2e^{\theta^*}\cos(\sqrt{3}\theta^*)]cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^2);\\
g''_\theta(s^+_{m_-}) =& -\frac{1}{\lambda}\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^0);
\end{aligned}
$$

onde $B = \frac{4\sqrt{3}}{3}e^{\theta^*}\text{sen}(\sqrt{3}\theta^*)$.

Assim, $t_0 = -\dfrac{g_\theta(s^+_{m_-})}{y^+_{m_-}(s^+_{m_-})} = \mathcal{O}(\lambda^2)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
x^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) =& 0,\\
y^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) =& y^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) + \mathcal{O}(\rho^2)\\
=& y^+_{m_-}(s^+_{m_-}) + \rho[y^+_{m_-}(s^+_{m_-})\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^2)] + \mathcal{O}(\rho^2),\\
z^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) =& z^+_{m_{\rho,\theta}}(\tilde{s}^+_{m_{\rho,\theta}}) + \mathcal{O}(\rho^2)\\
=& z^+_{m_-}(s^+_{m_-}) + \rho[z^+_{m_-}(s^+_{m_-})\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^0)] + \mathcal{O}(\rho^2).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.6.5. Considerando o sistema 3.1.1 e supondo que $(\lambda, \delta, R) \in G$ (superfície definida no Teorema 3.5.7), as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Se $0 < \delta \leq 1$, então existe uma quantidade infinita enumerável de órbitas periódicas acumulando-se na órbita homoclínica $\Gamma_{\lambda,\delta}$ (ou seja, ocorre um fenômeno similar à ferradura de Smale).

2. Se $\delta > 1$ mas suficientemente próximo de 1, então uma quantidade infinita enumerável de órbitas periódicas do item acima persistem mas não mais se acumulam na órbita homoclínica $\Gamma_{\lambda,\delta}$.

Demonstração: Considere dois segmentos T_h e $T_{h''}$, onde $0 < h'' < h$ e h suficientemente pequeno. Pelo Lema 3.6.2, temos que $\Pi_-(T_{h''})$ está contido na região anelar de raios $\rho_1 = h''^{\delta}(\lambda^{\delta-1} - 4\sqrt{\pi\delta}\lambda^{\delta-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^{\delta}))$ e $\rho_2 = h''^{\delta}(\lambda^{\delta-1} + 4\sqrt{\pi\delta}\lambda^{\delta-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^{\delta}))$. Assim, seja $\mathcal{C}_{\rho_1}$ a fronteira interior da região anelar. Observe que, usando o Lema 3.6.4, os pontos do círculo topológico $\Pi_+(\mathcal{C}_{\rho_1})$ satisfazem

$$z^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) + 2\lambda\delta y^+_{m_{\rho,\theta}}(s^+_{m_{\rho,\theta}}) = -\frac{1}{\lambda} + \rho_1\left[-\frac{1}{\lambda}\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^0)\right] + \mathcal{O}(\rho_1^2) + \mathcal{O}(\lambda).$$

Lembre que $z + 2\lambda\delta y = h - \dfrac{1}{\lambda}$ é a expressão de uma reta paralela à $\mathcal{D}_-$ que passa por q_h. Uma condição suficiente sobre h e h'' para concluirmos que T_h e $\Pi_+\Pi_-(T_{h''})$ se interceptam transversalmente é

$$h < (h'')^{\delta}[-\lambda^{\delta-2}\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^{\delta-\frac{3}{2}})], \tag{3.6.2}$$

para algum θ.

Mais ainda, $z + 2\lambda\delta y = e^{-\delta s_0}h - \dfrac{1}{\lambda}$ é a expressão de uma reta paralela à $\mathcal{D}_-$ que passa por $\Pi_-^{-1}(q_h)$. Uma condição suficiente sobre h e h'' para concluirmos que T_h e $\Pi_+\Pi_-(T_{h''})$ se interceptam transversalmente é

$$e^{-\lambda s_0}h > (h'')^{\delta}[-\lambda^{\delta-2}\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^{\delta-\frac{3}{2}})], \tag{3.6.3}$$

para todo θ.

Para $h > 0$ suficientemente pequeno, construiremos o retângulo $\mathcal{R}_h$ como se segue. Pelo Lema 3.6.2,

$$\Pi_-(q_h) - m_- = h^{\delta}\lambda^{\delta-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \\ -\mathrm{sen}(\omega\tilde{s_0}(h,0)) + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{1}{2}}) \\ \\ -\cos(\omega\tilde{s_0}(h,0)) + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}.$$

Portanto $\Pi_-(q_h)$ espirala ao redor de m_- quando h tende a 0 (veja a igualdade (3.6.1)). Mais ainda, a coordenada angular η_h de $\Pi_-(q_h)$, com respeito a m_- satisfaz

$$\tan(\eta_h) = \tan(\omega \tilde{s}_0(h,0)) + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{1}{2}}).$$

Consequentemente, $\eta_h = \omega \tilde{s}_0(h,0) + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{1}{2}})$.

Vamos agora definir os pontos $q_{h'}$ e $q_{h''}$ de maneira que $0 < h'' < h' < h$ e $\eta_{h'} = \eta_h + 2\pi$ e $\eta_{h''} = \eta_h + 4\pi$. Assim, da igualdade (3.6.1) segue que

$$\frac{h}{h'} = e^{\frac{2\pi\lambda}{\omega}} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{3}{2}}) \quad \text{e} \quad \frac{h}{h''} = e^{\frac{4\pi\lambda}{\omega}} + \mathcal{O}(\lambda^{\frac{3}{2}}).$$

Definimos assim o retângulo $\mathcal{R}_h$, com vértices q_h, q'_h, $\Pi_-^{-1}(q_{h''})$ e $\Pi_-^{-1}(q_{h'})$.

Da igualdade (3.6.2), uma condição suficiente em h para que $\Pi_+\Pi_-(\mathcal{R}_h)$ e $\mathcal{R}_h$ interceptem-se transversalmente é

$$h < h^{\delta}[-e^{-\frac{4\pi\lambda\delta}{\omega}}\lambda^{\delta-2}\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^{\delta-\frac{3}{2}})] \tag{3.6.4}$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi]$.

Disso, para um $\delta \in (0,1]$ fixo e $\theta = \pi$ temos que existe $h_1 > 0$ tal que a inequação (3.6.4) ocorre para cada $h < h_1$. Ou seja, para $0 < \delta \leq 1$ a aplicação de Poincaré $\Pi_+\Pi_-$ tem um shift de dois símbolos como subsistema, logo garantimos a existência de um fenômeno similar à ferradura de Smale.

Como a inequação (3.6.4) é verificada para $\delta = 1$ e $h = h_1$, existe uma função $\varepsilon(\lambda) > 0$ tal que para cada $\delta \in (1, 1 + \varepsilon(\lambda))$ e $h < h_1$ mas próximo de h_1 a inequação também é verdadeira.

Através da inequação (3.6.3), podemos concluir que uma condição suficiente sobre h a fim de concluir que $\Pi_+\Pi_-(\mathcal{R}_h)$ e $\mathcal{R}_h$ não se interceptem é

$$h > h^{\delta}e^{\lambda s_0}[-e^{-\frac{4\pi\lambda\delta}{\omega}}\lambda^{\delta-2}\cos(\theta) + \mathcal{O}(\lambda^{\delta-\frac{3}{2}})],$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Observe que para $\theta = \pi$ o lado direito da inequação assume valor máximo, além disso, ambas as exponenciais tendem a 1 quando λ tende a 0. Portanto, se λ é suficientemente pequeno, quando $\delta > 1$, existe $h_2 \in (0, h_1)$ tal que para cada $0 < h < h_2$ a inequação ocorre para cada $\theta \in [0, 2\pi]$ o que implica que $\Pi_+\Pi_-(\mathcal{R}_h)$ e $\mathcal{R}_h$ não se interceptam.

Resumidamente temos que, para $\delta \in (1, 1 + \varepsilon(\lambda))$ e $h < h_1$ mas suficientemente próximo de h_1, $\Pi_+\Pi_-(\mathcal{R}_h)$ e $\mathcal{R}_h$ se interceptam transversalmente. Portanto, algumas órbitas persistem, mas sem se acumular na órbita homoclínica.

Para finalizar, se $h \in (0, h_2)$ então $\Pi_+\Pi_-(\mathcal{R}_h)$ e $\mathcal{R}_h$ não se interceptam o que nos diz que não há ferraduras no entorno da órbita homoclínica. $\square$

3.7 Órbitas Homoclínicas na Presença de Regiões Deslizantes

Nesta seção mostramos que os resultados obtidos nas seções anteriores também podem ser verdadeiros para o caso em que existe uma região de deslize. Iremos considerar um modelo e mostrar a existência de órbita homoclínica. Não demonstramos o caso geral (nem a existência de infinitas órbitas periódicas) mas esperamos tratar esta situação em um trabalho futuro.

Nessa seção, vamos considerar um campo $Z = (X, Y)$ com plano de descontinuidade dado por $\Sigma = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) : z = 0\}$ com as seguintes propriedades:

Campo X (Campo em Σ^+):

i) sela em $e_+ = (1, 1, 1)$;

ii) a variedade estável $W^s(e_+)$ é a reta que passa pelos pontos e_+ e $e_+^\Sigma = (a, -1/2, 0) \in \Sigma$, para $a \in \mathbb{R}$;

iii) a variedade instável $W^u(e_+)$ é o plano paralelo ao plano gerado por $(2, 1, 0) - e_+$ e $(3, 1, 0) - e_+$ que passa por e_+;

iv) os autovalores de X em e_+ são $-3, 1 \pm 2i$.

v) $\tau_+ = W^u(e_+) \cap \Sigma$.

