

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Abordagem Fuzzy em Modelos Populacionais Discretos:
Metapopulação de Moscas Varejeiras

Tese de Doutorado

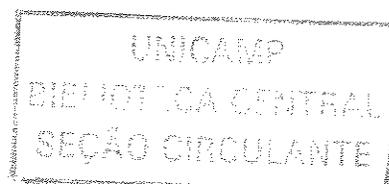
por

Karine Faverzani Magnago

200509321

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Co-orientador: Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros



Abordagem Fuzzy em Modelos Populacionais Discretos:
Metapopulação de Moscas Varejeiras

Este exemplar corresponde à redação final da
Tese devidamente corrigida, defendida por
Karine Faverzani Magnago e aprovada
pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de Março de 2005.

.....
Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Orientador

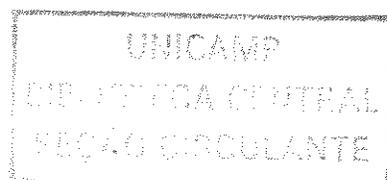
.....
Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros

Co-orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi
2. Prof. Dr. Wesley Augusto Conde Godoy
3. Prof. Dr. Laércio Luís Vendite
4. Prof. Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues
5. Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

Tese apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Computação
Científica, UNICAMP, como requisito par-
cial para obtenção do Título de DOUTOR
em Matemática Aplicada



UNIDADE	BC		
Nº CHAMADA	+UNICAMP		
	M278a		
V	EX		
TOMBO BC/	63547		
PROC.	16-0086-05		
C	<input type="checkbox"/>	D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00		
DATA	10-5-05		
Nº CPD			

818 10 - 349456

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues - CRB8a / 2116

M278a	Magnago, Karine Faverzani
M278a	Abordagem fuzzy em modelos populacionais discretos: metapopulação de moscas varejeiras / Karine Faverzani Magnago -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.
	Orientadores : Rodney Carlos Bassanezi; Laécio Carvalho de Barros
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Conjuntos difusos. 2. Teoria dos sistemas dinâmicos. 3. População - Modelos matemáticos. I. Bassanezi, Rodney Carlos. II. Barros, Laécio Carvalho de. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Fuzzy approach in discrete population models: blowfly metapopulation.

Palavras-chave em inglês (keywords): 1. Fuzzy sets. 2. Theory of dynamic systems. 3. Population - mathematical models.

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutorado em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (UNICAMP)
Prof. Dr. Wesley Augusto Conde Godoy (UNESP)
Prof. Dr. Laércio Luís Vendite (UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues (UFSM)
Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira (UNESP)

Data da defesa: 23/02/2005

Tese de Doutorado defendida em 23 de fevereiro de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). **RODNEY CARLOS BASSANEZI**



Prof. (a). Dr (a). **WESLEY AUGUSTO CONDE GODOY**



Prof. (a). Dr (a). **LAÉRCIO LUÍS VENDITE**



Prof. (a). Dr (a). **RENATA ZOTIN GOMES DE OLIVEIRA**



Prof. (a) Dr. (a) **LUIZ ALBERTO DIÁZ RODRIGUES**

*Dedico esta tese
aos meus pais
Rute e Irineu.*

Conteúdo

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	xv
Resumo	xvii
Abstract	xviii
Agradecimentos	xix
Introdução	1
1 Preliminares Fuzzy	5
1.1 Conceitos Fundamentais da Teoria de Subconjuntos Fuzzy	5
1.2 Sistemas Fuzzy Discretos	8
1.3 Introdução aos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	10
2 Equação Logística Fuzzy Discreta: Pontos Fixos e Ciclos Fuzzy	15
2.1 A Equação Fuzzy e Seus Pontos Fixos	17
2.1.1 Determinação dos Pontos Fixos Fuzzy	21
2.1.2 Análise da Estabilidade dos Pontos Fixos Fuzzy	26
2.2 Ciclos Fuzzy	31
2.3 Ciclos Fuzzy: Resultados Generalizados	35
2.4 Discussões Finais	45

3	Equação Logística Fuzzy Discreta: Simulações e Diagramas	47
3.1	A Equação Fuzzy e Sua Solução	48
3.2	Simulações	49
3.3	Diagramas	55
3.4	Discussões Finais	59
4	Revisão de Modelos para Duas Populações de Moscas Varejeiras Acopladas por Migração	61
4.1	Modelos Clássicos	62
4.1.1	Modelo Determinístico	62
4.1.2	Modelos Estocásticos	67
4.2	Modelo com Estimativa Fuzzy dos Parâmetros	68
4.2.1	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	69
4.2.2	Resultados e Discussões	71
5	Duas Populações de Moscas Varejeiras Acopladas por Migração	77
5.1	Introdução dos Modelos Matemáticos: Dois Sítios Interligados	78
5.1.1	Dinâmica Local	79
5.1.2	Migração Dirigida	80
5.2	Sistema Baseados em Regras Fuzzy	81
5.3	Modelo 1: Modelo Local	87
5.3.1	Análise do Modelo 1	90
5.3.2	Comparação entre o Modelo 1 e o Modelo Logístico Discreto	96
5.3.3	Comparação entre o Modelo 1 e o Modelo de Prout e Mc Chesney	99
5.4	Simulações: Dois Sítios Interligados	103
5.4.1	Simulações para a espécie <i>Lucilia eximia</i>	103
5.4.2	Simulações para a espécie <i>Chrysomya albiceps</i>	108
5.5	Análise do Modelo 2 (migração unilateral)	114
5.5.1	Modelo 2: Considerações para a Espécie <i>Lucilia eximia</i>	120
5.5.2	Modelo 2: Considerações para a Espécie <i>Chrysomya albiceps</i>	121

5.5.3	Modelo 2: Discussão sobre a Hipótese da Saturação	123
5.6	Análise do Modelo 3 (migração bilateral)	125
5.6.1	Modelo 3: Discussão sobre a Hipótese da Saturação	135
5.7	Discussões Finais	137
6	Metapopulação de Moscas Varejeiras	139
6.1	Introdução dos Modelos Matemáticos: p Sítios Interligados	139
6.1.1	Dinâmica Local	140
6.1.2	Migração Dirigida	141
6.2	Simulações: p Sítios Interligados	143
6.2.1	Simulações para a espécie <i>Lucilia eximia</i>	144
6.2.2	Simulações para a espécie <i>Chrysomya albiceps</i>	149
6.3	Modelo Generalizado	155
6.4	Discussões Finais	157
	Conclusões	159
	A Aplicativos Computacionais Utilizados	165
	Bibliografia	167

Lista de Figuras

1.1	O número triangular fuzzy denotado por $u = (0, 0.5, 1)$ é um exemplo de subconjunto fuzzy. As setas indicam os extremos dos intervalos que definem o 0.6-nível e o suporte de u	6
1.2	Visualização de $\hat{f}_a(u)$ tal que u é o número triangular fuzzy $u = (0, 0.25, 0.5)$ ($a = 3$).	7
1.3	Arquitetura de um sistema baseado em regras fuzzy.	11
2.1	Diagrama de bifurcação do modelo logístico discreto: plotamos a densidade populacional x_t nas últimas 50 iterações ($t = 151, 152, \dots, 200$) após atingido o equilíbrio, em função da taxa de crescimento intrínseco a	16
2.2	Pontos fixos fuzzy \bar{u}_1, \bar{u}_2 e \bar{u}_3	19
2.3	Pontos fixos fuzzy $\bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6$ e \bar{u}_7	20
2.4	Natureza dos α -níveis descritos em C.1 , C.2 e no caso particular ($\bar{\alpha} = 1$ em C.1 ou $\bar{\alpha} = 1$ em C.2).	24
2.5	Seção do diagrama de bifurcação do modelo logístico, exibindo o 4-ciclo clássico ($a \in [a_2, a_3] = [1 + \sqrt{6}, 3.541 \dots]$) e os valores a_2, a_2^* e a_3	33
2.6	Seção do diagrama de bifurcação do modelo logístico destacando as regiões ${}^2R_1, {}^2R_2, {}^2R_3$ e 2R_4	36
2.7	Função $\mu(B_1)$: a_1^* é o valor do parâmetro a quando $\mu(B_1) = 0$ ou $f_{a_1^*}^2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$	40
2.8	A. Seção do diagrama de bifurcação destacando o 8-ciclo B_3 : no intervalo $[a_3, a_3^*]$ temos $[{}^3x_1, {}^3x_2] \subset [0, \frac{1}{2}]$ e $[{}^3x_3, {}^3x_4], [{}^3x_5, {}^3x_6], [{}^3x_7, {}^3x_8] \subset [\frac{1}{2}, 1]$; B. Seção do diagrama de bifurcação destacando o 16-ciclo B_4 : no intervalo $[a_4, a_4^*]$ temos $[{}^4x_1, {}^4x_2], [{}^4x_3, {}^4x_4], [{}^4x_5, {}^4x_6] \subset [0, \frac{1}{2}]$ e $[{}^4x_7, {}^4x_8], \dots, [{}^4x_{15}, {}^4x_{16}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$	41

3.1	Quatro exemplos de condições iniciais fuzzy com $x_0 = 0.5$ e $\delta x_0 = 0.1$, sendo A , B e C do tipo trapezoidal e D , triangular.	50
3.2	A taxa de crescimento intrínseco como um número fuzzy triangular \hat{a} , destacando o α^* -nível no eixo horizontal.	50
3.3	Simulação iterativa da população u_t , considerando a condição inicial trapezoidal $\chi_{[0.4,0.6]}$ e a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = (2.79, 2.8, 2.81)$	51
3.4	Em cada painel temos o subconjunto fuzzy u_t na geração indicada t , sendo que o primeiro painel corresponde à condição inicial trapezoidal $u_0 = (0.6, 0.68, 0.72, 0.8)$. Consideramos a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{1.5\}}$	52
3.5	Em cada painel temos o subconjunto fuzzy u_t na geração indicada t , sendo que o primeiro painel corresponde à condição inicial trapezoidal $u_0 = (0.7, 0.78, 0.82, 0.9)$. Consideramos a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{3.6\}}$	53
3.6	Em cada painel temos o subconjunto fuzzy u_t na geração indicada t (primeira coluna: $t = 249$ e segunda coluna: $t = 250$). Consideramos a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$ e a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{\tilde{a}\}}$, tal que $\tilde{a} = 3.48$, $\tilde{a} = 3.6$ e $\tilde{a} = 3.8$ nas primeira, segunda e terceira linhas, respectivamente.	54
3.7	Em cada painel temos o subconjunto fuzzy u_t na geração indicada t (primeira coluna: $t = 400$ e segunda coluna: $t = 401$). Consideramos a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$ e a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = (\tilde{a} - 0.01, \tilde{a}, \tilde{a} + 0.01)$, tal que $\tilde{a} = 3.4$, $\tilde{a} = 3.48$ e $\tilde{a} = 3.67$ nas primeira, segunda e terceira linhas, respectivamente.	55
3.8	Suporte dos subconjuntos fuzzy u_t (população - gerações 150-250) versus \tilde{a} ($\tilde{a} = \tilde{a} - 0.01, \tilde{a}, \tilde{a} + 0.01$). Para os alguns valores $\tilde{a} = 2.5$, $\tilde{a} = 2.8$, $\tilde{a} = 3.05$ e $\tilde{a} = 3.35$, também está ilustrado o subconjunto fuzzy u_{250} . Consideramos a condição inicial trapezoidal $u_0 = (0.65, 0.675, 0.725, 0.75)$	56
3.9	Suporte e 1-nível dos subconjuntos fuzzy u_t (população - gerações 350-370) versus \tilde{a} ($\hat{a} = \chi_{\{\tilde{a}\}}$). Consideramos a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$	58
3.10	Suporte e 1-nível dos subconjuntos fuzzy u_t (população - gerações 350-370) versus \tilde{a} ($\hat{a} = (\tilde{a} - \delta, \tilde{a}, \tilde{a} + \delta)$). Consideramos a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$	58

4.1	Simulações de duas populações acopladas: A e B . Espécie <i>Lucilia eximia</i> ($f = 0.0010$ e $s = 0.0014$). A . Condições iniciais $N_{1,0} = N_{2,0} = 600$ e parâmetros $F_1 = F_2 = 9.08$, $S_1 = S_2 = 1$, $m_1 = 0.1$ e $m_2 = 0$. B . Condições iniciais $N_{1,0} = N_{2,0} = 50$ e parâmetros $F_1 = 7.03$, $F_2 = 4.05$, $S_1 = 0.915$, $S_2 = 0.36$, $m_1 = 0.7$ e $m_2 = 0.01$. C e D . Espécie <i>Chrysomya albiceps</i> ($f = 0.0010$ e $s = 0.0030$). C . Condições iniciais $N_{1,0} = N_{2,0} = 200$ e parâmetros $F_1 = F_2 = 27.11$, $S_1 = S_2 = 0.565$, $m_1 = 0.1$ e $m_2 = 0$. D . Condições iniciais $N_{1,0} = N_{2,0} = 200$ e parâmetros $F_1 = 26.46$, $F_2 = 8.57$, $S_1 = 0.54$, $S_2 = 0.02$, $m_1 = 0.9$ e $m_2 = 0.6$	65
4.2	A . População, B . Ambiente, C . Fecundidade e D . Sobrevivência para a espécie <i>Lucilia eximia</i>	69
4.3	Migração da <i>Lucilia eximia</i>	70
4.4	Simulações de populações de <i>Lucilia eximia</i> . A e B : $N_{1,0} = 300$ e $N_{2,0} = 0$, e ambientes entre hostis e levemente desfavoráveis (0.1 no sítio 1 e 0.4 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em A e bilateral em B , resultando em A : extinção local no sítio 1 e evolução para um equilíbrio estável no sítio 2; B : evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações. C e D : $N_{1,0} = 200$ e $N_{2,0} = 0$, e ambientes entre levemente desfavoráveis e favoráveis (0.6 no sítio 1 e 0.8 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em C e bilateral em D , resultando em evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações.	72
4.5	Simulações de populações de <i>Chrysomya albiceps</i> . A e B : $N_{1,0} = 300$ e $N_{2,0} = 0$, e ambientes entre hostis e levemente desfavoráveis (0.1 no sítio 1 e 0.4 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em A e bilateral em B , resultando em A : extinção local no sítio 1 e evolução para um equilíbrio estável no sítio 2; B : evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações. C e D : $N_{1,0} = 200$ e $N_{2,0} = 0$, e ambientes entre levemente desfavoráveis e favoráveis (0.6 no sítio 1 e 0.7 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em C e bilateral em D , resultando em evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações.	73

4.6	Simulações de populações de <i>Chrysomya albiceps</i> . A e B: $N_{1,0} = 600$ e $N_{2,0} = 200$, e ambientes favorável no sítio 1 (0.9) e levemente desfavorável no sítio 2 (0.5), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em A e bilateral em B, resultando em A: evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações; B: evolução para um 2-ciclo estável em cada uma das populações. C e D: $N_{1,0} = 300$ e $N_{2,0} = 250$, e ambientes favoráveis (1 no sítio 1 e 0.95 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em C e bilateral em D, resultando em C: evolução para um equilíbrio estável no sítio 1 e para um 2-ciclo estável no sítio 2; D: evolução para um 2-ciclo estável em cada uma das populações.	74
5.1	A. Ambos os sítios sofrem emigração e imigração – Migração Bilateral. B. O sítio 1 sofre emigração, enquanto o 2 sofre imigração – Migração Unilateral.	80
5.2	A. Densidade populacional; B. Condições abióticas; C. Ambiente; D. Fecundidade (<i>Lucilia eximia</i>).	82
5.3	A. Sobrevivência (<i>Lucilia eximia</i>); B. Migração (<i>Lucilia eximia</i>).	85
5.4	Gráficos de $n_{t+1} = f(n_t)$ para diferentes condições abióticas, considerando a espécie <i>Lucilia eximia</i>	88
5.5	Gráficos de $n_{t+1} = f(n_t)$ para diferentes condições abióticas, considerando a espécie <i>Chrysomya albiceps</i>	89
5.6	Gráfico da sobrevivência em função das Condições-Abióticas, quando a densidade populacional é nula; destaque para o valor das Condições-Abióticas no qual a equação 5.12 vale (<i>Lucilia eximia</i>).	92
5.7	Dois exemplos da evolução populacional da espécie <i>Lucilia eximia</i> (população isolada), ilustrando os casos possíveis: A. n_0^* único equilíbrio e assintoticamente estável; B. n_0^* instável e n_+^* assintoticamente estável.	92
5.8	Evolução temporal de populações isoladas da espécie <i>Chrysomya albiceps</i> para as condições abióticas indicadas. Em cada população, a normalização foi feita em relação a sua população máxima (K).	94

5.9	Evolução temporal de populações isoladas da espécie <i>Chrysomya albiceps</i> para as condições abióticas indicadas. Em cada população, a normalização foi feita em relação a sua população máxima (K).	95
5.10	Exemplos da taxa de crescimento $r(n_t)$ em função da densidade populacional n_t (·) e do correspondente ajuste linear (—); A, B. <i>Lucilia eximia</i> ; C, D. <i>Chrysomya albiceps</i> . 98	98
5.11	Exemplos da fecundidade $\tilde{F}(n_t)$ e da sobrevivência $\tilde{S}(n_t)$ em função da densidade populacional n_t (·) e seus correspondentes ajustes exponenciais (—), para a espécie <i>Lucilia eximia</i> ; A. Fecundidade; B, C e D. Sobrevivência (Condições-Abióticas = 0.3, 0.7 e 1.0, respectivamente).	101
5.12	Exemplos da fecundidade $\tilde{F}(n_t)$ e da sobrevivência $\tilde{S}(n_t)$ em função da densidade populacional n_t (·) e seus correspondentes ajustes exponenciais (—), para a espécie <i>Chrysomya albiceps</i> ; A. Fecundidade; B, C e D. Sobrevivência (Condições-Abióticas = 0.3, 0.7 e 1.0, respectivamente).	102
5.13	Simulações para duas subpopulações da espécie <i>Lucilia eximia</i> ; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: — densidade da subpopulação 1, · — · densidade da subpopulação 2 e · · · densidade da metapopulação.	104
5.14	Simulações para duas subpopulações da espécie <i>Lucilia eximia</i> utilizando o modelo 2: migração unilateral; A. Extinção global; B. Persistência global da espécie. Notação: — densidade da subpopulação 1, · — · densidade da subpopulação 2 e · · · densidade da metapopulação.	105
5.15	Simulações para duas subpopulações da espécie <i>Lucilia eximia</i> ; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: — densidade da subpopulação 1, · — · densidade da subpopulação 2 e · · · densidade da metapopulação.	106

5.16 Simulações para duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia* utilizando o modelo 2: migração unilateral, mostrando persistência global da espécie. Notação: — densidade da subpopulação 1, · — · densidade da subpopulação 2 e ··· densidade da metapopulação. 107

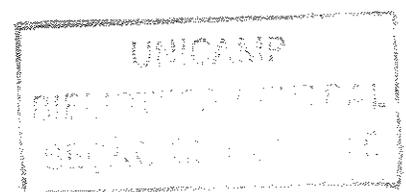
5.17 Simulações para duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia*; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: — densidade da subpopulação 1, · — · densidade da subpopulação 2 e ··· densidade da metapopulação. 107

5.18 Simulações para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps*; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: ···●··· densidade da subpopulação 1, ···○··· densidade da subpopulação 2 e ···□··· densidade da metapopulação. 109

5.19 Simulação para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* utilizando o Modelo 2: migração unilateral. Notação: ···●··· densidade da subpopulação 1, ···○··· densidade da subpopulação 2 e ···□··· densidade da metapopulação. 110

5.20 Simulações para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps*; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: ···●··· densidade da subpopulação 1, ···○··· densidade da subpopulação 2 e ···□··· densidade da metapopulação. 111

5.21 Simulações para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps*; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: ···●··· densidade da subpopulação 1, ···○··· densidade da subpopulação 2 e ···□··· densidade da metapopulação. 112



5.22	Simulações para duas subpopulações da espécie <i>Chrysomya albiceps</i> ; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral. Notação: $\dots \bullet \dots$ densidade da subpopulação 1 e $\dots \circ \dots$ densidade da subpopulação 2.	113
5.23	Simulações para duas subpopulações da espécie <i>Chrysomya albiceps</i> utilizando o Modelo 3: migração bilateral; A. órbita aparentemente caótica; B. 3-ciclo estável; C. órbita aparentemente caótica; D. ponto fixo estável. Notação: \bullet densidade da subpopulação 1 e $\dots \circ \dots$ densidade da subpopulação 2.	114
5.24	A. A equação 5.28 tem solução única quando Condições-Abióticas ₁ = 0.8 e Condições-Abióticas ₂ = 0.5 (<i>Lucilia eximia</i>); B. ela não tem solução quando Condições-Abióticas ₁ = 0.9 e Condições-Abióticas ₂ = 0.2 (<i>Chrysomya albiceps</i>).	117
5.25	A. A equação 5.56 tem duas soluções quando Condições-Abióticas ₁ = 0.9 e Condições-Abióticas ₂ = 0.1 (<i>Lucilia eximia</i>); B. ela também tem duas soluções quando Condições-Abióticas ₁ = 0.2 e Condições-Abióticas ₂ = 0.1 (<i>Chrysomya albiceps</i>).	124
5.26	Ilustração do procedimento de obtenção da curva-solução da equação $\varphi_2(n_2^*) = \psi_1(n_1^*)$ plotada no primeiro quadrante (<i>Lucilia eximia</i> , Condições-Abióticas ₁ = 0.7 e Condições-Abióticas ₂ = 0.8, $K = 741$).	126
5.27	Ilustração do procedimento de obtenção da curva-solução da equação $\varphi_1(n_1^*) = \psi_2(n_2^*)$ plotada no primeiro quadrante (<i>Chrysomya albiceps</i> , Condições-Abióticas ₁ = Condições-Abióticas ₂ = 0.7, $K = 922$).	128
5.28	Exemplos de gráficos de $\psi_1(n_1^*)$ e $\varphi_2(n_2^*)$, respectivamente (<i>Lucilia eximia</i> , Condições-Abióticas ₁ = 0.3 e Condições-Abióticas ₂ = 0.7, $K = 494$).	128
5.29	As intersecções entre as curvas-solução representam os pontos fixos do sistema 5.4 (<i>Lucilia eximia</i>).	129
5.30	As intersecções entre as curvas-solução representam os pontos fixos do sistema 5.4 (<i>Chrysomya albiceps</i>).	130
5.31	Em destaque, as regiões R e S nas quais as inequações $\gamma < 1$ e $P(1) = 1 - \beta + \gamma > 0$ são verificadas (primeira e segunda colunas, respectivamente). A. , B. <i>Lucilia eximia</i> ; C. , D. <i>Chrysomya albiceps</i>	133

5.32	Simulações para duas subpopulações da espécie <i>Lucilia eximia</i> utilizando o Modelo 3: migração bilateral, com saturação da subpopulação 1 para $t \geq 1$. Notação: $--$ densidade da subpopulação 1, $\cdot - \cdot$ densidade da subpopulação 2 e \dots densidade da metapopulação.	137
6.1	A. Distribuição cíclica dos sítios. B. Os sítios 1 e p não interagem diretamente (sítios alinhados).	140
6.2	Simulações para seis subpopulações da espécie <i>Lucilia eximia</i> com distribuição cíclica dos sítios; A. Modelo 4: migração unilateral; B. Modelo 6: migração bilateral; C. Modelo 4: migração unilateral; D. Modelo 6: migração bilateral. Notação: $—$ densidade da subpopulação 1; $--$ densidade da subpopulação 2, $\cdot - \cdot$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: A. e B. $[0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.4]^T$; C. e D. $[0.2 \ 0.2 \ 0.8 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$	145
6.3	Simulações para seis subpopulações da espécie <i>Lucilia eximia</i> com distribuição alinhada dos sítios; A. Modelo 5: migração unilateral; B. Modelo 7: migração bilateral. Notação: \dots densidade da subpopulação 1; $--$ densidade da subpopulação 2, $\cdot - \cdot$ densidade da subpopulação 3; $—$ densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e $—$ densidade da subpopulação 6 (linha grossa). Condições-Abióticas: A. e B. $[0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$	147
6.4	Simulações para seis subpopulações da espécie <i>Lucilia eximia</i> com distribuição alinhada dos sítios; A. Modelo 5: migração unilateral; B. Modelo 7: migração bilateral. Notação: \dots densidade da subpopulação 1; $--$ densidade da subpopulação 2, $\cdot - \cdot$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4 (exceto em A. $—$); \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6 (exceto em A. $—$ linha grossa). Condições-Abióticas: A. e B. $[0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$; C. e D. $[0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9]^T$	148

- 6.5 Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição cíclica dos sítios; **A.** Modelo 4: migração unilateral; **B.** Modelo 6: migração bilateral; **C.** Modelo 4: migração unilateral; **D.** Modelo 6: migração bilateral. Notação: — densidade da subpopulação 1; \diamond densidade da subpopulação 2, $\cdot \times \cdot$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.4]^T$; **C.** e **D.** $[0.2 \ 0.2 \ 0.8 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$ 150
- 6.6 Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição cíclica dos sítios; **A.** Modelo 4: migração unilateral; **B.** Modelo 6: migração bilateral. Notação: — densidade da subpopulação 1; \diamond densidade da subpopulação 2, $- \times -$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.2 \ 0.2 \ 0.8 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$ 151
- 6.7 Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição cíclica dos sítios; Modelo 4: migração unilateral. Notação: \ast densidade da subpopulação 1; ∇ densidade da subpopulação 2, \diamond densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: $[0.5 \ 0.6333 \ 0.7667 \ 0.9 \ 0.7667 \ 0.6333]^T$ 152
- 6.8 Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição alinhada dos sítios; **A.** Modelo 5: migração unilateral; **B.** Modelo 7: migração bilateral. Notação: $\dots \times \dots$ densidade da subpopulação 1; $--$ densidade da subpopulação 2, $---$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ 153

6.9 Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição alinhada dos sítios; **A.** Modelo 5: migração unilateral; **B.** Modelo 7: migração bilateral. Notação: — densidade da subpopulação 1; — ◊ — densidade da subpopulação 2, $\dots \times \dots$ densidade da subpopulação 3; □ densidade da subpopulação 4; ● densidade da subpopulação 5; e ◦ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$; **C.** e **D.** $[0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9]^T$ 154

6.10 Esquema migratório do Modelo Generalizado. 160

6.11 Esquema migratório do Modelo 6. 161

6.12 Esquema migratório do Modelo 4. 162

6.13 Esquema migratório do Modelo 7. 162

6.14 Esquema migratório do Modelo 5. 163

6.15 Esquema migratório do Modelo 3. 164

6.16 Esquema migratório do Modelo 2. 164

Lista de Tabelas

2.1	Distribuição de todos os pontos fixos do modelo logístico fuzzy discreto em relação à taxa de crescimento intrínseco a	21
4.1	Valores para F_j (fecundidade) e S_j (sobrevivência) usados nas simulações determinísticas, para as espécies <i>Lucilia eximia</i> e <i>Chrysomya albiceps</i> [18].	64
4.2	Valores para f e s usados nas simulações determinísticas, para as espécies <i>Lucilia eximia</i> e <i>Chrysomya albiceps</i> [18].	64
5.1	Resumo dos pontos fixos da equação 5.5 e suas condições de existência e estabilidade assintótica.	91
5.2	Valores aproximados para o ponto fixo n_+^* da equação 5.5 e a correspondente derivada, e avaliação da estabilidade considerando diferentes Condições-Abióticas (<i>Chrysomya albiceps</i>).	96
5.3	Parâmetros para o Modelo de Prout e Mc Chesney, obtidos via ajuste exponencial das contribuições da fecundidade e da sobrevivência na taxa de crescimento do Modelo 1, para as condições abióticas escolhidas (<i>Lucilia eximia</i>).	101
5.4	Parâmetros para o Modelo de Prout e Mc Chesney, obtidos via ajuste exponencial das contribuições da fecundidade e da sobrevivência na taxa de crescimento do Modelo 1, para as condições abióticas escolhidas (<i>Chrysomya albiceps</i>).	103
5.5	Valores mínimo e máximo de $(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0)$ para as espécies estudadas (em relação às condições abióticas).	116
5.6	Resumo dos pontos fixos do sistema 5.3 e suas condições de existência e estabilidade.	118

5.7 Valores mínimo e máximo de γ para as espécies estudadas (Condições-Abióticas₁ = Condições-Abióticas₂ = 0 e Condições-Abióticas₁ = Condições-Abióticas₂ = 1, respectivamente). 132

Resumo

Neste trabalho, nós estudamos o modelo logístico discreto com variável de estado incerta, modelada por meio de subconjuntos fuzzy; determinamos pontos fixos exclusivos da equação fuzzy correspondente, bem como uma família de órbitas periódicas assintoticamente estáveis. Realizamos simulações iterativas que podem também considerar a taxa de crescimento intrínseco incerta.

Na seqüência, estudamos modelos de metapopulação de moscas varejeiras, aplicados às espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps*. Utilizamos sistemas baseados em regras fuzzy, com subjetividade de ambiente na estimativa da sobrevivência e migração. Consideramos migração dirigida e habitat fragmentado em sítios com distribuição espacial cíclica ou alinhada. Realizamos a análise dos equilíbrios no caso particular: dois sítios interligados, e simulações nos demais casos.

Comparamos o modelo logístico discreto e o modelo local utilizado nos modelos de metapopulação propostos.

Abstract

In this work, we study discrete logistic model with uncertain state variable, modeled by fuzzy subsets; we determine fixed points of corresponding fuzzy equation, as well as a family of stable periodic orbits. We present simulations that can also consider uncertain intrinsic growth rate.

We study metapopulation models of blowflies applied to the species *Lucilia eximia* and *Chrysomya albiceps*. We use fuzzy rules based systems with subjective environment to estimate survival and migration rates. We consider directional migration and habitat broken into fragments at patches with cyclic or aligned space distribution. We analyze the equilibria in the particular case: two interlinked patches, and we simulate in other cases.

We compare discrete logistic model and the local model used in the proposed metapopulation models.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e por ter me carregado nos seus braços.

Agradeço aos meus pais pelo amor e pelo apoio que me deram durante todos os dias da minha vida; graças a eles tive estrutura emocional para viver a experiência do doutorado – com todas as suas renúncias.

Agradeço às minhas irmãs pelo amor e pela confiança que sempre depositaram em mim. Em especial, agradeço à Clarissa e à Carmela; graças a elas tive tranqüilidade para retornar a Campinas e concluir o compromisso assumido.

Agradeço ao meu namorado, Márcio, pelo seu imenso amor. Também lhe agradeço por todo o auxílio técnico.

Agradeço à Igreja Católica e, em especial, às paróquias da Catedral e da Nossa Senhora Desatadora dos Nós pelo consolo, pela paz, pelo convívio com suas comunidades... Agradeço também ao Padre Sílvio S. Tech.

Agradeço aos meus colegas pelos inúmeros auxílios pessoais e profissionais. Em especial, agradeço aos colegas da Biomatemática.

Agradeço aos amigos, colegas ou não. Em especial, agradeço à Maria José, à Marina e à Marininha. Existem tantos outros que necessitaria agradecer; a todos, muito obrigada.

Agradeço aos professores Rodney Carlos Bassanezi e Laécio Carvalho de Barros pela orientação e pela co-orientação deste trabalho, respectivamente. Realmente foi um privilégio ter trabalhado com vocês.

Agradeço aos funcionários do IMECC pela presteza e competência; em especial, agradeço aos funcionários da pós-graduação e da secretaria. Agradeço ao estado de São Paulo pela oportunidade de estudar na UNICAMP. Agradeço ao CNPq pela bolsa de doutorado.

Introdução

A teoria de subconjuntos fuzzy trata de incertezas que surgem quando as fronteiras de uma classe de objetos não estão nitidamente definidas [24]. O termo fuzzy representa imprecisão ou incerteza baseada na intuição humana e não na teoria de probabilidade [26].

Desde sua introdução em 1965 por Zadeh [36], a teoria de subconjuntos fuzzy tem sido utilizada nas mais variadas aplicações acadêmicas e tecnológicas: sistemas neuro fuzzy, computação evolutiva, inteligência artificial, controladores fuzzy, análise de dados (indústrias químicas, controle de qualidade, marketing, etc), chip fuzzy, etc [21, 26].

Nós utilizamos o instrumental da teoria de subconjuntos fuzzy no estudo de dois problemas envolvendo modelos populacionais discretos. O primeiro consiste na investigação das soluções estacionárias do modelo logístico fuzzy discreto. O segundo consiste numa aplicação deste instrumental para a modelagem de metapopulações de moscas varejeiras.

O modelo logístico discreto é um dos mais notórios modelos na sua categoria – modelo discreto para a população de uma única espécie [6, 22, 13]. Segundo este modelo, a população exibe equilíbrio estável de um ponto, órbita periódica estável ou comportamento caótico, dependendo do valor do parâmetro [12, 32]. Como todo o modelo, ele está restrito a um conjunto de hipóteses que são uma simplificação do problema modelado. Uma destas hipóteses é a homogeneidade da população.

Barros et al [3, 4], Bassanezi et al. [5] admitiram a existência de uma diversidade comportamental, genética, física, etc, dos indivíduos de uma população; eles incluíram esta incerteza na variável de estado do modelo logístico discreto através da modelagem da população inicial como um subconjunto fuzzy. Assim, propuseram um modelo logístico fuzzy discreto e

estudaram seus pontos fixos.

Com uma abordagem computacional, Rhode e Rhode [30] modelaram a heterogeneidade populacional utilizando o formalismo de metapopulações; eles supuseram que a taxa de crescimento intrínseco do modelo logístico discreto é ligeiramente diferente em cada uma das subpopulações.

Em continuidade ao trabalho de Barros et al [3, 4], Bassanezi et al. [5], nós complementamos seu estudo teórico dos pontos fixos e identificamos uma família de órbitas periódicas estáveis do modelo logístico fuzzy discreto (capítulo 2). Ainda, como alternativa ao trabalho de Rhode e Rhode [30], apresentamos simulações iterativas considerando o modelo logístico discreto com condição inicial fuzzy e também podendo incluir a taxa de crescimento intrínseco fuzzy (capítulo 3).

A aplicação que nós trabalhamos teve como principal motivação o trabalho realizado por Godoy [18]. Com o objetivo de analisar a dinâmica de crescimento e de dispersão de populações de moscas varejeiras (Diptera, Calliphoridae), Godoy propôs um modelo determinístico para duas populações da mesma espécie, acopladas por migração. Este modelo incorpora o modelo local de Prout e Mc Chesney [27] ao modelo de populações acopladas de Roughgarden [31]. Godoy ainda propôs três modelos estocásticos que permitem a flutuação aleatória de um dos parâmetros: fecundidade, sobrevivência e migração [18].

Mantendo a estrutura do modelo determinístico proposto por Godoy, nós propomos um modelo que permite a flutuação dos parâmetros fecundidade, sobrevivência e migração nos seus domínios, através de sua estimativa por meio de sistemas baseados em regras fuzzy [10].

Retomamos o problema da dinâmica populacional e de dispersão de moscas varejeiras propondo novos modelos nos capítulos 5 e 6. As principais inovações destes modelos são:

- o modelo de dinâmica local, que considera a taxa de crescimento populacional dependente da densidade, incluindo esta dependência somente na estimativa dos parâmetros fecundidade e sobrevivência;

- a avaliação subjetiva do ambiente, através de sistemas baseados em regras fuzzy; esta avaliação é utilizada na estimativa dos parâmetros sobrevivência e migração;
- a generalização dos modelos de duas populações acopladas para modelos que admitem um número qualquer de populações, utilizando o formalismo de metapopulações [19, 34].

Esta tese está estruturada como descrevemos a seguir.

No capítulo 1, apresentamos conceitos fundamentais da teoria de subconjuntos fuzzy, sistemas fuzzy discretos e sistemas baseados em regras fuzzy [5, 9, 21, 24, 26].

No capítulo 2, fazemos um estudo teórico dos pontos fixos e de uma família de ciclos estáveis do modelo logístico fuzzy discreto.

No capítulo 3, apresentamos simulações iterativas e diagramas considerando o modelo logístico fuzzy discreto, também incluindo a taxa de crescimento intrínseco fuzzy.

No capítulo 4, revisamos brevemente o estudo feito por Godoy [18] e apresentamos nossos resultados considerando a estimativa dos parâmetros fecundidade, sobrevivência e migração através de sistemas baseados em regras fuzzy.

No capítulo 5, propomos e analisamos dois modelos para duas populações da mesma espécie de moscas varejeiras, acopladas por migração (seções 5.1, 5.2, 5.5 e 5.6). Apresentamos também simulações iterativas considerando estes dois modelos aplicados às espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps* (seção 5.4). Ainda, analisamos o modelo local e o comparamos com o modelo logístico discreto e com o modelo de Prout e Mc Chesney [27] (seção 5.3).

No capítulo 6, propomos quatro modelos de metapopulação de imaturos de moscas varejeiras e realizamos simulações considerando estes modelos aplicados às espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps*. Também propomos um modelo que generaliza os anteriores.

Encerramos com as conclusões gerais desta tese e um resumo esquemático dos modelos de metapopulação propostos nos capítulos 5 e 6.

No apêndice A, apresentamos os aplicativos computacionais utilizados na obtenção de nossos resultados numéricos e nossas simulações.

Capítulo 1

Preliminares Fuzzy

Este capítulo é reservado para a apresentação de conceitos fundamentais da teoria de subconjuntos fuzzy (seção 1.1), de conceitos e resultados preliminares relacionados a sistemas fuzzy discretos (seção 1.2), e dos sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF: seção 1.3).

A maioria das definições e resultados deste capítulo são válidos para o espaço n -dimensional \mathbb{R}^n ; no entanto, precisaremos deles restritos a $n = 1$ e $n = 2$.

1.1 Conceitos Fundamentais da Teoria de Subconjuntos Fuzzy

Definição 1.1. Um subconjunto fuzzy A em \mathbb{R}^n é definido pela função de pertinência $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ que atribui ao elemento x o seu grau de pertinência $u(x)$ ao subconjunto A .

Geralmente, fazemos referência a um subconjunto fuzzy pela mesma notação utilizada para sua função de pertinência.

Definição 1.2. Um α -nível de um subconjunto fuzzy u é definido por

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

e

$$[u]^0 = \text{fecho}\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > 0\}.$$

O 0-nível de u também é conhecido como suporte deste subconjunto.

Apresentamos na figura 1.1 um exemplo de um subconjunto fuzzy, destacando seu 0.6-nível e seu suporte.

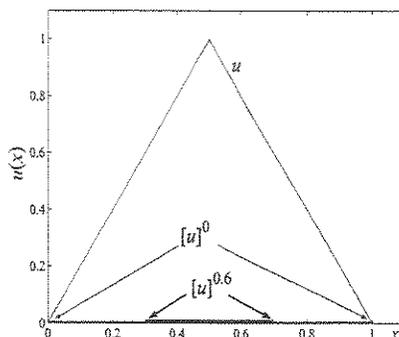


Figura 1.1: O número triangular fuzzy denotado por $u = (0, 0.5, 1)$ é um exemplo de subconjunto fuzzy. As setas indicam os extremos dos intervalos que definem o 0.6-nível e o suporte de u .

É claro que dois subconjuntos fuzzy u e v são iguais se, e somente se, $[u]^\alpha = [v]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ [24].

Representamos a família dos subconjuntos fuzzy $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, cujos α -níveis são subconjuntos compactos não-vazios do \mathbb{R}^n , por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Ainda, usamos \mathcal{E}^n para denotar a família dos subconjuntos fuzzy cujos α -níveis também são convexos ($\mathcal{E}^n \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$).

Definição 1.3. A extensão de Zadeh de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a função \hat{f} tal que para cada subconjunto fuzzy u é associado o subconjunto fuzzy $\hat{f}(u)$ cuja função de pertinência é

$$\hat{f}(u)(x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} u(\tau) & \text{se } f^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(x) = \emptyset \end{cases} \quad (1.1)$$

Teorema 1.1. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ função contínua. Sua extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é bem definida e

$$[\hat{f}(u)]^\alpha = f([u]^\alpha)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [3].

Exemplo 1.1:

Consideremos a função $f_a(x) = ax(1-x)$ tal que $1 \leq a \leq 4$ e $f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Ela pode ser estendida para a função $\hat{f}_a(u)$ cuja função de pertinência é

$$\hat{f}_a(u)(x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in f_a^{-1}(x)} u(\tau) & \text{se } f_a^{-1}(x) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f_a^{-1}(x) = \emptyset \end{cases} \quad (1.2)$$

Ilustramos a aplicação da extensão de Zadeh de f_a na figura 1.2 ($a = 3$).

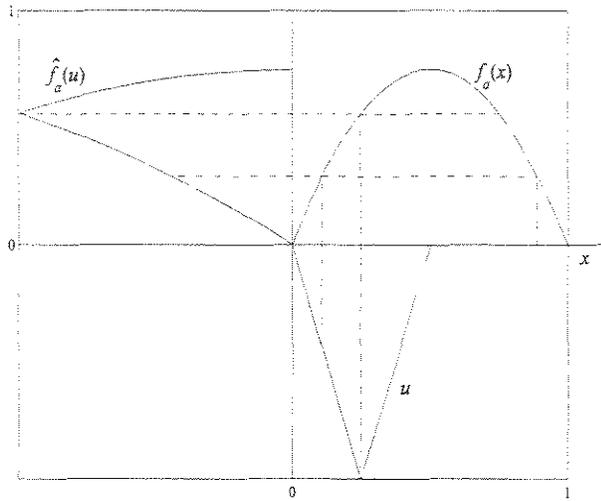


Figura 1.2: Visualização de $\hat{f}_a(u)$ tal que u é o número triangular fuzzy $u = (0, 0.25, 0.5)$ ($a = 3$).

Como f_a é contínua, pelo teorema 1.1, podemos escrever $\hat{f}_a(u)$ em termos dos α -níveis ($0 \leq \alpha \leq 1$)

$$[\hat{f}_a(u)]^\alpha = f_a([u]^\alpha) \quad (1.3)$$

ou, utilizando a notação $[\hat{f}_a(u)]^\alpha = [f_{aI}^\alpha, f_{aII}^\alpha]$,

$$\begin{cases} f_{aI}^\alpha &= \min \{f_a(x) : x \in [u]^\alpha\} \\ f_{aII}^\alpha &= \max \{f_a(x) : x \in [u]^\alpha\} \end{cases} \quad (1.4)$$

Teorema 1.2. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ função contínua e $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ sua extensão de Zadeh. Então $(\hat{f})^t(u) = \widehat{(f^t)}(u)$, para todo $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $t \in \mathbb{N}$, onde $(\hat{f})^t$ indica a composição de \hat{f} , t vezes.*

Prova:

Provar que $(\hat{f})^t(u) = \widehat{(f^t)}(u)$ equivale a mostrar que $\left[(\hat{f})^t(u) \right]^\alpha = \left[\widehat{(f^t)}(u) \right]^\alpha$, $\forall u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\forall t \in \mathbb{N}$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Primeiro mostramos que $\left[(\hat{f})^t(u) \right]^\alpha = f^t([u]^\alpha)$; esta demonstração é feita por indução em t .

$t = 1$:

Segue imediatamente do teorema 1.1.

$t > 1$:

Admitimos $\left[(\hat{f})^{t-1}(u) \right]^\alpha = f^{t-1}([u]^\alpha)$; daí

$$\begin{aligned} \left[(\hat{f})^t(u) \right]^\alpha &= \left[\hat{f} \left((\hat{f})^{t-1}(u) \right) \right]^\alpha = f \left(\left[(\hat{f})^{t-1}(u) \right]^\alpha \right) \\ &= f \left(f^{t-1}([u]^\alpha) \right) = f^t([u]^\alpha). \end{aligned} \quad (1.5)$$

O resultado desejado é consequência imediata da continuidade da composição de funções contínuas.

1.2 Sistemas Fuzzy Discretos

Um sistema dinâmico fuzzy discreto é um sistema iterativo

$$u_{t+1} = F(u_t) \quad (1.6)$$

com a função $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Dado $u_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, a seqüência de iteradas

$$u_0, F(u_0), F(F(u_0)), \dots$$

é dita *solução* ou *órbita positiva* da equação 1.6 por u_0 .

Dizemos que um subconjunto fuzzy \bar{u} é ponto fixo de F se $F(\bar{u}) = \bar{u}$.

Observamos que $F(\bar{u}) = \bar{u}$ se, e somente se, $[F(\bar{u})]^\alpha = [\bar{u}]^\alpha$, onde $\alpha \in [0, 1]$. Ainda, se \bar{x} é ponto fixo de uma função f , então a função característica $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é ponto fixo da sua extensão de Zadeh \hat{f} pois

$$\hat{f}(\chi_{\{\bar{x}\}}) = \chi_{\{f(\bar{x})\}} = \chi_{\{\bar{x}\}}.$$

Na seqüência, definiremos uma métrica em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, que será necessária para a definição de estabilidade de um ponto fixo.

Definição 1.4. Definimos a métrica em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha),$$

onde h é a métrica de Hausdorff; neste caso:

$$h([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \max \{ \rho([u]^\alpha, [v]^\alpha), \rho([v]^\alpha, [u]^\alpha) \},$$

$$\rho([u]^\alpha, [v]^\alpha) = \sup_{a \in [u]^\alpha} \inf_{b \in [v]^\alpha} \|a - b\|$$

e $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana em \mathbb{R}^n .

Definição 1.5. Dizemos que um ponto fixo \bar{u} de $F : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é estável se para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que, para todo u para o qual $D(\bar{u}, u) < \delta$, $D(F^t(u), \bar{u}) < \varepsilon$ é satisfeito para todo $t \in \mathbb{N}$, tal que $t \geq t_0$ ($t_0 \in \mathbb{N}$). Um ponto fixo \bar{u} é assintoticamente estável se ele for estável e existir $r > 0$ tal que para todo u tal que $D(\bar{u}, u) < r$ tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} D(F^t(u), \bar{u}) = 0$.

Teorema 1.3. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua com $f(\bar{x}) = \bar{x}$ e \hat{f} sua extensão de Zadeh. Então*

i) $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é estável para o sistema $u_{t+1} = \hat{f}(u_t)$ se, e somente se, \bar{x} é estável para $x_{t+1} = f(x_t)$;

ii) $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é assintoticamente estável para o sistema $u_{t+1} = \hat{f}(u_t)$ se, e somente se, \bar{x} é assintoticamente estável para $x_{t+1} = f(x_t)$.

A prova deste teorema pode ser encontrada em [5].

Teorema 1.4. *Seja $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a extensão de Zadeh da função contínua f . Se \bar{u} é ponto fixo de \hat{f} e $\lim_{t \rightarrow \infty} D(\hat{f}^t(u), \bar{u}) = 0$ para $D(\bar{u}, u) < r$, então os α -níveis $[\bar{u}]^\alpha$ atraem os α -níveis $[u]^\alpha$ através de f .*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [5].

Denotamos a bola aberta com centro \bar{u} e raio r por

$$B(\bar{u}, r) = \{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : D(\bar{u}, u) < r\}.$$

Corolário 1.5. *Seja $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a extensão de Zadeh da função contínua f . O ponto fixo χ_X de \hat{f} é estável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com $[u]^0 \subset B(X, \delta)$ e $X \subset B([u]^1, \delta)$ então $f^t([u]^0) \subset B(X, \varepsilon)$ e $X \subset B(f^t([u]^1), \varepsilon)$ para $t \in \mathbb{N}$.*

A prova deste corolário pode ser encontrada em [5].

Um subconjunto fuzzy \bar{u} é dito *ponto periódico de período p* ou *p -periódico* da função F se p é o menor inteiro positivo tal que $F^p(\bar{u}) = \bar{u}$. O conjunto de todas as iteradas de um ponto p -periódico é chamado *órbita p -periódica* ou *p -ciclo*.

Observamos que um ponto p -periódico é um ponto fixo da função F^p . Logo, segue o mesmo conceito de estabilidade de ponto fixo.

1.3 Introdução aos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Antes de introduzirmos os sistemas baseados em regras fuzzy, conceituaremos alguns elementos componentes destes sistemas [21, 26].

Uma variável lingüística fuzzy é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por um termo lingüístico e quantitativamente pela sua função de pertinência.

Por exemplo, consideremos a variável lingüística fuzzy “População”; podemos lhe

atribuir o termo lingüístico “Pequena” e a correspondente função de pertinência, ambos concordando com o contexto.

As regras fuzzy descrevem situações específicas e sua inferência nos conduz a algum resultado desejado. Elas apresentam a seguinte estrutura: **Se** antecedentes, **então** conseqüente.

Por exemplo, em determinado contexto, podemos ter a regra: “Se a população é pequena, **então** a fecundidade é alta”.

Uma base de regras é uma coleção de regras capaz de descrever um sistema em suas várias possibilidades.

Uma relação fuzzy R entre duas variáveis, $x \in X$ e $y \in Y$, é definida por uma função que mapeia o par ordenado $(x, y) \in X \times Y$ no seu grau de pertinência para a relação, ou seja, $R: X \times Y \rightarrow [0, 1]$.

Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Os sistemas baseados em regras fuzzy são sistemas que descrevem lingüisticamente um determinado objeto complexo. Eles apresentam a estrutura ilustrada na figura 1.3.

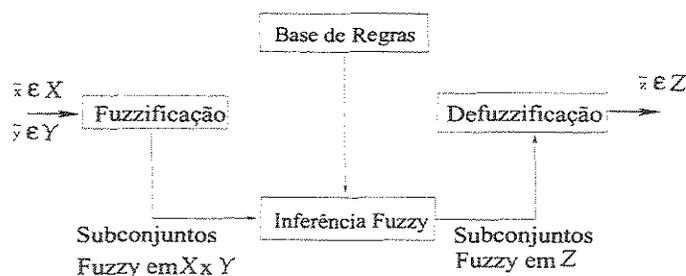


Figura 1.3: Arquitetura de um sistema baseado em regras fuzzy.

Estes sistemas utilizam uma partição fuzzy dos domínios das variáveis de entrada e de saída; seu objetivo é associar cada subconjunto fuzzy do domínio de entrada com o conveniente subconjunto fuzzy do domínio de saída.

