UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

MAYARA BRAZ ANTUNES

Difeomorfismo de Anosov de codimensão um

Campinas

2018

Mayara Braz Antunes

Difeomorfismo de Anosov de codimensão um

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Mayara Braz Antunes e orientada pelo Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 131878/2016-6

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Márcia Pillon D'Aloia - CRB 8/5180

An89d

Antunes, Mayara Braz, 1992-
Difeomorfismo de Anosov de codimensão um / Mayara Braz Antunes. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Anosov, Difeomorfismos de. 2. Variedades (Matemática). 3. Teoria dos sistemas dinâmicos. I. Varão Filho, José Régis Azevedo, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Codimension-one Anosov diffeomorphism
Palavras-chave em inglês:
Anosov diffeomorphisms
Manifolds (Mathematics)
Dynamical systems theory
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestra em Matemática
Banca examinadora:
José Régis Azevedo Varão Filho [Orientador]
Gabriel Ponce
Bernardo Melo de Carvalho
Data de defesa: 28-02-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). BERNARDO MELO DE CARVALHO

Prof(a). Dr(a). GABRIEL PONCE

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

À memória do meu anjo: Mariana, à minha família e ao Andrey.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à Deus pela minha vida e por todas as minhas lutas e vitórias que me ajudaste a enfrentar.

Ao CNPq pelo apoio financeiro e ao IMECC-UNICAMP por ter me escolhido para fazer parte do seu programa de Pós-Graduação e por ter me proporcionado desafios que me ajudaram a crescer tanto pessoalmente quanto profissionalmente.

Ao meu professor e orientador Dr. Régis Varão, pelos ensinamentos, puxões de orelha, pela paciência e principalmente pela disposição de me atender sempre quando precisei.

Ao professor Dr. Bernardo Carvalho por ter disponibilizado um tempo para ir ao IMECC e me passar um pouco do seu conhecimento, que me foi de muita valia.

Agradeço também à todos os professores do IMECC e do departamento de Matemática do IBILCE que me ajudaram ao longo de toda a minha vida acadêmica, em especial à professora Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado que me incentivou e me inspirou durante a graduação.

Aos professores Bernardo Melo de Carvalho, Gabriel Ponce, Carlos Alberto Maquera e Ricardo Miranda Martins que aceitaram fazer parte da minha banca. Todos os convidados de certa forma foram importantes para o desenvolvimento deste trabalho e tem minha admiração.

À minha mãe, meu pai, meus irmãos e ao meu padrasto por todo carinho, amor e por sempre estarem ao meu lado, me apoiando e me fortalecendo. Vocês são os melhores!

Ao meu namorado, Andrey, por ter me ajudado com seus conselhos para melhorias neste trabalho, mas, principalmente, por me dar amor e me fazer tão feliz. Amo você!

Por fim, à todos os meus colegas do IMECC e amigos que fiz durante todo o meu caminho, os quais me proporcionaram necessários momentos de distração. Em especial, agradeço à Jamielle e ao Fred que são dois grandes amigos que a Matemática me presenteou e que espero tê-los em todas as áreas da minha vida.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar uma classe importante em Sistemas Dinâmicos conhecida como difeomorfismos de Anosov. Neste contexto, um problema é estabelecer quais as variedades que admitem um difeomorfismo de Anosov, aqui nos limitaremos a resolver este problema para difeomorfismos de Anosov de codimensão um com ponto fixo. Paralelo a este, outro problema clássico em Sistemas Dinâmicos é determinar se os difeomorfismos de Anosov são sempre transitivos, o que é o caso para os difeomorfismos de Anosov de codimensão um. A fim de encontramos respostas para tais problemas, abordaremos a teoria de sombreamento e estudaremos os teoremas de de Franks e o de Newhouse.

Palavras-chave: Difeomorfismo de Anosov, variedade estável, variedade instável, vizinhança produto local, sombreamento, transitividade.

Abstract

The goal of this work is to study an important class of diffeomorphisms in Dynamical Systems called Anosov diffeomorphisms. In this context, one of the main problems is to establish which manifolds support an Anosov diffeomorphism. Here we will restrict ourselves to solve this problem for codimension-one Anosov diffeomorphisms with a fixed point. In parallell to this, another classical problem in Dynamical Systems is to determine whether Anosov diffeomorphisms are always transitive, which is these case for codimension-one Anosov diffeomorphisms. In order to find answers to the problems, we will present the shadowing's theory and study a theorem of Franks and a theorem of Newhouse.

Keywords: Anosov diffeomorphisms, stable manifold, unstable manifold, local product neighborhood, shadowing, transitivity.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais a partir do zero
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais sem o zero
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$M_n(\mathbb{K})$	Conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ em $\mathbb{K}$
$det(A)$	Determinante da matriz A
$\overline{A}$	Fecho do conjunto A
$int(A)$	Interior do conjunto A
$\mathbb{T}^n$	Toro n-dimensional
$\mathbb{S}^1$	Círculo unitário em $\mathbb{R}^2$
f^n	Composição da aplicação f com ela mesma n vezes, ou seja, $f \circ \cdots \circ f$
f^{-n}	Composição da aplicação f^{-1} com ela mesma n vezes
$\mathcal{O}(x)$	Órbita de x
R_θ	Rotação de ângulo θ
$\Omega(f)$	Conjunto não-errante de f
Df_x	Aplicação derivada de f em x
T_xM	Espaço tangente a M em x
$E^s(x)$	Direção estável de x
$E^u(x)$	Direção instável de x
$W^s_\varepsilon(x)$	Variedade estável local de x
$W^s_\varepsilon(x)$	Variedade estável local de x
$W^s(x)$	Variedade estável em x
$W^u(x)$	Variedade instável em x

$\mathcal{F}^s$	Folheação estável
$\mathcal{F}^u$	Folheação instável
$D^s(x, L)$	Disco centrado x de tamanho L em $W^s(x)$
$D^u(x, L)$	Disco centrado x de tamanho L em $W^u(x)$
$\mathcal{V}_\varepsilon(x)$	Vizinhança produto local de x
$\widetilde{M}$	Espaço de recobrimento universal de M
$\widetilde{W}^s(x)$	Levantamento da variedade estável de $x \in M$ para o recobrimento universal $\widetilde{M}$
$\widetilde{W}^u(x)$	Levantamento da variedade instável de $x \in M$ para o recobrimento universal $\widetilde{M}$
$W^s(\Gamma)$	Variedade estável do conjunto Γ
$W^u(\Gamma)$	Variedade instável do conjunto Γ
$\widehat{\Lambda}$	Espaço Limite inverso de Λ
$arc^u(x, y)$	Arco em uma variedade instável com extremos x e y
$l(arc^u(x, y))$	Comprimento do arco $arc^u(x, y)$
$B^u_+(x, \alpha)$	Conjunto dos pontos em $W^u(x)$ tal que $x > y$ (com relação a orientação de $W^u(x)$) e o comprimento do arco $arc^u(x, y)$ menor que α
$B^u_+(x)$	Conjunto dos pontos em $W^u(x)$ tal que $x < y$ (com relação a orientação de $W^u(x)$)
$B^u_-(x)$	Conjunto dos pontos em $W^u(x)$ tal que $x > y$ (com relação a orientação de $W^u(x)$)
$B^u_-(x, \alpha)$	Conjunto dos pontos em $W^u(x)$ tal que $x < y$ (com relação a orientação de $W^u(x)$) e o comprimento do arco $arc^u(y, x)$ menor que α

Sumário

	Introdução	12
1	PRELIMINARES	15
1.1	Preliminares topológicas	15
1.2	Folheações e medidas	17
1.3	Teoria elementar de dinâmica	19
2	DIFEOMORFISMOS DE ANOSOV	22
2.1	Dinâmica Hiperbólica e Expansividade	22
2.2	Propriedade de Sombreamento	28
2.3	Decomposição Espectral	34
2.4	Endomorfismos de Anosov	38
3	TEOREMAS DE NEWHOUSE E FRANKS	41
3.1	Teorema de Newhouse	41
3.2	Teorema de Franks	47
4	SOMBREAMENTO NO LIMITE PARA APLICAÇÕES EXPANSIVAS	54
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS	62

Introdução

O objetivo deste trabalho é demonstrar dois resultados clássicos em sistemas dinâmicos provados por John Franks e Sheldon Newhouse. Além disso estudamos resultados recentes [5] e [6] para difeomorfismos de Anosov o que, aliado ao entendimento desses resultados clássicos do Newhouse e Franks, geraram perspectivas de trabalhos futuros. Esses resultados lidam com uma classe muito rica de comportamento em sistemas dinâmicos conhecidos como difeomorfismos de Anosov.

Um difeomorfismo $f : M \to M$ é dito um difeomorfismo de Anosov se para todo $x \in M$, existe uma decomposição em soma direta do espaço tangente T_xM em dois subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ invariantes pela derivada Df_x e tal que Df_x restrito a $E^s(x)$ é uma contração uniforme e Df_x restrito a $E^u(x)$ é uma expansão uniforme. Algumas estruturas geométricas, conhecidas como folheações estável e instável, estão naturalmente associadas a estes difeomorfismos, estas estruturas auxiliam enormemente o estudo dinâmico dos difeomorfismos de Anosov. Dado $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov, para cada $x \in M$, definimos a variedade estável e variedade instável respectivamente como sendo os conjuntos:

$$W^s(x) = \{y \in M \ : \ \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\},$$
$$W^u(x) = \{y \in M \ : \ \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Esses conjuntos são de fato variedades e além disso, $T_xM(W^s(x)) = E^s(x)$ e $T_xM(W^u(x)) = E^u(x)$. O conjunto de todas as variedades estáveis forma uma folheação para M que chamamos de folheação estável, analogamente obtemos a folheação instável. As variedades estáveis e instáveis "dispõem em camadas"o comportamento assintótico das iteradas futuras e passadas por f.

Os difeomorfismos de Anosov são modelos para diversos comportamentos dinâmicos e por isso foram intensamente estudados, principalmente a partir da década de 60. Apesar disso, perguntas muito naturais ainda não foram completamente respondidas para esses sistemas. Dois clássicos problemas em abertos são:

Conjectura de Smale. Todo difeomorfismo de Anosov é transitivo.

Problema. Quais variedades que suportam difeomorfismos de Anosov?

Neste trabalho, nos limitaremos a resolver estes problemas para difeomorfismos de Anosov de codimensão 1, ou seja, difeomorfismos para os quais um dos subespaços invariantes que decompõe o espaço tangente tem dimensão 1. Para tal caso, Newhouse [16] demonstrou que a resposta da conjectura é positiva.

Teorema de Newhouse [16]. Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov de

codimensão 1 então todos os pontos de M são pontos não-errantes, ou seja, para cada $x \in M$ e cada aberto U contendo x, existe um natural não nulo $N = N(x, U)$ tal que $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$, isto é equivalente a dizer que f é transitivo.

Através da teria de sombreamento, Carvalho em [5] consegue uma equivalência entre a propriedades de transitividade para difeomorfismos de Anosov com a propriedade de sombreamento no limite bilateral. Mais especificamente, uma *pseudo-órbita no limite bilateral* em M para um difeomorfismo $f : M \to M$ é uma sequência $(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{|i|\to\infty} d(f(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

Uma pseudo-órbita no limite bilateral $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é *sombreada no limite bilateral* por um ponto $y \in M$ se

$$\lim_{|i|\to\infty} d(x_i, f^i(y)) = 0.$$

Dizemos que f tem a *propriedade de sombreamento no limite bilateral* se toda pseudo-órbita no limite bilateral $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é sombreada no limite bilateral. Se para cada pseudo-órbita no limite bilateral seu sombreamento no limite bilateral é único, dizemos que f tem a *propriedade de sombreamento único no limite bilateral*.

Carvalho em [5] trabalha com o levantamento dos difeomorfismos de Anosov para o recobrimento universal. Denotando $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ o levantamento do difeomorfismo de Anosov $f : M \to M$ para o recobrimento universal, o autor mostra que, para cada pseudo-órbita no limite bilateral para $\widetilde{f}$, existem aplicações definidas em um determinado espaço de Banach que relacionam bijetivamente seus pontos fixos a pontos que sombreiam esta dada pseudo-órbita.

Os levantamentos das variedades estável e instável para o recobrimento universal, os quais denotamos por $\widetilde{W}^s(x)$ e $\widetilde{W}^u(x)$ são de fato as variedades estável e instável para $\widetilde{f}$. Quando para quaisquer $x, y \in M$ tem-se que a interseção $\widetilde{W}^s(x) \cap \widetilde{W}^u(y)$ é um único ponto, dizemos que f é um difeomorfismo de Anosov com estrutura de produto global.

Através dos teoremas a seguir obtemos relações entre propriedades de sombreamento no limite, transitividade e estrutura de produto global. Tais teoremas estão apresentados no capítulo quatro deste trabalho.

Teorema A.[5] Um difeomorfismo de Anosov tem estrutura de produto global se, e somente se, um levantamento para o recobrimento universal tem a propriedade de sombreamento único no limite bilateral.

Teorema B.[5] Um difeomorfismo de Anosov é transitivo se, e somente se, tem propriedade de sombreamento no limite bilateral.

Depois de enunciados os teoremas acima é natural nos perguntarmos:

"Todo difeomorfismo de Anosov tem estrutura de produto global é transitivo?"

A resposta para tal pergunta é afirmativa e neste trabalho fizemos uma prova para a mesma que também se encontra no quarto capítulo.

Os modelo mais simples de difeomorfismos de Anosov são os modelos lineares. Neste trabalho demonstraremos que os difeomorfismos de Anosov de codimensão 1 possui dinâmica bem parecida com o caso linear. Isto é, demonstraremos o outro principal teorema desta dissertação:

Teorema de Franks [10]. Se um difeomorfismo de Anosov $f : M \to M$ é de codimensão 1 com um ponto fixo e tal que o conjunto dos pontos não-errantes é toda a variedade M então f é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico no Toro.

Mais recentemente, Hiraide em [11] apresentou uma prova mais simples para o Teorema de Franks sobre a qual este trabalho foi baseado.

Esta dissertação contém cinco capítulos que estão dispostos da seguinte maneira: O capítulo um contém conteúdos preliminares de topologia, folheações e dinâmica que dão suporte para que a leitura seja feita com mais facilidade. O capítulo seguinte contém propriedades associadas à hiperbolicidade e expansividade de aplicações, além disso, enunciamos e demonstramos um importante teorema dentro da dinâmica hiperbólica, o Teorema da Decomposição Espectral. No terceiro capítulo demonstramos os dois principais teoremas estudados. Por fim, no último capítulo quatro apresentamos algumas propriedade de sombreamento no limite e no limite bilateral.

1 Preliminares

Com o intuito de deixar este trabalho autocontido, estudaremos neste capítulo conceitos básicos de variedades e dinâmica, os quais nos darão suporte para o entendimento dos capítulos posteriores. Para mais detalhes, as referências utilizadas foram [8], [13] e [7].

1.1 Preliminares topológicas

Esta seção contém definições, exemplos e resultados relacionados a topologia de variedades e espaços de recobrimentos.

Definição 1.1.1. *Uma* ***métrica Riemanniana*** *de classe C^k em uma variedade diferenciável M é uma aplicação que associa cada $x \in M$ a um produto interno*

$$\langle \cdot\,, \cdot \rangle_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ é um sistema de coordenada locais em torno de p, com $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = q \in \varphi(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = D\varphi_{e_i}$, onde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ com 1 na i-ésima coordenada, então $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q), \dfrac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é uma função diferenciável em U.

Uma métrica Riemanniana induz uma distância $d : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x, y) = inf\{l(\alpha) \mid \alpha : [0, 1] \to M,\ C^1 \text{ por partes},\ \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y\},$$

onde $l(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \left\| \frac{d}{dt}\alpha(t) \right\|_{\alpha(t)} dt$ é o comprimento de α e $\left(\left\| \dfrac{d}{dt}\alpha(t) \right\|_{\alpha(t)} \right)^2 = \left\langle \dfrac{d}{dt}\alpha(t), \dfrac{d}{dt}\alpha(t) \right\rangle_{\alpha(t)}$.

Definição 1.1.2. *Uma variedade diferenciável que admite uma métrica Riemanniana é chamada de* ***variedade Riemanniana****.*

Teorema 1.1.1. *Se M é uma variedade topológica diferenciável então M admite uma métrica Riemanniana.*

Uma demonstração para o Teorema 1.1.1 pode ser encontrada em [8].

O próximo teorema nos diz que toda variedade Riemanniana compacta é um espaço de Baire uma vez que toda variedade Riemanniana compacta é um espaço métrico completo.

Teorema 1.1.2. *Se M é uma variedade Riemanniana compacta então qualquer interseção enumerável de conjuntos abertos e densos é um conjunto denso, isto é, se $\{G_i\} \subset M$ é uma família de conjuntos abertos e densos então $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ é denso em M.*

Demonstração. Ver [7, Proposição 2.15].

No que segue, estaremos interessados em definir e entender uma parte importante da topologia algébrica, que são os espaços de recobrimento, e um invariante topológico das variedades, os grupos fundamentais.

Considere $\mathcal{C}$ o conjunto dos caminhos $\alpha : [0,1] \to M$ tais que $\alpha(0) = \alpha(1)$. Defina neste conjunto a seguinte relação de equivalência $\mathcal{R}$: para $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$

$$\alpha \,\mathcal{R}\, \beta \text{ se, e somente se, existe uma função contínua } H : [0,1] \times [0,1] \to M \text{ tal que } H(t,0) = \alpha(t) \text{ e } H(t,1) = \beta(t).$$

Neste caso dizemos que α e β são homotópicas ou α é homotópica a β. O **grupo fundamental** de M o qual denotaremos por $\pi_1(M)$ é o conjunto das classes de equivalência referente a relação de equivalência $\mathcal{R}$. É fácil ver que $\pi_1(M)$ é um grupo.

Definição 1.1.3. *Seja $f : M \to N$ uma aplicação contínua. Então a **aplicação induzida***

$$\begin{array}{rccc} f_* & : & \pi_1(M) & \to & \pi_1(N) \\ & & [\alpha] & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

está bem definida e é um homomorfismo de grupos.

Proposição 1.1.1. *O grupo fundamental de uma variedade suave e compacta é finitamente gerado.*

Demonstração. Ver [1, Teorema 6.4.5].

Definição 1.1.4. *Uma aplicação $\pi : \widetilde{M} \to M$ contínua e sobrejetiva é uma **aplicação de recobrimento** se para cada $x \in M$, existe um aberto $U_x \subset M$ tal que $\pi^{-1}(U_x)$ pode ser escrito como uma união disjunta de abertos $V_x^\alpha \subset \widetilde{M}$, $\alpha \in I$, onde a restrição de π a cada V_x^α é um homeomorfismo sobre U_x, isto é, $\pi|_{V_x^\alpha} : V_x^\alpha \to U_x$ é um homeomorfismo.*

*Um **recobrimento universal** de um espaço topológico conexo M é um espaço simplesmente conexo $\widetilde{M}$ que recobre M, ou seja, existe um mapa $\pi : \widetilde{M} \to M$ que é uma aplicação de recobrimento.*

Exemplo 1.1.1. *A aplicação $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{T}^m$ dada por $x \mapsto x + \mathbb{Z}^m$, a qual é conhecido como projeção natural, é uma aplicação de recobrimento. Além disso, $\mathbb{R}^m$ é um espaço de recobrimento universal para $\mathbb{Z}^m$.*

Observação 1.1.1. *[1, Teorema 6.4.1] Como π é um difeomorfismo local, a métrica d de M induz uma métrica $\tilde{d}$ em $\widetilde{M}$ de forma que $\pi : (\widetilde{M}, \tilde{d}) \to (M, d)$ seja uma isometria local, isto é, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $x \in \widetilde{M}$, π aplica a ε_0-vizinhança de x isometricamente sobre a ε_0-vizinhança de $\pi(x)$.*

Definição 1.1.5. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação entre espaços topológicos. O **levantamento** de f para o recobrimento universal é uma aplicação $\tilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ tal que $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$, onde $\pi : \widetilde{M} \to M$ é uma aplicação de recobrimento e $\widetilde{M}$ um recobrimento universal de M. Em outras palavras, $\tilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ é a aplicação que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \widetilde{M} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ M & \xrightarrow[f]{} & M \end{array}$$

Lema 1.1.1. *Seja $\alpha \in \pi_1(M)$, tal que $\pi \circ \alpha = \pi$. Então*

$$\tilde{f} \circ \alpha = \tilde{f}_*(\alpha) \circ \tilde{f}.$$

Demonstração. Ver [1, p. 187].

1.2 Folheações e medidas

Mais adiante vamos ver que uma variedade que suporta um difeomorfismo de Anosov possui duas folheações que são transversais uma à outra, ou seja, as folhas de uma folheação intersecta transversalmente as folhas da outra, sobre tais folheações sabemos como se comporta a dinâmica do difeomorfismo. Para que possamos prosseguir, vamos introduzir a noção de folheação de uma variedade. E além disso, quando temos que uma das duas folheações citadas acima tem dimensão 1 podemos definir uma certa medida sobre tal que é invariante pela outra folheação, veremos como fazer isso também nesta seção e isso nos ajudará a demonstrar o teorema de Franks.