Campo Y (Campo em Σ^-):

i) sela em $e_- = (1, 1, -1)$;

ii) a variedade instável $W^u(e_-)$ é a reta que passa pelos pontos e_- e $e_-^\Sigma = (2, -2, 0)$;

iii) a variedade estável $W^s(e_-)$ é o plano paralelo ao plano gerado por $(4, -2, 0) - e_-$ e $(-2, 1, 0) - e_-$ que passa por e_-;

iv) os autovalores de Y em e_- são $1, -2 \pm 3i$.

v) $\tau_- = W^s(e_-) \cap \Sigma$.

Com estas condições, o fluxo φ_t^+ de X com condição inicial p_Y^Σ é dado por

$$\varphi^+_{p_Y^\Sigma}(t) = (x^+(t), y^+(t), z^+(t)).$$

onde

$$\begin{cases} x^+(t) &= 1-2e^{-3t}+2e^{-3t}a+e^t\mathrm{sen}(2t)(6a-14)+e^t\cos(2t)(3-2a), \\ y^+(t) &= 1-3e^{-3t}, \\ z^+(t) &= 1-2e^{-3t}-\dfrac{1}{5}e^t\cos(2t)(6a-14)-\dfrac{3}{5}e^t\mathrm{sen}(2t)(6a-14)-\dfrac{3}{5}e^t\cos(2t)(3-2a) \\ &+ \dfrac{1}{5}e^t\mathrm{sen}(2t)(3-2a). \end{cases}$$

Mostraremos que é possível escolher $a \in \mathbb{R}$ de modo que exista um $t_0 > 0$ tal que $\varphi_{e_-^\Sigma}(t_0) \in \tau_-$.

A reta de tangência do campo X, τ_X, é dada pela interseção de

$$4x+(-28/3+8a/3)y+7z = 5/3+8a/3$$

com $z=0$, enquanto a reta de tangência do campo Y é dada pela interseção de

$$-2y-5z = 3$$

com $z=0$.

A Figura 3.9 mostra a configuração das interseções das variedades invariantes com Σ e das retas de tangência. Na figura, para mostrar a existência da órbita homoclínica devemos mostrar que é possível levar o ponto verde, e_-^Σ na reta rosa τ_-, usando o fluxo de X.

A condição $\varphi_{e_-^\Sigma}(t_0) \in \tau_-$ é equivalente à existência de solução para o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 1-2e^{-3t}-(1/5)e^t\cos(2t)(6a-14)-(3/5)e^t\mathrm{sen}(2t)(6a-14) \\ -(3/5)e^t\cos(2t)(3-2a)+(1/5)e^t\mathrm{sen}(2t)(3-2a)=0 \\ -18+42e^{-3*t}-6e^{-3t}a+(12/5)e^t\mathrm{sen}(2t)(6a-14)-(9/5)e^t\mathrm{sen}(2t)(3-2a) \\ +(9/5)e^t\cos(2t)(6a-14)+(12/5)e^t\cos(2t)(3-2a)=0 \end{cases}$$

Numericamente obtemos que $a = 2.8004738..$ e $t = 0.19184549..$ é solução, logo existe uma órbita homoclínica para o sistema.

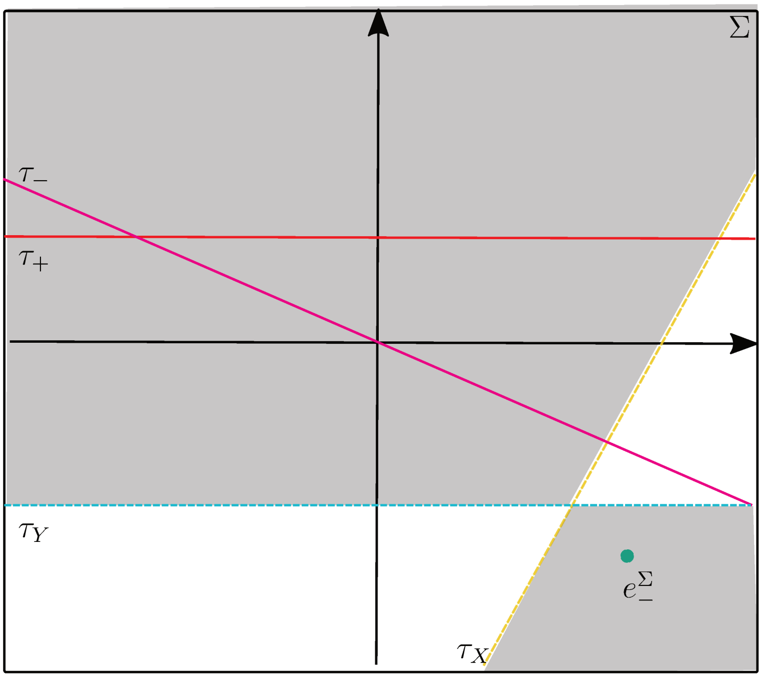

Figura 3.9: Representação das retas de tangências e das interseções das variedades invariantes com Σ. A parte em cinza é a região de costura e a parte em branco a região de deslize (estável e instável).

Capítulo 4

Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas em Sistemas Não Lineares Contínuos Por Partes

Nesse capítulo apresentaremos o caso de um campo descontínuo em que um dos campos que o compõe não é linear e o outro uma sela visível linear.

4.1 Sistema Hamiltoniano com Órbita Homoclínica em $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^6$

Os resultados apresentados nessa seção, são encontrados com mais detalhes em [9]. Relembraremos alguns desses resultados aqui pois adiante um dos sistemas com os quais trabalharemos será um caso particular desse. Utilizamos aqui também o artigo de Devaney em [4].

Considere a seguinte equação diferencial:

$$x^{(iv)} - \alpha(p)x'' + x + \beta(p,k)x^{\frac{2}{p}+1} - \gamma(p,k)x^{\frac{4}{p}+1} = 0. \tag{4.1.1}$$

onde $\alpha(p) = \dfrac{p^4+1}{p^2}$, $\beta(p,k) = \dfrac{p^6+5p^5+8p^4+4p^3-p^2-p}{p^2k^{\frac{2}{p}}}$, $\gamma(p,k) = \dfrac{p^4+6p^3+11p^2+6p}{k^{\frac{4}{p}}}$, $p, k \in \mathbb{R}$ e $p, k > 0$.

À essa equação diferencial, podemos associar o seguinte sistema de equações diferenciais em

$\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = w, \\ \dot{z} = x + \beta(p,k)x^{\frac{2}{p}+1} - \gamma(p,k)x^{\frac{4}{p}+1}, \\ \dot{w} = -z + \alpha(p)y \end{cases}$$

Apresentaremos agora duas definições relevantes para esse sistema.

Definição 4.1.1. Sejam

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}) \tag{4.1.2}$$

um campo vetorial C^∞ e

$$R : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \tag{4.1.3}$$

um difeomorfismo involutivo, isto é, $R^2 = R$. Dizemos que o sistema (4.1.2) é $R - reversível$, ou simplesmente reversível, se existe um involução R tal que:

$$DR(\mathbf{x})X(\mathbf{x}) = -X(R\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Definição 4.1.2. Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ e $H : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$. O sistema de equações diferenciais $\dot{\mathbf{x}} = X_H(\mathbf{x})$ é chamado um sistema conservativo Hamiltoniano ou apenas Hamiltoniano de n graus de liberdade, sempre que $X_H : U \to \mathbb{R}^{2n}$ é tal que

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, ..., n$$

onde $\mathbf{x} = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$.

A seguir, temos o principal resultado referente ao sistema 4.1.1 cuja demonstração pode ser encontrada em [9].

Proposição 4.1.3. A equação diferencial 4.1.1 é reversível, hamiltoniana e possui solução (órbita) homoclínica em 0.

Considere agora a seguinte equação diferencial:

$$x^{(vi)} - \alpha(p)x^{(v)} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)x'' + x + A(p,k)x^{\frac{2}{p}+1} + B(p,k)x^{\frac{4}{p}+1} + C(p,k)x^{\frac{6}{p}+1} = 0. \quad (4.1.4)$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha(p) =& \frac{p^4+1}{p^2},\\
\beta(p,k) =& \frac{p^6+5p^5+8p^4+4p^3-p^2-p}{p^2k^{\frac{2}{p}}},\\
\gamma(p,k) =& \frac{p^4+6p^3+11p^2+6p}{k^{\frac{4}{p}}},\\
A(p,k) =& \beta(p,k)\left(\frac{2}{p}+1\right)\left(2p+p^2\right) - \frac{1+p}{pk^{\frac{2}{p}}},\\
B(p,k) =& \beta(p,k)\left(\frac{2}{p}+1\right)\left(-\frac{p(1+p)+2p}{k^{\frac{2}{p}}}\right) - \gamma(p,k)\left(\frac{4}{p}+1\right)\left(4p+p^2\right),\\
C(p,k) =& -\gamma(p,k)\left(\frac{4}{p}+1\right)\left(-\frac{p(1+p)+4p}{k^{\frac{2}{p}}}\right),
\end{aligned}$$

$p, k \in \mathbb{R}$ e $p, k > 0$.

À essa equação diferencial, podemos associar o seguinte sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{cases}
\dot{x_1} = x_2,\\
\dot{x_2} = x_3,\\
\dot{x_3} = x_4,\\
\dot{x_4} = x_5,\\
\dot{x_5} = x_6,\\
\dot{x_6} = \alpha(p)x_5 - \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)x_3 - x_1 - A(p,k)x^{\frac{2}{p}+1} - B(p,k)x^{\frac{4}{p}+1} - C(p,k)x^{\frac{6}{p}+1}
\end{cases}$$

E aqui também há um resultado análogo

Proposição 4.1.4. A equação diferencial (4.1.4) é reversível e possui solução (órbita) homoclínica em 0.