O método de inferência determina a forma operacional do sistema baseado em regras

fuzzy. Ele é um mapeamento do valor de entrada no valor de saída. Existem diversos métodos de inferência [21, 26]; nós vamos descrever somente o método de Mamdani, que utilizamos na estimativa de parâmetros nos capítulos 4, 5 e 6.

Método de Inferência de Mamdani

No método de Mamdani, a saída é construída pela superposição dos conseqüentes das regras individuais.

Vamos considerar uma base de regras da forma:

Se U é A_1 e V é B_1 , então W é C_1 .

OU

...

OU

Se U é A_N e V é B_N , então W é C_N .

onde U e V são as variáveis lingüísticas de entrada com domínios X e Y , respectivamente; A_i e B_i são termos lingüísticos associados aos subconjuntos fuzzy das partições dos domínios X e Y ; W é a variável lingüística de saída com domínio Z ; e C_i são termos lingüísticos associados aos subconjuntos fuzzy da partição do domínio Z ($i = 1, 2, \dots, N$).

Nesta abordagem, cada regra é expressa como uma relação fuzzy R_i , cuja função de pertinência é

$$R_i(x, y, z) = r_i(x, y) \wedge C_i(z), \quad (x, y, z) \in X \times Y \times Z, \quad (1.7)$$

onde o operador de conjunção fuzzy \wedge é o mínimo e $r_i(x, y) = A_i(x) \wedge B_i(y)$, $(x, y) \in X \times Y$ (entradas combinadas também pelo operador mínimo).

A agregação do conjunto de regras se dá através da união de todas as regras individuais, ou seja:

$$R = \bigcup_{i=1}^N R_i \quad (1.8)$$

e a função de pertinência $R(x, y, z)$ é dada por

$$R(x, y, z) = \bigvee_{i=1}^N R_i(x, y, z) = \bigvee_{i=1}^N (r_i(x, y) \wedge C_i(z)), \quad (1.9)$$

onde o operador disjunção fuzzy \vee é o máximo.

No caso em que os valores de entrada são números¹, ou seja, subconjuntos fuzzy da forma $\chi_{\{\tilde{x}\}}$ e $\chi_{\{\tilde{y}\}}$, o subconjunto de saída \tilde{Z} é descrito pela função de pertinência

$$\tilde{Z}(z) = \bigvee_{i=1}^N (r_i(\tilde{x}, \tilde{y}) \wedge C_i(z)) = \bigvee_{i=1}^N (A_i(\tilde{x}) \wedge B_i(\tilde{y}) \wedge C_i(z)). \quad (1.10)$$

Método de Defuzzificação Centro de Gravidade

O método de inferência de Mamdani tem como saída um subconjunto fuzzy \tilde{Z} . O processo que transforma este subconjunto em um valor numérico \tilde{z} é conhecido como defuzzificação; nós optamos pelo método do centro de gravidade que calcula \tilde{z} através da expressão

$$\tilde{z} = \frac{\int_S z \cdot \tilde{Z}(z) dz}{\int_S \tilde{Z}(z) dz}, \quad (1.11)$$

tal que $S = [\tilde{Z}]^0$ é o suporte do subconjunto \tilde{Z} .

¹No caso em que os valores de entrada são subconjuntos fuzzy quaisquer, o subconjunto de saída é descrito por Massad et al. [21].

Capítulo 2

Equação Logística Fuzzy Discreta: Pontos Fixos e Ciclos Fuzzy

A modelagem não linear tem sido importante aliada no estudo de diversos processos dinâmicos, além de fornecer resultados interessantes e inesperados, especialmente relacionados à ocorrência de caos.

Um exemplo típico na dinâmica populacional é o modelo logístico discreto

$$x_{t+1} = f_a(x_t) = ax_t(1 - x_t), \quad (2.1)$$

onde x_t denota a densidade populacional na geração t e a , a taxa de crescimento intrínseco ($1 \leq a \leq 4$) [12, 22, 30, 32]. A simplicidade aparente da equação 2.1 oculta um processo complexo surpreendente. Para $a \in (1, 3)$, a população entra em equilíbrio com um único valor x_a ; de fato, $x_0 = 0$ e $x_a = 1 - 1/a$ são pontos fixos de 2.1, sendo que o primeiro é instável e o segundo é assintoticamente estável neste intervalo. Em $a = a_1 = 3$ (primeiro valor de bifurcação), o ponto fixo x_a perde a estabilidade e, a partir deste valor, a população alterna entre duas densidades populacionais – formando uma órbita de período 2 – até o próximo valor de bifurcação que é $a = a_2 = 1 + \sqrt{6}$. Em $a = a_2 = 1 + \sqrt{6}$, esta órbita perde a estabilidade e origina-se uma órbita de período 4 estável até o próximo valor de bifurcação $a = a_3 = 3.541 \dots$. Este comportamento de duplicação do período das órbitas ocorre sucessivamente até que o sistema alcance o caos em $a = a^* = 3.569 \dots$. A partir de $a = a^*$, observam-se regiões do

parâmetro a onde a flutuação populacional é caótica, intercaladas com pequenas janelas onde aparecem novamente órbitas periódicas estáveis (janelas de periodicidade). Por exemplo em $a = 3.83$, temos uma órbita estável de período 3 [32]. O diagrama de bifurcação apresentado na figura 2.1 ilustra estes cenários.

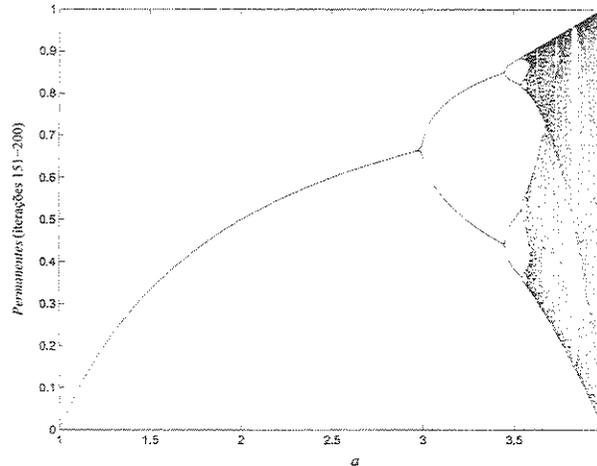


Figura 2.1: Diagrama de bifurcação do modelo logístico discreto: plotamos a densidade populacional x_t nas últimas 50 iterações ($t = 151, 152, \dots, 200$) após atingido o equilíbrio, em função da taxa de crescimento intrínseco a .

Apesar do modelo logístico discreto estar bem estabelecido, não podemos esquecer que nele assumimos que a população é homogênea e que usamos a taxa média a (constante) para toda a população. Já numa espécie natural é razoável admitir que cada indivíduo responda de maneira particular aos estímulos e limitações a ele apresentados, caracterizando a população por uma diversidade comportamental. Esta heterogeneidade é mais acentuada quando consideramos cada indivíduo isoladamente e menos, quando observamos grupos de indivíduos.

Rohde e Rohde [30] estudaram a heterogeneidade populacional utilizando a dinâmica de metapopulações e considerando taxas de crescimento intrínseco (a) ligeiramente diferentes em cada subpopulação.

Já Barros et al. [3, 4], Bassanezi et al. [5] lidaram com a incerteza inerente à dinâmica populacional considerando a variável de estado fuzzy; com isso, encontraram novos pontos fixos da equação fuzzy associada a 2.1. Também Ahmed e Hegazi [1] utilizaram sistemas dinâmicos

fuzzy para estudar a dinâmica do replicador discreto de gavião-pomba e jogos de dilema do prisioneiro, além de um modelo presa-predador, e obtiveram novas soluções (além das soluções clássicas).

Neste capítulo, propomos que a variável de estado do modelo logístico discreto seja incerta, modelada por meio de subconjuntos fuzzy, e utilizamos o princípio da extensão de Zadeh como ferramenta para obtermos soluções. Assim, determinamos novos pontos fixos ¹ (seção 2.1) e novas órbitas periódicas (seções 2.2 e 2.3) exclusivos da versão fuzzy correspondente à equação logística 2.1.

Na seção 2.4, estão as considerações finais deste capítulo.

2.1 A Equação Fuzzy e Seus Pontos Fixos

Considere a equação fuzzy, de tempo discreto, associada ao modelo logístico 2.1

$$u_{t+1} = \hat{f}_a(u_t), \quad (2.2)$$

onde u_t representa a população na geração t e \hat{f}_a , a extensão de Zadeh de f_a .

Pelo teorema 1.3, sabemos que $\chi_{\{0\}}$ e $\chi_{\{x_a\}}$ são pontos fixos da equação 2.2, sendo o primeiro instável e o segundo assintoticamente estável para $1 < a < 3$ e instável para $3 \leq a \leq 4$. A partir de agora, estamos interessados em determinar novos pontos fixos para a equação 2.2; faremos referência a eles como pontos fixos fuzzy.

Vamos nos restringir a pontos fixos fuzzy com α -níveis compactos não-vazios e convexos (\mathcal{E}^1).

Se $u \in \mathcal{E}^1$ denota um ponto fixo da equação fuzzy 2.2, temos

$$u = \hat{f}_a(u), \quad (2.3)$$

ou seja:

$$[u]^\alpha = [\hat{f}_a(u)]^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (2.4)$$

¹Retomamos e complementamos o trabalho realizado pelo Dr. Laécio Carvalho de Barros, em sua tese de doutorado [2].

em termos dos α -níveis. Como f_a é contínua, segue do teorema 1.1

$$[u]^\alpha = f_a([u]^\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (2.5)$$

ou, utilizando a notação $[u]^\alpha = [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]$,

$$\begin{cases} u_I^\alpha &= \min \{f_a(x) : x \in [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]\} \\ u_{II}^\alpha &= \max \{f_a(x) : x \in [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]\} \end{cases}, 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (2.6)$$

Resolvendo o sistema 2.6, obtemos os novos pontos fixos:

$$\bar{u}_1 = \chi_{[0, x_a]}, 1 \leq a \leq 2, \quad (2.7)$$

$$\bar{u}_2 = \chi_{[{}^1x_1, {}^1x_2]}, 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}, \quad (2.8)$$

e, em termos dos α -níveis,

$$[\bar{u}_3]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ \{0\} & \text{se } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}, 2 < a \leq 4, \bar{\alpha} > 0, \quad (2.9)$$

$$[\bar{u}_4]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}, 2 < a \leq 4, \bar{\alpha} > 0, \quad (2.10)$$

$$[\bar{u}_5]^\alpha = \begin{cases} [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}, 1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4, \bar{\alpha} > 0, \quad (2.11)$$

$$[\bar{u}_6]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \bar{\alpha} < \alpha \leq \check{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \check{\alpha} \end{cases}, 1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4, \check{\alpha} > 0, \quad (2.12)$$

e

$$[\bar{u}_7]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ [{}^1x_1, {}^1x_2] & \text{se } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}, 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}, \bar{\alpha} > 0. \quad (2.13)$$

Em \bar{u}_2 e em \bar{u}_7 temos os valores

$${}^1x_1 = \frac{1 + a - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a} \quad (2.14)$$

e

$${}^1x_2 = \frac{1 + a + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}, \quad (2.15)$$

que formam um 2-ciclo do modelo logístico clássico, desde que $a \geq 3$.

O desenvolvimento matemático para a resolução do sistema 2.6 é apresentado na subseção 2.1.1.

As condições apresentadas à direita de cada um dos pontos fixos identificam os valores do parâmetro a nos quais o ponto fixo em questão existe.

As figuras 2.2 e 2.3 ilustram estes novos pontos fixos fuzzy.

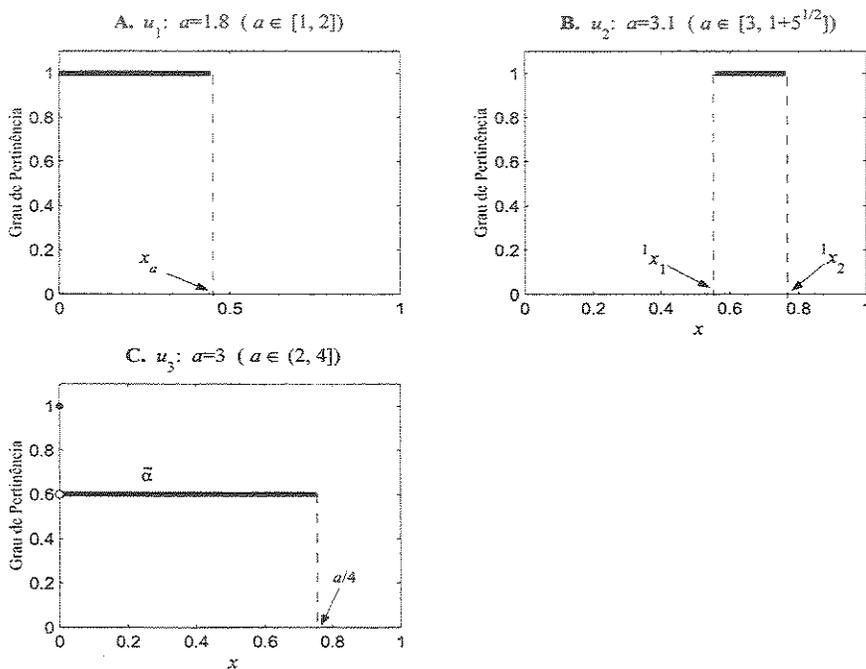


Figura 2.2: Pontos fixos fuzzy \bar{u}_1 , \bar{u}_2 e \bar{u}_3 .

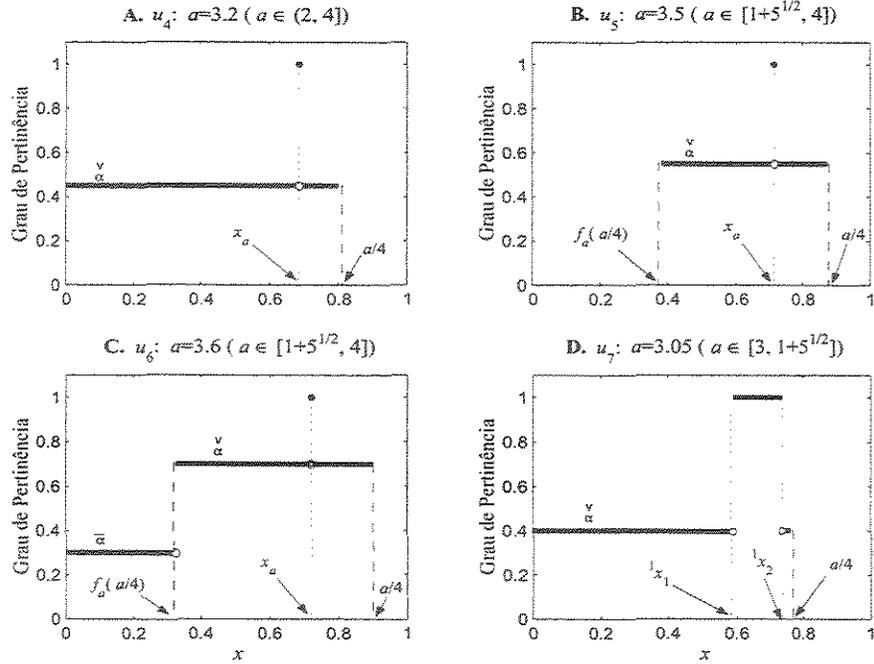


Figura 2.3: Pontos fixos fuzzy \bar{u}_4 , \bar{u}_5 , \bar{u}_6 e \bar{u}_7 .

A análise da estabilidade dos pontos fixos fuzzy resulta em

- \bar{u}_1 , \bar{u}_3 , \bar{u}_4 , \bar{u}_6 e \bar{u}_7 são instáveis nos seus intervalos de existência, respectivamente;
- \bar{u}_2 é assintoticamente estável no seu intervalo de existência;
- \bar{u}_5 é assintoticamente estável se $\bar{\alpha} = 1$ e $1 + \sqrt{5} \leq a < 4$ e instável, caso contrário.

As demonstrações desta análise estão na subseção 2.1.2.

A tabela 2.1 contém a distribuição de todos os pontos fixos do modelo logístico fuzzy discreto em relação ao parâmetro a (incluindo as funções características dos pontos fixos clássicos: $x_0 = 0$ e $x_a = 1 - \frac{1}{a}$). Os pontos fixos enquadrados são assintoticamente estáveis no intervalo indicado, com exceção do ponto \bar{u}_5 que é assintoticamente estável desde que $\bar{\alpha} = 1$ e $1 + \sqrt{5} \leq a < 4$. Os demais pontos fixos são instáveis.

$1 \leq a \leq 2$	$2 < a < 3$	$3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$	$1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4$
$\chi_{\{0\}}$	$\chi_{\{0\}}$	$\chi_{\{0\}}$	$\chi_{\{0\}}$
$\boxed{\chi_{\{x_a\}}}$	$\boxed{\chi_{\{x_a\}}}$	$\chi_{\{x_a\}}$	$\chi_{\{x_a\}}$
\bar{u}_1		$\boxed{\bar{u}_2}$	
	\bar{u}_3	\bar{u}_3	\bar{u}_3
	\bar{u}_4	\bar{u}_4	\bar{u}_4
			$\boxed{\bar{u}_5}$
			\bar{u}_6
			\bar{u}_7

Tabela 2.1: Distribuição de todos os pontos fixos do modelo logístico fuzzy discreto em relação à taxa de crescimento intrínseco a .

Observamos que os pontos fixos assintoticamente estáveis têm a forma χ_A , com $A = \{x_a\}$ (correspondente ao ponto fixo clássico para $1 \leq a < 3$), $A = [{}^1x_1, {}^1x_2]$ (\bar{u}_2 para $3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$) e $A = [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]$ (\bar{u}_5 para $\tilde{\alpha} = 1$ e $1 + \sqrt{5} \leq a < 4$).

Destacamos também que os pontos $\{{}^1x_1, {}^1x_2\}$ do 2-ciclo do modelo clássico dão forma ao ponto fixo fuzzy $\bar{u}_2 = \chi_{[{}^1x_1, {}^1x_2]}$ (figura 2.2 B). A partir desta idéia, vamos procurar por ciclos fuzzy formados a partir de ciclos clássicos, com a metade do período (seções 2.2 e 2.3).

2.1.1 Determinação dos Pontos Fixos Fuzzy

Para determinarmos os pontos fixos exclusivos do modelo logístico fuzzy discreto 2.2, necessitamos resolver o sistema 2.6, que reescrevemos aqui

$$\begin{cases} u_I^\alpha &= \min \{f_a(x) : x \in [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]\} \\ u_{II}^\alpha &= \max \{f_a(x) : x \in [u_I^\alpha, u_{II}^\alpha]\} \end{cases}, 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Consideramos inicialmente $1 \leq a \leq 2$ e observamos:

$$\begin{aligned} u_{II}^0 &= \max \{f_a(x) : x \in [u_I^0, u_{II}^0]\} \\ &\leq \max \{f_a(x) : x \in \mathbb{R}\} = f_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ou seja: $u_{II}^0 \leq \frac{1}{2}$ e daí $u_{II}^\alpha \leq \frac{1}{2}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Mas f_a é crescente para valores menores que $\frac{1}{2}$, então escrevemos 2.6 como

$$\begin{cases} u_I^\alpha = f_a(u_I^\alpha) \\ u_{II}^\alpha = f_a(u_{II}^\alpha) \end{cases} \tag{2.17}$$

que equivale a encontrar os pontos fixos do modelo clássico; isto é:

$$\begin{cases} u_I^\alpha = 0 & \text{ou} & u_I^\alpha = x_a \\ u_{II}^\alpha = 0 & \text{ou} & u_{II}^\alpha = x_a \end{cases} \tag{2.18}$$

As combinações possíveis, respeitando a natureza intervalar do α -nível ($u_I^\alpha \leq u_{II}^\alpha$), resultam $[u]^\alpha = \{0\}$ ou $[u]^\alpha = \{x_a\}$ ou $[u]^\alpha = [0, x_a]$, sendo que somente a última corresponde a uma solução nova. Portanto:

$$\bar{u}_1 = \chi_{[0, x_a]}, \quad 1 \leq a \leq 2, \tag{2.19}$$

é ponto fixo de 2.2 (figura 2.2 A).

Agora, supomos $2 < a \leq 4$ ($x_a > \frac{1}{2}$). Para resolver a equação 2.6, temos que levar em conta as três situações possíveis:

- A. $u_{II}^0 \leq \frac{1}{2}$;
- B. $u_I^0 \geq \frac{1}{2}$;
- C. $u_I^0 \leq \frac{1}{2}$ e $u_{II}^0 \geq \frac{1}{2}$.

Analisaremos cada caso separadamente como segue.

- A. $u_{II}^0 \leq \frac{1}{2}$

Este caso é equivalente ao resolvido para $1 \leq a \leq 2$ (f_a crescente), com a diferença que $x_a > \frac{1}{2}$. Então a única solução viável é $[u]^\alpha = \{0\}$, que não é nova. Portanto, não temos

novos pontos fixos para a equação fuzzy 2.2.

$$B. u_I^0 \geq \frac{1}{2}$$

A função f_a é decrescente para valores maiores que $\frac{1}{2}$ e a equação 2.6 pode ser escrita da forma

$$\begin{cases} u_I^\alpha &= f_a(u_{II}^\alpha) \\ u_{II}^\alpha &= f_a(u_I^\alpha) \end{cases} \quad (2.20)$$

ou

$$\begin{cases} u_I^\alpha &= f_a^2(u_I^\alpha) \\ u_{II}^\alpha &= f_a^2(u_{II}^\alpha) \end{cases} ; \quad (2.21)$$

temos que resolver a equação $x = f_a^2(x)$ que também aparece quando buscamos pelos pontos do 2-ciclo do modelo clássico; suas soluções são: $x = 0$, $x = {}^1x_1$, $x = x_a$ e $x = {}^1x_2$ onde

$${}^1x_1 = \frac{1+a - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

e

$${}^1x_2 = \frac{1+a + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a},$$

desde que $a \geq 3$.

As combinações possíveis produzem:

$$[u]^\alpha = \{x_a\};$$

$$[u]^\alpha = \{{}^1x_1\} \text{ desde que } 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5};$$

$$[u]^\alpha = \{{}^1x_2\} \text{ desde que } 3 \leq a \leq 4;$$

$$[u]^\alpha = [{}^1x_1, {}^1x_2] \text{ desde que } 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5};$$

$$[u]^\alpha = [{}^1x_1, x_a] \text{ desde que } 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5};$$

$$[u]^\alpha = [x_a, {}^1x_2] \text{ desde que } 3 \leq a \leq 4.$$

O primeiro resultado acima não corresponde a um novo ponto fixo e, por isso, o ignoramos. Descartamos também os segundo e terceiro resultados que correspondem ao 2-ciclo clássico e os quinto e sexto resultados que correspondem a um 2-ciclo fuzzy (assunto alvo

da próxima seção). Apenas o resultado $[u]^\alpha = [{}^1x_1, {}^1x_2]$ ($3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$) corresponde a um novo ponto fixo da equação fuzzy 2.2; ele é

$$\bar{u}_2 = \chi[{}^1x_1, {}^1x_2], \quad 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5} \quad (2.22)$$

e está ilustrado na figura 2.2 B. A condição $3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$ advém da condição $u_I^0 = {}^1x_1 \geq \frac{1}{2}$.

$$C. \quad u_I^0 \leq \frac{1}{2} \text{ e } u_{II}^0 \geq \frac{1}{2}$$

Temos que separar em dois sub-casos:

$$C.1 \quad u_I^\alpha \leq \frac{1}{2} \text{ para todo } \alpha \in [0, 1] \text{ e } \begin{cases} u_{II}^\alpha \geq \frac{1}{2} & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ u_{II}^\alpha \leq \frac{1}{2} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}, \quad \tilde{\alpha} > 0$$

$$C.2 \quad \begin{cases} u_I^\alpha \leq \frac{1}{2} & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ u_I^\alpha \geq \frac{1}{2} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}, \quad \tilde{\alpha} > 0 \text{ e } u_{II}^\alpha \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } \alpha \in [0, 1]$$

Observe que se escolhermos $\tilde{\alpha} = 1$ em C.1 ou $\tilde{\alpha} = 1$ em C.2, temos o caso particular $u_I^\alpha \leq \frac{1}{2}$ e $u_{II}^\alpha \geq \frac{1}{2}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. A figura 2.4 ilustra a natureza dos α -níveis descritos em C.1, C.2 e neste caso particular.

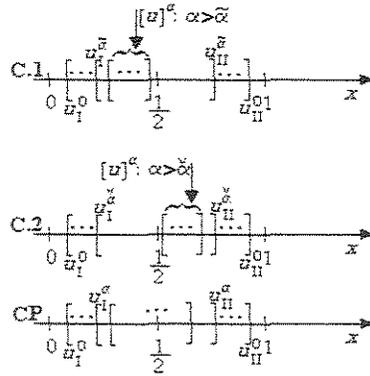


Figura 2.4: Natureza dos α -níveis descritos em C.1, C.2 e no caso particular ($\tilde{\alpha} = 1$ em C.1 ou $\tilde{\alpha} = 1$ em C.2).

C.1

Para $\alpha \leq \bar{\alpha}$ temos $u_I^\alpha \leq \frac{1}{2}$ e $u_{II}^\alpha \geq \frac{1}{2}$, e escrevemos a equação 2.6 como:

$$\begin{cases} u_I^\alpha &= \min \{f_a(u_I^\alpha), f_a(u_{II}^\alpha)\} \\ u_{II}^\alpha &= f_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \end{cases}, \quad (2.23)$$

daí

$$\begin{cases} u_I^\alpha &= \min \{f_a(u_I^\alpha), f_a\left(\frac{a}{4}\right)\} \\ u_{II}^\alpha &= \frac{a}{4} \end{cases}. \quad (2.24)$$

Se $u_I^\alpha = f_a(u_I^\alpha)$ então $u_I^\alpha = 0$ é a única solução da equação 2.24 que satisfaz $u_I^\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Daí obtemos $[u]^\alpha = [0, \frac{a}{4}]$ para $\alpha \leq \bar{\alpha}$ e $2 < a \leq 4$.

Se $u_I^\alpha = f_a\left(\frac{a}{4}\right)$ para $\alpha \leq \bar{\alpha}$, obtemos imediatamente $[u]^\alpha = [f_a\left(\frac{a}{4}\right), \frac{a}{4}]$ desde que $u_I^\alpha = f_a\left(\frac{a}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$, o que implica $1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4$.

E se $u_I^\alpha = \begin{cases} f_a(u_I^\alpha) & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ f_a\left(\frac{a}{4}\right) & \text{se } \bar{\alpha} < \alpha \leq \bar{\alpha} \end{cases}$, então

$$[u]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ [f_a\left(\frac{a}{4}\right), \frac{a}{4}] & \text{se } \bar{\alpha} < \alpha \leq \bar{\alpha} \end{cases}, \quad (2.25)$$

para $1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4$.

Para $\alpha > \bar{\alpha}$, o resultado é o mesmo obtido em **A**, isto é, $[u]^\alpha = \{0\}$. A única combinação viável entre este resultado e os três obtidos acima para $\alpha \leq \bar{\alpha}$, produz o seguinte ponto fixo da equação 2.2, expresso em função dos seus α -níveis:

$$[\bar{u}_3]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ \{0\} & \text{se } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}, \quad 2 < a \leq 4, \bar{\alpha} > 0. \quad (2.26)$$

A figura 2.2 **C** ilustra o novo ponto fixo fuzzy \bar{u}_3 .

C.2

Para $\alpha \leq \bar{\alpha}$, obtemos os mesmos resultados de **C.1** quando investigamos $\alpha \leq \bar{\alpha}$.

Para $\alpha > \bar{\alpha}$, os resultados são os mesmos obtidos em **B**.

As combinações viáveis apresentam os seguintes novos pontos fixos da equação fuzzy 2.2, expressos em termos dos seus α -níveis para $\tilde{\alpha} > 0$

$$[\bar{u}_4]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}, 2 < a \leq 4, \quad (2.27)$$

$$[\bar{u}_5]^\alpha = \begin{cases} [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}, 1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4, \quad (2.28)$$

$$[\bar{u}_6]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \bar{\alpha} < \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{x_a\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}, 1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4, \quad (2.29)$$

e

$$[\bar{u}_7]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ [x_1, x_2] & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}, 3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}. \quad (2.30)$$

Os pontos \bar{u}_4 , \bar{u}_5 , \bar{u}_6 e \bar{u}_7 estão ilustrados na figura 2.3.

2.1.2 Análise da Estabilidade dos Pontos Fixos Fuzzy

Destinamos esta subsecção ao estudo da estabilidade dos novos pontos fixos da equação fuzzy 2.2. As demonstrações desta seção, em grande parte, são baseadas nas apresentadas por Barros em sua tese de doutorado [2].

Começamos por \bar{u}_1 , $1 \leq a \leq 2$. Observe que, para qualquer $0 < \delta < x_a$, $[u]^\alpha = [\delta, x_a]$ satisfaz:

$$[u]^0 = [\delta, x_a] \subset B([0, x_a], \delta) \quad (2.31)$$

e

$$[0, x_a] \subset B([\delta, x_a], \delta) = B([u]^1, \delta). \quad (2.32)$$

Por outro lado, como f_a é monótona crescente em $[\delta, x_a] \subset [0, \frac{1}{2}]$ e $f_a(x_a) = x_a$, temos para $t \in \mathbb{N}$

$$f_a^t([u]^1) = f_a^t([\delta, x_a]) = [f_a^t(\delta), x_a]. \quad (2.33)$$

Dado $\varepsilon > 0$, se $[u]^\alpha = [\delta, x_a]$ então

$$[0, x_a] \not\subset B([f_a^t(\delta), x_a], \varepsilon) = B(f_a^t([u]^1), \varepsilon) \quad (2.34)$$

para infinitos valores de t (pois $f_a^t(\delta)$ é crescente em t). Portanto, pelo corolário 1.5, \bar{u}_1 é instável.

Vamos agora analisar a estabilidade do ponto fixo \bar{u}_2 , $3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$.

Observe que f_a decrescente em $[{}^1x_1, {}^1x_2]$.

I. Sejam $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$ ($t \in \mathbb{N}$).

Se t é par, tome $0 < \delta_1 < \varepsilon$ tal que

$$\begin{aligned} f_a^t(x) \in ({}^1x_1 - \varepsilon, {}^1x_1) & \text{ se } x \in ({}^1x_1 - \delta_1, {}^1x_1) \\ f_a^t(x) \in ({}^1x_2 - \varepsilon, {}^1x_2) & \text{ se } x \in ({}^1x_2 - \delta_1, {}^1x_2) \\ f_a^t(x) \in ({}^1x_1, {}^1x_1 + \varepsilon) & \text{ se } x \in ({}^1x_1, {}^1x_1 + \delta_1) \\ f_a^t(x) \in ({}^1x_2, {}^1x_2 + \varepsilon) & \text{ se } x \in ({}^1x_2, {}^1x_2 + \delta_1) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se t é ímpar, tome $0 < \delta_2 < \varepsilon$ tal que

$$\begin{aligned} f_a^t(x) \in ({}^1x_2, {}^1x_2 + \varepsilon) & \text{ se } x \in ({}^1x_1 - \delta_2, {}^1x_1) \\ f_a^t(x) \in ({}^1x_1, {}^1x_1 + \varepsilon) & \text{ se } x \in ({}^1x_2 - \delta_2, {}^1x_2) \\ f_a^t(x) \in ({}^1x_2 - \varepsilon, {}^1x_2) & \text{ se } x \in ({}^1x_1, {}^1x_1 + \delta_2) \\ f_a^t(x) \in ({}^1x_1 - \varepsilon, {}^1x_1) & \text{ se } x \in ({}^1x_2, {}^1x_2 + \delta_2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Seja $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como

$$\begin{aligned} f_a^t([{}^1x_1 - \delta, {}^1x_2 + \delta]) &= \begin{cases} [f_a^t({}^1x_1 - \delta), f_a^t({}^1x_2 + \delta)] & \text{se } t \text{ é par} \\ [f_a^t({}^1x_2 + \delta), f_a^t({}^1x_1 - \delta)] & \text{se } t \text{ é ímpar} \end{cases} \\ &\subset [{}^1x_1 - \varepsilon, {}^1x_2 + \varepsilon] \end{aligned} \quad (2.37)$$

segue que, para um subconjunto fuzzy arbitrário u ,

$$f_a^t([u]^0) \subset B([\bar{u}_2]^0, \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [u]^0 \subset B([\bar{u}_2]^0, \delta) \quad (2.38)$$

Por outro lado, se t é par $[{}^1x_1, {}^1x_2] \subset [f_a^t({}^1x_1 + \delta) - \varepsilon, f_a^t({}^1x_2 - \delta) + \varepsilon]$ e se t é ímpar $[{}^1x_1, {}^1x_2] \subset [f_a^t({}^1x_2 - \delta) - \varepsilon, f_a^t({}^1x_1 + \delta) + \varepsilon]$ ou seja

$$[{}^1x_1, {}^1x_2] \subset B(f_a^t([{}^1x_1 + \delta, {}^1x_2 - \delta]), \varepsilon) \quad (2.39)$$

e ainda

$$[\bar{u}_2]^0 \subset B(f_a^t([u]^1), \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [\bar{u}_2]^0 \subset B([u]^1, \delta) \quad . \quad (2.40)$$

De 2.38 e 2.40, e de acordo com o corolário 1.5, segue que \bar{u}_2 é estável.

II. Se t é par, existem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} f_a^t(x) = {}^1x_1$ se $\|x - {}^1x_1\| < r_1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f_a^t(x) = {}^1x_2$ se $\|x - {}^1x_2\| < r_2$.

Se t é ímpar, existem $r_3 > 0$ e $r_4 > 0$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} f_a^t(x) = {}^1x_2$ se $\|x - {}^1x_1\| < r_3$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} f_a^t(x) = {}^1x_1$ se $\|x - {}^1x_2\| < r_4$.

Tome $r = \min\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, usando os argumentos da parte I, podemos concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} D(f_a^t(u), \bar{u}_2) = 0$ se $u \in B(\bar{u}_2, r)$.

De I e II temos que \bar{u}_2 é assintoticamente estável.

Os pontos fixos $\bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_6$ e \bar{u}_7 são instáveis e têm demonstrações semelhantes; por isso, vamos apresentar apenas a demonstração da instabilidade de \bar{u}_3 ($2 < a \leq 4$).

Observe que, para $\delta > 0$ e $\tilde{\alpha} > 0$, $[u]^\alpha = \begin{cases} [\frac{\delta}{2}, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{0\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}$ satisfaz

$$D(u, \bar{u}_3) = \frac{\delta}{2} < \delta. \quad (2.41)$$

Por outro lado, temos pelo teorema 1.2

$$\begin{aligned} [\hat{f}_a^t(u)]^\alpha &= f_a^t([u]^\alpha) \\ &= \begin{cases} f_a^t([\frac{\delta}{2}, \frac{a}{4}]) & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ f_a^t(\{0\}) & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases} \\ &= \begin{cases} [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{0\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.42)$$

para infinitos valores de t ($t \in \mathbb{N}$).

Agora, dados $0 < \varepsilon < f_a\left(\frac{a}{4}\right)$ e u acima, temos

$$D(\hat{f}_a^t(u), \bar{u}_3) = f_a\left(\frac{a}{4}\right) > \varepsilon \quad (2.43)$$

para infinitos valores de t , apesar de $D(u, \bar{u}_3) < \delta$ para todo $\delta > 0$. Da definição 1.5, concluimos que \bar{u}_3 é instável.

Por fim, investigaremos a estabilidade de \bar{u}_5 . Este ponto fixo é:

- instável se $0 < \tilde{\alpha} < 1$, em todo seu intervalo de existência (demonstração no item **I** a seguir);
- instável se $\tilde{\alpha} = 1$ e $a = 4$; neste caso $\bar{u}_5 = \chi_{[0, \frac{a}{4}]}$ e é um caso particular de \bar{u}_3 , com $\tilde{\alpha} = 1$ (vale a demonstração já apresentada para a instabilidade do ponto \bar{u}_3);
- assintoticamente estável se $\tilde{\alpha} = 1$ e $1 + \sqrt{5} \leq a < 4$ (demonstração no item **II** a seguir).

I. $0 < \tilde{\alpha} < 1$ e $1 + \sqrt{5} \leq a \leq 4$

Observe que, para $\delta > 0$ e $0 < \tilde{\alpha} < 1$, $[u]^\alpha = \begin{cases} [f_a\left(\frac{a}{4}\right), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{x_a + \frac{\delta}{2}\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases}$ satisfaz

$$D(u, \bar{u}_5) = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Ainda, temos

$$\begin{aligned} [\hat{f}_a^t(u)]^\alpha &= f_a^t([u]^\alpha) \\ &= \begin{cases} f_a^t\left([f_a\left(\frac{a}{4}\right), \frac{a}{4}]\right) & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ f_a^t\left(\{x_a + \frac{\delta}{2}\}\right) & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases} \\ &= \begin{cases} [f_a\left(\frac{a}{4}\right), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \tilde{\alpha} \\ \{f_a^t(x_a + \frac{\delta}{2})\} & \text{se } \alpha > \tilde{\alpha} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\text{e } D(\hat{f}_a^t(u), \bar{u}_5) = |f_a^t(x_a + \frac{\delta}{2}) - x_a|.$$

Visto que f_a é \mathcal{C}^1 e que $f'_a(x_a) = 2 - a < -1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'_a(x)| > A > 1$ para $x \in (x_a - \varepsilon, x_a + \varepsilon)$. Pelo Teorema do Valor Médio segue

$$|f_a(x) - x_a| = |f_a(x) - f_a(x_a)| > A|x - x_a|. \quad (2.45)$$

Ainda, pelo mesmo argumento, $|f_a^t(x) - x_a| > A^t|x - x_a|$ desde que $x, f_a(x), \dots, f_a^t(x) \in (x_a - \varepsilon, x_a + \varepsilon)$. Como $A^t|x - x_a|$ é crescente em t , existe $\tau \in \mathbb{N}$ tal que $|f_a^\tau(x) - x_a| > A^\tau|x - x_a| > \varepsilon$ ou $f_a^\tau(x) \notin (x_a - \varepsilon, x_a + \varepsilon)$.

Tome $\varepsilon > 0$ que satisfaça $|f_a'(x)| > A > 1$ para $x \in (x_a - \varepsilon, x_a + \varepsilon)$.

Se $f_a^t(x_a + \frac{\varepsilon}{2}) \notin (x_a - \varepsilon, x_a + \varepsilon)$ para todo t , então o resultado segue imediatamente ($D(\hat{f}_a^t(u), \bar{u}_5) > \varepsilon$ para todo t).

Se $f_a^{\tilde{t}}(x_a + \frac{\varepsilon}{2}) \in (x_a - \varepsilon, x_a + \varepsilon)$ para algum \tilde{t} , então existe $\bar{\tau}$ tal que $D(\hat{f}_a^{\tilde{t} + \bar{\tau}}(u), \bar{u}_5) > \varepsilon$.

Daí, concluímos novamente que $D(\hat{f}_a^t(u), \bar{u}_5) > \varepsilon$ para infinitos valores de t .

Portanto, \bar{u}_5 é instável ($0 < \alpha < 1$).

II. $\alpha = 1$ e $1 + \sqrt{5} \leq a < 4$

Neste caso, reduzimos $\bar{u}_5 = \chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]}$. Agora vamos provar a estabilidade deste ponto fixo.

Pela continuidade de f_a , temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta < \varepsilon$ com $\frac{1}{2} < x_a < \frac{a}{4} - \delta$ e $f_a(\frac{a}{4}) - \delta > 0$ tal que $f_a(\frac{a}{4} - \delta) < f_a(\frac{a}{4}) + \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Supomos que $u \in \mathcal{E}^1$ tal que $[u]^0 \subset B([f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}], \delta)$ e $[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] \subset B([u]^1, \delta)$.

Calculamos:

$$f_a\left(\left[f_a\left(\frac{a}{4}\right) + \delta, \frac{a}{4} - \delta\right]\right) = \left[f_a\left(\frac{a}{4} - \delta\right), \frac{a}{4}\right]$$

e

$$f_a^2\left(\left[f_a\left(\frac{a}{4}\right) + \delta, \frac{a}{4} - \delta\right]\right) = \left[f_a\left(\frac{a}{4}\right), \frac{a}{4}\right],$$

donde concluímos que

$$f_a^t\left(\left[f_a\left(\frac{a}{4}\right) + \delta, \frac{a}{4} - \delta\right]\right) = \left[f_a\left(\frac{a}{4}\right), \frac{a}{4}\right], \forall t \geq 2.$$

Assim $[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] \subset B(f_a^t([f_a(\frac{a}{4}) + \delta, \frac{a}{4} - \delta]), \varepsilon) \forall t \in \mathbb{N}$.

Daí

$$\left[f_a\left(\frac{a}{4}\right), \frac{a}{4}\right] \subset B(f_a^t([u]^1), \varepsilon)$$

desde que $[f_a(\frac{a}{4}) + \delta, \frac{a}{4} - \delta] \subset [u]^1$, o que acontece por hipótese.

Para encerrar a questão da estabilidade de $\chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]}$, resta mostrar que $f_a^t([u]^0) \subset B([f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}], \varepsilon)$ para todo $t \in \mathbb{N}$.

Se $[u]^0 \subset [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]$, o resultado é imediato; caso contrário, temos:

$$f_a([u]^0) = \left[m, \frac{a}{4} \right]$$

onde $m = \min \{f_a(u_I^0), f_a(u_{II}^0)\}$. Observe que $f_a^t(m)$ é uma seqüência crescente em t enquanto $f_a^t(m) \leq \frac{1}{2}$; então existe \check{t} tal que

$$\min \left\{ f_a^t(m), f_a\left(\frac{a}{4}\right) \right\} = \begin{cases} f_a^t(m) & \text{se } t < \check{t} \\ f_a\left(\frac{a}{4}\right) & \text{se } t \geq \check{t} \end{cases} \quad (2.46)$$

e

$$f_a^t([u]^0) = \begin{cases} [f_a^t(m), \frac{a}{4}] & \text{se } t < \check{t} \\ [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } t \geq \check{t} \end{cases}. \quad (2.47)$$

Usando $f_a(\frac{a}{4} - \delta) < f_a(\frac{a}{4}) + \varepsilon < \frac{1}{2}$, segue o resultado.

Logo, pelo corolário 1.5, $\bar{u}_5 = \chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]}$ é estável ($1 + \sqrt{5} \leq a < 4$).

Finalizando, pelos argumentos anteriores, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D\left(\hat{f}_a(u), \chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]}\right) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{E}^1$$

com $D\left(u, \chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]}\right) < r$, onde r é tal que $f_a(\frac{a}{4}) - r > 0$ e $\frac{a}{4} + r < 1$. Portanto, o ponto fixo fuzzy $\bar{u}_5 = \chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]}$ é assintoticamente estável ($1 + \sqrt{5} \leq a < 4$).

2.2 Ciclos Fuzzy

Na seção anterior, nós confirmamos e generalizamos os resultados obtidos por Barros [2]. No entanto, ele não investigou ciclos do modelo logístico fuzzy discreto 2.2. Nas seções 2.2 e 2.3, estudamos uma família de ciclos assintoticamente estáveis deste modelo.

Vamos retomar o ponto fixo fuzzy $\bar{u}_2 = \chi_{[{}^1x_1, {}^1x_2]}$, que existe e é assintoticamente estável desde que $a \in [a_1, a_1^*] = [3, 1 + \sqrt{5}]$; os pontos 1x_1 e 1x_2 formam o 2-ciclo do modelo

logístico clássico, que existe a partir do valor de bifurcação $a = a_1 = 3$, mas que é assintoticamente estável desde que $a \in [a_1, a_2] = [3, 1 + \sqrt{6}]$ [32]. Neste caso, os pontos da órbita de período 2 do modelo clássico também dão forma à órbita fuzzy de período 1 ou, equivalentemente, ao ponto fixo fuzzy \tilde{u}_2 ($a \in [3, 1 + \sqrt{5}]$).

Do parágrafo anterior, esperamos que os pontos de uma órbita de período 2^N do modelo clássico dêem forma a uma órbita fuzzy com a metade do período: 2^{N-1} ($N \in \mathbb{N}$). Ou seja, a partir de um 2^N -ciclo clássico, cujos pontos enumeramos a seguir em ordem crescente

$$B_N = \{^N x_1, ^N x_2, \dots, ^N x_{2^{N-1}}, ^N x_{2^N}\},$$

esperamos construir um 2^{N-1} -ciclo fuzzy da forma

$$\hat{B}_N = \left\{ \chi_{[^N x_1, ^N x_2]}, \chi_{[^N x_3, ^N x_4]}, \dots, \chi_{[^N x_{2^{N-1}}, ^N x_{2^N}]} \right\}.$$

O objetivo desta seção e da seção 2.3 é explorar esta expectativa.

Vamos considerar um 2^N -ciclo clássico B_N ($N \in \mathbb{N}$) que apresente as seguintes características: ele existe a partir do valor de bifurcação $a = a_N$ ($a_N < a^* = 3.569 \dots$) e é assintoticamente estável desde que $a \in [a_N, a_{N+1})$, onde a_{N+1} é o próximo valor de bifurcação.

Ainda, esperamos que o intervalo de existência do 2^{N-1} -ciclo fuzzy \hat{B}_N tenha a forma $[a_N, a_N^*]$, tal que $a_N^* < a_{N+1}$ e que \hat{B}_N seja assintoticamente estável neste intervalo².

No exemplo 2.1, apresentamos o 2-ciclo fuzzy \hat{B}_2 formado a partir do pontos do 4-ciclo clássico B_2 ($N = 2$); este exemplo deve prepararmos os resultados generalizados.

Exemplo 2.1:

O modelo logístico discreto 2.1 apresenta um 4-ciclo ($N = 2$) que denotamos por $B_2 = \{^2 x_1, ^2 x_2, ^2 x_3, ^2 x_4\}$, em ordem crescente; ele existe a partir do valor de bifurcação $a = a_2 = 1 + \sqrt{6}$ e é assintoticamente estável desde que $a \in [a_2, a_3) = [1 + \sqrt{6}, 3.541 \dots)$. Ilustramos o 4-ciclo clássico B_2 e os valores de bifurcação a_2 e a_3 na figura 2.5.

Os pontos de B_2 satisfazem $f_a^4(x) = x$ e a ordem iterativa neste 4-ciclo é:

$$f_a(^2 x_1) = ^2 x_3, f_a(^2 x_3) = ^2 x_2, f_a(^2 x_2) = ^2 x_4, f_a(^2 x_4) = ^2 x_1.$$

²A caracterização de a_N^* será apresentada no decorrer da seção e na seção 2.3.

ou seja:

$$\hat{f}_a(\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}) = \begin{cases} \chi_{[{}^2x_3, {}^2x_4]}, & \text{se } {}^2x_2 \leq \frac{1}{2} \\ \chi_{[{}^2x_3, \frac{a}{4}]}, & \text{se } {}^2x_2 > \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (2.52)$$

Da expressão 2.52, obtemos a restrição que o subconjunto fuzzy $\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}$ só faz parte do ciclo fuzzy se ${}^2x_2 \leq \frac{1}{2}$.

A condição ${}^2x_2 \leq \frac{1}{2}$ equivale a $a \leq a_2^*$ (conforme ilustra a figura 2.5). O valor limiar a_2^* é encontrado quando ${}^2x_2 = \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{2} \in B_2$, ou ainda

$$f_{a_2^*}^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \quad (2.53)$$

Neste caso, resolvendo a equação 2.53, obtemos $a_2^* = 3.4985 \dots$.

II. Vamos calcular $\hat{f}_a(\chi_{[{}^2x_3, {}^2x_4]})$. Equivalentemente, escrevemos na notação de α -níveis ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$$\begin{aligned} \left[\hat{f}_a(\chi_{[{}^2x_3, {}^2x_4]})\right]^\alpha &= f_a([{}^2x_3, {}^2x_4]) \\ &= [\min\{f_a(x) : x \in [{}^2x_3, {}^2x_4]\}, \max\{f_a(x) : x \in [{}^2x_3, {}^2x_4]\}] \\ &= [f_a({}^2x_4), f_a({}^2x_3)] \\ &= [{}^2x_1, {}^2x_2] \end{aligned}, \quad (2.54)$$

ou seja:

$$\hat{f}_a(\chi_{[{}^2x_3, {}^2x_4]}) = \chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}. \quad (2.55)$$

Dos itens **I** e **II**, concluímos que $\hat{B}_2 = \{\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}, \chi_{[{}^2x_3, {}^2x_4]}\}$ é um 2-ciclo fuzzy desde que $a \in [a_2, a_2^*] = [1 + \sqrt{6}, 3.4985 \dots]$ ($a_2^* < a_3$). E ainda observamos que os intervalos das funções características permanecem restritos aos pontos do 4-ciclo clássico B_2 se f_a é monótona no intervalo $[{}^2x_1, {}^2x_2]$ ou, equivalentemente, $\frac{1}{2} \notin ({}^2x_1, {}^2x_2)$.

Neste exemplo, não analisamos a estabilidade do 2-ciclo fuzzy \hat{B}_2 .

Sub-exemplo:

Considere $\bar{a} = 3.52$ (fora do intervalo de existência do 2-ciclo fuzzy). Observe o que acontece quando iteramos $\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}$ por \hat{f}_a , em termos dos α -níveis ($0 \leq \alpha \leq 1$):

$$\begin{aligned} \left[\hat{f}_a (\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}) \right]^\alpha &= f_a ([{}^2x_1, {}^2x_2]) \\ &= [\min \{f_a(x) : x \in [{}^2x_1, {}^2x_2]\}, \max \{f_a(x) : x \in [{}^2x_1, {}^2x_2]\}] , \\ &= [{}^2x_3, \frac{a}{4}] \end{aligned} \quad (2.56)$$

ou seja,

$$\hat{f}_a (\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}) = \chi_{[{}^2x_3, \frac{a}{4}]} . \quad (2.57)$$

Iterando novamente, obtemos

$$\hat{f}_a^2 (\chi_{[{}^2x_1, {}^2x_2]}) = \chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]} \quad (2.58)$$

que é um ponto fixo da equação fuzzy 2.2 assintoticamente estável para este valor de a (caso particular de \bar{u}_5 : $\bar{\alpha} = 1$).

2.3 Ciclos Fuzzy: Resultados Generalizados

Para prosseguirmos com os resultados, consideremos a seguinte notação.