Seja M um espaço topológico conexo. Seja D^n o n-disco fechado. Uma **folheação** n-dimensional para M é uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_x\}_{x \in M}$ de variedades conexas contidas em M tal que

1. $x \in \mathcal{F}_x$;
2. $\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$;
3. para cada $x \in M$ existe um conjunto compacto K contendo x e uma aplicação contínua e injetiva $\varphi : K \times D^n \to M$ com $\varphi(\{y\} \times D^n) \subset \mathcal{F}_y$, $\varphi(y, 0) = y$ e $\varphi(K \times D^n)$ uma vizinhança N de x em M como indica a figura 1.

Um conjunto compacto $K \subset X$ que satisfaz o item *3* acima para algum x é chamado de transversal a $\mathcal{F}$.

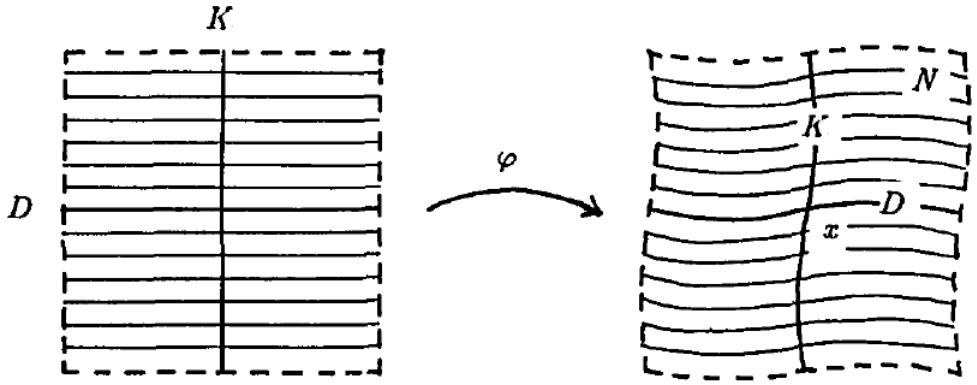

Figura 1 – retirada de [1].

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ folheações em M. Dizemos que $\mathcal{F}$ é **transversal** a $\mathcal{F}'$ se para cada $x \in M$ existem conjuntos conexos não-triviais D, D' com $\{x\} = D \cap D'$ uma vizinhança conexa N de x em M e um homeomorfismo $\varphi : D \times D' \to N$ tal que*

1. *$\varphi(x, x) = x$;*
2. *$\varphi(y, x) = y$, $(y \in D)$ e $\varphi(x, z) = z$, $(z \in D')$;*
3. *para qualquer $L \in \mathcal{F}$ existe um conjunto enumerável $B' \subset D'$ tal que $N \cap L = \varphi(D \times B')$ (figura 2);*
4. *para qualquer $L' \in \mathcal{F}'$ existe um conjunto enumerável $B \subset D$ tal que $N \cap L' = \varphi(B \times D')$ (figura 2).*

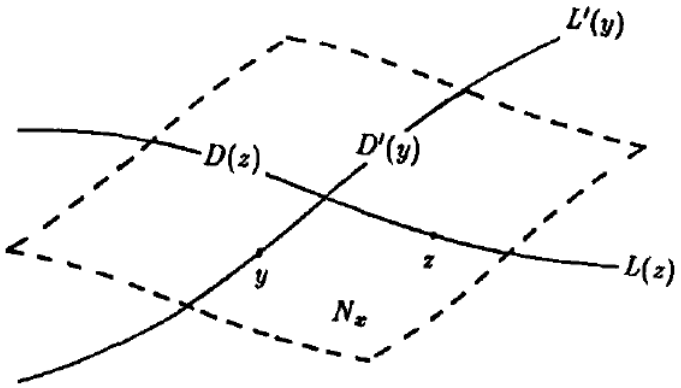

Figura 2 – retirada de [1].

Definição 1.2.2. *Uma **medida $\mathcal{F}$-invariante** é uma família $\{\mu_K\}_{K \text{ transversal}}$ tal que*

1. *μ_K é uma medida de Borel finita na transversal K;*
2. *se $A_i \subset K_i$ $(i = 1, 2)$ são conjuntos Borelianos e $T : A_1 \to A_2$ é um isomorfismo de Borel com $T(x) \in \mathcal{F}_x$, $\forall x \in A_1$ então $\mu_{K_1}(A_1) = \mu_{K_2}(A_2)$, neste caso dizemos que A_1 e A_2 são $\mathcal{F}$-conjugados;*
3. *$\mu_K(K) > 0$ para algum compacto transversal K.*

Teorema 1.2.1. *Sejam K_1 e K_2 transversais para $\mathcal{F}$ e μ_1, μ_2 medidas de Borel finitas em K_1 e K_2 respectivamente. Suponha que existe um conjunto $N_1 \subset K_1$ tal que*

1. *$\mu_1(N_1) = 0$;*
2. *$\mu_2\left(\bigcup_{x \in N_1} \mathcal{F}_x \cap K_2\right) = 0$;*
3. *$x \in K_1 - N_1$ implica $\mathcal{F}_x \cap K_2 = \{F_m(x) \mid x \in B_m\}$, onde $\mathcal{F} = \{F_m : B_m \to C_m\}_{m \geqslant 0}$ é uma coleção enumerável de isomorfismos de Borel preservando medida, $B_m \subset K_1$, $C_m \subset K_2$.*

Então todo isomorfismo de Borel entre um subconjunto de K_1 e um subconjunto de K_2 com $T(z) \in \mathcal{F}_z$ deve preservar medida.

Demonstração. Ver [3, Lema 1.5]. □

1.3 Teoria elementar de dinâmica

Consideremos $f : X \to X$ uma aplicação contínua e X um espaço topológico. Denotemos por $f^n := f \circ \ldots \circ f$ a composição de f com ele mesmo n vezes, $f^{-n} := f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$ a composição de f^{-1} com ele mesmo n vezes (este caso faz sentido quando f é invertível) e $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x)\}_{n \in I}$ a órbita de x por f, onde I é o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números inteiros caso f seja invertível.

Definição 1.3.1. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo. Para $x \in X$ definimos o conjunto ω-**limite** de x sendo o conjunto*

$$\omega(x) := \{y \in X \mid \text{existe } \mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{n \to \infty} d(f^n(y), x) = 0,\ n \in \mathbb{N}'\}.$$

*Analogamente definimos o conjunto α-**limite** de x,*

$$\alpha(x) := \{y \in X \mid \text{existe } \mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \text{ tal que } \lim_{n \to \infty} d(f^{-n}(y), x) = 0,\ n \in \mathbb{N}'\}.$$

Proposição 1.3.1. *Seja $f : X \to X$ um homeomorfismo e $x \in X$.*

1. *Se* $\overline{\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}}$ *é compacto então* $\omega(x)$ *é compacto e não vazio.*

2. *Se* $\overline{\{f^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}}$ *é compacto então* $\alpha(x)$ *é compacto e não vazio.*

Demonstração. Ver [14, Proposição 2.10, p. 36]. □

Para mais detalhes podem ser consultados os livros [14] e [17].

Definição 1.3.2. *Dizemos que um conjunto* $U \subset X$ *é* f***-invariante*** *se* $f(U) \subset U$.

Observação 1.3.1. *Se* f *é um homeomorfismo faz sentido pensarmos na dinâmica "para trás", assim, podemos dizer que um conjunto* U *é* f*-invariante se* $f(U) \subset U$ *e* $f^{-1}(U) \subset U$, *ou seja,* $f(U) = U$.

Definição 1.3.3. *Dizemos que* f *é* ***transitiva*** *se dados* U *e* V *abertos quaisquer de* X, *existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $f^N(U) \cap V \neq \varnothing$.

Proposição 1.3.2. *Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta. Uma função* $f : M \to M$ *é transitiva se, e somente se, existe* $x \in M$ *tal que a órbita de* x, $\mathcal{O}(x)$, *é densa em* M.

Demonstração. Seja $x \in M$ um ponto cuja órbita é densa em M. Então existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^m(x) \in V$ e (usando que $\{f^n(x) \mid n > m\}$ é denso em M também) existe $n > m$ tal que $f^n(x) \in U$. Tome $k = n - m$. Então $f^m(x) \in f^{-k}(U) \cap V$.

Para provar a recíproca, seja $\{U_j \mid j = 1, \ldots, k\}$ uma base finita de abertos de M. A transitividade de f garante que o aberto $\bigcup_{l=1}^{\infty} f^{-l}(U_j)$ é denso em M para todo $j \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.1.2, a interseção

$$X = \bigcap_{j=1}^{k} \bigcup_{l=1}^{\infty} f^{-l}(U_j)$$

é um subconjunto denso de M. Em particular, ele é não vazio. Por outro lado, por definição, se $x \in X$ então para todo $j \in \mathbb{N}$ existe algum $l \geqslant 1$ tal que $f^l(x) \in U_j$. Como os U_j constituem uma base de vizinhanças de M, isto significa que $\{f^l(x) \mid l \in \mathbb{N}\}$ é densa em M. □

Algumas dinâmicas possuem a propriedade de "misturar"subconjuntos abertos de um espaço topológico de forma que a cada iteração estes subconjuntos estejam mais distribuídos dentro do espaço.

Definição 1.3.4. *Dizemos que* f *é* ***topologicamente mixing*** *se dados* U *e* V *abertos quaisquer de* X, *existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ *para todo* $n \geqslant N$.

Observação 1.3.2. *Claramente uma aplicação que é topologicamente mixing é também transitiva.*

Definição 1.3.5. *Dizemos que um ponto $x \in X$ é* ***não-errante*** *para f se para toda vizinhança U de x existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^N(U) \cap U \neq \varnothing$.*

Denotamos o conjunto de todos os pontos não errantes de X para f por $\Omega(f)$ e o chamaremos de ***Conjunto não-errante*** *de f.*

Proposição 1.3.3. *O conjunto não-errante de f é fechado e f-invariante.*

Demonstração. Por simplicidade denotemos $\Omega(f) = \Omega$. Seja $x \in M \backslash \Omega$, então existe uma vizinhança U de x tal que para todo $n \geqslant 0$ tem-se $U \cap f^n(U) = \varnothing$. É claro que $U \subset M \backslash \Omega$, o que implica que $M \backslash \Omega$ é aberto. Portanto, Ω é fechado. Agora, fixe $x \in \Omega$ e tome U uma vizinhança qualquer de $f(x)$, pela continuidade de f, $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x, como $x \in \Omega$, existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^N(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \varnothing$. Seja $y \in f^N(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U)$. Vamos mostrar que $f(y) \in f^N(U) \cap U$ e assim, poderemos concluir que $f(x) \in \Omega$. Note que $f(y) \in U$. Como $y \in f^N(f^{-1}(U))$, então existe $y' \in f^{-1}(U)$ tal que $y = f^N(y')$, logo $y = f^{N-1}(y'')$ para algum $y'' \in U$, portanto $y \in f^{N-1}(U)$ e consequentemente $f(y) \in f^N(U)$.

Se f for um homeomorfismo. Fixe $x \in \Omega$ e considere uma vizinhança U de $f^{-1}(x)$. Note que $f(U)$ é uma vizinhança de x, assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(f(U)) \cap f(U) \neq \varnothing$, o que implica que $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$ e portanto $f(x) \in \Omega$. Logo, $f^{-1}(\Omega) \subset \Omega$. □

Definição 1.3.6. *Um ponto $p \in M$ é dito* ***ponto periódico*** *de período n de f, se n é o menor natural não nulo tal que $f^n(p) = p$. Se $n = 1$, dizemos que p é* ***ponto fixo*** *de f. Denotaremos o conjunto de todos os pontos periódicos de f por $Per(f)$.*

Proposição 1.3.4. *Se $p \in M$ é um ponto periódico de f então $p \in \Omega(f)$, isto é, $Per(f) \subset \Omega(f)$. Mais ainda, $\overline{Per(f)} \subset \Omega(f)$.*

Demonstração. Seja p um ponto periódico de período m, isto é, $f^m(p) = p$. Dada uma vizinhança V de p, temos $p \in V \cap f^m(V)$, portanto, $p \in \Omega(f)$ (com $N = m$). Como $\Omega(f)$ é fechado, segue o resultado. □

Definição 1.3.7. *Dizemos que uma matriz é* ***hiperbólica*** *se todos os seus autovalores tem norma diferente de um. Um ponto $x \in M$ será dito* ***hiperbólico*** *para $f : M \to M$ se a matriz da derivada Df_x for hiperbólica.*

Exemplo 1.3.1. *A matriz $A = \begin{bmatrix} n & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é hiperbólica para qualquer $n \geqslant 2$. De fato. Os autovalores de A são*

$$\lambda_1 = \frac{n + 1 + \sqrt{n^2 - 2n + 5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{n + 1 - \sqrt{n^2 - 2n + 5}}{2}$$

que são sempre reais, pois $(n-1)^2 + 4 > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e além disso, $|\lambda_i| = 1$, $i = 1, 2$ se, e somente se $n = 1$, que não é o caso.

2 Difeomorfismos de Anosov

Variedades que suportam um difeomorfismo de Anosov possuem folheações transversais que chamamos de folheações estável e instável. Estas nos fornecem informações sobre o comportamento da dinâmica do difeomorfismo nas folhas.

2.1 Dinâmica Hiperbólica e Expansividade

Seja M uma variedade Riemanniana m-dimensional compacta, conexa e C^∞ e $f : M \to M$ um difeomorfismo. Dizemos que um subconjunto $\Lambda \subset M$ é **hiperbólico** para f se para todo $x \in \Lambda$, existe uma decomposição do espaço tangente $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$ satisfazendo:

1. Os espaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ são invariantes pela aplicação derivada $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}M$, isto é,

$$Df_x(E^s(x)) = E^s(f(x)) \text{ e } Df_x(E^u(x)) = E^u(f(x));$$

2. Existem constantes $0 < \lambda < 1$ e $c > 0$ tais que

$$|Df_x^k(v)|_{f^k(x)} \leqslant c\lambda^k|v|_x \text{ e } |Df_x^{-k}(w)|_{f^{-k}(x)} \leqslant c\lambda^k|w|_x$$

para todo $v \in E^s(x), w \in E^u(x), k \in \mathbb{N}$ e $x \in M$, onde $|\cdot|_x$ denota a norna em T_xM induzida pela métrica Riemanniana.

Chamamos $E^s(x)$ a **direção estável** de f em x e $E^u(x)$ é a **direção instável** de f em x.

Proposição 2.1.1. *Os espaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ variam continuamente com $x \in \Lambda$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in \Lambda$ e x_i uma sequência em Λ que converge a x_0. Vamos mostrar que $dim\ E^s(x_i) = dim\ E^s(x_0)$ e $dim\ E^u(x_i) = dim\ E^u(x_0)$ para i suficientemente grande. Considere uma subsequência de x_i de modo que $dim\ E^s(x_i)$ seja constante, digamos igual a k. Considere uma base ortonormal $w_{1,i}, \ldots, w_{k,i}$ de $E^s(x_i)$, passando para uma subsequência se necessário, podemos supor que $w_{l,i}$ converge a $w_{l,0}$. Note que $w_{1,0}, \ldots, w_{k,0}$ estão em $T_{x_0}M$. Por continuidade note que o item *2* acima implica $w_{l,0},\ l = 1, \ldots, k$, estarem em $E^s(x_0)$. Portanto

$$dim\ E^s(x_0) \geqslant k = dim\ E^s(x_i).$$

Analogamente temos que

$$dim\ E^u(x_0) \geqslant m - k = dim\ E^u(x_i).$$

Como $dim\ T_{x_0}M = dim\ E^s(x_0) + dim\ E^u(x_0)$ temos,

$$dim\ E^s(x_0) = dim\ E^s(x_i),\ dim\ E^u(x_0) = dim\ E^u(x_i).$$

Segue a continuidade das direções estáveis com relação a $x \in \Lambda$. □

Definição 2.1.1. *Se a variedade toda M é um conjunto hiperbólico para f, dizemos que f é um* ***difeomorfismo de Anosov****.*

Exemplo 2.1.1. *Considere a seguinte relação de equivalência em $\mathbb{R}^m$: $x, y \in \mathbb{R}^m$,*

$$x \sim y \text{ se, e somente se, } x - y \in \mathbb{Z}^m.$$

Defina $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m/\sim = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ o toro m-dimensional. Também podemos pensar no toro como sendo o produto de m cópias do círculo unitário $\mathbb{S}^1$, isto é, $\mathbb{T}^m = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$. Denotemos por $[\cdot]$ a classe de equivalência de $\cdot$ definida pela relação de equivalência $\sim$, dada em 1.1.1.

Seja $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Note que $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ e então podemos definir uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} T_A & : & \mathbb{T}^n & \to & \mathbb{T}^n \\ & & [x] & \mapsto & [Ax] \end{array}$$

que chamamos de ***aplicação induzida por*** *A no toro. Não é difícil ver que, são equivalentes:*

1. *T_A é invertível;*
2. *A é invertível em $M_n(\mathbb{Z})$;*
3. *$det(A) = \pm 1$.*

Se A é invertível em $M_n(\mathbb{Z})$ e hiperbólica então T_A é um difeomorfismo de Anosov.

Vamos fazer um caso número para o exemplo acima.

Exemplo 2.1.2. *Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. A aplicação $T_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ induzida por A é um difeomorfismo de Anosov.*

De fato: Primeiramente, observe que $det(A) = 1$. Os autovalores de A são $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Logo, todo ponto de $\mathbb{T}^2$ é um ponto hiperbólico de T_A, já

que T_A é uma aplicação linear e então sua derivada é ela mesma. Denotemos por E^u o autoespaço correspondente ao autovalor λ_1 cuja norma é maior que 1 e por E^s o autoespaço correspondente ao autovalor λ_2 cuja norma é menor que 1.

Se λ é autovalor de A e v é um de seus autovalores associados, então λ^n é autovalor de A^n e v é um autovalor associado, assim temos

- *para $w \in E^u$,*

$$\|DT_A^{-n}(w)\| = |\lambda_1|^{-n}\|w\| = |\lambda_2|^n\|w\| < 2|\lambda_2|^n\|w\|,$$

pois, $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{(3-\sqrt{5})}{2}\dfrac{(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} = \dfrac{4}{2(3+\sqrt{5})} = \dfrac{2}{(3+\sqrt{5})} = \lambda_1^{-1}$ *e assim,* $|\lambda_2| = |\lambda_1^{-1}|$

- *para $v \in E^s$,*

$$\|DT_A^{n}(v)\| = |\lambda_2^n|\|v\| < 2|\lambda_2|^n\|v\|.$$

Tomando, $\lambda = |\lambda_2|$ e $c = 2$ na definição de conjunto hiperbólico, temos que $\mathbb{T}^2$ é um conjunto hiperbólico para T_A.

Definição 2.1.2. *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov. Dizemos que f é um* ***difeomorfismo de Anosov de codimensão 1*** *se dim $E^s(x) = 1$ ou dim $E^u(x) = 1$ para todo $x \in M$.*

Exemplo 2.1.3. *O difeomorfismo T_A induzido pela matriz A como no exemplo anterior é um difeomorfismo de Anosov de codimensão 1.*

Definição 2.1.3. *Um homeomorfismo $f : M \to M$ é dito* ***expansivo*** *se existe um número $c > 0$ tal que se $x, y \in M$ satisfaz $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ então $x = y$.*

A partir de agora, consideraremos $f : M \to M$ um difeomorfismo em uma variedade Riemanniana M suave compacta conexa e $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico para f.

Definição 2.1.4. *Dado $\varepsilon > 0$. Definimos as* ***variedades estável*** *e* ***instável local*** *de $x \in \Lambda$ por:*

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$
$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leqslant \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Lema 2.1.1. *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo expansivo com constante de expansividade $c > 0$. Para todo $\varepsilon < c$ e para todo $r > 0$ existe $N > 0$ tal que*

$$f^n(W_\varepsilon^s(x)) \subset W_r^s(f^n(x)),\ f^{-n}(W_\varepsilon^u(x)) \subset W_r^u(f^{-n}(x))$$

para todo $x \in \Lambda$, $n \geqslant N$.

Demonstração. Suponhamos que o lema não seja válido, então podemos encontrar sequências $x_n, y_n \in M$, $m_n > 0$ tal que $y_n \in W^s_\varepsilon(x_n), \lim m_n = \infty$ e $d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}(y_n)) > r$. Como $y_n \in W^s_\varepsilon(x_n)$ temos que $d(f^n(f^{m_n}(x_n)), f^n(f^{m_n}(y_n))) < \varepsilon$ para todo $-m_n \leqslant n$. Portanto, se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ então $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \varepsilon < c$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ com $d(x, y) \geqslant r > 0$ o que contradiz a expansividade de f. □

Definição 2.1.5. *Dado $\varepsilon > 0$. Definimos as **variedades estável** e **instável** de $x \in \Lambda$ por:*

$$W^s(x) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x)))$$
$$W^u(x) = \bigcup_{n\geqslant 0} f^n(W^u_\varepsilon(f^{-n}(x))).$$

Denotemos por $D^u(x, \varepsilon)$ o disco em $W^u(x)$ centrado em x de tamanho ε e $D^s(x, \varepsilon)$ o disco fechado em $W^s(x)$ centrado em x de tamanho ε.

