UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Curso de Mestrado em Matemática

Álgebras de Lie Finitamente Apresentáveis

por

Viviane Moretto da Silva

sob orientação da

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova

Campinas - SP

Álgebras de Lie Finitamente Apresentáveis

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Viviane Moretto da Silva** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 06 de Maio de 2005.

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova

Banca examinadora:

Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova.

Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros.

Profa. Dra. Lúcia Satie Ikemoto Murakami.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecário: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

Silva, Viviane Moretto da

Si38a Álgebras de Lie finitamente apresentáveis / Viviane Moretto da Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2005.

Orientador : Dessislava Hristova Kochloukova

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lie, Álgebra de. 2. Anéis noetherianos. 3. Álgebras não-associativas. I. Kochloukova, Dessislava Hristova. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Finitely presented Lie algebras

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Lie algebras. 2. Rings, Noetherian. 3. Nonassociative algebras.

Área de concentração: Álgebra

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Profa. Dra. Dessislava Hristova Kochloukova (UNICAMP)
Prof. Dr. Caio José Colleti Negreiros (UNICAMP)
Profa. Dra. Lucia Satie Ikemoto Murakami (USP)

Data da defesa: 06/05/2005

Dissertação de Mestrado defendida em 06 de maio de 2005 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof. (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Prof. (a). Dr (a). LUCIA SATIE IKEMOTO MURAKAMI

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade e pela perseverança sempre presente durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

À Capes, pelo apoio financeiro sem o qual não haveria condições de executá-lo.

Aos meus pais, José e Odete, que nunca mediram esforços em me apoiar e suportaram firmemente a dor da separação. À minha irmã Michelle, à quem deixei a guarda de nossos genitores.

À minha orientadora, Profa. Dra. Dessislava, pela sua atenção, paciência e competência. Sem sua consistente colaboração, com certeza esse trabalho não atingiria tamanho êxito.

Ao Marcelo, pelo seu carinho em todos os momentos, que principalmente quando longe tanto me confortaram e me ajudaram a permanecer lutando.

Às meninas da secretaria, Tânia e Cidinha que, junto com o Ednaldo sempre nos deram o melhor em atendimento e prestatividade.

À todos os meus professores, tanto da graduação quanto da pós-graduação, por suas imensas contribuições em minha formação.

Ao Luis e à Célia que, juntamente com suas meninas, tão bem me acolheram e me ofereceram um "refúgio" durante meus trabalhos.

À todos os meus amigos de turma, dentre os quais vale ressaltar o Lauriclécio, Fábio Bertoloto, Fábio Dadam, Bibiana, Fabiano, Andrielber, Marcelo, Dimas, Tatiana, por tantos obstáculos vencidos juntos. Também aos que compartilharam tantos momentos importantes como Alonso, Ednei, Edward e Mariana, Rodolfo, Laércio, Patrícia e Claudenir, dentre outros. À Regiane, amiga inseparável, em nome da qual agradeço todas as garotas que comigo dividiram, não só a casa mas também muitas alegrias e agonias.

Aos meus pais, José e Odete
e ao Marcelo com todo o
amor e carinho.

Resumo

Nesta dissertação de mestrado, estudamos propriedades de álgebras de Lie. As Álgebras de Lie têm grande importância não somente na teoria de álgebras não associativas, elas surgem também em geometria, topologia e no estudo da teoria de grupos por exemplo.

As definições e resultados básicos sobre álgebras de Lie estão inclusos no Capítulo 2. Para esta parte do trabalho, utilizamos os livros [1] e [2]. O nosso enfoque foi sobre álgebras universais envelopantes, mergulhando assim a álgebra de Lie em álgebras associativas (Seções 2.4, 2.5 e 2.6).

O objetivo principal da dissertação foi estudar o artigo [4], "Finite presentation of abelian-by-finite dimensional Lie algebras", que classifica álgebras de Lie finitamente apresentáveis (no sentido de serem definidas por número finito de geradores e relações) que são extensões de ideal abeliano por álgebra de Lie de dimensão finita.

Definimos álgebras de Lie livres na seção 2.7. Tratam-se de objetos na categoria de álgebras de Lie que satisfazem propriedade universal semelhante a definição de grupos livres.

A classificação de álgebras de Lie que são extensões de ideal abeliano por álgebra de Lie de dimensão finita usa teoria de módulos Noetherianos. No Capítulo 1 incluímos resultados básicos sobre módulos, em particular estudamos módulos Noetherianos, não necessariamente sobre anéis comutativos (para este estudo utilizamos [9]), embora alguns resultados sejam válidos somente no caso onde o anel básico é comutativo (caso do Teorema da Base de Hilbert 1.31 no Capítulo 1).

No final, nos Capítulos 3 e 4, explicamos de maneira bem minuciosa (com mais

detalhes que o original) o resultado principal de [4], que é apresentado na página 42:

Proposição 3.2:*Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie finitamente gerada sobre o corpo $\mathbb{K}$. Suponha que $\mathfrak{L}$ tenha um ideal abeliano A tal que $\mathfrak{L}/A$ tem dimensão finita como espaço vetorial. Seja $\mathfrak{R}$ a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{L}/A$. Suponha também que o quadrado tensorial $A \otimes A$ é finitamente gerado como $\mathfrak{R}$-módulo sobre a ação diagonal. Então $\mathfrak{L}$ é finitamente apresentável.*

Os métodos da demonstração de 3.2 envolvem muitos cálculos com relações em $\mathfrak{L}$ para mostrar que um conjunto finito E é suficiente para gerar todas as relações em $\mathfrak{L}$. Embora os cálculos sejam muitos, a técnica principal é a indução e a Identidade de Jacobi. A teoria de módulos Noetherianos também foi muito utilizada.

Abstract

In this work we study the classification of finitely presented abelian-by-finite dimensional Lie algebras given in [4]. If $\mathfrak{L}$ is a Lie algebra, an extension of an abelian ideal A by a finite dimensional Lie algebra $\mathfrak{L}/A$ then $\mathfrak{L}$ is finitely presented if and only if $A \otimes A$ is finitely generated as $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}/A)$-module via the diagonal action, where $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}/A)$ is the universal enveloping algebra of $\mathfrak{L}/A$. We study in detail the result that finite generation of $A \otimes A$ over $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}/A)$ implies finite presentability of $\mathfrak{L}$.

Conteúdo

1 Módulos Noetherianos **10**

1.1 Anéis e Ideais 10

1.2 A-Módulos 13

1.3 Operações com A-módulos 15

1.3.1 Produto Tensorial de A-módulos 16

1.4 Módulos Noetherianos 19

1.4.1 Anéis Noetherianos 21

2 Álgebras de Lie **24**

2.1 Álgebras de Lie 24

2.2 Construção de uma Álgebra de Lie a partir de uma Álgebra Associativa . . . 25

2.3 Representações e $\mathfrak{L}$-Módulos 26

2.4 Álgebras Universais Envelopantes 29

2.5 Construindo a Álgebra Universal Envelopante 32

2.6 O Teorema de Poincaré-Birkoff-Witt 34

2.7 Álgebras de Lie Livres 39

3 Apresentação finita de $\mathfrak{L}$ **42**

3.1 O Teorema Principal 42

3.2 Ideais e Álgebras Envelopantes 43

3.3 Quadrado Tensorial e Quadrado Exterior 44
3.3.1 Notações do Teorema 45
3.4 Estrutura de Q e $\mathfrak{R}$ 45
3.5 Gerando a álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ 47
3.6 Uma apresentação de $\mathfrak{L}$ via geradores e relações 49
3.7 Produtos Tensoriais 50
3.8 A Álgebra Associativa Livre 53

4 Relações nas Álgebras Envelopantes 56

4.1 A aplicação $\mathbb{K}$-linear η 56
4.2 Anuladores do Ideal Abeliano 59
4.3 Definição do subconjunto E 61
4.4 Resultados Preliminares 62
4.5 Conclusão do Passo Indutivo 65
Referências Bibliográficas 68

Capítulo 1

Módulos Noetherianos

Neste capítulo faremos uma introdução à Álgebra não comutativa (ou não necessariamente comutativa), definindo seus elementos básicos como Anéis, Ideais e Homomorfismos.

Nosso objetivo principal é estabelecer o conceito de Módulos Noetherianos, os quais serão muito importantes durante todo o trabalho. Todos os anéis neste Capítulo são associativos.

1.1 Anéis e Ideais

Definição 1.1 *Um anel associativo A é um conjunto com duas operações binárias (adição e produto) que satisfaz:*

1. *$(A, +)$ é grupo abeliano, com elemento neutro denotado por 0_A (ou simplesmente 0);*
2. *O produto é associativo e distributivo sobre a adição;*
3. *O produto admite unidade, que será denotada por 1_A ou simplesmente 1, isto é, $\forall x \in A, x1 = 1x = x$.*

Se o produto for comutativo, ou seja, se $\forall x, y \in A$ tivermos $xy = yx$, então diremos que o anel é *comutativo.*

Durante todo o nosso trabalho, quando usarmos o termo Anel, estaremos considerando a definição, ou seja, salvo quando especificado, estaremos trabalhando com anel com unidade não-comutativo, ou não necessariamente comutativo.

Exemplos:

1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$, conjunto dos inteiros com adição e produto usuais.

2. Considere o conjunto:
$P :=$ { *polinômios em uma variável sobre um anel comutativo* A} $= \{(a_0, a_1, ..., a_n, ...) \mid a_i \in A$ e quase todas as entradas são nulas$\}$.
Se definirmos as operações:

$$\begin{array}{ccc} + : P \times P & \longrightarrow & P \\ (a_0, a_1, ..., a_n, ...), (b_0, b_1, ..., b_n, ...) & \longmapsto & (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n, ...) \\ \star : P \times P & \longrightarrow & P \\ (a_0, a_1, ..., a_n, ...), (b_0, b_1, ..., b_n, ...) & \longmapsto & (c_0, c_1, ..., c_n, ...) \end{array}$$

onde $c_0 = a_0b_0, c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, ..., c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_{n-1}b_1 + a_nb_0, ...$

Temos que $(P, +, \star)$ é um anel que é chamado de *Anel de Polinômios sobre A em uma variável* .

Definição 1.2 *Um homomorfismo de anéis é uma aplicação* $\varphi : A \longrightarrow B$*, com* A*,* B *anéis tal que:*

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall\ x, y \in A$;

2. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \forall\ x, y \in A$;

3. $\varphi(1_A) = 1_B$.

Definição 1.3 *Um subanel* S *de um anel* A *é um subconjunto fechado para a adição, inverso aditivo e produto e que contém o elemento unidade de* A*. Também podemos dizer que é um subconjunto de* A *que é anel com respeito às operações de* A*.*

Definição 1.4 *Um subconjunto* I *de um anel* A *é dito um ideal à esquerda de* A *e denotado por* $I \lhd_E A$ *se* I *for um subgrupo aditivo de* A *tal que* $AI \subseteq I$*, ou seja, se* $\forall x \in I, \forall y \in A$

então $yx \in I$. Analogamente, podemos definir um ideal à direita I' de A como um subgrupo aditivo de A tal que $I'A \subseteq I'$, isto é $\forall x \in I', \forall y \in A$ então $xy \in I'$ e denotá-lo por $I' \lhd_D A$. No caso em que I é um ideal à esquerda e à direita de A dizemos simplesmente que I é um ideal.

Neste caso podemos também definir o anel $A/I := \{\overline{x} = x + I \mid x \in A\}$:= conjunto das classes laterais de I em A com as seguintes operações:

$$(a_1 + I) + (a_2 + I) = (a_1 + a_2) + I,$$

$$(a_1 + I)(a_2 + I) = (a_1 a_2) + I, \forall a_1, a_2 \in A.$$

Lema 1.5 *Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de anéis, então:*

1. *$Nuc(\varphi) = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0\}$, é um ideal à direita e à esquerda de A;*

2. *$Im(\varphi) = \{y \in B \mid y = \varphi(x)$ para algum $x \in A\}$, é um subanel de A.*

Assim teremos induzido um isomorfismo $A/Nuc(\varphi) \simeq Im(\varphi)$, que envia $a + Nuc(\varphi)$ para $\varphi(a)$, onde $a \in A$.

Demonstração:

1. Sejam $x, x_1 \in Nuc(\varphi)$ e $l \in A$, então, $\varphi(lx) = \varphi(l)\varphi(x) = \varphi(l)0 = 0$, assim $lx \in Nuc(\varphi)$. Também, $\varphi(x+x_1) = \varphi(x)+\varphi(x_1) = 0+0 = 0$, assim $x+x_1 \in Nuc(\varphi)$. Portanto $Nuc(\varphi)$ é um ideal à esquerda de A. Analogamente, teremos que $Nuc(\varphi)$ é um ideal à direita de A.

2. Sejam $y, y_1 \in Im(\varphi)$, então existem $x, x_1 \in A$ tais que, $\varphi(x) = y$ e $\varphi(x_1) = y_1$ e então, $\varphi(x + x_1) = \varphi(x) + \varphi(x_1) = y + y_1$, assim $y + y_1 \in Im(\varphi)$. Também, $\varphi(xx_1) = \varphi(x)\varphi(x_1) = yy_1$, assim $yy_1 \in Im(\varphi)$, além disso $\varphi(1_A) = 1_B$. Logo, Im(φ) é subanel de B.

É fácil verificar que a aplicação $\theta : A/Nuc(\varphi) \longrightarrow Im(\varphi)$ dada por $\theta(a + Nuc(\varphi)) = \varphi(a)$ é bijetiva e um homomorfismo de anéis, portanto é um isomorfismo. ∎

1.2 A-Módulos

Estudaremos agora o conceito geral de A-Módulos, também tratado como Módulo sobre A, sendo A um anel com unidade, como na Definição 1.1.

Definição 1.6 *Um A-módulo à esquerda é um grupo abeliano aditivo M junto com uma aplicação:*

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \longrightarrow & M \\ (a,m) & \longmapsto & am \end{array};$$

satisfazendo:

1. $a(x+y) = ax + ay, \forall a \in A, x, y \in M;$
2. $(a+b)x = ax + bx, \forall a, b \in A, x \in M;$
3. $(ab)x = a(bx), \forall a, b \in A, x \in M;$
4. $1_A x = x, \forall x \in M.$

Exemplos:

1. Seja A um anel, A é um A-módulo à esquerda via multiplicação em A.
   Também se $I \lhd A$, então I é A-módulo.
2. Todo grupo abeliano G tem estrutura de $\mathbb{Z}$-módulo.