Seja $B_N = \{{}^N x_1, {}^N x_2, \dots, {}^N x_{2^N-1}, {}^N x_{2^N}\}$, em ordem crescente, um 2^N -ciclo do modelo 2.1 que existe a partir do valor de bifurcação $a = a_N$ ($a_N < a^* = 3.569 \dots$) e é assintoticamente estável desde que $a \in [a_N, a_{N+1})$, onde a_{N+1} é o próximo valor de bifurcação.

Consideremos a região ${}^N R_i$ limitada por $a = a_N$, $a = a^*$, $x = {}^N g_i(a)$ e $x = {}^N h_i(a)$ onde ${}^N g_i$ e ${}^N h_i$ são os valores das soluções de $f_a^{2^N}(x) = x$ que são instáveis para $a \geq a_N^3$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^N\}$, de tal forma que $x = {}^N x_i(a)$ satisfaz ${}^N g_i(a) < {}^N x_i(a) < {}^N h_i(a)$. Observamos que ${}^N R_{2^N}$ é limitada por $x = 1$ no lugar de $x = {}^N h_i(a)$. Também, dado a , denotamos ${}^N R_i(a) = [{}^N g_i(a), {}^N h_i(a)]$.

³Equivalentemente, ${}^N g_i(a)$ e ${}^N h_i(a)$ podem ser entendidos também como todas as soluções de $f_a^{2^N-1}(x) = x$ para $a \geq a_N$.

Exemplo 2.2:

Vamos tomar $N = 2$; notamos que $f_a^{2^2}(x) = f_a^4(x) = x$ têm como soluções: $0, {}^2x_1, {}^1x_1, {}^2x_2, {}^0x_1 = x_a, {}^2x_3, {}^1x_2, {}^2x_4$, em ordem crescente ($a \geq a_2$).

Destas soluções, os pontos fixos clássicos 0 e x_a , bem como o 2-ciclo clássico $B_1 = \{{}^1x_1, {}^1x_2\}$, são instáveis desde que $a \geq a_2$; logo, eles limitam as regiões ${}^2R_1 = (a_2, a^*) \times [0, {}^1x_1]$, ${}^2R_2 = (a_2, a^*) \times [{}^1x_1, {}^0x_1]$, ${}^2R_3 = (a_2, a^*) \times [{}^0x_1, {}^1x_2]$, e ${}^2R_4 = (a_2, a^*) \times [{}^1x_2, 1]$, ilustradas na figura 2.6.

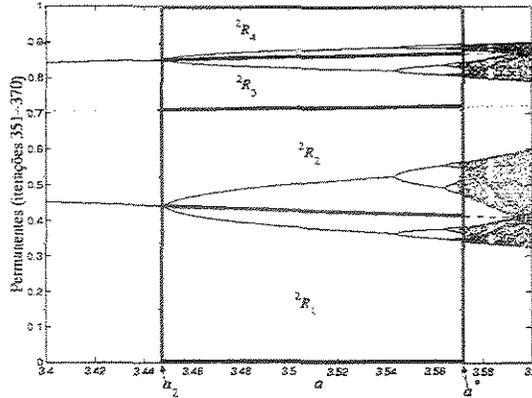


Figura 2.6: Seção do diagrama de bifurcação do modelo logístico destacando as regiões ${}^2R_1, {}^2R_2, {}^2R_3$ e 2R_4 .

O 4-ciclo clássico $B_2 = \{{}^2x_1, {}^2x_2, {}^2x_3, {}^2x_4\}$ é assintoticamente estável desde que $a \in [a_2, a_3)$ e instável, caso contrário. Note que ${}^2x_i \in {}^2R_i(a)$, para $a \in [a_2, a^*]$ e $i = 1, 2, 3, 4$.

Os dois lemas a seguir dizem respeito ao modelo logístico discreto 2.1; eles auxiliam na demonstração do teorema 2.3, que envolve a equação fuzzy discreta 2.2.

Observamos na figura 2.5 que quando o 2-ciclo $B_1 = \{{}^1x_1, {}^1x_2\}$ perde a estabilidade em a_2 , nasce o 4-ciclo $B_2 = \{{}^2x_1, {}^2x_2, {}^2x_3, {}^2x_4\}$, de modo que o ramo de 1x_1 dá origem aos ramos de 2x_1 e de 2x_2 , e o ramo de 1x_2 dá origem aos ramos de 2x_3 e de 2x_4 . De modo geral, quando B_{N-1} perde a estabilidade em a_N , o ramo de ${}^{N-1}x_i \in B_{N-1}$ dá origem aos ramos de ${}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i} \in B_N$ ($i = 1, 2, \dots, 2^{N-1}$).

Lema 2.1. Para $N \in \mathbb{N}$ e $a \in [a_N, a^*)$, a equação discreta 2.1 apresenta um 2^N -ciclo

$$B_N = \{ {}^N x_1, {}^N x_2, \dots, {}^N x_{2^N} \},$$

em ordem crescente. Se $f_a({}^N x_i) = {}^N x_j$ ($i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, 2^N\}$), então os pontos de um 2^t -ciclo B_t ($t \in \mathbb{N}$, $t > N$ e $a \in [a_t, a^*)$) em ${}^N R_t$ são levados nos pontos do mesmo ciclo B_t em ${}^N R_j$.

Prova:

Esta demonstração é feita por indução em N .

$N = 1$:

Neste caso, $B_1 = \{ {}^1 x_1, {}^1 x_2 \}$ e é óbvio que $f_a({}^1 x_1) = {}^1 x_2$ e $f_a({}^1 x_2) = {}^1 x_1$.

A partir de a_1 , ${}^0 x_1 = x_a = 1 - 1/a$ divide o espaço $[a_1, a^*) \times [0, 1]$ em duas regiões ${}^1 R_1$ e ${}^1 R_2$.

Para $a \in [a_t, a^*)$, $t > 1$, temos um 2^t -ciclo que satisfaz $f_a^{2^t}(x) = x$ e

$$\underbrace{{}^t x_1 < {}^t x_2 < \dots < {}^t x_{2^{t-1}}}_{\in {}^1 R_1} < {}^0 x_1 < \underbrace{{}^t x_{2^{t-1}+1} < \dots < {}^t x_{2^t}}_{\in {}^1 R_2}. \quad (2.59)$$

Como $a > 3$, temos ${}^0 x_1 > \frac{1}{2}$; daí:

$$\frac{1}{2} < {}^0 x_1 < {}^t x_{2^{t-1}+1} < \dots < {}^t x_{2^t} \quad (2.60)$$

e como f_a é decrescente em $[\frac{1}{2}, 1]$, segue que

$$f_a({}^t x_{2^t}) < f_a({}^t x_{2^t-1}) < \dots < f_a({}^t x_{2^{t-1}+1}) < f_a({}^0 x_1) = {}^0 x_1 < f_a\left(\frac{1}{2}\right). \quad (2.61)$$

Mas f_a leva pontos do 2^t -ciclo em outros pontos do mesmo ciclo, então, comparando 2.61 com 2.59, a única escolha possível é

$$f_a({}^t x_{2^t}) = {}^t x_1; f_a({}^t x_{2^t-1}) = {}^t x_2; \dots; f_a({}^t x_{2^{t-1}+1}) = {}^t x_{2^t-1}. \quad (2.62)$$

Portanto, a metade dos pontos do 2^t -ciclo que estão em ${}^1 R_2$ só podem ser levados por f_a na outra metade dos pontos que estão em ${}^1 R_1$. Por conseqüência, também os pontos que estão em

1R_1 só podem ser levados naqueles que estão em 1R_2 , pois não existem repetições no percurso iterativo de um ciclo.

$N > 1$:

Consideramos válida a hipótese de indução: “Se $f_a({}^{N-1}x_{\tilde{i}}) = {}^{N-1}x_{\tilde{j}}$ ($\tilde{i} \neq \tilde{j}$, $\tilde{i}, \tilde{j} \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$), então os pontos de um 2^t -ciclo B_t ($t \in \mathbb{N}$, $t > N - 1$ e $a \in [a_t, a^*)$) em ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}$ são levados nos pontos do mesmo ciclo B_t em ${}^{N-1}R_{\tilde{j}}$ ”.

Em a_N , a solução ${}^{N-1}x_{\tilde{i}}$ perde a estabilidade, dando origem a duas novas soluções ${}^N x_{2\tilde{i}-1}$ e ${}^N x_{2\tilde{i}}$ tais que

$${}^N x_{2\tilde{i}-1} < {}^{N-1}x_{\tilde{i}} < {}^N x_{2\tilde{i}}. \quad (2.63)$$

A partir de a_N , ${}^{N-1}x_{\tilde{i}}$ é solução instável de $f_a^{2^N}(x) = x$ e divide a antiga região ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}(a) = [{}^{N-1}g_{\tilde{i}}(a), {}^{N-1}h_{\tilde{i}}(a)]$ em duas sub-regiões ${}^N R_{2\tilde{i}-1}(a) = [{}^{N-1}g_{\tilde{i}}(a), {}^{N-1}x_{\tilde{i}}(a)]$ e ${}^N R_{2\tilde{i}}(a) = [{}^{N-1}x_{\tilde{i}}(a), {}^{N-1}h_{\tilde{i}}(a)]$ tais que ${}^N x_{2\tilde{i}-1} \in {}^N R_{2\tilde{i}-1}(a)$ e ${}^N x_{2\tilde{i}} \in {}^N R_{2\tilde{i}}(a)$.

Igualmente, em a_N , a solução ${}^{N-1}x_{\tilde{j}}$ perde a estabilidade, dando origem a duas novas soluções ${}^N x_{2\tilde{j}-1}$ e ${}^N x_{2\tilde{j}}$ tais que

$${}^N x_{2\tilde{j}-1} < {}^{N-1}x_{\tilde{j}} < {}^N x_{2\tilde{j}} \quad (2.64)$$

tais que ${}^N x_{2\tilde{j}-1} \in {}^N R_{2\tilde{j}-1}(a)$ e ${}^N x_{2\tilde{j}} \in {}^N R_{2\tilde{j}}(a)$.

Notamos que, da forma que as regiões foram limitadas, temos exatamente o mesmo número de pontos de B_t em cada região ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}$ ($\tilde{i} \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$).

I. Se f_a é crescente em ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}(a)$, então $f_a({}^N x_{2\tilde{i}-1}) = {}^N x_{2\tilde{j}-1}$ e $f_a({}^N x_{2\tilde{i}}) = {}^N x_{2\tilde{j}}$. Também todos os pontos de B_t em ${}^N R_{2\tilde{i}-1}(a)$ e em ${}^N R_{2\tilde{i}}(a)$ são levados em pontos do mesmo 2^t -ciclo em ${}^N R_{2\tilde{j}-1}(a)$ e em ${}^N R_{2\tilde{j}}(a)$, respectivamente.

II. Se f_a é decrescente em ${}^{N-1}R_{\tilde{i}}(a)$, então $f_a({}^N x_{2\tilde{i}-1}) = {}^N x_{2\tilde{j}}$ e $f_a({}^N x_{2\tilde{i}}) = {}^N x_{2\tilde{j}-1}$. Também todos os pontos de B_t em ${}^N R_{2\tilde{i}-1}(a)$ e em ${}^N R_{2\tilde{i}}(a)$ são levados em pontos do mesmo 2^t -ciclo em ${}^N R_{2\tilde{j}}(a)$ e em ${}^N R_{2\tilde{j}-1}(a)$, respectivamente.

III. Suponha f_a crescente em $[{}^{N-1}g_{\tilde{i}}(a), \frac{1}{2}]$ e decrescente em $[\frac{1}{2}, {}^{N-1}h_{\tilde{i}}(a)]$, ou seja, $\frac{1}{2} \in {}^{N-1}R_{\tilde{i}}(a)$ (valor onde ocorre o máximo de f_a).

Neste caso, f_a é monótona em uma das regiões, ${}^N R_{2\tilde{i}-1}(a)$ ou ${}^N R_{2\tilde{i}}(a)$, e nesta região usamos o mesmo argumento dos itens I ou II para definir a região para onde os pontos de B_i são levados por f_a . Já para a região onde f_a não é monótona, resta concluir que os pontos de B_i nela são iterados por f_a na outra região ainda não atingida (análogo ao que ocorre quando $N = 1$).

Pelos itens anteriores, temos que $f_a({}^N x_i) = {}^N x_j$ implica que pontos de B_i em ${}^N R_i$ são levados por f_a nos pontos do mesmo ciclo em ${}^N R_j$, podendo i assumir o valor $2\tilde{i} - 1$ ou $2\tilde{i}$ (e j , o correspondente valor dentre $2\tilde{j} - 1$ e $2\tilde{j}$).

Lema 2.2. Para $N \in \mathbb{N}$ e $a \in [a_N, a^*)$, a equação discreta 2.1 apresenta um 2^N -ciclo

$$B_N = \{ {}^N x_1, {}^N x_2, \dots, {}^N x_{2^N} \},$$

em ordem crescente, assintoticamente estável desde que $a \in [a_N, a_{N+1})$. As condições a seguir são equivalentes:

- (1) $0 \leq \mu(B_N) \leq 1$, onde $\mu(B_N) = f'_a({}^N x_1) \cdot f'_a({}^N x_2) \cdot \dots \cdot f'_a({}^N x_{2^N})$;
- (2) $a \in [a_N, a_N^*) \subset [a_N, a_{N+1})$, onde a_N^* é tal que $f_{a_N^*}^{2^N}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$;
- (3) $[{}^N x_1, {}^N x_2] \subset [0, \frac{1}{2}]$, \dots , $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset [0, \frac{1}{2}]$ e $[{}^N x_{2i+1}, {}^N x_{2i+2}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$, \dots , $[{}^N x_{2^N-1}, {}^N x_{2^N}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$.

Prova:

$$(1) \Leftrightarrow (2)$$

Sabemos que $\mu(B_N)$ é monótona decrescente em $[a_N, a_{N+1}]$, variando a partir de 1 até -1^4 . Se a_N^* denota o valor de a tal que $\mu(B_N) = 0$, temos imediatamente que $0 \leq \mu(B_N) \leq 1 \Leftrightarrow a \in [a_N, a_N^*]$ (conforme ilustrado na figura 2.7). E ainda, em $a = a_N^*$, temos

$$\begin{aligned} \mu(B_N) &= f'_{a_N^*}({}^N x_1) \cdot f'_{a_N^*}({}^N x_2) \cdot \dots \cdot f'_{a_N^*}({}^N x_{2^N}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ a_N^*(1 - 2 \cdot {}^N x_1) \cdot a_N^*(1 - 2 \cdot {}^N x_2) \cdot \dots \cdot a_N^*(1 - 2 \cdot {}^N x_{2^N}) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

⁴O ciclo B_N é assintoticamente estável desde que $|\mu(B_N)| < 1$ [32].

$$\begin{aligned}
& {}^N x_1 = \frac{1}{2} \text{ ou } {}^N x_2 = \frac{1}{2} \text{ ou } \dots \text{ ou } {}^N x_{2^N} = \frac{1}{2} \\
& \iff \\
& \frac{1}{2} \in B_N \text{ ou } f_{a_N^*}^{2^N} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

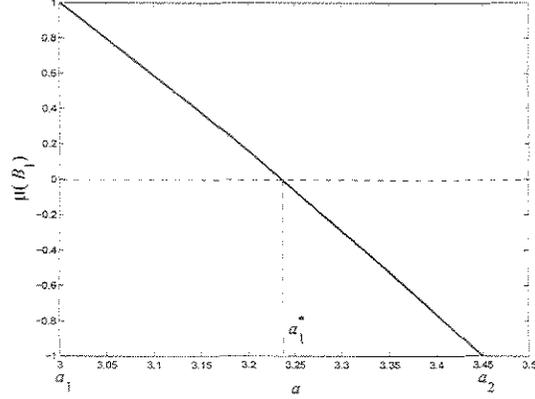


Figura 2.7: Função $\mu(B_1)$: a_1^* é o valor do parâmetro a quando $\mu(B_1) = 0$ ou $f_{a_1^*}^{2^N} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$.

$$(2) \Leftrightarrow (3)$$

Observe na figura 2.8 as duas únicas possibilidades: na primeira, o ramo do ${}^N x_{2i+1}$ decresce interceptando o $\frac{1}{2}$ quando $a = a_N^*$ (2.8 A) e na segunda, o ramo do ${}^N x_{2i}$ cresce interceptando o $\frac{1}{2}$ quando $a = a_N^*$ (2.8 B). O resultado segue imediatamente.

Como f_a é monótona crescente em $[0, \frac{1}{2}]$ e monótona decrescente em $[\frac{1}{2}, 1]$, (3) equivale dizer que f_a é monótona em $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots, 2^{N-1}$.

Teorema 2.3. Para $N \in \mathbb{N}$ e $a \in [a_N, a_N^*]$, a equação fuzzy discreta $u_{t+1} = \hat{f}_a(u_t)$ apresenta um 2^{N-1} -ciclo fuzzy assintoticamente estável

$$\hat{B}_N = \left\{ \chi_{[{}^N x_1, {}^N x_2]}, \chi_{[{}^N x_3, {}^N x_4]}, \dots, \chi_{[{}^N x_{2^{N-1}}, {}^N x_{2^N}]} \right\},$$

que satisfaz $\hat{f}_a^{2^{N-1}}(u) = u$, onde

$$B_N = \{ {}^N x_1, {}^N x_2, \dots, {}^N x_{2^N} \}$$

é o 2^N -ciclo clássico assintoticamente estável em $a \in [a_N, a_{N+1})$ ($a_N^* < a_{N+1}$ tal que $f_{a_N^*}^{2^N} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$).

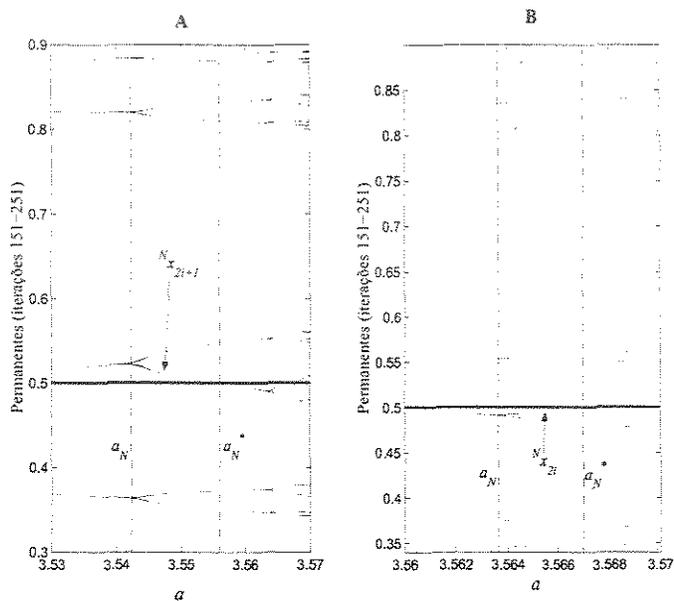


Figura 2.8: **A.** Seção do diagrama de bifurcação destacando o 8-ciclo B_3 : no intervalo $[a_3, a_3^*]$ temos $[{}^3x_1, {}^3x_2] \subset [0, \frac{1}{2}]$ e $[{}^3x_3, {}^3x_4], [{}^3x_5, {}^3x_6], [{}^3x_7, {}^3x_8] \subset [\frac{1}{2}, 1]$; **B.** Seção do diagrama de bifurcação destacando o 16-ciclo B_4 : no intervalo $[a_4, a_4^*]$ temos $[{}^4x_1, {}^4x_2], [{}^4x_3, {}^4x_4], [{}^4x_5, {}^4x_6] \subset [0, \frac{1}{2}]$ e $[{}^4x_7, {}^4x_8], \dots, [{}^4x_{15}, {}^4x_{16}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

Prova:

Inicialmente, observemos que os pontos do 2^{N-1} -ciclo clássico $B_{N-1} = \{^{N-1}x_1, ^{N-1}x_2, \dots, ^{N-1}x_{2^{N-1}}\}$ obedecem à seguinte ordem iterativa $f_a(^{N-1}x_{i_k}) = ^{N-1}x_{i_{k+1}}$, onde i_k assume o valor apropriado no conjunto $\{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$, para $k \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$ e $i_{2^{N-1}+1} = i_1$. Pelo lema 2.1, os pontos de um 2^t -ciclo B_t ($t \in \mathbb{N}$, $t > N - 1$ e $a \in [a_t, a^*]$) em $^{N-1}R_{i_k}$ são levados nos pontos do mesmo ciclo B_t em $^{N-1}R_{i_{k+1}}$.

I. Demonstração que \hat{B}_N é um 2^{N-1} -ciclo fuzzy.

Temos que mostrar que qualquer subconjunto fuzzy \bar{u} em \hat{B}_N deve satisfazer $\hat{f}_a^{2^{N-1}}(\bar{u}) = \bar{u}$ e que a cada iteração por \hat{f}_a se percorre um outro subconjunto fuzzy em \hat{B}_N (sem repetições) até que, após 2^{N-1} iterações, retorna-se ao subconjunto original.

Seja $\bar{u} = \chi_{[{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]}$, $k \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$, um subconjunto fuzzy arbitrário em \hat{B}_N . Vamos calcular $\hat{f}_a(\chi_{[{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]})$ usando a formalização de α -níveis; como f_a é contínua temos

$$\left[\hat{f}_a \left(\chi_{[{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]} \right) \right]^\alpha = f_a \left([{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}] \right). \quad (2.65)$$

Do lema 2.2, se $a \in [a_N, a_N^*]$ então f_a é monótona em $[{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]$ e

$$f_a \left([{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}] \right) = \left[\min \{ f_a ({}^N x_{2i_k-1}), f_a ({}^N x_{2i_k}) \}, \max \{ f_a ({}^N x_{2i_k-1}), f_a ({}^N x_{2i_k}) \} \right]. \quad (2.66)$$

Mas ${}^N x_{2i_k-1}$ e ${}^N x_{2i_k}$ são os únicos pontos de B_N em $^{N-1}R_{i_k}(a)$ e, pelo lema 2.1, são levados por f_a nos únicos pontos de B_N em $^{N-1}R_{i_{k+1}}(a)$ que são ${}^N x_{2i_{k+1}-1}$ e ${}^N x_{2i_{k+1}}$. Daí:

$$f_a \left([{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}] \right) = [{}^N x_{2i_{k+1}-1}, {}^N x_{2i_{k+1}}]. \quad (2.67)$$

ou

$$\hat{f}_a \left(\chi_{[{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]} \right) = \chi_{[{}^N x_{2i_{k+1}-1}, {}^N x_{2i_{k+1}}]}. \quad (2.68)$$

Após L iterações, $L \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$, temos

$$\hat{f}_a^L \left(\chi_{[{}^N x_{2i_k-1}, {}^N x_{2i_k}]} \right) = \chi_{[{}^N x_{2i_{k+L}-1}, {}^N x_{2i_{k+L}}]}; \quad (2.69)$$

o ciclo recomeça quando $L = 2^{N-1}$.

II. Demonstração que \hat{B}_N é um 2^{N-1} -ciclo fuzzy estável.

Vamos utilizar o corolário 1.5. Para facilitar a notação utilizamos $F = f_a^{2^{N-1}}$ e destacamos que $\hat{F}(u) = \widehat{f_a^{2^{N-1}}}(u) = \hat{f}_a^{2^{N-1}}(u)$ (do teorema 1.2).

Seja $\bar{u} = \chi_{[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]} \in \hat{B}_N$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^{N-1}\}$, tal que $\hat{F}(\bar{u}) = \bar{u}$.

II. a) Suponha f_a crescente em $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$; neste caso, F também é crescente.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$; tome $0 < \delta < \varepsilon$ tal que

$$\begin{aligned} F^t(x) &\in ({}^N x_{2i-1} - \varepsilon, {}^N x_{2i-1}) && \text{se } x \in ({}^N x_{2i-1} - \delta, {}^N x_{2i-1}) \\ F^t(x) &\in ({}^N x_{2i} - \varepsilon, {}^N x_{2i}) && \text{se } x \in ({}^N x_{2i} - \delta, {}^N x_{2i}) \\ F^t(x) &\in ({}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i-1} + \varepsilon) && \text{se } x \in ({}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i-1} + \delta) \\ F^t(x) &\in ({}^N x_{2i}, {}^N x_{2i} + \varepsilon) && \text{se } x \in ({}^N x_{2i}, {}^N x_{2i} + \delta) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Como

$$\begin{aligned} F^t([{}^N x_{2i-1} - \delta, {}^N x_{2i} + \delta]) &= [F^t({}^N x_{2i-1} - \delta), F^t({}^N x_{2i} + \delta)] \\ &\subset [{}^N x_{2i-1} - \varepsilon, {}^N x_{2i} + \varepsilon] \end{aligned} \quad (2.71)$$

segue que, para um subconjunto fuzzy arbitrário u ,

$$F^t([u]^0) \subset B([u]^0, \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [u]^0 \subset B([u]^0, \delta) \quad (2.72)$$

Por outro lado,

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset [F^t({}^N x_{2i-1} + \delta) - \varepsilon, F^t({}^N x_{2i} - \delta) + \varepsilon] \quad (2.73)$$

ou seja

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset B(F^t([{}^N x_{2i-1} + \delta, {}^N x_{2i} - \delta]), \varepsilon) \quad (2.74)$$

e ainda

$$[\bar{u}]^0 \subset B(F^t([u]^1), \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [\bar{u}]^0 \subset B([u]^1, \delta) \quad (2.75)$$

De 2.72 e 2.75, e de acordo com o corolário 1.5, segue que \bar{u} é estável.

II. b) Suponha f_a decrescente em $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$. Se F é crescente, então vale a demonstração em **II. a**; caso contrário, vale a seguinte.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$. Se t é par, tome $0 < \delta_1 < \varepsilon$ tal que 2.70 seja satisfeita (com δ_1 no lugar de δ).

Se t é ímpar, tome $0 < \delta_2 < \varepsilon$ tal que

$$\begin{aligned} F^t(x) &\in ({}^N x_{2i}, {}^N x_{2i} + \varepsilon) && \text{se } x \in ({}^N x_{2i-1} - \delta_2, {}^N x_{2i-1}) \\ F^t(x) &\in ({}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i-1} + \varepsilon) && \text{se } x \in ({}^N x_{2i} - \delta_2, {}^N x_{2i}) \\ F^t(x) &\in ({}^N x_{2i} - \varepsilon, {}^N x_{2i}) && \text{se } x \in ({}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i-1} + \delta_2) \\ F^t(x) &\in ({}^N x_{2i-1} - \varepsilon, {}^N x_{2i-1}) && \text{se } x \in ({}^N x_{2i}, {}^N x_{2i} + \delta_2) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Seja $0 < \delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como

$$\begin{aligned} F^t([{}^N x_{2i-1} - \delta, {}^N x_{2i} + \delta]) &= \begin{cases} [F^t({}^N x_{2i-1} - \delta), F^t({}^N x_{2i} + \delta)] & \text{se } t \text{ é par} \\ [F^t({}^N x_{2i} + \delta), F^t({}^N x_{2i-1} - \delta)] & \text{se } t \text{ é ímpar} \end{cases} \\ &\subset [{}^N x_{2i-1} - \varepsilon, {}^N x_{2i} + \varepsilon] \end{aligned} \quad (2.77)$$

segue que, para um subconjunto fuzzy arbitrário u ,

$$F^t([u]^0) \subset B([\bar{u}]^0, \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [u]^0 \subset B([\bar{u}]^0, \delta) \quad (2.78)$$

Por outro lado, se t é par

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset [F^t({}^N x_{2i-1} + \delta) - \varepsilon, F^t({}^N x_{2i} - \delta) + \varepsilon]$$

e se t é ímpar

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset [F^t({}^N x_{2i} - \delta) - \varepsilon, F^t({}^N x_{2i-1} + \delta) + \varepsilon]$$

ou seja

$$[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}] \subset B(F^t([{}^N x_{2i-1} + \delta, {}^N x_{2i} - \delta]), \varepsilon) \quad (2.79)$$

e ainda

$$[\bar{u}]^0 \subset B(F^n([u]^1), \varepsilon) \quad \text{desde que} \quad [\bar{u}]^0 \subset B([u]^1, \delta) \quad (2.80)$$

De 2.78 e 2.80, e de acordo com o corolário 1.5, segue que \bar{u} é estável.

III. Demonstração que \hat{B}_N é um 2^{N-1} -ciclo fuzzy assintoticamente estável, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} D(F^t(u), \bar{u}) = 0$.

III. a) Suponha f_a crescente em $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$.

Existem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i-1}$ se $\|x - {}^N x_{2i-1}\| < r_1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i}$ se $\|x - {}^N x_{2i}\| < r_2$.

Tome $r = \min\{r_1, r_2\}$, usando os argumentos da parte **II. a)**, podemos concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} D(F^t(u), \bar{u}) = 0$ se $u \in B(\bar{u}, r)$.

III. b) Suponha f_a decrescente em $[{}^N x_{2i-1}, {}^N x_{2i}]$. Se F é crescente, então vale a demonstração em **III. a)**; caso contrário, vale a seguinte.

Se t é par, existem $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i-1}$ se $\|x - {}^N x_{2i-1}\| < r_1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i}$ se $\|x - {}^N x_{2i}\| < r_2$.

Se t é ímpar, existem $r_3 > 0$ e $r_4 > 0$ tais que $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i}$ se $\|x - {}^N x_{2i-1}\| < r_3$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} F^t(x) = {}^N x_{2i-1}$ se $\|x - {}^N x_{2i}\| < r_4$.

Tome $r = \min\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$, usando os argumentos da parte **II. b)**, podemos concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} D(F^t(u), \bar{u}) = 0$ se $u \in B(\bar{u}, r)$.

De **II** e **III** temos que \bar{u} é assintoticamente estável.

2.4 Discussões Finais

O estudo dos pontos fixos fuzzy do modelo logístico fuzzy discreto 2.2, realizado na seção 2.1, complementa o trabalho de Barros [2]. Ele havia encontrado os seguintes pontos fixos:

- $u_1^* = \chi_{[0, x_a]}$, $1 \leq a \leq 2$;
- $u_2^* = \chi_{[0, \frac{a}{4}]}$, $2 < a \leq 4$;
- $u_3^* = \chi_{[{}^1 x_1, {}^1 x_2]}$, $3 \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$;
- $u_4^* = \chi_{[f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}]}$, $1 + \sqrt{5} < a < 4$;

- u_5^* tal que

$$[u_5^*]^\alpha = \begin{cases} [0, \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha \leq \bar{\alpha} \\ [f_a(\frac{a}{4}), \frac{a}{4}] & \text{se } \alpha > \bar{\alpha} \end{cases}, \quad 1 + \sqrt{5} < a < 4;$$

- $u_6^* = \chi_{[0,1]}$, $a = 4$.

Os pontos fixos fuzzy u_1^* e u_3^* são iguais aos pontos \bar{u}_1 e \bar{u}_2 , respectivamente. Os pontos u_2^* e u_6^* são casos particulares do ponto \bar{u}_3 com $\bar{\alpha} = 1$ (ou do ponto \bar{u}_4 com $\bar{\alpha} = 1$). O ponto u_4^* é caso particular do ponto \bar{u}_5 com $\bar{\alpha} = 1$; e o ponto u_5^* é caso particular do ponto \bar{u}_6 com $\bar{\alpha} = 1$.

Quanto ao estudo da estabilidade dos pontos fixos, o nosso trabalho e o de Barros são análogos. No entanto, ele não estudou ciclos do modelo logístico fuzzy discreto [2].

Quanto ao estudo de ciclos fuzzy, obtemos o resultado apresentado no teorema 2.3 que nos garante a existência de um 2^{N-1} -ciclo fuzzy assintoticamente estável no intervalo $a \in [a_N, a_N^*]$, cujos subconjuntos fuzzy componentes são funções características dos intervalos limitados pelos pontos de um 2^N -ciclo do modelo clássico ($N \in \mathbb{N}$).

No decorrer das investigações deste capítulo, obtemos indícios de ciclos fuzzy diferentes dos descritos pelo teorema 2.3. Por exemplo, na subseção 2.1.1, observamos o 2-ciclo fuzzy $\{\chi_{[{}^1x_1, x_a]}, \chi_{[x_a, {}^1x_2]}\}$, desde que $a \in [a_1, a_1^*] = [3, 1 + \sqrt{5}]$, tal que x_a é ponto fixo do modelo clássico, instável no intervalo considerado do parâmetro, e $B_1 = \{{}^1x_1, {}^1x_2\}$ é um 2-ciclo clássico, assintoticamente estável no intervalo do parâmetro. No entanto, não desenvolvemos a formalização matemática para estes casos, ficando como tarefa futura.

Capítulo 3

Equação Logística Fuzzy Discreta: Simulações e Diagramas

Para incluirmos a incerteza de um processo biológico num modelo biomatemático, podemos admitir que suas variáveis de estado ou seus parâmetros são incertos.

No capítulo anterior, supomos que a variável de estado do modelo logístico discreto 2.1 é incerta e modelada por meio de subconjuntos fuzzy.

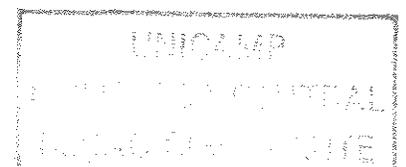
Por outro lado, Rohde e Rohde [30] consideraram que uma população natural não é composta por indivíduos idênticos e modelaram esta heterogeneidade permitindo diminutas variações na taxa a , em torno de um valor \bar{a} . A cada instante, eles dividiram a população total em $P + 1$ subpopulações de igual tamanho ($P \in \mathbb{N}$), nas quais o parâmetro a é ligeiramente diferente; a saber

$$a_j = \bar{a} - \delta + \frac{2\delta(j-1)}{P} \in [\bar{a} - \delta, \bar{a} + \delta], \quad (3.1)$$

correspondendo ao valor da taxa de crescimento intrínseco da j -ésima subpopulação ($j \in \{1, 2, \dots, P + 1\}$ e $\delta = 0.01$).

Em contrapartida, fazemos uso da teoria de subconjuntos fuzzy como a ferramenta matemática para introduzir esta incerteza no parâmetro a (seção 3.1).

Podemos obter a solução da equação fuzzy, associada ao modelo logístico discreto 2.1, através de procedimentos iterativos semelhantes ao do caso clássico (seção 3.2), bem como



diagramas correspondentes ao diagrama de bifurcação (seção 3.3).

Na última seção (seção 3.4), apresentamos as discussões do capítulo.

3.1 A Equação Fuzzy e Sua Solução

Considere a equação fuzzy associada ao modelo logístico 2.1

$$u_{t+1} = \hat{f}(u_t; \hat{a}), \quad (3.2)$$

onde u_t representa a população na geração t , \hat{a} representa a taxa de crescimento intrínseco e \hat{f} é a extensão de Zadeh da função $f(x; a) = f_a(x)$.

A solução da equação 3.2 é

$$u_t = \hat{f}^t(u_0; \hat{a}), \quad (3.3)$$

tal que \hat{f}^t indica a t -ésima composição pela extensão de Zadeh.

Para implementação computacional da solução iterativa da equação 3.2, é interessante reescrevê-la em termos dos α -níveis ($0 \leq \alpha \leq 1$)

$$\begin{aligned} [u_{t+1}]^\alpha &= [\hat{f}(u_t; \hat{a})]^\alpha \\ &= [\min \{ax(1-x) : (x, a) \in [u_t]^\alpha \times [\hat{a}]^\alpha\}, \max \{ax(1-x) : (x, a) \in [u_t]^\alpha \times [\hat{a}]^\alpha\}]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Como f é linear em relação ao parâmetro a , é óbvio que

$$[u_{t+1}]^\alpha = [a_I^\alpha \min\{x(1-x) : x \in [u_t]^\alpha\}, a_{II}^\alpha \max\{x(1-x) : x \in [u_t]^\alpha\}], \quad (3.5)$$

onde usamos a notação $[\hat{a}]^\alpha = [a_I^\alpha, a_{II}^\alpha]$.

Ainda observamos que $[u_t]^\alpha \subset [0, 1]$ e que a função quadrática $x(1-x)$ assume um máximo em $x = \frac{1}{2}$; daí podemos concluir que

$$\min\{x(1-x) : x \in [u_t]^\alpha\} = \min\{u_{t,I}^\alpha(1-u_{t,I}^\alpha), u_{t,II}^\alpha(1-u_{t,II}^\alpha)\}; \quad (3.6)$$

onde $[u_t]^\alpha = [u_{t,I}^\alpha, u_{t,II}^\alpha]$; se $\frac{1}{2} \in [u_t]^\alpha$ então

$$\max\{x(1-x) : x \in [u_t]^\alpha\} = \left\{x(1-x) : x = \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4}; \quad (3.7)$$

senão

$$\max\{x(1-x) : x \in [u_t]^\alpha\} = \max\{u_{t,I}^\alpha(1-u_{t,I}^\alpha), u_{t,II}^\alpha(1-u_{t,II}^\alpha)\}. \quad (3.8)$$

Utilizando as expressões 3.6, 3.7 e 3.8, construímos uma rotina computacional que, a cada iteração t , calcula os α -níveis da extensão de Zadeh da geração anterior, produzindo a seqüência $[u_0]^\alpha, [u_1]^\alpha = [\hat{f}(u_0; \hat{a})]^\alpha, [u_2]^\alpha = [\hat{f}(u_1; \hat{a})]^\alpha, [u_3]^\alpha = [\hat{f}(u_2; \hat{a})]^\alpha, \dots$, para uma partição do intervalo de $\alpha \in [0, 1]$. Daí, podemos determinar a seqüência equivalente $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$.

3.2 Simulações

Consideramos dois tipos de condição inicial fuzzy: uma triangular que denotamos por $u_0 = (x_0 - \delta x_0, x_0, x_0 + \delta x_0)$, ilustramos na figura 3.1 **D** e escrevemos utilizando a notação de α -níveis como

$$[u_0]^\alpha = [x_0 - \delta x_0 + \delta x_0 \cdot \alpha, x_0 + \delta x_0 - \delta x_0 \cdot \alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \quad (3.9)$$

e a outra trapezoidal que denotamos por

$$u_0 = \left(x_0 - \delta x_0, x_0 - \frac{\delta x_0}{h}, x_0 + \frac{\delta x_0}{h}, x_0 + \delta x_0 \right),$$

ilustramos nas figuras 3.1 **A, B e C**, e escrevemos

$$[u_0]^\alpha = \left[x_0 - \delta x_0 + \left(1 - \frac{1}{h}\right) \delta x_0 \cdot \alpha, x_0 + \delta x_0 - \left(1 - \frac{1}{h}\right) \delta x_0 \cdot \alpha \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.10)$$

com $h \geq 1$. Note os casos particulares: $u_0 = \chi_{[x_0 - \delta x_0, x_0 + \delta x_0]}$ quando $h = 1$ (ilustrado na figura 3.1 **A**) e $u_0 = (x_0 - \delta x_0, x_0, x_0 + \delta x_0)$ quando $h \rightarrow +\infty$ (triangular).

Modelamos a taxa de crescimento intrínseco \hat{a} como um número fuzzy triangular (veja ilustração na figura 3.2), denotado por $(\bar{a} - \delta, \bar{a}, \bar{a} + \delta)$. Na notação de α -níveis ($0 \leq \alpha \leq 1$), escrevemos:

$$[\hat{a}]^\alpha = [\bar{a} - \delta + \delta \cdot \alpha, \bar{a} + \delta - \delta \cdot \alpha]. \quad (3.11)$$

Ainda, para simularmos somente a variável de estado fuzzy, basta tomarmos $\hat{a} = \chi_{\{\bar{a}\}}$; na prática, isto equivale a $\delta = 0$ na expressão 3.11.

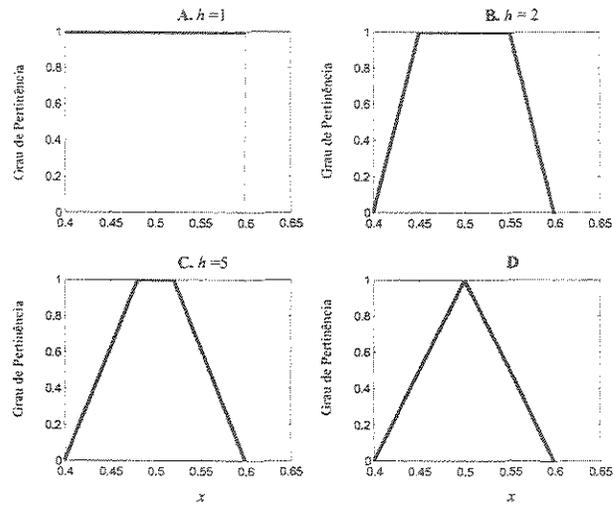


Figura 3.1: Quatro exemplos de condições iniciais fuzzy com $x_0 = 0.5$ e $\delta x_0 = 0.1$, sendo A, B e C do tipo trapezoidal e D, triangular.

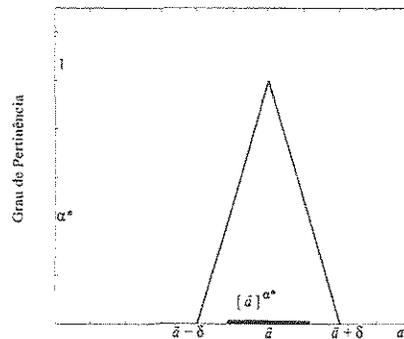


Figura 3.2: A taxa de crescimento intrínseco como um número fuzzy triangular \hat{a} , destacando o α^* -nível no eixo horizontal.

A figura 3.3 exibe a condição inicial $\chi_{[0.4,0.6]}$ e as gerações 1-20 da população u_t , considerando o modelo 3.2 ($\hat{a} = (2.79, 2.8, 2.81)$). Utilizamos cores alternadas nas gerações sucessivas (azul: condição inicial e t par, vermelho: t ímpar).

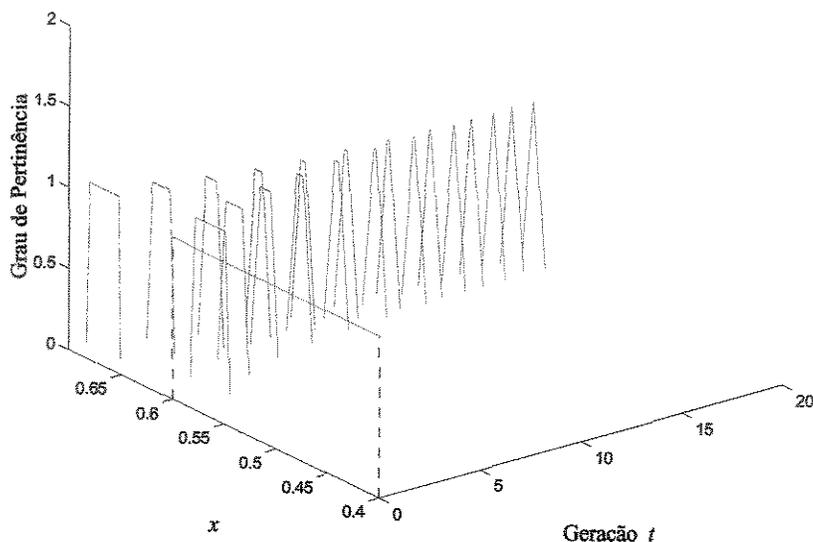


Figura 3.3: Simulação iterativa da população u_t , considerando a condição inicial trapezoidal $\chi_{[0.4,0.6]}$ e a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = (2.79, 2.8, 2.81)$.

Na simulação ilustrada na figura 3.3, a população se estabiliza num ponto fixo fuzzy, cujo gráfico lembra um triângulo.

Por dificuldade na visualização, principalmente quando a solução estacionária da equação 3.2 não é um ponto fixo fuzzy, optamos por apresentar os demais resultados desta seção no plano, em gráficos do grau de pertinência em função de x (geração fixa).

A figura 3.4 exibe a população u_t nas gerações $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (painéis A, B, C, D, E, F, G e H, respectivamente). O painel 3.4 I exibe a solução da equação 3.2 no equilíbrio. Nesta simulação, consideramos condição inicial trapezoidal $u_0 = (0.6, 0.68, 0.72, 0.8)$ e taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{1.5\}}$.

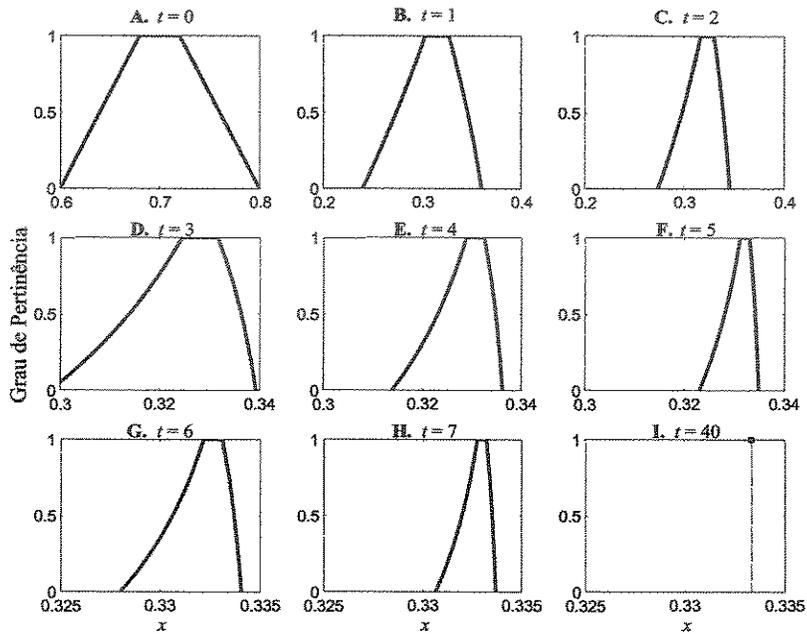


Figura 3.4: Em cada painel temos o subconjunto fuzzy u_t na geração indicada t , sendo que o primeiro painel corresponde à condição inicial trapezoidal $u_0 = (0.6, 0.68, 0.72, 0.8)$. Consideramos a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{1.5\}}$.

Na figura 3.4, observamos que a população evoluiu para o ponto fixo fuzzy $\bar{u} = \chi_{\{\frac{1}{3}\}}$; é interessante notar que $x_a = \frac{1}{3}$ é ponto fixo assintoticamente estável do modelo logístico discreto 2.1, considerando $a = 1.5$.

Na seqüência, apresentamos algumas soluções estacionárias do modelo logístico fuzzy 3.2 obtidas iterativamente.

A figura 3.5 exibe a população u_t nas gerações $t = 0, 1, 49, 50, 99, 100$ (painéis A, B, C, D, E e F, respectivamente). Nela consideramos condição inicial trapezoidal $u_0 = (0.7, 0.78, 0.82, 0.9)$ e taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{3.6\}}$.

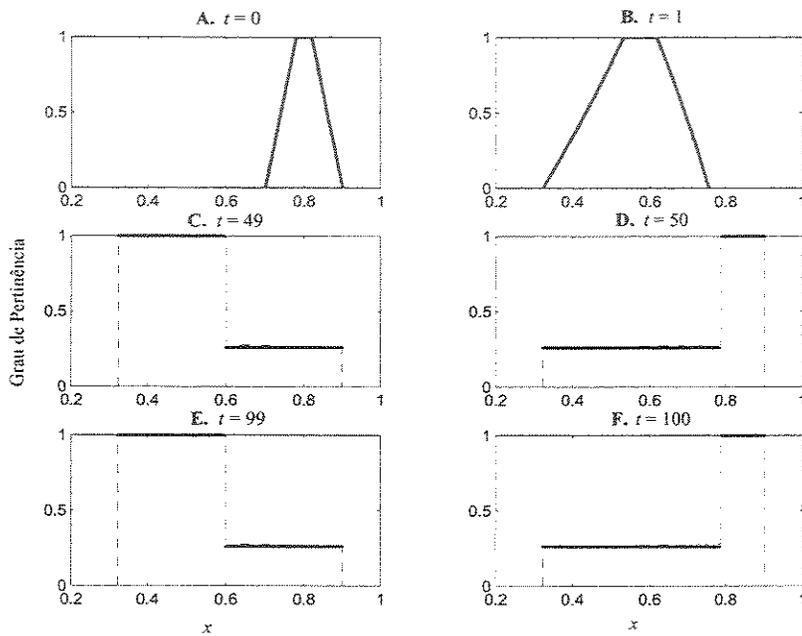


Figura 3.5: Em cada painel temos o subconjunto fuzzy u_t na geração indicada t , sendo que o primeiro painel corresponde à condição inicial trapezoidal $u_0 = (0.7, 0.78, 0.82, 0.9)$. Consideramos a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{3.6\}}$.

Na simulação da figura 3.5, temos a evolução da população para um 2-ciclo fuzzy, formado pelos subconjuntos fuzzy u_{49} e u_{50} (painéis C e D, respectivamente). Ainda, observamos que $u_{49} = u_{99}$ e $u_{50} = u_{100}$.

Em todos os painéis da figura 3.6 apresentamos a população u_t na geração indicada, considerando a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$.

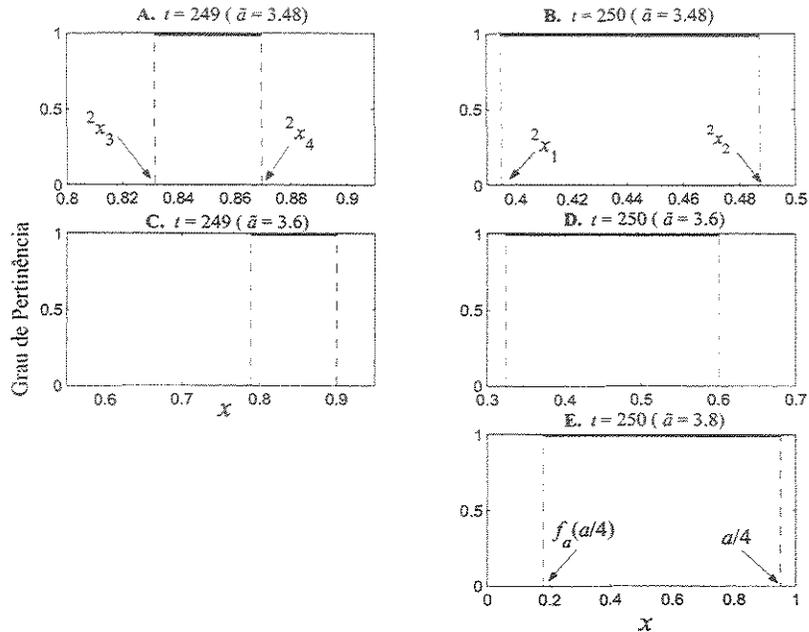


Figura 3.6: Em cada painel temos o subconjunto fuzzy u_t na geração indicada t (primeira coluna: $t = 249$ e segunda coluna: $t = 250$). Consideramos a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$ e a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{\tilde{a}\}}$, tal que $\tilde{a} = 3.48$, $\tilde{a} = 3.6$ e $\tilde{a} = 3.8$ nas primeira, segunda e terceira linhas, respectivamente.