Demonstração: A demostração desse resultado pode ser encontrada em [9]. $\square$

Nós trabalharemos com o caso planar dessas equações em Σ^+. Mostraremos agora o método utilizado para encontrar as soluções das equações (4.1.1) e (4.1.4). Começamos considerando a função

$$f(t) = k\,\mathrm{sech}^p(t),$$

$p, k \in \mathbb{R}$ e $p, k \geq 1$ que tem conhecida solução homoclínica em 0. Logo,

$$\begin{aligned}
f(t) &= k\,\mathrm{sech}^p(t),\\
f'(t) &= -kp\,\mathrm{sech}^{p+1}(t)\mathrm{senh}(t),\\
f''(t) &= -kp\,\mathrm{sech}^p(t) + kp(p+1)\,\mathrm{sech}^{p+2}(t)\mathrm{senh}^2(t)\\
&= p^2\,\mathrm{sech}^p(t) - kp(p+1)\,\mathrm{sech}^{p+2}(t).
\end{aligned}$$

Assim,

$$f''(t) - p^2 f(t) + \frac{p(p+1)}{k^{\frac{2}{p}}}(f(t))^{1+\frac{2}{p}} = 0. \tag{4.1.5}$$

Multiplicando (4.1.5) por $f'(t)$ e integrando chegamos à

$$H(f(t), f'(t)) = \frac{(f'(t))^2}{2} - \frac{p^2(f(t)^2)}{2} + \frac{p^2(f(t))^{2+\frac{2}{p}}}{2k^{\frac{2}{p}}} = c$$

onde c representa uma constante.

Derivando 4.1.5 duas vezes encontramos

$$f^{(iv)}(t) - p^2 f''(t) + \frac{p(p+1)(p+2)}{pk^{\frac{2}{p}}}\left(\frac{2}{p}(f(t))^{\frac{2}{p}-1}(f'(t))^2 + (f(t))^{\frac{2}{p}} f''(t)\right) = 0 \tag{4.1.6}$$

Fazendo $H(f(t), f'(t)) = 0$ e substituindo juntamente com (4.1.5) em (4.1.6) concluímos

$$f^{(iv)}(t) - p^2 f''(t) + \left(p^2 + \frac{2}{p}\right) A(p,k)(f(t))^{\frac{2}{p}+1} - \left(\frac{p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}} + \frac{2p}{k^{\frac{2}{p}}}\right) A(p,k)(f(t))^{\frac{4}{p}+1} = 0 \tag{4.1.7}$$

onde $A(p,k) = \frac{p(p+1)(p+2)}{pk^{\frac{2}{p}}}$.

Somando e subtraindo o termo $\frac{p^4+1}{p^2} f''(t)$ em (4.1.7) e por (4.1.5) temos

$$f^{(iv)}(t) - \alpha(p) f''(t) + f(t) + \beta(p,k)(f(t))^{\frac{2}{p}+1} - \gamma(p,k)(f(t))^{\frac{4}{p}+1} = 0.$$

onde $\alpha(p) = \dfrac{p^4+1}{p^2}$, $\beta(p,k) = \dfrac{p^6 + 5p^5 + 8p^4 + 4p^3 - p^2 - p}{p^2 k^{\frac{2}{p}}}$, $\gamma(p,k) = \dfrac{p^4 + 6p^3 + 11p^2 + 6p}{k^{\frac{4}{p}}}$, $p, k \in \mathbb{R}$ e $p, k > 0$. Isso nos mostra que $f(t)$ é solução de (4.1.1).

Para garantir que essa função também é solução de (4.1.4) derivamos (4.1.1) duas vezes, substituímos (4.1.5) e $H(f(t), f'(t)) = 0$ e depois somamos e subtraímos o termo $\frac{f''(t)}{p^2}$.

Garantida a existência de soluções homoclínicas na origem nesses casos, o que faremos é dar condições para que continuemos conectando soluções dessa natureza ao colocarmos a caso planar desse campo em Σ^+ e uma sela em Σ^-.

Observação 4.1.5. A escolha da versão em $\mathbb{R}^2$ para as equações apresentadas nessa seção se justifica pela intenção de futuramente estender possíveis resultados encontrados para dimensões pares maiores.

4.2 Um Caso Contendo um Campo Não Linear Planar

Nessa seção construiremos Campo de Vetores associado a um sistema de Filippov de forma que em Σ^+ teremos o caso planar do sistema apresentado na seção anterior e em Σ^- uma sela admissível. Nosso objetivo novamente será procurar por casos em que tenhamos a existência de órbitas homoclínicas e heteroclínicas tomando como região de descontinuidade $\Sigma = f^{-1}(0)$ onde $f(x, y) = y$.

4.2.1 Campo em Σ^+

Considere a equação dada por

$$x'' - p^2 x + \frac{p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}} x^{1+\frac{2}{p}} = 0 \tag{4.2.1}$$

Temos associada à essa equação diferencial o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' &= y \\ \\ y' &= p^2 x - \frac{p(1+p)}{k^{\frac{2}{p}}} x^{1+\frac{2}{p}} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Trabalharemos com esse sistema para o caso p=2, que fica:

$$\begin{cases} x' = y \\ \\ y' = 4x - \frac{6}{k} x^2 \end{cases}$$

Os equilíbrios desse sistema são os pontos $O = (0, 0)$ e $P = (\frac{2k}{3}, 0)$, que nesse caso serão pseudo-equilíbrios já que Σ será o eixo x.

Observação 4.2.1. Trataremos por X o campo de vetores em Σ^+ para $p = 2$.

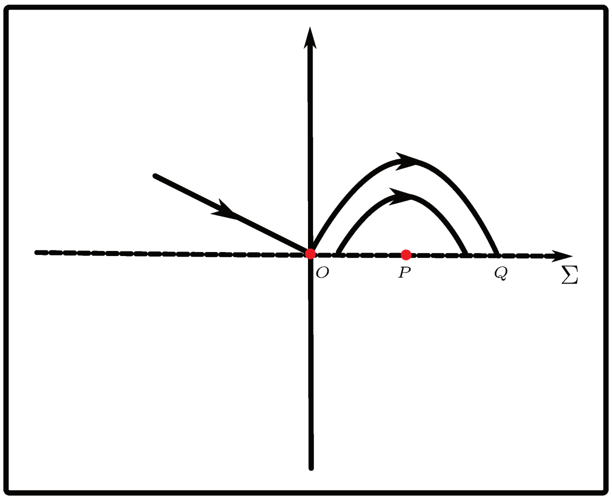

Figura 4.1: Campo em Σ^+ para p=2

A função hamiltoniana associada é dada por

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} - 2x^2 + \frac{2x^3}{k}.$$

Para encontrarmos Q, devemos fazer $H(x,0) = 0$ e daí concluímos que $Q = (k, 0)$.

4.2.2 Campo em Σ^-

Para o campo em Σ^- faremos uma construção análoga a feita no Capítulo 2. Considerando $k > 0$ dado no sistema acima, exibiremos um campo que contém uma sela visível em

$$E = \left(\frac{2k}{3}, -\frac{2k}{3}\right)$$

de maneira que seus autovalores sejam $\mu_2 > 0$ e $-\lambda_2 < 0$ e que $\Sigma \cap W^u(E) = M = (m, 0)$ e $\Sigma \cap W^s(E) = N = (n, 0)$, ou seja, com essas interseções determinamos quem são os autovetores. Acrescentamos aqui a hipótese de $m < n$ e assim o campo que procuramos é representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x' &= \left[\dfrac{2k(\mu_2+\lambda_2)-3(m\mu_2+n\lambda_2)}{3(n-m)}\right]x \\ & + \left[\dfrac{(4k^2-6km-6kn+9mn)(\mu_2+\lambda_2)}{6k(n-m)}\right]y \\ & -\dfrac{2k(m\lambda_2+n\mu_2)-3mn(\lambda_2+\mu_2)}{3(n-m)} \\ y' &= -\left[\dfrac{2k(\lambda_2+\mu_2)}{3(n-m)}\right]x \\ & -\left[\dfrac{2k(\lambda_2+\mu_2)-3(m\lambda_2+n\mu_2)}{3(n-m)}\right]y \\ & +\dfrac{2k(m\lambda_2+n\mu_2)}{3(n-m)} \end{cases}$$

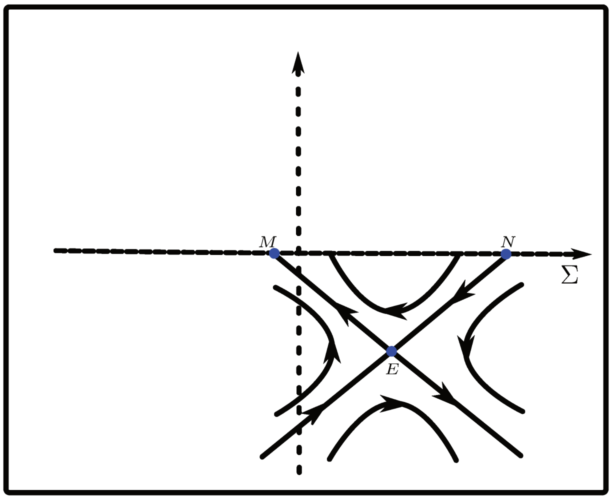

Figura 4.2: Campo em Σ^-

Observação 4.2.2. Chamaremos de Y o campo de vetores em Σ^-.

Considere assim o seguinte sistema de Filippov

$$Z(x,y) = \begin{cases} X(x,y) \quad se \quad (x,y)\in\Sigma^+ \\ \\ Y(x,y) \quad se \quad (x,y)\in\Sigma^- \end{cases} \tag{4.2.3}$$

onde $\Sigma = f^{-1}(0)$ onde $f(x,y) = y$.