Proposição 2.1.2. *Para $x \in \Lambda$*

$$W^s(x) = \left\{ y \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\}$$
$$W^u(x) = \left\{ y \in M \mid \lim_{n\to-\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \right\}.$$

Demonstração. Fixe $x \in \Lambda$. Seja $y \in \left\{ z \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(z)) = 0 \right\}$. Existe $N > 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \geqslant N$, isto implica que $f^N(y) \in W^s_\varepsilon(f^N(x))$. Portanto, $y \in f^{-N}(W^s_\varepsilon(f^N(x))) \subset W^s(x)$. Agora, seja $y \in W^s(x)$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y \in f^{-N}(W^s_\varepsilon(f^N(x)))$, logo $f^N(y) \in W^s_\varepsilon(f^N(x))$. Dado $r > 0$, pelo Lema 2.1.1 existe $N' > 0$ tal que $f^n(W^s_\varepsilon(f^N(x)) \subset W^s_r(f^{n+N}(x))$ para todo $n \geqslant N'$. Assim, $f^{n+N}(y) \in W^s_r(f^{n+N}(x))$ para todo $n \geqslant N'$ e portanto $d(f^n(x), f^n(y)) < r$ para todo $n \geqslant N' + N$. Como r é arbitrário, temos que $y \in \left\{ z \in M \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(z)) = 0 \right\}$. A segunda igualdade pode ser mostrada de maneira análoga. □

Observação 2.1.1. *[3]*

*Se f é um difeomorfismo de Anosov, as famílias $\mathcal{F}^s := \{W^s(x)\}_{x\in M}$ e $\mathcal{F}^u := \{W^u(x)\}_{x\in M}$ formam folheações para M, as quais chamamos de **folheação estável** e **folheação instável** respectivamente. E além disso, tais folheações são transversais.*

Lema 2.1.2. *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo expansivo com constante de expansividade $c > 0$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall y \in \Lambda$ vale:*

$$W^s_\varepsilon(y) \subset W^s(y) \text{ e } W^u_\varepsilon(y) \subset W^u(y).$$

Demonstração. Fixe $y \in M$. Dado $r > 0$ pelo Lema 2.1.1, para $c > \varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $f^n(W^s_\varepsilon(x)) \subset W^s_r(f^n(x))$ para todo x e todo $n \geqslant N$, isto significa que para qualquer $x \in W^s_\varepsilon(y)$, temos $f^n(x) \in W^s_r(f^n(y))$, isto é, $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant r,\ \forall n \geqslant N$. Como r é arbitrário, então $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$, como queríamos. Podemos demonstrar de maneira análoga que $W^u_\varepsilon(y) \subset W^u(y)$. □

Teorema 2.1.1. *Para $\varepsilon > 0$ pequeno e $x \in \Lambda$*

1. *$W^s_\varepsilon(x), W^u_\varepsilon(x)$ são discos para $x \in \Lambda$ com $T_x W^s_\varepsilon(x) = E^s(x),\ T_x W^u_\varepsilon(x) = E^u(x)$;*
2. *$d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \lambda^n d(x, y)$ para $y \in W^s_\varepsilon(x),\ n \geqslant 0$ e*
   $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leqslant \lambda^n d(x, y)$ para $y \in W^u_\varepsilon(x),\ n \geqslant 0$;
3. *$W^s_\varepsilon(x), W^u_\varepsilon(x)$ variam continuamente com x (na topologia $\mathcal{C}^r$).*

Demonstração. Ver [12, Teorema 1].

Lembremos que:

- Sejam S e S' subvariedades de classe C^s de M e $\varepsilon > 0$. Dizemos que S e S' estão $\varepsilon - C^s$-próximas se existe um difeomorfismo C^s, $h : S \to S'$ tal que $i' \circ h$ está ε-próximo de i na topologia C^s, onde $i : S \to M$ e $i' : S' \to M$ denotam as inclusões.
- Uma aplicação de classe C^r $f : M \to N$ é uma imersão se Df_p é injetiva para todo $p \in M$. Se $f : M \to N$ é uma imersão dizemos que $f(M)$ é uma subvariedade imersa de N.

Teorema 2.1.2 (Teorema da Variedade Estável)**.** *Sejam $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov e $E^s(x)$ o espaço estável de x. Então*

1. *$W^s(p)$ é uma subvariedade imersa de M;*
2. *para $x, y \in \Lambda$, $W^s(x)$ e $W^s(y)$ coincidem ou são disjuntos;*
3. *o espaço tangente de $W^s(x)$ em y é $E^s(y)$ para cada $y \in \Lambda$;*
4. *$W^s(x)$ e $W^s(y)$ estão C^1-próximos em conjuntos compactos para $x, y \in \Lambda$ próximos.*

Demonstração. Ver [20, Teorema 2.1] ou [17, Teorema 6.2].

Corolário 2.1.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Existe um $\varepsilon > 0$ tal que para cada $x \in M$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ de x satisfazendo:*

1. *$\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ é homeomorfo a $W^u_\varepsilon(x) \times W^s_\varepsilon(x)$;*

2. *para* $y_1, y_2 \in \mathcal{V}_\varepsilon(x)$, $W^u_\varepsilon(y_1) \cap W^s_\varepsilon(y_2)$ *é um único ponto;*

3. *para* $y_1, y_2 \in \mathcal{V}_\varepsilon(x)$,
   se $(W^u_\varepsilon(y_1) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x)) \cap (W^u_\varepsilon(y_2) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x)) \neq \varnothing$ *então* $W^u_\varepsilon(y_1) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x) = W^u_\varepsilon(y_2) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x)$,
   se $(W^s_\varepsilon(y_1) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x)) \cap (W^s_\varepsilon(y_2) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x)) \neq \varnothing$ *então* $W^s_\varepsilon(y_1) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x) = W^s_\varepsilon(y_2) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x)$;

Definição 2.1.6. *Chamamos o interior de* $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ *de* ***vizinhança produto local de*** x. *Para facilitar a escrita, abusaremos um pouco da notação, denotando a vizinhança produto local de* x *por* $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ *ao invés de* $int(\mathcal{V}_\varepsilon(x))$.

Definição 2.1.7. *Denotemos por* $W^u(y, N)$ *a componente conexa de* $W^u(y) \cap N$ *que contém* y. *Um* ***conjunto estável relativo a*** $W^s_\varepsilon(x)$ *é um conjunto denotado por* $N(W^s_\varepsilon(x))$ *ou simplesmente por* N, *satisfazendo as seguintes condições:*

1. $N = \bigcup\{W^u(y, N) \mid y \in W^s_\varepsilon(x)\}$;

2. *para* $y_1, y_2 \in N$, *ou* $W^u(y_1, N) \cap W^u(y_2, N) = \varnothing$, *ou* $W^u(y_1, N) = W^u(y_2, N)$. *Similarmente, para* $y_1, y_2 \in N$, *ou* $W^s(y_1, N) \cap W^s(y_2, N) = \varnothing$, *ou* $W^s(y_1, N) = W^s(y_2, N)$;

3. *para* $y_1 \in N$, $W^s(y_1, N)$ $(W^u(y_1, N))$ *é homeomorfo a bola fechada em* $W^s(y_1)$ $(W^u(y_1))$;

4. *existe* $\varepsilon_1 > 0$ *tal que* $W^u_{\varepsilon_1}(y_1) \subset W^u(y_1, N)$ *para todo* $y_1 \in W^s_\varepsilon(x)$;

5. *se* $y_1, y_2 \in N$ *então* $W^u(y_1, N) \cap W^s(y_2, N)$ *é um simples ponto.*

Para $K \subset W^s_\varepsilon(x)$ *um* ***conjunto produto estável*** N ***relativo a*** K *é definido como sendo* $\bigcup_{y \in K} W^u(y, N(W^s_\varepsilon(x))$ *onde* $N(W^s_\varepsilon(x))$ *é algum conjunto produto estável relativo a* $W^s_\varepsilon(x)$. *Similarmente, para* $x \in M$, $\varepsilon > 0$, *podemos definir um conjunto produto instável relativo a* $W^u_\varepsilon(x)$ *ou* K *onde* $K \subset W^u_\varepsilon(x)$.

Teorema 2.1.3. *Seja* $f : M \to M$ *um difeomorfismo de Anosov. Para todo* $x \in M$ *e todo* $\varepsilon > 0$, *existem conjuntos produtos relativos a* $W^u_\varepsilon(x)$ *e* $W^s_\varepsilon(x)$.

Demonstração. Usando o Corolário 2.1.1 e a compacidade de M obtemos o resultado. □

Observação 2.1.2.

1. *Note que, se* $c > 0$ *é a constante de expansividade de* f *e* $\varepsilon < c$ *então* $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(x) = \{x\}$. *De fato. Se* $y \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(x)$, *então* $d(f^n(y), f^n(x)) \leqslant \varepsilon < c$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, *o que implica que* $y = x$. *A interseção* $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(x) = \{x\}$ *é transversal e tais interseções são preservadas por pequenas perturbações.*

2. *Seja* f *um difeomorfismo de Anosov. O item 1 desta observação nos garante que para qualquer* ε *pequeno, existe* $\delta > 0$ *pequeno tal que se* $d(x, y) < \delta$ *então* $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$ *consiste em um simples ponto. Além disso, se* $x, y \in \Omega(f)$ *então* $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \in \Omega(f)$ *(Ver [20]).*

Difeomorfismos de Anosov são aplicações expansivas, isto pode ser facilmente visto através do lema:

Lema 2.1.3. *Seja Λ um conjunto hiperbólico. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in \Lambda$ e $y \in M$ com $y \neq x$, então*

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$ e $y \in M$ quaisquer. Suponha que para todo $k \in \mathbb{Z}$ vale $d(f^k(x), f^k(y)) \leqslant \varepsilon$ temos que $y \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(x) = \{x\}$, o que implica que $y = x$. □

Lema 2.1.4 (λ-Lema)**.** *Seja $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico para f. Se D é um disco transversal a variedade estável, $W^s(p)$, em um ponto $q \in W^s(p)$, então dado R e ε reais positivos existe N_0 tal que $\forall\ n \geqslant N_0$ a componente conexa de $f^n(D) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(D^u(p, R))$ que contém $f^n(p)$ está $\varepsilon - C^1$ próximo de $D^u(p, R)$. Onde $D^u(p, R)$ é a variedade instável de p de raio R e $\mathcal{V}_\varepsilon(D^u(p, R))$ é uma vizinhança de distância ε de $D^u(p, R)$.*

Demonstração. Ver [4, p.123, Teorema 5.7.2]. □

O levantamento de um difeomorfismo de Anosov para o seu recobrimento universal levanta consigo algumas de suas propriedades de hiperbolicidade, porém não está definido em uma variedade compacta, o que acaba fazendo com que perca outras características. Muitas vezes estudar o que acontece nas folheações estável e instável do levantamento, nos ajudam a resolver problemas dos difeomorfismos de Anosov levantados. No que segue, apresentaremos algumas definições com respeito a levantamentos de difeomorfismos de Anosov.

Sejam $\widetilde{M}$ um recobrimento universal da variedade Riemanniana compacta e suave M e $\pi : \widetilde{M} \to M$ uma aplicação de recobrimento. Denotaremos $\widetilde{W}^s(x)$ e $\widetilde{W}^u(x)$ o levantamento das folhas estável e instável de x respectivamente. Na verdade, $\widetilde{W}^s(x)$ e $\widetilde{W}^u(x)$ são respectivamente os conjuntos estável e instável dos pontos que são projetados sobre x por π com respeito ao difeomorfismo de Anosov levantado.

Observação 2.1.3. *Denotaremos por $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ o levantamento de $f : M \to M$ para o recobrimento universal.*

Definição 2.1.8. *Dizemos que um difeomorfismo de Anosov f tem **estrutura de produto global** se, para todo $x, y \in M$ as folhas $\widetilde{W}^s(x)$ e $\widetilde{W}^u(y)$ (com respeito a $\widetilde{f}$) intersectam-se em um único ponto no recobrimento universal.*

2.2 Propriedade de Sombreamento

A teoria de sombreamento é de grande importância dentro da dinâmica hiperbólica, uma vez que ela nos ajuda a resolver questões de maneira menos abstrata e bastante

intuitiva. O Lema do Sombreamento, o qual demonstraremos nesta seção, nos garante que os difeomorfismos de Anosov tem a propriedade de sombreamento, mais precisamente:

Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo. Seja $\delta > 0$. Uma **δ-pseudo órbita** em M é uma sequência $(x_i)_{i=t_1}^{t_2}$, onde $-\infty \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \infty$, tal que

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta \text{ para } t_1 \leqslant i \leqslant t_2.$$

Uma δ-pseudo órbita $(x_i)_{i=t_1}^{t_2}$ é **ε-sombreada** por um ponto y se

$$d(f^i(y), x_i) < \varepsilon \text{ para todo } i = t_1, \ldots, t_2.$$

Um homeomorfismo $f : M \to M$ tem a **propriedade de sombreamento** se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita em $\Omega(f)$ é ε-sombreada por um ponto de $\Omega(f)$.

Lema 2.2.1 (Lema do Sombreamento [2])**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo tal que $\Omega(f)$ é um conjunto hiperbólico e $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$. Para todo $\beta > 0$ existe um $\alpha > 0$ tal que toda α-pseudo órbita $(x_i)_{i=a}^{b}$ em $\Omega(f)$ é β-sombreada por um ponto $x \in \Omega(f)$. Além disso, se $a = -\infty$ e $b = \infty$, então o β-sombreamento de $(x_i)_{i=a}^{b}$ é único.*

Demonstração. Dado $0 < \beta < c/2$, onde c é a constante dada pelo Lema 2.1.3. Seja $\varepsilon > 0$ como na definição de vizinhança produto local 2.1.1 e escolha $\delta \in (0, \varepsilon)$ como em 2.1.2. Tome N tão grande de forma que $\lambda^N \varepsilon < \delta/2$, onde λ é constante da definição de conjunto hiperbólico e então tome $\alpha > 0$ tal que:

$$\text{Se } \{y_i\}_{i=0}^{N} \text{ é uma } \alpha\text{-pseudo órbita em } \Omega(f), \text{ então } d(f^j(y_0), y_j) < \delta/2, \ \forall\ j \in [0, N].$$

Considere uma α-pseudo órbita $(x_i)_{i=0}^{rN}$ com $r > 0$. Defina x'_{kN} recursivamente para $k \in [0, r]$ por $x'_0 = x_0$ e $x'_{(k+1)N} = W^u_\varepsilon(f^N(x'_{kN})) \cap W^s_\varepsilon(x_{(k+1)N}) \in \Omega(f)$. Note que

$$d(f^N(x'_{kN}), f^N(x_{kN})) \leqslant \lambda^N d(x'_{kN}, x_{kN}) \leqslant \lambda^N \varepsilon < \delta/2$$

e

$$d(f^N(x_{kN}), x_{(k+1)N}) < \delta/2$$

pela escolha de α, temos

$$d(f^N(x'_{kN}), x_{(k+1)N}) \leqslant d(f^N(x'_{kN}), f^N(x_{kN})) + d(f^N(x_{kN}), x_{(k+1)N}) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$$

para todo k. Logo, $W^u_\varepsilon(f^N(x'_{kN})) \cap W^s_\varepsilon(x_{(k+1)N}) \neq \varnothing$. Além disso, pela escolha de ε, $W^u_\varepsilon(f^N(x'_{kN})) \cap W^s_\varepsilon(x_{(k+1)N})$ é um único ponto e pertence à $\Omega(f)$.

Agora, seja $x = f^{-rN}(x'_{rN})$. Para $i \in [0, rN]$ tome s com $i \in [sN, (s+1)N]$ então

$$\begin{aligned} d(f^i(x), f^{i-sN}(x'_{sN})) &\leqslant \sum_{t=s+1}^{r} d(f^{i-tN}(x'_{tN}), f^{i-tN+N}(x_{(t-1)N})) \\ &\leqslant \sum_{t=s+1}^{r} \varepsilon\lambda^{tN-i} \end{aligned}$$

esta última desigualdade segue de

$$\begin{aligned} d(f^{i-tN}(x'_{tN}), f^{i-tN+N}(x_{(t-1)N})) &= d(f^{i-tN}(x'_{tN}), f^{i-tN}(f^N(x_{(t-1)N}))) \\ &\leqslant \lambda^{tN-i} d(x'_{tN}, f^N(x'_{(t-1)N})) \\ &\leqslant \lambda^{tN-i}\varepsilon \end{aligned}$$

já que $x'_{tN} \in W^u_\varepsilon(f^N(x'_{(t-1)N}))$. Pela escolha de α temos que $d(f^{i-sN}(x_{sN}), x_i) < \delta/2$. Usando várias vezes a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} d(f^i(x), x_i) &\leqslant d(f^i(x), f^{i-sN}(x'_{sN})) + d(f^{i-sN}(x'_{sN}), x_i) \\ &\leqslant d(f^i(x), f^{i-sN}(x'_{sN})) + d(f^{i-sN}(x'_{sN}), f^{i-sN}(x_{sN})) + d(f^{i-sN}(x_{sN}), x_i) \\ &\leqslant \sum_{t=s+1}^{r} \varepsilon\lambda^{tN-i} + \varepsilon + \delta/2 \\ &\leqslant (\varepsilon\lambda)/(1-\lambda) + \varepsilon + \delta/2 \\ &< (\varepsilon(3-\lambda))/(2-2\lambda) \\ &< \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Assim, toda α-pseudo órbita $(x_i)_{i=0}^n$ em $\Omega(f)$ estende para $(x_i)_{i=0}^{rN}$ quando $rN \geqslant n$ fazendo $x_i = f^{i-n}(x_n)$ para $i \in (n, rN]$. Um $x \in \Omega(f)$ sombreando esta extensão sombreia a pseudo órbita original. Se $(x_i)_{i=a}^b$ é uma α-pseudo órbita finita então também é $(x_{j+a})_{j=0}^{b-a}$ e x sombreando esta, produz $f^{-a}(x)$ sombreando a original. Portanto o lema vale para pseudo órbitas finitas. Se $(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ é uma pseudo órbita em $\Omega(f)$, então encontra $x^{(m)} \in \Omega(f)$ β-sombreando $(x_i)_{i=-m}^m$ e seja x um ponto limite da sequência $x^{(m)}$. Então $x \in \Omega(f)$, β-sombreia $(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$.

Agora, suponhamos que y, z são β-sombreamentos de $(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$, assim

$$d(f^i(y), f^i(z)) \leqslant d(f^i(y), x_i) + d(x_i, f^i(z)) < \beta + \beta = 2\beta, \ \forall i \in \mathbb{Z},$$

pela expansividade de f, $y = z$. □

Corolário 2.2.1. *Dado qualquer $\beta > 0$ pequeno existe $\alpha > 0$ tal que se $x \in \Omega(f)$ e $d(f^n(x), x) < \alpha$ então existe um $x' \in \Omega(f)$ com $f^n(x') = x'$ e $d(f^k(x), f^k(x')) \leqslant \beta$, $\forall\ k \in [0, n]$.*

Demonstração. Como estamos interessados em β bem pequeno, podemos tomar $0 < \beta < c/2$. Seja $x_i = f^k(x)$, $i \equiv k\ (mod\ n)$, $k \in (0, n]$. Então $(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ é uma α-pseudo órbita. Seja $x' \in \Omega(f)$ seu β-sombreamento. Então $d(f^i(x'), f^i(f^n(x'))) \leqslant d(f^i(x'), x_i) + d(x_i, f^{i+n}(x')) \leqslant 2\beta < c$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ e pelo Lema 2.1.3 concluímos que $f^n(x') = x'$. □

Lema 2.2.2. *Se f é um difeomorfismo de Anosov, então $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.*

Demonstração. Vimos que $\overline{Per(f)} \subset \Omega(f)$. Agora resta provar a inclusão inversa. Seja $x \in \Omega(f)$. Dado $\varepsilon_0 > 0$ queremos encontrar um ponto periódico ε_0-próximo de x. Do Lema do sombreamento, tome $\beta = \varepsilon_0/2$, existe portanto o α. Considere a bola B de raio $r < \min\{\beta, \alpha/2\}$ centrada em x. Como x é não errante, existem $y \in B$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(y) \in B$. Completamos esta sequência para obter a seguinte α-pseudo órbita periódica:

$$(\ldots, f^{k-1}(y), y, f(y), f^2(y), \ldots, f^{k-1}(y), y, \ldots)$$

e pelo Corolário 2.2.1 existe $y_0 \in \Omega(f)$ que β-sombreia esta α-pseudo órbita e é periódico. Das escolhas feitas, segue que

$$d(y_0, x) < d(y_0, y) + d(y, x) < \beta + r < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0.$$

□

Teorema 2.2.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov. Então são equivalentes:*

1. $\overline{Per(f)} = M$;
2. $\Omega(f) = M$;
3. $\mathcal{F}^u$ *é minimal, isto é, a variedade instável de todo ponto é densa em* M;
4. $\mathcal{F}^s$ *é minimal, isto é, a variedade estável de todo ponto é densa em* M;
5. f *é transitiva;*
6. f *é topologicamente mixing.*

Demonstração. $1 \iff 2$: O Lema 2.2.2 nos garante a igualdade $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$ e então a implicação sai diretamente disto e da hipótese.