Definição 1.7 *Seja* $\varphi : M \longrightarrow N$ *uma aplicação onde* M, N *são A-módulos.* φ *será um homomorfismo de A-módulos se:*

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in M;$
2. $\varphi(ax) = a\varphi(x), \forall a \in A, x \in M.$

Lema 1.8 *O conjunto dos homomorfismos entre A-módulos* $\varphi, \psi : M \longrightarrow N$ *é um A-módulo com as operações:*

$\bullet(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x);$

$\bullet(a\varphi)(x) = a(\varphi(x))$ *para* $\forall a \in A, x \in M.$

Este A-módulo é denotado por $Hom_A(M, N)$.

Demonstração: Precisamos verificar as condições da Definição 1.6. Sejam $\varphi, \psi \in Hom_A(M, N)$, $a, b \in A$ e $x \in M$;

1. $(a(\varphi+\psi))(x) = a((\varphi+\psi)(x)) = a(\varphi(x)+\psi(x)) = a\varphi(x)+a\psi(x) = (a\varphi)(x)+(a\psi)(x) = (a\varphi + a\psi)(x)$;

2. $((a+b)\varphi)(x) = (a+b)(\varphi(x)) = a\varphi(x) + b\varphi(x) = (a\varphi)(x) + (b\varphi)(x) = (a\varphi + b\varphi)(x)$;

3. $((ab)\varphi)(x) = a(b(\varphi(x))) = (a(b\varphi))(x)$;

4. $(1_A\varphi)(x) = 1_A(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

■

Definição 1.9 *Um subgrupo aditivo M' de um A-módulo M é dito A-submódulo de M se for fechado para multiplicação por elementos de A.*

Definição 1.10 *Seja um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M \longrightarrow N$. Então definimos:*

1. $Nuc(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$;

2. $Im(\varphi) = \{n \in N \mid n = \varphi(m)$ *para algum* $m \in M\}$.

Lema 1.11 *Seja um homomorfismo de A-módulos $\varphi : M \longrightarrow N$, então temos que:*

1. $Nuc(\varphi)$ *é A-submódulo de M;*

2. $Im(\varphi)$ *é A-submódulo de N.*

Demonstração:

1. Sejam $m, m_1 \in Nuc(\varphi)$ e $l \in$ A, então, $\varphi(lm) = l(\varphi(m)) = l0 = 0$, assim $lm \in Nuc(\varphi)$. Também, $\varphi(m+m_1) = \varphi(m)+\varphi(m_1) = 0+0 = 0$, assim $m+m_1 \in Nuc(\varphi)$. Portanto $Nuc(\varphi)$ é um A-submódulo de M.

2. Sejam $n, n_1 \in Im(\varphi)$, então existem $m, m_1 \in M$ tais que, $\varphi(m) = n$ e $\varphi(m_1) = n_1$ e então, $\varphi(m + m_1) = \varphi(m) + \varphi(m_1) = n + n_1$, assim $n + n_1 \in Im(\varphi)$.

   Também, $\forall l \in$ A, temos, $ln = l\varphi(m) = \varphi(lm)$, assim $ln \in Im(\varphi)$. Portanto $Im(\varphi)$ é um A-submódulo de N.

■

1.3 Operações com A-módulos

Nesta seção, definiremos as principais operações com A-módulos. Vale ressaltar a importância do Produto Tensorial de A-módulos, para tanto teremos uma subseção exclusiva.

Definição 1.12 *Sejam M e N dois A-módulos, então $M \oplus N$ é o conjunto dos pares (x, y) com $x \in M, y \in N$. $M \oplus N$ será um A-módulo se definirmos as operações:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \forall x_1, x_2 \in M, y_1, y_2 \in N;$$

$$a(x, y) = (ax, ay), \forall a \in A, x \in M, y \in N.$$

Definição 1.13 *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de submódulos de M. Então:*

1. *$\sum M_i$ é o conjunto de todas as somas finitas $\sum x_i$, com $x_i \in M_i$ e $x_i = 0$ quase sempre, isto é, o conjunto $\{x_i \mid x_i \neq 0\}$ é finito;*

2. *$\bigcap M_i$ é a intersecção dos $M_i' s$;*

3. *$\prod_{i \in I} M_i$ é o conjunto de sequências $(x_i)_{i \in I}$ onde $x_i \in M_i$;*

4. *$\bigoplus_{i \in I} M_i$ é o subconjunto de $\prod_{i \in I} M_i$ formado pelos elementos que tem suporte finito, sendo que o suporte de uma sequência $(m_i)_{i \in I}$ é o conjunto $\{m_i \mid m_i \neq 0\}$.*

Definição 1.14 *Um A-módulo é dito livre se é isomorfo a um A-módulo da forma $\bigoplus_{i \in I} M_i$, onde cada $M_i \simeq A$. Um A-módulo livre é finitamente gerado se for isomorfo à soma direta, $A \oplus ... \oplus A$, de n cópias de A para um número natural n. Tal módulo será denotado por A^n.*

Definição 1.15 *Uma sequência de A-módulos e homomorfismos de A-módulos*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é exata em M_i se $Im(f_i) = Nuc(f_{i+1})$. Será exata se for exata em cada M_i.

Em particular temos:

1. $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ é exata $\Longleftrightarrow f$ é injetiva;

2. $M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata $\Longleftrightarrow g$ é sobrejetiva;

3. $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata $\Longleftrightarrow$ f é injetiva, g é sobrejetiva e $Im(f) = Nuc(g)$, daí g induz um isomorfismo de A-módulos $M/f(M') \simeq M''$. Tal sequência é chamada sequência exata curta.

1.3.1 Produto Tensorial de A-módulos

Nesta subseção vamos considerar o anel A comutativo e estudaremos uma operação muito importante entre A-módulos, que possui um tipo de propriedade universal: o Produto Tensorial. Durante nosso trabalho utilizaremos o Produto Tensorial somente sobre Corpos, por isso faremos essa restrição ao caso comutativo.

Definição 1.16 *Uma aplicação $f : M \times N \longrightarrow P$ com M, N e P sendo A-módulos, é dita A-bilinear de for linear em cada uma das coordenadas, isto é se $\forall x, x_1 \in M, y, y_1 \in N, a \in A$ tivermos:*

1. $f(x + x_1, y) = f(x, y) + f(x_1, y)$*;*

2. $f(x, y + y_1) = f(x, y) + f(x, y_1)$*;*

3. $f(ax, y) = f(x, ay) = af(x, y)$*.*

Definição 1.17 *Um A-módulo T é chamado de Produto Tensorial dos A-módulos M e N se qualquer aplicação A-bilinear $M \times N \longrightarrow P$ puder ser estendida de maneira única a uma aplicação A-linear $T \longrightarrow P, \forall$ A-módulo P. O Produto Tensorial T será denotado por $M \otimes_A N$.*

Ou seja, o produto tensorial é um A-módulo, com aplicação $\mu : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$, tal que dada qualquer aplicação A-bilinear de A-módulos $\varphi : M \times N \longrightarrow P$ existe único homomorfismo de A-módulos φ' que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[dr, dashed, "\varphi'"] & \\ M \times N \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\varphi"'] & P \end{tikzcd}$$

Teorema 1.18 *O produto tensorial existe e é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração: Unicidade: Supondo que exista o produto tensorial de M e N, digamos (T, g), vamos mostrar que é único a menos de isomorfismos. Vamos supor que exista (T', g') outro produto tensorial de M e N. Assim considerando a propriedade de (T,g) como produto tensorial temos a existência de um único homomorfismo de A-módulos $j : T \longrightarrow T'$ tal que $g' = jg$, ou seja, que faça o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "j"] & \\ M \times N \arrow[u, "g"] \arrow[r, "g'"'] & T' \end{tikzcd}$$

Porém, usando agora a propriedade universal de (T', g') como produto tensorial, temos que existe único homomorfismo de A-módulos, $j' : T' \longrightarrow T$ tal que $g = j'g'$, ou que faça o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[dr, dashed, "j'"] & \\ M \times N \arrow[u, "g'"] \arrow[r, "g"'] & T \end{tikzcd}$$

Assim, considerando o diagrama e o fato de que a extensão deve ser única:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "id_T"] & \\ M \times N \arrow[u, "g"] \arrow[r, "g"'] & T \end{tikzcd}$$

temos que $id_T = j'j$, mas do diagrama:

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[dr, dashed, "id_{T'}"] & \\ M \times N \arrow[u, "g'"] \arrow[r, "g'"'] & T' \end{tikzcd}$$

temos que $id_{T'} = jj'$. Assim j é isomorfismo com inversa j'. Segue então a unicidade.
Existência: Denote por C o A-módulo livre $A^{M\times N}$ e temos que os elementos de C são combinações lineares de elementos de $M \times N$ com coeficientes em A, isto é são da forma $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i), a_i \in A, x_i \in M, y_i \in N$.
Seja D o A-submódulo de C gerado pelos elementos dos seguintes tipos:

1. $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$;
2. $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$;
3. $a(x, y) - (ax, y)$ e $a(x, y) - (x, ay)$.

Definimos o A-módulo quociente T=C/D. Para cada elemento (x, y) da base $M \times N$ de C tome $x\otimes y$ denotando sua imagem em T via aplicação $C \longrightarrow C/D$ tal que $a \mapsto a+D, \forall a \in C$. Assim T é gerado como A-módulo por elementos da forma $x \otimes y$ e da definição dada acima teremos que:
$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$;
$x \otimes (y + y') = x \otimes y + xy'$;
$(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$.
Dessa maneira, $g : M \times N \longrightarrow T$ tal que $(x, y) \mapsto x \otimes y$ é A-bilinear.
Qualquer $f : M \times N \longrightarrow P$ se estende por linearidade a um homomorfismo de A-módulos $\overline{f} : C \longrightarrow P$. Em particular, se f é A-bilinear então pela definição, $\overline{f}$ se anula nos geradores de D, induzindo assim um homomorfismo de A-módulos $f' : T \longrightarrow P$ tal que $f'(x \otimes y) = f(x, y)$ e f' é unicamente definida por tal condição. ■

Teorema 1.19 (Propriedades do Produto Tensorial) *Continuemos com um anel comutativo A e sejam M, N e P A-módulos. Então existem únicos isomorfismos:*

1. *$M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$, tal que $x \otimes y \mapsto y \otimes x, \forall x \in M, y \in N$;*

2. *$(M \otimes N) \otimes P \longrightarrow M \otimes (N \otimes P)$, tal que $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z), \forall x \in M, y \in N, z \in P$;*

3. *$(M \oplus N) \otimes P \longrightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$, tal que $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z), \forall x \in M$, $y \in N, z \in P$;*

4. *$A \otimes M \longrightarrow M$, tal que $a \otimes x \mapsto ax, \forall a \in A, x \in M$.*

*Demonstração:*Para cada item temos que construir uma aplicação bilinear do produto $M \times N$ e usar a "propriedade universal" do Produto Tensorial.
Por exemplo, no primeiro item, basta considerar $M \times N \longrightarrow N \otimes M$ tal que $(x, y) \mapsto y \otimes x, \forall x \in M, y \in N$.
É trivial mostrar sua bilinearidade e assim ela induz o (único) isomorfismo desejado. ■

Se considerarmos um homomorfismo de anéis $\varphi : A \longrightarrow B$ e um B-módulo N então N herda uma estrutura de A-módulo se definirmos: $ax := \varphi(a)x, \forall a \in A, x \in N$.

Lema 1.20 *Se N é finitamente gerado como um B-módulo e B é finitamente gerado como um A-módulo via φ, então N é finitamente gerado como A-módulo.*

*Demonstração:*Suponha que $y_1, ..., y_n$ geram N como B-módulo e $x_1, ..., x_n$ geram B como A-módulo. Então os $m \times n$ elementos da forma $x_i y_j$ geram N como A-módulo. ■

1.4 Módulos Noetherianos

Nesta seção o anel A não é necessariamente comutativo. Todos os A-módulos são A-módulos à esquerda.

Definição 1.21 *Um A-módulo M é dito Noetheriano se todo A-submódulo de M for finitamente gerado.*

Vamos considerar o conjunto $\sum := \{M_i \mid M_i$ é A-submódulo de M$\}$, ordenado parcialmente com a relação $\subseteq$. Podemos estabelecer as seguintes condições:

1. Condição da Cadeia Crescente: Toda sequência crescente $M_1 \subseteq ... \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq ...$ em $\sum$ é estacionária.