Sendo assim, falta-nos estudar o comportamento desse campo sobre sua região de descontinuidade.

4.2.3 Campo Deslizante

Como vimos anteriormente, para calcularmos o campo em Σ devemos calcular a combinação convexa dos campos envolvidos. Sendo assim considerando Z^s o campo deslizante gerado por X e Y temos

$$Z^s(p) = \frac{Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)}{Yf(p) - Xf(p)}$$

onde $Xf(p) = 4x - \frac{6}{k}x^2$ e $Yf(p) = cx + f$ onde $c = -\dfrac{2k(\lambda_2 + \mu_2)}{3(n-m)}$ e $f = \dfrac{2k(m\lambda_2 + n\mu_2)}{3(n-m)}$.

Assim

$$Z^s(x) = \left(\frac{-(4x - \frac{6x^2}{k})(ax + e)}{cx + f - 4x + \frac{6x^2}{k}}, 0 \right).$$

onde $a = \dfrac{2k(\mu_2 + \lambda_2) - 3(m\mu_2 + n\lambda_2)}{3(n-m)}$ e $e = -\dfrac{2k(m\lambda_2 + n\mu_2) - 3mn(\lambda_2 + \mu_2)}{3(n-m)}$.

As tangências do campo superior em Σ ocorrem exatamente nos equilíbrios que estão sobre Σ em ambos os casos.

Para o campo inferior, as tangências ocorrem quando $Yf(p) = 0$ e $p \in \Sigma$, ou seja, essa tangência ocorre no ponto $\left(\dfrac{m\lambda_2 + n\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2}, 0 \right)$.

4.3 Diagrama de Bifurcações para um Modelo Não Linear Planar

Nessa seção o objetivo será procurar conexões homoclínicas e heteroclínicas em um sistema descontínuo no qual a órbita não seja do tipo deslizante, ou seja, que as conexões dessas órbitas em Σ aconteçam em uma região de costura.

Começamos apresentando algumas definições sobre tipos de órbitas heteroclínicas e homoclínicas.

Definição 4.3.1. Seja $Z = (X, Y)$ um Campo de Vetores associado a um Sistema de Filippov.

1. Uma órbita de Z contida em $\Sigma^c \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ é dita pseudo-heteroclínica do tipo I se seu conjunto $\alpha-$limite é um equilíbrio admissível de X ou Y e seu conjunto $\omega-$limite é um pseudo-equilíbrio ou vice-versa.

2. Uma órbita de Z contida em $\Sigma^c \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ é dita pseudo-heteroclínica do tipo II se seus conjuntos $\alpha-$limite e $\omega-$limite são ambos constituídos por pseudo-equilíbrios distintos.

3. Uma órbita de Z contida em $\Sigma^c \cup \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ é dita pseudo-homoclínica se seus conjuntos $\alpha-$limite e $\omega-$limite são ambos constituídos pelo mesmo pseudo-equilíbrio.

4.3.1 1º caso: $m < 0$ e $n < 0$

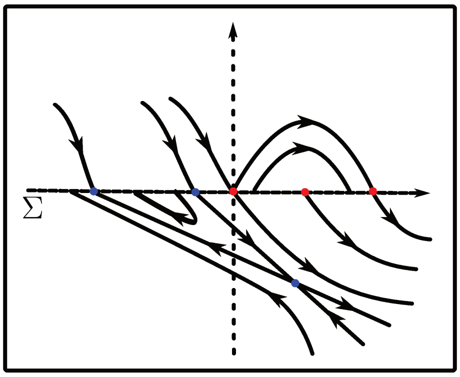

Figura 4.3: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n < 0$.

Pela forma como o sistema $Z = (X, Y)$ se configura, não há possibilidade de conectar o equilíbrio existente no campo Y com os pseudo-equilíbrios que se encontram em Σ e nem uma curva que forme uma órbita homoclínica por consequência do Teorema da Existência e Unicidade.

4.3.2 2º caso: $m < 0$ e $n = 0$

Como $n = 0$ esse caso apresenta diretamente a existência de uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga os pontos O e E. Os demais equilíbrios (incluindo os pseudos) não admitem órbitas que os liguem.

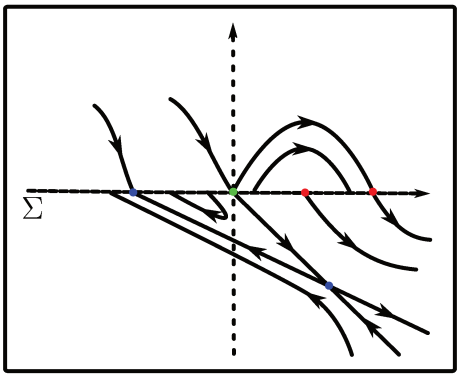

Figura 4.4: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n = 0$.

4.3.3 3º caso: $m < 0$ e $0 < n < p$

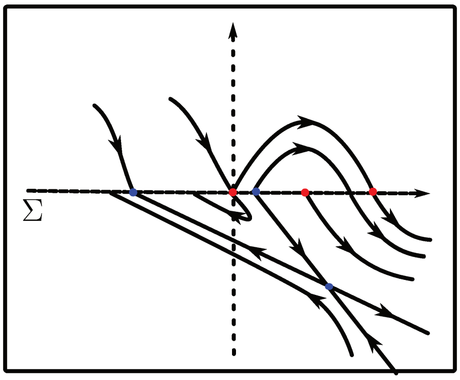

Figura 4.5: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $0 < n < p$.

Devido as disposições dos campos X e Y não temos nenhum tipo de conexão de natureza heteroclínica ou homoclínica.

4.3.4 4º caso: $m < 0$ e $n = p$

Como $n = p$ temos claramente a existência de uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga E e P e mais nenhuma possibilidade das órbitas que procuramos.

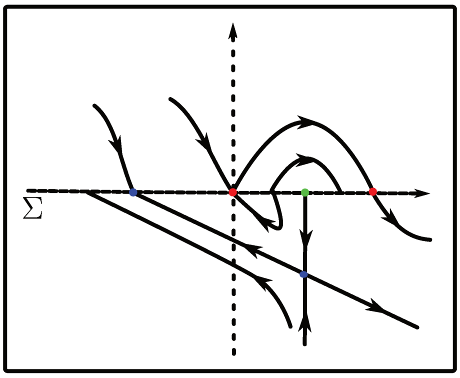

Figura 4.6: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n = p$.

4.3.5 5º caso: $m < 0$ e $p < n < q$

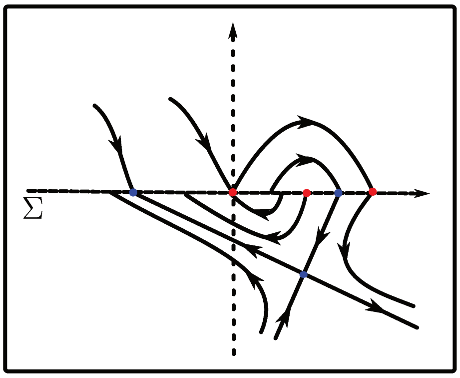

Figura 4.7: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $p < n < q$ e não há nenhuma conexão homoclínica ou heteroclínica.

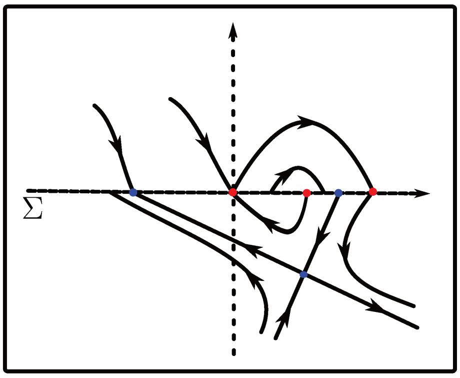

Figura 4.8: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $p < n < q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

Diferentemente dos 4 casos já apresentados, aqui temos 3 possíveis situações. Pode não haver nenhuma conexão das que procuramos, como visto na Figura 4.7. Nas Figuras 4.8 e 4.9 apresentamos a possibilidade de existência de uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II que liga os pontos O e P. Observe que é possível construirmos outras órbitas desse tipo apenas "espiralando" mais vezes no entorno do ponto P. Na Figura 4.9 temos uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo I ligando P e E.

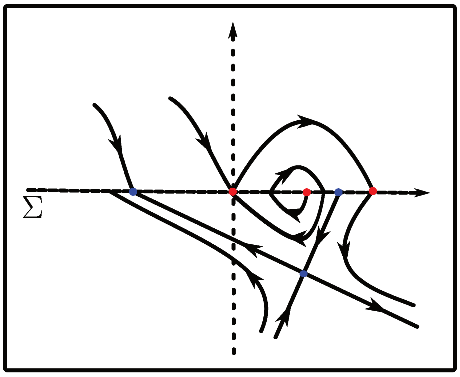

Figura 4.9: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $p < n < q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

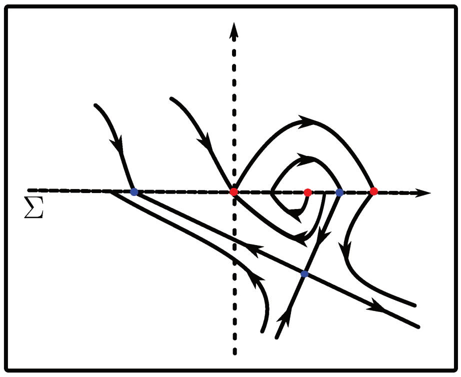

Figura 4.10: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $p < n < q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo I.