$2 \implies 3, 4$: Novamente pelo Lema 2.2.2 e pela hipótese, temos $\overline{Per(f)} = \Omega(f) = M$. Fixe $\varepsilon > 0$ tal que $W^u_\varepsilon(x) \subset W^u(x)$ e $W^s_\varepsilon(x) \subset W^s(x)$ para todo $x \in M$. Seja p um ponto periódico de f e considere o conjunto $\mathcal{A}_p = \{x \in M \mid x$ é ligado a p por finitos W^u e W^s de pontos de M$\}$. Note que $p \in \mathcal{A}_p$. Vamos mostrar que $\mathcal{A}_p$ é aberto e fechado e então podemos concluir que este conjunto é toda a variedade, já que M é conexa. Seja $x \in \mathcal{A}_p$, então existem $x_1, \ldots, x_k$ pontos tais que ligam x a p por variedades estáveis e instáveis, como na figura 3.

Podemos supor sem perda de generalidade que $W^s(x)$ intersecta transversalmente $W^u(x_1)$. Pela estrutura de produto local, existe uma δ-vizinhança de x, $V_\delta(x)$ tal que para $y \in V_\delta(x)$, temos que $W^s(y)$ intersecta transversalmente $W^u(x_1)$, podemos então

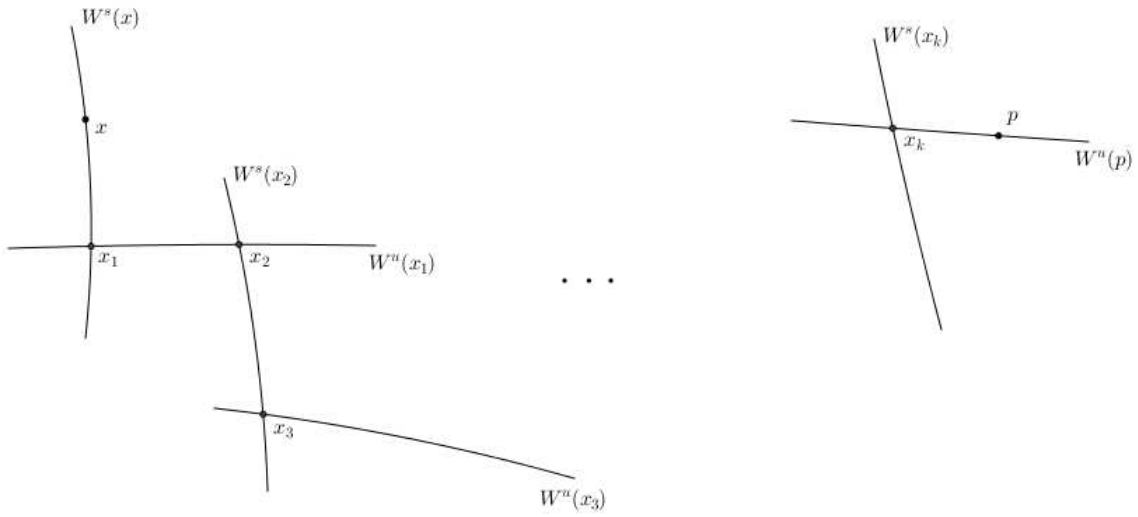

Figura 3 – x ligado a p por variedades estáveis e instáveis

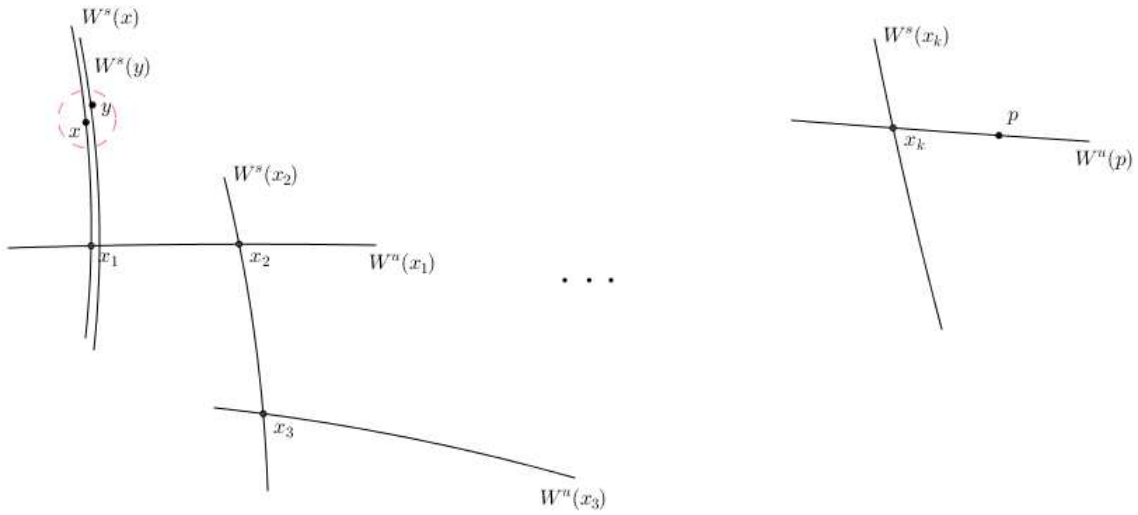

Figura 4 – y ligado a p por variedades estáveis e instáveis

ligar y a p caminhando de $W^s(y)$ para $W^u(x_1)$ e depois percorrendo o caminho sobre as variedades estáveis e instáveis que ligam x_1 a p (figura 4), ou seja, $V_\delta(x) \subset \mathcal{A}_p$ e assim $\mathcal{A}_p$ é um conjunto aberto.

Agora, seja $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathcal{A}_p$. Seja x um ponto limite desta sequência, e seja $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ a vizinhança produto local de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in \mathcal{V}_\varepsilon(x)$, logo $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(x_N) \neq \varnothing$ (e $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(x_N) \neq \varnothing$), tomando o caminho por $W^u(x)$, $W^s(x_N)$ (ou por $W^s(x)$, $W^u(x_N)$) junto com o caminho que liga x_N a p, teremos $x \in \mathcal{A}_p$. Portanto, $\mathcal{A}_p$ é fechado.

Mostraremos agora que se q é um ponto periódico, então a folha $W^u(q)$ é densa em M. Dado q ponto periódico de f, digamos de período m e dado V um aberto qualquer de M, queremos ver que $W^u(q)$ intersecta V. Como os pontos periódicos são densos em M, existe $p \in V$ periódico, digamos de período n. Sejam $x_1, \ldots, x_k$ pontos tais que variedades estáveis e instáveis destes ligam p a q. Sejam $p_1, \ldots, p_k$ pontos periódicos tais que $f^{m_i}(p_i) = p_i$, $i = 1, \ldots k$ e p_i esteja bem próximo de x_i de forma que aplicando o λ-Lema 2.1.4 várias vezes para $D^u(q, \delta)$ e $f^{m_0 m_1 \ldots m_k m_{k+1}}$ temos que $f^{m_0 m_1 \ldots m_k m_{k+1} N}(D^u(q, \delta)) \cap B(p_0, \varepsilon) \neq \varnothing$ para algum $N \in \mathbb{N}$.

Da mesma maneira que fizemos acima, podemos mostrar que as variedades estáveis de pontos periódicos são densas mas agora, ao invés de olharmos para f, estaremos olhando para f^{-1} já que, para $x \in M$, $W^s_f(x) = W^u_{f^{-1}}(x)$.

Para provar que a folha instável de um ponto qualquer de M é densa, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação: Dado $\varepsilon_0 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in M$, $f^n(W^u(x))$ é ε_0-denso para $n \geqslant n_0$.

De fato. Sejam $p_1, \ldots, p_l$ pontos periódicos ε_0-densos em M. Fixe $x \in M$. Como as variedades estáveis de pontos periódicos são densas em M a variedade instável de x intersecta as variedades estáveis dos p_i's. Usando o λ-Lema, iterando a variedade instável de x conseguimos n_x tal que $f^{n_x}(W^u(x))$ está ε_0-próxima das variedades instáveis dos p_i's, isto é, $f^{n_x}(W^u(x)) \cap B(p_i, \varepsilon_0) \neq \varnothing$ para todo i. Então vai existir $L > 0$ grande tal que $f^{n_x}(D^u(x, L))$ intersecta as ε_0-bolas centradas em p_i, $i = 1, \ldots, k$ e pela continuidade das folhas, existe um $\delta_x > 0$ pequeno tal que se $y \in M$ está δ_x-próximo de x então $f^{n_x}(D^u(y, L)) \cap B(p_i, \varepsilon_0) \neq \varnothing$ para todo i. Fazendo isto para cada x, obtemos $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in M}$ uma cobertura aberta de M, como M é compacta, existem $x_1, \ldots, x_k$, tais que $M = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \delta_{x_i})$. Tomando $N = max\{n_{x_1}, \ldots n_{x_k}\}$, obtemos que para qualquer $z \in M$, $f^N(D^u(z, L))$ é ε_0-denso em M. Note que $f^N(W^u(x)) = W^u(f^N(x))$, assim, para qualquer $x \in M$ sua variedade instável é densa em M. Podemos mostrar de maneira análoga que qualquer ponto de M tem variedade estável densa.

$3 \Longrightarrow 6$: Dados U e V abertos, seja $\varepsilon > 0$ tal que V contenha uma bola de raio ε. Afirmamos que para este ε, existe $L > 0$ grande tal que $D^u(x, L)$ é denso para todo $x \in M$. De fato. Fixado $\varepsilon > 0$. Seja $x \in M$, como $W^u(x)$ é denso em M, existe L_x grande o suficiente de tal forma que $D^u(x, L_x)$ é $\varepsilon/2$-denso, pela continuidade das variedades instáveis, existe $\delta_x > 0$ tal que para todo y δ_x-próximo de x, $D^u(y, L_x)$ é ε-denso. Assim, obtemos $\{B(x, \delta_x)\}_{x \in M}$ uma cobertura aberta de M, pela compacidade de M, existem $x_1, \ldots, x_j \in M$ tais que $M = \bigcup_{i=1}^{j} B(x_i, \delta_{x_i})$. Tomando $L = max\{L_{x_1}, \ldots L_{x_j}\}$ obtemos que

para qualquer $z \in M$, $D^u(z, L)$ é ε-denso em M.

Esta afirmação, nos garante que tomando um disco de variedade instável dentro de U e iterando pela f até que tenha comprimento maior que L, ele deverá necessariamente intersectar V. Logo, existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \varnothing$.

Analogamente $4 \Longrightarrow 6$.

Claramente $6 \Longrightarrow 5$.

$5 \Longrightarrow 2$: Seja $x \in M$, dado U vizinhança de x, tome $V = U$, como f é transitiva, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$, isto significa que $x \in \Omega(f)$. Portanto, $M = \Omega(f)$.

Desta forma, provamos $1 \Longleftrightarrow 2 \Longrightarrow 3, 4 \Longrightarrow 6 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 2$, ou seja, temos as equivalências desejadas. □

2.3 Decomposição Espectral

O teorema a seguir mostra que se o conjunto não-errante para um difeomorfismo f é um conjunto hiperbólico e os pontos periódicos são densos no conjunto não-errante então existe uma decomposição para $\Omega(f)$ em componentes disjuntas, fechadas, invariantes e transitivas por f, essas componentes são chamadas de **peças básicas**. Formalmente:

Teorema 2.3.1 (Decomposição Espectral [2])**.** *Seja M uma variedade Riemanniana e $f : M \to M$ um difeomorfismo com $\Omega(f)$ um conjunto hiperbólico para f e $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$. Então podemos decompor $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$ na união de conjuntos fechados disjuntos, tais que $f(\Omega_i) = \Omega_i$, $f|_{\Omega_i}$ é transitivo e $\Omega_i = X_{1,i} \cup \ldots \cup X_{n_i,i}$, com $X_{i,j}$'s fechados e disjuntos $f(X_{j,i}) = X_{j+1,i}$ e $f^{n_i}|_{X_{j,i}}$ mixing.*

Demonstração. Para $p \in \Omega = \Omega(f)$ um ponto periódico, considere $X_p = \overline{W^u(p) \cap \Omega}$. Seja δ como em 2.1.1. Afirmamos que

$$X_p = B_\delta(X_p) = \{y \in \Omega \mid d(y, X_p) < \delta\}.$$

Como os pontos periódicos são densos em Ω, é suficiente ver que um ponto periódico $q \in B_\delta(X_p)$ está em X_p. Tome $x \in W^u(p) \cap \Omega$ com $d(x, q) < \delta$ e considere $x' = [x, q] \in W^u(p) \cap W^s(q) \subset \Omega$. Digamos que o período de p é r e o período de q é n, isto é, $f^r(p) = p$ e $f^n(q) = q$, temos

$$f^{krn}(x') \in f^{krn}(W^u(p)) = W^u(f^{krn}(p)) = W^u(p)$$

e

$$\lim_{k\to\infty} d(f^{krn}(x'), q) = \lim_{k\to\infty} d(f^{krn}(x'), f^{krn}(q)) = 0.$$

Então $q \in X_p$.

Note que $f(X_p) = X_{f(p)}$, pois, $f(W^u(p)) = W^u(f(p))$. Se $q \in X_p$ como acima então $W^u_\delta(q) \subset X_p$ e

$$W^u(q) = \bigcup_{k\geqslant 0} f^{krn}(W^u_\delta(q)) \subset \bigcup_{k\geqslant 0} f^{krn}(X_p) = X_p.$$

Segue que $X_q \subset X_p$. Se x' é como acima, então $f^{krn}(x') \in X_p$ para k grande, como $X_q = B_\delta(X_p)$ é aberto em Ω. Como $f^{irn}(X_q) = X_{f^{irn}(q)} = X_q$ temos $f^{jrn}(x') \in X_q$ para todo j e

$$p = \lim_{j\to\infty} f^{jrn}(x') \in \overline{X_q} = X_q.$$

O argumento acima com q no lugar de p e vice versa, obtemos $X_p \subset X_q$. Se $q \in X_p$ com p, q periódicos então $X_p = X_q$.

Para quaisquer dois $X_p,\ X_q$ são disjuntos ou iguais, pois se para $X_q \cap X_p \neq \varnothing$, então esta interseção é aberta em Ω e consequentemente contém um ponto periódico s, então pelo que provamos acima, $X_s = X_p$ e $X_s = X_q$ e portanto $X_p = X_q$. Agora,

$$\Omega = \bigcup_{p\ periódico} B_\delta(X_p) = \bigcup_p X_p,$$

e então pela compacidade de Ω (X_p é aberto) seja

$$\Omega = X_{p_1} \cup \ldots \cup X_{p_t}$$

com os X_{p_j}'s disjuntos dois a dois. Então $f(X_{p_j}) = X_{f(p_j)}$ intersectando e igual a algum X_{p_i}. Então f permuta os X_{p_j}'s e os Ω_i são uniões disjuntas de X_{p_j}'s em vários ciclos de permutação.

Terminamos a prova mostrando que $f^N : X_s \to X_s$ é mixing quando s é ponto periódico e N positivo com $f^N(X_s) = X_s$. Suponha U, V são subconjuntos abertos não vazios de X_s (consequentemente abertos em Ω). Escolha um ponto periódico $p \in U$ e outro $q \in V$, digamos $f^r(p) = p,\ f^n(q) = q$. Para cada $0 \leqslant j \leqslant rn$ com $f^j(p) \in X_s$ podemos encontrar um ponto x'_j como no começo da demonstração de forma que

$$x'_j \in f^j(U) \text{ e } f^{krn}(x'_j) \in V \text{ para } k.$$

Escrevendo $tN = krn + j,\ 0 \leqslant j \leqslant rn$, temos $f^j(p) = f^{tN}(p) \in X_s$ e

$$f^{krn}(x'_j) = f^{tN}(f^{-j}(x'_j)) \in f^{tN}(U) \cap V \text{ para } k \text{ grande.}$$

Então $f^{tN}(U) \cap V \neq \varnothing$ para t grande e $f^N|_{X_s}$ é topologicamente mixing. □

Definição 2.3.1. *Para um subconjunto $\Gamma \subset \Lambda$, definimos*

$$W^s(\Gamma) = \bigcup_{x\in\Gamma} W^s(x) \text{ e } W^u(\Gamma) = \bigcup_{x\in\Gamma} W^u(x).$$

A referência utilizada para as próximas definições e resultados desta seção é [1].

Definição 2.3.2. *Sejam $\Omega_i,\ i \in \{1,\dots,l\}$ as peças básicas dadas pela decomposição espectral. Um **ciclo** para a família $\{\Omega_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$ é uma sequência $\Omega_{i_1},\dots,\Omega_{i_k}$ tal que $\Omega_{i_1} = \Omega_{i_k}$ e*

$$(W^u(\Omega_{i_j}) - \Omega_{i_j}) \cap W^s(\Omega_{i_j+1}) \neq \varnothing$$

para $1 \leqslant j \leqslant k$.

Nesse caso escrevemos $\Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \cdots < \Omega_{i_k} = \Omega_{i_1}$

Note que se $z \in (W^u(\Omega_{i_j}) - \Omega_{i_j}) \cap W^s(\Omega_{i_j+1})$ então $z \notin \Omega(f)$. Pois, se $z \in \Omega(f)$ então existe $k \neq i_j$ tal que $z \in \Omega_k$. Como $z \in W^u(\Omega_{i_j})$ e as peças básicas são invariantes por f, então $d(\Omega_{i_j}, \Omega_k) = 0$, o que é um absurdo.

Observação 2.3.1. *"$<$"é uma relação de ordem parcial.*

Teorema 2.3.2. *Se $f : M \to M$ é expansiva e f tem a propriedade de sombreamento então f não tem ciclos.*

Demonstração. Suponha que existe um ciclo $\Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \cdots < \Omega_{i_k} = \Omega_{i_1}$, em particular, $\Omega_{i_1} < \Omega_{i_1}$, então existem $x, y \in \Omega_{i_1}$ tais que $z \in W^s(x) \cap W^u(y),\ z \notin \Omega(f)$. Fixe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $d(z, \Omega(f)) \geqslant 2\varepsilon$. Como f tem propriedade de sombreamento, seja $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita de f em $\Omega(f)$ seja ε-sombreada por um ponto de $\Omega(f)$. Para k grande temos $d(f^{-k}(z), f^{-k}(x)) < \delta/2$ e $d(f^k(z), f^k(y)) < \delta/2$ e como $f : \Omega_{i_1} \to \Omega_{i_1}$ é transitiva, existe $w \in \Omega_{i_1}$ e $r \geqslant 0$ tal que

$$d(w, f^k(z)) < \delta,\ d(f^r(w), f^{-k}(z)) < \delta.$$

Então a sequência periódica

$$(\dots, z, \dots f^{k-1}(z), w, \dots, f^{r-1}(w), f^{-k}(z), \dots, z, \dots)$$

é uma δ-pseudo órbita, para qual definiremos z como sendo o termo zero da sequência. Note que o período desta sequência é $2r + k$, isto é, os termos nas posições $n(2k + r)$ são sempre iguais ao termo na posição zero, ou seja, iguais a z. Se $p \in \Omega(f)$ é um ponto que ε-sombreia a δ-pseudo órbita acima então

$$d(f^n(f^{2k+r}(p)), f^n(p)) \leqslant d(f^n(z), f^n(f^{2k+r}(p))) + d(f^n(z), f^n(p)) \leqslant 2\varepsilon$$

e

$$d(z, p) < \varepsilon.$$

Portanto, $p \notin \Omega(f)$. O que é um absurdo. □

Definição 2.3.3. *Seja Ω_i uma peça básica. Se $W^s(\Omega_i) = \Omega_i$, dizemos que Ω_i é uma **fonte** e se $W^u(\Omega_i) = \Omega_i$, dizemos que Ω_i é um **poço**.*

Teorema 2.3.3. *Sejam $f : M \to M$ um homeomorfismo com propriedade de sombreamento e Ω_i uma peça básica. Então Ω_i é um poço se, e somente se, $W^s(\Omega_i)$ é uma vizinhança de Ω_i em M e Ω_i é uma fonte se, e somente se, $W^u(\Omega_i)$ é uma vizinhança de Ω_i em M.*

Demonstração. Se $W^s(\Omega_i)$ é uma vizinhança de Ω_i então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\Omega_i) = \{x \in M \mid d(x, \Omega_i) \leqslant \varepsilon\} \subset W^s(\Omega_i)$. Suponha $z \in W^u(\Omega_i) - \Omega_i$. Então $f^{-n}(z) \in W^u(\Omega_i) \cap B_\varepsilon(\Omega_i)$ para algum n, seja $x \in \Omega_i$ tal que $f^{-n}(z) \in W^u(x)$. Como $B_\varepsilon(\Omega_i) \subset W^s(\Omega_i)$ temos que existe $y \in \Omega_i$ tal que $f^{-n}(z) \in W^s(y)$, teremos $f^{-n}(z) \in W^u(x) \cap W^s(y)$ com $x, y \in \Omega_i$ e $f^{-n}(z) \notin \Omega_i$, ou seja, $\Omega_i < \Omega_i$ o que contradiz o Teorema 2.3.2.