Nas simulações considerando as taxas de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{3.48\}}$ e $\hat{a} = \chi_{\{3.6\}}$, temos a evolução populacional para 2-ciclos fuzzy formados pelos subconjuntos u_{249} e u_{250} , apresentados nas figuras 3.6 A e 3.6 B, e nas figuras 3.6 C e 3.6 D, respectivamente. Na simulação considerando a taxas de crescimento intrínseco $\hat{a} = \chi_{\{3.8\}}$, temos a evolução populacional para o ponto fixo fuzzy formado pelo subconjunto u_{250} , apresentado na figura 3.6 E.

Em todos os painéis da figura 3.7 apresentamos a população u_t na geração indicada,

representa ou o ponto fixo ($\tilde{a} = 2.5$, $\tilde{a} = 2.8$ e $\tilde{a} = 3.35$) ou o elemento de um ciclo fuzzy ($\tilde{a} = 3.05$), para o valor de \tilde{a} dado.

Nas figuras 3.9 e 3.10, para cada valor de \tilde{a} , plotamos os extremos do intervalo que caracteriza o suporte e o 1-nível dos subconjuntos fuzzy u_t (gerações 250-350).

Na figura 3.9, consideramos somente a variável de estado fuzzy ($\hat{a} = \chi_{\{\tilde{a}\}}$), enquanto na figura 3.10 consideramos a variável de estado e a taxa de crescimento intrínseco fuzzy ($\hat{a} = (\tilde{a} - \delta, \tilde{a}, \tilde{a} + \delta)$).

A coincidência do suporte e do 1-nível no diagrama 3.9 indica a evolução para subconjuntos fuzzy do tipo χ_A , onde A é um conjunto ordinário com um único ponto ou um intervalo fechado.

Até o segundo valor de bifurcação² $\tilde{a} = a_2 = 1 + \sqrt{6}$, o diagrama 3.9 é equivalente ao diagrama de bifurcação clássico. Nesta região, a população evolui para o ponto fixo $\chi_{\{x_a\}}$ se $\tilde{a} \in [a_0, a_1) = [1, 3)$ e para o 2-ciclo $\{\chi_{\{^1x_1\}}, \chi_{\{^1x_2\}}\}$ se $\tilde{a} \in [a_1, a_2) = [3, 1 + \sqrt{6})$. Observamos que, considerando o modelo clássico, o ponto fixo x_a e o 2-ciclo $B_1 = \{^1x_1, ^1x_2\}$ são assintoticamente estáveis nos respectivos intervalos $[a_0, a_1)$ e $[a_1, a_2)$ [32].

No intervalo $[a_2, a_2^*] = [1 + \sqrt{6}, 3.4985 \dots]$ (diagrama 3.9), os permanentes são os pontos do 2-ciclo fuzzy $\hat{B}_2 = \{\chi_{\{^2x_1, ^2x_2\}}, \chi_{\{^2x_3, ^2x_4\}}\}$ (caracterizado no exemplo 2.1, da seção 2.2, e ilustrado nas figuras 3.6 A e 3.6 B).

Para valores de \tilde{a} maiores que a_2^* (diagrama 3.9), temos duas possibilidades: a população evolui para um 2-ciclo fuzzy (exemplificado nas figuras 3.6 C e 3.6 D) ou para o ponto fixo fuzzy $\chi_{[f_a(\frac{\alpha}{4}), \frac{\alpha}{4}]}$ (figura 3.6 E: caso particular assintoticamente estável do equilíbrio \bar{u}_5 , com $\tilde{\alpha} = 1$).

Agora, considerando o parâmetro fuzzy (diagrama 3.10), não temos a coincidência entre o suporte e o 1-nível dos permanentes. Conseqüentemente, os pontos fixos ou os ciclos fuzzy não têm a forma de funções características.

A interpretação do diagrama 3.10 é bem mais complexa que a do 3.9. Isto se deve

²Quando utilizamos o termo “valor de bifurcação” estamos nos referindo aos valores de bifurcação do modelo clássico 2.1.

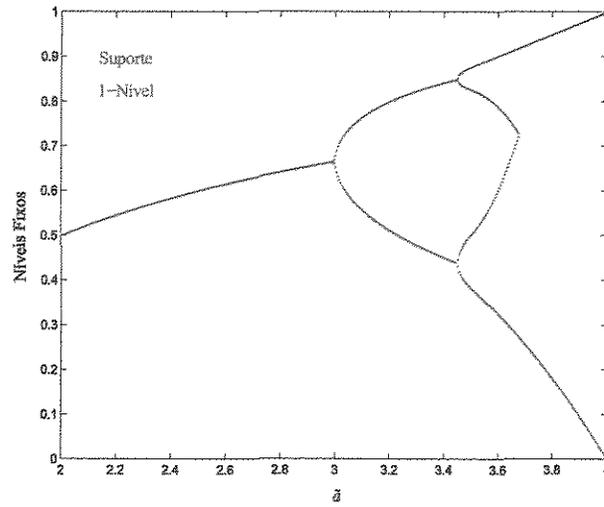


Figura 3.9: Suporte e 1-nível dos subconjuntos fuzzy u_t (população – gerações 350-370) versus \tilde{a} ($\hat{a} = \chi_{[0.4,0.6]}$). Consideramos a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$.

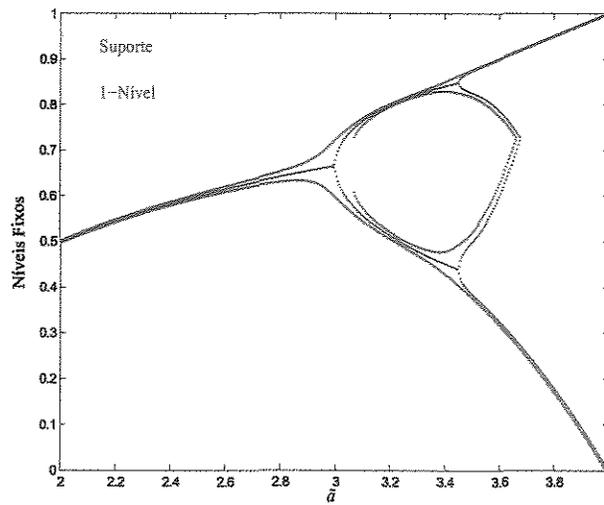


Figura 3.10: Suporte e 1-nível dos subconjuntos fuzzy u_t (população – gerações 350-370) versus \tilde{a} ($\hat{a} = (\tilde{a} - \delta, \tilde{a} + \delta)$). Consideramos a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$.

considerando a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$.

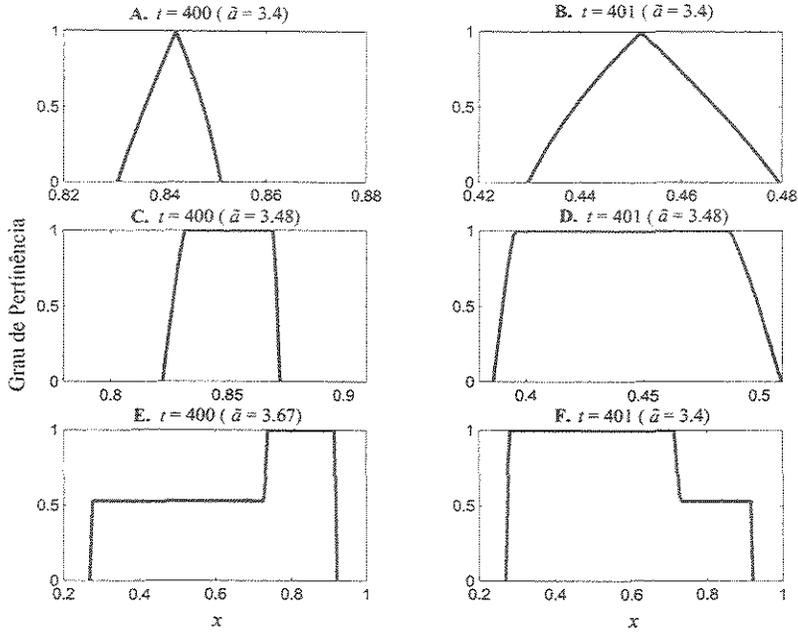


Figura 3.7: Em cada painel temos o subconjunto fuzzy u_t na geração indicada t (primeira coluna: $t = 400$ e segunda coluna: $t = 401$). Consideramos a condição inicial $u_0 = \chi_{[0.4,0.6]}$ e a taxa de crescimento intrínseco $\hat{a} = (\tilde{a} - 0.01, \tilde{a}, \tilde{a} + 0.01)$, tal que $\tilde{a} = 3.4$, $\tilde{a} = 3.48$ e $\tilde{a} = 3.67$ nas primeira, segunda e terceira linhas, respectivamente.

Nas simulações considerando as taxas de crescimento intrínseco $\hat{a} = (3.39, 3.4, 3.41)$, $\hat{a} = (3.47, 3.48, 3.49)$ e $\hat{a} = (3.66, 3.67, 3.68)$, temos a evolução populacional para 2-ciclos fuzzy formados pelos subconjuntos u_{400} e u_{401} , apresentados nas figuras 3.7 A e 3.7 B, nas figuras 3.7 C e 3.7 D, e nas figuras 3.7 E e 3.7 F, respectivamente.

3.3 Diagramas

O diagrama de bifurcação 2.1 do modelo logístico discreto 2.1 condensa numa única figura as principais informações da evolução populacional segundo este modelo, para todo o intervalo de variação do parâmetro a ; nele podemos observar as regiões do parâmetro nas quais temos ponto de equilíbrio estável, ciclos estáveis e comportamento caótico.

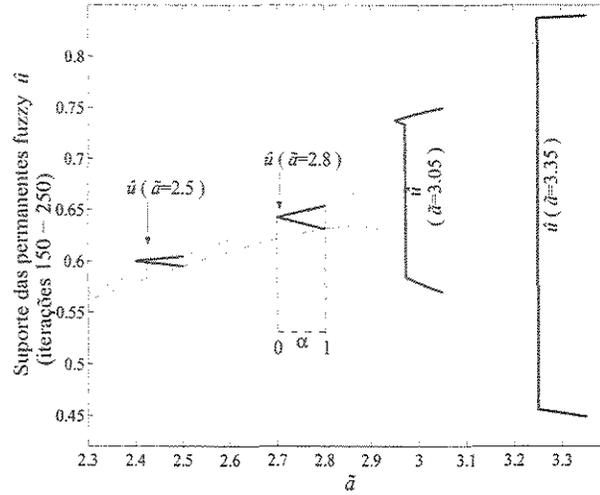


Figura 3.8: Suporte dos subconjuntos fuzzy u_t (população - gerações 150-250) versus \tilde{a} ($\hat{a} = \tilde{a} - 0.01, \tilde{a}, \tilde{a} + 0.01$). Para os alguns valores $\tilde{a} = 2.5$, $\tilde{a} = 2.8$, $\tilde{a} = 3.05$ e $\tilde{a} = 3.35$, também está ilustrado o subconjunto fuzzy u_{250} . Consideramos a condição inicial trapezoidal $u_0 = (0.65, 0.675, 0.725, 0.75)$.

Nesta seção, propomos duas opções de diagrama para o modelo logístico fuzzy discreto 3.2; estes diagramas são construídos usando a mesma filosofia do diagrama de bifurcação clássico: para cada valor do parâmetro, iteramos a equação o suficiente para alcançarmos os pontos permanentes¹ e plotamos então estes pontos.

No caso do modelo fuzzy 3.2, optamos por plotar o suporte (0-nível), ou o suporte e o 1-nível, dos permanentes. Para plotar o próprio permanente, como no diagrama clássico, necessitaríamos um terceira dimensão para o grau de pertinência; não trabalhamos com esta versão tridimensional do diagrama por causa do seu alto custo computacional e da dificuldade de sua interpretação.

Observamos ainda que os diagramas construídos dependem da condição inicial, o que confirma a natureza local da estabilidade.

Na figura 3.8, apresentamos o suporte dos subconjuntos permanentes (extremos do intervalo). Em alguns valores de \tilde{a} também mostramos a população u_{250} ; este subconjunto

¹Os pontos permanentes são os pontos fixos ou as órbitas assintoticamente estáveis; nas regiões onde ocorre o caos, eles são a população nas gerações simuladas [32].

principalmente ao fato que as fronteiras das regiões do parâmetro \tilde{a} com a mesma solução estacionária não estão claramente caracterizadas.

Para valores menores que $\tilde{a} = 3$ (diagrama 3.10), a população evolui para um ponto fixo cuja função de pertinência lembra um triângulo; este perfil do ponto fixo deforma-se quando nos aproximamos de $\tilde{a} = 3$ por valores menores.

A partir de $\tilde{a} = 3$ (diagrama 3.10), a população evolui para 2-ciclo fuzzy ou para ponto fixo fuzzy. Para valores ligeiramente maiores que $\tilde{a} = 3$, o 2-ciclo fuzzy permanente é caracterizado por subconjuntos que têm suportes iguais, mas 1-níveis diferentes. Para valores maiores ainda de \tilde{a} , temos alguns exemplos dos 2-ciclos encontrados na figura 3.7. Para valores maiores que $\tilde{a} \approx 3.7$, a população evolui para um ponto fixo fuzzy.

3.4 Discussões Finais

Nas simulações, considerando somente a variável de estado fuzzy, nós pudemos verificar a evolução populacional para pontos fixos e ciclos fuzzy assintoticamente estáveis, previstos pela investigação teórica do capítulo 2. Também passamos a conhecer outros equilíbrios estáveis para os cenários simulados.

Quando também consideramos o parâmetro fuzzy, pudemos conhecer as soluções estacionárias do modelo fuzzy para os cenários simulados, das quais não tínhamos nenhuma informação.

Este capítulo deixa ainda questões abertas para trabalhos futuros. Por exemplo, a determinação das regiões do parâmetro \tilde{a} que apresentam a mesma solução no equilíbrio. Outro exemplo é a caracterização do valor de x e do correspondente grau de pertinência nos quais ocorre descontinuidade na função de pertinência, como nas figuras 3.5 C e 3.5 D.

Ainda, destacamos que apesar da técnica iterativa para obtenção da solução da equação fuzzy ser fundamentalmente simples, não verificamos na literatura seu uso em outros sistemas fuzzy discretos. Conseqüentemente, já discutimos a possibilidade de aplicá-la a outros sistemas desta natureza.

Nos capítulos 5 e 6, vamos considerar um modelo populacional local, utilizado na modelagem de metapopulações de moscas varejeiras, com incerteza nos parâmetros fecundidade e sobrevivência. A partir deste modelo local, poderemos obter a correspondente taxa de crescimento intrínseco do modelo logístico discreto nos cenários simulados (subseção 5.3.2).

Capítulo 4

Revisão de Modelos para Duas Populações de Moscas Varejeiras Acopladas por Migração

As moscas varejeiras da família calliphoridae são estudadas devido a sua importância nos contextos biológico e médico-veterinário [8, 20]. No contexto biológico, diversas espécies são importantes como polinizadoras, decompositoras e fonte de alimento para alguns animais [23]. No contexto médico-veterinário, são capazes de freqüentar ambiente rural, silvestre e urbano, visitando dejetos e carcaças e veiculando patógenos [7, 14, 15, 20]. Algumas espécies causam miíase humana e animal [37]. Também são importantes indicadores forenses [35].

No sentido de analisar a dinâmica populacional e o processo de dispersão de tais insetos, muitos modelos matemáticos, determinísticos ou estocásticos, já foram propostos.

Na primeira seção deste capítulo, fazemos uma revisão dos modelos propostos por Godoy – um modelo determinístico e três estocásticos [18].

Na segunda seção, propomos um modelo que utiliza a teoria de subconjuntos fuzzy para lidar com a subjetividade inerente ao processo de variação populacional.

4.1 Modelos Clássicos

O objetivo desta seção é apontar aspectos relevantes do trabalho desenvolvido por Godoy na sua tese de livre-docência [18]. Neste trabalho, ele investigou a dinâmica de duas populações acopladas de espécies de moscas varejeiras, propondo modelos dependentes da densidade – um modelo determinístico e três estocásticos.

As espécies investigadas fazem parte da família calliphoridae: duas espécies nativas – *Lucilia eximia* e *Cochliomya macellaria* – e outras três introduzidas na América na década de 70 – *Chrysomya albiceps*, *Chrysomya megacephalla* e *Chrysomya putoria*.

Resultados teóricos para populações isoladas indicam que as espécies introduzidas do gênero *Chrysomya* apresentam 2-ciclo estável, enquanto as espécies nativas *Lucilia eximia* e *Cochliomya macellaria* exibem ponto de equilíbrio estável [16, 17, 29].

4.1.1 Modelo Determinístico

Godoy tinha o interesse em propor um modelo para populações acopladas de imaturos. Para este fim, incorporou o modelo local para populações imaturas elaborado por Prout e Mc Chesney [27] ao modelo para populações acopladas elaborado por Roughgarden [31].

O modelo de Prout e Mc Chesney foi proposto para populações isoladas de imaturos de uma mesma espécie de moscas. Ele é descrito pela equação

$$N_{t+1} = \frac{1}{2} F S e^{-(f+s)N_t} N_t, \quad (4.1)$$

onde N_t representa o número de imaturos na geração t ; $\frac{1}{2}$ indica que metade da população é constituída de fêmeas; F e S representam a fecundidade diária e a sobrevivência máximas, respectivamente; f e s são os coeficientes de regressão que estimam a variação da fecundidade e da sobrevivência, respectivamente [27].

Já Roughgarden propôs o seguinte modelo para duas populações acopladas:

$$\begin{cases} N_{1,t+1} = r_{1,t} [(1-m)N_{1,t} + mN_{2,t}] \\ N_{2,t+1} = r_{2,t} [mN_{1,t} + (1-m)N_{2,t}] \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde $N_{j,t}$ é o número de indivíduos da população localizada no sítio j ($j = 1, 2$), na geração t ; m é a probabilidade de migração de indivíduos da população 1 para a população 2 e vice-versa.

Assim, $(1 - m)$ é a probabilidade de permanência dos indivíduos no seu sítio de origem. A taxa de crescimento geométrico é representada por $r_{j,t}$ ($j = 1, 2$) [31].

A incorporação do modelo 4.1 no modelo 4.2 resulta no modelo de Godoy para populações acopladas de imaturos, descrito pelo sistema

$$\begin{cases} N_{1,t+1} = \frac{1-m_1}{2} F_1 S_1 e^{-(f+s)N_{1,t}} N_{1,t} + \frac{m_2}{2} F_2 S_2 e^{-(f+s)N_{2,t}} N_{2,t} \\ N_{2,t+1} = \frac{m_1}{2} F_1 S_1 e^{-(f+s)N_{1,t}} N_{1,t} + \frac{1-m_2}{2} F_2 S_2 e^{-(f+s)N_{2,t}} N_{2,t} \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde $N_{j,t}$ é o número de imaturos da população j ($j = 1, 2$), na geração t ; $\frac{1}{2}$ indica que metade da população é constituída de fêmeas; F_j , S_j e m_j são a fecundidade máxima, a sobrevivência máxima e a taxa de emigração, respectivamente, no sítio j ($j = 1, 2$); f e s estimam a variação da fecundidade e da sobrevivência em relação a população, respectivamente [18].

A fecundidade foi estimada pela contagem do número de ovos por fêmea (estimativa diária) e a sobrevivência a partir do número de adultos emergentes em cada colônia [18].

As simulações foram executadas para dois esquemas migratórios: migração unilateral, do sítio 1 para o sítio 2, e migração bilateral. O modelo 4.3 considera a migração bilateral; no caso da migração unilateral, basta tomar $m_2 = 0$ no sistema 4.3.

Para as simulações determinísticas, foram necessárias estimativas dos parâmetros F_j , S_j , m_j ($j = 1, 2$), f e s .

Originalmente, os parâmetros F_j e S_j significam a fecundidade diária e a sobrevivência máximas no sítio j . Apesar disto, foram considerados três pares de valores para eles: o primeiro obtido da análise de regressão exponencial; o segundo e o terceiro pares obtidos experimentalmente, correspondendo aos valores máximo e mínimo de cada parâmetro, respectivamente.

A tabela 4.1 apresenta os valores da fecundidade e da sobrevivência utilizados nas simulações, para as duas espécies: *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps*. Vamos omitir os valores para as demais espécies porque na próxima seção e nos próximos capítulos nos concentraremos nestas duas.

Nós escolhemos essas espécies porque uma delas é nativa da América - *Lucilia eximia* - e a outra é introduzida - *Chrysomya albiceps*. Além disso, elas apresentam peculiaridades interessantes. Por exemplo, a espécie *Chrysomya albiceps* é predadora facultativa; na fase larval, moscas dessa espécie atacam larvas de outras espécies, bem como larvas da sua espécie.

Por outro lado, dentre as cinco espécies estudadas por Godoy, a *Lucilia eximia* se mostra menos sensível ao inverno que as demais; enquanto as populações das outras espécies apresentam uma forte queda durante o inverno, as populações de *Lucilia eximia* decaem pouco. Por conseqüência, moscas dessa espécie podem freqüentar carcaças antes das demais chegarem e podem assim escapar das predadoras *Chrysomya albiceps* [18].

<i>Lucilia eximia</i>		
Fonte	Fecundidade	Sobrevivência
Regressão exponencial	9.08	1
Máximo experimental	7.03	0.915
Mínimo experimental	4.05	0.6

<i>Chrysomya albiceps</i>		
Fonte	Fecundidade	Sobrevivência
Regressão exponencial	27.11	0.565
Máximo experimental	26.46	0.54
Mínimo experimental	8.57	0.02

Tabela 4.1: Valores para F_j (fecundidade) e S_j (sobrevivência) usados nas simulações determinísticas, para as espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps* [18].

Para os parâmetros f e s foram utilizados exclusivamente os valores obtidos via regressão exponencial; eles são apresentados na tabela 4.2, para as espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps*.

	f	s
<i>Lucilia eximia</i>	0.0010	0.0014
<i>Chrysomya albiceps</i>	0.0010	0.0030

Tabela 4.2: Valores para f e s usados nas simulações determinísticas, para as espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps* [18].

Os valores para a taxa de migração m_j , $j = 1, 2$, foram atribuídos no intervalo $[0, 1]$,

de acordo com o interesse da simulação.

A figura 4.1 apresenta alguns exemplos de simulações típicas utilizando o modelo 4.3. Os painéis **A** e **B** correspondem às simulações para a espécie *Lucilia eximia*, enquanto os painéis **C** e **D**, para a espécie *Chrysomya albiceps*. Ainda, nos painéis **A** e **C**, foi considerada a migração unilateral ($m_2 = 0$); nos painéis **B** e **D**, foi considerada a migração bilateral.

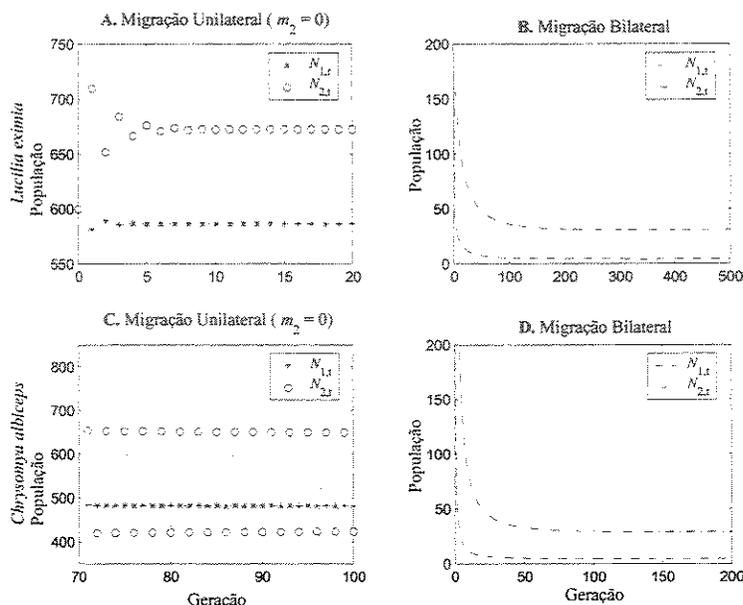


Figura 4.1: Simulações de duas populações acopladas: **A** e **B**. Espécie *Lucilia eximia* ($f = 0.0010$ e $s = 0.0014$). **A**. Condições iniciais $N_{1,0} = N_{2,0} = 600$ e parâmetros $F_1 = F_2 = 9.08$, $S_1 = S_2 = 1$, $m_1 = 0.1$ e $m_2 = 0$. **B**. Condições iniciais $N_{1,0} = N_{2,0} = 50$ e parâmetros $F_1 = 7.03$, $F_2 = 4.05$, $S_1 = 0.915$, $S_2 = 0.36$, $m_1 = 0.7$ e $m_2 = 0.01$. **C** e **D**. Espécie *Chrysomya albiceps* ($f = 0.0010$ e $s = 0.0030$). **C**. Condições iniciais $N_{1,0} = N_{2,0} = 200$ e parâmetros $F_1 = F_2 = 27.11$, $S_1 = S_2 = 0.565$, $m_1 = 0.1$ e $m_2 = 0$. **D**. Condições iniciais $N_{1,0} = N_{2,0} = 200$ e parâmetros $F_1 = 26.46$, $F_2 = 8.57$, $S_1 = 0.54$, $S_2 = 0.02$, $m_1 = 0.9$ e $m_2 = 0.6$.

A figura 4.1 **A** ilustra a evolução de duas populações de imaturos da espécie *Lucilia eximia*, considerando parâmetros iguais, exceto as taxas de migração $m_1 = 0.1$ e $m_2 = 0$ (migração unilateral). Neste caso, cada população se estabiliza e a diferença entre os pontos de estabilidade mostra o efeito da migração.

Também para a espécie *Lucilia eximia*, a figura 4.1 B mostra a simulação da evolução de duas populações acopladas por migração bilateral. Para os parâmetros considerados, a migração de 1% da população 2 para a população 1 evita a extinção local no sítio 1, que acontece no caso $m_2 = 0$ (migração unilateral). Novamente, cada população de imaturos se estabiliza.

Na simulação da figura 4.1 C para populações da espécie *Chrysomya albicans*, sujeitas à migração unilateral, a população 1 se estabiliza em torno de um ponto, enquanto a população 2 oscila entre dois valores, apesar dos parâmetros iguais (exceto $m_1 = 0.1$ e $m_2 = 0$).

A figura 4.1 D ilustra a evolução de duas populações imaturas da espécie *Chrysomya albicans* para o equilíbrio assintótico. A migração mínima de 60% da população 2 para a população 1 é necessária para evitar a extinção local no sítio 1, considerando os demais parâmetros fixos.

Conclusões

A principais conclusões obtidas a partir das simulações com o modelo determinístico proposto por Godoy são:

- a incorporação do modelo de Prout e McChesney ao modelo de Roughgarden permite o estudo de populações acopladas de imaturos de moscas varejeiras;
- a migração entre populações locais tende a manter o ponto de equilíbrio estável para populações das espécies nativas e alterar o 2-ciclo para ponto de equilíbrio estável para populações do gênero *Chrysomya*;
- a migração unilateral, em baixas taxas, pode evitar a extinção local ou global; já em altas taxas, ela pode acarretar extinção global;
- as populações das espécies nativas são mais propícias à extinção global provocada pelas perdas por emigração que as populações das espécies introduzidas;
- em altas taxas de emigração, as espécies nativas têm a capacidade de evitar a extinção recebendo um percentual de imigrantes significativamente menor que o necessário para

as espécies introduzidas.

4.1.2 Modelos Estocásticos

Os modelos estocásticos propostos por Godoy preservam a estrutura do modelo determinístico 4.3, mas permitem a flutuação aleatória de um dos parâmetros: fecundidade ($F_j = F_j^{(al)}$), sobrevivência ($S_j = S_j^{(al)}$) ou migração ($m_j = m_j^{(al)}$).

Os intervalos de variação da fecundidade e da sobrevivência são respectivamente $[F_{\min}, F_{\max}]$ e $[S_{\min}, S_{\max}]$, onde ‘min’ e ‘max’ subscritos indicam respectivamente os valores mínimo e máximo do parâmetro obtidos experimentalmente. O intervalo de variação da taxa de migração é $[0, \bar{m}]$, onde \bar{m} é a taxa de migração necessária para levar as populações de cada espécie à extinção determinística local.

Considerando a fecundidade aleatória, o modelo estocástico é dado por

$$\begin{cases} N_{1,t+1} = \frac{1-m_1}{2} F_1^{(al)} S_1 e^{-(f+s)N_{1,t}} N_{1,t} + \frac{m_2}{2} F_2^{(al)} S_2 e^{-(f+s)N_{2,t}} N_{2,t} \\ N_{2,t+1} = \frac{m_1}{2} F_1^{(al)} S_1 e^{-(f+s)N_{1,t}} N_{1,t} + \frac{1-m_2}{2} F_2^{(al)} S_2 e^{-(f+s)N_{2,t}} N_{2,t} \end{cases}, \quad (4.4)$$

onde

$$F_j^{(al)} = \frac{F_{\min} + F_{\max}}{2} + \frac{1}{2}(2\rho - 1)(F_{\max} - F_{\min}), \quad j = 1, 2, \quad (4.5)$$

e os demais parâmetros são os mesmos do modelo determinístico; ρ é um valor aleatório no intervalo $[0, 1]$ sorteado considerando a distribuição uniforme; assim, todos os valores deste intervalo têm probabilidade igual de sorteio.

Observamos que a oscilação da fecundidade se dá em torno da média $\frac{F_{\min} + F_{\max}}{2}$. Ainda, a fecundidade pode assumir quaisquer valores no intervalo $[F_{\min}, F_{\max}]$, com chances iguais. Uma outra opção seria uma escolha ponderada do valor do parâmetro. Estas considerações também valem para a sobrevivência e a migração, quando aleatorizadas.

Analogamente, o modelo estocástico com sobrevivência aleatória é

$$\begin{cases} N_{1,t+1} = \frac{1-m_1}{2} F_1 S_1^{(al)} e^{-(f+s)N_{1,t}} N_{1,t} + \frac{m_2}{2} F_2 S_2^{(al)} e^{-(f+s)N_{2,t}} N_{2,t} \\ N_{2,t+1} = \frac{m_1}{2} F_1 S_1^{(al)} e^{-(f+s)N_{1,t}} N_{1,t} + \frac{1-m_2}{2} F_2 S_2^{(al)} e^{-(f+s)N_{2,t}} N_{2,t} \end{cases}, \quad (4.6)$$

onde

$$S_j^{(al)} = \frac{S_{\min} + S_{\max}}{2} + \frac{1}{2}(2\rho - 1)(S_{\max} - S_{\min}), \quad j = 1, 2; \quad (4.7)$$

e o modelo com migração aleatória é

$$\begin{cases} N_{1,t+1} = \frac{1-m_1^{(al)}}{2} F_1 S_1 e^{-(f+s)N_{1,t}} N_{1,t} + \frac{m_2^{(al)}}{2} F_2 S_2 e^{-(f+s)N_{2,t}} N_{2,t} \\ N_{2,t+1} = \frac{m_1^{(al)}}{2} F_1 S_1 e^{-(f+s)N_{1,t}} N_{1,t} + \frac{1-m_2^{(al)}}{2} F_2 S_2 e^{-(f+s)N_{2,t}} N_{2,t} \end{cases}, \quad (4.8)$$

onde

$$m_j^{(al)} = \frac{\bar{m}_j}{2} + \frac{1}{2}(2\rho - 1)\bar{m}_j, \quad j = 1, 2. \quad (4.9)$$

Em todos os modelos estocásticos podem se considerar os dois regimes migratórios. Para a migração unilateral, basta tomar $m_2 = 0$ nos sistemas 4.4 e 4.6 ou $m_2^{(al)} = 0$ no sistema 4.8.

Nas simulações estocásticas, Godoy observou dois comportamentos populacionais distintos: um com alta probabilidade de persistência para a espécie *Lucilia eximia* e outro com alta probabilidade de extinção para as espécies do gênero *Chrysomya* e *Cochliomya macellaria*. Ele ainda salientou que os resultados obtidos, principalmente em relação à extinção estocástica, podem ser reflexo da modelagem intraespecífica.

4.2 Modelo com Estimativa Fuzzy dos Parâmetros

A incerteza em um modelo biomatemático pode ser característica da própria variável de estado ou de seus parâmetros.

Quando modelamos a variável de estado incerta, estamos caracterizando a diversidade comportamental, genética, física, etc, dos indivíduos de uma população. Neste caso, dizemos que o modelo tem “Fuzziness Demográfica”.

Quando modelamos os parâmetros incertos, estamos caracterizando variações abióticas ou ambientais, variações próprias da espécie estudada, etc, que influenciam fortemente na dinâmica populacional. Neste caso, dizemos que o modelo tem “Fuzziness Ambiental”.

Em estudos anteriores propomos um modelo que mantém a estrutura do modelo 4.3, mas que permite a flutuação dos parâmetros: fecundidade, sobrevivência e taxa de migração, utilizando sistemas baseados em regras fuzzy para sua estimativa.

O objetivo desta seção é apresentar os sistemas baseados em regras fuzzy propostos e resultados relevantes. Nestes sistemas, utilizamos o método de inferência de Mamdani e o

método de defuzzificação conhecido como Centro de Gravidade (revisados na seção 1.3).

4.2.1 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

As entradas do sistema são as variáveis lingüísticas População e Ambiente às quais são atribuídos termos lingüísticos. Assim, a população de cada espécie foi classificada como pequena, média ou grande e o Ambiente como hostil, levemente desfavorável ou favorável. Estes termos são modelados matematicamente por conjuntos fuzzy em seus respectivos domínios, conforme figuras 4.2 A e 4.2 B.

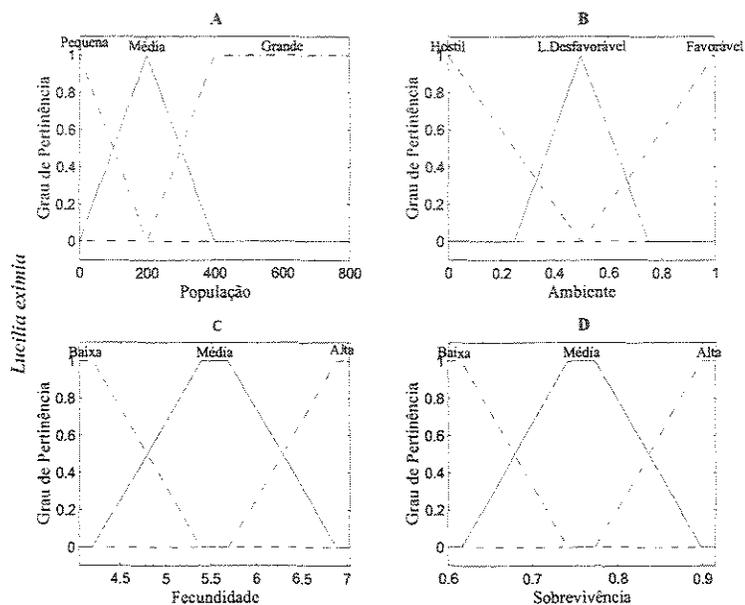


Figura 4.2: A. População, B. Ambiente, C. Fecundidade e D. Sobrevivência para a espécie *Lucilia eximia*.

Para modelarmos as variáveis de saída Fecundidade e Sobrevivência são utilizados os valores experimentais mínimo e máximo de cada espécie; para as espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps*, estes valores podem ser encontrados na tabela 4.1 (figuras 4.2 C e 4.2 D).

A variável de saída Migração é modelada no domínio $[0, 1]$, conforme figura 4.3.

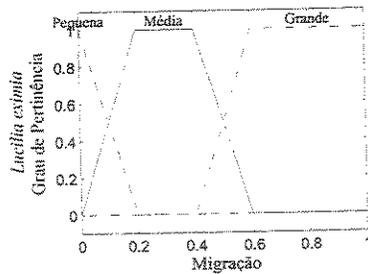


Figura 4.3: Migração da *Lucilia eximia*.

A base de regras, composta por uma coleção de proposições na forma **Se-então**, é construída a partir de dados bibliográficos e com o auxílio de especialistas. No nosso sistema, usamos a seguinte base de regras, confeccionada a partir do trabalho de Godoy [18].

Base de regras:

1. **Se** a População Imatura é Pequena e o Ambiente é Favorável, **então** a Fecundidade é Alta e a Sobrevivência é Alta e a Migração é Pequena.
2. **Se** a População Imatura é Pequena e o Ambiente é Levemente Desfavorável, **então** a Fecundidade é Alta e a Sobrevivência é Média e a Migração é Pequena.
3. **Se** a População Imatura é Pequena e o Ambiente é Hostil, **então** a Fecundidade é Média e a Sobrevivência é Baixa e a Migração é Grande.
4. **Se** a População Imatura é Média e o Ambiente é Favorável, **então** a Fecundidade é Alta e a Sobrevivência é Média e a Migração é Pequena.
5. **Se** a População Imatura é Média e o Ambiente é Levemente Desfavorável, **então** a Fecundidade é Média e a Sobrevivência é Baixa e a Migração é Grande.
6. **Se** a População Imatura é Média e o Ambiente é Hostil, **então** a Fecundidade é Baixa e a Sobrevivência é Baixa e a Migração é Grande.
7. **Se** a População Imatura é Grande e o Ambiente é Favorável, **então** a Fecundidade é Média e a Sobrevivência é Baixa e a Migração é Média.
8. **Se** a População Imatura é Grande e o Ambiente é Levemente Desfavorável, **então** a Fecundidade é Baixa e a Sobrevivência é Baixa e a Migração é Grande.

9. Se a População Imatura é Grande e o Ambiente é Hostil, **então** a Fecundidade é Baixa e a Sobrevivência é Baixa e a Migração é Grande.

4.2.2 Resultados e Discussões

Simulamos duas espécies: uma nativa (*Lucilia eximia*) e uma introduzida (*Chrysomya albiceps*) porque elas apresentam diferenças no comportamento dinâmico observado pelos biólogos.

São utilizadas as equações do modelo determinístico 4.3, mas a cada iteração os parâmetros F_j , S_j e m_j , $j = 1, 2$, são calculados usando os sistemas baseados em regras fuzzy descritos na subsecção 4.2.1. Nas simulações apresentadas, os parâmetros f e s estão na tabela 4.2.

Simulações para a espécie *Lucilia eximia*

As simulações para esta espécie não apresentam extinção global. Estes resultados concordam com os resultados obtidos por Godoy [18], quando utilizou a variação aleatória dos parâmetros vitais.

Inicialmente, consideramos a migração unilateral do sítio 1 para o sítio 2 ($m_2 = 0$). Quando o ambiente no sítio 1 é hostil, há extinção local, como na figura 4.4 A; a população do sítio 2 alcança um equilíbrio constante positivo. Para ambientes não-hostis no sítio 1, observamos que as duas populações evoluem para equilíbrios positivos (figura 4.4 C).

Considerando migração bilateral, observamos que ambas populações evoluem para equilíbrios positivos (ver figuras 4.4 B e 4.4 D).

Comparando as figuras 4.4 A e 4.4 B, nota-se que a migração bilateral evita a extinção local no sítio 1, para os mesmos valores iniciais. A figura 4.4 D, mostra um aumento da população em equilíbrio no sítio 1, comparando com a figura 4.4 C, ocasionado pela migração bilateral.

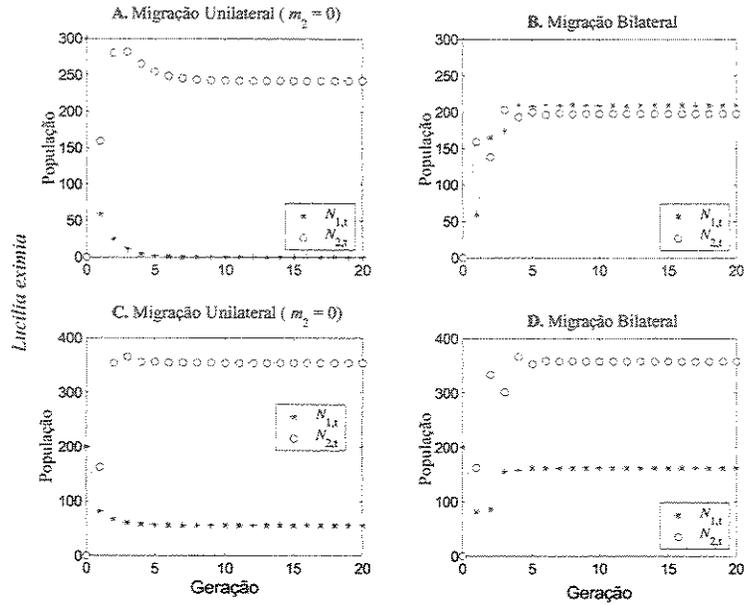


Figura 4.4: Simulações de populações de *Lucilia eximia*. A e B: $N_{1,0} = 300$ e $N_{2,0} = 0$, e ambientes entre hostis e levemente desfavoráveis (0.1 no sítio 1 e 0.4 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em A e bilateral em B, resultando em A: extinção local no sítio 1 e evolução para um equilíbrio estável no sítio 2; B: evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações. C e D: $N_{1,0} = 200$ e $N_{2,0} = 0$, e ambientes entre levemente desfavoráveis e favoráveis (0.6 no sítio 1 e 0.8 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em C e bilateral em D, resultando em evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações.

Simulações para a espécie *Chrysomya albiceps*

Considerando a migração unilateral ($m_2 = 0$), observamos uma diversidade de cenários possíveis: persistência da população nos dois sítios (ambas em equilíbrio ou o população 1 em equilíbrio e a população 2 exibindo um 2 - ciclo), extinção local no sítio 1 e equilíbrio no sítio 2 e extinção global, dependendo dos valores atribuídos aos ambientes (as populações iniciais pouco influenciam na evolução da comunidade).

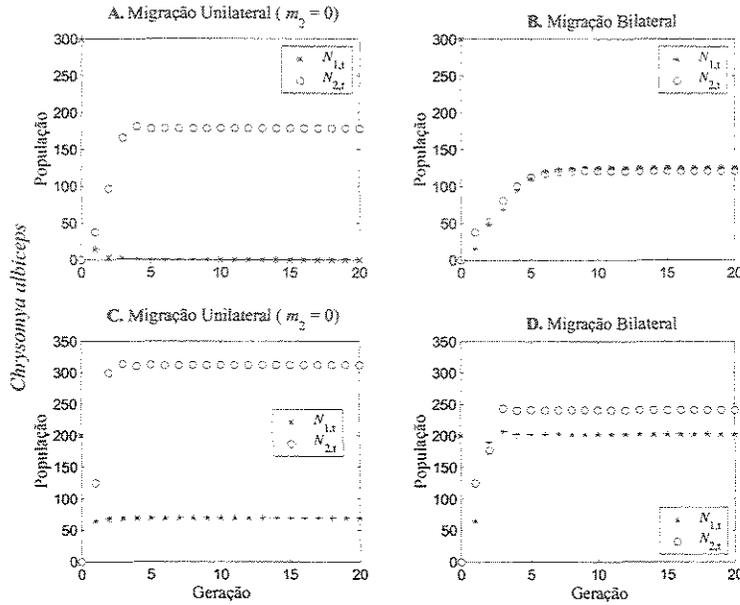


Figura 4.5: Simulações de populações de *Chrysomya albiceps*. A e B: $N_{1,0} = 300$ e $N_{2,0} = 0$, e ambientes entre hostis e levemente desfavoráveis (0.1 no sítio 1 e 0.4 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em A e bilateral em B, resultando em A: extinção local no sítio 1 e evolução para um equilíbrio estável no sítio 2; B: evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações. C e D: $N_{1,0} = 200$ e $N_{2,0} = 0$, e ambientes entre levemente desfavoráveis e favoráveis (0.6 no sítio 1 e 0.7 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em C e bilateral em D, resultando em evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações.

Em linhas gerais, tem-se extinção global quando os ambientes são hostis; tem-se extinção da população 1 quando o ambiente neste sítio é hostil (o sítio 2 segue como população isolada), como na figura 4.5 A. Quando o ambiente nos dois sítios é favorável, observa-se um

equilíbrio populacional no sítio 1 e um 2-ciclo para a população no sítio 2 (figura 4.6 C). Para as demais possibilidades, tem-se persistência com equilíbrios nos dois sítios (figuras 4.5 C e 4.6 A).

Considerando migração bilateral, observa-se extinção global quando os ambientes nos dois sítios são muito hostis. Basta um ambiente melhorar um pouco, para se observar equilíbrio populacional positivo nas duas populações, como na figura 4.5 B. Este comportamento se mantém para ambientes levemente desfavoráveis (figura 4.5 D). Aparecem 2-ciclos nas duas populações quando os ambientes variam entre levemente desfavoráveis e favoráveis (figuras 4.6 B e 4.6 D).

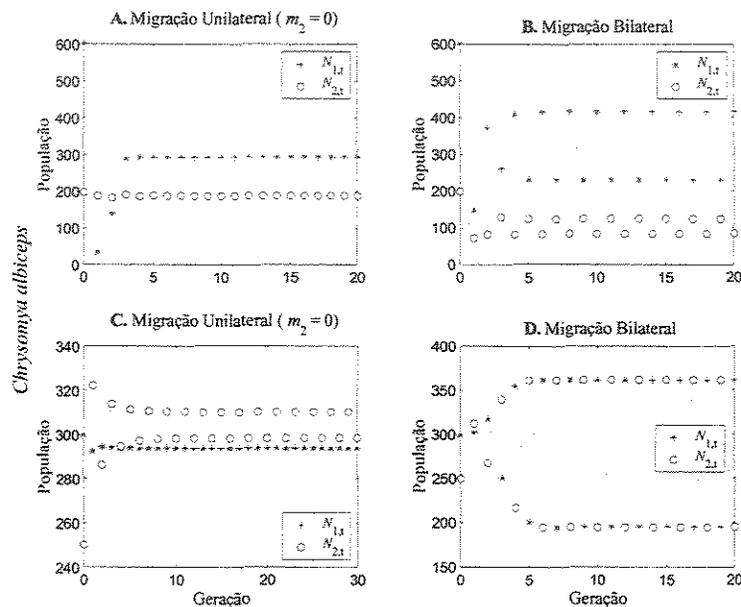


Figura 4.6: Simulações de populações de *Chrysomya albiceps*. A e B: $N_{1,0} = 600$ e $N_{2,0} = 200$, e ambientes favorável no sítio 1 (0.9) e levemente desfavorável no sítio 2 (0.5), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em A e bilateral em B, resultando em A: evolução para um equilíbrio estável em cada uma das populações; B: evolução para um 2-ciclo estável em cada uma das populações. C e D: $N_{1,0} = 300$ e $N_{2,0} = 250$, e ambientes favoráveis (1 no sítio 1 e 0.95 no sítio 2), com migração unilateral ($m_2 = 0$) em C e bilateral em D, resultando em C: evolução para um equilíbrio estável no sítio 1 e para um 2-ciclo estável no sítio 2; D: evolução para um 2-ciclo estável em cada uma das populações.

Comparando as figuras 4.5 A e 4.5 B, verifica-se que a migração bilateral evitou a extinção local do sítio 1 (mesmos valores iniciais). Também, a escolha da migração bilateral no lugar da unilateral, propiciou a evolução populacional para 2-ciclos (figura 4.6).

Conclusões

A teoria de conjuntos fuzzy mostrou-se apropriada neste estudo pois ela trabalha com conceitos vagos dando condições de incorporar a subjetividade do conhecimento do especialista no modelo.

A fuzzificação dos parâmetros no modelo determinístico permite a flutuação deles, inerente ao processo evolutivo populacional, com resultados que concordam com os observados na literatura biológica.

As simulações numéricas do modelo proposto permitiram perceber a diferença no comportamento entre a espécie nativa (*Lucilia eximia*) e introduzida (*Chrysomya albiceps*) conforme consta na literatura. Ainda, mostram que para mesma população inicial e mesmo ambiente, pode-se evitar a extinção local ou global com migração bilateral.

Capítulo 5

Duas Populações de Moscas Varejeiras Acopladas por Migração

No capítulo anterior, apresentamos modelos para o estudo da dinâmica populacional e de dispersão de moscas varejeiras. No presente capítulo, nosso objetivo é refazer este estudo, utilizando modelos com o instrumental da lógica fuzzy.

As idéias que permeiam nossos modelos são motivadas pelos modelos propostos por Godoy [18], revisados no capítulo 4. Nestes modelos existem dois processos dinâmicos: um processo de dinâmica local e um migratório.

O processo de dinâmica local engloba a evolução natural da população, incluindo nascimentos e mortes. Na ausência de migração, a população evolui segundo o modelo de dinâmica local. Neste caso, diversos modelos matemáticos bem estabelecidos, como o modelo logístico discreto, poderiam ser utilizados [28]. No entanto, nem sempre estes modelos têm parâmetros que podem ser avaliados com exatidão pelos biólogos.

Godoy utilizou o modelo de Prout e Mc Chesney para a dinâmica local porque inclui os parâmetros fecundidade e sobrevivência; ele também inclui os coeficientes de regressão que estimam a variação da fecundidade e da sobrevivência em função da densidade larval [18].

O processo migratório abrange as modificações populacionais devido à entrada e à saída de indivíduos na colônia.

Neste capítulo, vamos propor e analisar dois modelos para duas populações de imaturos da mesma espécie, acopladas por migração. Este estudo está apresentado na seguinte ordem: seção 5.1: proposta dos modelos; seção 5.2: proposta dos sistemas baseados em regras fuzzy envolvidos nos modelos; seção 5.4: simulações iterativas; seções 5.5 e 5.6: análise dos modelos; seção 5.7: discussões finais.