4.3.6 6º caso: $m < 0$ e $n = q$

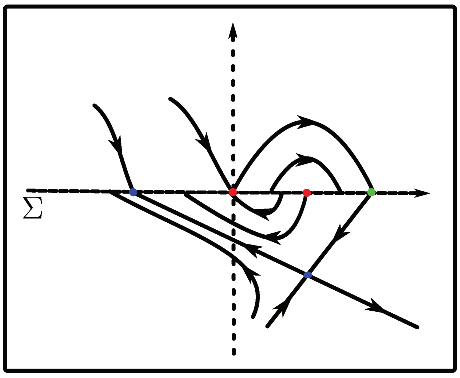

Figura 4.11: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n = q$ e não há nenhuma conexão homoclínica ou heteroclínica.

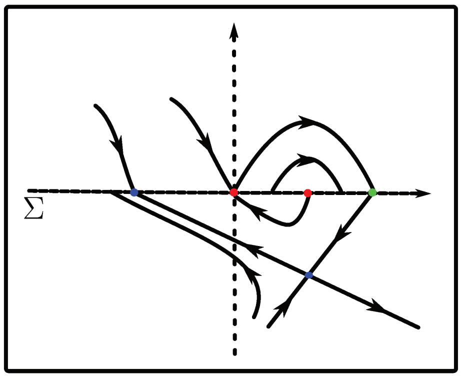

Figura 4.12: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n = q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

Em todas as situações aqui garantimos a existência de uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga O e E passando por Q, pois $n = q$. Nas figuras 4.12 e 4.13 representamos os casos em que temos também uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo II que liga O à P, observe que podemos dar mais voltas do que apresentamos nessas figuras no entorno de P, ainda mantendo a existência desse tipo de conexão.

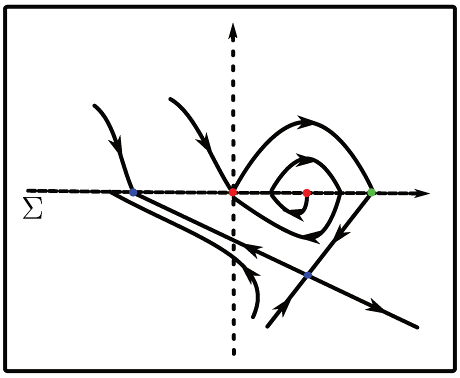

Figura 4.13: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n = q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

4.3.7 7º caso: $m < 0$ e $n > q$

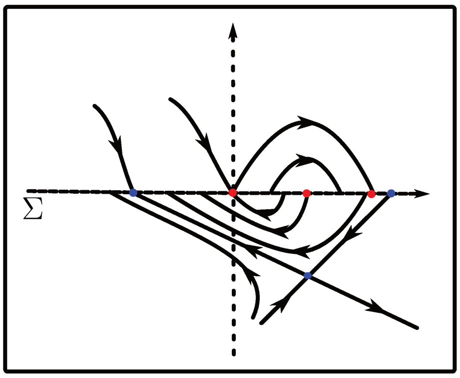

Figura 4.14: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n > q$ e não há nenhuma conexão homoclínica ou heteroclínica.

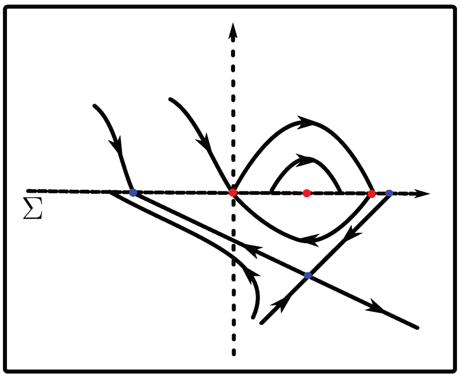

Figura 4.15: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n > q$ e há uma conexão pseudo-homoclínica.

Quando $m < 0$ e $n > q$ temos 3 situações possíveis. Na Figura 4.14 mostramos o caso em que não há nenhuma conexão da natureza que procuramos. Na Figura 4.15 temos a existência de uma órbita pseudo-homoclínica com equilíbrio-limite em O.

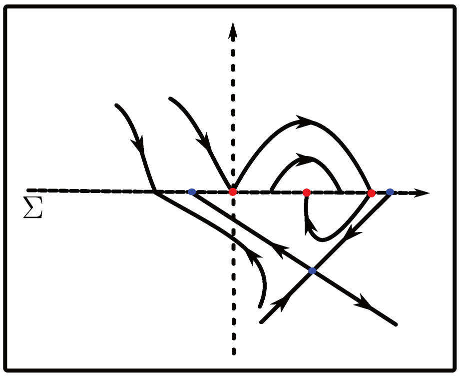

Figura 4.16: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n > q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

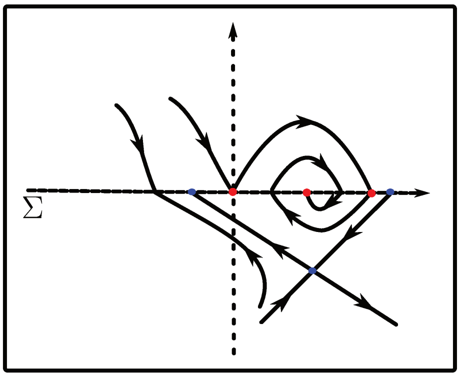

Figura 4.17: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n > q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

Nas Figuras 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19 apresentamos possibilidades de conexões pseudo-heteroclínicas do tipo II entre O e E, nos dois primeiros casos, passando por Q e nos dois últimos, diretamente. Além disso, observe que o número de voltas apresentado nas Figuras 4.17 e 4.19 pode ser muito maior mantendo ainda a existência de órbitas desse tipo.

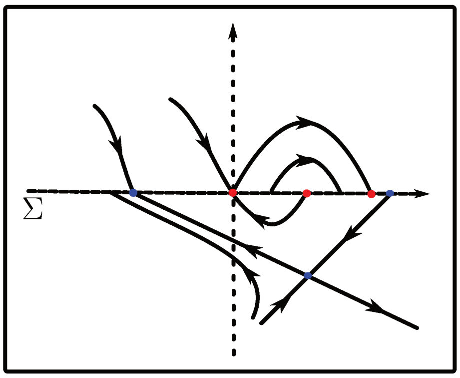

Figura 4.18: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n > q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

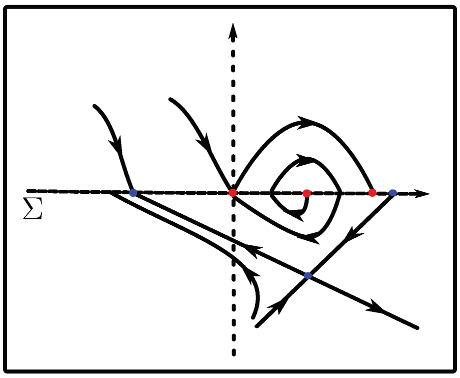

Figura 4.19: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m < 0$ e $n > q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

4.3.8 8º caso: $m = 0$ e $0 < n < p$

Como $m = 0$ temos uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga O e E e não há nenhuma outra conexão do tipo que desejamos.

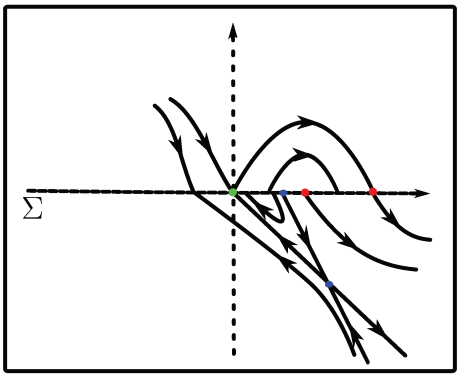

Figura 4.20: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = 0$ e $0 < n < p$.

4.3.9 9º caso: $m = 0$ e $n = p$

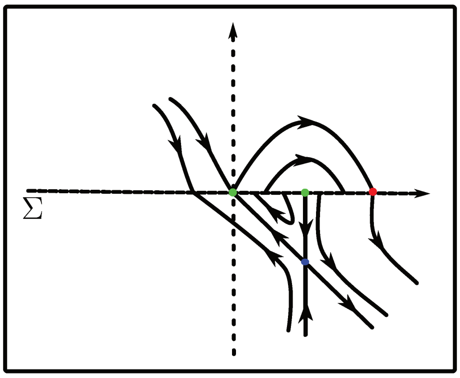

Figura 4.21: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = 0$ e $n = p$.

Aqui, como $m = 0$ e $n = p$, há diretamente duas órbitas pseudo-heteroclínicas do tipo I ligando O e E e P e E e mais nenhuma possibilidade de órbitas da natureza que procuramos.

4.3.10 10º caso: $m = 0$ e $p < n < q$

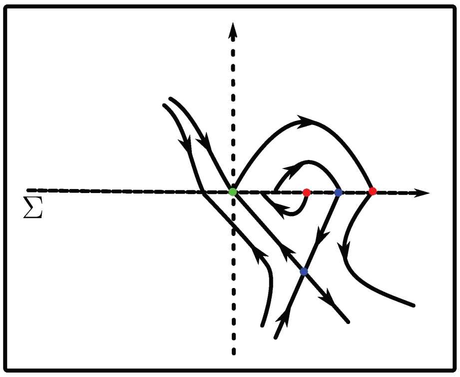

Figura 4.22: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = 0$ e $p < n < q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo I.

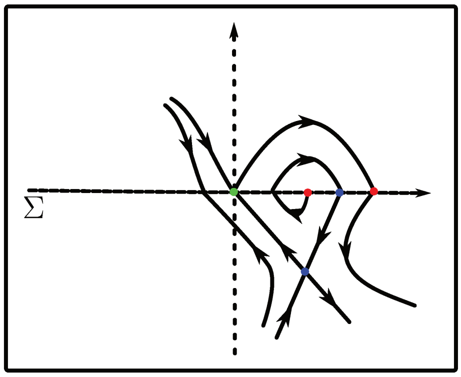

Figura 4.23: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = 0$ e $p < n < q$ e há duas conexões pseudo-heteroclínicas do tipo I.