2. Condição Maximal: Todo subconjunto não vazio de $\sum$ tem elemento maximal.

Teorema 1.22 *Sejam $\sum$ e $\subseteq$ como acima, então a Condição da Cadeia Crescente e a Condição Maximal são equivalentes.*

Demonstração: Vamos supor que a Condição Maximal não seja satisfeita, então existe $N \subseteq \sum$ que não possui elemento maximal e então podemos induzir uma sequência crescente não estacionária em N.
Agora, considere que qualquer sequência $(M_i)_{i\geq 1}$ tem elemento maximal, digamos M_n, então para qualquer $r > n$ teremos $M_r = M_n$. ■

Teorema 1.23 *M é um A-módulo Noetheriano $\Longleftrightarrow$ M satisfaz as condições equivalentes acima.*

Demonstração: Vamos supor que M é um A-módulo Noetheriano e consideraremos uma cadeia crescente $M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$ de A-submódulos de M. Seja $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = N$ e sabemos que, construído dessa forma, N é A-submódulo de M, que por hipótese é Noetheriano, ou seja, N é finitamente gerado.
Então suponha $N = Ax_1 + ... + Ax_r, x_i \in N$. Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = N$, então existem $M_{n_1}, ..., M_{n_r}$ tais que $x_i \in M_{n_i}$, considerando $n_0 = max\{n_1, ..., n_r\}$, cada $x_i \in M_{n_0}$ e portanto $N \subseteq M_{n_0}$ tornando a sequência $M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_{n_0} = M_{n_{0+1}} = ...$ estacionária.
Vamos agora supor que N é um A-submódulo de M e $\sum$ o conjunto de todos os A-submódulos finitamente gerados de N. Temos que $\sum$ não é vazio, visto que $0 \in \sum$, além disso, por hipótese $\sum$ tem elemento maximal, digamos N_0.
Se $N_0 \neq N$, considere $N_0 + Ax$ com $x \in N \setminus N_0$, que será finitamente gerado e N_0 é A-submódulo próprio de $N_0 + Ax$, contradição pois N_0 é maximal. Logo $N = N_0$ e assim, finitamente gerado. ■

Proposição 1.24 *Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de A-módulos e homomorfismos. Então M é Noetheriano se e somente se M' e M'' são Noetherianos.*

Demonstração: Vamos supor que M seja Noetheriano. Seja $M'_1 \subseteq M'_2 \subseteq ...$ uma cadeia crescente de A-submódulos de M', então $\alpha(M'_1) \subseteq \alpha(M'_2) \subseteq ...$ é uma cadeia crecente de A-submódulos de M e portanto deve estacionar, digamos em $n \in \mathbb{N}$, daí $\alpha(M'_n) = \alpha(M'_{n+1}) = ...$ Como α é injetiva e $M'_n \subseteq M'_{n+1} \subseteq ...$ teremos que $M'_n = M'_{n+1} = ...$, então M' é

Noetheriano.
Agora seja $M_1'' \subseteq M_2'' \subseteq ...$ uma cadeia crescente de A-submódulos de M'', então $\beta^{-1}(M_1') \subseteq \beta^{-1}(M_2') \subseteq ...$ é cadeia crescente de A-submódulos de M e portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\beta^{-1}(M_n'') = \beta^{-1}(M_{n+1}'') = ...$ e, como β é sobrejetiva então $M_r'' = \beta(\beta^{-1}(M_r'')), \forall r \in \mathbb{N}$, assim $M_1'' \subseteq M_2'' \subseteq ... \subseteq M_n'' = M_{n+1}'' = ...$, portanto M'' é Noetheriano.
Vamos supor agora que M'' e M' são Noetherianos e considerar uma cadeia crescente $M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$ de A-submódulos de M. Então $(\alpha^{-1}(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\beta(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ são cadeias crescentes. Para algum n suficientemente grande, ambas devem estacionar e segue que $M_1 \subseteq M_2 \subseteq ... \subseteq M_n = M_{n+1} = ...$ e que M é Noetheriano. ■

Corolário 1.25 *Se M_i são A-módulos Noetherianos para $1 \leq i \leq n$, então $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ também é Noetheriano.*

*Demonstração:*Vamos usar a indução sobre n e a Proposição anterior.
Para $n = 2$ temos a sequência exata $0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi} M_1 \longrightarrow 0$ e a Proposição 1.24 nos dá que se M_1 e M_2 são Noetherianos então $M_1 \oplus M_2$ é Noetheriano. Supondo que $M_1, ..., M_{n-1}, M_n$ e $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ são A-módulos Noetherianos ($n \geq 3$) então considerando a sequência exata $0 \longrightarrow M_n \xrightarrow{i} \bigoplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{\pi} \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$ temos, novamente pela Proposição 1.24, que $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ é Noetheriano. ■

1.4.1 Anéis Noetherianos

Definição 1.26 *Um anel A é denominado Noetheriano à esquerda se é Noetheriano como um A-módulo à esquerda, ou seja, se toda sequência crescente de ideais à esquerda $M_1 \subseteq ... \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq ...$ é estacionária (satisfaz a Condição da Cadeia Crescente para seus Ideais à esquerda).*

Proposição 1.27 *Sejam A um anel Noetheriano à esquerda e M um A-módulo à esquerda finitamente gerado. Então M é Noetheriano (à esquerda).*

*Demonstração:*Como M é um A-módulo finitamente gerado, vamos considerar $m_1, ..., m_n \in M$ tais que $M = Am_1 + ... + Am_n$. Então

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & A^n & \longrightarrow & M \\ & (a_1, ..., a_n) & \mapsto & a_1m_1 + ... + a_nm_n \end{array}$$

é um homomorfismo de A-módulos sobrejetor, então $M \simeq A^n/Nuc(\varphi)$. Considerando a sequência exata $0 \longrightarrow Nuc(\varphi) \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$, sendo A^n Noetheriano pelo Corolário 1.25, então pela Proposição 1.24 temos que $Nuc(\varphi)$ e M são Noetherianos. ■

Exemplo: Seja A o anel de polinômios de número infinito de variáveis comutativas $\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n, ...] = \cup_{i\geq 1}\mathbb{R}[x_1, ..., x_i]$, onde $\mathbb{R}$ onde são os números reais e com as operações induzidas pelas operações em $\mathbb{R}[x_1, x_2, ..., x_n, ...]$. Seja I_j o ideal gerado pelos elementos $x_1, ..., x_j$. Entao $I_1 \subset I_2 \subset .... \subset I_j \subset I_{j+1} \subset ...$ é uma cadeia de ideais que não estabiliza. Entao A é um anel comutativo que não é anel Noetheriano.

Proposição 1.28 *Seja A um anel comutativo e Noetheriano e I um ideal de A. Então A/I é um anel Noetheriano.*

*Demonstração:*Basta considerar a sequência exata de A-módulos

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0 .$$

Como A é Noetheriano, A/I é A-módulo Noetheriano e assim A/I é um anel Noetheriano. ■

Proposição 1.29 *Sejam A um anel comutativo e Noetheriano, B um anel qualquer e $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis. Então B é um anel Noetheriano.*

*Demonstração:*Considere o ideal $Nuc(\varphi)$ e a Proposição 1.28 nos dá que $A/Nuc(\varphi)$ é um anel Noetheriano, como φ é sobrejetor, o Teorema dos Isomorfismos implica que $B \simeq A/Nuc(\varphi)$, sendo então Noetheriano. ■

Proposição 1.30 *Seja A um subanel de um anel comutativo B, suponha que A seja Noetheriano e que B seja finitamente gerado como um A-módulo, então B é um anel Noetheriano.*

*Demonstração:*A Proposição 1.27 nos dá que B é Noetheriano como A-módulo, logo, pela definição 1.26 segue que B é um Anel Noetheriano, pois ideais à esquerda de B são A-submódulos de B. ■

Teorema 1.31 (Base de Hilbert) *Seja A um anel comutativo Noetheriano e então o anel polinomial $A[x]$ é Noetheriano.*

*Demonstração:*Seja $J \neq 0$ um ideal em $A[x]$ e teremos que os coeficientes dos líderes de polinômios não nulos em J junto com o 0 formam um ideal I em A e, como A é Noetheriano, I deve ser finitamente gerado. Vamos supor $\{a_1, ..., a_n\}$ o conjunto gerador de I, então para cada $i = 1, ..., n$ existe um polinômio $f_i \in A[x]$ da forma $f_i = a_i x^{r_i} +$ termos de graus menores. Considere $r = max_{i=1}^{n} r_i$ e $\{f_1, ..., f_n\}$ gera um ideal $J' \subseteq J$ em $A[x]$.
Tome um elemento f de J, $f = ax^m +$ termos de graus menores e temos que $a \in I$. Caso $m \geq r$ temos $a = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i, u_i \in A$, então $f - \sum_{i=1}^{n} u_i f_i x^{m-r_i} \in J$ e tem grau menor que m. Continuando dessa maneira, podemos subtrair elementos de J' de f até obtermos um polinômio g de grau menor que r, e teremos que $f = g + h$ com $h \in J'$. Então $g = f - h \in J$.
Seja M o A-módulo gerado por $1, x, ..., x^{r-1}$ então provamos que $J = (J \cap M) + J'$. Agora M é um A-módulo finitamente gerado, assim Noetheriano, segue que $J \cap M$ também é finitamente gerado como A-módulo.
Se $g_1, ..., g_m$ gera $J \cap M$ segue que $\{g_1, ..., g_m, f_1, ..., f_n\}$ geram J, ou seja, J é finitamente gerado e $A[x]$ é Noetheriano. ∎

Corolário 1.32 *Se A é um anel comutativo Noetheriano, então o anel polinomial $A[x_1, ..., x_n]$ é Noetheriano.*

*Demonstração:*Vamos fazer a indução sobre n.
Para $n = 1$ o *Teorema da Base de Hilbert* nos dá que $A[x_1]$ é Noetheriano. Para o passo indutivo, basta olhar $A[x_1, ..., x_n]$ como $(A[x_1, ..., x_{n-1}])[x_n]$. ∎

Capítulo 2

Álgebras de Lie

Neste capítulo vamos estudar a teoria básica de Álgebras de Lie, como sua definição e construção, homomorfismos e módulos, álgebra universal envelopante, o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt e álgebras de Lie livres, que serão ingredientes importantíssimos para a demonstração do nosso Teorema principal, o qual será enunciado no próximo capítulo.

2.1 Álgebras de Lie

Vamos iniciar definindo álgebra não necessariamente comutativa ou associativa e a partir disto, definiremos a álgebra de Lie.

Definição 2.1 *Uma álgebra (não necessariamente associativa) é um espaço vetorial $\mathcal{A}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ onde é definida uma operação bilinear denominada "produto", da forma:*

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & (x, y) & \longmapsto & x * y \end{array}$$

tal que, $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{K}$, temos:

1. $(x_1 + x_2) * y = x_1 * y + x_2 * y$,
   $x * (y_1 + y_2) = x * y_1 + x * y_2$,

2. $\alpha(x * y) = (\alpha x) * y = x * (\alpha y)$.

Definição 2.2 *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ é uma álgebra não associativa, cuja operação produto satisfaz:*

1. $x * x = 0, \forall\ x \in \mathfrak{L}$,

2. *Identidade de Jacobi:* $(x * y) * z + (y * z) * x + (z * x) * y = 0\ ,\ \forall\ x, y, z \in \mathfrak{L}$.

Notação: Sempre que $\mathfrak{L}$ for álgebra de Lie, denotaremos seu produto bilinear por [,] , ou seja, teremos:

$$\begin{array}{rccc} [,]: & \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{L} \\ & (x, y) & \longmapsto & [x, y] \end{array}$$

1. $[x,x] = 0, \forall x \in \mathfrak{L}$,

2. Identidade de Jacobi: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0\ ,\ \forall x, y, z \in \mathfrak{L}$.

Definição 2.3 *Uma subálgebra $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{L}$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{L}$ fechado para a operação produto, assim $\forall\ x, y \in \mathfrak{S}$, temos $[x, y] \in \mathfrak{S}$. Tal subálgebra será denotada por $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{L}$.*

2.2 Construção de uma Álgebra de Lie a partir de uma Álgebra Associativa

Definição 2.4 *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é dita associativa se seu produto respeita a Lei da Associatividade: $(x * y) * z = x * (y * z), \forall\ x, y, z \in \mathcal{A}$.*

Exemplo: Lin(**V**,**V**), as transformações lineares de um espaço vetorial **V** em **V** sobre um corpo $\mathbb{K}$, munida da operação composição é uma álgebra associativa.

Tomemos uma álgebra associativa $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ e definimos o *Produto de Lie* ou *Comutador* como:

$$[x,y] = x * y - y * x, \forall\ x, y \in \mathcal{A}.$$

Lema 2.5 *$\mathcal{A}$ munida com tal produto é uma álgebra de Lie e será denotada por $\mathcal{A}^{(-)}$.*

Demonstração: Consideremos $x, y, z \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos que [,] é bilinear. De fato,

1. $[x+y,z] = (x+y)*z-z*(x+y) = x*z+y*z-z*x-z*y = (x*z-z*x)+(y*z-z*y) = [x,z] + [y,z]$ *(análogo na outra coordenada).*

2. $\alpha[x,y] = \alpha(x*y - y*x) = \alpha(x*y) - \alpha(y*x) = [\alpha x, y] = [x, \alpha y]$.

3. Também $[\ ,\ ]$ é Produto de Lie, pois;
   • $[x,x] = x*x - x*x = 0$
   • $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [z,x],y] = (x*y-y*x)*z - z*(x*y-y*x) + (y*z-z*y)*x - x*(y*z-z*y) + (z*x-x*z)*y - y*(z*x-x*z) = 0.$ ■

2.3 Representações e $\mathfrak{L}$-Módulos

Vamos agora estudar um recurso muito utilizado nos estudos em Álgebra: as Representações. Trata-se de "representar"os objetos que estamos trabalhando por outros que já conhecemos e temos propriedades que facilitam o trabalho, como por exemplo, a Álgebra das Transformações Lineares. Porém, para tal, é necessário garantir que o novo objeto preserva a estrutura do inicial, garantia essa nos dada pela noção de *Homomorfismo.* Além disso, vamos introduzir a noção de $\mathfrak{L}$-Módulo. Na subseção 2.4 vamos estudar álgebras universais envelopantes $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ e verificar que $\mathfrak{L}$-módulos podem ser vistos como $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$-módulos usando a teoria de módulos sobre anéis associativos do Capítulo 1.

Definição 2.6 *Sejam $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$ duas álgebras de Lie. Um homomorfismo de álgebras de Lie é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\varphi : \mathfrak{L}_1 \longrightarrow \mathfrak{L}_2$, tal que $\forall\ x, y \in \mathfrak{L}_1$:*

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Lema 2.7 *(Algumas propriedades dos homomorfismos:) Seja $\varphi : \mathfrak{L}_1 \longrightarrow \mathfrak{L}_2$ um homomorfismo de álgebras de Lie, temos então que:*

1. $\varphi(0_{\mathfrak{L}_1}) = 0_{\mathfrak{L}_2}$;

2. $\varphi(-(l_1)) = -\varphi(l_1)$.

Demonstração: Sejam $0_{\mathfrak{L}_1}$, $0_{\mathfrak{L}_2}$ os elementos neutros de $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$, respectivamente e $-l_1$ o elemento oposto de $l_1 \in \mathfrak{L}_1$. Então temos;

1. $\varphi(0_{\mathfrak{L}_1}) = \varphi([0_{\mathfrak{L}_1}, 0_{\mathfrak{L}_1}]) = [\varphi(0_{\mathfrak{L}_1}), \varphi(0_{\mathfrak{L}_1})] = 0_{\mathfrak{L}_2}$;

2. $\varphi(l_1) + \varphi(-(l_1)) = \varphi(l_1 + (-(l_1)) = \varphi(0_{\mathfrak{L}_1}) = 0_{\mathfrak{L}_2}$. Daí, $\varphi(-(l_1)) = -\varphi(l_1)$. ■

Definição 2.8 *Uma representação de $\mathfrak{L}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie φ de $\mathfrak{L}$ em $Lin(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})^{(-)}$, assim $\forall\ l_1,\ l_2 \in \mathfrak{L}$, $x \in \boldsymbol{V}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ temos:*

1. $\varphi(l_1 + l_2)(x) = \varphi(l_1)(x) + \varphi(l_2)(x)$;
2. $\varphi(\alpha l_1)(x) = \alpha\varphi(l_1)(x)$;
3. $\varphi([l_1, l_2])(x) = \varphi(l_1)\varphi(l_2)(x) - \varphi(l_2)\varphi(l_1)(x)$.