Seja $\varepsilon > 0$ fixo porém arbitrário, o Lema do Sombreamento nos garante a existência de um δ, tal que toda δ-pseudo órbita é ε-sombreada. Suponha que Ω_i é um poço e que $W^s(\Omega_i)$ não é uma vizinhança de Ω_i, então existe $y \in B_{\delta/2}(\Omega_i) - \Omega_i$ tal que $f^n(y) \to \Omega_j$ para algum $j \neq i$. Tome $z \in \Omega_i$ com $d(y, z) < \delta$. Então a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ onde

$$x_k = \begin{cases} f^{-k}(z), & k < 0 \\ f^{-k}(y), & k \geqslant 0 \end{cases}$$

é uma δ-pseudo órbita. Seja $w \in M$ um ε-sombreamento para tal sequência. Sabemos pelo Teorema da Decomposição Espectral que Ω_i é f-invariante então $f^n(z) \in \Omega_i, \ \forall n \in \mathbb{Z}$ e como ε é arbitrário temos

$$f^n(w) \to \Omega_j, \ f^{-n}(w) \to \Omega_i.$$

Portanto, como $w \notin \Omega(f)$ temos que $W^u(\Omega_i) \neq \Omega_i$, o que é um absurdo. □

Teorema 2.3.4. *Se $f : M \to M$ é expansiva e $f : \Omega(f) \to \Omega(f)$ tem a propriedade de sombreamento então f tem poços e fontes.*

Demonstração. Seja Ω_i uma peça básica minimal com respeito a relação $>$, a existência do elemento minimal é garantida pelo Lema de Zorn. Suponha que Ω_i não é um poço, isto é, podemos tomar $z \in W^u(\Omega_i) - \Omega_i$. Como $M = \bigcup_i W^s(\Omega_i)$ temos que $z \in W^s(\Omega_j)$ para algum j. Então existem $x \in \Omega_i$ e $y \in \Omega_j$ tal que $z \in W^u(x) \cap W^s(y)$ e além disso, $z \notin \Omega(f)$, ou seja, $\Omega_i > \Omega_j$, usando que f não possui ciclo, isto contradiz a minimalidade de Ω_i. Portanto, Ω_i é um poço. □

Definição 2.3.4. *Dizemos que um conjunto compacto invariante Λ é um* ***conjunto atrator*** *de f se existe uma vizinhança U de Λ tal que $f(\bar{U}) \subset U$ e $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\bar{U})$.*

Proposição 2.3.1. *Se Λ é um conjunto atrator de f então Λ é f-invariante.*

Demonstração. Seja U vizinhança de Λ tal que $f(\overline{U}) \subset U$ e $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\overline{U})$. Tome $x \in \Lambda$, então $x \in f^n(\overline{U}), \ \forall n \in \mathbb{N}$, isto implica que $f(x) \in f^{n+1}(\overline{U}), \ \forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, $x \in \overline{U}$, logo $f(x) \in f(\overline{U}) \subset U \subset \overline{U}$. Portanto, $f(x) \in \Lambda$. □

Observação 2.3.2. *Se Λ é um conjunto atrator então para todo $x \in \Lambda$, $W^u(x) \subset \Lambda$. De fato. Seja U vizinhança de Λ tal que $f(\bar{U}) \subset U$ e $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(\bar{U})$. Tome $x \in \Lambda$ fixo, porém arbitrário e $y \in W^u(x)$, queremos ver que $y \in \Lambda$. Note que $f^n(x) \in \Lambda$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, isto é garantido pela invariância de Λ. Desta forma, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-n}(y) \in U$, $\forall n \geqslant N$, e como $f(\overline{U}) \subset U$ por indução, $f^n(U) \subset U$ e consequentemente $y = f^n(f^{-n}(y)) \in f^n(U)$ para todo n, isto significa que $y \in \Lambda$.*

Observação 2.3.3. *Note que se Ω_i é uma fonte, então Ω_i é um conjunto atrator.*

Seja $U = \bigcup_{j=1}^{k} W^u(x_j) \cap (\mathcal{V}_\varepsilon(x_j))$ tal que $x_j \in \Omega_i$ e $\{W^u(x_j) \cap \mathcal{V}_\varepsilon(x_j)\}$ é uma cobertura aberta de Ω_i. Pelo Teorema 2.3.3, U é um aberto e além disso, satisfaz as condições da definição acima.

A observação anterior nos garante a existência de conjuntos atratores para difeomorfismos de Anosov.

2.4 Endomorfismos de Anosov

Esta seção, é de certa forma independente deste trabalho. O objetivo de termos a colocado é de despertar perguntas como a que segue: Quais dos resultados obtidos para difeomorfismos de Anosov ou difeomorfismos expansivos podemos garantir que ainda são válidos para endomorfismos de Anosov ou endomorfismos expansivos. Endomorfismos quer dizer que a aplicação é um difeomorfismo apenas local, então assim não podemos garantir que todos os resultados seguem de maneira análoga para este caso, este seria um pouco mais sutil que o tratado nos capítulos anteriores.

Vamos começar com alguns conceitos básicos. Considere M uma variedade Riemanniana compacta com $dim\ M = m < \infty$ e $f : M \to M$ um endomorfismo e seja Λ um subconjunto fechado de M tal que $f(\Lambda) = \Lambda$.

Definição 2.4.1. *Definimos o conjunto de todas as possíveis f-trajetórias em Λ da seguinte forma:*

$$\widehat{\Lambda} = \{\widehat{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \mid x_i \in \Lambda,\ f(x_i) = x_{i+1}\ \forall i \in \mathbb{Z}\} \subset \Lambda^{\mathbb{Z}}.$$

O conjunto $\widehat{\Lambda}$ é um subespaço fechado de $\Lambda^{\mathbb{Z}}$, dotado com a topologia produto e a métrica $d(\widehat{x}, \widehat{y}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-|i|} d(x_i, y_i)$ para $\widehat{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\widehat{y} = \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \Lambda^{\mathbb{Z}}$. Quando $\Lambda = M$ chamamos $\widehat{M}$ o **espaço limite inverso** de f.

Definição 2.4.2. *Seja $f : M \to M$ um endomorfismo. Seja Λ um subconjunto fechado de M tal que $f(\Lambda) = \Lambda \subset M$. Então Λ é chamado **hiperbólico** para f ou $f|_\Lambda$ é hiperbólica*

se, e somente se, existe constantes reais: $c > 0,\ 0 < \lambda < 1$ *tal que para toda* f*-trajetória* $\widehat{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *de pontos em* Λ*, temos:*

1. $T_{x_i}M = E^s(x_i) \oplus E^u(x_i)$
2. $Df(E^s(x_i)) = E^s(f(x_i)),\ \|Df^n_{x_i}(v)\| \leqslant c\lambda^n\|v\|,\ v \in E^s(x_i),$
3. $Df(E^u(x_i)) = E^u(f(x_i)),\ \|Df^n_{x_i}(v)\| \leqslant c^{-1}\lambda^{-n}\|v\|,\ v \in E^u(x_i),$

para $n = 0, 1, \ldots$.

Definição 2.4.3. *Se* M *é um conjunto hiperbólico para* f*. Então* f *é chamado* ***endomorfismo de Anosov****.*

Exemplo 2.4.1. *O endomorfismo* $T_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *induzido pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} n & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

para $n \geqslant 2$*, é um endomorfismo de Anosov.*

De fato. Fixemos $x \in \mathbb{T}^2$*, escolhamos uma* f*-trajetória de* x *que denotaremos por* $(x_i)_{iZ}$*, é claro que* T_A *é um difeomorfismo local, então existe* $U \subset \mathbb{T}^2$ *aberto tal que* $T_A|_U$ *é um difeomorfismo. Como vimos no Exemplo 1.3.1* T_A *não possui autovalores com norma igual a* 1*. Daí, segue como no Exemplo 2.1.2.*

Observação 2.4.1. *Note que* $E^u(x_i)$ *depende da trajetória, portanto, pode acontecer que* $E^u(x_i) \neq E^u(y_i)$*, com* $x_0 = y_0$*. Isto significa que* $T_{x_0}M$ *pode ter infinitas direções instáveis distintas, [18] exemplifica esta observação.*

Definição 2.4.4. *Dizemos que um endomorfismo de Anosov é* ***especial*** *se cada ponto* $x \in M$ *a direção instável independe da escolha de trajetória passada de* x*. Ou seja, para cada* $x \in M$ *existe somente uma direção instável.*

Em [15] é mostrado que se f é um endomorfismo de Anosov, então o seu levantamento para o recobrimento universal é um difeomorfismo de Anosov.

Definição 2.4.5. *Para cada* $p \in \overline{\Lambda}$ *e cada trajetória* $\widehat{q} \in \widehat{\Lambda}$*, definimos as* ***variedades estável*** *e* ***instável local*** *por*

$$W^s_\delta(p) = \{y \in M;\ d(f^i(y), f^i(p)) < \delta, \forall i \geqslant 0\}$$
$$W^u_\delta(\widehat{q}) = \{y \in M;\ \exists \widehat{y},\ \pi(\widehat{y}) = y,\ d(y_i, q_i) < \delta, \forall i \leqslant 0\}.$$

Definição 2.4.6. *Um endomorfismo* $f|_\Lambda$ *é* ***expansivo*** *se existe* $\delta > 0$ *tal que se* $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *e* $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *são duas órbitas em* Λ *satisfazendo* $d(x_i, y_i) < \delta$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$ *implica que* $x_i = y_i$ *para todo* i*.*

Assim como os difeomofismos de Anosov, a proposição a seguir mostra que os endomorfismos de Anosov são também expansivos.

Proposição 2.4.1. *Se $f|_\Lambda$ é hiperbólica então $f|_\Lambda$ é expansiva.*

Demonstração. Seja Λ um conjunto hiperbólico para um endomorfismo f. Considere δ suficientemente pequeno, então pela continuidade $W^s_\delta(p)$ e $W^u_\delta(\widehat{q})$ são quase planos, isto é, C^1-próximo ao tangente em p e q_0, respectivamente, para todo $p \in \Lambda$ e todo $\widehat{q} \in \widehat{\Lambda}$. Portanto, pela continuidade de E^u e E^s, $W^s_\delta(p)$ e $W^u_\delta(\widehat{q})$ intersectam em no máximo um ponto. Em particular, se $p = q_0$, então $W^s_\delta(p) \cap W^u_\delta(\widehat{q}) = \{q_0\}$. □

3 Teoremas de Newhouse e Franks

Conjectura-se que todo difeomorfismo de Anosov seja transitivo, mostraremos nesta seção que isto vale para os difeomorfismos de Anosov de codimensão 1. Na verdade, dado um difeomorfismo de Anosov de codimensão 1, $f : M \to M$, então o conjunto não-errante é toda a variedade e usando o Teorema 2.2.1, podemos concluir que ele é transitivo.

Uma conjugação topológica entre duas funções $f : M \to M$ e $g : N \to N$ é um homeomorfismo $h : N \to M$ tal que $f \circ h = h \circ g$. Propriedades topológicas de f são carregadas por h para g e vice-versa bem como o comportamento de sua dinâmica. O Teorema de Franks relaciona difeomorfismos de Anosov de codimensão 1 com automorfismos hiperbólicos no toro através de conjugação topológica. Em geral aplicações lineares são bem comportadas assim, Franks com seu resultado contribui para a grandeza da Matemática colocando difeomorfismos de Anosov de codimensão 1 na mesma caixinha de classificação que as aplicações lineares hiperbólicas.

3.1 Teorema de Newhouse

Começaremos considerando $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov, M uma variedade Riemanniana compacta e conexa, $dim\ M = m$ e seja $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n$ a decomposição espectral do conjunto não-errante de f.

Definição 3.1.1. *Seja $x \in \Omega_i$. Dados $y, z \in W^u(x)$,*

- *se $z < y$ ($<$ com respeito a orientação de $W^u(x)$), defina $arc^u(z, y)$ como sendo o arco em $W^u(x)$ com extremos z e y;*
- *se $z > y$ ($>$ com respeito a orientação de $W^u(x)$), defina $arc^u(y, z)$ como sendo o arco em $W^u(x)$ com extremos z e y.*

Dado $0 < \alpha < \infty$ defina

$$B^u_+(x, \alpha) = \{y \in W^u(x) \mid x < y \text{ e } l(arc^u(x, y)) < \alpha\}$$

$$B^u_+(x) = \{y \in W^u(x) \mid x < y\}.$$

Similarmente defina

$$B^u_-(x, \alpha) = \{y \in W^u(x) \mid x > y \text{ e } l(arc^u(y, x)) < \alpha\}$$

$$B^u_-(x) = \{y \in W^u(x) \mid x > y\}.$$

Lema 3.1.1. *Seja Ω_i uma fonte. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Para cada $x \in \Omega_i$, $B^u_+(x) \cap \Omega_i \neq \varnothing$;*
2. *Para cada $x \in \Omega_i$, $B^u_-(x) \cap \Omega_i \neq \varnothing$.*

Demonstração. Faremos a demonstração para a afirmação *1* e a afirmação *2* pode ser provada de maneira análoga. Seja $A = \{x \in \Omega_i \mid B^u_+(x) \cap \Omega_i \neq \varnothing\}$, queremos mostrar que $A = \Omega_i$.

Afirmação 1: A é f-invariante.
De fato. Seja $x \in A$, existe $y \in B^u_+(x) \cap \Omega_i$. Pelo Teorema da decomposição espectral 2.3.1, Ω_i é f-invariante, então $f(y) \in \Omega_i$. Como f preserva orientação de E^u e $f(W^u(x)) = W^u(f(x))$ temos que $f(y) \in B^u_+(f(x))$. Logo, $f(y) \in B^u_+(f(x)) \cap \Omega_i$ e portanto, $f(x) \in A$. Por outro lado, seja $x \in A$ quero ver que $x \in f^{-1}(A)$. Tome $y \in B^u_+(x) \cap \Omega_i$. Pelo Teorema da decomposição espectral $f^{-1}(\Omega_i) = \Omega_i$, então $f^{-1}(y) \in \Omega_i$. Como f^{-1} preserva orientação de E^u e $f^{-1}(W^u(x)) = W^u(f^{-1}(x))$. Temos que $f^{-1}(x) \in B^u_+(f^{-1}(y))$.

Afirmação 2: Se $x \in \Omega_i$ não é periódico então $x \in A$.
De fato. Seja $\varepsilon > 0$ como no teorema 2.1.1. Como x não é periódico a órbita de x, $\mathcal{O}(x)$ é infinita. Se para cada par de inteiros $n_1 > n_2$, $W^s(f^{n_1}(x)) \cap W^s(f^{n_2}(x)) = \varnothing$, então vai existir uma sequência infinita $\{x_i = f^{n_i}(x)\}_{i \geqslant 1} \subset \mathcal{O}(x)$ tal que se $x_i \neq x_j$ então $W^s_\varepsilon(x_i) \cap W^s_\varepsilon(x_j) = \varnothing$. Suponhamos que existam inteiros $n_1 \geqslant n_2$ tal que $W^s(f^{n_1}(x)) \cap W^s(f^{n_2}(x)) \neq \varnothing$ então $W^s(f^{n_1}(x)) = W^s(f^{n_2}(x))$ e portanto $f^{n_1-n_2}(W^s(x)) = W^s(x)$. Como $f^{-(n_1-n_2)}$ expande $W^s(x)$, existe uma sequência crescente de inteiros $m_1, m_2, \ldots,$ tais que se $i \neq j$ a distância em $W^s(x)$ entre $f^{-m_i(n_1-n_2)}(x)$ e $f^{-m_j(n_1-n_2)}(x)$ é maior que 2ε. Então $W^s_\varepsilon(f^{-m_i(n_1-n_2)}(x)) \cap W^s_\varepsilon(f^{-m_j(n_1-n_2)}(x)) = \varnothing$ e considere a sequência $\{x_i\}_{i \geqslant 1}$, onde $x_i = f^{-m_i(n_1-n_2)}(x)$, assim temos $W^s_\varepsilon(x_i) \cap W^s_\varepsilon(x_j) = \varnothing$.

Agora seja y um ponto limite de $\{x_i\}$ e escolha uma subsequência $\{x_{ij}\}$ tal que $x_{ij} \to y$ quando $j \to \infty$. Seja $\mathcal{V}_\varepsilon(y)$ a vizinhança produto em y. Pelo Teorema 2.1.1, se $x_{ij} \neq x_{ik}$ e $x_{ij}, x_{ik} \in \mathcal{V}_\varepsilon(y)$ então

$$B^u_+(x_{ij}) \cap W^s_\varepsilon(x_{ik}) \neq \varnothing \text{ ou } B^u_+(x_{ik}) \cap W^s_\varepsilon(x_{ij}) \neq \varnothing$$

então $x_{ij} \in A$ ou $x_{ik} \in A$. Como A é f-invariante e $W^s(\Omega_i) = \Omega_i$, obtemos que $x \in A$.

Agora vamos provar que se $p \in \Omega_i$ é um ponto periódico então $p \in A$. Para tal dividiremos em dois casos, quando $dim\ M = 2$ ou quando $dim\ M > 2$. Considere $p \in \Omega_i$ ponto periódico.

Caso 1: Suponha $dim\ M = 2$.
Consideremos $\pi : \widetilde{M} \to M$ o recobrimento duplo orientável de M. Seja $\widetilde{E}^s$ o campo de

linha obtido pelo pull-back de E^s sobre M. Coloquemos uma orientação $\widetilde{\mathcal{O}}$ em $\widetilde{E}^s$ da seguinte forma, dizemos que um vetor $X(x,\mathcal{O}) \in \widetilde{E}^s(x,\mathcal{O})$ é positivo se $D\pi_{(x,\mathcal{O})}X(x,\mathcal{O})$ estiver na orientação de $\mathcal{O}$.

Pela nossa construção a orientação $\widetilde{\mathcal{O}}$ é contínua. Mas sendo $\widetilde{E}^s$ unidimensional posso tomar um campo não nulo sobre $\widetilde{M}$. Em particular existe um campo de vetores não nulo suave. Por conseguinte, a característica de Euler de $\widetilde{M}$ é zero. Sendo a característica de Euler de M a metade da de $\widetilde{M}$ segue que esta também é zero. Pela classificação de superfícies compactas sem bordo [1]. A única superfície compacta que tem característica de Euler zero é o Toro[2]. Portanto, podemos supor que $M = \mathbb{T}^2$.

Suponha $p \notin A$ e que $f^r(p) = p$, então $B^u_+(p) \cap W^s(p) = \varnothing$. Como Ω_i é uma fonte, $W^s(p) \subset \Omega_i \subset \Omega(f) = \Omega(f^r)$. Então, existe uma fonte Ω'_i para f^r tal que $p \in \Omega'_i$ e p é um ponto fixo de f^r. Como $W^s(p)$ é denso em Ω'_i, $W^s(p)$ recorre a si mesmo.

Seja $\mathcal{V}_\varepsilon(p)$ como no Corolário 2.1.1. Como E^u em M é orientado então E^s também é. Seja $q \in W^s(p) \cap B^u_-(p,\varepsilon)$, e considere o loop γ consistindo no arco em $W^s(p)$ de p a q seguido do arco em $B^u_-(p,\varepsilon)$ de q para p. Se γ é homotópico a uma constante, ou seja, nulo-homotópico então como é um círculo topológico embutido na topologia do toro, isto limita um 2-disco topológico. Mas se seguirmos $W^s(p)$ em direção de p para q vá além de q para o primeiro q_1 onde $W^s(p)$ encontra $arc^u(q,p) \subset B^u_-(p,\varepsilon)$ é fácil ver que o arco de p para q deve cruzar $B^u_-(p,\varepsilon)$ na direção oposta do arco de q para q_1. Isto contradiz o fato de E^s ser orientado. Logo, γ não é nulo-homotópico. Como M é toro $M - \gamma$ é um cilindro topológico qual tem uma folheação estável induzida por $\{W^u(x)\}_{x\in M}$.

Agora é fácil ver como definir conjuntos w-limites e estabelecer uma teoria de Poincaré-Bendixson para esta folheação contínua em $M - \gamma$. Como $\overline{B^u_+(p) - B^u_+(p,\varepsilon)} \subset M - \gamma$, o conjunto w-limite da folha $B^u_+(p)$ é um subconjunto não vazio de $M - \gamma$. Como a folheação $\{W^u(x)\}$ não tem singularidades, Poincaré-Bendixson diz que o conjunto w-limite de $B^u_+(p)$ deve ser um círculo em $M - \gamma$ [1]. Mas isto é obviamente impossível, pois, todas as variedades instáveis de f são subvariedades imersas. Portanto a suposição que $p \notin A$ gera uma contradição.

Caso 2: Suponha $dim\ M \geqslant 3$.

Pela Afirmação 2, se $x \in W^s(p) - \{p\}$ então $x \in A$, pois x não é periódico: suponha que exista $n \in \mathbb{N}$ tal, que $f^n(x) = x$. Como $x \in W^s(p) - \{p\}$ temos que $\lim_{j\to\infty} d(f^j(x), f^j(p)) = 0$ então $0 = \lim_{j\to\infty} d(f^{jrn}(x), f^{jrn}(p)) = \lim_{j\to\infty} d(x,p) \neq 0$, absurdo!

[1] *Teorema de classificação de superfícies compactas sem bordo:* Qualquer superfície compacta orientável é homeomorfa ou a esfera, ou a soma conexa de toros.

[2] Seja M uma superfície, denotamos por $\chi(M)$ a característica de Euler de M. Então $\chi(\mathbb{S}^n) = 2$ e $\chi(\mathbb{T}^n) = 0$.