Como $m = 0$ temos garantida uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga O e E. Outra órbita do mesmo tipo pode existir ligando P e E como vemos na Figura 4.23. Vale ressaltar que o número de voltas que a órbita que liga P e E dá, pode ser, mais uma vez, maior que o apresentado na figura.

4.3.11 11º caso: $m = 0$ e $n = q$

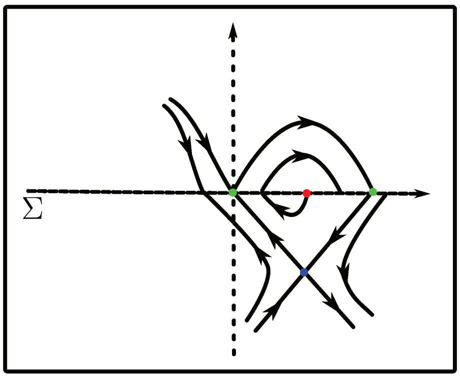

Figura 4.24: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = 0$ e $n = q$.

Nesse caso temos duas órbitas pseudo-heteroclínicas do tipo I que ligam O e E, uma diretamente ($m = 0$) e a outra passando por Q ($n = q$). Um fato curioso é que a imagem vista no retrato de fase, lembra bastante a configuração de uma órbita homoclínica, entretanto, essa não é a situação já que O é um pseudo-equilíbrio de $Z = (X, Y)$.

4.3.12 12º caso: $m = 0$ e $n > q$

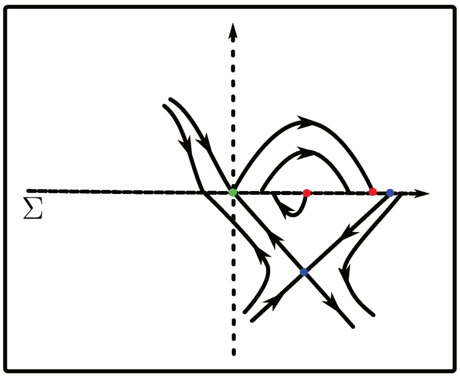

Figura 4.25: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = 0$ e $n > q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo I.

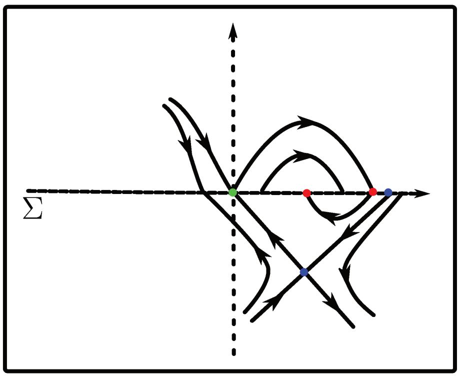

Figura 4.26: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = 0$ e $n > q$ e há duas conexões pseudo-heteroclínicas, uma do tipo I e uma do tipo II.

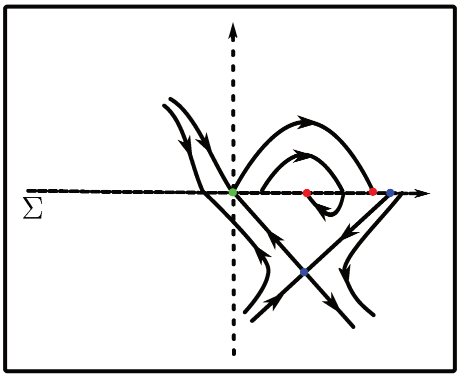

Figura 4.27: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = 0$ e $n > q$ e há duas conexões pseudo-heteroclínicas, uma do tipo I e uma do tipo II.

Nas 3 situações apresentadas nesse caso, temos garantida a existência de uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga O e E pois $m = 0$. Nas Figuras 4.26 e 4.27 mostramos a possibilidade de uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo II que liga O e P que inclusive pode ter um comportamento com mais voltas que o apresentado.

4.3.13 13º caso: $0 < m < p$ e $0 < n < p$

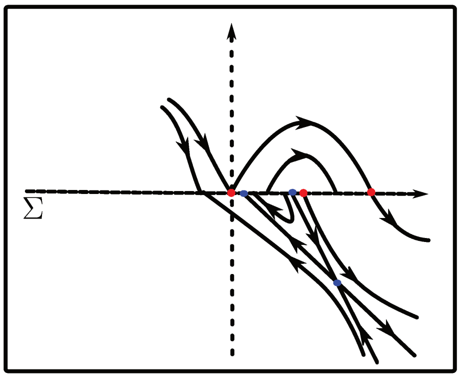

Figura 4.28: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $0 < n < p$.

Como pode ser visto na Figura 4.28, devido à configuração dos campos e ao Teorema da Existência e Unicidade, nesse caso não pode haver nenhum tipo de conexão de natureza heteroclínica e homoclínica.

4.3.14 14º caso: $0 < m < p$ e $n = p$

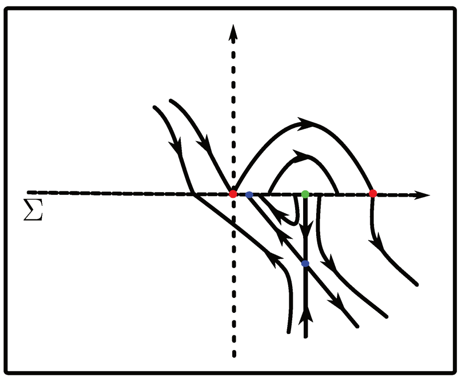

Figura 4.29: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $n = p$.

Como $n = p$ temos a existência de uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga P e E e não há mais nenhuma possibilidade para o tipo de órbitas que procuramos.

4.3.15 15º caso: $0 < m < p$ e $p < n < q$

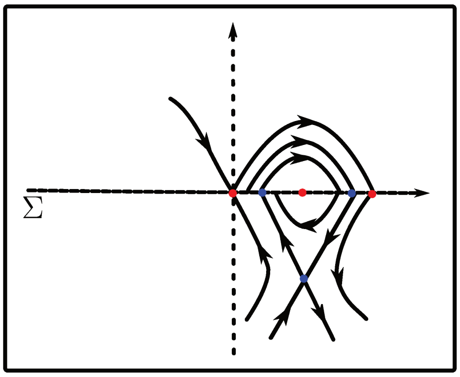

Figura 4.30: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $p < n < q$ e não há nenhuma conexão homoclínica ou heteroclínica.

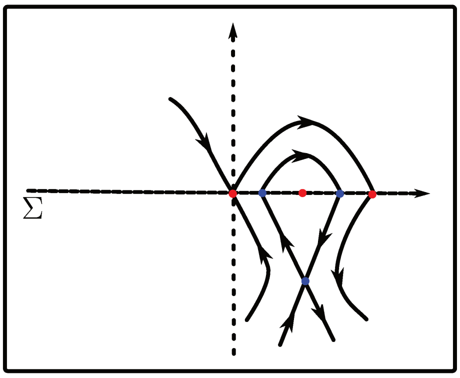

Figura 4.31: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $p < n < q$ e há uma conexão homoclínica.

Na Figura 4.30 apresentamos o caso em que não há nenhuma das conexões que procuramos. Na Figura 4.31 exemplificamos a existência de uma órbita homoclínica com equilíbrio limite em E. Nas Figuras 4.32 e 4.33 mostramos órbitas pseudo-heteroclínicas do tipo I que ligam P e E. Como já vimos anteriormente, essa órbita que liga P e E pode dar mais voltas do que apresentamos aqui nas imagens.

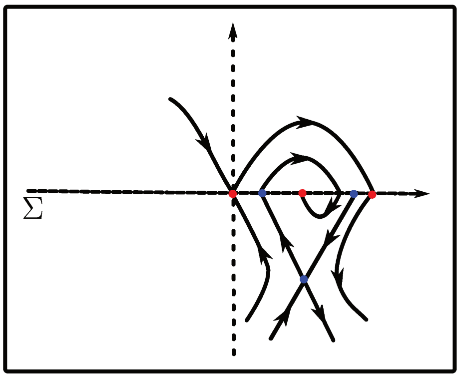

Figura 4.32: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $p < n < q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo I.

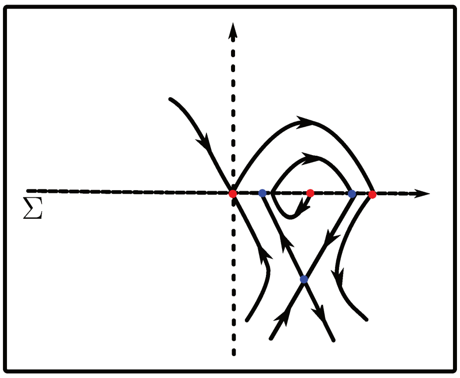

Figura 4.33: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $p < n < q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo I.

4.3.16 16º caso: $0 < m < p$ e $n = q$

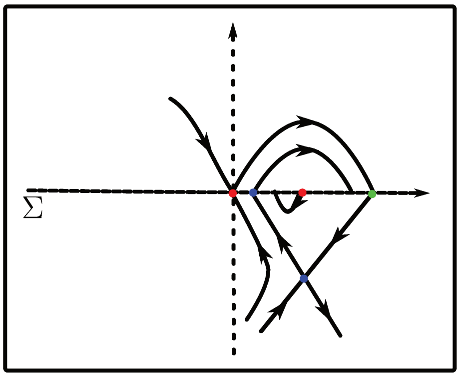

Figura 4.34: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $n = q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo I.