O espaço vetorial $\boldsymbol{V}$ é dito espaço de representação de $\mathfrak{L}$.

Exemplo: Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie. Então

$$\begin{array}{rcccccl} ad: & \mathfrak{L} & \longrightarrow & Lin(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) & & \\ & l & \longmapsto & ad_l : \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{L} \\ & & & m & \longmapsto & [l,m] \end{array}$$

é uma representação de $\mathfrak{L}$ sobre o espaço vetorial $\mathfrak{L}$, chamada de *Representação Adjunta.*

Definição 2.9 *Um $\mathfrak{L}$-módulo à esquerda é um espaço vetorial $\boldsymbol{M}$ sobre $\mathbb{K}$ com uma operação:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L} \times \boldsymbol{M} & \longrightarrow & \boldsymbol{M} \\ (l, m) & \longmapsto & lm \quad , satisfazendo: \end{array}$$

1. $(l_1 + l_2)m = (l_1 m) + (l_2 m), \forall\ l_1, l_2 \in \mathfrak{L}$ *e* $m \in \boldsymbol{M}$;
2. $l(m_1 + m_2) = (lm_1) + (lm_2), \forall\ l \in \mathfrak{L}$ *e* $m_1, m_2 \in \boldsymbol{M}$;
3. $[l_1, l_2]m = l_1(l_2 m) - l_2(l_1 m), \forall\ l_1, l_2 \in \mathfrak{L}$ *e* $m \in \boldsymbol{M}$;
4. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}, l \in \mathfrak{L}, m \in M$, *então* $(\alpha l)m = \alpha(lm)$.

A operação será chamada de $\mathfrak{L}$-ação e do mesmo modo podemos definir um $\mathfrak{L}$-módulo à direita.

Exemplo: Tomando-se $\mathbf{M} = \mathfrak{L}$ (olhando a álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ como um espaço vetorial), temos um $\mathfrak{L}$-Módulo com $\mathfrak{L}$-ação dada pelo produto de Lie à esquerda,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L} \times \mathbf{M} & \longrightarrow & \mathbf{M} \\ (l, m) & \longmapsto & [l,m] \quad , \ produto\ em\ \mathfrak{L}. \end{array}$$

Definição 2.10 *Seja $\boldsymbol{M}$ um $\mathfrak{L}$-módulo. Um subespaço vetorial $\boldsymbol{S}$ de $\boldsymbol{M}$ é um $\mathfrak{L}$-submódulo de $\boldsymbol{M}$ se for um $\mathfrak{L}$-módulo com respeito às suas operações, isto é, se a $\mathfrak{L}$-ação de $\boldsymbol{M}$ restrita a $\boldsymbol{S}$ ainda for uma $\mathfrak{L}$-ação.*

Definição 2.11 *Sejam $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ dois $\mathfrak{L}$-módulos. Dizemos que uma aplicação $\mathbb{K}$-linear $\varphi : \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{N}$ é um homomorfismo de $\mathfrak{L}$-módulos se $\varphi(lm) = l\varphi(m)$ para $\forall l \in \mathfrak{L}, m \in \boldsymbol{M}$.*

Lema 2.12 *Seja $\varphi : \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{N}$ um homomorfismo de $\mathfrak{L}$-módulos, então:*

1. *$Nuc(\varphi) = \{m \in \boldsymbol{M} \mid \varphi(m) = 0\}$ é um $\mathfrak{L}$-submódulo de $\boldsymbol{M}$;*

2. *$Im(\varphi) = \{n \in \boldsymbol{N} \mid n = \varphi(m)\}$ para algum $m \in \boldsymbol{M}\}$ é um $\mathfrak{L}$-submódulo de $\boldsymbol{N}$.*

Demonstração:

1. Sejam $m, m_1 \in Nuc(\varphi)$ e $l \in \mathfrak{L}$, então, $\varphi(lm) = l(\varphi(m)) = l0 = 0$, assim $lm \in Nuc(\varphi)$. Também, $\varphi(m+m_1) = \varphi(m)+\varphi(m_1) = 0+0 = 0$, assim $m+m_1 \in Nuc(\varphi)$. Portanto $Nuc(\varphi)$ é um $\mathfrak{L}$-submódulo de $\mathbf{M}$.

2. Sejam $n, n_1 \in Im(\varphi)$, então existem $m, m_1 \in \mathbf{M}$ tais que, $\varphi(m) = n$ e $\varphi(m_1) = n_1$ e então, $\varphi(m + m_1) = \varphi(m) + \varphi(m_1) = n + n_1$, assim $n + n_1 \in Im(\varphi)$.

   Também, $\forall l \in \mathfrak{L}$ temos $ln = l\varphi(m) = \varphi(lm)$, assim $ln \in Im(\varphi)$. Portanto $Im(\varphi)$ é um $\mathfrak{L}$-submódulo de $\mathbf{N}$. ∎

Definição 2.13 *Sejam $\boldsymbol{M}$ um $\mathfrak{L}$-módulo e $\boldsymbol{N}$ um $\mathfrak{L}$-submódulo de $\boldsymbol{M}$. Então*

$$\boldsymbol{M}/\boldsymbol{N} := \{\overline{m} = m + N \mid m \in \boldsymbol{M}\}$$

é o conjunto das classes laterais de $\boldsymbol{N}$ em $\boldsymbol{M}$.
(Assim $\overline{m_1} = \overline{m_2} \Leftrightarrow m_1 + \boldsymbol{N} = m_2 + \boldsymbol{N} \Leftrightarrow m_1 - m_2 \in \boldsymbol{N}$)

Lema 2.14 *$\boldsymbol{M}/\boldsymbol{N}$ é $\mathfrak{L}$-módulo com operações induzidas pelas operações de M e $\pi : M \longrightarrow N$ definida por $\pi(m) = \overline{m} = m + N$ é homomorfismo de $\mathfrak{L}$-módulos.*

Demonstração: Sejam $m, m_1 \in \mathbf{M}$ e $\overline{m}, \overline{m_1} \in M/N$. Então:

· $\overline{m_1} = \overline{m_2} \Rightarrow m_1 + N = m_2 + N \Rightarrow m_1 - m_2 \in N \Rightarrow l(m_1 - m_2) \in N \Rightarrow lm_1 - lm_2 \in N \Rightarrow lm_1 + N = lm_2 + N \Rightarrow \overline{lm_1} = \overline{lm_2}$.

Analogamente, se $\overline{m_1} = \overline{m_2}, \overline{n_1} = \overline{n_2} \Rightarrow \overline{m_1 + n_1} = \overline{m_2 + n_2}$, portanto as seguintes operações de $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ induzidas pelas operações de $\mathbf{M}$ são bem definidas:

· $\overline{m} + \overline{m_1} = (m + \mathbf{N}) + (m_1 + \mathbf{N}) = (m + m_1) + \mathbf{N} = \overline{m + m_1} \in \mathbf{M}/\mathbf{N}$. Também,

· $l\overline{m} = l(m + \mathbf{N}) = (lm) + \mathbf{N} = \overline{lm} \in \mathbf{M}/\mathbf{N}, \forall l \in \mathfrak{L}$. ∎

Definição 2.15 *Um subespaço vetorial* $\boldsymbol{I}$ *de* $\mathfrak{L}$ *será chamado de ideal de* $\mathfrak{L}$ *se* $\forall\ l \in \mathfrak{L}$, $[l, I] \subseteq \boldsymbol{I}$. *Observamos que numa álgebra de Lie,* $[x, y] = -[y, x]$ *para* $\forall x, y \in \mathfrak{L}$, *portanto* $[l, I] \subseteq I$ *implica* $[I, l] \subseteq I$.

2.4 Álgebras Universais Envelopantes

Considerando uma álgebra de Lie $\mathfrak{L}$, construiremos uma álgebra associativa $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ que "contém" $\mathfrak{L}$ (no sentido de que $\mathfrak{L}$ está mergulhada), de forma que toda representação de $\mathfrak{L}$ se estende a uma representação de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ e $\mathfrak{L}$ é subálgebra de Lie de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})^{(-)}$.

Definição 2.16 *Seja* $\mathfrak{L}$ *uma álgebra de Lie . Um par* $(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}), i)$, *onde* $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ *é uma álgebra associativa e* $i : \mathfrak{L} \to (\mathfrak{U}(\mathfrak{L}))^{(-)}$ *é um homomorfismo de álgebras de Lie, é dito Álgebra Universal Envelopante de* $\mathfrak{L}$ *se dada qualquer álgebra associativa* $\mathcal{A}$ *e um homomorfismo de álgebras de Lie* $\theta : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathcal{A}^{(-)}$, *existe único homomorfismo (de álgebras associativas)* $\theta' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathcal{A}$ *tal que* $\theta = \theta' i$; *isto é, o diagrama abaixo é comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \arrow[dr, dashed, "\theta'"] & \\
\mathfrak{L} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\theta"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Observação: Vamos demonstrar na Seção 2.5 que i é inclusão, justificando a notação acima.

Assim, dada qualquer representação $\theta : \mathfrak{L} \longrightarrow (Lin(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}))^{(-)}$ existirá único homomorfismo de álgebras associativas $\theta' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \longrightarrow Lin(\mathfrak{L}, \mathfrak{L})$ que fará comutar o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \arrow[dr, dashed, "\theta'"] & \\
\mathfrak{L} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\theta"'] & Lin(\mathfrak{L}, \mathfrak{L})
\end{tikzcd}$$

Vamos escrever simplesmente álgebra universal para a álgebra universal envelopante.

Teorema 2.17 (Propriedades da Álgebra Universal) *Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie e $(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}), i)$ uma álgebra universal de $\mathfrak{L}$. Então:*

1. *Cada duas álgebras universais $(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}), i)$ e $(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}), \theta)$ de $\mathfrak{L}$ são isomorfas.*
2. *$\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ é gerada por $i(\mathfrak{L})$ como álgebra associativa.*
3. *Se $\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{L}_1$ são duas álgebras de Lie tais que existe $\alpha : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}_1$, um homomorfismo de álgebras de Lie, então existe único $\alpha' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{L}_1)$, homomorfismo de álgebras associativas entre suas álgebras universais que estende α.*
4. *Sejam $\boldsymbol{I}$ um ideal em $\mathfrak{L}$ e $\boldsymbol{R}$ o ideal em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ gerado por $i(\boldsymbol{I})$. Então $j : \mathfrak{L}/\boldsymbol{I} \longrightarrow (\mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\boldsymbol{R})^{(-)}$, tal que $l + \boldsymbol{I} \longmapsto i(l) + \boldsymbol{R}, \forall\ l \in \mathfrak{L}$, é homomorfismo de álgebras de Lie e $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\boldsymbol{R}$ é álgebra universal de $\mathfrak{L}/\boldsymbol{I}$.*
5. *Existe um único homomorfismo de álgebras associativas:*

$$\begin{array}{rccc} \delta : & \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) & \longrightarrow & \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \\ & i(a) & \longmapsto & i(a) \otimes 1 + 1 \otimes i(a) \end{array}, \forall\ a \in \mathfrak{L}.$$

*Demonstração:*Vamos considerar $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie, então;

1. Sejam $(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}), i)$ e $(\mathfrak{B}(\mathfrak{L}), \theta)$ duas álgebras universais de $\mathfrak{L}$. No diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \arrow[dr, dashed, "i'"] & \\ \mathfrak{L} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\theta"'] & \mathfrak{B}(\mathfrak{L}) \end{tikzcd}$$

temos que, das propriedades universais de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ e $\mathfrak{B}(\mathfrak{L})$ seguem respectivamente, que existem únicos $i' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \to \mathfrak{B}(\mathfrak{L})$ tal que $\theta = i'i$ e $j' : \mathfrak{B}(\mathfrak{L}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ tal que $i = j'\theta$. Mostremos que i' é isomorfismo com inversa j'. Para isso considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}(\mathfrak{L}) \arrow[dr, dashed, "i'j'"] & \\ \mathfrak{L} \arrow[u, hook, "\theta"] \arrow[r, "\theta"'] & \mathfrak{B}(\mathfrak{L}) \end{tikzcd}$$

e como $\mathfrak{B}(\mathfrak{L})$ tem a propriedade universal e $id_{\mathfrak{B}(\mathfrak{L})}$ faz comutar o diagrama, segue da unicidade que $i'j' = id_{\mathfrak{B}(\mathfrak{L})}$. Analogamente, $j'i' = id_{\mathfrak{U}(\mathfrak{L})}$. Portanto, i' é isomorfismo com inversa, j' e $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{B}(\mathfrak{L})$.

2. Sejam $\mathfrak{B}$:=subálgebra associativa de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ gerada por $i(\mathfrak{L})$ e α a inclusão de $\mathfrak{B}$ em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$. Seja $i' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathfrak{B}$ o único homomorfismo de álgebras associativas tal que $i'i = i$. Então, $\alpha i' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ e o diagama abaixo será comutativo,

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \arrow[dr, dashed, "i'"] \arrow[drr, dashed, "\alpha i'"] & & \\
\mathfrak{L} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, hook, "i"'] & \mathfrak{B} \arrow[r, hook, "\alpha"'] & \mathfrak{U}(\mathfrak{L})
\end{tikzcd}$$

Considerando o diagrama comutativo;

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \arrow[dr, dashed, "\alpha i'"] & \\
\mathfrak{L} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, hook, "\alpha i"'] & \mathfrak{U}(\mathfrak{L})
\end{tikzcd}$$

e pela unicidade da extensão de αi temos que $\alpha i' = id_{\mathfrak{U}(\mathfrak{L})}$. Então α é isomorfismo com inverso i' e $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$.