Ainda, na seção 5.3, analisamos o modelo local proposto como um modelo para população isolada e o comparamos com o modelo logístico discreto 2.1 e com o modelo de Prout e Mc Chesney 4.1.

Como destacamos na subseção 4.1.1, a espécie nativa *Lucilia eximia* e a introduzida *Chrysomya albiceps* são representantes peculiares dentre as espécies estudadas por Godoy [18]; por isso, os modelos deste capítulo são aplicados a essas duas espécies.

5.1 Introdução dos Modelos Matemáticos: Dois Sítios Interligados

Nesta seção, apresentamos modelos matemáticos para populações de imaturos de moscas varejeiras. Incluímos na fase imatura: ovos, larvas, pupas e jovens (até atingirem a idade adulta).

O tempo de vida adulta das moscas da família calliphoridae depende das condições abióticas as quais estão expostas. No entanto, o tempo da fase imatura pode ser estimado. Por exemplo, a duração da fase imatura para a espécie *Lucilia eximia* é 15 dias, enquanto para a espécie *Chrysomya albiceps* é 10 dias. Já o máximo tempo de vida adulta observado em laboratório está em torno de 2 meses¹.

Ainda, Godoy [18], Silva [33] salientam as implicações da densidade larval na dinâmica dos adultos; por exemplo, uma alta densidade larval pode intensificar a competição intraespecífica e reduzir o número de ovos nas fêmeas da próxima geração, influenciando diretamente na sobrevivência e na fecundidade dos adultos.

¹Informações cedidas pelo biólogo Dr. Wesley Augusto Conde Godoy (Instituto de Biociências de Botucatu – UNESP).

A riqueza de informações a respeito da dinâmica populacional dos imaturos, somada à influência desta fase na dinâmica dos adultos, favorece a proposta de modelos para imaturos. Evidentemente, existe uma correlação natural entre adultos e imaturos.

A natureza da procriação das moscas varejeiras em ciclos de vida bem delimitados nos faz escolher um modelo discreto no tempo, cuja unidade corresponde ao tempo entre duas gerações sucessivas de imaturos.

Consideramos a população de uma única espécie em um habitat fragmentado em sítios interligados. Embora não tenha uma fronteira bem definida, supomos que cada sítio é cercado por ambiente hostil à espécie – sem fonte de alimentação adequada ou com condições abióticas adversas. A interação entre os sítios vizinhos se dá pela migração.

Inicialmente, supomos que o habitat está dividido em apenas dois sítios; no próximo capítulo, vamos admitir um número qualquer de sítios.

Chamamos de subpopulação j à população de cada sítio j , $j = 1, 2$, e de metapopulação à população total, soma de todas as subpopulações.

Assumimos também que, a cada geração, a população passa por um processo de dinâmica local seguido por um processo migratório.

5.1.1 Dinâmica Local

A dinâmica local expressa o desenvolvimento natural da subpopulação e , na ausência de migração, é o único mecanismo dinâmico atuante.

Seja $N_{j,t}$, $j = 1, 2$, o número de indivíduos imaturos no sítio j e na geração t .

A fecundidade \tilde{F}_j representa o número médio de ovos por fêmea (taxa diária) e a sobrevivência \tilde{S}_j , a fração de indivíduos imaturos sobreviventes até a idade adulta; o subíndice j indica o sítio no qual a subpopulação se encontra ($j = 1, 2$).

Admitindo que o número de fêmeas é igual ao número de machos e que a mortalidade é desprezível no período entre o início da fase adulta e a postura de ovos, obtemos que o número de imaturos no sítio j , $j = 1, 2$, e na geração $t + 1$ é dado pela equação

$$N_{j,t+1} = \frac{1}{2} \tilde{F}_j \cdot \tilde{S}_j \cdot N_{j,t}. \quad (5.1)$$

Denotamos por K_j a subpopulação máxima que o sítio j comporta (de acordo com as suas condições ambientais) e por $K = K_1 + K_2$ a metapopulação máxima.

Por praticidade computacional, vamos trabalhar com a quantidade normalizada $n_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{K}$ que significa o número de indivíduos imaturos em relação à metapopulação máxima, no sítio j e na geração t . Então a equação 5.1 dá lugar à equação

$$n_{j,t+1} = f_j(n_{j,t}) = \frac{1}{2} \tilde{F}_j \cdot \tilde{S}_j \cdot n_{j,t}. \quad (5.2)$$

Desta forma a densidade da metapopulação $n_t = n_{1,t} + n_{2,t}$ varia no domínio $[0, 1]$, enquanto a da subpopulação j varia no domínio $[0, k_j]$ tal que $k_j = \frac{K_j}{K}$, $j = 1, 2$, e $k_1 + k_2 = 1$.

As quantidades \tilde{F}_j e \tilde{S}_j , $j = 1, 2$, são estimadas por meio de sistemas baseados em regras fuzzy, descritos na seção 5.2.

5.1.2 Migração Dirigida

A migração ocorre uma vez em cada geração e é de curta duração em relação à escala de tempo usada no modelo. Por isso, consideramos a mortalidade nula durante a migração.

A migração pode ocorrer em uma direção preferencial - Migração Unilateral (assumimos que esta direção coincida com o ordenamento dos sítios) ou nas duas direções possíveis - Migração Bilateral. A Migração Unilateral reflete cenários nos quais forças abióticas, como ventos, geografia do terreno, etc, têm influência fundamental no processo migratório.

A figura 5.1 ilustra os possíveis esquemas migratórios para um habitat fragmentado em dois sítios: o painel 5.1 A corresponde à migração bilateral e o painel 5.1 B, a migração unilateral.

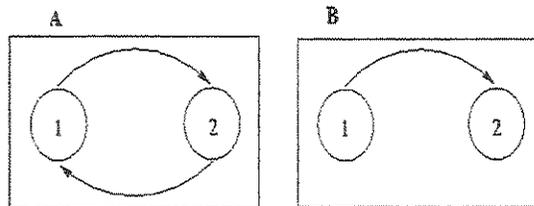


Figura 5.1: **A.** Ambos os sítios sofrem emigração e imigração – Migração Bilateral. **B.** O sítio 1 sofre emigração, enquanto o 2 sofre imigração – Migração Unilateral.

Denotamos por \tilde{m}_j , $j = 1, 2$, a fração da subpopulação j que deixa o sítio após a dinâmica local.

Para o cenário ilustrado no painel 5.1 **B** (migração unilateral), só existe migração do sítio 1 para o 2, ou seja, \tilde{m}_1 é a fração da subpopulação 1 que migra para o sítio 2 e $\tilde{m}_2 = 0$; equacionamos este cenário pelo modelo

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) \\ n_{2,t+1} &= f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \end{cases} \quad (5.3)$$

onde f_j está explícita em 5.2 ($j = 1, 2$).

Já para o cenário ilustrado no 5.1 **A**, admitimos migração bilateral; daí \tilde{m}_1 representa a fração da subpopulação 1 que migra para o sítio 2 e \tilde{m}_2 , a fração da subpopulação 2 que migra para o sítio 1. Assim,

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \tilde{m}_2 f_2(n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} &= (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \end{cases} \quad (5.4)$$

onde f_j está explícita em 5.2 ($j = 1, 2$).

Se após a migração ocorrer a saturação de uma subpopulação, supomos que o excesso de indivíduos que entrou neste sítio retorne ao sítio de origem proporcionalmente à quantidade que saiu.

Estimamos \tilde{m}_j , $j = 1, 2$, por meio de um sistema baseado em regras fuzzy, proposto na seção 5.2.

5.2 Sistema Baseados em Regras Fuzzy

Os sistemas baseados em regras fuzzy propostos nesta seção utilizam o método de inferência de Mamdani e o método de defuzzificação Centro de Gravidade (revisados na seção 1.3).

A fecundidade foi estimada pela contagem do número de ovos por fêmea (estimativa diária) e a sobrevivência a partir do número de adultos emergentes em cada colônia [18].

Utilizando tais informações, identificamos que a fecundidade depende fortemente da densidade populacional no sítio. Assim, consideramos a quantidade (de entrada)

$$\frac{n_{j,t}}{k_j} = \frac{N_{j,t}}{K} = \frac{N_{j,t}}{K_j},$$

chamada Densidade-Populacional e que expressa o número de imaturos no sítio j em relação a sua capacidade máxima: quantidade no domínio $[0, 1]$ que nos dá uma estimativa da lotação do sítio. Propomos um sistema cuja entrada é a variável lingüística Densidade-Populacional e a saída é variável lingüística Fecundidade. A densidade populacional de cada espécie foi classificada como Pequena, Média ou Grande. A fecundidade de cada espécie foi classificada como Baixa, Média ou Alta. Estes termos foram modelados matematicamente por subconjuntos fuzzy em seus domínios: $[0, 1]$ para Densidade-Populacional e $[F_{\min}, F_{\max}]$ para Fecundidade, onde F_{\min} e F_{\max} são respectivamente as fecundidades mínima e máxima da espécie. As figuras 5.2 A e 5.2 D ilustram a modelagem das variáveis de entrada e de saída para a espécie *Lucilia eximia*, respectivamente.

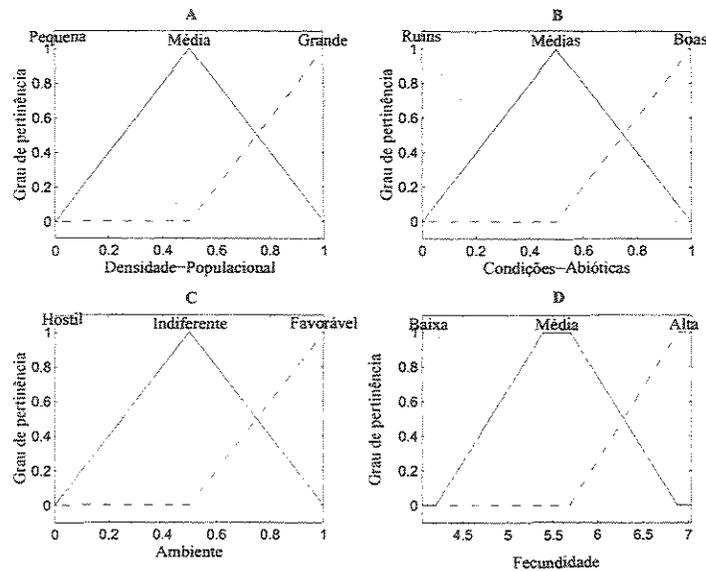


Figura 5.2: A. Densidade populacional; B. Condições abióticas; C. Ambiente; D. Fecundidade (*Lucilia eximia*).

A base de regras deste sistema é descrita a seguir.

Base de regras:

1. Se Densidade-Populacional é Pequena, **então** Fecundidade é Alta.
2. Se Densidade-Populacional é Média, **então** Fecundidade é Média.
3. Se Densidade-Populacional é Grande, **então** Fecundidade é Baixa.

OBS.: Logicamente, não podemos falar de fecundidade, ou seja, número de ovos por fêmea, quando consideramos uma densidade populacional nula. No entanto, a variável Fecundidade está definida em Densidade-Populacional = $\chi_{\{0\}}$, com o valor no seu domínio $[F_{\min}, F_{\max}]$. O valor $\tilde{F}_j(0)$ será entendido como a **fecundidade** quando a **população está próxima de zero** ($j = 1, 2$).

Já a sobrevivência e a taxa de migração dependem de uma avaliação do ambiente no sítio, no instante considerado. O ambiente, por sua vez, depende da densidade populacional e das condições abióticas. Então temos mais três sistemas baseados em regras fuzzy.

As condições abióticas podem refletir a temperatura, a umidade, a natureza do solo ou qualquer outro fator não biológico que tenha influência relevante na dinâmica da espécie. Por exemplo, Reigada [28] deixa claro a influência da estação do ano no modelo utilizado para *Chrysomya megacephala* (família calliphoridae). Aqui, nós não vamos associar esta variável a nenhum fator específico. No entanto, assumimos que a população imatura máxima local está diretamente relacionada com ela.

O primeiro sistema proposto considera as variáveis de entrada Densidade-Populacional e Condições-Abióticas para estimar a variável de saída Ambiente. As figuras 5.2 A, 5.2 B e 5.2 C ilustram a modelagem por subconjuntos fuzzy dessas variáveis. Observe que a variável Condições-Abióticas é modelada no domínio $[0, 1]$, de forma que é atribuído o valor “0” ao sítio com as piores condições abióticas para a espécie – situação para extinção local – e é atribuído “1” ao sítio com as melhores condições. Procedimento análogo é adotado para a variável de saída Ambiente. A seguir temos a base de regras utilizada.

Base de regras:

1. Se Densidade-Populacional é Pequena e Condições-Abióticas são Ruins, **então** Ambiente é Hostil.
2. Se Densidade-Populacional é Média e Condições-Abióticas são Ruins, **então** Ambiente é Hostil.
3. Se Densidade-Populacional é Grande e Condições-Abióticas são Ruins, **então** Ambiente é Hostil.
4. Se Densidade-Populacional é Pequena e Condições-Abióticas são Médias, **então** Ambiente é Indiferente.
5. Se Densidade-Populacional é Média e Condições-Abióticas são Médias, **então** Ambiente é Indiferente.
6. Se Densidade-Populacional é Grande e Condições-Abióticas são Médias, **então** Ambiente é Hostil.
7. Se Densidade-Populacional é Pequena e Condições-Abióticas são Boas, **então** Ambiente é Favorável.
8. Se Densidade-Populacional é Média e Condições-Abióticas são Boas, **então** Ambiente é Indiferente.
9. Se Densidade-Populacional é Grande e Condições-Abióticas são Boas, **então** Ambiente é Indiferente.

O segundo sistema proposto considera a variável de entrada Ambiente para estimar a variável de saída Sobrevivência. A figura 5.3 A ilustra a modelagem por subconjuntos fuzzy da sobrevivência em seu domínio ($[0, S_{\max}]$, onde S_{\max} é a taxa de sobrevivência máxima da espécie). A seguir temos a base de regras utilizada.

Base de regras:

1. Se Ambiente é Hostil, **então** Sobrevivência é Baixa.
2. Se Ambiente é Indiferente, **então** Sobrevivência é Média.
3. Se Ambiente é Favorável, **então** Sobrevivência é Alta.

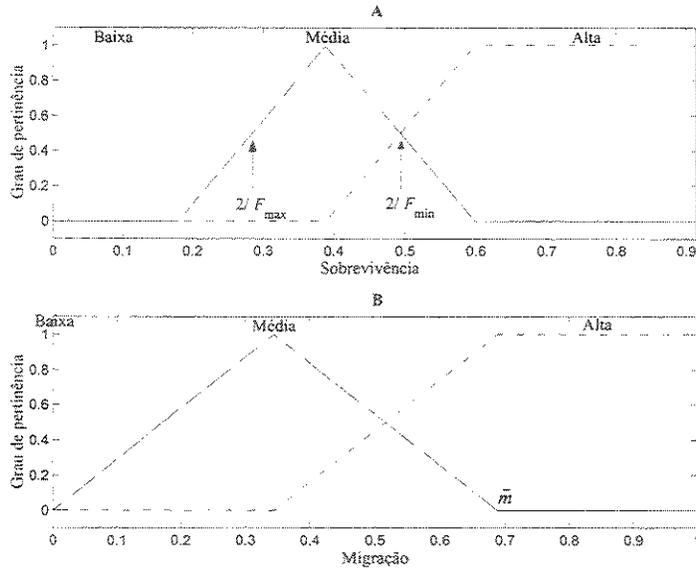


Figura 5.3: **A.** Sobrevivência (*Lucilia eximia*); **B.** Migração (*Lucilia eximia*).

O último sistema proposto considera a variável de entrada Ambiente para estimar a variável de saída Migração. A figura 5.3 **B** ilustra a modelagem da taxa de migração em seu domínio $([0, 1])$. A seguir temos a base de regras utilizada.

Base de regras:

1. Se Ambiente é Hostil, então Migração é Alta.
2. Se Ambiente é Indiferente, então Migração é Média.
3. Se Ambiente é Favorável, então Migração é Baixa.

OBS.: Como no caso da variável Fecundidade, as variáveis Sobrevivência e Migração também estão definidas em Densidade-Populacional = $\chi_{\{0\}}$, com valores nos seus domínios $[0, S_{\max}]$ e $[0, 1]$, respectivamente. Os valores $\tilde{S}_j(0)$ e $\tilde{m}_j(0)$ serão entendidos como a **sobrevivência** e a **migração**, respectivamente, quando a **população está próxima de zero** ($j = 1, 2$).

Nas proposições 5.1 e 5.2, obtemos alguns valores utilizados como referências na modelagem por subconjuntos fuzzy da sobrevivência ($\frac{2}{F_{\max}}$ e $\frac{2}{F_{\min}}$) e da migração (\bar{m}).

Proposição 5.1. *Considere o modelo de população isolada $n_{t+1} = \frac{1}{2} F \cdot S \cdot n_t$ tal que n_t denota a densidade populacional na geração t e os parâmetros (constantes) F e S denotam a fecundidade e a sobrevivência, respectivamente. Este modelo admite equilíbrio positivo se e somente se $S = \frac{2}{F} \in \left[\frac{2}{F_{\max}}, \frac{2}{F_{\min}} \right]$, onde F_{\min} e F_{\max} são respectivamente as fecundidades mínima e máxima.*

Prova:

Montamos a equação para o ponto fixo: $n^* = \frac{1}{2} F \cdot S \cdot n^*$; se $n^* > 0$, então

$$1 = \frac{1}{2} F \cdot S \Leftrightarrow S = \frac{2}{F}.$$

Como F_{\min} e F_{\max} são respectivamente as fecundidades mínima e máxima, segue imediatamente que $S = \frac{2}{F} \in \left[\frac{2}{F_{\max}}, \frac{2}{F_{\min}} \right]$.

Proposição 5.2. *Considere o modelo populacional $n_{t+1} = (1-m)\frac{1}{2} F \cdot S \cdot n_t$ tal que n_t denota a densidade populacional na geração t e os parâmetros (constantes) F , S e m denotam a fecundidade, sobrevivência e a fração de indivíduos emigrantes, respectivamente. O valor $\bar{m} = 1 - \frac{2}{F_{\max} S_{\max}}$ é o máximo valor limiar tal que ocorre extinção local, onde F_{\max} e S_{\max} são respectivamente a fecundidade e a sobrevivência máximas.*

Prova:

O ponto fixo $n_0^* = 0$ é assintoticamente estável se e somente se

$$\left| \frac{dn_{t+1}}{dn_t}(0) \right| = (1-m)\frac{1}{2} F \cdot S < 1,$$

ou seja:

$$m > 1 - \frac{2}{FS}.$$

Neste caso, o valor limiar de m para a extinção é $1 - \frac{2}{FS}$ e seu máximo é

$$\bar{m} = \max_{F, S} \left\{ 1 - \frac{2}{FS} \right\} = 1 - \frac{2}{F_{\max} S_{\max}}.$$

5.3 Modelo 1: Modelo Local

Antes de investirmos na análise de modelos de metapopulação, vale a pena estudarmos o modelo local proposto na equação 5.2 como um modelo de população isolada; faremos referência a este modelo como Modelo 1.

Nesta seção, vamos considerar a população de imaturos isolada em um único sítio, com condições abióticas fixas. Por isso, omitimos o subíndice “ j ” (índice da posição do sítio na configuração espacial). Também a metapopulação máxima fica igual a população máxima neste sítio ($K = K_1$). Resumidamente, o modelo matemático para a população isolada é dado por:

$$n_{t+1} = f(n_t) = \frac{1}{2} \tilde{F}(n_t) \cdot \tilde{S}(n_t) \cdot n_t, \quad (5.5)$$

onde n_t é a densidade de imaturos na geração t , ou seja, $n_t = \frac{N_t}{K}$; \tilde{F} e \tilde{S} são respectivamente a fecundidade e a sobrevivência, estimadas em cada geração usando os sistemas baseados em regras fuzzy apropriados (seção 5.2).

A figura 5.4 mostra gráficos de f considerando a espécie *Lucilia eximia* e quatro valores de condições abióticas. É importante observar que em cada caso, a variável de estado foi normalizada em relação ao máximo populacional correspondente a sua característica ambiental. É razoável admitirmos que estes máximos sejam diferentes; de fato, acreditamos que num sítio com condições abióticas muito ruins (figura 5.4 A), a população máxima possível seja bem menor que sua estimativa num ambiente ótimo (figura 5.4 D). Esta hipótese é confirmada em [28], se fizermos um paralelo entre condições abióticas e estações climáticas. Neste trabalho citado, observamos que a população máxima no inverno é 35, enquanto no verão e na primavera é 100 (dados experimentais para abundância de fêmeas da espécie *Chrysomya megacephala*).

Uma alternativa para estimarmos o valor apropriado da população máxima é a utilização de dados experimentais. Neste estudo, além de não dispormos destes dados, não qualificamos a variável Condições-Abióticas o suficiente para que ela pudesse ser associada adequadamente a valores experimentais. Por isso, admitimos que a população máxima é

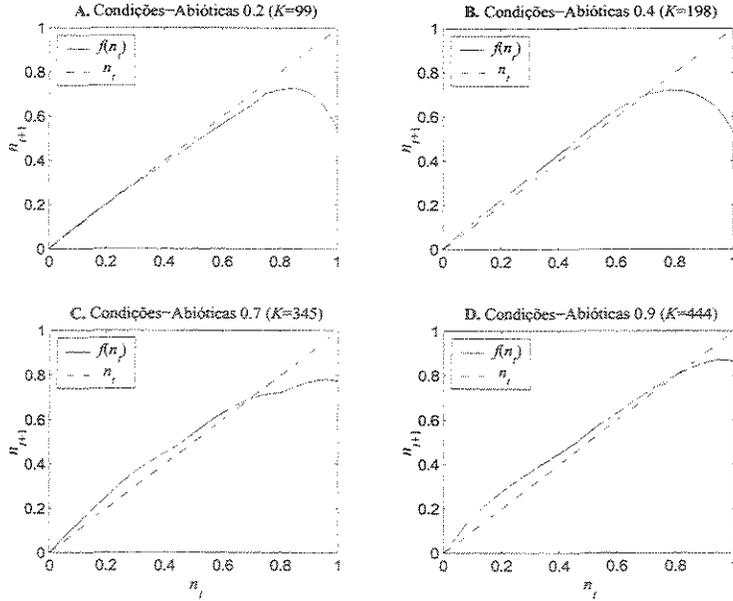


Figura 5.4: Gráficos de $n_{t+1} = f(n_t)$ para diferentes condições abióticas, considerando a espécie *Lucilia eximia*.

diretamente proporcional à variável Condições-Abióticas; ou seja:

$$K = K_{\max} \cdot \text{Condições-Abióticas}, \quad (5.6)$$

onde K_{\max} é o valor teórico obtido para a população máxima de imaturos, a partir do modelo de dinâmica local 4.1 utilizado por Godoy [18].

Os valores de K apresentados na figura 5.4 foram estimados considerando a equação 5.6, com $K_{\max} = 493$ para a espécie *Lucilia eximia*.

Analogamente, para a espécie *Chrysomya albiceps*, ilustramos gráficos de f para quatro valores de condições abióticas na figura 5.5. Para esta espécie, $K_{\max} = 658$ ².

Na subseção 5.3.1, fazemos a análise dos pontos de equilíbrio do modelo 1, estendendo esta análise para as duas espécies de interesse. Nas subseções 5.3.2 e 5.3.3, apresentamos a comparação entre o modelo 1 e os modelos logístico discreto (equação 2.1) e de Prout e McChesney (equação 4.1), respectivamente.

²Tanto os valores de K , quanto os de K_{\max} são aproximados pelos inteiros imediatamente maiores que seus valores (ambas espécies).

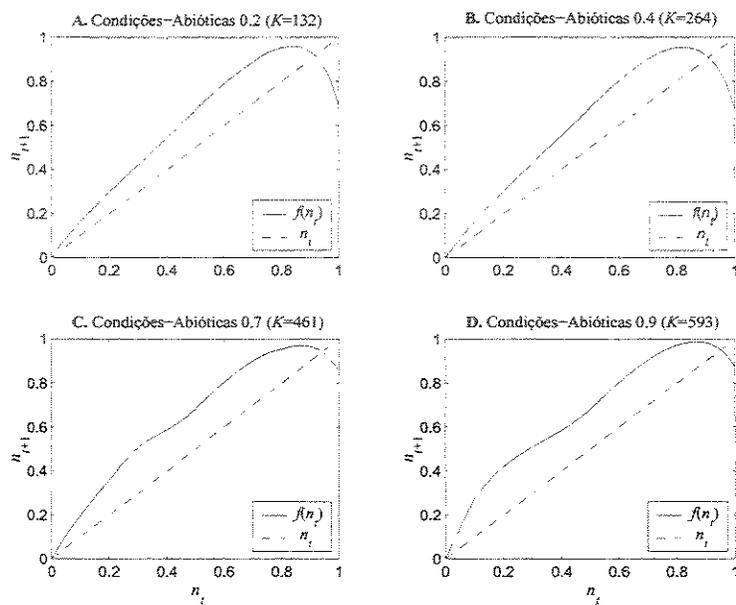


Figura 5.5: Gráficos de $n_{t+1} = f(n_t)$ para diferentes condições abióticas, considerando a espécie *Chrysomya albiceps*.

5.3.1 Análise do Modelo 1

Das simulações realizadas podemos inferir algumas propriedades gerais sobre a função $f(n_t)$: admitimos que ela seja diferenciável e côncava para baixo em seu domínio $[0, 1]$; e escrevemos sua derivada na forma

$$\frac{df}{dn_t}(n_t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dn_t} [\tilde{F}(n_t) \cdot \tilde{S}(n_t)] \cdot n_t + \tilde{F}(n_t) \cdot \tilde{S}(n_t) \right\}. \quad (5.7)$$

Buscamos agora os pontos fixos n^* da equação 5.5, isto é,

$$\begin{aligned} n^* &= f(n^*) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{F}(n^*) \cdot \tilde{S}(n^*) \cdot n^* \end{aligned} \quad (5.8)$$

que implica

$$n^* = 0 \quad (5.9)$$

ou

$$\tilde{F}(n^*) \cdot \tilde{S}(n^*) = 2. \quad (5.10)$$

Imediatamente, identificamos o ponto fixo nulo $n_0^* = 0$ (equação 5.9); no entanto, a equação 5.5 pode admitir um ponto fixo positivo que denotamos por n_+^* e que satisfaz a equação 5.10.

Como a derivada de f é positiva decrescente até o ponto n_{\max} onde ocorre o máximo local da função e como este máximo $f(n_{\max})$ é menor ou igual a 1, obtemos a condição

$$\frac{df}{dn_t}(0) = \frac{1}{2} \tilde{F}(0) \cdot \tilde{S}(0) > 1 \quad (5.11)$$

para a existência do equilíbrio positivo n_+^* .

Também podemos calcular um valor limiar para as Condições-Abióticas, que denotamos por \overline{CA} , tal que

$$\frac{1}{2} \tilde{F}(0) \cdot \tilde{S}(0) = 1; \quad (5.12)$$

assim, a condição 5.11 equivale a Condições-Abióticas $> \overline{CA}$.

Como $\tilde{S}(0)$ é crescente com a melhoria das condições abióticas e $\tilde{F}(0)$ independe delas, a equação 5.12 é satisfeita em um único valor.

Quanto à estabilidade, um equilíbrio n^* é assintoticamente estável se, e somente se, $\left| \frac{df}{dn_t}(n^*) \right| < 1$ e é instável caso contrário.

No equilíbrio nulo, a condição de estabilidade assintótica $\left| \frac{df}{dn_t}(0) \right| < 1$ equivale a Condições-Abióticas $< \overline{CA}$. Como $\frac{df}{dn_t}(0)$ é sempre positiva, no caso de convergência, ela é monótona.

A tabela 5.1 resume os pontos de equilíbrio da equação 5.5 e suas condições de existência e de estabilidade assintótica.

n^*	Condição de Existência	Condições de Estabilidade
$n_0^* = 0$	---	Condições-Abióticas $< \overline{CA}$
n_+^*	Condições-Abióticas $> \overline{CA}$	$\left \frac{df}{dn_t}(n_+^*) \right < 1$

Tabela 5.1: Resumo dos pontos fixos da equação 5.5 e suas condições de existência e estabilidade assintótica.

Simulações para a Espécie *Lucilia eximia*

Consideremos agora a espécie *Lucilia eximia*. Na figura 5.6, temos o gráfico de $\tilde{S}(0)$ em função das condições abióticas, destacando o valor \overline{CA} no qual a equação 5.12 é satisfeita. Aproximamos este valor utilizando o método da bissecção (erro absoluto $<$ tolerância $= 1 \times 10^{-9}$) e obtemos $\overline{CA} \approx 0.09712$.

A derivada no equilíbrio positivo n_+^* só pode ser estimada numericamente. No entanto, após exaustivas simulações, verificamos que este equilíbrio é assintoticamente estável em seu intervalo de existência (Condições-Abióticas $\in [\overline{CA}, 1]$).

Na figura 5.7, temos duas simulações típicas da evolução populacional da espécie *Lucilia eximia*, quando isolada.

No painel 5.7 A, observamos que Condições-Abióticas $= 0.04 < \overline{CA}$ e verificamos que n_0^* é o único ponto fixo da equação 5.5 e que é assintoticamente estável.

Já no outro painel (5.7 B), temos que Condições-Abióticas $= 0.7 > \overline{CA}$; daí o ponto fixo n_0^* é instável e a existência de n_+^* está garantida. Numericamente obtemos as aproximações

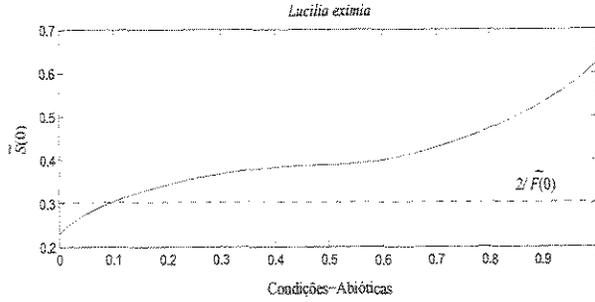


Figura 5.6: Gráfico da sobrevivência em função das Condições-Abióticas, quando a densidade populacional é nula; destaque para o valor das Condições-Abióticas no qual a equação 5.12 vale (*Lucilia eximia*).

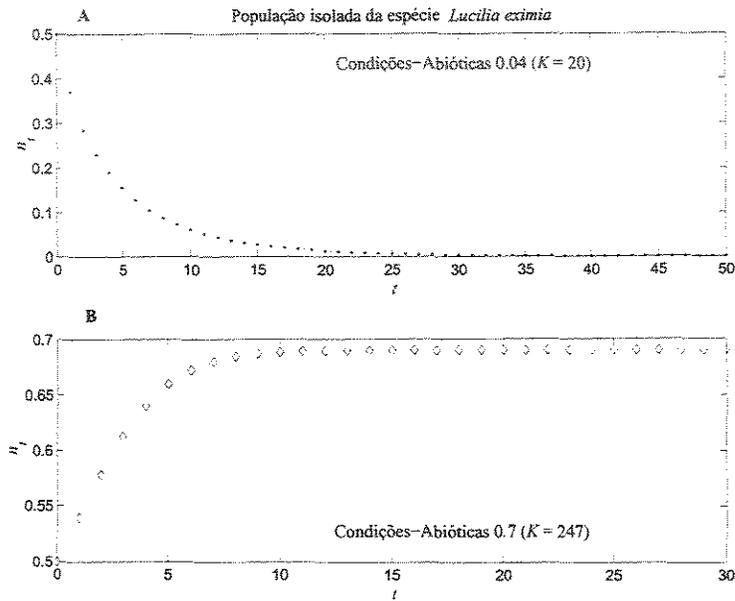


Figura 5.7: Dois exemplos da evolução populacional da espécie *Lucilia eximia* (população isolada), ilustrando os casos possíveis: **A.** n_0^* único equilíbrio e assintoticamente estável; **B.** n_0^* instável e n_+^* assintoticamente estável.

$n_+^* \approx 0.6904$ e $\frac{df}{dn_t}(n_+^*) \approx 0.5417$, o que implica a estabilidade assintótica do equilíbrio positivo. Utilizamos o método da bissecção para aproximar o ponto fixo n_+^* (erro absoluto < tolerância

$= 1 \times 10^{-9}$) e diferenças finitas: fórmula centrada para aproximar a derivada

$$\frac{df}{dn_t}(n_+^*) = \frac{f(n_+^* + h) - f(n_+^* - h)}{2h}, \quad (5.13)$$

com erro absoluto da ordem de $h^2 = 1 \times 10^{-8}$ [11]. Estes métodos também são utilizados nas demais aproximações desta e das próximas seções.

Simulações para a Espécie *Chrysomya albiceps*

Já para a espécie introduzida *Chrysomya albiceps*, a condição de existência de n_+^* é sempre satisfeita para todo valor das Condições-Abióticas, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dn_t}(0) &= \frac{1}{2} \tilde{F}(0) \cdot \tilde{S}(0) \\ &> \min_{CA} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{F}(0) \cdot \tilde{S}(0) \right\} = \frac{1}{2} \tilde{F}(0) \cdot \tilde{S}(0) \Big|_{CA=0} = 1.4138 \dots > 1, \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde CA abrevia Condições-Abióticas.

De fato, o valor limiar \overline{CA} está fora do domínio $[0, 1]$, considerado para a variável Condições-Abióticas (supondo que $\frac{1}{2} \tilde{F}(0) \cdot \tilde{S}(0)$ mantenha o comportamento crescente). Este valor é negativo, o que implica que a inequação Condições-Abióticas $> \overline{CA}$ é sempre verificada.

Observando a desigualdade 5.14, concluímos que n_0^* é instável. A estabilidade assintótica do ponto fixo n_+^* depende das condições abióticas locais e é ilustrada nas seguintes simulações (figuras 5.8 e 5.9). Os valores aproximados do ponto fixo n_+^* e da derivada $\frac{df}{dn_t}(n_+^*)$ e a situação da estabilidade dos cenários simulados estão na tabela 5.2.

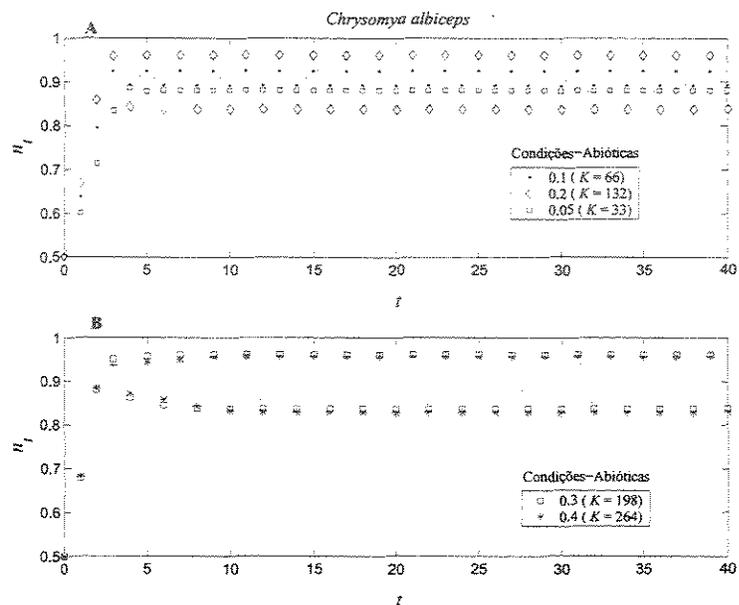


Figura 5.8: Evolução temporal de populações isoladas da espécie *Chrysomya albiceps* para as condições abióticas indicadas. Em cada população, a normalização foi feita em relação a sua população máxima (K).

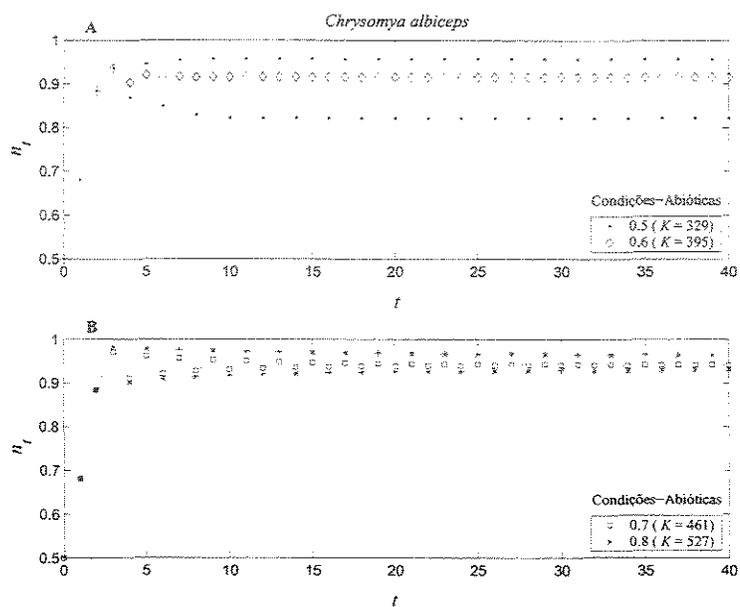


Figura 5.9: Evolução temporal de populações isoladas da espécie *Chrysomya albiceps* para as condições abióticas indicadas. Em cada população, a normalização foi feita em relação a sua população máxima (K).

Condições-Abióticas	n_+^*	$\frac{df}{dn_t}(n_+^*)$	Situação
0.05	0.8804	-0.2729	Ass. Estável
0.1	0.9104	-1.1403	Instável
0.2	0.9180	-1.2245	Instável
0.3	0.9180	-1.2245	Instável
0.4	0.9104	-1.1403	Instável
0.5	0.9100	-1.2276	Instável
0.6	0.9156	-0.4816	Ass. Estável
0.7	0.9418	-0.8766	Ass. Estável
0.8	0.9488	-0.9904	Ass. Estável
0.9	0.9506	-1.0522	Instável
1.0	0.9509	-1.0583	Instável

Tabela 5.2: Valores aproximados para o ponto fixo n_+^* da equação 5.5 e a correspondente derivada, e avaliação da estabilidade considerando diferentes Condições-Abióticas (*Chrysomya albiceps*).

Pelas simulações para a espécie *Chrysomya albiceps* (figuras 5.8 e 5.9), se o ponto de equilíbrio n_+^* é instável, então o população exibe 2-ciclo assintoticamente estável.

5.3.2 Comparação entre o Modelo 1 e o Modelo Logístico Discreto

Os objetivos desta subseção são: a partir da taxa de crescimento do Modelo 1, via ajuste linear, determinar os parâmetros do modelo logístico discreto para o cenário simulado; comparar as soluções no equilíbrio dos dois modelos, nos exemplos apresentados.

Vamos partir do Modelo Logístico Discreto (não-normalizado); sua formalização matemática é

$$N_{t+1} = a \left(1 - \frac{N_t}{\kappa} \right) N_t, \quad (5.15)$$

onde N_t representa o número de indivíduos na geração t ; a representa a taxa de crescimento intrínseco e κ , a capacidade máxima de habitantes. Sua taxa de crescimento é dada pela

expressão

$$R_L(N_{t+1}) = a \left(1 - \frac{N_t}{\kappa} \right). \quad (5.16)$$

Como o Modelo 1 depende da variável normalizada $n_t = \frac{N_t}{K}$, reescrevemos a taxa de crescimento R_L em função desta variável, ou seja:

$$r_L(n_t) = a \left(1 - \frac{K n_t}{\kappa} \right) \quad (5.17)$$

e, utilizando $b = \frac{K}{\kappa}$, obtemos

$$r_L(n_t) = a (1 - b n_t). \quad (5.18)$$

Agora, a partir da taxa de crescimento do Modelo 1:

$$r(n_t) = \frac{1}{2} \tilde{F}(n_t) \cdot \tilde{S}(n_t), \quad (5.19)$$

vamos obter a aproximação da função $r_L(n_t)$, via ajuste linear, para os quatro exemplos exibidos na figura 5.10.

No primeiro exemplo (figura 5.10 **A**), consideramos uma população imatura da espécie *Lucilia eximia* num sítio com condições abióticas ruins-médias (Condições-Abióticas = 0.3). A taxa de crescimento $r(n_t)$ pode ser visualizada na figura 5.10. Obtemos então os parâmetros do Modelo Logístico Discreto:

$$a = 1.2008$$

e

$$\kappa = \frac{K}{b} = \frac{148}{0.3536} = 418.5520.$$

Qualitativamente, os dois modelos apresentam ponto de equilíbrio estável.

No segundo exemplo (figura 5.10 **B**), também consideramos uma população imatura da espécie *Lucilia eximia*, mas sujeita a condições abióticas médias-boas (Condições-Abióticas = 0.7). Neste caso, obtemos os parâmetros

$$a = 1.3841$$

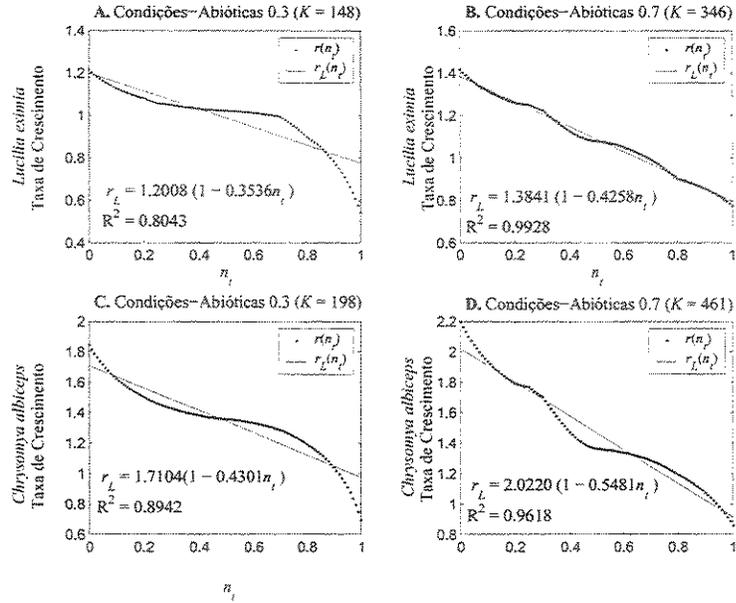


Figura 5.10: Exemplos da taxa de crescimento $r(n_t)$ em função da densidade populacional n_t (·) e do correspondente ajuste linear (—); A, B. *Lucilia eximia*; C, D. *Chrysomya albiceps*.

e

$$\kappa = \frac{K}{b} = \frac{346}{0.4258} = 812.5881.$$

Novamente, os dois modelos exibem ponto de equilíbrio estável.

O terceiro e o quarto exemplos são para a espécie *Chrysomya albiceps* (figuras 5.10 C e D).

Na figura 5.10 C, consideramos um sítio com condições abióticas ruins-médias (Condições-Abióticas = 0.3). Os parâmetros obtidos via ajuste linear são

$$a = 1.7104$$

e

$$\kappa = \frac{K}{b} = \frac{198}{0.4301} = 460.3581.$$

Qualitativamente, o Modelo 1 exibe um 2-ciclo estável, enquanto o modelo logístico discreto exibe ponto de equilíbrio estável.

Na figura 5.10 **D**, consideramos um sítio com condições abióticas médias-boas (Condições-Abióticas = 0.7). Obtemos os parâmetros

$$a = 2.0220$$

e

$$\kappa = \frac{K}{b} = \frac{461}{0.5481} = 841.0874.$$

Novamente, os dois modelos exibem ponto de equilíbrio estável.

O aluste linear da taxa de crescimento $r(n_t)$ do Modelo 1, para cada um dos exemplos, é quantitativamente aceitável. Qualitativamente, o Modelo 1 e o modelo logístico discreto (com os parâmetros obtidos via ajuste) apresentam comportamento evolutivo diferente somente em um dos quatro casos exemplificados. Por conseqüência, a utilização deste procedimento para a estimativa dos parâmetros a e κ do modelo logístico discreto deve estar sujeita ao estudo do comportamento qualitativo dos dois modelos.

5.3.3 Comparação entre o Modelo 1 e o Modelo de Prout e Mc Chesney

Na subseção anterior, comparamos o Modelo 1 e o modelo logístico discreto através de suas taxas de crescimento. Nesse caso, o interesse foi obter o parâmetro a (taxa de crescimento intrínseco) via ajuste e analisar as semelhanças ou diferenças qualitativas do equilíbrio populacional.

Nesta subseção, trabalhamos de forma análoga, porém individualizando as contribuições da fecundidade e da sobrevivência na taxa de crescimento. A equação 4.1 do modelo de Prout e Mc Chesney pode ser reescrita como:

$$N_{t+1} = \frac{1}{2} \underbrace{F e^{-f N_t}}_{fec} \cdot \underbrace{S e^{-s N_t}}_{sob} \cdot N_t. \quad (5.20)$$

Também precisamos escrever as funções *fec* e *sob* em termos da variável do Modelo 1: $n_t = \frac{N_t}{K}$. Assim

$$fec(n_t) = F e^{-f K n_t} = F e^{-\tilde{f} n_t} \quad (5.21)$$

e $n_t = \frac{N_t}{K}$. Assim

$$sob(n_t) = S e^{-s K n_t} = S e^{-\tilde{s} n_t}. \quad (5.22)$$

Daí, nós ajustamos $\tilde{F}(n_t)$ por $fec(n_t)$ e $\tilde{S}(n_t)$ por $sob(n_t)$, para os cenários apresentados nas figuras 5.11 e 5.12.

Espécie *Lucilia eximia*

Na figura 5.11 **A**, temos a fecundidade $\tilde{F}(n_t)$ plotada com pontos (\cdot) e seu ajuste exponencial com linha contínua ($—$), para a espécie *Lucilia eximia*. Como a fecundidade só depende da densidade populacional, esta figura é válida para quaisquer condições abióticas (lembrando que para cada valor das condições abióticas escolhido, usa-se um correspondente valor de K na normalização).

Também para a espécie *Lucilia eximia*, nas figuras 5.11 **B**, **C** e **D** temos a sobrevivência $\tilde{S}(n_t)$ plotada com pontos (\cdot) e seu ajuste exponencial com linha contínua ($—$), considerando as respectivas condições abióticas: ruins-médias (0.3), médias-boas (0.7) e boas (1.0).

Os parâmetros do modelo de Prout e Mc Chesney para as condições abióticas simuladas estão na tabela 5.3. Estes valores podem ser comparados aos correspondentes utilizados por Godoy (tabelas 4.1 e 4.2). Os valores de F e de S estão nos intervalos limitados pelos correspondentes mínimo e máximo experimentais.

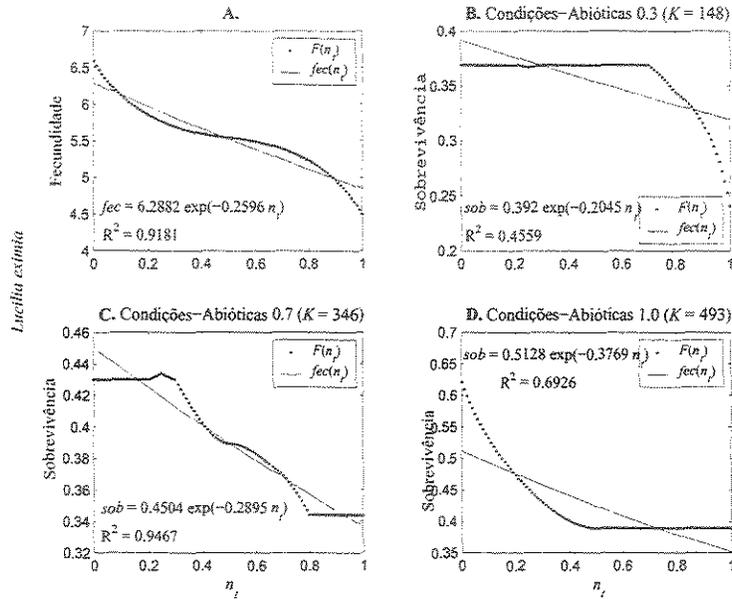


Figura 5.11: Exemplos da fecundidade $\tilde{F}(n_t)$ e da sobrevivência $\tilde{S}(n_t)$ em função da densidade populacional n_t (\cdot) e seus correspondentes ajustes exponenciais ($-$), para a espécie *Lucilia eximia*; A. Fecundidade; B, C e D. Sobrevivência (Condições-Abióticas = 0.3, 0.7 e 1.0, respectivamente).

Condições-Abióticas	F	$f = \frac{F}{K}$	S	$s = \frac{\tilde{S}}{K}$
0.3	6.2882	0.001754	0.3920	0.001382
0.7	6.2882	0.000750	0.4504	0.000837
1.0	6.2882	0.000527	0.5128	0.000765

Tabela 5.3: Parâmetros para o Modelo de Prout e Mc Chesney, obtidos via ajuste exponencial das contribuições da fecundidade e da sobrevivência na taxa de crescimento do Modelo 1, para as condições abióticas escolhidas (*Lucilia eximia*).

Espécie *Chrysomya albiceps*

Na figura 5.12 A, temos a fecundidade $\tilde{F}(n_t)$ plotada com pontos (\cdot) e seu ajuste exponencial com linha contínua ($-$), para a espécie *Chrysomya albiceps*. Já nas figuras 5.12 B, C e D temos a sobrevivência $\tilde{S}(n_t)$ plotada com pontos (\cdot) e seu ajuste exponencial com linha contínua ($-$), considerando as respectivas condições abióticas: ruins-médias (0.3), médias-boas (0.7) e boas (1.0).