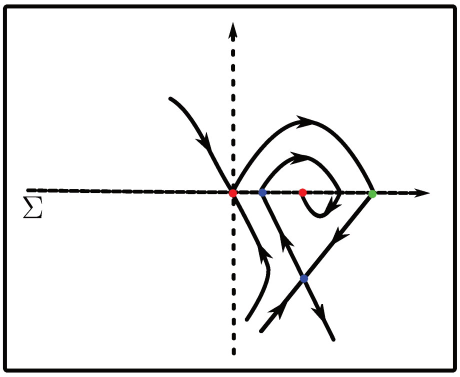

Figura 4.35: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $n = q$ e há duas conexões pseudo-heteroclínicas do tipo I.

Como $n = q$, aqui sempre teremos uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga O e E passando por Q. Na Figura 4.35 mostramos que também é possível conectarmos E e P através de uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I a qual pode inclusive apresentar um comportamento mais espiral do que a imagem que apresentamos.

4.3.17 17º caso: $0 < m < p$ e $n > q$

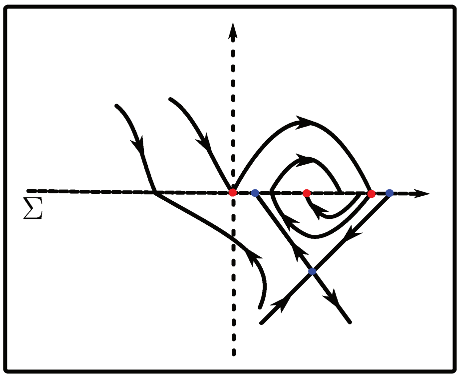

Figura 4.36: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $n > q$ e não há nenhuma conexão homoclínica ou heteroclínica.

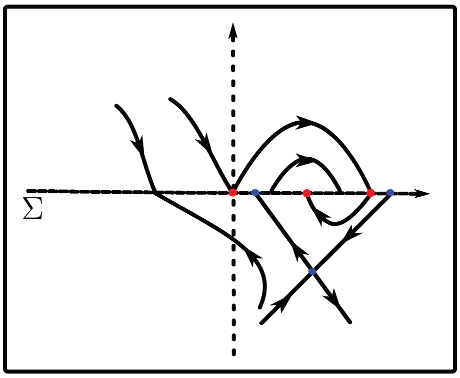

Figura 4.37: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $n > q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo II.

Nesse caso, temos a possibilidade de não haver nenhuma conexão, como pode ser visto na

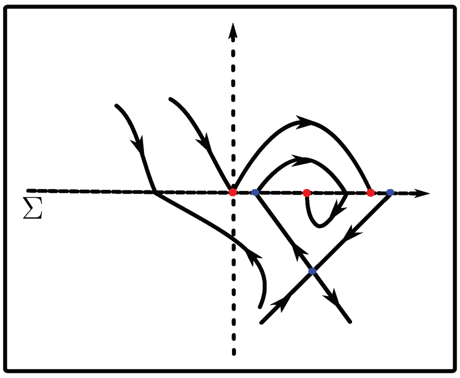

Figura 4.38: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $0 < m < p$ e $n > q$ e há uma conexão pseudo-heteroclínica do tipo I.

Figura 4.36 ou de termos uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo II ligando O à P através de Q, como pode ser visto na Figura 4.37. No último exemplo (Figura 4.38), temos uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga E e P. Observe que as órbitas dos dois últimos exemplos desse caso podem espiralar em torno de P mais vezes do que representamos.

4.3.18 18º caso: $m = p$ e $p < n < q$

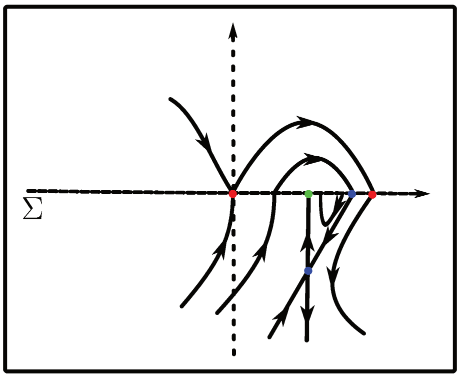

Figura 4.39: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = p$ e $p < n < q$.

Sendo $m = p$, temos uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga P e E. Outras órbitas heteroclínicas ou alguma homoclínica não são possíveis nesse caso como pode ser visto na Figura 4.39.

4.3.19 19º caso: $m = p$ e $n = q$

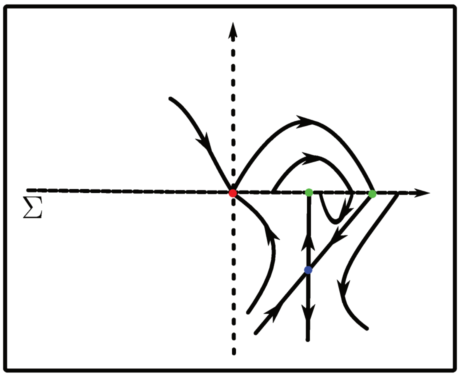

Figura 4.40: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = p$ e $n = q$.

Na figura 4.40 temos a representação dos caso em que $m = p$ e $n = q$ onde ocorrem duas órbitas pseudo-heteroclínicas do tipo I: uma conectando P e E e outra conectando O e E passando através de Q.

4.3.20 20º caso: $m = p$ e $n > q$

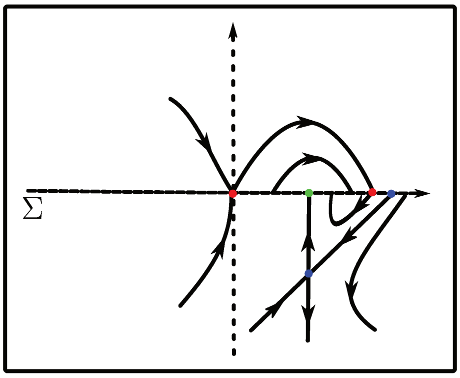

Figura 4.41: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = p$ e $n > q$.

Sendo $m = p$, consequentemente garantimos a existência de uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga P e E e graças ao posicionamento dos campos, essa será a única órbita dentre as que procuramos que ocorre nesse caso. Veja na Figura 4.41.

4.3.21 21º caso: $p < m < q$ e $p < n < q$

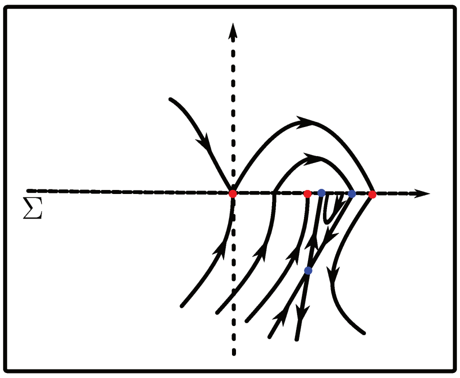

Figura 4.42: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $p < m < q$ e $p < n < q$.

Como pode ser visto na Figura 4.42, nessa situação não é possível encontrarmos nenhuma das órbitas de natureza homoclínica ou heteroclínica que desejamos devidos às configurações dos campos.

4.3.22 22º caso: $p < m < q$ e $n = q$

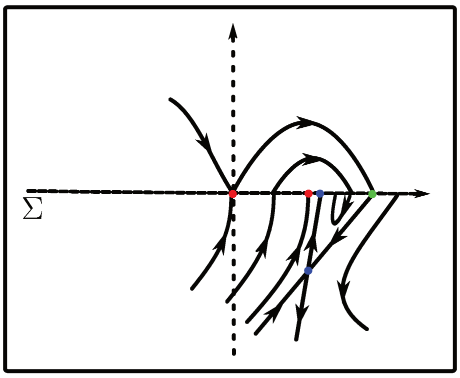

Figura 4.43: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $p < m < q$ e $n = q$.

Como $n = q$ temos uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I que liga O à E passando por Q e não há outras conexões do tipo que procuramos como pode ser observado na Figura 4.43.

4.3.23 23º caso: $p < m < q$ e $n > q$

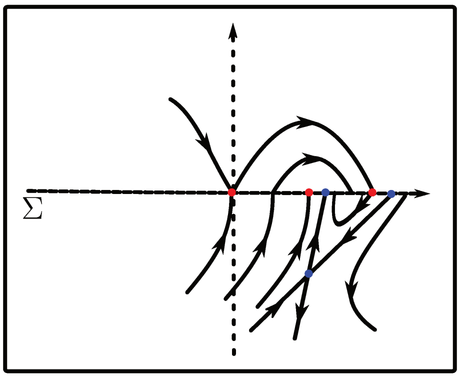

Figura 4.44: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $p < m < q$ e $n > q$.

Na Figura 4.44 representamos o que acontece nessa situação. Observe que não é possível termos nenhuma conexão homoclínica ou heteroclínica, pois não há como conectarmos os equilíbrios existentes ou fazermos “retornos” necessários para a existência de uma conexão homoclínica.

4.3.24 24º caso: $m = q$ e $n > q$

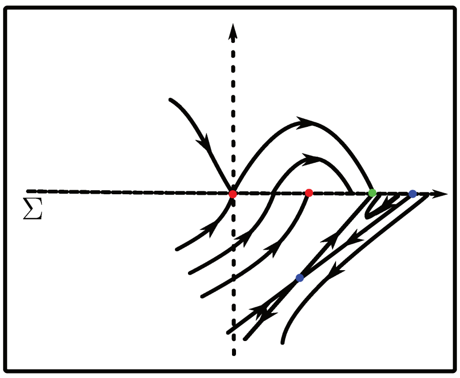

Figura 4.45: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m = q$ e $n > q$.

Nesse caso, apesar de termos $m = q$ não encontramos nenhuma órbita do tipo que procuramos, pois o ponto Q se encontra numa região de deslize portanto o que ocorre é a existência de órbitas pseudo-heteroclínicas deslizantes que no momento não são o objeto de análise. Veja a Figura 4.45.