[1] *Teorema de Poincaré-Bendixson:* Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um difeomorfismo. Para o fluxo definido pela equação $x' = f(x)$ para $x \in \mathbb{T}^2$, se $\omega(x)$ não tem singularidades então $\omega(x)$ é uma órbita periódica.

Afirmação 3: Para $x \in W^s(p) - \{p\}$ defina

$$\widetilde{\phi}(x) = \inf\{l(arc^u(x,y)) \mid y \in B^u_+(x) \cap \Omega_i\}.$$

Se existe x tal que $\widetilde{\phi}(x) = 0$ então $p \in A$.

De fato. Suponha que $\widetilde{\phi}(x) = 0$ para algum $x \in W^s(p) - \{p\}$, isto significa que existe uma sequência y_i em $B^u_+(x) \cap \Omega_i$ convergindo a x. Seja $\varepsilon > 0$ menor que a constante em 2.1.1 e menor que a constante de expansividade de f, para tal ε existe $\delta > 0$ tal que para todo x distando menos de δ de p, $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(p) \neq \varnothing$. Seja $L > 0$ grande o suficiente de tal forma que $D^s(x, L)$ contenha p. Como as folhas estáveis são contínuas existe i_0 tal que $D^s(y_{i_0}, L)$ e $D^s(x, L)$ estão δ-próximas, isto significa que existe $z \in D^s(y_{i_0}, L)$ tal que $d(z, p) < \delta$. Logo, $W^s_\varepsilon(z) \cap W^u_\varepsilon(p) \neq \varnothing$ e como $W^s_\varepsilon(z) \subset W^s(z) \subset \Omega_i$ temos $\Omega_i \cap B^u_+(p) \neq \varnothing$. Podemos mostrar de maneira análoga que $\Omega_i \cap B^u_-(p)$ obtendo portanto $p \in A$.

Logo, vamos assumir que $\widetilde{\phi}(x) > 0$ para $x \in W^s(p) - \{p\}$.

Afirmação 4: Para $x \in W^s(p) - \{p\}$, seja $\phi(x)$ o ponto em $B^u_+(x)$ tal que $l(arc^u(x, \phi(x))) = \widetilde{\phi}(x)$. Então existe $z_0 \in M$, $\phi(x) \in W^s(z_0)$ $\forall x \in W^s(p) - \{p\}$, isto é, todo $\phi(x)$ está na mesma variedade estável quando x varia em $W^s(p) - \{p\}$.

De fato. Sejam $x_0 \in W^s(p) - \{p\}$ e $z_0 = \phi(x_0)$. Considere $U_{z_0} = \{x \in W^s(p) - \{p\} \mid \phi(x) \in W^s(z_0)\}$. Vamos mostrar que U_{z_0} é aberto e fechado em $W^s(p) - \{p\}$, como $W^s(p) - \{p\}$ é conexo, pois $dim\, \mathcal{F}^s \geqslant 2$, então teremos que $U_{z_0} = W^s(p) - \{p\}$ e acabou.

Observe que $U_{z_0} \neq \varnothing$ uma vez que $x_0 \in U_{z_0}$. Tome $\mathcal{V}_\varepsilon(arc^u(x_0, z_0))$ a vizinhança produto local de $arc^u(x_0, z_0)$, com ε tal que $W^s_\varepsilon(x) \subset W^s(x)$, $\forall x$. Note que $\mathcal{V}_\varepsilon(arc^u(x_0, z_0)) \cap W^s(x_0) \subset U_{z_0}$, pois se $x \in \mathcal{V}_\varepsilon(arc^u(x_0, z_0)) \cap W^s(x_0)$, então $B^u_+(x) \cap W^s(z_0) \neq \varnothing$ e como $z_0 \in \Omega_i$ é uma fonte logo $W^s(z_0) \in \Omega_i$. Se $q_0 \in B^u_+(x) \cap W^s(z_0)$ então $\phi(x) \leqslant q_0$ (com respeito a orientação de $\mathcal{F}^u$) e $\phi(x) \in \mathcal{V}_\varepsilon(arc^u(x_0, z_0))$. Por outro lado, $W^s_\varepsilon(\phi(x)) \cap arc^u(x_0, z_0) \neq \varnothing$ e está contido em Ω_i, assim $W^s_\varepsilon(\phi(x)) \cap arc^u(x_0, z_0) = z_0$ (pela escolha da vizinhança produto), isto implica que $W^s(\phi(x)) = W^s(z_0)$.

Agora, é claro que se $W^s(z_1) \neq W^s(z_2)$ então $U_{z_1} \cap U_{z_2} = \varnothing$, o que implica que U_{z_0} é fechado.

Afirmação 5. A aplicação $\phi : W^s(p) - \{p\} \to W^s(z_0)$ é contínua e injetiva.

De fato. Dado $\varepsilon > 0$, seja $arc^u(x, \phi(x))$ o arco em $B^u_+(x)$, pela continuidade da folheação instável, existe $\delta > 0$ tal que se x, y estão δ-próximos, então os arcos $arc^u(x, \phi(x))$ e $arc^u(y, \phi(y))$ estão ε-próximos, logo, $d^s(\phi(x), \phi(y)) < \varepsilon$. Portanto ϕ é contínua. A injetividade segue da definição de ϕ.

Definição 3.1.2. *Seja E_0 uma $(n-1)$-bola fechada em $W^s(p)$ contendo p em seu interior*

relativo a $W^s(p)$. *Seja* Σ_0 *a fronteira de* E_0 *em* $W^s(p)$ *de modo que* Σ_0 *é uma* $(n-2)$*-esfera em* $W^s(p) - \{p\}$. *Seja* $H = \bigcup_{x\in\Sigma_0} arc^u(x, \phi(x))$ *(figura 5).*

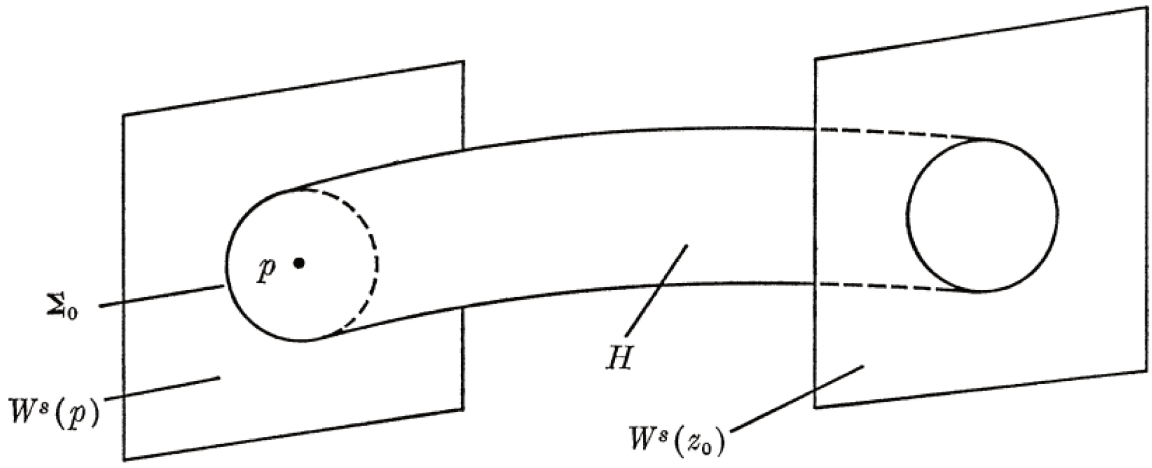

Figura 5 – retirada de [16].

Claramente H é um homeomorfismo para $\Sigma_0 \times I$ onde I é o intervalo unitário.

Afirmação 6: Para $x \in \Sigma_0$, seja $\gamma_x = arc^u(x, \phi(x))$. Para $y \in \gamma_x$, seja Σ_y a componente de caminho de $W^s(y) \cap H$ qual contém y. Então Σ_y é homeomorfo a uma $(n-2)$-esfera.

De fato. Seja $x \in \Sigma_0$ fixo. Primeiramente vamos mostrar que se, $y \in \gamma_x$ então, $\Sigma_y \cap \gamma_{x_1} \neq \varnothing$ para todo $x_1 \in \Sigma_0$. Comecemos fixando $y \in \gamma_x$ e considere o conjunto

$$\Sigma_0' = \{z \in \Sigma_0 \mid \Sigma_y \cap \gamma_z \neq \varnothing\}.$$

Seja $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$ a vizinhança produto local, é claro que $\mathcal{V}_\varepsilon(x) \cap \Sigma_0 \subset \Sigma_0'$ e portanto Σ_0' é aberto em Σ_0. Mostremos que $\Sigma_0 - \Sigma_0'$ é aberto em Σ_0. Seja $z \in \Sigma_0 - \Sigma_0'$. Então $\Sigma_y \cap \gamma_z = \varnothing$, existe um conjunto instável relativo a γ_z tal que $N \cap \Sigma_y = \varnothing$. Agora, $N \cap \Sigma_0$ é uma vizinhança de $z \in \Sigma_0$. Mas $N \cap \Sigma_0 \subset \Sigma_0 - \Sigma_0'$, então $\Sigma_0 - \Sigma_0'$ é aberto em Σ_0.

Agora, vamos ver que, para cada $x, x_1 \in \Sigma_0$ e cada $y \in \gamma_x$, a interseção $\Sigma_y \cap \gamma_{x_1}$ é exatamente um ponto. Para $x \in \Sigma_0$ fixo, seja

$$D_x = \{y \in \gamma_x \mid \Sigma_y \cap \gamma_{x_1} \text{ é um ponto para todo } x_1 \in \Sigma_0\}$$

O conjunto D_x é aberto e fechado: Seja $y \in D_x$. Então a aplicação $\phi_y : \Sigma_0 \to \Sigma_y$ definida acima é bijetiva e contínua então é um homeomorfismo. Seja N_y um conjunto estável relativo a Σ_y. Então $W^u(y, N_y) \cap \gamma_x$ é uma vizinhança de y em γ_x e está contido em D_x. Agora, suponha $y \in \gamma_x - D_x$, pelo que foi mostrado acima, existe um $x_1 \in \Sigma_0$ tal que $\Sigma_y \cap \gamma_{x_1}$ tem pelo menos dois pontos de $\Sigma_y \cap \gamma_{x_1}$. Então usando um conjunto estável

relativo ao arco em Σ_y que conecta y e dois pontos de $\Sigma_y \cap \gamma_{x_1}$, vemos que y é um ponto interior de $\gamma_x - D_x$.

Por isto, fixando x faz sentindo definirmos para cada $y \in \gamma_x$ a aplicação $\phi_y : \Sigma_0 \to \Sigma_y$ por $\{\phi_y(x_1)\} = \Sigma_y \cap \gamma_{x_1}$ para $x_1 \in \Sigma_0$. Então é fácil checar que ϕ_y é bijetiva e contínua, e como Σ_0 é compacto, logo ϕ_y é um homeomorfismo.

Pelo Teorema de Separação de Jordan-Brouwer[1], Σ_y separa $W^s(y)$.

Afirmação 7: Fixe $x \in \Sigma_0$. É claro que os conjuntos Σ_y variam continuamente com $y \in \gamma_x$. Ou seja, se y_1 está perto de y_2 e $\{y_1, y_2\} \subset \gamma_x$ então existe um homeomorfismo $\psi : \Sigma_{y_2} \to \Sigma_{y_1}$ tal que ψ é C^0 próximo da inclusão $i_{y_2} : \Sigma_{y_2} \to M$.

Agora, cada Σ_y, sendo um homeomorfismo de uma $(n-2)$-esfera em $W^s(y)$, é a fronteira de um conjunto aberto limitado e conexo por caminhos V_y em $W^s(y)$. Fixado $x \in \Sigma_0$, vamos ver que $B^u_+(p) \cap V_y \neq \varnothing$ para todo $y \in \gamma_x$. Assim, podemos concluir que $B^u_+(p) \cap V_{\phi(x)} \neq \varnothing$, mas como $\phi(x) \in \Omega_i$, então $V_{\phi(x)} \subset W^s(\phi(x)) \subset \Omega_i$ e consequentemente, $B^u_+(p) \cap \Omega_i \neq \varnothing$ e isto provaria que $p \in A$, o que completa a prova do Lema. Considere o conjunto

$$D = \{y \in \gamma_x \mid B^u_+(p) \cap V_y \neq \varnothing\}.$$

Seja $D = \{y \in \gamma \mid B^u_+(p) \cap V_y \neq \varnothing\}$. Claramente, D é aberto em γ. Como D contém uma vizinhança de x em γ, vamos provar que $\gamma - D$ é aberto em γ para então concluirmos que $D = \gamma$.

Seja $y \in \gamma - D$. Tome um conjunto produto estável N_y relativo a V_y tal que $B^u_+(p) \cap N_y = \varnothing$. Pela dependência contínua de Σ_y em y a definição de V_y, vemos que se y_1 está perto de y, então $V_{y_1} \subset N_y$. Logo y é um ponto interior de $\gamma - D$.

Teorema 3.1.1 (Newhouse [16])**.** *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov de codimensão 1 então $\Omega(f) = M$.*

Demonstração. Suponha $dim\ M = m > 2$ e $dim\ E^u = 1$ e M, TM, E^u orientados. Substituindo f por f^2 ou f^4 assumimos que Tf preserva orientação de E^u e TM.

Seja $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n$ a decomposição espectral de $\Omega(f)$. Sabemos de Teorema 2.3.3 que se Ω_i é uma fonte então $W^u(\Omega_i)$ é um conjunto aberto de M. E que se Ω_i é um poço então $W^u(\Omega_i)$ é um conjunto aberto de M.

Se mostrarmos que toda fonte é um poço então $\Omega(f) = M$. Pois, aconteceria $W^s(\Omega_i) = \Omega_i = W^u(\Omega_i)$ é um subconjunto aberto e fechado de M.

Seja Ω_i uma fonte. Mostremos que

$$W^u(\Omega_i) = \Omega_i \tag{3.1}$$

[1] *Teorema de Separação de Jordan-Brouwer*: O complementar de uma variedade suave compacta, conexa e de codimensão 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$ tem exatamente duas componentes conexas, uma delas limitada.

Seja $x \in \Omega_i$. Provemos que $W^u(x) \subset \Omega_i$. Escolha uma sequência decrescente de inteiros $n_1 < n_2 < \ldots$ e um ponto $y \in M$ tal que $f^{n_i}(x) \to y$ quando $i \to \infty$. Como Ω_i é fechado e $f^{n_i}(x) \in \Omega_i,\ \forall i$, pois Ω_i é f-invariante, então $y \in \Omega_i$.

Pelo lema anterior, podemos escolher $\alpha > 0$ tal que $B^u_{\pm}(y, \alpha) \cap \Omega_i \neq \varnothing$. Então existe um inteiro $N > 0$ tal que para $i \geqslant N$, $B^u_{\pm}(f^{n_i}(x), \alpha) \cap \Omega_i \neq \varnothing$. Como f^{-n_i} contrai a variedade instável vemos que x é um ponto de acumulação de $B^u_{\pm}(x) \cap \Omega_i$. Ou seja, x é um ponto de acumulação de $W^u(x) \cap \Omega_i$ de ambos os lados em $W^u(x)$.

O mesmo argumento mostra que qualquer ponto $v \in W^u(x) \cap \Omega_i$ é um ponto de acumulação de $W^u(x) \cap \Omega_i$ de ambos os lados de $W^u(x)$.

Agora, como $W^u(x) \cap \Omega_i$ é fechado em $W^u(x)$, se z fosse um ponto de $W^u(x) - \Omega_i$, então poderíamos encontrar um arco $arc^u(x_1, x_2)$ em $W^u(x)$ tal que $z \in arc^u(x_1, x_2), arc^u(x_1, x_2) - \{x_1, x_2\} \cap \Omega_i = \varnothing$ e $x_1, x_2 \in \Omega_i$.

Mas Ω_i deve acumular em x_1, x_2 de ambos os lados em $W^u(x)$. Isto contraria o fato que $arc^u(x_1, x_2) - \{x_1, x_2\} \cap \Omega_i = \varnothing$. Logo, $W^u(x) \subset \Omega_i$. □

3.2 Teorema de Franks

Para esta seção usamos a referência [11]. Nesta o autor apresenta uma prova mais simples do Teorema de Franks.

A existência de pontos fixos para difeomorfismos de Anosov é um problema em aberto. Sendo assim, acrescentaremos como hipótese no teorema que o difeomorfismo de Anosov adjacente tem um ponto fixo. Considere $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov sobre uma variedade Riemanniana compacta e conexa M e p um ponto fixo de f. Lembremos que as folheações estável e instável

$$\mathcal{F}^s = \{W^s(x) \mid x \in M\} \text{ e } \mathcal{F}^u = \{W^u(x) \mid x \in M\}$$

são transversais. Seja φ vinda da definição 1.2.1. Chamamos um homeomorfismo entre os discos de $\mathcal{F}^s$ da forma

$$\varphi \circ h \circ \varphi^{-1} : \varphi(\{y\} \times D^u) \to \varphi(\{y'\} \times D^u)$$

uma projeção elementar ao longo de $\mathcal{F}^s$, onde $h : \{y\} \times D^u \to \{y'\} \times D^u$ manda (y, z) para (y', z), $z \in D^u$, definimos uma projeção ao longo de $\mathcal{F}^s$ como a composição de um número finito de projeções elementares ao longo de $\mathcal{F}^s$.

Como vamos trabalhar com difeomorfismo de Anosov de dimensão 1 vamos supor sem perda de generalidade que $dim\ \mathcal{F}^u = 1$. Vamos construir sobre a folheação instável uma medida que é invariante pelas folhas estáveis e através desta medida encontraremos uma "cara"para aplicação de recobrimento do recobrimento universal de M para M.

Definição 3.2.1. *Seja $\mathcal{F}^u$ de dimensão 1. Uma **medida transversa μ^u invariante** para $\mathcal{F}^s$ é uma coleção $\{\mu_I \mid I$ é um arco em uma folha de $\mathcal{F}^u\}$ de medidas de Borel em todos os arcos nas folhas de $\mathcal{F}^u$ tal que $\mu_{J|_I} = \mu_I$ se $I \subset J$ e tal que $\mu_J \circ \varphi = \mu_I$ se $\varphi : I \to J$ é a projeção ao longo de $\mathcal{F}^s$.*

O lema a seguir estabelece condições para a existência de medida transversa por $\mathcal{F}^u$ e invariante em $\mathcal{F}^s$.

Lema 3.2.1. *Se $\dim \mathcal{F}^u = 1$ e $\Omega(f) = M$ então existe uma medida transversa $\mu = \mu_I$ invariante para $\mathcal{F}^s$ satisfazendo as seguintes condições:*

1. *μ_I é não-atômica (ou seja, se A é um conjunto mensurável com medida positiva, então existe um conjunto mensurável B contido em A ainda com medida positiva) e positiva em conjuntos abertos não vazios;*
2. *$\mu_I(I) = \infty$ se, e somente se, I é um arco ilimitado.*

Demonstração. Seja I um arco limitado em uma folha instável. Fixemos um ponto $x \in M$ e denotemos por $D^s(x, r)$ a bola de raio r centrada em x na folha $W^s(x)$. Seja $N(r) := card(I \cap D^s(x, r))$ o número de elementos de $I \cap D^s(x, r)$. Dividimos I em uma união disjunta $I = I_1 \cup I_2$ de subarcos e para $i = 1, 2$ considere $N_i(r) := card(I_i \cap D^s(x, r))$. Então $N(r) = N_1(r) + N_2(r)$ e existe uma sequência $r_1^1 < r_2^1 < \cdots \to \infty$ tal que cada fração $N_i(r_m^1)/N(r_m^1)$ converge para algum número real não negativo quando $m \to \infty$, digamos $\mu^u(I_i)$. Agora, dividimos cada I_i em uma união disjunta $I_i = I_{i,1} \cup I_{i,2}$ de subarcos e seja $N_{i,j}(r) = card(I_{i,j} \cap D^s(x, r))$ onde $j = 1, 2$. Desta forma, podemos tomar uma subsequência $r_1^2 < r_2^2 < \cdots \to \infty$ tal que $N_{i,j}(r_m^2)/N(r_m^2)$ converge para algum número $\mu^u(I_{i,j})$. Repetindo este processo, obtemos uma sequência de subarcos $I_{i,j,\ldots,k} = I_{i,j,\ldots,k,1} \cup I_{i,j,\ldots,k,2}$ nos quais números reais não negativos $\mu^u(I_{i,j,\ldots,k,l})$ estão definidos.

Seja $diam(I_{i,j,\ldots,k,l}) \to 0$ para toda sequência. Como a união $I_{i,j,\ldots,k} = I_{i,j,\ldots,k,1} \cup I_{i,j,\ldots,k,2}$ é disjunta, então por propriedade de medida, temos $\mu^u(I_{i,j,\ldots,k}) = \mu^u(I_{i,j,\ldots,k,1}) + \mu^u(I_{i,j,\ldots,k,2})$ e então obtemos uma medida de Borel μ^u em I. Como $\Omega(f) = M$, $\mathcal{F}^s$ é minimal, isto é, toda folha de $\mathcal{F}^s$ é densa, segue que μ^u é não atômica e positiva em conjuntos abertos não-vazios, e além disso μ^u define uma medida transversa $\mu^u = \{\mu_I^u\}$ invariante para $\mathcal{F}^s$. Portanto, vale *1.*.