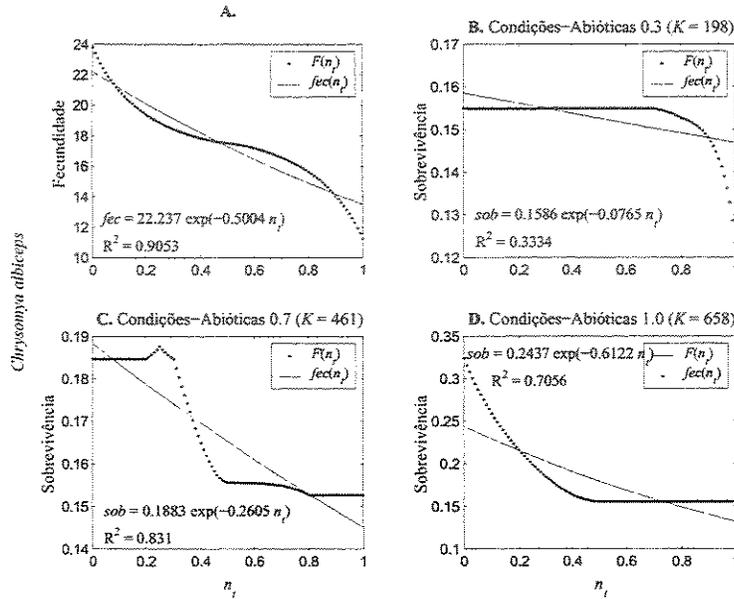


Figura 5.12: Exemplos da fecundidade $\tilde{F}(n_t)$ e da sobrevivência $\tilde{S}(n_t)$ em função da densidade populacional n_t (\cdot) e seus correspondentes ajustes exponenciais ($-$), para a espécie *Chrysomya albiceps*; A. Fecundidade; B, C e D. Sobrevivência (Condições-Abióticas = 0.3, 0.7 e 1.0, respectivamente).

Os parâmetros do modelo de Prout e Mc Chesney para as condições abióticas simuladas estão na tabela 5.4 (*Chrysomya albiceps*). Estes valores podem ser comparados aos correspondentes utilizados por Godoy (tabelas 4.1 e 4.2). Os valores de F e de S estão nos intervalos limitados pelos correspondentes mínimo e máximo experimentais.

O ajuste exponencial da fecundidade $\tilde{F}(n_t)$ para ambas as espécies é qualitativamente aceitável. No entanto, a qualidade do ajuste exponencial da sobrevivência $\tilde{S}(n_t)$ depende das

Condições-Abióticas	F	$f = \frac{F}{K}$	S	$s = \frac{S}{K}$
0.3	22.237	0.002527	0.1586	0.000386
0.7	22.237	0.001085	0.1883	0.000408
1.0	22.237	0.000760	0.2437	0.000930

Tabela 5.4: Parâmetros para o Modelo de Prout e Mc Chesney, obtidos via ajuste exponencial das contribuições da fecundidade e da sobrevivência na taxa de crescimento do Modelo 1, para as condições abióticas escolhidas (*Chrysomya albiceps*).

condições abióticas consideradas. Por exemplo, os melhores ajustes ocorrem com condições abióticas médias-boas (0.7), enquanto os piores ocorrem com condições abióticas ruins-médias (0.3).

5.4 Simulações: Dois Sítios Interligados

Na seqüência, apresentamos simulações iterativas considerando os modelos 5.3 e 5.4 para duas subpopulações acopladas (subseção 5.1.2). Faremos referência ao modelo 5.3, que admite migração unilateral, como Modelo 2 (ilustrado na figura 5.1 B); e ao modelo 5.4, que admite migração bilateral, como Modelo 3 (ilustrado na figura 5.1 A).

As simulações para as espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps* estão nas subseções 5.4.1 e 5.4.2, respectivamente.

5.4.1 Simulações para a espécie *Lucilia eximia*

Nesta subseção, todas as simulações são para populações de imaturos da espécie *Lucilia eximia*. Utilizamos a notação: — densidade da subpopulação 1 (sítio 1), ··· densidade da subpopulação 2 (sítio 2) e ····· densidade da metapopulação.

Observamos que, via de regra, populações desta espécie evoluem para pontos de equilíbrio; a migração não altera esta tendência (em nenhum dos modelos propostos).

Na figura 5.13, consideramos duas colônias, localizadas nos sítios 1 e 2, com condições abióticas ruins (0.09) e ruins-médias (0.3) – conforme indicado na legenda de cada painel.

Todas as populações estão normalizadas no mesmo valor ($K = 193$).

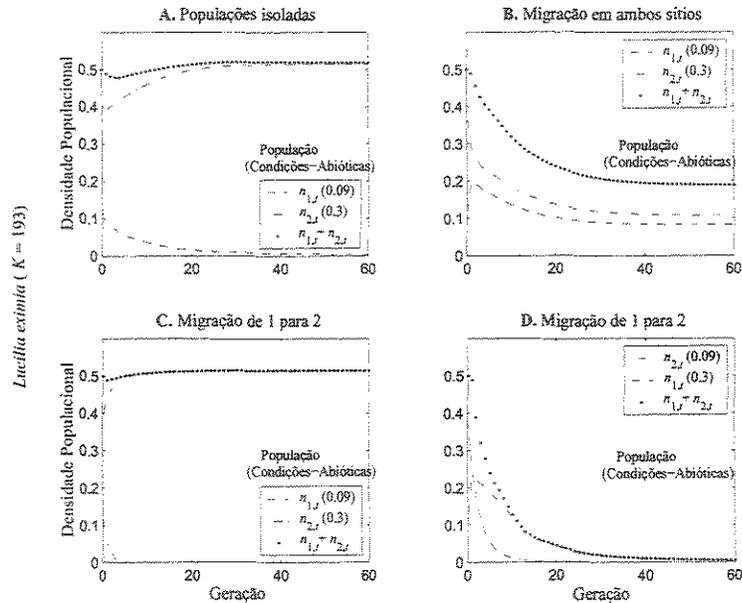


Figura 5.13: Simulações para duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia*; **A.** Subpopulações isoladas; **B.** Modelo 3: migração bilateral; **C.** Modelo 2: migração unilateral; **D.** Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: — densidade da subpopulação 1, - - - densidade da subpopulação 2 e \dots densidade da metapopulação.

Na figura 5.13 **A** estão simuladas populações isoladas; elas nos servem para comparações. Na figura 5.13 **B** apresentamos os resultados considerando o Modelo 3: migração bilateral. Nas figuras 5.13 **C** e **D** estão os resultados para o Modelo 2: migração unilateral. Considerações análogas devem ser assumidas para as figuras 5.15 e 5.17.

Na figura 5.13 **B**, vemos que a migração bilateral garante a persistência das duas colônias, o que não acontece na simulação isolada (figura 5.13 **A**: extinção no sítio 1). Neste caso, os valores de equilíbrio da subpopulação 2 e da metapopulação são inferiores aos da simulação isolada.

Já a migração unilateral (figura 5.13 **C**), do sítio 1 para o 2, acelera o processo de extinção no sítio 1 e a evolução populacional para o equilíbrio positivo no sítio 2.

Ainda com a migração unilateral, mas com as condições abióticas permutadas (figura

5.13 D), a população em ambos os sítios extingue-se.

Estas simulações apresentam o efeito negativo da migração unilateral na persistência local e global da espécie. Em contrapartida, a migração bilateral propicia a persistência local e suaviza as diferenças relativas à diversidade ambiental.

Na figura 5.14, damos destaque ao fato da extinção global (também observado na figura 5.13 D). Nos dois quadros temos as condições abióticas no sítio 1 superiores as no sítio 2 ($\text{Condições-Abióticas}_1 > \text{Condições-Abióticas}_2$) e migração de 1 para 2.

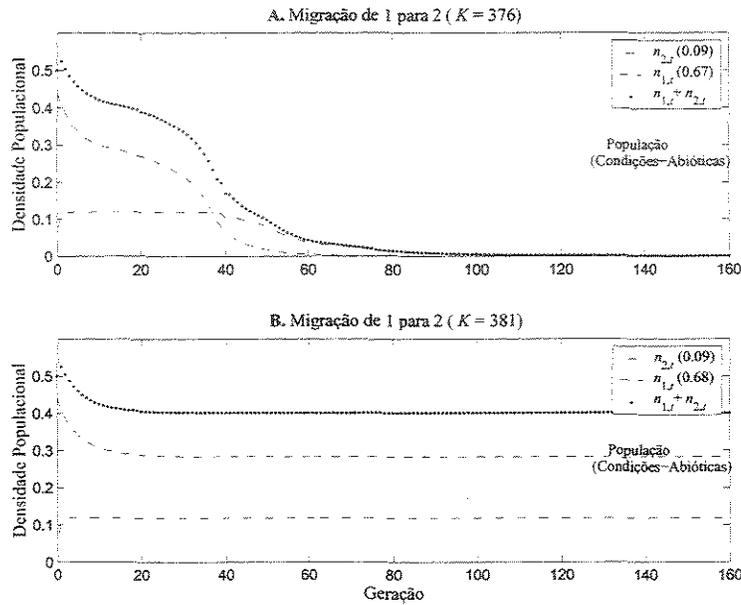


Figura 5.14: Simulações para duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia* utilizando o modelo 2: migração unilateral; **A.** Extinção global; **B.** Persistência global da espécie. Notação: — densidade da subpopulação 1, ··· densidade da subpopulação 2 e ····· densidade da metapopulação.

Na figura 5.14 **A**, observamos a extinção global. Note que ocorre a saturação do sítio 2 nas gerações 01-37; nestas gerações o excesso de indivíduos que emigraram para o sítio 2 retornam ao 1. No entanto, uma diminuta melhora nas $\text{Condições-Abióticas}_2$ acarreta a persistência de ambas colônias (figura 5.14 **B**). Neste caso, ocorre saturação para $t \geq 1$.

Na figura 5.15, temos simulações com condições abióticas ruins-médias (0.3) e médias-boas (0.7).

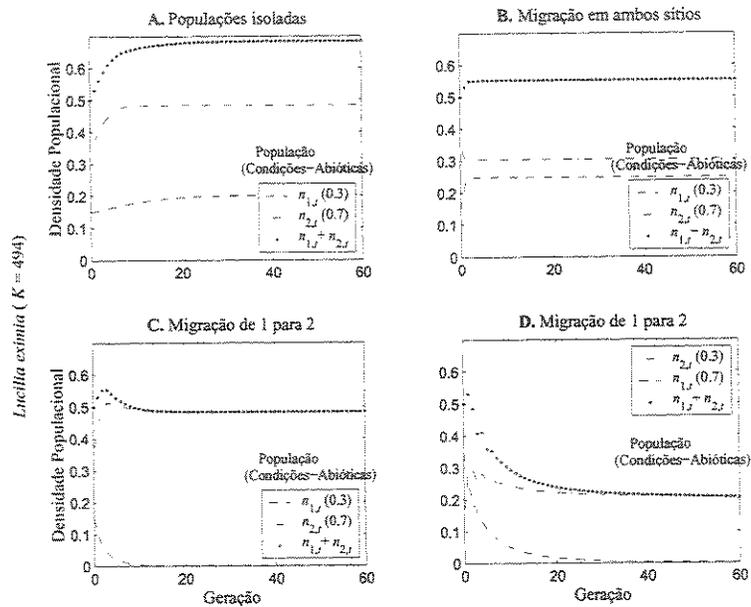


Figura 5.15: Simulações para duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia*; **A.** Subpopulações isoladas; **B.** Modelo 3: migração bilateral; **C.** Modelo 2: migração unilateral; **D.** Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: --- densidade da subpopulação 1, — densidade da subpopulação 2 e ··· densidade da metapopulação.

A migração bilateral (figura 5.15 **B**) produz subpopulações equilibradas em valores mais próximos entre si que os correspondentes no caso isolado (figura 5.15 **A**). Também a metapopulação se estabiliza em torno de um valor menor.

Já a migração unilateral resulta em extinção local no sítio 1 e conseqüente redução na metapopulação; a subpopulação no sítio 2 segue isolada (figuras 5.15 **C** e **D**).

Na figura 5.16, combinamos uma subpopulação no sítio 1 com condições abióticas boas (0.9) com outra no sítio 2 com condições ruins-médias (0.3). Comparando com 5.15 **D**, a melhoria nas condições abióticas no sítio 1 evita a extinção local.

Finalizando, observamos as simulações na figura 5.17, correspondendo a condições abióticas melhores que as consideradas anteriormente. As figuras 5.17 **A**, **B** e **C** fornecem

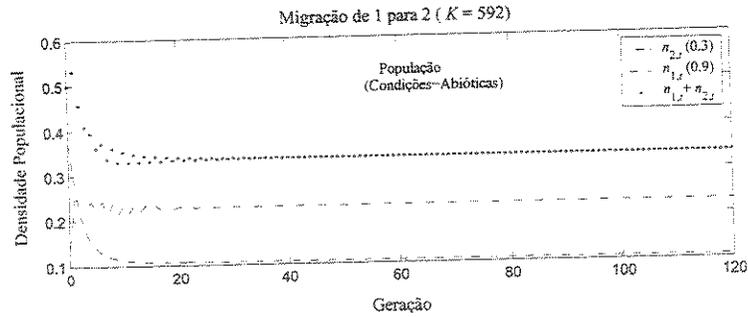


Figura 5.16: Simulações para duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia* utilizando o modelo 2: migração unilateral, mostrando persistência global da espécie. Notação: — densidade da subpopulação 1, - - - densidade da subpopulação 2 e ··· densidade da metapopulação.

informações equivalentes às das figuras 5.15 A, B e C. Já a figura 5.17 D mostra um cenário análogo ao da figura 5.16. Logo, nenhuma nova informação.

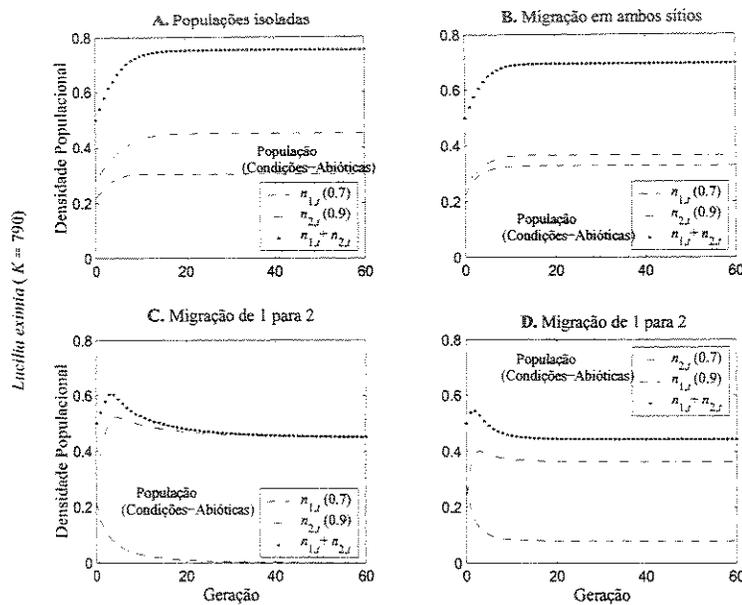


Figura 5.17: Simulações para duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia*; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: — densidade da subpopulação 1, - - - densidade da subpopulação 2 e ··· densidade da metapopulação.

5.4.2 Simulações para a espécie *Chrysomya albiceps*

Nesta subseção, apresentamos simulações que caracterizam a evolução populacional de imaturos da espécie *Chrysomya albiceps*. Utilizamos a notação: $\dots \bullet \dots$ densidade da subpopulação 1 (sítio 1), $\dots \circ \dots$ densidade da subpopulação 2 (sítio 2) e $\dots \square \dots$ densidade da metapopulação.

Destacamos que as subpopulações de imaturos desta espécie atingem densidades maiores que as da espécie nativa nas mesmas condições, segundo o modelo de dinâmica local proposto. Por conseqüência, além do aumento da população local, ocorre um aumento na fração de indivíduos migrantes, o que acarreta a utilização freqüente da hipótese da saturação.

Antes de analisarmos cada uma das simulações, vale a pena destacar algumas características predominantes:

- Na maioria dos casos, cada subpopulação evolui para ponto de equilíbrio ou 2-ciclo.
- Não observamos extinção global.
- Modelo 3 – migração bilateral: em geral, as densidades das subpopulações $n_{1,t}$ e $n_{2,t}$ são mais próximas entre si, quando comparamos com a correspondente simulação para populações isoladas.
- Modelo 2 – migração unilateral, do sítio 1 para o 2 tal que $\text{Condições-Abióticas}_1 < \text{Condições-Abióticas}_2$: a subpopulação $n_{1,t}$ ou extingue-se ou estabiliza-se em valores consideravelmente menores que os de $n_{2,t}$.
- Modelo 2 – migração unilateral, do sítio 1 para o 2 tal que $\text{Condições-Abióticas}_1 > \text{Condições-Abióticas}_2$: as duas subpopulações persistem.

Para as figuras 5.18, 5.20 e 5.21, como na subseção anterior, consideramos: **A.** Subpopulações isoladas; **B.** Modelo 3: migração bilateral; **C.** Modelo 2: migração unilateral e **D.** Modelo 2: migração unilateral com condições abióticas permutadas. Todas as populações em cada figura são normalizadas por K .

Na figura 5.18, consideramos duas colônias, localizadas nos sítios 1 e 2, com condições abióticas ruins (0.1) e ruins-médias (0.4) – conforme indicado em cada painel.

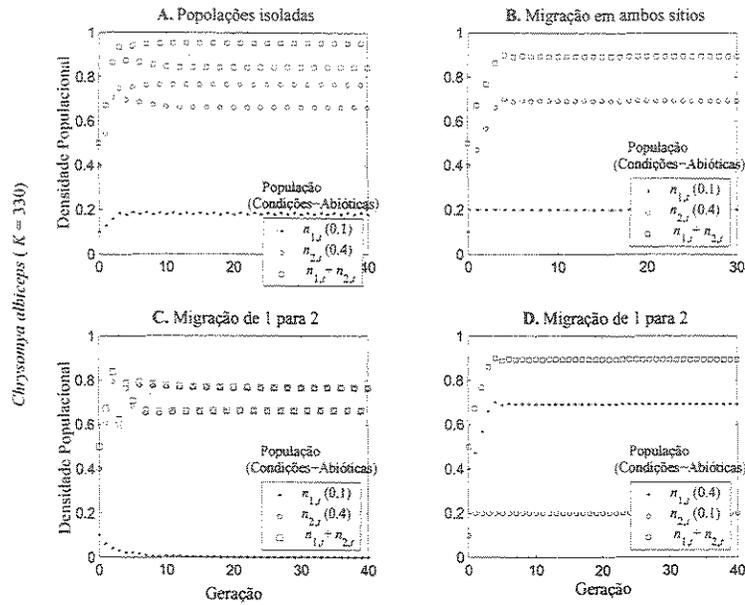


Figura 5.18: Simulações para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps*; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: $\dots \bullet \dots$ densidade da subpopulação 1, $\dots \circ \dots$ densidade da subpopulação 2 e $\dots \square \dots$ densidade da metapopulação.

Na figura 5.18 B (Modelo 3: migração bilateral), observamos que ambas subpopulações evoluem para pontos de equilíbrio, com saturação na subpopulação 1 para toda geração $t \geq 1$; comparando com a simulação isolada (figura 5.18 A), não ocorre a aproximação esperada das densidades $n_{1,t}$ e $n_{2,t}$. Neste caso, isto se deve a utilização da hipótese da saturação que ‘segurou’ a densidade $n_{1,t}$ em $k_1 = 0.2$ (densidade máxima).

Na figura 5.18 C, a migração unilateral ocasiona a extinção local no sítio 1; a subpopulação 2 segue isolada exibindo o mesmo 2-ciclo observado na simulação isolada (figura 5.18 A). Não ocorre saturação.

Na figura 5.18 D, observamos a saturação da subpopulação 2 para todo $t \geq 1$. Neste

caso, o efeito do retorno do excesso de indivíduos migrantes é tão forte que a migração unilateral produz o mesmo cenário que a bilateral (figura 5.18 B, comparando sítios com as mesmas condições abióticas).

Na figura 5.19, consideramos duas colônias, localizadas nos sítios 1 e 2, com condições abióticas ruins (0.1) e médias-boas (0.6) – conforme indicado em cada painel.

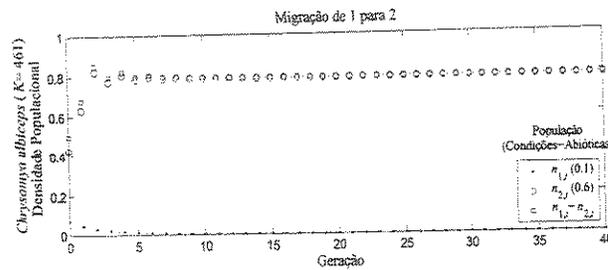


Figura 5.19: Simulação para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* utilizando o Modelo 2: migração unilateral. Notação: $\dots \bullet \dots$ densidade da subpopulação 1, $\dots \circ \dots$ densidade da subpopulação 2 e $\dots \square \dots$ densidade da metapopulação.

Agora vamos comparar os casos exibidos nas figuras 5.18 C e 5.19. Se tomamos Condições-Abióticas₂ = 0.6 ao invés de 0.4, ainda a subpopulação 1 extingue-se, mas a subpopulação 2 converge assintoticamente porque este é seu comportamento quando isolada.

A figura 5.20 apresenta simulações para sítios com condições abióticas médias (0.5 e 0.6).

Comparando as figuras 5.20 A e 5.20 B, notamos que a migração bilateral implica na aproximação das densidades $n_{1,t}$ e $n_{2,t}$, com a inversão $n_{1,t} > n_{2,t}$ para $t \geq 4$, apesar de Condições-Abióticas₁ < Condições-Abióticas₂. Ainda, a natureza do equilíbrio da subpopulação $n_{1,t}$ muda de 2-ciclo (quando isolada) para ponto de equilíbrio. Ocorre saturação na terceira geração (subpopulação 1).

A migração unilateral simulada na figura 5.20 C mostra a persistência global da espécie, com considerável queda na densidade $n_{1,t}$ e aumento na $n_{2,t}$ quando comparadas

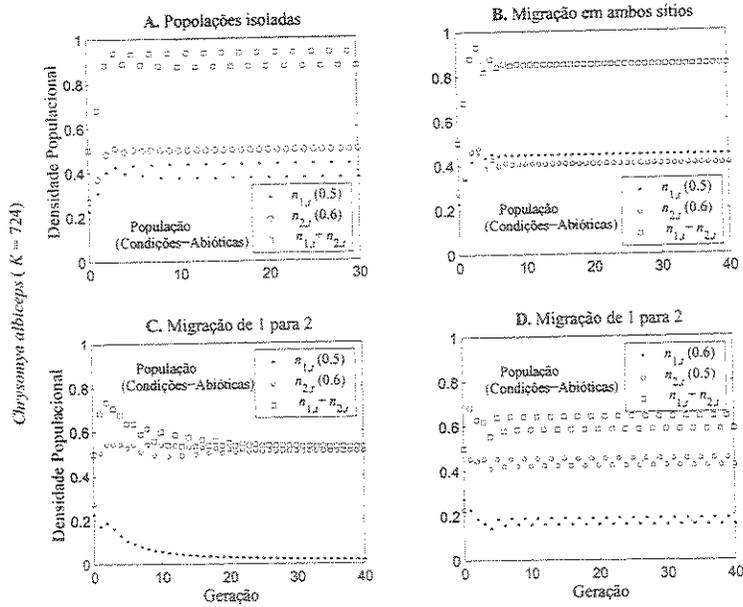


Figura 5.20: Simulações para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps*; **A.** Subpopulações isoladas; **B.** Modelo 3: migração bilateral; **C.** Modelo 2: migração unilateral; **D.** Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: $\dots\bullet\dots$ densidade da subpopulação 1, $\dots\circ\dots$ densidade da subpopulação 2 e $\dots\square\dots$ densidade da metapopulação.

com as correspondentes subpopulações da simulação isolada (figura 5.20 C). Novamente a subpopulação $n_{1,t}$ se estabiliza em um ponto. Ocorre saturação na segunda e na terceira gerações (subpopulação 2).

Agora analisemos a figura 5.20 D que simula a migração unilateral tal que Condições-Abióticas₁ > Condições-Abióticas₂. Novamente temos a inversão $n_{1,t} > n_{2,t}$ para $t \geq 1$, apesar das condições abióticas no sítio 1 serem melhores que as mesmas no 2. A diferença quantitativa entre as subpopulações é acentuada devido a natureza unilateral da migração. Ambas subpopulações evoluem para 2-ciclos. Ocorre saturação na subpopulação 2 em todas as gerações ímpares.

Na figura 5.21, tomamos subpopulações em sítios com condições abióticas boas (0.8 e 0.9). A hipótese da saturação é ativada repetidamente tanto para a simulação com migração

bilateral (figura 5.21 B: saturação da subpopulação 1 para $t = 3, 5, 7, \dots$), quanto para as simulações com migração unilateral (figura 5.21 C: saturação da subpopulação 2 para $t \geq 2$ e figura 5.21 D: saturação da subpopulação 2 para $t \geq 1$).

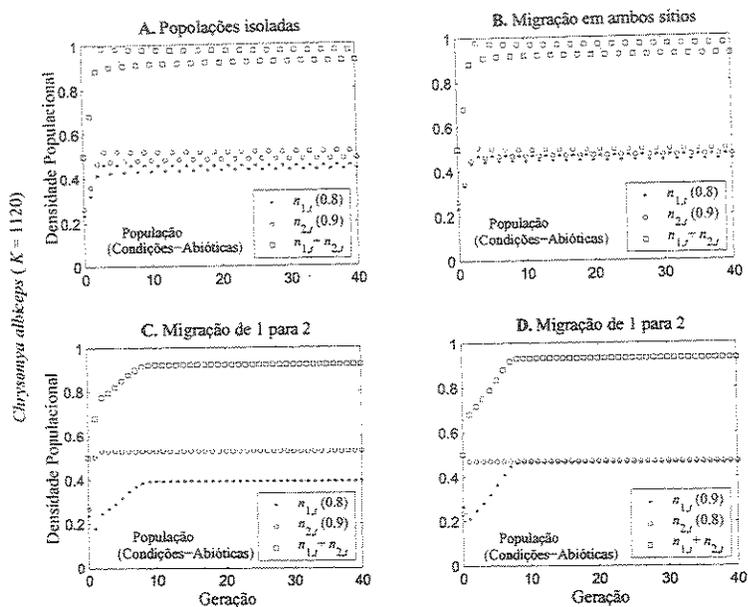


Figura 5.21: Simulações para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps*; A. Subpopulações isoladas; B. Modelo 3: migração bilateral; C. Modelo 2: migração unilateral; D. Modelo 2: migração unilateral (condições abióticas permutadas). Notação: $\dots \bullet \dots$ densidade da subpopulação 1, $\dots \circ \dots$ densidade da subpopulação 2 e $\dots \square \dots$ densidade da metapopulação.

Considerando a migração bilateral (figura 5.21 B), confirmamos a aproximação das densidades $n_{1,t}$ e $n_{2,t}$ e a manutenção da natureza do equilíbrio (2-ciclo), quando comparada com a simulação isolada (figura 5.21 A).

Já as simulações com migração unilateral (figuras 5.21 C e 5.21 D), a subpopulação $n_{2,t}$ alcança e mantém-se no valor máximo k_2 , enquanto $n_{1,t}$ estabiliza-se em um outro ponto.

Na figura 5.22, simulamos duas subpopulações em sítios com condições abióticas boas (0.9 e 0.94).

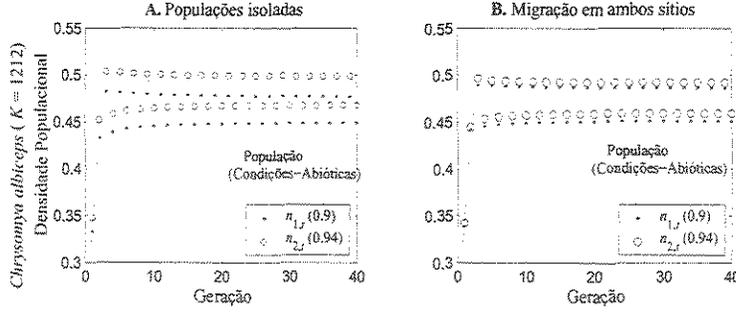


Figura 5.22: Simulações para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps*; **A.** Subpopulações isoladas; **B.** Modelo 3: migração bilateral. Notação: $\dots \bullet \dots$ densidade da subpopulação 1 e $\dots \circ \dots$ densidade da subpopulação 2.

Na figura 5.22 **B**, novamente observamos que a migração bilateral aproxima as densidades das subpopulações e mantém a natureza do equilíbrio (2-ciclo), quando comparada com a simulação isolada (figura 5.22 **A**). Neste caso (figura 5.22 **B**), não ocorre saturação, diferentemente da simulação ilustrada na figura 5.21 **B**.

Nas simulações envolvendo migração bilateral, observamos algumas órbitas incomuns, especialmente quando consideramos condições abióticas próximas entre si (Condições-Abióticas₁ variando entre 0.4 e 0.6 e Condições-Abióticas₁ < Condições-Abióticas₂). A figura 5.23 mostra algumas destas órbitas. Observe que fixamos Condições-Abióticas₁ = 0.2 e fazemos o valor de Condições-Abióticas₂ crescer.

No painel 5.23 **A**, ocorre saturação da subpopulação 1 somente nas gerações $t = 11$ e $t = 15$ e, aparentemente, as densidades não se aproximam de nenhuma órbita estável.

No painel 5.23 **B**, as subpopulações evoluem para um 3-ciclo da forma:

$$\{\mathbf{n}_1^{*c}; \mathbf{n}_2^{*c}; \mathbf{n}_3^{*c}\} = \{(k_1, n_2^{*c1}); (k_1, n_2^{*c2}); (n_1^{*c3}, n_2^{*c3})\},$$

satisfazendo $n_1^{*c3} \in (0, k_1)$ e $n_2^{*c1}, n_2^{*c2}, n_2^{*c3} \in (0, k_2)$. Ocorre saturação duas gerações sim, uma não (a partir de $t = 9$).

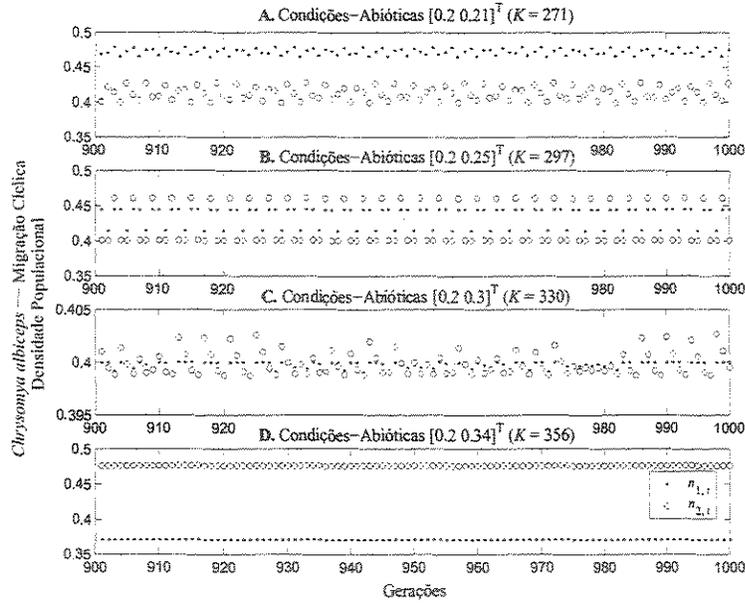


Figura 5.23: Simulações para duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* utilizando o Modelo 3: migração bilateral; **A.** órbita aparentemente caótica; **B.** 3-ciclo estável; **C.** órbita aparentemente caótica; **D.** ponto fixo estável. Notação: \bullet densidade da subpopulação 1 e \circ densidade da subpopulação 2.

Na simulação apresentada no painel 5.23 **C**, a hipótese da saturação é ativada frequentemente, mas não parece seguir nenhum padrão; novamente as subpopulações não se aproximam de um ciclo ou ponto fixo.

Para as condições abióticas consideradas no painel 5.23 **D**, observamos saturação da subpopulação 1 em todas as gerações $t \geq 2$. Para valores maiores de Condições-Abióticas₂, o comportamento é análogo.

5.5 Análise do Modelo 2 (migração unilateral)

Consideremos o modelo com migração unilateral dado pelo sistema 5.3:

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) \\ n_{2,t+1} &= f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \end{cases}$$

onde $f_j(n_{j,t}) = \frac{1}{2} \tilde{F}_j \cdot \tilde{S}_j \cdot n_{j,t}$ ($j = 1, 2$).

Agora, queremos determinar os pontos fixos $\mathbf{n}^* = (n_1^*, n_2^*)$ do sistema acima, ou seja

$$\begin{cases} n_1^* = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_1^*) \\ n_2^* = f_2(n_2^*) + \tilde{m}_1 f_1(n_1^*) \end{cases} \quad (5.23)$$

Neste momento, negligenciamos a hipótese de retorno de migrantes ao sítio de origem no caso de saturação. Oportunamente, esta hipótese será discutida.

A partir da primeira equação do sistema 5.23, substituindo a expressão de f_1 , obtemos

$$n_1^* = 0 \quad (5.24)$$

ou

$$1 = \left(1 - \tilde{m}_1 \left(\frac{f_1(n_1^*)}{k_1}\right)\right) \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \left(\frac{n_1^*}{k_1}\right) \cdot \tilde{S}_1 \left(\frac{n_1^*}{k_1}\right); \quad (5.25)$$

e reescrevemos 5.25 como

$$\left(1 - \tilde{m}_1 \left(\frac{f_1(n_1^*)}{k_1}\right)\right) \cdot \tilde{F}_1 \left(\frac{n_1^*}{k_1}\right) \cdot \tilde{S}_1 \left(\frac{n_1^*}{k_1}\right) = 2. \quad (5.26)$$

Se $n_1^* = 0$, então a segunda equação do sistema 5.23 é reduzida a

$$n_2^* = f_2(n_2^*), \quad (5.27)$$

que corresponde a mesma equação do ponto fixo para população isolada (equação 5.8), considerando as mesmas Condições-Abióticas do sítio 2 e normalização adequada. Daí, já podemos visualizar duas soluções do sistema 5.23: $\mathbf{n}_0^* = (0, 0)$ e $\mathbf{n}_1^* = (0, n_+^*)$, onde n_+^* satisfaz $\tilde{F}_2 \left(\frac{n_+^*}{k_2}\right) \cdot \tilde{S}_2 \left(\frac{n_+^*}{k_2}\right) = 2$ (equivalente a equação 5.10). Note que a existência de \mathbf{n}_1^* está vinculada a existência de n_+^* e, por conseqüência, ao cumprimento da condição 5.11.

Se $n_1^* = n_{1+}^* \neq 0$, satisfazendo a equação 5.26, então reconsideramos a segunda equação do sistema 5.23:

$$n_{2+}^* = f_2(n_{2+}^*) + \underbrace{\tilde{m}_1 f_1(n_{1+}^*)}_{\text{constante positiva}}. \quad (5.28)$$

Observamos que a equação 5.26 pode não admitir solução. No caso em que ela admite solução, buscamos também a solução da equação 5.28 e identificamos um terceiro ponto fixo $\mathbf{n}_2^* = (n_{1+}^*, n_{2+}^*)$.

Em geral, a função no lado esquerdo da equação 5.26 é decrescente em relação a n_{1+}^* , de modo que esta equação só admite solução (única) se

$$\max_{n_{1+}^*} \{(1 - \tilde{m}_1) \cdot \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1\} > 2$$

e

$$\min_{n_{1+}^*} \{(1 - \tilde{m}_1) \cdot \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1\} < 2.$$

Como a última inequação é sempre verificada – para as espécies consideradas, nos resta investigar a outra. Ainda:

$$\max_{n_{1+}^*} \{(1 - \tilde{m}_1) \cdot \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1\} = (1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0). \quad (5.29)$$

A fração de migrantes \tilde{m}_1 decresce com a melhoria das condições abióticas, ao passo que a sobrevivência \tilde{S}_1 cresce (ambas quando a densidade populacional é nula). Daí, concluímos que $(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0)$ é crescente em relação às condições abióticas, sendo que seus valores mínimo e máximo ocorrem respectivamente nas piores e nas melhores condições abióticas (Condições-Abióticas = 0 e Condições-Abióticas = 1, respectivamente). Estes valores podem ser obtidos na tabela 5.5.

	<i>Lucilia eximia</i>	<i>Chrysomya albiceps</i>
$\min\{(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0)\}$	0.5930	1.0756
$\max\{(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0)\}$	3.0157	5.1771

Tabela 5.5: Valores mínimo e máximo de $(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0)$ para as espécies estudadas (em relação às condições abióticas).

Então podemos determinar o valor limiar \underline{CA} , que satisfaz

$$(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) = 2, \quad (5.30)$$

tal que a equação 5.26 admite solução (única) se, e somente se,

$$(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) > 2 \Leftrightarrow \text{Condições - Abióticas}_1 > \underline{CA}. \quad (5.31)$$

O fato da equação 5.26 admitir solução não garante que a equação 5.28 também admita. Na figura 5.24, temos dois exemplos para ilustrar este problema. Na figura 5.24 A,

utilizamos a seta para destacar a única solução $n_{2,t}^*$ da equação 5.28. Já na figura 5.24 B vemos que a curva em negrito não intercepta a bissetriz (domínio $[0, k_2]$).

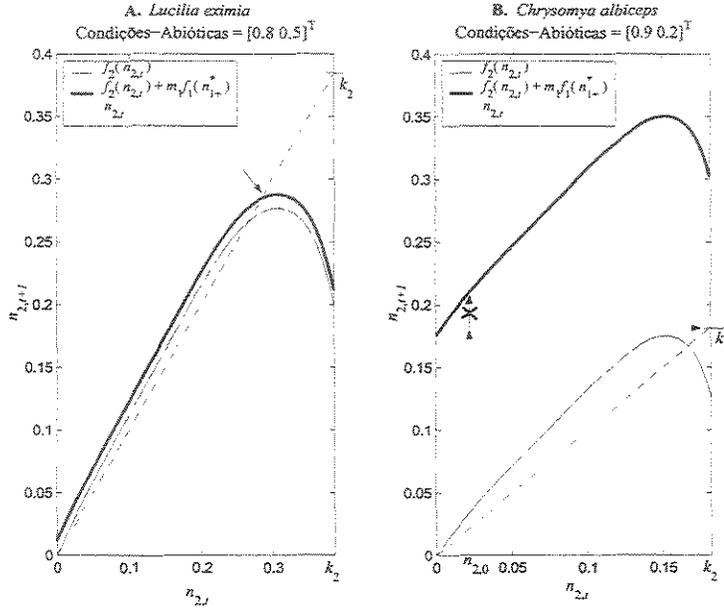


Figura 5.24: **A.** A equação 5.28 tem solução única quando Condições-Abióticas₁ = 0.8 e Condições-Abióticas₂ = 0.5 (*Lucilia eximia*); **B.** ela não tem solução quando Condições-Abióticas₁ = 0.9 e Condições-Abióticas₂ = 0.2 (*Chrysomya albiceps*).

Uma condição necessária e suficiente para que a equação 5.28 admita solução é

$$k_2 - f_2(k_2) \geq \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}^*). \quad (5.32)$$

No problema exposto na figura 5.24 B, a inequação 5.32 não é satisfeita; a seqüência $n_{2,0}, n_{2,1}, n_{2,2}, \dots$ é não-decrescente e limitada superiormente por k_2 ; em particular, $n_{2,t} = k_2$ para todo $t \geq t_s = 1$ (hipótese da saturação). Isto sempre acontece quando a inequação 5.32 não é satisfeita, para t_s apropriado. Por conseqüência, este problema passa a ser um problema com saturação da subpopulação 2, que é discutido na subseção 5.5.3.

A tabela 5.6 relaciona os pontos fixos do sistema 5.3 e suas condições de existência; também apresenta as respectivas condições de estabilidade, que são obtidas na seqüência.

\mathbf{n}^*	Condição de Existência	Condições de Estabilidade
$\mathbf{n}_0^* = (0, 0)$	---	Condições-Abióticas ₁ < \underline{CA} e Condições-Abióticas ₂ < \overline{CA}
$\mathbf{n}_1^* = (0, n_+^*)$	Condições-Abióticas ₂ > \overline{CA}	Condições-Abióticas ₁ < \underline{CA} e inequação 5.47
$\mathbf{n}_2^* = (n_{1+}^*, n_{2+}^*)$	Condições-Abióticas ₁ > \underline{CA} $k_2 - f_2(k_2) \geq \tilde{m}_1 f_1(n_{1+}^*)$	inequação 5.50 e $ \lambda_2 < 1$

Tabela 5.6: Resumo dos pontos fixos do sistema 5.3 e suas condições de existência e estabilidade.

Podemos estudar a estabilidade destes pontos fixos investigando os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz jacobiana associada ao sistema 5.3. Se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, então o ponto fixo é estável; caso contrário, ele é instável. Utilizamos as notações:

$$\begin{cases} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) & = g(n_{1,t}; n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} = f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) & = h(n_{1,t}; n_{2,t}) \end{cases} \quad (5.33)$$

e

$$J(\mathbf{n}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial n_{1,t}} & \frac{\partial g}{\partial n_{2,t}} \\ \frac{\partial h}{\partial n_{1,t}} & \frac{\partial h}{\partial n_{2,t}} \end{pmatrix} \Bigg|_{(n_{1,t}; n_{2,t}) = \mathbf{n}^*}, \quad (5.34)$$

para as funções no sistema 5.3 e para o jacobiano, respectivamente. Observe que supomos que g e h são diferenciáveis.

Podemos escrever as derivadas parciais na forma:

$$\frac{\partial g}{\partial n_{1,t}}(n_{1,t}; n_{2,t}) = \frac{d}{dn_{1,t}} \left[(1 - \tilde{m}_1) \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \right] \cdot n_{1,t} + (1 - \tilde{m}_1) \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1, \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial g}{\partial n_{2,t}}(n_{1,t}; n_{2,t}) = 0, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n_{1,t}}(n_{1,t}; n_{2,t}) = \frac{d}{dn_{1,t}} \left[\tilde{m}_1 \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \right] \cdot n_{1,t} + \tilde{m}_1 \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \quad (5.37)$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial n_{2,t}}(n_{1,t}; n_{2,t}) = \frac{d}{dn_{2,t}} \left[\frac{1}{2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2 \right] \cdot n_{2,t} + \frac{1}{2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2. \quad (5.38)$$

No ponto fixo $\mathbf{n}_0^* = (0, 0)$, temos:

$$J(\mathbf{n}_0^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) & 0 \\ \frac{1}{2}\tilde{m}_1(0) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) & \frac{1}{2}\tilde{F}_2(0) \cdot \tilde{S}_2(0) \end{pmatrix}, \quad (5.39)$$

cujos autovalores são

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) \quad (5.40)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\tilde{F}_2(0) \cdot \tilde{S}_2(0), \quad (5.41)$$

ambos positivos. Observando as expressões de λ_1 e λ_2 (equações 5.40 e 5.41, respectivamente) e comparando com as equações dos valores limiares \underline{CA} e \overline{CA} (equações 5.12 e 5.30, respectivamente), é imediato que

$$|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow \text{Condições - Abióticas}_1 < \underline{CA} \quad (5.42)$$

e

$$|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow \text{Condições - Abióticas}_2 < \overline{CA}, \quad (5.43)$$

lembrando que λ_1 e λ_2 são crescentes em relação às condições abióticas.

No ponto fixo $\mathbf{n}_1^* = (0, n_+^*)$, passando diretamente para os autovalores, temos:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) \quad (5.44)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dn_{2,t}} \left[\tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2 \right] \Big|_{n_+^*} \cdot n_+^* + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2}_{\Big|_{n_+^*}}. \quad (5.45)$$

O primeiro autovalor associado ao equilíbrio \mathbf{n}_1^* é igual ao do caso anterior (ver expressões 5.40 e 5.44). Daí, a equivalência 5.42 continua valendo. Ainda vale a pena destacar que para $|\lambda_2| < 1$ é necessário e suficiente que

$$-2 < \frac{1}{2} \frac{d}{dn_{2,t}} \left[\tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2 \right] \Big|_{n_+^*} \cdot n_+^* < 0 \quad (5.46)$$

ou

$$-\frac{4}{n_+^*} < \frac{d}{dn_{2,t}} \left[\tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2 \right] \Big|_{n_+^*} < 0. \quad (5.47)$$

Para o ponto fixo \mathbf{n}_2^* , os autovalores do jacobiano $J(\mathbf{n}_2^*)$ são

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dn_{1,t}} \left[(1 - \tilde{m}_1) \cdot \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \right] \Big|_{n_+^*} \cdot n_{1+}^* + \underbrace{1}_{\frac{1}{2}(1-\tilde{m}_1) \cdot \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \Big|_{n_+^*}} \quad (5.48)$$

e

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dn_{2,t}} \left[\tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2 \right] \Big|_{n_{2+}^*} \cdot n_{2+}^* + \frac{1}{2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2 \Big|_{n_{2+}^*}. \quad (5.49)$$

Ainda, $|\lambda_1| < 1$ se, e somente se,

$$-\frac{4}{n_{1+}^*} < \frac{d}{dn_{1,t}} \left[(1 - \tilde{m}_1) \cdot \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \right] \Big|_{n_{1+}^*} < 0. \quad (5.50)$$

Não obtemos nenhuma inequação simplificada equivalente a $|\lambda_2| < 1$.

5.5.1 Modelo 2: Considerações para a Espécie *Lucilia eximia*

Numericamente, determinamos os valores limiares para a espécie nativa: $\overline{CA} \approx 0.09712$ e $\underline{CA} \approx 0.7725$. As condições de existência e estabilidade seguem de acordo com a tabela 5.6.

Um exemplo onde observamos a extinção global (estabilidade do equilíbrio nulo), é apresentado na figura 5.13 D. Neste caso, Condições-Abióticas₁ = 0.3 < \underline{CA} e Condições-Abióticas₂ = 0.09 < \overline{CA} .

Para complementar as investigações teóricas sobre os pontos fixos (*Lucilia eximia*), vamos considerar dois exemplos a seguir.

Exemplo 5.1:

Considere duas subpopulações da espécie nativa sujeitas à migração alinhada, do sítio 1 para o 2, tais que Condições-Abióticas₁ = 0.7 e Condições-Abióticas₂ = 0.9.

Observe que Condições-Abióticas₁ < \underline{CA} e Condições-Abióticas₂ > \overline{CA} . Logo, de acordo com a tabela 5.6, o ponto fixo \mathbf{n}_0^* é instável; este comportamento é confirmado com o cálculo dos autovalores $\lambda_1 \approx 0.9306$ e $\lambda_2 \approx 1.4166$, associados a este ponto fixo.

Ainda pela tabela 5.6, o ponto fixo \mathbf{n}_2^* não existe.

Também obtemos $\mathbf{n}_1^* \approx (0, 0.4507)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx 0.9306$ e $\lambda_2 \approx 0.7088$. Neste caso, \mathbf{n}_1^* é estável.

A figura 5.17 C corresponde a simulação deste cenário.

Exemplo 5.2:

Considere duas subpopulações da espécie nativa sujeitas à migração alinhada, do sítio 1 para o 2, tais que Condições-Abióticas₁ = 0.9 e Condições-Abióticas₂ = 0.7.

Observe que Condições-Abióticas₁ > \underline{CA} e Condições-Abióticas₂ > \overline{CA} . Novamente, o ponto fixo \mathbf{n}_0^* é instável; os autovalores associados a este ponto fixo são $\lambda_1 \approx 1.1876$ e $\lambda_2 \approx 1.7532$.

Ainda de acordo com a tabela 5.6, o ponto fixo \mathbf{n}_1^* existe mas é instável ($\mathbf{n}_1^* \approx (0, 0.3024)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx 1.1876$ e $\lambda_2 \approx 0.5417$).

Também obtemos $\mathbf{n}_2^* \approx (0.07975, 0.3643)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx 0.7527$ e $\lambda_2 \approx 0.5516$. Neste caso, \mathbf{n}_2^* é estável.

A figura 5.17 D corresponde a simulação deste cenário.

5.5.2 Modelo 2: Considerações para a Espécie *Chrysomya albiceps*

Para a espécie introduzida, temos que $\frac{1}{2} \tilde{F}(0) \cdot \tilde{S}(0) > 1$ para quaisquer condições abióticas (ver 5.14). Isto equivale a dizer que a inequação Condições-Abióticas₂ > \overline{CA} é sempre verificada. Por conseqüência, o equilíbrio nulo \mathbf{n}_0^* é sempre instável e o equilíbrio $\mathbf{n}_1^* = (0, n_+^*)$ sempre existe.

Numericamente, aproximamos o valor limiar $\underline{CA} \approx 0.2455$. As condições de existência e estabilidade seguem conforme a tabela 5.6.

Também optamos por exemplos para complementar as investigações teóricas.

Exemplo 5.3:

Considere duas subpopulações da espécie introduzida sujeitas à migração alinhada, do sítio 1 para o 2, tais que Condições-Abióticas₁ = 0.1 e Condições-Abióticas₂ = 0.6.

Observe que Condições-Abióticas₁ < \underline{CA} e Condições-Abióticas₂ > \overline{CA} . Logo, de acordo com a tabela 5.6, o ponto fixo \mathbf{n}_0^* é instável; este comportamento é confirmado com o cálculo dos autovalores $\lambda_1 \approx 0.8515$ e $\lambda_2 \approx 1.7340$, associados a este ponto fixo.

Ainda pela tabela 5.6, o ponto fixo \mathbf{n}_2^* não existe.

Também obtemos $\mathbf{n}_1^* \approx (0, 0.7845)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx 0.8515$ e $\lambda_2 \approx -0.4816$. Neste caso, \mathbf{n}_1^* é estável.

A figura 5.19 corresponde a simulação deste cenário.

Exemplo 5.4:

Considere duas subpopulações da espécie introduzida sujeitas à migração alinhada, do sítio 1 para o 2, tais que Condições-Abióticas₁ = 0.1 e Condições-Abióticas₂ = 0.4.

Observe que Condições-Abióticas₁ < \underline{CA} e Condições-Abióticas₂ > \overline{CA} . Logo, de acordo com a tabela 5.6, o ponto fixo \mathbf{n}_0^* é instável; este comportamento é confirmado com o cálculo dos autovalores $\lambda_1 \approx 0.8515$ e $\lambda_2 \approx 1.7340$, associados a este ponto fixo.

Ainda pela tabela 5.6, o ponto fixo \mathbf{n}_2^* não existe.

Também obtemos $\mathbf{n}_1^* \approx (0, 0.7284)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx 0.8515$ e $\lambda_2 \approx -1.1403$. Neste caso, \mathbf{n}_1^* é instável.

Pela simulação apresentada na figura 5.18 C, concluímos que este sistema exibe um 2-ciclo estável.

Exemplo 5.5:

Considere duas subpopulações da espécie introduzida sujeitas à migração alinhada, do sítio 1 para o 2, tais que Condições-Abióticas₁ = 0.5 e Condições-Abióticas₂ = 0.6.