3. Sejam $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$ duas álgebras de Lie com $(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}_1), i_1)$ e $(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}_2), i_2)$ suas respectivas álgebras universais e $\alpha : \mathfrak{L}_1 \to \mathfrak{L}_2$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Assim, $i_2\alpha : \mathfrak{L}_1 \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{L}_2)^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie e daí existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\alpha' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L}_1) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{L}_2)$ tal que $\alpha' i_1 = i_2\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}(\mathfrak{L}_1) \arrow[r, dashed, "\alpha'"] & \mathfrak{U}(\mathfrak{L}_2) \\
\mathfrak{L}_1 \arrow[u, hook, "i_1"] \arrow[ur, "i_2\alpha"] \arrow[r, "\alpha"'] & \mathfrak{L}_2 \arrow[u, hook, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

4. Para mostrar que j é homomorfismo de álgebras de Lie, basta considerar o homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{L} \longrightarrow (\mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\mathbf{R})^{(-)}$ tal que, $l \longmapsto i(l) + \mathbf{R}, \forall\ l \in \mathfrak{L}$ e observar que $i(\mathbf{I}) \subseteq \mathbf{R}$, então $\varphi(\mathbf{I}) = 0$, induzindo assim o homomorfismo j de álgebras de Lie .
   Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa qualquer e $\theta : \mathfrak{L}/\mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{A}^{(-)}$ um homomorfismo de álgebras de Lie.
   Considerando a projeção canônica $\pi : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{L}/\mathbf{I}$ temos que $\theta\pi : \mathfrak{L} \longrightarrow A^{(-)}$ é homomorfismo de álgebras de Lie (por se tratar de composta de homomorfismos), e pela propriedade universal de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ segue que existe $(\theta\pi)' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathcal{A}$ homomorfismo de álgebras associativas tal que $\theta\pi = (\theta\pi)'i$.
   Temos assim que $\mathbf{I} \subseteq Nuc(\theta\pi)$ e daí $\mathbf{R} \subseteq Nuc(\theta\pi)'$, o que induz o homomorfismo de álgebras associativas $\theta' : \mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{A}$, onde $u + \mathbf{R} \longmapsto (\theta\pi)'(u), \forall u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ e temos que $\theta(l+\mathbf{I}) = (\theta\pi)(l) = (\theta\pi)'i(l)$ e também $\theta' j(l+\mathbf{I}) = \theta'(i(l)+\mathbf{R}) = (\theta\pi)'i(l) = \theta(l+\mathbf{I})$, daí $\theta' j = \theta$.
   Precisamos mostrar que θ' é único. Mas isto segue do item (2) deste teorema observando o fato que $\theta'(l + I) = i(l) + R, \forall l + I \in \mathfrak{L}/I$, ou seja, $j(\mathfrak{L}/I)$ gera $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})/R$ como $\mathbb{K}$-álgebra associativa.

5. Basta considerar o homomorfismo de álgebras de Lie $\delta_1 : \mathfrak{L} \longrightarrow (\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L}))^{(-)}$, tal que $a \longmapsto i(a) \otimes 1 + 1 \otimes i(a)$ e observar que δ é o homomorfismo dado pela propriedade universal.

■

2.5 Construindo a Álgebra Universal Envelopante

Nesta seção, vamos construir uma álgebra universal envelopante $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ a partir de uma álgebra de Lie $\mathfrak{L}$. De acordo com o item(1) do Teorema 2.17, que trata da unicidade da álgebra universal, teremos construído "**a**" Álgebra Universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ de $\mathfrak{L}$.

Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie, porém vamos considerá-la como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e assim podemos tomar a álgebra tensorial $\mathfrak{T}$, que é definida como:

$$\mathfrak{T} = 1\mathbb{K} \oplus \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^2 \oplus \mathfrak{L}^3 \oplus ... \oplus \mathfrak{L}^i \oplus ...\ , \text{ com } \mathfrak{L}^i = \mathfrak{L} \otimes ... \otimes \mathfrak{L},\ i \text{ vezes.}$$

Nesta seção o produto tensorial é sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\mathfrak{L}^i$ por definição é $\mathfrak{L}^{i-1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{L}$.

O produto (tensorial) em $\mathfrak{T}$ é dado sobre os tensores puros por:

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_i).(y_1 \otimes ... \otimes y_j) = x_1 \otimes ... \otimes x_i \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_j.$$

Definimos $\mathbf{R}$ o ideal em $\mathfrak{T}$ gerado por todos os elementos da forma: $[a,b] - a \otimes b + b \otimes a,\ a,b \in \mathfrak{L}$, e tomemos $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}/\mathbf{R}$ e i a restrição do homomorfismo canônico de $\mathfrak{T}$ em $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^1$, $i : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{U}$, tal que, $l \longmapsto l + \mathbf{R}$. Assim, para quaisquer $a, b \in \mathfrak{L}$:

$i([a,b]) = [a,b] + R = (a \otimes b + b \otimes a) + R = i(a)i(b) - i(b)i(a) = [i(a), i(b)]$, portanto $i : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{U}^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

É importante observar que dessa maneira temos $[a,b] = ab - ba$ em $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}/\mathbf{R}, \forall\ a,b \in i(\mathfrak{L})$. Construída a álgebra $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}/\mathbf{R}$, vamos mostrar que satisfaz a condição universal.

Teorema 2.18 *$\mathfrak{U} = \mathfrak{T}/\boldsymbol{R}$ é álgebra universal de $\mathfrak{L}$.*

Demonstração: Antes de começar a demonstração, vamos lembrar a propriedade que caracteriza a álgebra tensorial: para qualquer $\mathbb{K}$-álgebra associativa $\mathcal{A}$, cada $\theta : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathcal{A}$, homomorfismo de espaços vetoriais, pode ser estendido a um único homomorfismo de álgebras associativas $\widetilde{\theta} : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ que torne o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{T} \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\theta}"] & \\
\mathfrak{L} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\theta"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Seja $\{u_j\}_{j \in J}$ uma base para $\mathfrak{L}$ como espaço vetorial. Os "monômios de grau n" $\{u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_n}\}_{j_i \in J}$ formam uma base para $\mathfrak{L}^n = \mathfrak{L} \otimes ... \otimes \mathfrak{L}$, n vezes, e $u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_n} = u_{k_1} \otimes ... \otimes u_{k_n} \Leftrightarrow j_i = k_i, \forall i = 1, ..., n$.
O elemento 1 e os monômios de graus *1, 2, 3, ...* definidos acima formam base para $\mathfrak{T}$ como espaço vetorial.
Seja $\theta : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathcal{A}$ um homomorfismo de espaços vetoriais. Definimos $\theta'' : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathcal{A}$ nos geradores de forma que $\theta''(1) = 1$ e $\theta''(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \theta(u_{j_1})...\theta(u_{j_n})$ e segue, por definição, que θ'' é homomorfismo de álgebras associativas onde $\theta''(a) = \theta(a), \forall\ a \in \mathfrak{L}$.
Agora, vamos supor que $\theta : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathcal{A}^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie e θ'' a sua extensão a $\mathfrak{T}$, isto é, tomando o diagrama anterior, se $a, b \in \mathfrak{L}$ temos:
$\theta''([a,b] - a \otimes b + b \otimes a) = \theta''([a,b]) - \theta''(a)\theta''(b) + \theta''(b)\theta''(a) = \theta([a,b]) - \theta(a)\theta(b) + \theta(b)\theta(a) = ([\theta(a), \theta(b)]) - \theta(a)\theta(b) + \theta(b)\theta(a) = 0$.

Assim, os geradores de $\mathbf{R}$ estão no $Nuc(\theta'')$ e induzimos um homomorfismo $\theta' : \mathfrak{T}/\mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\theta'(i(a)) = \theta'(a + \mathbf{R}) = \theta''(a) = \theta(a), \forall a \in \mathfrak{L}$. Como a álgebra tensorial $\mathfrak{T}$ é gerada por $\mathfrak{L}$, temos que $\mathfrak{U}$ é gerada por $i(\mathfrak{L})$ e daí segue a unicidade de θ', lembrando que ele foi definido nos geradores e quaisquer dois homomorfismos de álgebras associativas que coincidem no conjunto gerador são iguais. Portanto, $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}/\mathbf{R}$ é álgebra universal de $\mathfrak{L}$. ■

Agora sim, já temos a construção da Álgebra Universal $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ para qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ dada, e por resultados anteriores, temos que ela é única a menos de isomorfismos.

2.6 O Teorema de Poincaré-Birkoff-Witt

Aqui, o nosso objetivo principal é encontrar uma base para $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{T}/\mathbf{R}$.

Já sabemos que se $\{u_j \mid j \in J\}$ é base para $\mathfrak{L}$ então os monômios de grau n, $u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_n}$ formam base para $\mathfrak{L}^{\mathrm{n}}, n \geq 1$.

Vamos supor que J seja um conjunto ordenado e com isso vamos introduzir uma ordem parcial no conjunto dos monômios de qualquer grau $n \geq 1$.

Seja um monômio $u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_n}$, nosso objetivo é definir um índice para ele. Para tanto seja

$$\eta_{ik} = \begin{cases} 0, & se \quad j_i \leq j_k \\ 1, & se \quad j_i > j_k, \end{cases}$$

e o índice será:

$$ind(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \eta_{ik}.$$

Na realidade, podemos perceber que este índice "conta" quantos fatores do monômio estão desordenados, ou então, quantas permutações seriam necessárias para ordenar o monômio.

Assim $ind(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = 0 \Leftrightarrow j_1 \leq ... \leq j_n$ e os monômios com tal propriedade são ditos *Monômios Padrão.*

Temos que

$$ind(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \begin{cases} 1 + ind(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_n}), & se \quad j_{k+1} < j_k \\ ind(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_n}), & se \quad j_k = j_{k+1} \\ -1 + ind(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_n}), & se \quad j_{k+1} > j_k \end{cases}$$

Lema 2.19 *Todo elemento de $\mathfrak{T}$ é congruente (mod $\boldsymbol{R}$) a uma combinação de 1 e monômios padrão.*

Demonstração: Observe que é suficiente trabalharmos com monômios, então vamos ordená-los pelos seus graus e, em seguida pelos seus índices.

Consideremos um monômio não padrão $u_{j_1}...u_{j_n}$ e assumimos que o resultado vale para os de menor grau de também para os de menores índices. Supomos $j_k > j_{k+1}$ e daí $u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n} = (u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_{k+1}}\otimes u_{j_k}\otimes...\otimes u_{j_n})+(u_{j_1}\otimes...\otimes(u_{j_k}\otimes u_{j_{k+1}}-u_{j_{k+1}}\otimes u_{j_k})\otimes...\otimes u_{j_n})$ e como $u_{j_k}\otimes u_{j_{k+1}} - u_{j_{k+1}}\otimes u_{j_k} \equiv [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}](mod\ \mathbf{R})$, $u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n} \equiv (u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_{k+1}}\otimes u_{j_k}\otimes...\otimes u_{j_n}) + (u_{j_1}\otimes...\otimes[u_{j_k}, u_{j_{k+1}}]\otimes...\otimes u_{j_n})(mod\ \mathbf{R})$.

Observamos que $u_{j_1}\otimes...\otimes[u_{j_k}, u_{j_{k+1}}]\otimes...\otimes u_{j_n}$ é combinação linear de monômios de grau $n-1$ e que $u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_{k+1}}\otimes u_{j_k}\otimes...\otimes u_{j_n}$ tem índice menor do que $u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n}$. ■

Queremos provar que as classes de equivalência de 1 e dos monômios padrão são linearmente independentes e teremos que elas formam base para $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ como espaço vetorial.

Vamos definir:

1. $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$:= espaço vetorial com base $\{u_{i_1}...u_{i_n} \mid i_1 \leq ... \leq i_n, i_j \in J\}$
2. $\mathfrak{B} = 1\mathbb{K}\oplus\mathfrak{B}_1\oplus\mathfrak{B}_2\oplus...\oplus\mathfrak{B}_\mathfrak{j}\oplus...$

Lema 2.20 *Existe uma aplicação linear $\sigma : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que;*

1. $\sigma(1) = 1$.
2. $\sigma(u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n}) = u_{j_1}...u_{j_n}$, *se* $i_1 \leq ... \leq i_n$.
3. $\sigma(u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_k}\otimes u_{j_{k+1}}\otimes...\otimes u_{j_n}) - \sigma(u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_{k+1}}\otimes u_{j_k}\otimes...\otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1}\otimes...\otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}]\otimes...\otimes u_{j_n})$.

*Demonstração:*Nessa demonstração, vamos escrever $\mathfrak{L}_n$ para $\mathfrak{L}^n$. Vamos fixar $\sigma(1) = 1$ e considerar $\mathfrak{L}_{\mathfrak{n},\mathfrak{j}}$ o subespaço de $\mathfrak{L}_\mathfrak{n}$ gerado pelos monômios de índice menor ou igual a j e supor que σ seja definida para $1\mathbb{K}\oplus\mathfrak{L}_1...\oplus\mathfrak{L}_{\mathfrak{n}-1}$.

Estenda σ linearmente à $1\mathbb{K}\oplus\mathfrak{L}_1...\oplus\mathfrak{L}_{\mathfrak{n}-1}\oplus\mathfrak{L}_{\mathfrak{n},0}$ requerendo que $\sigma(u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n}) := u_{j_1}...u_{j_n}$ para $u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n} \in \mathfrak{L}_{n,0}$. Agora, vamos assumir que σ está definida para $1\mathbb{K}\oplus\mathfrak{L}_1...\oplus\mathfrak{L}_{\mathfrak{n},\mathfrak{i}-1}$ e seja $u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n}$ um monômio de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{n},\mathfrak{i}}$ tal que $ind(u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n}) = i \geq 1$.

Suponha que $j_k > j_{k+1}$ e então estabelecemos:

$(*)$ $\sigma(u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1}\otimes...\otimes u_{j_{k+1}}\otimes u_{j_k}\otimes...\otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1}\otimes...\otimes[u_{j_k}, u_{j_{k+1}}]\otimes...\otimes u_{j_n})$.

Observemos que as parcelas envolvidas estão em $1\mathbb{K} \oplus \mathfrak{L}_1 ... \oplus \mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathfrak{L}_{n,i-1}$.
Temos que mostrar que esta "decomposição" é independente da escolha do par $(j_k, j_{k+1}), j_k > j_{k+1}$. Para isso, seja (j_l, j_{l+1}), outro par tal que $j_l > j_{l+1}$ e podemos ter três casos:

1. $l > k+1$

2. $l = k+1$

3. $l < k+1$

1. Comutando primeiro j_k e depois j_l em (*), temos:
$\sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes u_{j_l} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_l} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_l} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_l} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes [u_{j_l}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_l} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes ... \otimes [u_{j_l}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n})$.
De maneira análoga, comutando primeiro j_l e depois j_k teremos:
$\sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes u_{j_l} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_l} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes [u_{j_l}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_l} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_l} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes [u_{j_l}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes ... \otimes [u_{j_l}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n})$.