Se I é um arco ilimitado em uma variedade instável, então usando o fato que $f : M \to M$ é topologicamente mixing, pois $\Omega(f) = M$, temos que I é denso em M, o que implica que $\mu_I(I) = \infty$. A recíproca é clara. Assim, obtemos *2.*. □

Agora, denotemos por $[x, y]$ o arco em $W^u(x)$ com pontos extremos sendo x e y. Seja $z \in W^u(y)$ tal que

$$\mu^u([p, x]) = \mu^u([y, z])$$

e a orientação de p para x seja consistente com a orientação de y para z, onde p é o ponto fixo de f considerado no começo desta seção.

Lema 3.2.2. *Existe um único $z \in W^u(y)$ tal que*

$$\mu^u([p,x]) = \mu^u([y,z])$$

e a orientação de p para x seja consistente com a orientação de y para z. Além disso, $z \in W^s(x)$.

Demonstração. Suponha que z' e z satisfazem as condições acima, então $\mu^u([z',z]) = 0$, como μ^u dá valores positivos em conjuntos abertos, só poderia acontecer $z = z'$. Agora, supondo que $z \notin W^s(x)$ então $W^s(x)$ intersecta $[y,z]$ (caso 1) ou intersecta $W^u(y)$ acima de z (caso 2):

Caso 1. Seja $w \in W^s(x) \cap [y,z]$. Assim, teremos $\mu^u[y,z]$ é estritamente maior que $\mu^u[y,w]$, que por sua vez é igual a $\mu^u([p,x])$, pois μ^u é invariante por $\mathcal{F}^s$, mas isso é um absurdo.

Caso 2. Seja $w \in W^s(x) \cap W^u(y)$ acima de z. Assim, teremos $\mu^u([y,w])$ é estritamente maior que $\mu^u([y,z])$, mas $\mu^u([y,w]) = \mu^u([p,x])$ novamente pela invariância de μ^u sobre $\mathcal{F}^s$, caímos outra vez em um absurdo.

□

Lema 3.2.3. *A aplicação $\pi_p : W^u(p) \times W^s(p) \to M$ dada por $z = \pi_p(x,y)$ está bem definida e é contínua.*

Demonstração. A boa definição de π_p segue do Lema 3.2.2 e como $[y, \pi_p(x,y)]$ está contido em uma vizinhança produto e μ^u é preservada por projeções ao longo de $\mathcal{F}^s$, temos que π_p é contínua. □

Defina $\widetilde{M} := W^u(p) \times W^s(p)$. Note que como f é um difeomorfismo de Anosov de codimensão 1, então as folheações estável e instável estão em estrutura produto, logo $W^u(p) \times W^s(p) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$. mostrar o isomorfismo

Lema 3.2.4. *A aplicação $\pi_p : \widetilde{M} \to M$ é um recobrimento universal para M.*

Demonstração. Por 3.2.3, π_p é contínua. Seja $z \in M$. Considere $\mathcal{V}_\varepsilon(z)$ a vizinhança produto local de z. Claramente $\pi_p^{-1}(\mathcal{V}_\varepsilon(z))$ é uma união disjunta de abertos em $\widetilde{M}$. □

Lema 3.2.5. *A aplicação $F : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ por $F := f|_{W^u(p)} \times f|_{W^s(p)}$ é um levantamento de f por π_p.*

Demonstração. Seja $(x,y) \in W^u(p) \times W^s(p)$, queremos ver que $\pi_p \circ F(x,y) = f \circ \pi_p(x,y)$. Temos $\pi_p \circ F(x,y) = \pi_p(f|_{W^u(p)}(x), f|_{W^s(p)}(y)) = z' \in W^s(f(x)) \cap W^u(f(y))$ e $\mu^u([p,f(x)]) = \mu^u([f(y),z'])$. Por outro lado, $f \circ \pi_p(x,y) = f(z)$, onde $z = \pi_p(x,y)$, como $z \in W^s(x) \cap W^u(y)$ então $f(z) \in W^s(f(x)) \cap W^u(f(y))$, pela invariância de μ^u ao longo das folhas estáveis e por $f(z) \in W^s(f(x))$, $f(y) \in W^s(f(p)) = W^s(p)$ e $f(x) \in W^u(f(p)) = W^u(p)$, temos $\mu^u([p,f(x)]) = \mu^u([f(y),f(z)])$, pela unicidade de z' então $z' = f(z)$ e μ^u é positiva em abertos, portanto vale a igualdade desejada. □

Lema 3.2.6. *$\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}^m$ para algum m:*

Demonstração. Seja $\alpha \in \pi_1(M)$ e $x \in W^u(p)$ e denote por $\widetilde{\alpha} \in W^u(p)$ a primeira coordenada de $\alpha(x,p)$ em $\widetilde{M} = W^u(p) \times W^s(p) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Então, segue que $\mu^u(I) = \mu^u(\widetilde{\alpha}(I))$ se I é um arco em $W^u(p)$. Portanto, $\widetilde{\alpha} : W^u(p) \to W^u(p)$ pode ser considerada sendo uma translação em $\mathbb{R}$, o que implica que $\{\widetilde{\alpha} \mid \alpha \in \pi_1(M)\}$ é um subgrupo das translações em $\mathbb{R}$ e é finitamente gerado, uma vez que M é compacta (Proposição 1.1.1), consequentemente, é um grupo abeliano livre [1], logo é isomorfo a $\mathbb{Z}^m$ para algum m. Seja $\widetilde{\alpha}$ a identidade, e seja $q \in W^u(p)$. Como a restrição $\pi_p : \{q\} \times W^s(p) \to W^s(q)$ é um recobrimento e pelo fato que $W^s(q)$ é simplesmente conexo temos que α é identidade. Portanto, $\pi_1(M) = \{\widetilde{\alpha} \mid \alpha \in \pi_1(M)\}$ e assim $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}^m$.

Observação 3.2.1. *Como $\{\widetilde{\alpha}(p) \mid \alpha \in \pi_1(M)\}$ é denso em $W^u(p)$, podemos considerar $f : W^u(p) \to W^u(p)$ sendo uma aplicação linear, isto é, existe uma constante $0 < \lambda < 1$ tal que $\mu^u(f(I)) = \lambda^{-1}\mu^u(I)$ para todo arco I em $W^u(p)$.*

Lema 3.2.7. *Para $L > 0$ existe $\delta_L > 0$ tal que qualquer L-pseudo-órbita $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ de F é δ_L-sombreado por algum ponto de $\widetilde{M}$ com respeito à métrica $\widetilde{d}$.*

Demonstração. Tome $L > 0$ fixo e seja $\{x_i = (x_i^1, x_i^2)\}$ uma L-pseudo-órbita, isto é, $\widetilde{d}(F(x_i), x_{i+1}) = d((f|_{W^u(p)}(x_i^1), f|_{W^s(p)}(x_i^2)), (x_{i+1}^1, x_{i+1}^2)) < L,\ \forall i \in \mathbb{Z}$. Seja $\{x_i^1\}$ a sequência de pontos em $W^u(p)$ tal que cada x_i^1 é a primeira coordenada de x_i em $\widetilde{M}$. Existe $c > 0$ tal que

$$\mu^u([f(x_i^1), x_{i+1}^1]) < c,\ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Se $x_0^i = f^{-i}(x_i^1)$ para $i \geqslant 0$

$$\mu^u([x_0^i, x_0^{i+1}]) = \mu^u([f^{-i}(x_i^1), f^{-i-1}(x_{i+1}^1)]) = \lambda^{i+1}\mu^u([f(x_i^1), x_{i+1}^1]) < c\lambda^{i+1}$$

e então $\{x_0^i\}_{i \geqslant 0}$ é sequência de Cauchy. Seja x^u o ponto limite. E para $i \leqslant 0$ escolha $z_i \in \{f^i(x^u)\} \times W^s(p)$ tal que $\widetilde{d}(z_i, x_i) < c',\ c' > 0$ constante.

Note que $\{f^{-i}(z_i)\}$ é uma sequência de Cauchy em $\{x^u\} \times W^s(p)$. Seja z um ponto limite desta sequência.

Então, $\widetilde{d}(F^i(z), x_i) < \delta_L,\ \forall i \in \mathbb{Z}$ para algum δ_L. □

[1] [9, p.335]: Se G é um grupo abeliano livre com uma base de m elementos, então G é isomorfo a $\mathbb{Z}^m$.

Lema 3.2.8. *Seja $c > 0$. Para $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que se $\widetilde{d}(F^i(x), F^i(y)) \leqslant c$ para todo i com $|i| \leqslant N$ então $\widetilde{d}(x, y) < \varepsilon$.*

Demonstração. Para $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \widetilde{M}$, seja $z(x, y) = (x_1, y_2) \in \widetilde{M}$ e escolha $K > 0$ tal que se $\widetilde{d}(x, y) \leqslant c$ então $\widetilde{d}^s(x, z(x, y)) \leqslant K$ e $\widetilde{d}^u(y, z(x, y)) \leqslant K$ onde $\widetilde{d}^s,\ \widetilde{d}^u$ são as métricas para $\{x_1\} \times W^s(p)$ e $W^u(p) \times \{y_2\}$ respectivamente induzidas pela métrica Riemanniana em $\widetilde{M}$. Se $\widetilde{d}(F^{-N}(x), F^{-N}(y)) \leqslant c$ então

$$\widetilde{d}(F^{-N}(x), z(F^{-N}(x), F^{-N}(y))) \leqslant K,$$

mas como $F(\widetilde{W}^u(x)) = \widetilde{W}^u(F(x)), \forall x \in \widetilde{M}$ temos que $F^{-N}(z(x, y)) = z(F^{-N}(x), F^{-N}(y))$, logo, $\widetilde{d}(F^{-N}(x), F^{-N}(z(x, y))) \leqslant K$, o que implica que $\widetilde{d}(x, z(x, y)) \leqslant Kc\lambda^N$, onde c e λ são constantes na definição de difeomorfismo de Anosov. □

Teorema 3.2.1 (Franks [10])**.** *Se um difeomorfismo de Anosov $f : M \to M$ é de codimensão 1 com um ponto fixo e $\Omega(f) = M$ então f é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico no Toro.*

Demonstração. Suponha $dim\ \mathcal{F}^u = 1$ e $\mathcal{F}^u$ orientado. Considere p um ponto fixo de f. Seja $F_* : \pi_1(M) \to \pi_1(M)$ o isomorfismo induzido por F. Então,

$$F \circ \alpha = F_*(\alpha) \circ F,\ \forall \alpha \in \pi_1(M). \tag{3.2}$$

Por definição,

$$f \circ \widetilde{\alpha} = \widetilde{F_*(\alpha)} \circ f,\ \forall \alpha \in \pi_1(M).$$

Seja $\phi : \mathbb{Z}^m \to \pi_1(M)$ o isomorfismo vindo de 3.2.6 e defina $A : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$ por $A = \phi^{-1} \circ F_* \circ \phi$. Denote por $\varphi_A : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ o automorfismo no toro induzido por A. Seja $\widetilde{d}$ o pull back da métrica d para M por π_p. Usaremos a mesma notação para A e para sua extensão para o $\mathbb{R}^m$.

Para construir uma conjugação topológica entre f e φ_A, defina uma bijeção

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{Z}^m & \to & \pi_p^{-1}(p) \subset \widetilde{M} \\ \alpha(0) & \mapsto & \phi(\alpha)(p, p) \end{array}$$

onde $\mathbb{Z}^m$ é um lattice de $\mathbb{R}^m$ e $\pi_p^{-1}(p)$ um lattice de $\widetilde{M}$. Então, dado $\alpha(0) \in \mathbb{Z}^m$ usando 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} F|_{\pi_p^{-1}(p)} \circ \Phi(\alpha(0)) = F|_{\pi_p^{-1}(p)} \circ \phi(\alpha)(p, p) = F_*(\phi(\alpha)) \circ F(p, p) = F_*(\phi(\alpha))(p, p) \\ \Rightarrow F|_{\pi_p^{-1}(p)} \circ \Phi(\alpha(0)) = F_*(\phi(\alpha))(p, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi \circ A(\alpha(0)) = \Phi \circ \phi^{-1} \circ F_* \circ \phi(\alpha(0)) = \phi \circ \phi^{-1} \circ F_* \circ \phi(\alpha)(p, p) = F_* \circ \phi(\alpha)(p, p) \\ \Rightarrow \Phi \circ A(\alpha(0)) = F_* \circ \phi(\alpha)(p, p), \end{aligned}$$

isto é, $F|_{\pi_p^{-1}(p)} \circ \Phi = \Phi \circ A|_{\mathbb{Z}^m}$.

Seja $x \in \mathbb{R}^m$ e tome a órbita $\{A^i(x)\}$. Seja $c > \sqrt{dim\ M}/2 = \sqrt{m}/2$ e escolha uma sequência $\{x_i = \alpha_i(0)\}$ em $\mathbb{Z}^m$ tal que $\|A^i(x) - x_i\| < c\ \forall i \in \mathbb{Z}$, onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana. Assim, $\{\Phi(x_i)\}$ é uma L-pseudo-órbita de F para algum $L > 0$. Pela propriedade 3.2.7, existe $\delta_L > 0$ tal que $\widetilde{d}(F^i(y), \Phi(x_i)) < \delta_L$ para algum $y \in \widetilde{M}$. Segue da demonstração de 3.2.7 que o y encontrado acima é único δ_L-sombreando a L-pseudo órbita $\{\Phi(x_i)\}$. Consequentemente, a aplicação $H : \mathbb{R}^m \to \widetilde{M}$ dada por $H(x) = y$ está bem definida.

Afirmação 1. H é uma extensão de Φ: Seja $x = \alpha(0) \in \mathbb{Z}^m$. Note que $x_i = A^i(x)$ satisfaz $\|A^i(x) - x_i\| < c\ \forall i \in \mathbb{Z}$, então considerando a L-pseudo órbita $\{\Phi(A^i(x))\}$, vai existir o δ_L. Como $F|_{\pi_p^{-1}} \circ \Phi = \Phi \circ A|_{\mathbb{Z}^m}$ temos $\widetilde{d}(F^k(\Phi(x)), \Phi(A^k(x)) = \widetilde{d}(\Phi(A^k(x)), \Phi(A^k(x))) = 0$. Portanto, $\Phi(x)$ δ_L-sombreia $\{\Phi(A^i(x))\}$. Pela unicidade do sombreamento, $H(x) = \Phi(x)$.

Afirmação 2. $F \circ H = H \circ A$ e além disso, $H \circ \alpha = \phi(\alpha) \circ H,\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}^m$: Seja $x \in \mathbb{R}^m$. Considere $\{x_i\} \subset \mathbb{Z}^m$ satisfazendo $\|A^i(x) - x_i\| < c\ \forall i \in \mathbb{Z}$ e x' o δ_L-sombreamento de $\{\Phi(x_i)\}$. Note que se considerarmos $A(x)$, a sequência $\{x_{i+1}\}$ satisfaz $\|A^i(A(x)) - x_{i+1}\| < c\ \forall i \in \mathbb{Z}$ e como x' δ_L-sombreia $\{\Phi(x_i)\}$, temos $d(F^k(F(x')), \Phi(x_{k+1}) < \delta_L$, novamente pela unicidade do sombreamento, $H(A(x)) = F(x')$.

Afirmação 3. H é contínua: Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 3.2.8 para $2\delta_L$ existe $N > 0$ tal que se $\widetilde{d}(F^i(a), F^i(b)) \leqslant 2\delta_L$ para todo $|i| \leqslant N$ então $\widetilde{d}(a, b) < \varepsilon$. Fixe $x \in \mathbb{R}^m$ arbitrário. Primeiramente considere x_i tal que $\|A^i(x) - x_i\| < c, \forall i$ e seja $\{\Phi(x_i)\}$ a L-pseudo-órbita, existe $\delta_L > 0$ tal que $\widetilde{d}(F^i(H(x)), \Phi(x_i)) < \delta_L,\ \forall i \in \mathbb{Z}$. Pela continuidade e linearidade de A, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - y\| < \delta$ então $\|A^i(y) - x_i\| < c,\ \forall |i| \leqslant N$. Consequentemente, para y com $\|x - y\| < \delta$ temos

$$\widetilde{d}(F^i(H(x)), F^i(H(y))) \leqslant \widetilde{d}(F^i(H(x)), \Phi(x_i)) + \widetilde{d}(\Phi(x_i), F^i(H(y))) \leqslant 2\delta_L,\ \forall |i| \leqslant N$$

o que implica $\widetilde{d}(H(x), H(y)) < \varepsilon$.

Afirmação 4. H é própria, ou seja, imagem inversa de compacto por H é compacta: Seja $K \subset \widetilde{M}$ compacto. Pela continuidade de H, temos que $H^{-1}(K)$ é fechado. Suponha que $H^{-1}(K)$ não é limitado, então $x_n \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|x_n\| \to \infty, n \to \infty$ e $H(x_n) \in K$. Como K é compacto então $H(x_n) \to y_0 \in K$, x_0 e x_N estão bem longes para N grande, mas $H(x_0)$ e $H(x_N)$ não podem estar muito longes, o que é um absurdo.

Afirmação 5. A é hiperbólica: Vamos supor por absurdo que λ, com $|\lambda| = 1$ é um autovalor de A. Então para algum $x \in \mathbb{R}^m$ vale $A(x) = \lambda x$ e portanto $\|A^i(x)\| = |\lambda|^i\|x\| = \|x\|,\ \forall i \in \mathbb{Z}$, isto significa que $\{A^i(x)\}$ é limitada e portanto $H(x) = 0$. Note que isto vale para todo autovetor correspondente ao autovalor λ. Assim, o autoespaço relacionado a λ, está contido em $H^{-1}(0)$ que é compacto, pelo item acima, o que é um absurdo. Logo, A não possui autovalores de norma 1, o que significa que A é hiperbólica.

Como A é hiperbólica, os Lemas 3.2.7 e 3.2.8 valem para A. Assim, da mesma maneira como acima, podemos construir uma aplicação contínua $H' : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^m$ tal que $A \circ H' = H' \circ F$ e $H' \circ \alpha = \phi^{-1}(\alpha) \circ H'$, $\forall \alpha \in \pi_1(M)$. Portanto, H é um homeomorfismo e projetado para uma conjugação entre f e φ_A.

No caso onde $\mathcal{F}^u$ não é orientável, escolha uma cobertura dupla $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{M}$ para $f : M \to M$ tal que a folheação instável $\overline{\mathcal{F}}^u$ de f seja orientável. Pelo resultado acima, $\overline{f}$ é topologicamente conjugado a um automorfismo hiperbólico no toro. □

4 Sombreamento no limite para aplicações expansivas

Neste capítulo trabalharemos com propriedade de sombreamento no limite bilateral para difeomorfismos de Anosov. Também Introduziremos a noção de tal propriedade para endomorfismos de Anosov. Na primeira seção, veremos uma condição necessária e suficiente para que um difeomorfismo de Anosov seja transitivo e outra para que um difeomorfismo de Anosov tenha a estrutura de produto global. Mostraremos também que a propriedade de estrutura de produto global implica transitividade. Uma ideia para um próximo trabalho é provar esta implicação para endomorfismo de Anosov usando esta teoria de sombreamento. As referências usadas para este capítulo são [5] e [6].

Considere um difeomorfismo $f : M \to M$, onde M é uma variedade Riemanniana compacta e conexa.

Uma **pseudo-órbita no limite** em M é uma sequência $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} d(f(x_i), x_{i+1}) = 0.$$

Uma pseudo-órbita limite $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ é **sombreada no limite** por um ponto $y \in M$ se

$$\lim_{i\to\infty} d(x_i, f^i(y)) = 0.$$

Analogamente, definimos uma **pseudo-órbita no limite negativo** em M como sendo uma sequência $(x_{-i})_{i=0}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} d(f(x_{-i}), x_{-i-1}) = 0.$$

Uma pseudo-órbita limite negativo $(x_{-i})_{i=0}^{\infty}$ é **sombreada no limite ne-gativo** por um ponto $y \in M$ se

$$\lim_{i\to\infty} d(x_{-i}, f^{-i}(y)) = 0.$$

Dizemos que f tem a **propriedade de sombreamento no li-mite** se toda pseudo-órbita no limite $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ é sombreada no limite. E se toda pseudo-órbita no limite negativo $(x_i)_{i=-\infty}^{0}$ é sombreada no limite, dizemos que f tem a **propriedade de sombreamento no limite negativo**.

Lema 4.0.1. *Se f é um homeomorfismo definido em uma variedade compacta M e $\widetilde{f}$ é qualquer levantamento de f para o recobrimento universal $\widetilde{M}$ então $\widetilde{f}$ tem a propriedade de sombreamento no limite se, e somente se, f também tem.*

Demonstração. Suponha que $\widetilde{f}$ tem a propriedade de sombreamento no limite e considere $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ uma pseudo-órbita no limite para f. Se $\pi : \widetilde{M} \to M$ é a aplicação de recobrimento então é uma isometria local, isto é, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $x \in \widetilde{M}$, π aplica a ε_0-vizinhança de x isometricamente sobre a ε_0-vizinhança de $\pi(x)$. Para este ε_0 seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon_0,\ k \geqslant N.$$

Note que $\varepsilon_0 < min\{d(\widetilde{x}, \widetilde{y}),\ x \in M,\ \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \pi^{-1}(x),\ \widetilde{x} \neq \widetilde{y}\}$. Então, para cada escolha de $y_N \in \pi^{-1}(x_N)$ existe uma única pseudo-órbita no limite $(y_k)_{k\geqslant N}$ de $\widetilde{f}$ tal que $y_k \in \pi^{-1}(x_k)$ e $d(\widetilde{f}(y_k), y_{k+1}) < \varepsilon_0$ para qualquer $k \geqslant N$. Como $\widetilde{f}$ tem a propriedade de sombreamento no limite, existe $z \in \widetilde{M}$ que sombreia no limite $(y_k)_{k\geqslant N}$. Portanto, $\pi(\widetilde{f}^{-N}(z))$ sombreia no limite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Como isto vale para toda pseudo-órbita no limite, isto segue que f tem a propriedade de sombreamento no limite.