Observe que Condições-Abióticas₁ > \underline{CA} e Condições-Abióticas₂ > \overline{CA} . Novamente, o ponto fixo \mathbf{n}_0^* é instável; os autovalores associados a este ponto fixo são $\lambda_1 \approx 1.0555$ e $\lambda_2 \approx 1.8518$.

Ainda de acordo com a tabela 5.6, o ponto fixo \mathbf{n}_1^* existe mas é instável ($\mathbf{n}_1^* \approx (0, 0.4995)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx 1.0555$ e $\lambda_2 \approx -0.4816$).

Também obtemos $\mathbf{n}_2^* \approx (0.01643, 0.5074)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx 0.9513$ e

$\lambda_2 \approx -0.6644$. Neste caso, \mathbf{n}_2^* é estável.

A figura 5.20 C corresponde a simulação deste cenário.

5.5.3 Modelo 2: Discussão sobre a Hipótese da Saturação

Quando modelamos a migração na subseção 5.1.2, assumimos que no caso de saturação de uma subpopulação devido à migração, o excesso de indivíduos emigrantes retorna ao(s) sítio(s) de origem. No caso da migração unilateral, temos fluxo migratório do sítio 1 para o 2, de modo que a saturação só pode ocorrer no sítio 2.

Numa geração t_s , a hipótese da saturação é ativada se

$$f_2(n_{2,t_s-1}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t_s-1}) > k_2; \quad (5.51)$$

neste caso fazemos:

$$n_{2,t_s} = k_2 \quad (5.52)$$

e

$$n_{1,t_s} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t_s-1}) + excesso, \quad (5.53)$$

onde $excesso = f_2(n_{2,t_s-1}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t_s-1}) - k_2$. Ou seja:

$$\begin{cases} n_{1,t_s} = f_1(n_{1,t_s-1}) + f_2(n_{2,t_s-1}) - k_2 \\ n_{2,t_s} = k_2 \end{cases} \quad (5.54)$$

Daí, interpretamos que a dinâmica populacional é reiniciada com as condições iniciais dadas em 5.54.

Se esta hipótese for ativada um número finito de vezes, igualmente basta considerar que a cada ativação o sistema é reiniciado com as correspondentes condições iniciais. Por exemplo, na simulação para a espécie nativa apresentada na figura 5.14 A, ocorre saturação da subpopulação 2 nas gerações 01-37. Outro exemplo é a simulação para a espécie introduzida da figura 5.18 C, onde ocorre saturação nas gerações 2 e 3.

No entanto, se esta hipótese é repetidamente necessária para toda geração $t \geq t_s$, então é mais adequado considerarmos que a subpopulação 2 “se equilibra” no valor $n_2^{*s} = k_2$ e

que a subpopulação 1 segue de acordo com a equação

$$n_{1,t+1} = f_1(n_{1,t}) + f_2(k_2) - k_2, \quad t > t_s, \quad (5.55)$$

cujos pontos fixos satisfazem

$$n_1^{*s} = f_1(n_1^{*s}) + \underbrace{f_2(k_2) - k_2}_{\text{constante negativa}}. \quad (5.56)$$

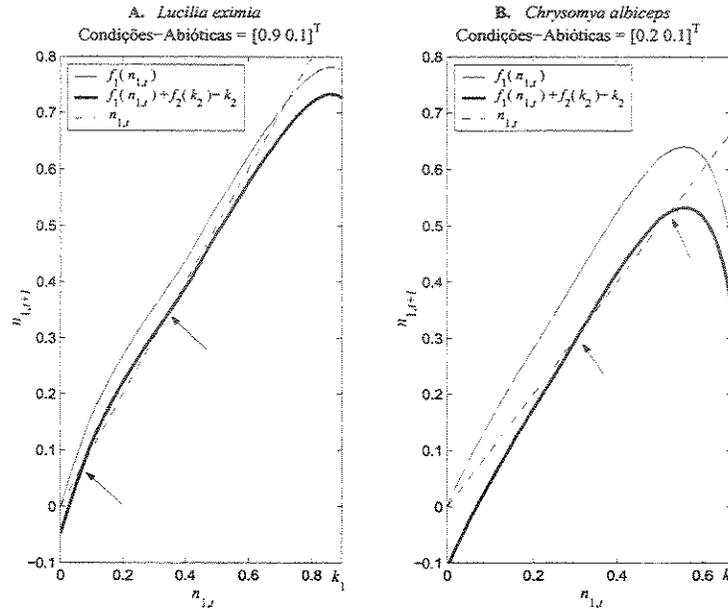


Figura 5.25: **A.** A equação 5.56 tem duas soluções quando Condições-Abióticas₁ = 0.9 e Condições-Abióticas₂ = 0.1 (*Lucilia eximia*); **B.** ela também tem duas soluções quando Condições-Abióticas₁ = 0.2 e Condições-Abióticas₂ = 0.1 (*Chrysomya albiceps*).

Na figura 5.25 temos dois exemplos de cenários nos quais a hipótese da saturação é ativada para toda geração $t \geq t_s$. As setas indicam as soluções n_1^{*s} da equação 5.56. Outros exemplos aparecem nas simulações apresentadas nas figuras 5.14 **B**, 5.18 **D**, 5.21 **C** e 5.21 **D**. Em particular vamos discutir a simulação em 5.14 **B**. Observe que Condições-Abióticas₁ = 0.68 < \underline{CA} e Condições-Abióticas₂ = 0.09 < \overline{CA} (espécie *Lucilia eximia*). Se ignorássemos a hipótese da saturação, pela tabela 5.6, neste caso teríamos extinção global (estabilidade do ponto fixo \mathbf{n}_0^*) no lugar da persistência da espécie em ambos os sítios.

Outro comportamento freqüentemente observado nas simulações que envolvem migração unilateral – *Chrysomya albiceps* – está exibido na figura 5.20 C. Nela o sistema se estabiliza num 2-ciclo da forma:

$$\{\mathbf{n}_1^{*c}, \mathbf{n}_2^{*c}\} = \{(n_1^{*c_1}, k_2); (n_1^{*c_2}, n_2^{*c_2})\},$$

satisfazendo $n_1^{*c_1}, n_1^{*c_2} \in (0, k_1)$ e $n_2^{*c_2} \in (0, k_2)$; ocorre saturação em gerações alternadas.

5.6 Análise do Modelo 3 (migração bilateral)

Para o Modelo 3, com migração bilateral (figura 5.1 A), obtemos o sistema 5.4, que é

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \tilde{m}_2 f_2(n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} &= (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \end{cases}$$

onde f_j está explícita em 5.2 ($j = 1, 2$).

Os pontos fixos de 5.4 são da forma $\mathbf{n}^* = (n_1^*, n_2^*)$ e satisfazem

$$\begin{cases} n_1^* &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_1^*) + \tilde{m}_2 f_2(n_2^*) \\ n_2^* &= (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_2^*) + \tilde{m}_1 f_1(n_1^*) \end{cases} \quad (5.57)$$

É fácil verificar que $\mathbf{n}_0^* = (0, 0)$ é solução do sistema 5.57. Queremos determinar outras possíveis soluções deste sistema (não-nulas). Neste momento, negligenciamos a hipótese de retorno de migrantes ao sítio de origem no caso de saturação. Oportunamente, esta hipótese será discutida.

A natureza especial das funções envolvidas no sistema 5.57 nos impede de fazer qualquer desenvolvimento algébrico para a obtenção direta do(s) ponto(s) fixo(s) não-nulo(s).

No entanto podemos reescrever o sistema 5.57 na forma

$$\begin{cases} n_1^* - (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_1^*) &= \tilde{m}_2 f_2(n_2^*) \\ n_2^* - (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_2^*) &= \tilde{m}_1 f_1(n_1^*) \end{cases}, \quad (5.58)$$

isolando os termos que dependem de n_1^* num lado de cada equação e os que dependem de n_2^* no outro. Ainda, usando $\varphi_j(n_j^*) = n_j^* - (1 - \tilde{m}_j) \cdot f_j(n_j^*)$ e $\psi_j(n_j^*) = \tilde{m}_j \cdot f_j(n_j^*)$, $j = 1, 2$,

reduzimos 5.58 a

$$\begin{cases} \varphi_1(n_1^*) = \psi_2(n_2^*) \\ \varphi_2(n_2^*) = \psi_1(n_1^*) \end{cases} \quad (5.59)$$

Para cada equação do sistema 5.59 podemos traçar uma curva com as soluções (n_1^*, n_2^*) . As intersecções destas duas curvas são os pontos fixos do Modelo 3 (sistema 5.4).

Inspirados pelo procedimento geométrico, desenvolvemos uma rotina numérica para visualizarmos as curvas correspondentes a cada uma das equações do sistema 5.59.

Agora vamos discutir as características desse procedimento. Primeiramente, observamos que podemos estimar $\psi_1(n_1^*)$ e $\varphi_2(n_2^*)$ (ou $\varphi_1(n_1^*)$ e $\psi_2(n_2^*)$) para quaisquer n_1^* e n_2^* nos seus respectivos domínios $[0, k_1]$ e $[0, k_2]$.

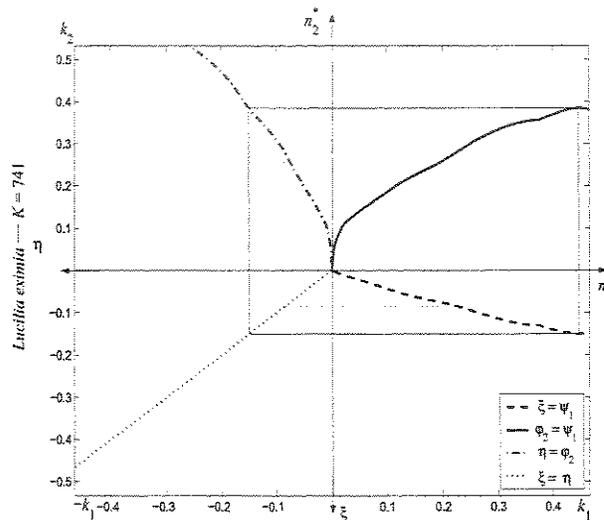


Figura 5.26: Ilustração do procedimento de obtenção da curva-solução da equação $\varphi_2(n_2^*) = \psi_1(n_1^*)$ plotada no primeiro quadrante (*Lucilia eximia*, Condições-Abióticas₁ = 0.7 e Condições-Abióticas₂ = 0.8, $K = 741$).

Por exemplo, na figura 5.26 traçamos o gráfico de $\psi_1(n_1^*)$ no quarto quadrante e de $\varphi_2(n_2^*)$ no segundo. Chamamos a atenção para o sistema de eixos não-convencional adotado. A saber:

- semi-eixo horizontal positivo: eixo de variação de n_1^* em $[0, k_1]$;

- semi-eixo vertical positivo: eixo de variação de n_2^* em $[0, k_2]$;
- semi-eixo horizontal negativo: eixo η em relação ao qual traçamos $\eta = \varphi_2(n_2^*)$;
- semi-eixo vertical negativo: eixo ξ em relação ao qual traçamos $\xi = \psi_1(n_1^*)$.

Podemos determinar os pontos (n_1^*, n_2^*) que satisfazem a equação $\varphi_2(n_2^*) = \psi_1(n_1^*)$ (ou $\varphi_1(n_1^*) = \psi_2(n_2^*)$) seguindo a rotina:

- escolhemos $\tilde{n}_1^* \in [0, k_1]$;
- projetamos sobre a curva $\xi = \psi_1$ e obtemos o ponto $(\tilde{n}_1^*, \psi_1(\tilde{n}_1^*))$;
- projetamos o ponto $(\tilde{n}_1^*, \psi_1(\tilde{n}_1^*))$ sobre a bissetriz $\xi = \eta$;
- projetamos o ponto obtido no item anterior sobre a curva $\eta = \varphi_2(n_2^*)$, encontrando o ponto $(\tilde{n}_1^*, \varphi_2(\tilde{n}_2^*))$ tal que $\varphi_2(\tilde{n}_2^*) = \psi_1(\tilde{n}_1^*)$.
- \tilde{n}_2^* compõe o par procurado $(\tilde{n}_1^*, \tilde{n}_2^*)$.

Analogamente, podemos obter uma rotina partindo da escolha de \tilde{n}_2^* .

No caso da figura 5.26, a curva-solução da equação $\varphi_2(n_2^*) = \psi_1(n_1^*)$ está plotada no primeiro quadrante.

Já na figura 5.27 apresentamos um exemplo de solução da outra equação do sistema 5.59: $\varphi_1(n_1^*) = \psi_2(n_2^*)$ (curva-solução no primeiro quadrante).

Continuando no objetivo de determinar as soluções do sistema 5.59, vamos apontar algumas propriedades das funções $\varphi_j(n_j^*)$ e $\psi_j(n_j^*)$, $j = 1, 2$. Estas propriedades nos auxiliam na previsão destas soluções.

De modo geral, a função $\varphi_j(n_j^*)$, $j = 1, 2$, é monótona crescente em n_j^* (Condições-Abióticas fixas), conforme exemplificado na figura 5.28 **B**. Em casos excepcionais, ela pode atingir valores negativos; eles correspondem a condições abióticas boas combinadas com uma densidade populacional pequena (especialmente para a espécie *Chrysomya albiceps*). Temos um exemplo em que $\varphi_1(n_1^*)$ atinge valores negativos no domínio $[0, k_1]$ na figura 5.26 (quarto quadrante). Como ilustra esta figura, isto não interfere no método de solução da equação

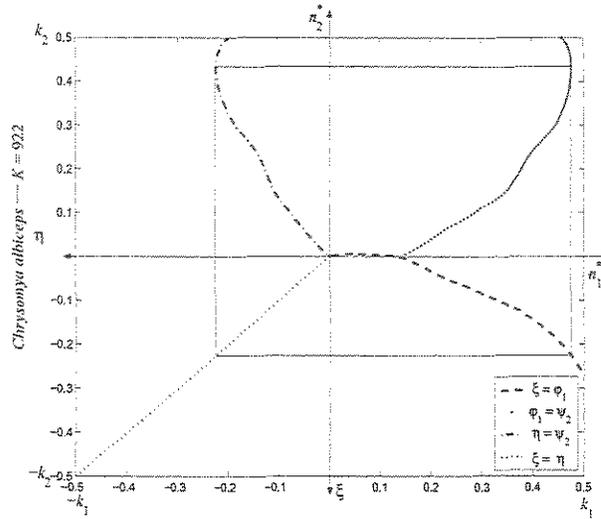


Figura 5.27: Ilustração do procedimento de obtenção da curva-solução da equação $\varphi_1(n_1^*) = \psi_2(n_2^*)$ plotada no primeiro quadrante (*Chrysomya albiceps*, Condições-Abióticas₁ = Condições-Abióticas₂ = 0.7, $K = 922$).

$\varphi_1(n_1^*) = \psi_2(n_2^*)$ (tomando o cuidado de começar por n_2^*). Obviamente, esta equação não admite solução (n_1^*, n_2^*) no intervalo de n_1^* tal que $\varphi_1(n_1^*) < 0$ porque $\psi_2(n_2^*) \geq 0$ para todo $n_2^* \in [0, k_2]$.

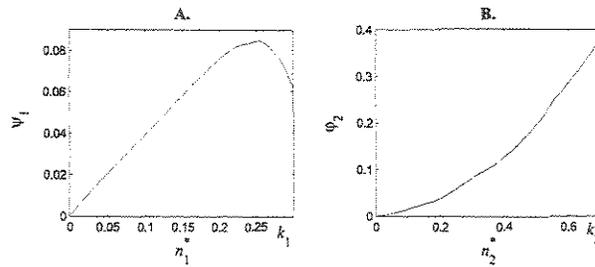


Figura 5.28: Exemplos de gráficos de $\psi_1(n_1^*)$ e $\varphi_2(n_2^*)$, respectivamente (*Lucilia eximia*, Condições-Abióticas₁ = 0.3 e Condições-Abióticas₂ = 0.7, $K = 494$).

Já a função $\psi_j(n_j^*)$ parte de $\psi_j = 0$, cresce até alcançar um máximo em uma densidade populacional média-grande ou grande e, em seguida, decresce (ver figura 5.28 A). Eventualmente, este máximo pode ocorrer na fronteira superior da densidade populacional (espécie

Lucilia eximia, condições abióticas muito boas).

Como $\varphi_i(n_i^*)$ é monótona crescente, não é difícil notar que a curva-solução de $\varphi_i(n_i^*) = \psi_j(n_j^*)$ mantém as propriedades de crescimento da função $\psi_j(n_j^*)$ em relação a n_j^* – cresce, alcança o máximo no mesmo n_j^* que ψ_j e decresce em seguida ($i, j = 1, 2$ e $i \neq j$).

Na sequência, elegemos três exemplos para cada espécie que ilustram os possíveis pontos fixos do Modelo 3.

Na figura 5.29 A, vemos que as curvas-solução se interceptam exclusivamente na origem. Este comportamento é verificado apenas para a espécie nativa, com condições abióticas ruins.

Já na figura 5.29 B, verificamos um ponto fixo (intersecção) não-nulo; o símbolo “o” assinala o equilíbrio obtido iterativamente (espécie *Lucilia eximia*).

Na figura 5.29 C, novamente não temos ponto fixo positivo; a diferença entre o primeiro painel e este é que neste temos o vestígio que as curvas se interceptam fora da região $[0, k_1] \times [0, k_2]$. Este comportamento aparece para a espécie *Lucilia eximia* quando existe uma diferença considerável entre as condições abióticas dos sítios (ruins no sítio 1 e boas no 2).

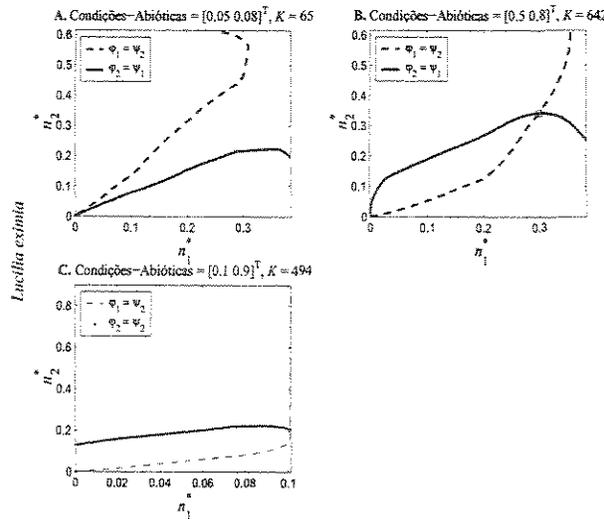


Figura 5.29: As intersecções entre as curvas-solução representam os pontos fixos do sistema 5.4 (*Lucilia eximia*).

Para a espécie *Chrysomya albiceps* também destacamos três cenários; no primeiro, identificamos três pontos fixos positivos (figura 5.30 A); isto acontece quando as condições abióticas são iguais ou próximas, variando entre ruins e ruins-médias. No segundo, identificamos um único ponto fixo positivo (figura 5.30 B). No último cenário, temos somente o ponto fixo nulo, mas novamente com o vestígio que as curvas se interceptam fora do domínio considerado; isto acontece com muito mais freqüência na espécie introduzida e não exige uma diferença tão acentuada entre as condições abióticas dos sítios, como para a espécie nativa.

Também observamos que os pontos fixos positivos movem-se para a fronteira direita da região $[0, k_1] \times [0, k_2]$ quando a variável Condições-Abióticas₁ está fixa e Condições-Abióticas₂ cresce (ver figura 5.30: seqüência A, B e C).

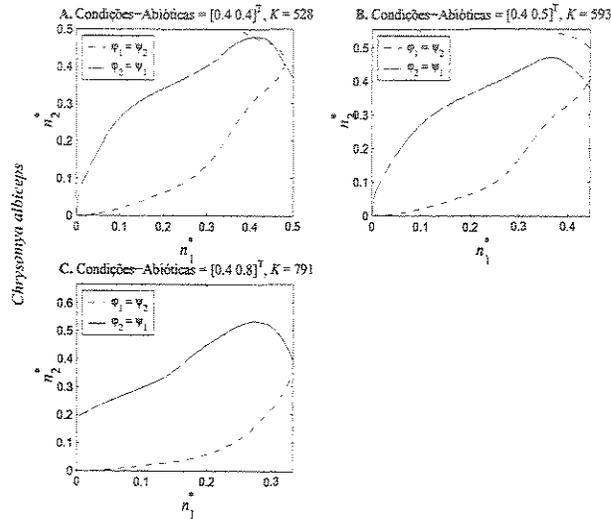


Figura 5.30: As intersecções entre as curvas-solução representam os pontos fixos do sistema 5.4 (*Chrysomya albiceps*).

Novamente trabalhamos com os autovalores da matriz jacobiana para a análise da estabilidade; neste caso, utilizamos as notações:

$$\begin{cases} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \tilde{m}_2 f_2(n_{2,t}) = g(n_{1,t}; n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} = (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) = h(n_{1,t}; n_{2,t}) \end{cases} \quad (5.60)$$

e

$$J(\mathbf{n}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial n_{1,t}} & \frac{\partial g}{\partial n_{2,t}} \\ \frac{\partial h}{\partial n_{1,t}} & \frac{\partial h}{\partial n_{2,t}} \end{pmatrix} \Big|_{(n_{1,t}; n_{2,t}) = \mathbf{n}^*}, \quad (5.61)$$

para as funções no sistema 5.4 e para o jacobiano associado a este sistema, respectivamente.

Supomos que g e h são diferenciáveis.

Escrevemos as derivadas parciais na forma:

$$\frac{\partial g}{\partial n_{1,t}}(n_{1,t}; n_{2,t}) = \frac{d}{dn_{1,t}} \left[(1 - \tilde{m}_1) \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \right] \cdot n_{1,t} + (1 - \tilde{m}_1) \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1, \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial g}{\partial n_{2,t}}(n_{1,t}; n_{2,t}) = \frac{d}{dn_{2,t}} \left[\tilde{m}_2 \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2 \right] \cdot n_{2,t} + \tilde{m}_2 \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2, \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial h}{\partial n_{1,t}}(n_{1,t}; n_{2,t}) = \frac{d}{dn_{1,t}} \left[\tilde{m}_1 \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \right] \cdot n_{1,t} + \tilde{m}_1 \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_1 \cdot \tilde{S}_1 \quad (5.64)$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial n_{2,t}}(n_{1,t}; n_{2,t}) = \frac{d}{dn_{2,t}} \left[(1 - \tilde{m}_2) \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2 \right] \cdot n_{2,t} + (1 - \tilde{m}_2) \cdot \frac{1}{2} \tilde{F}_2 \cdot \tilde{S}_2. \quad (5.65)$$

No ponto fixo $\mathbf{n}_0^* = (0, 0)$, temos:

$$J(\mathbf{n}_0^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) & \frac{1}{2}\tilde{m}_2(0) \cdot \tilde{F}_2(0) \cdot \tilde{S}_2(0) \\ \frac{1}{2}\tilde{m}_1(0) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) & \frac{1}{2}(1 - \tilde{m}_2(0)) \cdot \tilde{F}_2(0) \cdot \tilde{S}_2(0) \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

e seus autovalores satisfazem a equação característica $P(\lambda) = \lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$ tal que

$$\beta = \frac{1}{2} \left[(1 - \tilde{m}_1(0)) \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{S}_1(0) + (1 - \tilde{m}_2(0)) \cdot \tilde{F}_2(0) \cdot \tilde{S}_2(0) \right] \quad (5.67)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{4} [1 - \tilde{m}_1(0) - \tilde{m}_2(0)] \cdot \tilde{F}_1(0) \cdot \tilde{F}_2(0) \cdot \tilde{S}_1(0) \cdot \tilde{S}_2(0). \quad (5.68)$$

Uma forma de garantirmos a estabilidade do ponto fixo \mathbf{n}_0^* é a utilização do seguinte critério [13, 22].

Crítério de Estabilidade para Equações de Segunda Ordem: Dada a equação característica $P(\lambda) = \lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$, ambas as raízes têm valor absoluto menor que 1 se, e somente se, as inequações são satisfeitas

1. $P(1) = 1 - \beta + \gamma > 0$;
2. $P(-1) = 1 + \beta + \gamma > 0$;
3. $\gamma < 1$.

A inequação 2 é verificada para as duas espécies estudadas independente das condições abióticas. De fato:

$$P(-1) = 1 + \beta + \gamma \geq 1 + \beta + \gamma_{\min}.$$

Os valores de γ_{\min} para as espécies nativa e introduzida podem ser encontrados na tabela 5.7. Daí, é fácil ver que $1 + \gamma_{\min} > 0$ e, como $\beta > 0$, a inequação $P(-1) = 1 + \beta + \gamma > 0$ segue imediatamente.

	<i>Lucilia eximia</i>	<i>Chrysomya albiceps</i>
γ_{\min}	-0.1293	-0.4783
γ_{\max}	1.9846	5.0913

Tabela 5.7: Valores mínimo e máximo de γ para as espécies estudadas (Condições-Abióticas₁ = Condições-Abióticas₂ = 0 e Condições-Abióticas₁ = Condições-Abióticas₂ = 1, respectivamente).

Já as inequações 1 e 3 são satisfeitas em certas regiões do domínio das condições abióticas, que denotamos respectivamente por S e R . Destacamos estas regiões (contorno em linha grossa) na figura 5.31 – painéis **A** e **C**: inequação 3 e painéis **B** e **D**: inequação 1.

As figuras 5.31 **A** e 5.31 **B** correspondem à espécie *Lucilia eximia*; no painel **A**, além da região R , graficamos com linha fina a curva limiar em destaque no painel **B**. Assim, é fácil ver que $R \cap S = S$. Portanto, o equilíbrio nulo \mathbf{n}_0^* é estável se e somente se

$$(\text{Condições} - \text{Abióticas}_1, \text{Condições} - \text{Abióticas}_2) \in S,$$

tal que S está destacada na figura 5.31 **B**.

Este resultado significa que em condições abióticas ruins, temos extinção global da população da espécie nativa.

Para a espécie *Chrysomya albiceps*, devemos observar as figuras 5.31 **C** e **D**. Também no painel **C**, em linha fina, traçamos a curva limiar em destaque no **D**. Agora as regiões R

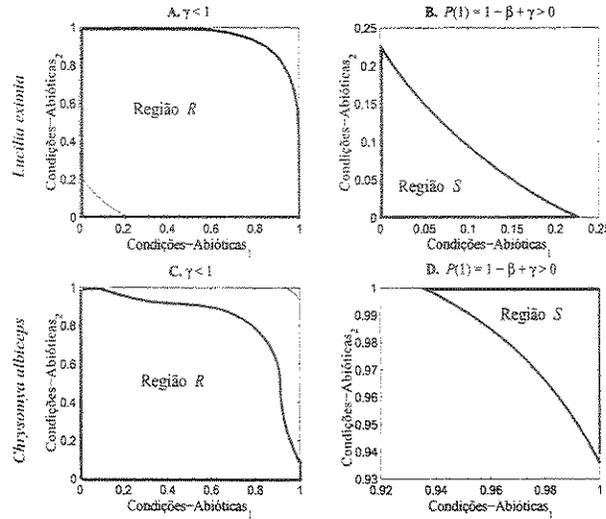


Figura 5.31: Em destaque, as regiões R e S nas quais as inequações $\gamma < 1$ e $P(1) = 1 - \beta + \gamma > 0$ são verificadas (primeira e segunda colunas, respectivamente). A, B. *Lucilia eximia*; C, D. *Chrysomya albiceps*.

e S não têm intersecção. Portanto, o equilíbrio nulo \mathbf{n}_0^* é sempre instável para a espécie introduzida.

A análise da estabilidade dos pontos fixos não-nulos é ilustrada com exemplos numéricos.

Exemplo 5.6:

Considere duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia* sujeitas à migração cíclica tais que $\text{Condições-Abióticas}_1 = 0.5$ e $\text{Condições-Abióticas}_2 = 0.8$.

Para estas condições abióticas, o ponto fixo nulo \mathbf{n}_0^* é instável ($(0.5, 0.8) \notin S$ - figura 5.31 B); este comportamento é confirmado com o cálculo dos autovalores $\lambda_1 \approx 0.4441$ e $\lambda_2 \approx 1.4283$, associados a este ponto fixo.

Também obtemos o único ponto fixo positivo $\mathbf{n}_1^* \approx (0.2995, 0.3431)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx -0.01879$ e $\lambda_2 \approx 0.5369$. Neste caso, \mathbf{n}_1^* é estável.

A figura 5.29 B ilustra os dois equilíbrios deste exemplo (intersecções das curvas); ainda, o símbolo “o” mostra o equilíbrio obtido através de simulação iterativa.

Exemplo 5.7:

Considere duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* sujeitas à migração cíclica tais que Condições-Abióticas₁ = Condições-Abióticas₂ = 0.4.

O ponto fixo nulo \mathbf{n}_0^* é instável; este comportamento é confirmado com o cálculo dos autovalores $\lambda_1 \approx 0.2455$ e $\lambda_2 \approx 1.8504$, associados a este ponto fixo.

Para estas condições abióticas, verificamos a existência de três pontos fixos positivos (ver figura 5.30 A).

Obtemos o primeiro ponto fixo positivo $\mathbf{n}_1^* \approx (0.4078, 0.4802)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx -0.3769 - 0.4347i$ e $\lambda_2 \approx -0.3769 + 0.4347i$ ($|\lambda_1| = |\lambda_2| \approx 0.5753 < 1$). Logo, \mathbf{n}_1^* é estável.

Obtemos o segundo ponto fixo positivo $\mathbf{n}_2^* \approx (0.4552, 0.4552)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx -1.1403$ e $\lambda_2 \approx 1.3062$. Logo, \mathbf{n}_2^* é instável.

Obtemos o terceiro ponto fixo positivo $\mathbf{n}_3^* \approx (0.4802, 0.4078)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx -0.3769 - 0.4347i$ e $\lambda_2 \approx -0.3769 + 0.4347i$ ($|\lambda_1| = |\lambda_2| \approx 0.5753 < 1$). Logo, \mathbf{n}_3^* é estável.

Exemplo 5.8:

Considere duas subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* sujeitas à migração cíclica tais que Condições-Abióticas₁ = 0.4 e Condições-Abióticas₂ = 0.5.

O ponto fixo nulo \mathbf{n}_0^* é instável; este comportamento é confirmado com o cálculo dos autovalores $\lambda_1 \approx 0.2523$ e $\lambda_2 \approx 1.8511$, associados a este ponto fixo.

Para estas condições abióticas, verificamos a existência de um único ponto fixo positivo (ver figura 5.30 B), que aproximamos por $\mathbf{n}_1^* \approx (0.4387, 0.3933)$, com autovalores associados $\lambda_1 \approx -0.8453 - 1.1861i$ e $\lambda_2 \approx -0.8453 + 1.1861i$ ($|\lambda_1| = |\lambda_2| \approx 1.4565 > 1$). Logo, \mathbf{n}_1^* é instável.

5.6.1 Modelo 3: Discussão sobre a Hipótese da Saturação

Nesta seção, apresentamos uma breve discussão sobre a hipótese da saturação no Modelo 3; vários pontos desta discussão são semelhantes, senão iguais, aos correspondentes da discussão da seção 5.5.3: hipótese da saturação no Modelo 2.

Uma das poucas diferenças quanto a esta hipótese entre os modelos 2 e 3 é que a migração bilateral do Modelo 3 permite que ocorra saturação em qualquer um dos sítios³, mas não simultaneamente. De fato, para que ocorra saturação num sítio é necessário que o número de indivíduos que imigram para este sítio exceda o número de emigrantes. Logo, se em dada geração ocorrer saturação num sítio, então, no outro, o número de imigrantes é menor que o de emigrantes, o que significa não-saturação.

Ocorre saturação no sítio j , $j \in \{1, 2\}$, e na geração t_s se

$$(1 - \tilde{m}_j)f_j(n_{j,t_s-1}) + \tilde{m}_i f_i(n_{i,t_s-1}) > k_j, \quad (5.69)$$

$i \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$; neste caso fazemos:

$$n_{j,t_s} = k_j \quad (5.70)$$

e

$$n_{i,t_s} = (1 - \tilde{m}_i)f_i(n_{i,t_s-1}) + \tilde{m}_j f_j(n_{j,t_s-1}) + \textit{excesso}, \quad (5.71)$$

onde $\textit{excesso} = (1 - \tilde{m}_j)f_j(n_{j,t_s-1}) + \tilde{m}_i f_i(n_{i,t_s-1}) - k_j$. Ou seja:

$$\begin{cases} n_{i,t_s} = f_i(n_{i,t_s-1}) + f_j(n_{j,t_s-1}) - k_j \\ n_{j,t_s} = k_j \end{cases}, \quad i, j \in \{1, 2\} \text{ e } i \neq j. \quad (5.72)$$

Daí, reiniciamos o sistema com as condições iniciais dadas em 5.72. Por exemplo, na simulação para a espécie introduzida apresentada na figura 5.20 **B**, ocorre saturação da subpopulação 1 somente na terceira geração.

Se esta hipótese for ativada um número finito de vezes, igualmente basta considerar que a cada ativação o sistema é reiniciado com as correspondentes condições iniciais. Um

³No modelo 2, só pode ocorrer saturação no sítio 2 devido ao sentido do fluxo migratório do sítio 1 para o 2.

exemplo é a simulação para a espécie introduzida da figura 5.23 A, onde ocorre saturação nas gerações 11 e 15.

No entanto, se esta hipótese é repetidamente necessária para toda geração $t \geq t_s$, então é mais adequado considerarmos que a subpopulação j “se equilibra” no valor $n_j^{*s} = k_j$ e que a subpopulação i segue de acordo com a equação

$$n_{i,t+1} = f_i(n_{i,t}) + f_j(k_j) - k_j, \quad t > t_s, \quad (5.73)$$

cujos pontos fixos satisfazem

$$n_i^{*s} = f_i(n_i^{*s}) + \underbrace{f_j(k_j) - k_j}_{\text{constante negativa}}. \quad (5.74)$$

Observe a semelhança entre as equações 5.56 e 5.74; se $i = 1$ e $j = 2$, elas são iguais. Por conseqüência, o tipo de solução n_i^{*s} da equação 5.74 é o mesmo da equação 5.56, que está exemplificado na figura 5.25.

O caráter simétrico da migração bilateral – fluxo migratório do sítio 1 para o 2 e do sítio 2 para o 1, nos levou a simular somente cenários tais que Condições-Abióticas₁ < Condições-Abióticas₂ (seção 5.4). Para estes cenários, quando ocorreu saturação, ela foi no sítio 1.

Dois exemplos de simulações nas quais a hipótese da saturação é ativada para toda a geração $t \geq t_s$ estão nas figuras 5.18 B e 5.23 D, ambos para a espécie *Chrysomya albiceps*. Um exemplo para a espécie *Lucilia eximia* pode ser visto na figura 5.32.

Na figura 5.21 B, temos um exemplo de 2-ciclo com saturação (espécie *Chrysomya albiceps*); observamos que o sistema se estabiliza num 2-ciclo da forma:

$$\{\mathbf{n}_1^{*c}, \mathbf{n}_2^{*c}\} = \{(k_1, n_2^{*c1}); (n_1^{*c2}, n_2^{*c2})\},$$

satisfazendo $n_1^{*c2} \in (0, k_1)$ e $n_2^{*c1}, n_2^{*c2} \in (0, k_2)$, tal que ocorre saturação da subpopulação 1 em gerações alternadas ($t = 3, 5, 7, \dots$).

Um exemplo de 3-ciclo com saturação pode ser observado na figura 5.23 B; já na figura 5.23 C, a hipótese da saturação é repetidamente ativada, mas as gerações da ativação não seguem um padrão (espécie *Chrysomya albiceps*).

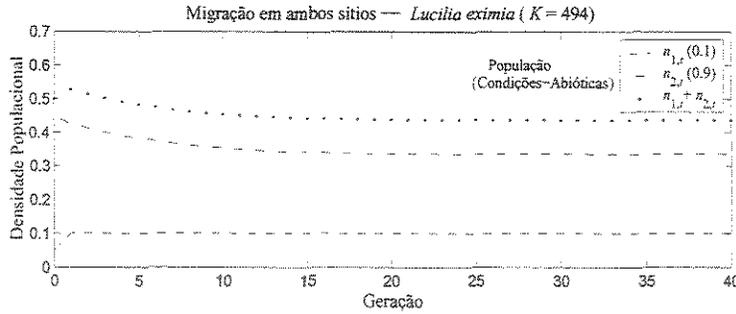


Figura 5.32: Simulações para duas subpopulações da espécie *Lucilia eximia* utilizando o Modelo 3: migração bilateral, com saturação da subpopulação 1 para $t \geq 1$. Notação: -- densidade da subpopulação 1, · - · densidade da subpopulação 2 e · · · densidade da metapopulação.

5.7 Discussões Finais

Do estudo desenvolvido no presente capítulo, concluímos que:

- a utilização de sistemas baseados em regras fuzzy para a estimativa dos parâmetros fecundidade, sobrevivência e migração permite a inclusão de características qualitativas do desenvolvimento populacional das moscas varejeiras; esta inclusão se dá de forma intuitiva e clara, propiciando melhor interatividade com biólogos;
- a migração unilateral geralmente acentua os efeitos das diferenças ambientais;
- a migração unilateral pode acarretar extinção local ou global;
- a migração bilateral geralmente ameniza os efeitos das diferenças ambientais;
- a migração bilateral pode evitar extinção local;
- segundo os modelos 2 e 3, as populações da espécie nativa *Lucilia eximia* podem evoluir para extinção global, associada às perdas por emigração, enquanto as populações da espécie introduzida não apresentam esta possibilidade;
- quando simulamos subpopulações isoladas, geralmente obtemos uma metapopulação superior às metapopulações com sítios acoplados por migração unilateral e bilateral, para as mesmas condições iniciais.

Para encerrar, apresentamos uma breve reflexão sobre a necessidade da hipótese da saturação.

É importante observar que a necessidade desta hipótese não advém da utilização de sistemas baseados em regras fuzzy para a estimativa dos parâmetros. Ela se faz necessária porque admitimos que cada sítio tem uma capacidade máxima de habitantes. Para qualquer outro modelo local que tivesse esta restrição, caberia a utilização desta hipótese; por exemplo, o modelo logístico discreto admite capacidade máxima, logo necessitaria da hipótese da saturação.

Capítulo 6

Metapopulação de Moscas Varejeiras

Neste capítulo, propomos modelos para um número qualquer de populações acopladas, de uma mesma espécie de moscas varejeiras.

Na seção 6.1, propomos quatro modelos de metapopulação, dois para cada um dos esquemas migratórios vistos nos capítulos 4 e 5 (migração unilateral e bilateral). Estes modelos consideram certas disposições espaciais dos sítios também propostas nesta seção.

Na seção 6.2, exibimos simulações iterativas considerando os modelos propostos na primeira seção, aplicando-os às espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps*.

Na seção 6.3, sugerimos um modelo que generaliza os modelos anteriores (seção 6.1).

Na última seção (6.4), expomos nossas considerações finais.

6.1 Introdução dos Modelos Matemáticos: p Sítios Interligados

Nesta seção, vamos retomar as idéias discutidas na seção 5.1, generalizando-as para p subpopulações acopladas.

Consideramos a população imatura de uma única espécie de moscas varejeiras distribuída num habitat fragmentado em p sítios ($p > 2$ e $p \in \mathbb{N}$).

Para os modelos que vamos propor nesta seção, assumimos duas distribuições espaciais

dos sítios, esquematizadas na figura 6.1 – as linhas tracejadas indicam as ligações entre sítios vizinhos. No painel 6.1 A, ilustramos a distribuição cíclica dos sítios, enquanto no painel 6.1 B, a distribuição na qual os sítios extremos não interagem diretamente (sítios alinhados).

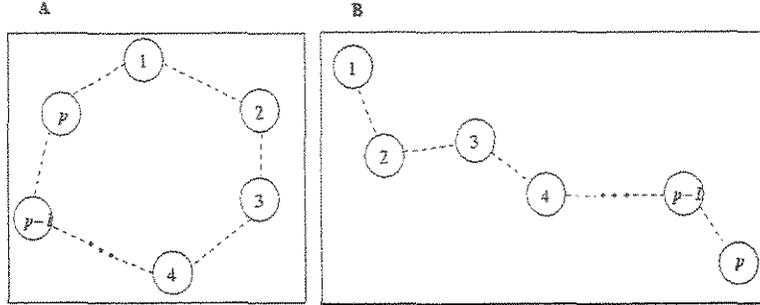


Figura 6.1: **A.** Distribuição cíclica dos sítios. **B.** Os sítios 1 e p não interagem diretamente (sítios alinhados).

Chamamos de subpopulação j à população de cada sítio j , $j = 1, 2, \dots, p$, e de metapopulação à população total, soma de todas as subpopulações.

Novamente, assumimos que a cada geração a população passa por um processo de dinâmica local seguido por um processo migratório.

6.1.1 Dinâmica Local

Mantemos K_j para denotar a subpopulação máxima que o sítio j comporta, $j = 1, 2, \dots, p$, e $K = \sum_{j=1}^p K_j$ para, a metapopulação máxima (K_j é estimada pela equação 5.6).

Retomamos a equação 5.2 para o modelo de dinâmica local; a saber

$$n_{j,t+1} = f_j(n_{j,t}) = \frac{1}{2} \tilde{F}_j \cdot \tilde{S}_j \cdot n_{j,t},$$

onde $n_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{K}$ que é o número de imaturos em relação a metapopulação máxima, no sítio j e na geração t ($j = 1, 2, \dots, p$); $\frac{1}{2}$ indica que metade da população é constituída de fêmeas; \tilde{F}_j e \tilde{S}_j são respectivamente a fecundidade e a sobrevivência no sítio j ($j = 1, 2, \dots, p$), estimadas com os sistemas baseados em regras fuzzy descritos na seção 5.2.

Assim, a densidade da metapopulação $n_t = \sum_{j=1}^p n_{j,t}$ varia no domínio $[0, 1]$, enquanto a da subpopulação j varia no domínio $[0, k_j]$ tal que $k_j = \frac{K_j}{K}$, $j = 1, 2, \dots, p$, e $\sum_{j=1}^p k_j = 1$.

6.1.2 Migração Dirigida

Como na subsecção 5.1.2, admitimos que a migração ocorre uma vez em cada geração e é de curta duração em relação à escala de tempo utilizada. Também mantemos a hipótese da saturação, ou seja, se após a migração ocorreu a saturação de uma subpopulação, então o excesso de indivíduos que entrou neste sítio retorna ao sítio de origem proporcionalmente à quantidade que saiu.

Ainda, continuamos admitindo os dois esquemas migratórios dos capítulos 4 e 5 – Migração Unilateral e Migração Bilateral.

Mantemos \tilde{m}_j para denotar a fração da subpopulação j que deixa o sítio após a dinâmica local ($j = 1, 2, \dots, p$). Esta quantidade é estimada por meio de um sistema baseado em regras fuzzy, proposto na seção 5.2.

Combinando as duas possibilidades para a disposição espacial dos sítios (alinhada e cíclica), e os dois esquemas migratórios (unilateral e bilateral), propomos quatro modelos metapopulacionais para imaturos de moscas varejeiras apresentados a seguir. Como já usamos as identificações: ‘Modelo 1’, ‘Modelo 2’ e ‘Modelo 3’ no capítulo 5, começamos a identificação dos novos modelos a partir de ‘Modelo 4’.

Modelo 4

No Modelo 4, consideramos Migração Unilateral e Distribuição Cíclica dos sítios. Sua formalização matemática é

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \tilde{m}_p f_p(n_{p,t}) \\ n_{2,t+1} &= (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \\ &\vdots \\ n_{p,t+1} &= (1 - \tilde{m}_p) f_p(n_{p,t}) + \tilde{m}_{p-1} f_{p-1}(n_{p-1,t}) \end{cases}, \quad (6.1)$$

onde $n_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{K}$ é o número de imaturos em relação a metapopulação máxima, no sítio j e na geração t , \tilde{m}_j é a fração de imaturos que emigram do sítio j e f_j está explícita na equação 5.2 ($j = 1, 2, \dots, p$).

Observe que a parcela de indivíduos que deixa o sítio 1 imigra para o 2, a que deixa

o sítio 2 imigra para o 3, e assim sucessivamente, até que a parcela que deixa o sítio p imigra para o 1, completando o ciclo.

Modelo 5

No Modelo 5, consideramos Migração Unilateral e Distribuição Alinhada dos sítios.

Neste caso, não existe comunicação direta entre os sítios 1 e p . As subpopulações 1 e p não sofrem respectivamente imigração e emigração. Em termos da formalização matemática, basta tomar $\tilde{m}_p = 0$ no sistema 6.1. Isto é:

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) \\ n_{2,t+1} &= (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \\ \vdots & \\ n_{p,t+1} &= f_p(n_{p,t}) + \tilde{m}_{p-1} f_{p-1}(n_{p-1,t}) \end{cases}, \quad (6.2)$$

onde $n_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{K}$ é o número de imaturos em relação a metapopulação máxima, no sítio j e na geração t , \tilde{m}_j é a fração de imaturos que emigram do sítio j e f_j está explícita na equação 5.2 ($j = 1, 2, \dots, p$).

Modelo 6

Chamamos o modelo com Migração Bilateral e Distribuição Cíclica dos sítios de Modelo 6.

Aqui, os indivíduos que emigram de um sítio entram nos dois sítios vizinhos mais próximos, em proporções iguais. Logo, cada sítio recebe uma parcela de migrantes de seus dois vizinhos. Escrevemos:

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \frac{\tilde{m}_p}{2} f_p(n_{p,t}) + \frac{\tilde{m}_2}{2} f_2(n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} &= (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \frac{\tilde{m}_1}{2} f_1(n_{1,t}) + \frac{\tilde{m}_3}{2} f_3(n_{3,t}) \\ \vdots & \\ n_{p,t+1} &= (1 - \tilde{m}_p) f_p(n_{p,t}) + \frac{\tilde{m}_{p-1}}{2} f_{p-1}(n_{p-1,t}) + \frac{\tilde{m}_1}{2} f_1(n_{1,t}) \end{cases}, \quad (6.3)$$

onde $n_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{K}$ é o número de imaturos em relação a metapopulação máxima, no sítio j e na geração t , \tilde{m}_j é a fração de imaturos que emigram do sítio j e f_j está explícita na equação 5.2 ($j = 1, 2, \dots, p$).

Modelo 7

Chamamos o modelo com Migração Bilateral e Distribuição Alinhada dos sítios de Modelo 7.

Da distribuição alinhada, temos que os sítios 1 e p não interagem diretamente. Neste caso, todos os indivíduos que deixam o sítio 1 vão para o 2, bem como todos os que deixam o sítio p vão para o $p - 1$. Ainda, os sítios extremos 1 e p , só recebem migrantes de um único vizinho (subpopulação 2 e $p - 1$, respectivamente). Nos demais sítios, a migração é análoga ao modelo 6: cada sítio recebe uma parcela de migrantes das duas subpopulações vizinhas. Formalizamos estas hipóteses com o sistema

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \frac{\tilde{m}_2}{2} f_2(n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} &= (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) + \frac{\tilde{m}_3}{2} f_3(n_{3,t}) \\ \vdots & \\ n_{p-1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_{p-1}) f_{p-1}(n_{p-1,t}) + \frac{\tilde{m}_{p-2}}{2} f_{p-2}(n_{p-2,t}) + \tilde{m}_p f_p(n_{p,t}) \\ n_{p,t+1} &= (1 - \tilde{m}_p) f_p(n_{p,t}) + \frac{\tilde{m}_{p-1}}{2} f_{p-1}(n_{p-1,t}) \end{cases}, \quad (6.4)$$

onde $n_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{K}$ é o número de imaturos em relação a metapopulação máxima, no sítio j e na geração t , \tilde{m}_j é a fração de imaturos que emigram do sítio j e f_j está explícita na equação 5.2 ($j = 1, 2, \dots, p$).

Comparando os modelos 6 e 7, observamos que, no Modelo 7, os sítios 2 e $p - 1$ são favorecidos com uma quantidade adicional de migrantes, enquanto os sítios extremos são prejudicados.

6.2 Simulações: p Sítios Interligados

Nesta seção, vamos apresentar simulações da evolução temporal de uma metapopulação distribuída num habitat fragmentado em seis sítios ($p = 6$).

As simulações para as espécies *Lucilia eximia* e *Chrysomya albiceps* estão dispostas nas subseções 6.2.1 e 6.2.2, respectivamente.

6.2.1 Simulações para a espécie *Lucilia eximia*

Em todas as simulações para esta espécie, as subpopulações acopladas exibem um ponto de equilíbrio ($p = 6$).

Distribuição Cíclica dos Sítios

Nos quatro painéis que compõe a figura 6.2, consideramos a distribuição cíclica dos seis sítios.

Nas figuras 6.2 A e 6.2 B, simulamos as seguintes condições abióticas: Condições-Abióticas₁ = 0.2, Condições-Abióticas₂ = 0.4, Condições-Abióticas₃ = 0.6, Condições-Abióticas₄ = 0.8, Condições-Abióticas₅ = 0.6 e Condições-Abióticas₆ = 0.4, onde o sub-índice indica o respectivo sítio. A diferença entre estas duas simulações é que a primeira considera migração unilateral (figura 6.2 A: Modelo 4), enquanto a segunda considera migração bilateral (figura 6.2 B: Modelo 6). Observamos que as condições abióticas são crescentes do sítio 1 até o 4 e decrescentes do sítio 4 até o 1, fechando o ciclo.

O objetivo destas simulações (figuras 6.2 A e 6.2 B) é observar a influência das condições abióticas no desenvolvimento da subpopulação do sítio e das subpopulações vizinhas e a contribuição dos esquemas migratórios no cenário ambiental simulado.

O primeiro resultado interessante verificado na figura 6.2 A é que a subpopulação que se estabiliza com a maior densidade não é aquela sujeita às melhores condições abióticas, nem a que se estabiliza com a menor densidade é a subpopulação sujeita às piores condições abióticas. Eis uma indicação do peso da origem dos migrantes quando tomamos a migração unilateral.