   Segue que tal decomposição independe da escolha de tais pares e por indução sobre n vemos que σ está bem definida neste caso.

2. Agora temos $u_{j_k} > u_{j_{k+1}} = u_{j_l} > u_{j_{l+1}}$.
Começando a comutar por u_{j_k} temos:
$\sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes [u_{j_k}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_{k+1}}, u_{j_{l+1}}] \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes [u_{j_k}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n})$.

   Também de modo análogo, comutando primeiro j_{l+1} teremos que: $\sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes [u_{j_{k+1}}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}) = \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_k} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes$

$... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{l+1}}] \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes [u_{j_{k+1}}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}) =$
$\sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{l+1}} \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}) +$
$\sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{l+1}}] \otimes u_{j_{k+1}} \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_k} \otimes [u_{j_{k+1}}, u_{j_{l+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n}.$

Porém, temos que a diferença entre essas duas igualdades se anula, basta observar que os primeiros termos são iguais e a hipótese de indução permite comutar os demais termos, seguindo assim de tal diferença a expressão:
$\sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, [u_{j_{k+1}}, u_{j_{l+1}}]] \otimes ... \otimes u_{j_n}) + \sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_{k+1}}, [u_{j_{l+1}}, u_{j_k}]] \otimes ... \otimes u_{j_n}) +$
$\sigma(u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_{l+1}}, [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}]] \otimes ... \otimes u_{j_n});$
expressão esta que pela Identidade de Jacobi resulta em $\sigma(0) = 0$.

3. O terceiro caso é semelhante ao primeiro.

Assim σ é bem definida e também o conjunto é linearmente independente. ∎

Teorema 2.21 (Poincaré-Birkhoff-Witt) *As classes de equivalência do 1 e dos monômios padrão formam uma base para $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$.*

Demonstração: O lema (2.19) nos garante que qualquer classe de equivalência é combinação linear de $1 + \mathbf{R}$ e das classes dos monômios padrão. Já o Lema 2.20 nos dá que existe $\sigma : \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{B}$ linear e é fácil ver que $\mathbf{R}$ é combinação linear de elementos da forma $(u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_n}) - (u_{j_1} \otimes ... \otimes u_{j_{k+1}} \otimes u_{j_k} \otimes ... \otimes u_{j_n}) - (u_{j_1} \otimes ... \otimes [u_{j_k}, u_{j_{k+1}}] \otimes ... \otimes u_{j_n})$.
Assim σ anula tais elementos e temos $\sigma(\mathbf{R}) = 0$ o que induz uma aplicação linear $\mathfrak{T}/\mathbf{R} \longrightarrow \mathfrak{B}$ e como acontecem (1) e (2) do lema (2.20), a induzida é tal que $1 + \mathbf{R} \mapsto 1$ e $(u_{i_1} \otimes ... \otimes u_{i_n}) + \mathbf{R} \mapsto u_{i_1} ... u_{i_n}$.
Como as imagens dos monômios padrão e 1 são linearmente independentes em $\mathfrak{B}$, temos também a independência linear dos monômios padrão e 1 em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$. ∎

Corolário 2.22 *A aplicação $i : \mathfrak{L} \hookrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ é injetora e $1\mathbb{K} \bigcap i(\mathfrak{L}) = 0$.*
*Demonstração:*Seja $\{u_1, ..., u_n, ...\}$ uma base de $\mathfrak{L}$, assim $1_{\mathfrak{U}(\mathfrak{L})} = 1 + \mathbf{R}$ e $i(u_j) = u_j + \mathbf{R}$ são linearmente independentes. Dessa forma, i é injetora, pois associa conjunto linearmente independente a conjunto também linearmente independente, mais ainda, temos que $1\mathbb{K} \bigcap i(\mathfrak{L}) = 0$. ∎

Corolário 2.23 *Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ sua álgebra universal. Então:*

1. *Se $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{L}$ (subálgebra de Lie), então $\mathfrak{U}(\mathfrak{S})$ é subálgebra associativa de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ gerada por $\mathfrak{S}$.*

2. *Se $\mathfrak{I} \lhd \mathfrak{L}$ (ideal), então $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ pode ser identificado com $(\mathfrak{L}+\mathfrak{R})/\mathfrak{R}$, com $\mathfrak{R}$:=ideal em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ gerado por $\mathfrak{I}$ e $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}/\mathfrak{I}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\mathfrak{R}$ é álgebra universal para $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$.*

Demonstração:

1. Vamos escolher $\{u_j \mid j \in J\}$ uma base ordenada para $\mathfrak{L}$ tal que $J = K \cup L$, $K \cap L = \emptyset$, $k < l$ se $k \in K$ e $l \in L$ e $\{u_k \mid k \in K\}$ é base de $\mathfrak{S}$. Seja $\mathfrak{A}$ a subálgebra de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ gerada por $\mathfrak{S}$ e o teorema 2.21 nos garante que 1 e os monômios padrão $u_{k_1}...u_{k_s}$ com $k_i \in K$ formam uma base para $\mathfrak{A}$. Portanto $\mathfrak{A}$ é álgebra universal de $\mathfrak{S}$.

2. Sejam $\mathfrak{I}$ um ideal em $\mathfrak{L}$ e $\mathfrak{R}$ o ideal em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ gerado por $\mathfrak{I}$. O item 4 do teorema 2.17 nos garante que $(\mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\mathfrak{R}, j)$ é álgebra envelopante para $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ onde j é o homomorfismo dado por $j : \mathfrak{L}/\mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\mathfrak{R}$ tal que $a+\mathfrak{I} \mapsto a+\mathfrak{R}, \forall a \in \mathfrak{L}$. Pelo corolário 2.22 j é injetora e assim podemos identificar $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ com $(\mathfrak{L}+\mathfrak{R})/\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\mathfrak{R}$, cujos elementos são do tipo $a+\mathfrak{R}$ para $a \in \mathfrak{L}$ e que tem base $\{u_l + \mathfrak{R} \mid l \in L\}$ como espaço vetorial. Pelo teorema 2.21, $1+\mathfrak{R}$ e os monômios padrão $u_{l_1}...u_{l_t}+\mathfrak{R}$ formam base para $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})/\mathfrak{R}$. Se $\mathfrak{D}$ é o subespaço gerado por 1 e pelos monômios padrão então $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{R} = \emptyset$. Note que qualquer monômio da forma $u_{k_1}...u_{k_s}u_{l_1}...u_{l_t}$ com $s \geq 1$ e $t \geq 0$ estão em $\mathfrak{R}$ e juntamente com o 1 e $u_{l_1}...u_{l_t}$ (padrão) constituem todos os elementos da base padrão de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$, constituindo uma base para $\mathfrak{R}$. ■

Corolário 2.24 *Seja $\mathfrak{U}_o$ o ideal em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ gerado por $\mathfrak{L}$. Então $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) = 1\mathbb{K} \oplus \mathfrak{U}_o$.*

*Demonstração:*Basta tomar $\mathfrak{I} = \mathfrak{L}$ na segunda parte do corolário anterior e observar que o ideal $\mathfrak{U}_o$ gerado por $\mathfrak{L}$ em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ tem como base os monômios padrão $u_{i_1}...u_{i_r}$ e como tais monômios junto com o 1 são base para $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ temos que $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) = 1\mathbb{K} \oplus \mathfrak{U}_o$. ■

Definição 2.25 *Uma representação φ da álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ é dita fiel se $Nuc(\varphi) = \{0\}$.*

Corolário 2.26 *Toda Álgebra de Lie tem representação fiel por transformações lineares.*

*Demonstração:*Como $i : \mathfrak{L} \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ é injetora e como toda álgebra associativa tem representação fiel via transformações lineares segue o resultado. ■

Corolário 2.27 *A aplicação diagonal*

$$\begin{array}{rccc} \delta: & \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) & \longrightarrow & \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \\ & i(a) & \longmapsto & i(a) \otimes 1 + 1 \otimes i(a) \end{array},$$

é injetora.

Demonstração: Sendo $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) = 1\mathbb{K} \oplus \mathfrak{U}_\circ$ e a unidade do corpo $\mathbb{K}$ igual à 1, temos $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) = (1\mathbb{K} \oplus \mathfrak{U}_\circ) \otimes (1\mathbb{K} \oplus \mathfrak{U}_\circ) = (1 \otimes 1)\mathbb{K} \oplus (1\mathbb{K} \otimes \mathfrak{U}_\circ) \oplus (\mathfrak{U}_\circ \otimes 1\mathbb{K}) \oplus (\mathfrak{U}_\circ \otimes \mathfrak{U}_\circ)$. Se $a \in \mathfrak{L}$ então $\delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ e $\delta(1) = 1 \otimes 1$.
Como $\mathfrak{U}_\circ \otimes \mathfrak{U}_\circ$ é ideal em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$, por indução em r temos:

$$\delta(u_{i_1}...u_{i_r}) \equiv u_{i_1}...u_{i_r} \otimes 1 + 1 \otimes u_{i_1}...u_{i_r}(mod(\mathfrak{U}_\circ \otimes \mathfrak{U}_\circ)),$$

para qualquer monômio padrão em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$.
Segue que o conjunto das imagens da base canônica via δ é linearmente independente, logo δ é injetora. ∎

2.7 Álgebras de Lie Livres

Podemos formular a noção de álgebra de Lie livre gerada por um conjunto $\mathbb{X} = \{x_j \mid j \in J\}$ usando um tipo de propriedade universal.

Definição 2.28 *Seja $(\mathfrak{F}(\mathfrak{L}), i)$ um par onde $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ é uma álgebra de Lie e $i : \mathbb{X} \longrightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ é uma aplicação tal que, se existe $\theta : \mathbb{X} \longrightarrow \mathfrak{L}_\circ$, com $\mathfrak{L}_\circ$ uma álgebra de Lie, então existe único homomorfismo de álgebras de Lie θ' tal que o diagrama abaixo seja comutativo , ou seja, existe único homomorfismo de álgebras de Lie tal que $\theta = \theta' i$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}(\mathfrak{L}) \arrow[dr, dashed, "\exists!\ \theta'"] & \\
\mathbb{X} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\theta"'] & \mathfrak{L}_\circ
\end{tikzcd}$$

Dizemos que $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ tem base $\mathbb{X}$.

A mesma definição pode ser considerada tomando uma álgebra associativa $\mathcal{A}$ qualquer a fim de obter a álgebra livre associativa $(\mathfrak{F}, i)$ onde $\mathfrak{F}$ é uma álgebra associativa. É simples construir uma álgebra associativa livre a partir de um conjunto $\mathbb{X}$.

Vamos considerar $\mathbb{M}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com base $\mathbb{X}$, sua álgebra tensorial $\mathfrak{F} = \mathfrak{T} = 1\mathbb{K} \oplus \mathbb{M} \oplus (\mathbb{M} \otimes \mathbb{M}) \oplus ... \oplus (\mathbb{M} \otimes .... \otimes \mathbb{M}) \oplus ....$ e $i : \mathbb{X} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ a aplicação inclusão. Tome uma aplicação $\theta : \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{A}$. Pela propriedade universal da álgebra tensorial e pelo fato de que $\mathbb{X}$ é base de $\mathbb{M}$, já temos que existe único homomorfismo de álgebras associativas θ' que faz o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F} \arrow[dr, dashed, "\theta'"] & \\
\mathbb{X} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\theta"'] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

Daí $\mathfrak{F}$ é uma álgebra associativa livre e dizemos que $\mathbb{X}$ é base de $\mathfrak{F}$.

Teorema 2.29 (Witt) *Sejam $\mathbb{X}$ um conjunto arbitrário, $\mathfrak{F}$ uma álgebra associativa livre com base $\mathbb{X}$ e $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{F}^{(-)}$ gerada por $\mathbb{X}$. Então:*

1. *$\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ é uma álgebra de Lie livre com base $\mathbb{X}$.*

2. *$\mathfrak{F}$ é a álgebra universal de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$.*

Demonstração: Vamos considerar $\mathfrak{F}$ uma álgebra associativa livre com base $\mathbb{X}$, onde $\mathbb{X}$ é um conjunto arbitrário.

1. Seja $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{F}^{(-)}$ gerada pelo conjunto $\mathbb{X}$ e consideremos uma aplicação $\theta_0 : \mathbb{X} \longrightarrow \mathfrak{S}$, com $\mathfrak{S}$ sendo uma álgebra de Lie e $\mathfrak{U}$ sua álgebra universal, assim pelo Teorema 2.21 temos que $\mathfrak{U}$ contém $\mathfrak{S}$. Podemos então considerar θ_0 como uma aplicação de $\mathbb{X}$ a $\mathfrak{U}$ e assim estendê-la a um homomorfismo θ de $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{U}$. Além disso, θ é um homomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{F}^{(-)} \longrightarrow \mathfrak{U}^{(-)}$ e como aplica $\mathbb{X}$ em $\mathfrak{S}$, a restrição de θ à subálgebra de Lie $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ de $\mathfrak{F}^{(-)}$ gerada por $\mathbb{X}$ é um homomorfismo de Lie de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ em $\mathfrak{S}$.
   Assim θ_0 pode ser estendida a um homomorfismo θ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ em $\mathfrak{S}$ e, como $\mathbb{X}$ gera $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$, θ é único. Portanto $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ é uma álgebra de Lie livre com base $\mathbb{X}$.

2. Seja $\mathfrak{U}$ uma álgebra associativa e $\theta : \mathfrak{F}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathfrak{U}^{(-)}$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Então existe um homomorfismo de álgebras associativas $\widetilde{\theta}$ de $\mathfrak{F}$ em $\mathfrak{U}$ que estende a restrição de θ a $\mathbb{X}$. Então $\widetilde{\theta}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie de $\mathfrak{L}^{(-)}$ em $\mathfrak{U}^{(-)}$ e então a restrição θ' de $\widetilde{\theta}$ a $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ é um homomorfismo de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ em $\mathfrak{U}^{(-)}$. Como $\theta = \theta'$ no conjunto gerador $\mathbb{X}$ segue que são iguais e dessa forma estendemos θ a um homomorfismo de $\mathfrak{F}$ em $\mathfrak{U}$. Como $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ gera $\mathfrak{F}$, esta extensão é única e então $\mathfrak{F}$ é a álgebra universal de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$.

■

Vamos restringir nossa atenção para o caso em que $\mathbb{X} = \{x_1, ..., x_n\}$, então, $\mathbb{M} = \mathbb{K}x_1 \oplus ... \oplus \mathbb{K}x_n$ e $\mathfrak{F} = 1\mathbb{K} \oplus \mathbb{M} \oplus (\mathbb{M} \otimes \mathbb{M}) \oplus ...$ e denotemos $\mathfrak{F} = \mathbb{K}\{x_1, ..., x_n\}$.