4.3.25 25º caso: $m > q$ e $n > q$

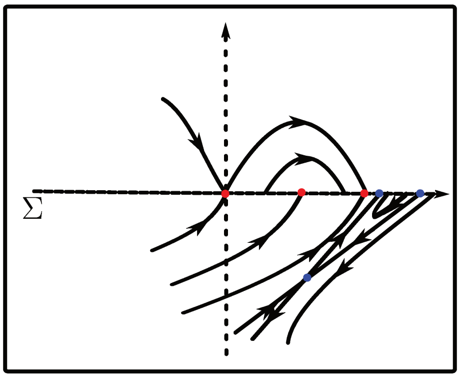

Figura 4.46: Retrato de fase associado ao Sistema $Z = (X, Y)$ quando $m > q$ e $n > q$.

Devido à configuração dos campos e ao Teorema da Existência e Unicidade, nesse caso não pode haver nenhuma órbita homoclínica ou heteroclínica como as que procuramos. Veja a Figura 4.46.

4.4 Condições para Existência de Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas

A seguir apresentaremos resultados análogos aos apresentados no Capítulo 2 para o sistema que construímos aqui Capítulo 4.

Teorema 4.4.1. O campo de vetores $Z = (X, Y)$ tem:

1. tangências coincidentes em $(0, 0) \in \Sigma$ se

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\frac{n}{m}$$

2. tangências coincidentes em $\left(\frac{2k}{3}, 0\right) \in \Sigma$ se

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\frac{2k - 3n}{2k - 3m}$$

3. todas as tangências distintas em Σ, em qualquer outro caso.

Demonstração: Já vimos que as tangências do campo X ocorrem nos pontos $(0,0)$ e $\left(\frac{2k}{3},0\right)$ e a tangência do campo Y ocorre em

$$\left(\frac{m\lambda_2+n\mu_2}{\lambda_2+\mu_2},0\right).$$

Igualando as tangências de X com a tangência de Y, obtemos o resultado. □

A seguir, damos condições para o caso que ocorre na Figura 4.15.

Teorema 4.4.2. Suponha $m<0$ e $n>k$. O campo de vetores $Z=(X,Y)$ tem um loop pseudo-homoclínico com pseudo-equilíbrio limite na origem se, e somente se,

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2}=-\frac{\ln\left(\dfrac{m}{m-k}\right)}{\ln\left(\dfrac{n}{n-k}\right)}.$$

Demonstração: Inicialmente calculamos a órbita do campo Y que passa por $\mathbf{x}=(k,0)$ e assim temos que se as coordenadas do fluxo são dadas por $(x(t),y(t))$, onde,

$$x(t)=-\frac{1}{6k}\left[\left(\frac{4k^2(k-n)-6k(k-n)m}{m-n}\right)\exp(\mu_2 t)+\left(\frac{6k(k-m)n-4k^2(k-m)}{m-n}\right)\exp(-\lambda_2 t)-4k^2\right].$$

e

$$y(t)=\frac{2}{3}\left(\frac{k(k-n)}{m-m}\exp(\mu_2 t)-\frac{k(k-m)}{m-n}\exp(-\lambda_2 t)-k\right).$$

Precisamos agora garantir que essa órbita passe por $(0,0)$ e para isso precisamos ter $x(t_0)=0$ e $y(t_0)=0$ para algum $t_0\in\mathbb{R}$. E daí temos

$$t_0=\frac{\ln\left(\dfrac{n}{n-k}\right)}{\mu_2}\quad\text{e}\quad\frac{\lambda_2}{\mu_2}=-\frac{\ln\left(\dfrac{m}{m-k}\right)}{\ln\left(\dfrac{n}{n-k}\right)}.$$

□

O caso heteroclínico aqui é um pouco mais complexo, devido a nossa diferenciação em tipos I e II e devido ao grande número de possibilidades existentes aqui.

A seguir apresentamos algumas condições que garantem a existência de algumas das órbitas pseudo-heteroclínicas do tipo I apresentadas na seção anterior.

Proposição 4.4.3. Uma condição suficiente para a existência de órbitas pseudo-heteroclínicas do tipo I no sistema é que

- $m = 0$ ou $m = \frac{2k}{3}$ ou $m = k$

ou

- $n = 0$ ou $n = \frac{2k}{3}$ ou $n = k$.

Demonstração: A demostração segue do fato de $(0,0)$, $\left(\dfrac{2k}{3}, 0\right)$ são os pseudo equilíbrios de Z e $Q = (k, 0)$ pertence a órbita que "sai" de $(0,0)$ e corta Σ. □

Esse teorema ilustra os casos 2, 4, 8, 14, 18, 20 e 22 que apresentam exatamente uma órbita pseudo-heteroclínica do tipo I. Nos casos 6, 10, 12 e 16 temos garantida uma órbita pseudo heteroclínica do tipo I podendo existir outras órbitas dessa natureza. Nos casos 9, 11 e 19 temos exatamente duas órbitas pseudo-heteroclínicas do tipo I.

Teorema 4.4.4. Suponha que $0 < m < \frac{2k}{3}$ e $\frac{2k}{3} < n < k$. O campo de vetores $Z = (X, Y)$ tem um loop homoclínico com equilíbrio limite em E se, e somente se,

$$n = \frac{k-m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(k+3m)(k-m)}.$$

Demonstração: Lembremos que a função hamiltoniana associada ao sistema 4.2.2 é dada por

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - 2x^2 + \frac{2x^3}{k}.$$

Comecemos encontrando a constante associada à solução que passa por $M = (m, 0)$ e depois encontraremos os outros pontos dessa curva de nível que corta Σ para encontrarmos qual deverá ser o ponto $N = (n, 0)$ para que a órbita homoclínica feche. Se $H(m, 0) = c$ segue que $c = \frac{2m^3}{k} - 2m^2$ Assim, procuramos os valores de $x \neq m$ de forma que

$$H(x, 0) = \frac{2m^3}{k} - 2m^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&H(x,0) = \frac{2m^3}{k} - 2m^2 \Leftrightarrow \frac{2x^3}{k} - 2x^2 = \frac{2m^3}{k} - 2m^2 \Leftrightarrow \frac{2}{k}\left(x^3 - m^3\right) = 2\left(x^2 - m^2\right) \Leftrightarrow \\
&\frac{2}{k}\left(x^2 + xm + m^2\right) = 2\left(x + m\right) \Leftrightarrow \frac{2}{k}x^2 + \frac{2m}{k}x + \frac{2m^2}{k} - 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow \\
&\frac{2}{k}x^2 + \left(\frac{2m}{k} - 2\right)x + \frac{2m^2}{k} - 2m = 0.
\end{aligned}$$

Precisamos resolver uma equação do segundo grau cujas raízes são dadas por:

$$\frac{k-m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(k+3m)(k-m)} \quad \text{e} \quad \frac{k-m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(k+3m)(k-m)}$$

Falta-nos provar que $\frac{k-m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(k+3m)(k-m)} \notin \left(\frac{2k}{3}, k\right)$ e $\frac{k-m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(k+3m)(k-m)} \in \left(\frac{2k}{3}, k\right)$.

Inicialmente, observe que como $m > 0$ temos que

$$\sqrt{k-m} < \sqrt{k+3m}.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\sqrt{(k+3m)(k-m)} > \frac{1}{2}\sqrt{(k-m^2)}$$

e portanto $\frac{k-m}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(k+3m)(k-m)} \notin \left(\frac{2k}{3}, k\right)$.

Para mostrar que $\frac{2k}{3} < \frac{k-m}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(k+3m)(k-m)} < k$ basta usar que $m < \frac{2k}{3}$ pois daí $2k - 3m < 0$. $\square$

O exemplo do caso desse teorema pode ser visto na Figura 4.31.

Referências Bibliográficas

[1] Arneodo, A., Coullet, P., Tresser, C. Possible new strange attractors with spiral structure. *Communications in Mathematical Physics 79*, 4 (1981), 573–579.

[2] Arrowsmith, D. K., Place, C. M. *An Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 1990.

[3] Artés, J. C., Llibre, J., Medrado, J. C., Teixeira, M. A. Piecewise linear differential systems with two real saddles. *Mathematics and Computers in Simulation*, 95 (2013), 13–22.

[4] Devaney, R. L. Homoclinic orbits in hamiltonian systems. *Journal of Diferrential Equations*, 21 (1976), 431–438.

[5] Gouveia, M. R. A., Llibre, J., Novaes, D. D., Pessoa, C. Piecewise smooth dynamical systems: Persistenc of periodic solutions and normal forms. *Journal of Differential Equations 260* (2016), 6180–6129.

[6] Guardia, M., Seara, T. M., Teixeira, M. A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations 250*, 4 (2011), 1967–2023.

[7] Homburg, A. J., Sandstede, B. Homoclinic and heteroclinic bifurcations in vector fields. *preprint* (2010).

[8] Llibre, J., Ponce, E., Teruel, A. E. Horseshoes near homoclinic orbits for piecewise linear differential systems in $\mathbb{R}^3$. *International Journal of Bifurcation and Chaos 17*, 04 (2007), 1171–1184.

[9] Mereu, A. C. O. *Pertubações de Sistemas Reversíveis.* Tese de doutorado, UNICAMP, 2009.

[10] Novaes, D. D., Ponce, G., Varão, R. Chaos induced by sliding phenomena in filippov systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations 29* (2017), 1–15.

[11] Novaes, D. D., Teixeira, M. A. Shilnikov problem in filippov dynamical systems. *preprint* (2015).

[12] Robinson, C. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos.* Studies in advanced mathematics. CRC Press, 1995.

[13] Xu, B., Yang, F., Tang, Y., Lin, M. Homoclinic bifurcations in planar piecewise-linear systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society 2013* (2013).