No equilíbrio, a maior densidade ocorre na subpopulação 5 que recebe indivíduos da subpopulação 4 (figura 6.2 A); este resultado se deve à combinação dos fatores: as condições abióticas no sítio 5 só perdem em qualidade para as mesmas no sítio 4, o que propicia um crescimento natural maior que nos sítios 1, 2 e 6 e comparável ao do sítio 3 (condições abióticas iguais); ainda, as melhores condições abióticas de seu vizinho, sítio 4, fazem com que o sítio 5 receba a maior parcela de migrantes. Um raciocínio análogo explica a menor densidade da subpopulação 2 no equilíbrio (o sítio 2 tem uma das piores condições abióticas simuladas e

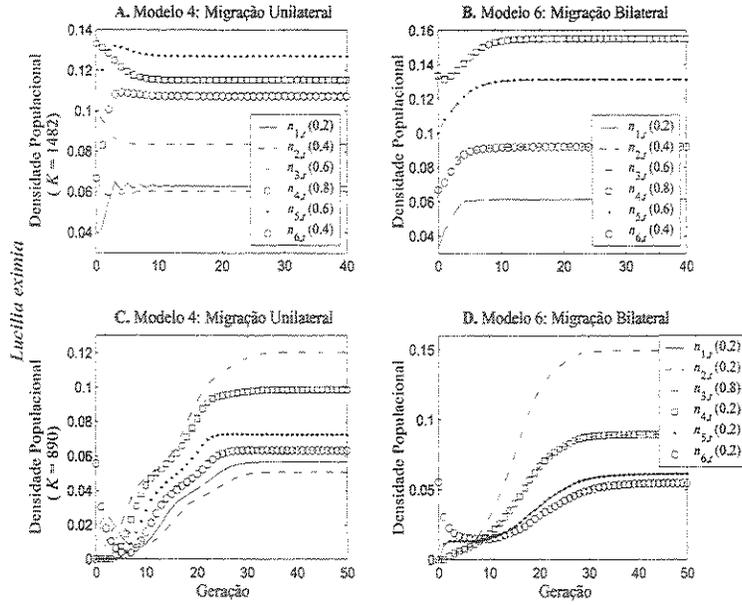


Figura 6.2: Simulações para seis subpopulações da espécie *Lucilia eximia* com distribuição cíclica dos sítios; **A.** Modelo 4: migração unilateral; **B.** Modelo 6: migração bilateral; **C.** Modelo 4: migração unilateral; **D.** Modelo 6: migração bilateral. Notação: — densidade da subpopulação 1; -- densidade da subpopulação 2; - · - densidade da subpopulação 3; □ densidade da subpopulação 4; ◆ densidade da subpopulação 5; e ○ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.4]^T$; **C.** e **D.** $[0.2 \ 0.2 \ 0.8 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$.

tem o “pior” vizinho).

Também, na figura 6.2 **A**, as subpopulações 2 e 3 geralmente perdem mais indivíduos que recebem por migração, ao contrário das subpopulações 5 e 6, com condições abióticas iguais as das 2 e 3, respectivamente. Isto explica a notável diferença entre as densidades $n_{2,t}$ e $n_{6,t}$, bem como entre $n_{3,t}$ e $n_{5,t}$.

Já na figura 6.2 **B**, com migração bilateral (Modelo 6), o resultado é bem mais previsível que o da simulação anterior (figura 6.2 **A**).

No equilíbrio, a maior densidade ocorre no sítio com as melhores condições abióticas (sítio 4) e a menor no sítio com as piores condições abióticas (sítio 1). De fato, verificamos nesta simulação que a densidade no equilíbrio é função crescente das condições abióticas.

Ainda, subpopulações em ambientes equivalentes e com vizinhos “equivalentes” apresentam as mesmas densidades no equilíbrio (6.2 **B**).

Para as figuras 6.2 **C** e 6.2 **D**, nós concebemos outro cenário ambiental. A idéia é simular um habitat com baixa qualidade ambiental, mas com um sítio sujeito a uma contribuição externa permanente que melhora a sua qualidade; esta contribuição externa poderia ser, por exemplo, o depósito freqüente de carcaças ou dejetos, aumentando a disponibilidade de alimento para os imaturos. Este cenário ambiental é simulado considerando Condições-Abióticas_{*j*} = 0.2, *j* = 1, 2, 4, 5, 6, e Condições-Abióticas₃ = 0.8.

Além do cenário ambiental, vale a pena salientar as condições iniciais das simulações apresentadas nas figuras 6.2 **C** e 6.2 **D**: $n_{1,0} = n_{2,0} = n_{3,0} = n_{4,0} = n_{5,0} = 0$ e $n_{6,0} = \frac{k_6}{2}$.

O objetivo principal destas simulações (figuras 6.2 **C** e 6.2 **D**) é identificar a influência das boas condições abióticas no sítio 3, em seus vizinhos.

Na figura 6.2 **C**, com migração unilateral (Modelo 4), a maior densidade no equilíbrio é a da subpopulação 3 (condições abióticas boas). O efeito da boa qualidade ambiental do sítio 3 é mais sentido na subpopulação 4, que recebe seus indivíduos. Mas ele também se propaga nas demais subpopulações: quanto mais “longe” do sítio 3, no sentido do fluxo migratório, menor a densidade do equilíbrio.

Na figura 6.2 **D**, com migração bilateral (Modelo 6), novamente a maior densidade é a da subpopulação 3. Agora, o efeito da boa qualidade ambiental do sítio 3 é sentido mais fortemente nos seus dois vizinhos diretos (subpopulações 2 e 4). Verificamos uma influência intermediária nas subpopulações 1 e 5, e, mais fraca, na subpopulação 6 (mais “longe” do sítio 3 no sentido do fluxo migratório).

As densidades iguais na subpopulações 2 e 4, e nas subpopulações 1 e 5, evidenciam a natureza simétrica da migração bilateral (figura 6.2 **D**).

O efeito da condição inicial escolhida se restringe às primeiras gerações em ambas simulações (figuras 6.2 **C** e 6.2 **D**).

Distribuição Alinhada dos Sítios

Nas simulações apresentadas nas figuras 6.3 e 6.4, nós consideramos a distribuição alinhada dos seis sítios simulados. Também supomos que, em cada simulação, as condições abióticas são iguais em todos os sítios; com isso, podemos identificar a contribuição da migração associada a esta configuração espacial.

Na figura 6.3, apresentamos duas simulações que admitem condições abióticas ruins em todo o habitat (Condições-Abióticas_{*j*} = 0.1, *j* = 1, 2, 3, 4, 5, 6).

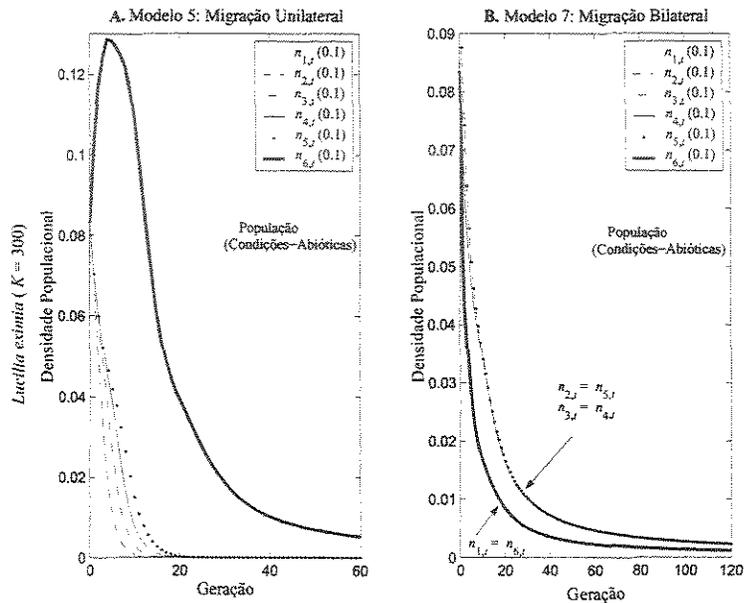


Figura 6.3: Simulações para seis subpopulações da espécie *Lucilia eximia* com distribuição alinhada dos sítios; A. Modelo 5: migração unilateral; B. Modelo 7: migração bilateral. Notação: ... densidade da subpopulação 1; --- densidade da subpopulação 2; - · - densidade da subpopulação 3; — densidade da subpopulação 4; * densidade da subpopulação 5; e — densidade da subpopulação 6 (linha grossa). Condições-Abióticas: A. e B. $[0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$.

Na figura 6.3 A, simulamos a migração unilateral (Modelo 5), com fluxo migratório coincidindo com o ordenamento dos sítios. Neste caso, observamos extinção local das subpopulações 1, 2, 3, 4 e 5, e persistência da espécie no sítio 6.

Já na figura 6.3 B, com migração bilateral (Modelo 7), verificamos a persistência global da espécie (baixas densidades). Ainda, observamos o prejuízo das subpopulações extremas (subpopulações 1 e 6), característico do Modelo 7. Apesar de ser imperceptível na figura, existe um favorecimento das subpopulações 2 e 5, como é esperado para o Modelo 7.

Nas figuras 6.4 A e 6.4 B, supomos que todo o ambiente está sujeito a condições abióticas médias (Condições-Abióticas_j = 0.5, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

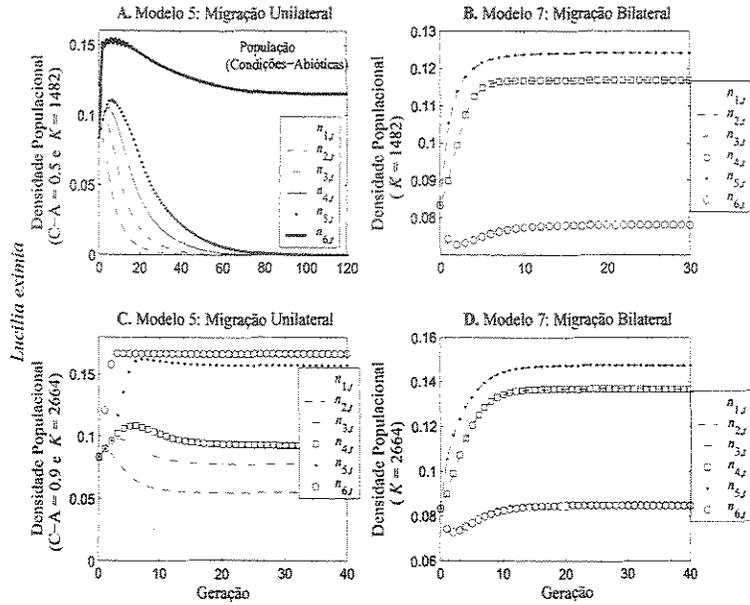


Figura 6.4: Simulações para seis subpopulações da espécie *Lucilia eximia* com distribuição alinhada dos sítios; A. Modelo 5: migração unilateral; B. Modelo 7: migração bilateral. Notação: \cdots densidade da subpopulação 1; $---$ densidade da subpopulação 2; $-\cdot-\cdot-$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4 (exceto em A: $---$); \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6 (exceto em A: $---$ linha grossa). Condições-Abióticas: A. e B. $[0.5\ 0.5\ 0.5\ 0.5\ 0.5\ 0.5]^T$; C. e D. $[0.9\ 0.9\ 0.9\ 0.9\ 0.9\ 0.9]^T$.

Na figura 6.4 A, contando com migração unilateral (Modelo 5), obtivemos o mesmo resultado qualitativo da simulação em 6.3 A: extinção local das subpopulações 1, 2, 3, 4, e 5, e persistência da espécie no sítio 6, mas com a densidade da subpopulação 6 superior.

Na figura 6.4 **B**, com migração bilateral (Modelo 7), observamos a persistência global da espécie; ainda, destacamos que $n_{1,t} = n_{6,t}$, $n_{2,t} = n_{5,t}$ e $n_{3,t} = n_{4,t}$, confirmando a natureza simétrica do modelo. Claramente percebemos o favorecimento das subpopulações 2 e 5, e o prejuízo das subpopulações 1 e 6.

Nas últimas simulações deste bloco (figuras 6.4 **C** e 6.4 **D**), supomos que todo o ambiente está sujeito a condições abióticas boas ($\text{Condições-Abióticas}_j = 0.9$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Considerando migração unilateral (figura 6.4 **C**: Modelo 5), diferentemente das simulações 6.3 **A** e 6.4 **A**, aqui temos persistência global da espécie; as densidades no equilíbrio crescem no sentido do fluxo migratório. Também temos saturação da subpopulação 6 ($t \geq 3$); a volta dos indivíduos da subpopulação 6 para a 5, propicia a aproximação entre suas densidades.

Para a figura 6.4 **D**, contando com migração bilateral (Modelo 7), observamos comportamento semelhante ao da figura 6.4 **B**, mas com densidades superiores.

6.2.2 Simulações para a espécie *Chrysomya albiceps*

Nas simulações para a espécie introduzida *Chrysomya albiceps*, as subpopulações geralmente se estabilizam em pontos de equilíbrio ou em 2-ciclos; eventualmente, elas exibem ciclos com período maior que 2.

Distribuição Cíclica dos Sítios

Nas simulações apresentadas nas figuras 6.5, 6.6 e 6.7, consideramos a distribuição cíclica dos sítios.

Nos painéis 6.5 **A** e 6.5 **B**, simulamos as seguintes condições abióticas: $\text{Condições-Abióticas}_1 = 0.2$, $\text{Condições-Abióticas}_2 = 0.4$, $\text{Condições-Abióticas}_3 = 0.6$, $\text{Condições-Abióticas}_4 = 0.8$, $\text{Condições-Abióticas}_5 = 0.6$ e $\text{Condições-Abióticas}_6 = 0.4$.

Na figura 6.5 **A**, com migração unilateral (Modelo 4), as subpopulações exibem 2-ciclos estáveis. No equilíbrio, a maior densidade ocorre no sítio 4 (melhores condições abióticas: 0.8), seguida pelas densidades no sítio 5 ($\text{Condições-Abióticas}_5 = 0.6$), no sítio 3 ($\text{Condições-Abióticas}_3 = 0.6$), no sítio 6 ($\text{Condições-Abióticas}_6 = 0.4$), no sítio 2 ($\text{Condições-Abióticas}_2 =$

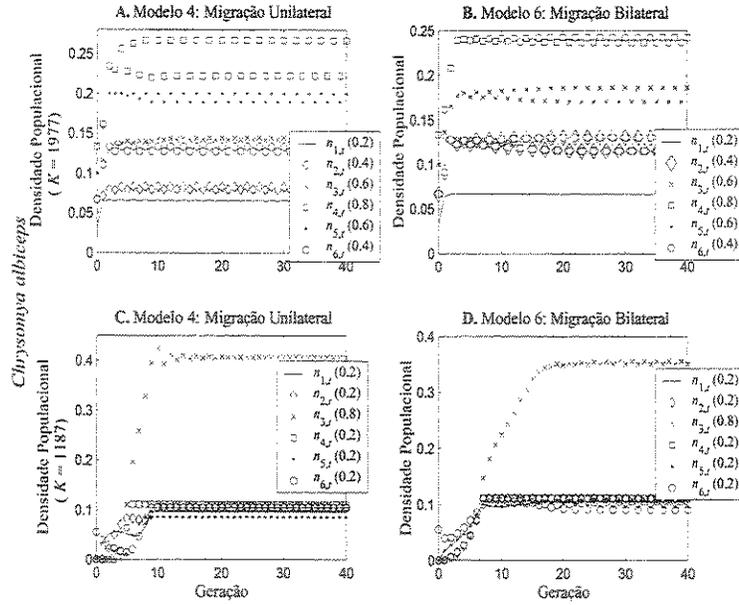


Figura 6.5: Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição cíclica dos sítios; **A.** Modelo 4: migração unilateral; **B.** Modelo 6: migração bilateral; **C.** Modelo 4: migração unilateral; **D.** Modelo 6: migração bilateral. Notação: — densidade da subpopulação 1; \diamond densidade da subpopulação 2, $\cdot \times \cdot$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 0.6 \ 0.4]^T$; **C.** e **D.** $[0.2 \ 0.2 \ 0.8 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$.

0.4) e a menor densidade no sítio 1 (piores condições abióticas: 0.2).

A diferença entre as densidades das subpopulações sujeitas a condições abióticas iguais (figura 6.5 **A**: subpopulações 3 e 5, e subpopulações 2 e 6) se deve a suas vizinhanças diferentes. Por exemplo, o sítio 5 recebe migrantes do 4, que tem a maior densidade, enquanto o sítio 3 recebe migrantes do 2, que tem uma das menores densidades.

Na figura 6.5 **B**, com migração bilateral (Modelo 6), a subpopulação 1 exibe um ponto de equilíbrio, enquanto as demais exibem 2-ciclos.

No equilíbrio, a densidade é função crescente das condições abióticas (figura 6.5 **B**). Ainda temos $n_{3,t} = n_{5,t}$ e $n_{2,t} = n_{6,t}$, evidenciando a natureza simétrica da migração bilateral.

Nas figuras 6.5 C e 6.5 D, consideramos Condições-Abióticas_j = 0.2, $j = 1, 2, 4, 5, 6$, e Condições-Abióticas₃ = 0.8. Ainda, tomamos as seguintes condições iniciais: $n_{1,0} = n_{2,0} = n_{3,0} = n_{4,0} = n_{5,0} = 0$ e $n_{6,0} = \frac{K_6}{2}$.

Primeiramente, destacamos que as condições iniciais consideradas têm influência transitória na evolução populacional, restrita às primeiras gerações (figuras 6.5 C e 6.5 D). Ainda observamos que a maior densidade ocorre na subpopulação com qualidade ambiental boa (subpopulação 3: Condições-abióticas₃ = 0.8), em ambas simulações.

Como as subpopulações 1, 2, 4, 5 e 6 estão praticamente sobrepostas nas figuras 6.5 C e 6.5 D, apresentamos uma ampliação destas simulações nas figuras 6.6 A e 6.6 B, respectivamente. Nelas, negligenciamos a subpopulação 3 para detalhar as demais.

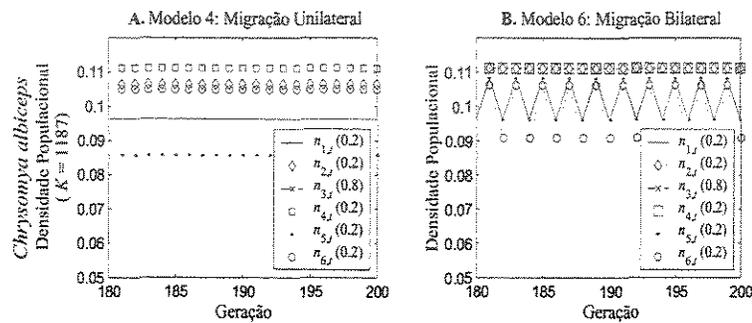


Figura 6.6: Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição cíclica dos sítios; **A.** Modelo 4: migração unilateral; **B.** Modelo 6: migração bilateral. Notação: — densidade da subpopulação 1; \diamond densidade da subpopulação 2, $- \times -$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.2 \ 0.2 \ 0.8 \ 0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$.

Nas figuras 6.5 C e 6.6 A, com migração unilateral (Modelo 4), as subpopulações evoluem para pontos de equilíbrio, com saturação da subpopulação 4 ($t \geq 7$).

Nas figuras 6.5 D e 6.6 B, com migração bilateral (Modelo 6), as subpopulações 1, 3, 5 e 6 exibem 2-ciclos, enquanto as subpopulações 2 e 4 exibem pontos de equilíbrio (ambas com saturação da subpopulação para $t \geq 7$). Ainda, temos $n_{2,t} = n_{4,t}$ e $n_{1,t} = n_{5,t}$ (no equilíbrio).

Na figura 6.7, verificamos um padrão incomum para as subpopulações de imaturos

da espécie *Chrysomya albiceps*. Nela simulamos: distribuição cíclica dos seis sítios e migração alinhada (Modelo 4); Condições-Abióticas₁ = 0.5, Condições-Abióticas_j = 0.6333 ($j = 2, 6$), Condições-Abióticas_i = 0.7667 ($i = 3, 5$) e Condições-Abióticas₄ = 0.9.

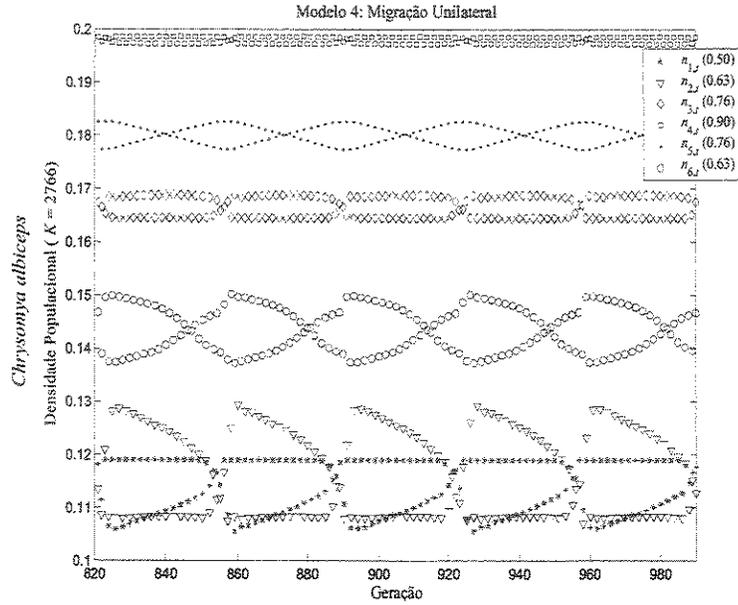


Figura 6.7: Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição cíclica dos sítios; Modelo 4: migração unilateral. Notação: * densidade da subpopulação 1; ∇ densidade da subpopulação 2, \diamond densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: $[0.5 \ 0.6333 \ 0.7667 \ 0.9 \ 0.7667 \ 0.6333]^T$.

Distribuição Alinhada dos Sítios

Nas simulações apresentadas nas figuras 6.8 e 6.9, consideramos a distribuição alinhada dos seis sítios simulados. Também supomos que, em cada simulação, as condições abióticas são iguais em todos os sítios.

Na figura 6.8, apresentamos duas simulações que admitem condições abióticas ruins em todo o habitat (Condições-Abióticas_{*j*} = 0.1, *j* = 1, 2, 3, 4, 5, 6).

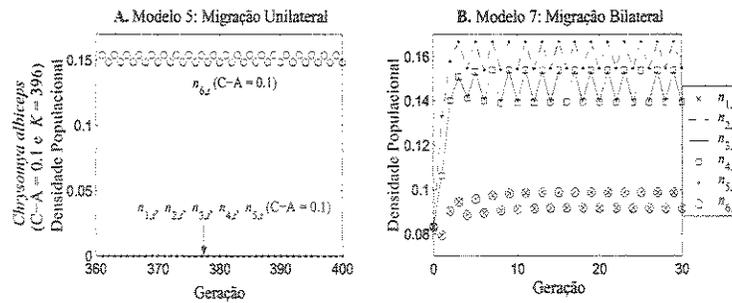


Figura 6.8: Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição alinhada dos sítios; **A.** Modelo 5: migração unilateral; **B.** Modelo 7: migração bilateral. Notação: $\dots \times \dots$ densidade da subpopulação 1; $---$ densidade da subpopulação 2, $—$ densidade da subpopulação 3; \square densidade da subpopulação 4; \bullet densidade da subpopulação 5; e \circ densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$.

Na figura 6.8 **A**, com migração unilateral (Modelo 5), observamos extinção local das subpopulações 1, 2, 3, 4 e 5, e persistência da espécie no sítio 6, exibindo 2-ciclo.

Já na figura 6.8 **B**, com migração bilateral (Modelo 7), verificamos a persistência global da espécie, exibindo 2-ciclos em todas as subpopulações. Ainda, observamos o prejuízo das subpopulações extremas (subpopulações 1 e 6) e favorecimento das subpopulações 2 e 5, como é esperado no Modelo 7. As subpopulações 3 e 4 apresentam densidades intermediárias.

Nas figuras 6.9 **A** e 6.9 **B**, supomos que todo o ambiente está sujeito a condições abióticas médias (Condições-Abióticas_{*j*} = 0.5, *j* = 1, 2, 3, 4, 5, 6).

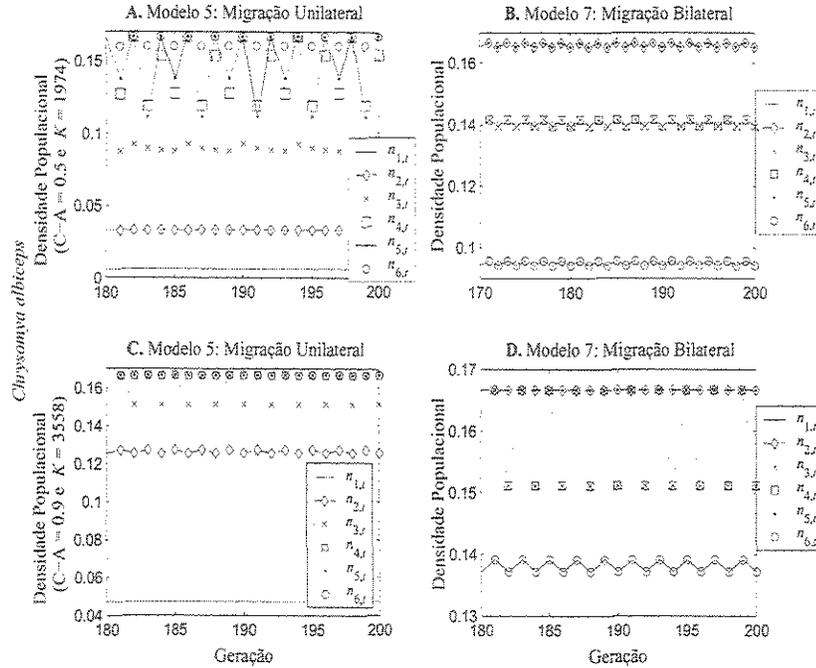


Figura 6.9: Simulações para seis subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* com distribuição alinhada dos sítios; **A.** Modelo 5: migração unilateral; **B.** Modelo 7: migração bilateral. Notação: — densidade da subpopulação 1; -◇- densidade da subpopulação 2, ...×... densidade da subpopulação 3; □ densidade da subpopulação 4; * densidade da subpopulação 5; e o densidade da subpopulação 6. Condições-Abióticas: **A.** e **B.** $[0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$; **C.** e **D.** $[0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9]^T$.

Na figura 6.9 **A**, contando com migração unilateral (Modelo 5), observamos persistência global da espécie: ponto de equilíbrio para as subpopulações 1 e 2, 4-ciclo para as subpopulações 3, 4 e 5 (saturação da subpopulação 4 a cada quatro gerações e da subpopulação 5 em gerações alternadas), e 2-ciclo para a subpopulação 6 (com saturação em gerações alternadas). As densidades das subpopulações dependem da posição de seus sítios em relação ao fluxo migratório: a menor ocorre no sítio 1, seguida pelas densidades nos sítios 2, 3, 4 e 5, respectivamente, e a maior densidade ocorre no sítio 6 (a cada quatro gerações, ocorre uma inversão entre as densidades das subpopulações 4 e 5).

Na figura 6.9 **B**, com migração bilateral (Modelo 7), observamos a persistência global da espécie, exibindo 2-ciclos em todas as subpopulações; ainda, destacamos que $n_{1,t} = n_{6,t}$,

$n_{2,t} = n_{5,t}$ e $n_{3,t} = n_{4,t}$, confirmando a natureza simétrica do modelo. Claramente percebemos o favorecimento das subpopulações 2 e 5, e o prejuízo das subpopulações 1 e 6.

Nas simulações das figuras 6.9 C e 6.9 D, supomos que todo o ambiente está sujeito a condições abióticas boas ($\text{Condições-Abióticas}_j = 0.9$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Considerando migração unilateral (figura 6.9 C: Modelo 5), temos persistência global da espécie: ponto de equilíbrio nas subpopulações 1, 4, 5 e 6 (saturação das subpopulações 4, 5 e 6 em todas as gerações) e 2-ciclo nas subpopulações 2 e 3 (saturação da subpopulação 3 em gerações alternadas); as densidades no equilíbrio crescem no sentido do fluxo migratório.

Para a figura 6.9 D, contando com migração bilateral (Modelo 7), novamente temos persistência global da espécie: ponto de equilíbrio nas subpopulações 2 e 5 (com saturação em todas as gerações) e 2-ciclo nas subpopulações 1, 3, 4 e 6 (saturação das subpopulações 3 e 4 em gerações alternadas); também observamos o prejuízo das subpopulações extremas e o favorecimento das suas vizinhas.

6.3 Modelo Generalizado

Os modelos propostos na seção 6.1 estão restritos aos esquemas migratórios unilateral e bilateral e às distribuições cíclica e alinhada dos sítios.

Nesta seção, assumimos que quaisquer dois sítios estão interligados por migração, independente de suas posições espaciais, e que esta migração não é dirigida.

Consideramos a população imatura de uma única espécie de moscas varejeiras distribuída num habitat fragmentado em p sítios ($p \in \mathbb{N}$); aqui, não restringimos a distribuição espacial dos sítios.

Mantemos a hipótese que a cada geração a população passa por um processo de dinâmica local seguido por um processo migratório. Também o modelo de dinâmica local é exatamente o mesmo descrito na subseção 6.1.1.

Quanto à migração, mantemos as hipóteses: a migração ocorre uma vez em cada geração e é de curta duração em relação à escala de tempo utilizada; no caso de saturação, o

excesso de indivíduos retorna ao sítio de origem.

Supomos que \tilde{m}_j representa a fração da subpopulação j que deixa o sítio após a dinâmica local ($j = 1, 2, \dots, p$), tal que \tilde{m}_j é estimado pelo sistema baseado em regras fuzzy para a Migração (proposto na seção 5.2).

Observamos que a parcela de emigrantes do sítio j , na geração t , é a mesma da seção 6.1: $\tilde{m}_j f_j(n_{j,t})$ ($j \in \{1, 2, \dots, p\}$); mas estes indivíduos podem entrar em qualquer outro sítio i ($i = 1, 2, \dots, p$ e $i \neq j$). Denotamos a fração de emigrantes do sítio j que entra no sítio i por ω_{ij} . Daí, a parcela de emigrantes do sítio j que entra no sítio i é $\omega_{ij} \tilde{m}_j f_j(n_{j,t})$. E calculamos a densidade da subpopulação i , na geração $t + 1$, por

$$n_{i,t+1} = \underbrace{(1 - \tilde{m}_i) f_i(n_{i,t})}_{\text{não-migrantes de } i} + \underbrace{\omega_{i1} \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t})}_{\text{emigrantes de 1}} + \dots + \underbrace{\omega_{i,i-1} \tilde{m}_{i-1} f_{i-1}(n_{i-1,t})}_{\text{emigrantes de } i-1} + \underbrace{\omega_{i,i+1} \tilde{m}_{i+1} f_{i+1}(n_{i+1,t})}_{\text{emigrantes de } i+1} + \dots + \underbrace{\omega_{ip} \tilde{m}_p f_p(n_{p,t})}_{\text{emigrantes de } p}. \quad (6.5)$$

Para simplificar a notação, consideremos $\omega_{jj} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, p$).

Então, o **Modelo Generalizado** para a metapopulação de imaturos de moscas varejeiras é

$$\begin{cases} n_{1,t+1} &= (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \sum_{j=1}^p \omega_{1j} \tilde{m}_j f_j(n_{j,t}) \\ n_{2,t+1} &= (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \sum_{j=1}^p \omega_{2j} \tilde{m}_j f_j(n_{j,t}) \\ &\vdots \\ n_{p,t+1} &= (1 - \tilde{m}_p) f_p(n_{p,t}) + \sum_{j=1}^p \omega_{pj} \tilde{m}_j f_j(n_{j,t}) \end{cases}, \quad (6.6)$$

onde $n_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{K}$ é o número de imaturos em relação a metapopulação máxima, no sítio j e na geração t , \tilde{m}_j é a fração de imaturos que emigram do sítio j , ω_{ij} é a fração de imaturos que emigram do sítio j e entram no sítio i e f_j está explícita na equação 5.2 ($i, j = 1, 2, \dots, p$).

Ainda observamos que o coeficiente $\omega_{ij} \in [0, 1]$, $i, j = 1, 2, \dots, p$, e $\sum_{i=1}^p \omega_{ij} = 1$ para $j = 1, 2, \dots, p$.

Temos várias opções para a avaliação dos coeficientes ω_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, p$).

A primeira opção é considerarmos que os emigrantes de um sítio j migram para os $p - 1$ sítios vizinhos em proporções iguais; isto significa $\omega_{ij} = \frac{1}{p-1}$ e $\omega_{jj} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, p$ e $i \neq j$.

Outra opção é supormos que ω_{ij} depende da distância entre os sítios i e j ($i, j = 1, 2, \dots, p$). Se d_{ij} denota a distância entre os sítios i e j e $D = \sum_{i=1}^p d_{ij}$ denota a soma das distâncias entre o sítio j e seus vizinhos (j fixo), então podemos calcular $\omega_{ij} = \frac{d_{ij}}{D}$.

Ainda, podemos obter ω_{ij} reproduzindo um paisagem natural ($i, j = 1, 2, \dots, p$). Por exemplo, se existir um obstáculo entre dois sítios, então o correspondente coeficiente é nulo.

Por outro lado, do modelo generalizado podemos recuperar os modelos 4, 5, 6 e 7. Por exemplo, para obtermos o Modelo 4 basta considerarmos $\omega_{1p} = 1$, $\omega_{j+1,j} = 1$ para $j = 1, 2, \dots, p-1$, e nos demais casos $\omega_{ij} = 0$.

6.4 Discussões Finais

Das simulações apresentadas na seção 6.2, concluímos que

- como no capítulo 5, as subpopulações de imaturos da espécie *Lucilia eximia* exibem pontos de equilíbrio, enquanto as subpopulações da espécie *Chrysomya albiceps* exibem pontos de equilíbrio ou ciclos;
- as populações da espécie nativa podem evoluir para extinção global, associada às perdas por emigração, enquanto as populações da espécie introduzida não apresentam esta possibilidade;
- para a distribuição alinhada dos sítios, a substituição da migração unilateral pela bilateral pode evitar a extinção local;
- para migração bilateral, a proposta de um cenário ambiental com simetria na disposição das condições abióticas implica em densidades iguais nos sítios equivalentes (em relação ao “eixo de simetria”);
- a diferença ambiental entre sítios sucessivos $j-1$ e j reflete mais fortemente na densidade da subpopulação j quando consideramos a migração unilateral.

Nós não realizamos simulações com o modelo generalizado 6.6, mas pretendemos fazê-las em trabalho futuro.

Conclusões

Reservamos este capítulo para a apresentação das conclusões gerais deste trabalho, visto que as conclusões específicas estão apontadas na seção “Discussões Finais” de cada capítulo.

Concluimos que a teoria de subconjuntos fuzzy nos forneceu rico instrumental para a modelagem dos problemas considerados; em nenhum momento, o seu uso foi fonte de limitações. Particularmente, o uso de sistemas baseados em regras fuzzy propiciou a modelagem da dinâmica populacional e de dispersão das moscas varejeiras, utilizando uma linguagem interdisciplinar e efetivando nossa interação com as informações do especialista.

Quanto ao modelo logístico fuzzy discreto, complementamos o estudo de seus pontos fixos e determinamos uma família de órbitas periódicas estáveis deste modelo (construídas a partir dos pontos de órbitas periódicas do modelo logístico discreto).

Através das simulações, visualizamos a evolução temporal da condição inicial para uma das possíveis órbitas estáveis; ainda, apresentamos duas opções de diagramas que ocupariam o lugar do diagrama de bifurcação do modelo clássico. As simulações iterativas também permitiram a fuzzificação da taxa de crescimento intrínseco; através delas, determinamos algumas soluções estacionárias do modelo com esta hipótese.

Quanto à modelagem de metapopulações de moscas varejeiras, concluimos que os efeitos nas subpopulações das diferenças locais na qualidade ambiental, simuladas através das diferentes condições abióticas, podem ser amenizados quando consideramos a migração bilateral; neste caso, existe um efeito compensatório provocado pela interação de uma subpopulação com um número maior de vizinhas; já no caso da migração unilateral, a interação direcionada entre subpopulações pode acentuar os efeitos destas diferenças. Conseqüentemente,

a migração unilateral pode acarretar extinção local ou global, enquanto a bilateral pode evitar extinção local, dependendo do cenário simulado.

Na apresentação dos modelos de metapopulação optamos por uma ordem crescente em relação ao número de sítios, apresentando primeiro os modelos com migração unilateral e, em seguida, os com migração bilateral. Entretanto, nesta conclusão final acreditamos que um resumo na ordem decrescente em relação ao acoplamento migratório entre os sítios pode esclarecer o desenvolvimento deste trabalho. Apresentamos este resumo a seguir.

Modelo Generalizado

$$\begin{cases} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \sum_{j=1}^p \omega_{1j} \tilde{m}_j f_j(n_{j,t}) \\ n_{2,t+1} = (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \sum_{j=1}^p \omega_{2j} \tilde{m}_j f_j(n_{j,t}) \\ \vdots \\ n_{p,t+1} = (1 - \tilde{m}_p) f_p(n_{p,t}) + \sum_{j=1}^p \omega_{pj} \tilde{m}_j f_j(n_{j,t}) \end{cases}$$

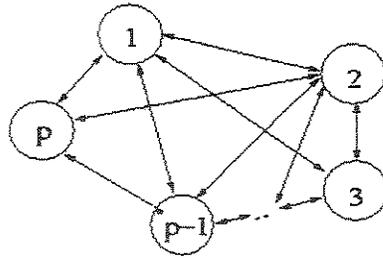


Figura 6.10: Esquema migratório do Modelo Generalizado.

Modelo 6: Migração Bilateral e Distribuição Cíclica dos Sítios

$$\begin{cases} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \frac{\tilde{m}_p}{2} f_p(n_{p,t}) + \frac{\tilde{m}_2}{2} f_2(n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} = (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \frac{\tilde{m}_1}{2} f_1(n_{1,t}) + \frac{\tilde{m}_3}{2} f_3(n_{3,t}) \\ \vdots \\ n_{p,t+1} = (1 - \tilde{m}_p) f_p(n_{p,t}) + \frac{\tilde{m}_{p-1}}{2} f_{p-1}(n_{p-1,t}) + \frac{\tilde{m}_1}{2} f_1(n_{1,t}) \end{cases}$$

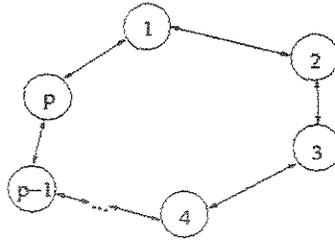


Figura 6.11: Esquema migratório do Modelo 6.

Resultados:

- Persistência global da espécie.
- A migração bilateral propicia uma compensação dos efeitos das diferentes condições abióticas.
- Distribuição simétrica das condições abióticas implica simetria nas densidades das subpopulações.

Modelo 4: Migração Unilateral e Distribuição Cíclica dos Sítios

$$\begin{cases} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \tilde{m}_p f_p(n_{p,t}) \\ n_{2,t+1} = (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \\ \vdots \\ n_{p,t+1} = (1 - \tilde{m}_p) f_p(n_{p,t}) + \tilde{m}_{p-1} f_{p-1}(n_{p-1,t}) \end{cases}$$

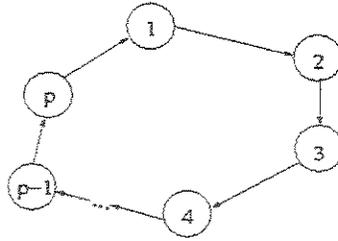


Figura 6.12: Esquema migratório do Modelo 4.

Resultados:

- Persistência global da espécie.
- Diferenças ambientais entre vizinhos têm contribuição decisiva nas densidades das subpopulações.

Modelo 7: Migração Bilateral e Distribuição Alinhada dos Sítios

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \frac{\tilde{m}_2}{2} f_2(n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} = (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) + \frac{\tilde{m}_3}{2} f_3(n_{3,t}) \\ \vdots \\ n_{p-1,t+1} = (1 - \tilde{m}_{p-1}) f_{p-1}(n_{p-1,t}) + \frac{\tilde{m}_{p-2}}{2} f_{p-2}(n_{p-2,t}) + \tilde{m}_p f_p(n_{p,t}) \\ n_{p,t+1} = (1 - \tilde{m}_p) f_p(n_{p,t}) + \frac{\tilde{m}_{p-1}}{2} f_{p-1}(n_{p-1,t}) \end{array} \right.$$

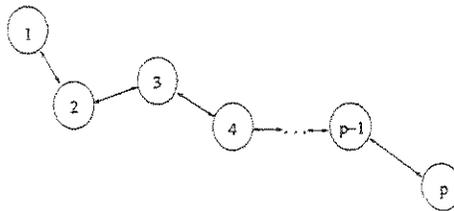


Figura 6.13: Esquema migratório do Modelo 7.

Resultados:

- Persistência global da espécie.
- Prejuízo das subpopulações extremas: 1 e p .
- Favorecimento das subpopulações 2 e $p - 1$.
- Distribuição simétrica das condições abióticas implica simetria nas densidades das subpopulações.

Modelo 5: Migração Unilateral e Distribuição Alinhada dos Sítios

$$\begin{cases} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) \\ n_{2,t+1} = (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \\ \vdots \\ n_{p,t+1} = f_p(n_{p,t}) + \tilde{m}_{p-1} f_{p-1}(n_{p-1,t}) \end{cases}$$

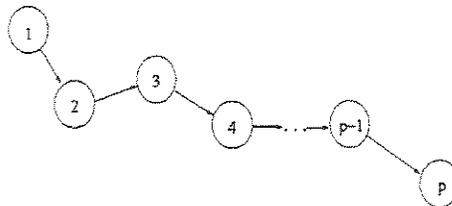


Figura 6.14: Esquema migratório do Modelo 5.

Resultados:

- Pode ocorrer extinção local da espécie.
- No caso de persistência global da espécie, as densidades das subpopulações crescem no sentido do fluxo migratório (condições abióticas iguais).

Modelo 3: Migração Bilateral

$$\begin{cases} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) + \tilde{m}_2 f_2(n_{2,t}) \\ n_{2,t+1} = (1 - \tilde{m}_2) f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \end{cases}$$

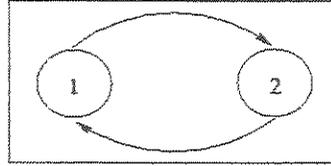


Figura 6.15: Esquema migratório do Modelo 3.

Modelo 2: Migração Unilateral

$$\begin{cases} n_{1,t+1} = (1 - \tilde{m}_1) f_1(n_{1,t}) \\ n_{2,t+1} = f_2(n_{2,t}) + \tilde{m}_1 f_1(n_{1,t}) \end{cases}$$

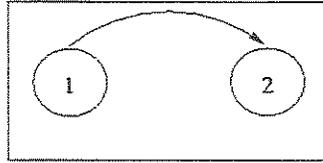


Figura 6.16: Esquema migratório do Modelo 2.

Modelo 1: População Isolada

$$n_{t+1} = f(n_t) = \frac{1}{2} \tilde{F}(n_t) \cdot \tilde{S}(n_t) \cdot n_t$$

Notação: $n_{j,t}$ é a densidade de imaturos no sítio j e na geração t , ou seja, $n_{j,t} = \frac{N_{j,t}}{K}$, $j = 1, 2, \dots, p$; o modelo local é $f_j(n_{j,t}) = \frac{1}{2} \tilde{F}_j \cdot \tilde{S}_j \cdot n_{j,t}$; \tilde{F}_j , \tilde{S}_j e \tilde{m}_j são respectivamente a fecundidade, a sobrevivência e a fração de imaturos emigrantes do sítio j , estimadas em cada geração usando os sistemas baseados em regras fuzzy apropriados (seção 5.2); ω_{ij} é a fração de emigrantes do sítio j que entra no sítio i ($i, j = 1, 2, \dots, p$ e $i \neq j$).

Apêndice A

Aplicativos Computacionais Utilizados

As simulações e a maioria dos resultados numéricos apresentados nesta tese foram obtidos usando programas próprios desenvolvidos no ambiente do aplicativo MATLAB versão 6.0.

Os sistemas baseados em regras fuzzy foram desenvolvidos utilizando a seguinte biblioteca do MATLAB: Toolbox Fuzzy.

Os ajustes de curva apresentados nas subseções 5.3.2 e 5.3.3 foram obtidos utilizando o aplicativo Microsoft Excel 2000 (9.0.2812).

Bibliografia

- [1] Ahmed, E.; Hegazi, A. S. On some variants of dynamical systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, **12** (2001), 2103-2108.
- [2] Barros, L. C. “Sobre sistemas dinâmicos fuzzy, teoria e aplicações”, tese de doutorado, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 1997.
- [3] Barros, L. C.; Bassanezi, R. C.; Tonelli, P. A. On the continuity of Zadeh’s extension, *Seventh IFSA World Congress*, volume II, Praga (1997) 03-08.
- [4] Barros, L. C.; Bassanezi, R. C.; Tonelli, P. A. Fuzzy modelling in population dynamics, *Ecological Modelling*, **128** (2000) 27-33.
- [5] Bassanezi, R. C.; Barros, L. C.; Tonelli, P. A. Attractors and asymptotic stability for fuzzy dynamical systems, *Fuzzy Sets and Systems*, **113** (2000) 473-483.
- [6] Bassanezi, R. C. “Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia”, Editora Contexto, São Paulo, 2002.
- [7] Borror, D. J.; DeLong, D. M. “Introdução ao estudo dos insetos”, editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1969.
- [8] Bowman, D. D. “Parasitology for veterinarians”. W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1995.
- [9] Buckley, J. J.; Eslami, E.; Feuring, T. “Fuzzy mathematics in economics and engineering”, Physica-Verlag, New York, 2002.

- [10] Castanho, M. J. P.; Magnago, K. F.; Bassanezi, R. C. Abordagem fuzzy na dinâmica de populações de dípteros califorídeos, *Biomatemática*, **XIII** (2003), 55-65.
- [11] Cunha, M. C. C. “Métodos numéricos”, Editora da UNICAMP, Campinas, SP, 2000.
- [12] Devaney, R. L. “An introduction to chaotic dynamical systems”, Addison-Wesley Publishing Company, California, 1989.
- [13] Edelstein-Keshet, L. “Mathematical models in biology”, McGraw-Hill, New York, 1988.
- [14] Greenberg, B. “Flies and Disease. Ecology, Classification and Biotic Associations”, volume I, Princeton University Press, Princeton, 1971.
- [15] Greenberg, B. “Flies and Disease. Biology and Disease Transmission”, volume II, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [16] Godoy, W. A. C.; Von Zuben, C. J.; Reis, S. F.; Von Zuben, F. J. The spatial dynamics of native and introduced blowflies (Dip., Calliphoridae), *J. App. Ent.*, **121** (1997), 305-309.
- [17] Godoy, W. A. C.; Von Zuben, C. J.; Reis, S. F.; Von Zuben, F. J. Spatio-temporal dynamics and transition from asymptotic equilibrium to bounded oscillations in *Chrysomya albiceps* (Diptera, Calliphoridae), *Men. Inst. Osw. Cruz*, **96** (2001), 627-634.
- [18] Godoy, W. A. C. “Dinâmica determinística e estocástica em populações de dípteros califorídeos: acoplamento por migração, extinção local e global”, tese (livre-docência), Instituto de Biociências de Botucatu, Universidade Estadual Paulista, 2002.
- [19] Hanski, I. “Metapopulation Ecology”, Oxford Series in Ecology and Evolution, Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [20] Harwood, R. F.; James, M. T. “Entomology in human and animal health”, Macmillan Publishing Co., New York, 1979.
- [21] Massad, E.; Menezes, R. X.; Silveira, P. S. P.; Ortega, N. R. S. “Métodos quantitativos em medicina”, Editora Manole, Barueri, SP, 2004.

- [22] Murray, J. D. "Mathematical Biology", Biomathematics Texts, volume 19, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [23] Neves, D. P. "Parasitologia Humana", Atheneu, São Paulo, 2000.
- [24] Nguyen, H. T.; Walker, E. A. "A first course in fuzzy logic", Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2000.
- [25] Negoita, C. V.; Ralescu, D. A. "Applications of fuzzy sets to systems analysis", John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [26] Pedrycz, W.; Gomide, F. "An introduction to fuzzy sets: analysis and design", The MIT Press, Massachusetts, 1998.
- [27] Prout, T.; McChesney, F. Competition among immatures affects their adult fertility: population dynamics, *American Naturalist*, **126** (1985), 521-558.
- [28] Reigada, C.; Godoy, W. A. C. Dinâmica de populações isoladas e acopladas por migração em *Chrysomya megacephala* (Díptera: Calliphoridae), XXVI CNMAC (resumos), 2003.
- [29] Reis, S. F.; Teixeira, M. A.; Von Zuben, F. J.; Godoy, W. A. C.; Von Zuben, C. J. Theoretical dynamics of experimental populations of introduced and native blowflies (Diptera, Calliphoridae), *J. Med. Ent.*, **33** (1996), 537-544.
- [30] Rohde, K.; Rohde, P. P. Fuzzy chaos: Reduced chaos in the combined dynamics of several independently chaotic population, *American Naturalist*, **158** n.5 (2001), 553-556.
- [31] Roughgarden, J. "Primer of ecological theory", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1998.
- [32] Sharkovskii, A. N.; Maistrenko, Yu. L.; Romanenko, E. Yu. "Difference equations and their applications", Mathematics and This Applications, Editora Kluwer Academic Publishers, London, 1993.

- [33] Silva, I. C. R.; Mancera, P. F. A.; Godoy, W. A. C. Population dynamics of *Phaenicia eximia* (Dipt. Calliphoridae), em "Proceedings do Congresso Latino Americano de Biomatemática - X ALAB - V ELAEM", 57-64, eds. R. C. Bassanezi e G. L. Diniz, Campinas, SP, 2001.
- [34] Silva, J. A. L.; Castro, M. L. Sincronização e Caos em Metapopulações, em "Proceedings of Congresso Latino Americano de Biomatemática - X ALAB - V ELAEM", 18-29, eds. R. C. Bassanezi e G. L. Diniz, Campinas, SP, 2001.
- [35] Smith, K. G. V. "A manual of forensic entomology", University Printing House, Oxford, 1986.
- [36] Zadeh, L. A. Fuzzy Sets, *Inform and Control*, 8 (1965), 338-353.
- [37] Zumpt, F. "Myiasis in man and animals in the Old World", London: Butterworths, 1965.