Assim $\mathfrak{F}$ é graduada com $\mathbb{M}_m = \mathbb{M} \otimes ... \otimes \mathbb{M}$ (m vezes), o espaço de elementos homogêneos de grau m, uma base para esse espaço é o conjunto dos monômios da forma $x_{i_1}...x_{i_m}, i_j = 1, ..., n$, daí $dim\ \mathbb{M}_m = n^m$.

Definição 2.30 *Nas condições do teorema anterior, $a \in \mathfrak{F}$ é dito um elemento de Lie se $a \in \mathfrak{F}(\mathfrak{L})$.*

Neste momento nosso objetivo é estabelecer um critério para checar quando um elemento de $\mathfrak{F}$ é um elemento de Lie.

Teorema 2.31 (Friedrichs) *Seja $\mathfrak{F} = \mathbb{K}\{x_1, ..., x_n\}$ a álgebra associativa livre com base $\{x_1, ..., x_n\}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0. Então $a \in \mathfrak{F}$ é um elemento de Lie se e somente se $\delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, com δ a aplicação diagonal definida anteriormente.*

*Demonstração:*Temos que $[a \otimes 1 + 1 \otimes a, b \otimes 1 + 1 \otimes b] = [a, b] \otimes 1 + 1 \otimes [a, b]$, assim o conjunto dos elementos $a \in \mathfrak{F}$ tais que $\delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{F}^{(-)}$ que contém $\{x_1, ..., x_n\}$, e assim contém $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$.
Seja $\{y_1, ..., y_n, ...\}$ uma base de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ como espaço vetorial. Como $\mathfrak{F}$ é álgebra universal de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$, os elementos $y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m}, m$ arbitrário, $k_i \geq 0$ formam uma base para $\mathfrak{F}$.
Assim os produtos $(y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m}) \otimes (y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_n^{l_n})$ formam uma base para $\mathfrak{F} \otimes \mathfrak{F}$ e temos que: $\delta(y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m}) = \delta(y_1^{k_1})\delta(y_2^{k_2}) ... \delta(y_m^{k_m}) = (y_1 \otimes 1 + 1 \otimes y_1)^{k_1}(y_2 \otimes 1 + 1 \otimes y_2)^{k_2} ... (y_m \otimes 1 + 1 \otimes y_m)^{k_m} = y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m} \otimes 1 + k_1 y_1^{k_1 - 1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m} \otimes y_1 + k_2 y_1^{k_1} y_2^{k_2 - 1} ... y_m^{k_m} \otimes y_2 + ... + k_m y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m - 1} \otimes y_m + (**)$, onde (**) representa uma combinação linear de elementos da base da forma $(y_1^{j_1} y_2^{j_2} ... y_m^{j_m}) \otimes (y_1^{l_1} y_2^{l_2} ... y_t^{l_t})$ com $\sum l_i > 1$. O segundo, através do $(m+1)$-ésimo termo não aparece nas expressões deste tipo para os outros elementos da base $y_1^{j_1} y_2^{j_2} ... y_s^{j_s}$. Segue que, a fim de que $\delta(a)$ seja combinação linear de elementos da base da forma $y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m} \otimes 1$ e $1 \otimes y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m}$ é necessário que na expressão de a em termos de elementos da base apareçam somente $y_1^{k_1} y_2^{k_2} ... y_m^{k_m}$ com um $k_i = 1$ e os demais $k_j = 0$ com coeficientes não nulos. Isto significa que a é uma combinação linear de y_i, assim $a \in \mathfrak{F}(\mathfrak{L})$. ∎

Capítulo 3

Apresentação finita de $\mathfrak{L}$

Neste capítulo vamos apresentar nosso teorema principal, introduziremos as notações e começaremos a reescrever o artigo estudado [4], dando os detalhes das conclusões obtidas.

3.1 O Teorema Principal

Durante este trabalho demonstraremos a parte (3) $\Rightarrow$ (1) no seguinte Teorema:

Teorema 3.1 *Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie finitamente gerada sobre o corpo $\mathbb{K}$. Suponha que $\mathfrak{L}$ tenha um ideal abeliano A tal que $\mathfrak{L}/A$ tem dimensão finita como espaço vetorial. Seja $\mathfrak{R}$ a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{L}/A$. Então são equivalentes:*

1. *$\mathfrak{L}$ é finitamente apresentável como álgebra de Lie;*
2. *O quadrado exterior $A \wedge A$ é finitamente gerado como $\mathfrak{R}$-módulo sobre a ação diagonal;*
3. *O quadrado tensorial $A \otimes A$ é finitamente gerado como $\mathfrak{R}$-módulo sobre a ação diagonal.*

Neste teorema, é possível mostrar (1) $\Rightarrow$ (2) usando propriedades homológicas de álgebras de Lie e a demonstração de (2) $\Rightarrow$ (3) foi feita em [6] usando métodos diferentes dos que usaremos aqui. A partir de agora, como já foi dito, nossa meta é demonstrar (3) $\Rightarrow$ (1).

Vamos então reescrever:

Proposição 3.2 *Seja $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie finitamente gerada sobre o corpo $\mathbb{K}$. Suponha que $\mathfrak{L}$ tenha um ideal abeliano A tal que $\mathfrak{L}/A$ tem dimensão finita como espaço vetorial.*

Seja $\mathfrak{R}$ a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{L}/A$. Suponha também que o quadrado tensorial $A \otimes A$ é finitamente gerado como $\mathfrak{R}$-módulo sobre a ação diagonal. Então $\mathfrak{L}$ é finitamente apresentável como álgebra de Lie.

Observamos que uma álgebra de Lie Q que é finitamente gerada e abeliana (isto é $[Q, Q] = 0$) tem dimensão finita.

Definição 3.3 *Uma álgebra de Lie que é extensão de abeliana por abeliana é dita metabeliana.*

Em particular o Teorema 3.1 é válido para álgebras de Lie finitamente geradas e metabelianas.

3.2 Ideais e Álgebras Envelopantes

Sejam $\mathfrak{L}$ uma álgebra de Lie sobre o corpo $\mathbb{K}$ com sua álgebra universal envelopante denotada por $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ e B um ideal de $\mathfrak{L}$. Vamos denotar por B^{id} o ideal em $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ gerado por B.

Pelo estudo feito no Capítulo 2, temos que $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ é $\mathbb{K}$-álgebra associativa e que podemos considerar $\mathfrak{L}$ como subálgebra da álgebra de Lie $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})^{(-)}$, construída como em 2.2.

Também vale ressaltar que o Teorema de Witt, 2.29, nos garante que se $\mathfrak{L}$ é livre sobre um subconjunto $\mathbb{X}$ então isso também ocorre com $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$.

Considerando a álgebra associativa $Lin(B, B)$, também por 2.2 obtemos a álgebra de Lie $Lin(B, B)^{(-)}$ e obtemos por restrição do homomorfismo de álgebras de Lie do exemplo dado na definição 2.8 ao ideal B;

$$\begin{array}{rccccc} ad: & \mathfrak{L} & \longrightarrow & Lin(B,B)^{(-)} & & \\ & l & \longmapsto & ad_l : B & \longrightarrow & B \\ & & & b & \longmapsto & [b,l] \end{array}$$

um homomorfismo de álgebras de Lie, induzindo o homomorfismo de álgebras associativas:

$$\begin{array}{rccccc} ad': & \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) & \longrightarrow & Lin(B,B) & & \\ & l & \longmapsto & ad'_l : \mathfrak{L} & \longrightarrow & \mathfrak{L} \\ & & & b & \longmapsto & [b,l] \end{array}$$

transformando B num $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$-módulo.

Observamos que nos primeiros capítulos todos os módulos e ações foram definidas à esquerda conforme estudo feito pelo livro [1]. Daqui em diante vamos utilizar módulos e ações à direita seguindo as notações do artigo estudado [4]. A transformação de módulos à esquerda para a direita é óbvia.

Este fato será usado em dois casos especiais:

1. Se B é abeliano então B age trivialmente sobre si mesmo, de fato, para qualquer $l \in B(\subseteq \mathfrak{L}), i(l) \in \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ e $ad'_{(i(l))}(b) = [b, i(l)] - i(l)b + bi(l) = 0$, então considerando a sequência exata
$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \xrightarrow{g} \mathfrak{U}(\mathfrak{L}/B) \longrightarrow 0$$
e o fato de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}/B) = \mathfrak{U}(\mathfrak{L})/B^{id}$ segue que B é $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}/B)$-módulo à direita. Essa ação é chamada *ação adjunta à direita*.

2. Se $\mathfrak{L}_1$ é subálgebra de Lie de $\mathfrak{L}$, então o homomorfismo de álgebras de Lie *"inclusão"*, pela Proposição 2.17, induz um homomorfismo entre as álgebras universais $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}_1)$ e $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$, daí B se transforma em um $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}_1)$-módulo.

3.3 Quadrado Tensorial e Quadrado Exterior

A Proposição 2.17 nos dá a existência do homomorfismo de álgebras associativas:

$$\begin{array}{rccc} \delta: & \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) & \longrightarrow & \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \\ & i(a) & \longmapsto & i(a) \otimes 1 + 1 \otimes i(a) \end{array}, \forall\ a \in \mathfrak{L}.$$

O Corolário 2.27 garante a injetividade de δ e dessa forma a imagem $\delta(\mathfrak{U}(\mathfrak{L})) \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ é isomorfa à $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$.

Chamamos $\delta(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}))$ de *subálgebra diagonal* de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$.

Vamos considerar C um $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$-módulo, então seu quadrado tensorial $C \otimes C$ é um $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$-módulo via:

$$(c_1 \otimes c_2)(f \otimes g) = (c_1 f) \otimes (c_2 g), \forall c_1, c_2 \in C, \forall f, g \in \mathfrak{U}(\mathfrak{L}).$$

Restringindo esta ação a $\delta(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}))$ temos $C \otimes C$ como um $\delta(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}))$-módulo e, como $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}) \simeq \delta(\mathfrak{U}(\mathfrak{L}))$, $C \otimes C$ é também um $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$-módulo e

$$(c_1 \otimes c_2)l = (c_1 l) \otimes c_2 + c_1 \otimes (c_2 l), \forall c_1, c_2 \in C, \forall l \in \mathfrak{L}.$$

Vale ressaltar que tal propriedade se verifica para qualquer elemento em $\mathfrak{L}$ e não necessariamente para elementos de $\mathfrak{U}(\mathfrak{L})$, basta tomar sua unidade $1_{\mathfrak{U}(\mathfrak{L})}$;

$$(c_1 \otimes c_2)1_{\mathfrak{U}(\mathfrak{L})} \neq (c_1 1_{\mathfrak{U}(\mathfrak{L})}) \otimes c_2 + c_1 \otimes (c_2 1_{\mathfrak{U}(\mathfrak{L})}) = c_1 \otimes c_2 + c_1 \otimes c_2 = 2(c_1 \otimes c_2).$$

Esta ação de $\delta(\mathfrak{U}(\mathfrak{L})) \simeq \mathfrak{U}(\mathfrak{L})$ sobre $C \otimes C$ é chamada de *ação diagonal.*

3.3.1 Notações do Teorema

Na Proposição 3.2 a ser demonstrada temos a álgebra de Lie finitamente gerada $\mathfrak{L}$ sobre o corpo $\mathbb{K}$, um ideal abeliano A de $\mathfrak{L}$ tal que o quociente $Q = \mathfrak{L}/A$ tem dimensão finita e a sua álgebra universal envelopante é denotada por $\mathfrak{R}$.

Das consideraçõe da Seção 3.2, trocando o ideal abeliano B por A, segue que A é um $\mathfrak{R}$-módulo e assim $A \otimes A$ é um $\mathfrak{R}$-módulo via ação diagonal. Denotamos por $\circ$ a ação adjunta à direita de $\mathfrak{R}$ sobre A.

O quadrado exterior $A \wedge A$ é o quociente de $A \otimes A$ pelo subespaço gerado por $\{a \otimes a \mid a \in A\}$. Em particular $a \otimes b + b \otimes a = (a + b) \otimes (a + b) - a \otimes a - b \otimes b$ pertence a esse subespaço.

A imagem de $a \otimes b$ em $A \wedge A$ é denotada por $a \wedge b$. Denotamos por $\omega : A \otimes A \longrightarrow A \wedge A$ a projeção canônica, assim $\omega(a \otimes b) = a \wedge b, \forall a, b \in A$.

O núcleo de ω é o subespaço gerado pelos elementos da forma $a \otimes a, a \in A$, que é invariante sob ação diagonal.

Assim $A \wedge A$ herda uma estrutura de $\mathfrak{R}$-módulo e também a ação de $\mathfrak{R}$ em $A \wedge A$ é dita ação diagonal.

3.4 Estrutura de Q e $\mathfrak{R}$

Como por hipótese A é abeliano tal que Q tem dimensão finita, podemos considerar $\{x_1, ..., x_n\}$ uma base para Q.

Vamos assumir $n \geq 1$ pois se $n = 0$ teremos $\mathfrak{L} = A$ e a Proposição 3.2 é trivial.

Para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$ existem $\lambda_{ijk} \in \mathbb{K}$ tais que:

$$[x_j, x_i] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ijk}\ x_k;$$

como $[x_j, x_i] = -[x_i, x_j]$ e $[x_i, x_i] = 0$ temos que $\lambda_{ijk} = -\lambda_{jik}$ e $\lambda_{iik} = 0$.

O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt 2.21 nos fornece uma base para a álgebra universal envelopante $\mathfrak{R}$, constituída por todos os monômios da forma $x_1^{k_1}....x_n^{k_n}$ com $k_1, ..., k_n$ inteiros não negativos. Tal monômio tem seu grau dado por $k_1 + ... + k_n$.

Cada elemento $f \in \mathfrak{R}$ é uma combinação linear finita de monômios e definimos $grau(f)$ como o máximo dos graus dos monômios com coeficientes não nulos em sua combinação linear e por convenção $grau(0) = 0$.