Para a recíproca, suponhamos que f tem a propriedade de sombreamento no limite e considere $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{M}$ uma pseudo-órbita no limite de $\widetilde{f}$. Como π é contínua a sequência $(\pi(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ é uma pseudo-órbita no limite de f e é sombreado por algum ponto $z \in M$. Escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^k(z), \pi(x_k)) < \varepsilon_0,\ k \geqslant N.$$

Existe um único ponto $\widetilde{z} \in \pi^{-1}(f^N(z))$ tal que $d(\widetilde{z}, x_N) < \varepsilon_0$. É claro que $\widetilde{f}^{-N}(z)$ é o sombreamento de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Definição 4.0.1. *Dizemos que f tem* propriedade de sombreamento no limite bilateral*, se para toda sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset X$ satisfazendo*

$$\lim_{|k|\to\infty} d(f(x_k), x_{k+1}) = 0$$

existe $z \in X$ satisfazendo

$$\lim_{|k|\to\infty} d(f^k(z), x_k) = 0.$$

A sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ é chamada uma ***pseudo-órbita no limite bilateral*** *e dizemos que ela é f-**sombreada no limite bilateral**.*

Dizemos que f tem ***propriedade de sombreamento no limite bilateral*** *quando toda pseudo-órbita no limite bilateral é sombreada no limite bilateral. Se o sombreamento é único, ou seja, se cada pseudo-órbita no limite bilateral é sombreada no limite bilateral por um único ponto, dizemos que f tem* ***propriedade de sombreamento único no limite bilateral**.*

Lema 4.0.2. *Todo homeomorfismo expansivo $f : M \to M$ com a propriedade de sombreamento tem as propriedades de sombreamento no limite e no limite negativo.*

Demonstração. Como f é expansivo existe $\varepsilon > 0$ tal que $W^s_\varepsilon(y) \subset W^s(y)$ e $W^u_\varepsilon(y) \subset W^u(y)$ para todo $y \in M$ (2.1.2). Escolha $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$ tal que toda δ-pseudo órbita seja ε-sombreada. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma pseudo-órbita no limite. Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \frac{\delta}{j},\ n > n_j.$$

A propriedade de sombreamento nos assegura a existência de pontos $y_j \in M$ tal que

$$d(f^n(y_j), x_n) < \frac{\delta}{j},\ n > n_j.$$

Afirmamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sombreado no limite por y_1. De fato,

$$d(f^n(y_1), f^n(y_j)) \leqslant d(f^n(y_1), x_n) + d(x_n, f^n(y_j)) < 2\delta < \varepsilon,\ n > n_j.$$

Pela escolha de ε obtemos

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(y_1), f^n(y_j)) = 0$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Isto implica que

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(y_1), x_n) = 0.$$

Portanto, toda pseudo-órbita no limite é sombreada no limite e assim, f tem a propriedade de sombreamento no limite. Podemos similarmente provar que f tem a propriedade de sombreamento no limite negativo. □

Lema 4.0.3. *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo com a propriedade de sombreamento no limite bilateral, então $W^s(x) \cap W^u(y) \neq \varnothing$ para todo $x, y \in M$.*

Demonstração. Considere a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, onde $x_n = \begin{cases} f^n(y), & n \leqslant 0; \\ f^n(x), & n > 0. \end{cases}$

Como $d(f(x_n), x_{n+1}) = 0$ para todo $n > 0$ e $n < 0$ então esta sequência é uma pseudo-órbita no limite bilateral. Pela propriedade de sombreamento no limite bilateral, existe $z \in M$ tal que $\lim\limits_{|n|\to\infty} d(f^n(z), x_n) = 0$, isto é,

$$\lim_{n\to-\infty} d(f^n(z), f^n(y)) = 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(z), f^n(x)) = 0.$$

Isto implica que $z \in W^s(x) \cap W^u(y)$. □

Lema 4.0.4. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo com a propriedade de sombreamento no limite bilateral e $\Lambda \subset M$ um conjunto atrator para f. Se U é uma vizinhança de Λ tal que $f(\overline{U}) \subset U$ e $\Lambda = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$ então, para cada $y \in M$, existe um natural N_y tal que $f^n(y) \in U$ para todo n a partir de N_y.*

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$. Pelo Lema 4.0.3 existe $z \in W^u(x) \cap W^s(y)$. Como $x \in \Lambda$ e Λ é um conjunto atrator, temos que $W^u(x) \subset \Lambda$, então $z \in \Lambda$. Como Λ é invariante, $f^n(z) \in \Lambda$ para todo n e como $z \in W^s(y)$ temos, dado $\varepsilon > 0$ de tal forma que ε-vizinhança de Λ esteja contida em U existe N natural tal que $d(f^n(z), f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \geqslant N$.

Proposição 4.0.1. *Se um homeomorfismo $f : M \to M$ com a propriedade de sombreamento no limite bilateral tem um conjunto atrator Λ, então $M = \Lambda$.*

Demonstração. Tome uma vizinhança U de Λ com $f(\overline{U}) \subset U$ e $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n(U)$. Suponha por contradição que $\Lambda \neq M$. Então $M - U \neq \varnothing$. Tomemos $V = M - U$. Isto implica que V é um subconjunto compacto não-vazio de M com $f^{-1}(V) \subset V$, assim, segue por indução que $f^{-n-1}(V) \subset f^{-n}(V)$ para todo n natural. Então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V)$ é uma interseção enumerável de conjuntos compactos encaixados e portanto é não vazia. Desta forma, podemos tomar $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(V)$ temos $y \in M$ satisfazendo $f^n(y) \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que é um absurdo, pois contraria o Lema 4.0.4. □

Para o próximo teorema precisamos introduzir a noção de especificação

Definição 4.0.2. *Um par (τ, P) é uma **especificação** se consiste de uma coleção finita $\tau = \{I_1, \ldots, I_k\}$ de intervalos $I_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{Z}$ e um mapa $P : \bigcup_{i=1}^{k} I_i \to M$ tal que para cada $t_1, t_2 \in I \in \tau$ temos*

$$f^{t_2 - t_1}(P(t_1)) = P(t_2).$$

*A especificação (τ, P) é dita ser L-*espaço *se $a_{i+1} \geqslant b_i + L$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Além disso, é ε-**sombreada** por $y \in M$ se*

$$d(f^n(y), P(n)) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \bigcup_{i=1}^{k} I_i.$$

*Dizemos que um homeomorfismo $f : M \to M$ tem a **propriedade de especificação** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $L \in \mathbb{N}$ tal que todo L-espaço de especificação é ε-sombreado.*

Proposição 4.0.2. *Se $f : M \to M$ é um difeomorfismo de Anosov transitivo então f tem a propriedade de especificação.*

Demonstração. Ver [19].

Teorema 4.0.1. *[5] Um difeomorfismo de Anosov definido em uma variedade compacta e conexa é transitivo se, e somente se, tem propriedade de sombreamento no limite bilateral.*

Demonstração. Suponha que f é um difeomorfismo de Anosov com a propriedade de sombreamento no limite bilateral. Pelo Teorema da Decomposição Espectral 2.3.1, podemos decompor o conjunto não-errante $\Omega(f)$ em um número finito de peças básicas tal que f restrito a cada peça básica é transitivo. Sabemos da Observação 2.3.3 que devemos ter uma peça básica sendo um conjunto atrator, pela Proposição 4.0.1 esta peça básica é toda a variedade e portanto, f será transitivo.

Agora, suponha que f é um difeomorfismo de Anosov transitivo. Pelo Teorema 2.2.1 f é topologicamente mixing e portanto tem a propriedade de especificação. Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma pseudo órbita no limite bilateral. O Lema 4.0.2 nos garante que f tem as propriedades de sombreamento no limite e no limite negativo. Então existem dois pontos $p_1, p_2 \in X$ tal que

$$\lim_{n\to-\infty} d(f^n(p_1), x_n) = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} d(f^n(p_2), x_n) = 0.$$

Pela expansividade da f, existe $\varepsilon > 0$ tal que $W^s_\varepsilon(y) \subset W^s(y)$ e $W^u_\varepsilon(y) \subset W^u(y)$ para todo $y \in M$. Como f tem a propriedade de especificação, obtemos $\delta > 0$ e $L \in \mathbb{N}$ tal que toda δ-pseudo órbita é ε-sombreada e todo L-espaço de especificação é δ-sombreado. Escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $2N \geqslant L$, $d(f^{-n}(p_1), x_{-n}) < \delta$ e $d(f^n(p_2), x_n) < \delta$ para todo $n \geqslant N$. Defina $I_1 = \{-N\}$, $I_2 = \{N\}$, $P(-N) = f^{-N}(p_1)$ e $P(N) = f^N(p_2)$. Então $(\{I_1, I_2\}, P)$ é um L-espaço de especificação e existe um ponto $z \in M$ satisfazendo

$$d(f^{-N}(z), f^{-N}(p_1)) = d(f^{-N}(z), P(-N)) < \delta$$

e

$$d(f^N(z), f^N(p_2)) = d(f^N(z), P(N)) < \delta.$$

Desta forma, a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por

$$y_n = \begin{cases} f^n(p_1), & n \leqslant -N \\ f^n(z), & -N < n < N \\ f^n(p_2), & n \geqslant N \end{cases}$$

é uma δ-pseudo órbita. Então existe um ponto $y \in M$ tal que

$$d(f^n(y), f^n(p_1)) < \varepsilon \ \forall n \leqslant -N \text{ e } d(f^n(y), f^n(p_2)) < \varepsilon \ \forall n \geqslant N.$$

Pela escolha de ε obtemos,

$$\lim_{n\to-\infty} d(f^n(y), f^n(p_1)) = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} d(f^n(y), f^n(p_2)) = 0.$$

Pela escolha de p_1 e p_2 temos, $\lim_{|n|\to\infty} d(f^n(y), x_n) = 0$. □

Teorema 4.0.2. *[5] Um difeomorfismo de Anosov tem estrutura de produto global se, e somente se, um levantamento para o recobrimento universal tem a propriedade de sombreamento único no limite bilateral.*

Demonstração. Suponha que f é um difeomorfismo de Anosov e $\widetilde{f}$ é um de seus levantamentos para o recobrimento universal com propriedade de sombreamento único no limite bilateral e que f não tem estrutura de produto global, então $\widetilde{W}^s(x) \cap \widetilde{W}^u(y) = \varnothing$ ou existem $x, y \in M$ tais que $\widetilde{W}^s(x), \widetilde{W}^u(y)$ se intersectam em mais de um ponto, digamos $p, q \in \widetilde{W}^s(x) \cap \widetilde{W}^u(y)$.

Para o primeiro caso, note que a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, dada por

$$x_k = \begin{cases} \widetilde{f}^k(x), \ k \geqslant 0 \\ \widetilde{f}^k(p), \ k < 0 \end{cases}$$

é uma pseudo-órbita no limite bilateral de $\widetilde{f}$ que é sombreada no limite bilateral por p. Além disso, toda pseudo-óbita no limite bilateral sombreada no limite bilateral por p é também sombreada no limite bilateral por q, o que implica que $p = q$, o que é uma contradição. De fato, seja $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ uma pseudo-órbita no limite bilateral tal que p é seu sombreamento no limite bilateral, isto é,

$$\lim_{|k|\to\infty} d(\widetilde{f}^k(p), x_k) = 0.$$

Temos:

$$d(\widetilde{f}^k(q), \widetilde{f}^k(p)) \leqslant d(\widetilde{f}^k(q), \widetilde{f}^k(x)) + d(\widetilde{f}^k(x), \widetilde{f}^k(p)) \to 0, \ k \to \infty$$

e

$$d(\widetilde{f}^k(q), \widetilde{f}^k(p)) \leqslant d(\widetilde{f}^k(q), \widetilde{f}^k(y)) + d(\widetilde{f}^k(y), \widetilde{f}^k(p)) \to 0, \ k \to -\infty.$$

O que implica, $\lim_{|k|\to\infty} d(\widetilde{f}^k(p), \widetilde{f}^k(q)) = 0$ e assim, $\lim_{|k|\to\infty} d(\widetilde{f}^k(p), x_k) = 0$, pois

$$d(\widetilde{f}^k(q), x_k) \leqslant d(\widetilde{f}^k(q), \widetilde{f}^k(p)) + d(\widetilde{f}^k(p), x_k) \to 0, \ |k| \to \infty.$$

Para o segundo caso, temos que a pseudo-órbita no limite bilateral $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ com

$$x_k = \begin{cases} \widetilde{f}^k(x), \ k \geqslant 0 \\ \widetilde{f}^k(y), \ k < 0 \end{cases}$$

não tem sombreamento no limite bilateral, caso contrário este sombreamento claramente estaria em $\widetilde{W}^s(x) \cap \widetilde{W}^u(y)$, o que é um absurdo. Portanto, f é um difeomorfismo de Anosov com estrutura de produto global.

Para a recíproca, considere $\widetilde{f}$ um levantamento qualquer de f para o seu recobrimento universal e $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ pseudo-órbita no limite bilateral de $\widetilde{f}$. Como f é um difeomorfismo de Anosov, então f tem a propriedade de sombreamento no limite e o Lema 4.0.1 assegura que $\widetilde{f}$ também tem esta propriedade. Então existem dois pontos $z_1, z_2 \in \widetilde{M}$, satisfazendo

$$\lim_{k\to-\infty} d(\widetilde{f}^k(z_1), x_k) = 0 \text{ e } \lim_{k\to\infty} d(\widetilde{f}^k(z_2), x_k) = 0.$$

Como f é um difeomorfismo de Anosov pcom estrutura de produto global existe um único ponto $z \in \widetilde{W}^u(z_1) \cap \widetilde{W}^s(z_2)$. □

Observação 4.0.1. *Levando em conta o Teorema de Newhouse, isto é, os conjunto dos pontos não-errantes para um difeomorfismo de Anosov em uma variedade compacta e conexa, é toda a variedade, os Teoremas 4.0.1 e 2.2.1 nos garantem que os difeomorfismos de Anosov de codimensão* 1 *têm a propriedade de sombreamento no limite bilateral.*

Teorema 4.0.3. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de Anosov com estrutura de produto global. Então f é transitivo.*

Demonstração. Sejam U, V abertos quaisquer não vazios de M e considere $x \in U$ e $y \in V$. Tome $\varepsilon > 0$ de tal forma que $B(x, \varepsilon) \subset U$ e $B(y, \varepsilon) \subset V$. Como M é compacta, então os conjuntos limites $\omega(x)$ e $\alpha(y)$ são não vazios (Proposição 1.3.1), portanto existem $z_1 \in \omega(x)$ e $z_2 \in \alpha(y)$. Desta forma, existem subconjuntos $\mathbb{N}', \mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ tais que

$$\lim_{n_i\to\infty} d(f^{n_i}(z_1), x) = 0,\ n_i \in \mathbb{N}' \text{ e } \lim_{m_j\to\infty} d(f^{-m_j}(z_2), y) = 0,\ m_j \in \mathbb{N}''.$$

Seja $N_1, M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_i}(z_1), x) < \varepsilon/2$ e $d(f^{-m_j}(z_2), y) < \varepsilon/2$ para todo $n_i \geqslant N_1$ e $m_j \geqslant M_1$. Como f tem estrutura de produto global, então $W^s(z_1) \cap W^u(z_2) \neq \varnothing$. Tome $z \in W^s(z_1) \cap W^u(z_2)$, assim,

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(z), f^n(z_1)) = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(z), f^{-n}(z_2)) = 0.$$

Logo, existe $N_0 > 0$ tal que $d(f^n(z), f^n(z_1)) < \varepsilon/2$ e $d(f^{-n}(z), f^{-n}(z_2)) < \varepsilon/2$ para todo $n \geqslant N_2$. Tomando $N = \min\{n \in \mathbb{N}' \mid n \geqslant \max\{N_0, N_1\}\}$ e $M = \min\{n \in \mathbb{N}'' \mid n \geqslant \max\{N_0, M_1\}\}$ obtemos, $f^N(z) \in B(x, \varepsilon) \subset U$ e $f^{-M}(z) \in B(y, \varepsilon) \subset V$ e consequentemente $f^N(z) \in U \cap f^{N+M}(V)$. Portanto, f é transitiva. □

5 Considerações Finais

Agora com as ferramentas adquiridas ao longo do estudo desta dissertação, temos como objetivo trabalhar com um outro conceito que são os endomorfismos de Anosov. Um endomorfismo (difeomorfismo local) $f : M \to M$ é um *endomorfismo de Anosov* se para todo x e para toda sequência $\widehat{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que $f(x_i) = x_{i+1}$ com $x_0 = x$, existe uma decomposição do espaço tangente $T_{x_i}M = E^s(x_i) \oplus E^u(x_i)$ tal que $Df_{x_i}|_{E^s(x_i)}$ é uma contração uniforme e $Df_{x_i}|_{E^u(x_i)}$ é uma expansão uniforme.

Podemos notar que os espaços instáveis obtidos de um endomorfismo de Anosov depende da escolha da órbita passada de cada ponto. Podendo assim existir infinitas variedades instáveis, o que torna a teoria mais delicada do que a que vínhamos trabalhando.

Temos interesse em "estender"os resultados estudados na seção 4.1, bem como tentar provar o que segue:

"Todo endomorfismo de Anosov que tem estrutura de produto global é transitivo."

que seria um resultado variante do Teorema 4.0.3. Para tanto precisaremos definir o que significa um endomorfismo de Anosov ter estrutura de produto global e ter propriedade de sombreamento no limite bilateral.

Um caso particular de endomorfismos de Anosov são os quais as direções instáveis independe da escolha de órbita passada de qualquer ponto, ou seja, para cada ponto existe uma única decomposição do espaço tangente da variedade satisfazendo as condições citadas no primeiro parágrafo, este recebe o nome de endomorfismo de Anosov especial. Uma pergunta natural a ser feita para este caso é:

"Todo endomorfismo de Anosov especial toral pode ser conjugado a um endomorfismo hiperbólico toral?

Referências

[1] Aoki, N., and Hiraide, K. *Topological theory of dynamical systems*, vol. 52 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1994. Recent advances.

[2] Bowen, R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, revised ed., vol. 470 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. With a preface by David Ruelle, Edited by Jean-René Chazottes.

[3] Bowen, R., and Marcus, B. Unique ergodicity for horocycle foliations. *Israel J. Math. 26*, 1 (1977), 43–67.

[4] Brin, M., and Manning, A. Anosov diffeomorphisms with pinched spectrum. In *Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980 (Coventry, 1979/1980)*, vol. 898 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin-New York, 1981, pp. 48–53.

[5] Carvalho, B. Hyperbolicity, transitivity and the two-sided limit shadowing property. *Proc. Amer. Math. Soc. 143*, 2 (2015), 657–666.

[6] Carvalho, B. Product anosov diffeomorphisms and the two-sided limit shadowing property. *Proceedings of the American Mathematical Society* (2017).

[7] de Melo, W. Topologia das variedades. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada, <http://w3.impa.br/ demelo>, acessado em 09/01/2018* (2014).

[8] do Carmo, M. P. a. *Geometria riemanniana*, vol. 10 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[9] Fraleigh, J. B. *A first course in abstract algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1967.

[10] Franks, J. Anosov diffeomorphisms. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 61–93.

[11] Hiraide, K. A simple proof of the Franks-Newhouse theorem on codimension-one Anosov diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems 21*, 3 (2001), 801–806.

[12] Hirsch, M. W., and Pugh, C. C. Stable manifolds and hyperbolic sets. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 133–163.

[13] Lima, E. L. *Fundamental groups and covering spaces*. AK Peters, 63 Avenue Natick, MA 01760, 2003.

[14] Luís, B., and Valls, C. *Teoria dos Sistemas Dinâmicos: Uma introdução*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2012.

[15] Micena, F., and Tahzibi, A. On the unstable directions and Lyapunov exponents of Anosov endomorphisms. *Fund. Math. 235*, 1 (2016), 37–48.

[16] Newhouse, S. E. On codimension one Anosov diffeomorphisms. *Amer. J. Math. 92* (1970), 761–770.

[17] Palis, J., and De Melo, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1978.

[18] Przytycki, F. Anosov endomorphisms. *Studia Math. 58*, 3 (1976), 249–285.

[19] Sigmund, K. On dynamical systems with the specification property. *Trans. Amer. Math. Soc. 190* (1974), 285–299.

[20] Smale, S. Differentiable dynamical systems. In *Proc. Internat. Congr. Math. (Moscow, 1966)*. Izdat. “Mir”, Moscow, 1968, p. p. 139.