Considerando que $[x_j, x_i] = x_j x_i - x_i x_j$, na álgebra associativa $\mathfrak{R}$, teremos o produto dado por:

$$x_j x_i = x_i x_j + \sum \lambda_{ijk} x_k.$$

Lema 3.4 *O produto em $\mathfrak{R}$ satisfaz:*

$$(x_1^{k_1}...x_n^{k_n}).(x_1^{l_1}...x_n^{l_n}) = x_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n} + f$$

com $f = 0$ ou $grau(f) < k_1 + l_1 + ... + k_n + l_n$.

*Demonstração:*Vamos demonstrar utilizando indução sobre $m = \sum k_i + \sum l_i$. O caso onde $m = 0$ é trivial.
Mostremos que, se $m > 1$ então podemos reduzir o problema para o caso onde $m = 1$.
Tome k_{i+1} o primeiro dos $k_i's$ que é não nulo, isto é: $k_1 = ... = k_i = 0, k_{i+1} \geq 1$, com $i = 0$ ou $i \geq 1$.
Como $x_i^0 = 1$, segue que: $x_1^{k_1}...x_n^{k_n} = x_{i+1}^{k_{i+1}}...x_n^{k_n} = x_{i+1}(x_{i+1}^{k_{i+1}-1}...x_n^{k_n})$, daí $(x_1^{k_1}...x_n^{k_n})(x_1^{l_1}...x_n^{l_n}) = x_{i+1}(x_{i+1}^{k_{i+1}-1}...x_n^{k_n})(x_1^{l_1}...x_n^{l_n})$, que, por indução, resulta em $x_{i+1}(x_1^{l_1}...x_i^{l_i}x_{i+1}^{k_{i+1}+l_{i+1}}...x_n^{k_n+l_n} + \widetilde{f}) = x_{i+1}\widetilde{f} + x_{i+1}(x_1^{l_1}...x_i^{l_i}x_{i+1}^{k_{i+1}+l_{i+1}}...x_n^{k_n+l_n})$, com $grau(\widetilde{f}) < m - 1$ e $\widetilde{f} = \sum k_b x_1^{b_1}...x_n^{b_n}$, $k_b \in \mathbb{K}$ e $b_1 + ... + b_n \leq grau(f) < m - 1$.
Mas $x_{i+1}\widetilde{f} = \sum k_b x_{i+1}(x_1^{b_1}...x_n^{b_n}) = x_1^{b_1}...x_{i+1}^{b_{i+1}+1}...x_n^{b_n} + \widetilde{f'}$, sendo que $grau(x_{i+1}) = 1$, $grau(x_1^{b_1}...x_n^{b_n}) \leq m-2$, a última igualdade foi obtida por indução pois $1+m-2 = m-1 < m$ e o $grau(\widetilde{f'}) \leq m - 2$.
Dessa forma, se $\widetilde{f'}$ é não nulo temos que $grau(x_{i+1}\widetilde{f}) \leq m - 1$, logo não teremos problema algum.
Assim temos o mesmo tipo de problema do caso $m = 1$, pois na outra parcela temos $x_{i+1}(x_1^{l_1}...x_i^{l_i}x_{i+1}^{k_{i+1}+l_{i+1}}...x_n^{k_n+l_n})$.
Então, mostremos que o Lema vale para o caso $m = 1$, onde teremos $k_1 = ... = k_{i-1} = 0 = k_{i+1} = ... = k_n$ e $k_i = 1$, donde $x_1^{k_1}...x_i^{k_i}...x_n^{k_n} = x_1^0...x_i^1...x_n^0 = x_i$.

Vamos considerar l_j o primeiro índice não nulo e então $x_i x_1^{l_1}...x_n^{l_n} = x_i x_j^{l_j}...x_n^{l_n}$ e devemos agora ordená-lo. Se $i \leq j$, então a palavra já está ordenada. Se $i > j$ então fazemos: $x_i x_j \ (x_j^{l_j-1}...x_n^{l_n}) = (x_j x_i + [x_i, x_j]) x_j^{l_j-1}...x_n^{l_n} = (x_j x_i + \sum \lambda_{jik} x_k) x_j^{l_j-1}...x_n^{l_n} =$ $= x_j(x_i(x_j^{l_j-1}...x_n^{l_n})) + \sum \lambda_{jik} x_k x_j^{l_j-1}...x_n^{l_n}$, que por indução resulta em $x_j(x_j^{l_j-1}...x_i^{l_i+1}...x_n^{l_n}) + (\ \textit{termo de grau} \leq m-1) = (x_j^{l_j}...x_i^{l_i+1}...x_n^{l_n}) + (\ \textit{termo de grau}$ $\leq m-1)$, o que conclui a demonstração. ■

Lema 3.5 *Sejam $f, g \in \mathfrak{R}$, não nulos. Então $grau(fg) = grau(f) + grau(g)$.*

Demonstração: Vamos escrever $f = f_1 + f_2$ com $grau(f_2) \leq grau(f_1) - 1$ e f_1 uma soma de monômios de graus iguais ao grau de f, digamos α.
Analogamente, façamos $g = g_1 + g_2$ com $grau(g_2) \leq grau(g_1) - 1$ e g_1 sendo soma de monômios de graus iguais a $\beta = grau(g)$.
Assim, $fg = f_1g_1 + f_1g_2 + f_2g_1 + f_2g_2$, com $grau(f_ig_j) \leq grau(f_i) + grau(g_j)$. Observamos que $max\{grau(f_1g_2), grau(f_2g_1), grau(f_2g_2)\} \leq \alpha + \beta - 1$.
Precisamos mostrar que $grau(f_1) + grau(g_1) = \alpha + \beta$.
Para tanto, sejam $f_1 = \sum_k b_k x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$ e $g_1 = \sum_l c_l x_1^{l_1}...x_n^{l_n}$ não nulos e $b_k, c_l \in \mathbb{K}$. Assim; $f_1g_1 = \sum_{k,l} b_k c_l x_1^{k_1}...x_n^{k_n} x_1^{l_1}...x_n^{l_n} = \sum_{k,l} b_k c_l x_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n} + (\textit{termo de grau} \leq \alpha + \beta - 1)$, sendo que a última igualdade é decorrente do Lema 3.4.
Mostremos agora porque $\sum_{k,l} b_k c_l x_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n}$ é não nulo.
Vamos considerar $\mathbb{K}[\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n]$, o anel de polinômios com variáveis comutativas sobre o corpo $\mathbb{K}$ e, mantendo as constantes neste corpo, vamos definir os polinômios não nulos $\widetilde{f}_1 = \sum b_k \widetilde{x}_1^{k_1}...\widetilde{x}_n^{k_n}$ e $\widetilde{g}_1 = \sum c_l \widetilde{x}_1^{l_1}...\widetilde{x}_n^{l_n}$. Obtemos então que $\widetilde{f}_1\widetilde{g}_1 = \sum b_k c_l \widetilde{x}_1^{k_1+l_1}...\widetilde{x}_n^{k_n+l_n}$. Porém se $\sum_{k,l} b_k c_l x_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n}$ for nulo, teremos então que $\widetilde{f}_1\widetilde{g}_1 = \sum(\sum_{k,l} b_k c_l) \widetilde{x}_1^{\gamma_1}...\widetilde{x}_n^{\gamma_n} = 0$, sendo a primeira soma sobre $\gamma_i = k_i + l_i, i = 1, ..., n$. Mas pode-se mostrar por indução sobre n que $\mathbb{K}[\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n]$ não possui divisores de zero, resultando em uma contradição. Logo $\sum_{k,l} b_k c_l x_1^{k_1+l_1}...x_n^{k_n+l_n}$ é não nulo e concluímos a demonstração. ■

3.5 Gerando a álgebra de Lie $\mathfrak{L}$

Vamos escolher elementos $x_1', ..., x_n'$ de $\mathfrak{L}$ tais que $x_i' + A = x_i, \forall i = 1, ..., n$. Estamos assim tomando elementos da pré-imagem da base de Q via projeção canônica. Considerando que $[x_j, x_i] = \sum_k \lambda_{ijk} \ x_k$, teremos que existem elementos $a_{ij} \in A$ tais que $[x_j', x_i'] - \sum_k \lambda_{ijk} \ x_k' = a_{ij}, \forall i, j \in \{1, ..., n\}$.

De fato, pois como $[x_j, x_i] = \sum_k \lambda_{ijk}\ x_k$, segue que $[x'_j + A, x'_i + A] = \sum_k \lambda_{ijk}\ x'_k + A$, assim $[x'_j, x'_i] + A = (\sum_k \lambda_{ijk}\ x'_k) + A$ e obtemos $[x'_j, x'_i] - \sum_k \lambda_{ijk}\ x'_k = a_{ij} \in A, \forall i, j \in \{1, ..., n\}$.

Dessa forma, teremos também que $a_{ij} = -a_{ji}$ e $a_{ii} = 0$.

Lema 3.6 *Se A é um ideal de $\mathfrak{L}$ e $Q = \mathfrak{L}/A$ é finitamente gerado então existe um conjunto X gerador de $\mathfrak{L}$ como álgebra de Lie dado por:*

$$X = \{x'_1, ..., x'_n, w_1, ..., w_m\}.$$

Onde $\{x'_1, ..., x'_n\} \in \mathfrak{L}$ tal que $x'_i + A = x_i$, $\{x_1, ..., x_n\}$ é uma base de Q e $\{w_1, ..., w_m\} \in A$.

*Demonstração:*Como $\mathfrak{L}$ é finitamente gerada, tomemos como seu gerador o conjunto finito Y e considere $Y \cup \{x'_1, ..., x'_n\}$.
Seja $y \in Y$ então, $\pi(y) \in Q$ e $\pi(y) = \lambda_{1y}x_1 + ... + \lambda_{ny}x_n = \lambda_{1y}\pi(x'_1) + ... + \lambda_{ny}\pi(x'_n)$ $= \pi(\lambda_{1y}x'_1 + ... + \lambda_{ny}x'_n)$.
Desse modo $a_y = y - \lambda_{1y}x'_1 + ... + \lambda_{ny}x'_n \in \pi^{-1}(0) = A$ e segue que a álgebra de Lie gerada por $Y \cup \{x'_1, ..., x'_n\}$ é igual a álgebra de Lie gerada por $\{a_y\}_{y \in Y} \cup \{x'_1, ..., x'_n\}$ com cada $a_y \in A$ como queríamos. ∎

Incluindo $a'_{ij}s$ se necessário, podemos assumir que este conjunto X contém os a_{ij}'s.

Assim para $1 \leq i < j \leq n$ temos:

$$[x'_j, x'_i] - \sum_k \lambda_{ijk}x'_k = w_{\sigma(i,j)}, \tag{3.1}$$

com $\sigma(i, j) \in \{1, ..., m\}$.

Lema 3.7 *$\{w_1, ..., w_m\}$ gera A como ideal de $\mathfrak{L}$.*

*Demonstração:*Seja I o ideal de $\mathfrak{L}$ gerado por $\{w_1, ..., w_m\}$ com $w_i \in A$ e $A \lhd \mathfrak{L}$.
Como I é o menor ideal de $\mathfrak{L}$ que contém $\{w_1, ..., w_m\}$, temos que $I \subseteq A$ pois $\{w_1, ..., w_m\} \subseteq A$.
Por outro lado temos que $\mathfrak{L}$ é gerada como álgebra de Lie por $\{x'_1, ..., x'_n, w_1, ..., w_m\}$ e que Q é gerada como álgebra de Lie por $\{x'_1 + I, ..., x'_n + I\}$. Seja y_i a imagem de x'_i em $\mathfrak{L}/I$.
Observamos que $[y_i, y_j] - \sum \lambda_{jik}y_k = [x'_i, x'_j] - \sum \lambda_{jik}x'_k + I = w_{\sigma(i,j)} + I = I$, então

$$[y_i, y_j] - \sum_k \lambda_{jik}y_k = 0.$$

Considerando o fato de $\mathfrak{L}/I$ ser o espaço vetorial gerado pelos comutadores $[...[[[y_i, y_j], ...]$, que $[y_i, y_j] = \sum \lambda_{jik} y_k$ e qualquer comutador de $\{y_1, ..., y_n\}$ é combinação linear de $y_1, ..., y_n$, daí $dim\ Q \ \leq n$. Mas $I \subseteq A \subseteq \mathfrak{L}$ com $dim\ \mathfrak{L}/A = n$ e dessa forma temos que $n = dim\ \mathfrak{L}/A = dim\ \mathfrak{L}$. Logo $I = A$. ■

Lema 3.8 *Se $a \in A$ então o $\mathfrak{R}$-submódulo de A gerado por a é igual ao ideal de $\mathfrak{L}$ gerado por a.*

*Demonstração:*Mostremos então que $a \circ \mathfrak{R} = A^{id}$. Considerando que A^{id} é o espaço vetorial gerado pelos comutadores [..[[a,..],...],] e fazendo $a \circ q = [a, l]$, onde $l + A = q \in Q$ teremos: [..[[a, l_1],l_2],...],l_j] $= (..((a \circ q_1) \circ q_2) \circ ...) \circ q_j) = a \circ (q_1 ... q_j) =$ espaço vetorial gerado por $a \circ (q_1 ... q_j)$ para $\forall q_i \in Q$. Então $a \circ \mathfrak{U}(Q) = a \circ \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$-submódulo de $\mathfrak{L}$ gerado por a. ■

Corolário 3.9 *$\{w_1, ..., w_m\}$ gera A como um $\mathfrak{R}$-módulo.*

*Demonstração:*Já sabemos que A é gerado como ideal de $\mathfrak{L}$ via $\{w_1, ..., w_m\}$, logo $A =< w_1, ..., w_m >^{id}$. O Lema 3.8 nos garante então que $A = w_1 \circ \mathfrak{R} + ... + w_n \circ \mathfrak{R}$ e portanto A é gerado por $\{w_1, ..., w_m\}$ como $\mathfrak{R}$-módulo. ■

3.6 Uma apresentação de $\mathfrak{L}$ via geradores e relações

Primeiramente vamos definir quando uma Álgebra de Lie é finitamente apresentável.

Definição 3.10 *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ é dita finitamente apresentável se existe álgebra de Lie livre $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ e epimorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{F}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathfrak{L}$ tal que $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ é livre sobre um conjunto finito X e $Nuc(\pi) = Y^{id}$ é o ideal de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ gerado por Y onde Y é um subconjunto finito.*

Vamos considerar $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ a álgebra de Lie livre sobre o conjunto finito $X = \{W_1, ..., W_m, X_1, ..., X_n\}$ e $\pi : \mathfrak{F}(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathfrak{L}$ tal que $W_i \mapsto w_i$ e $X_i \mapsto x'_i$.

Encontraremos no próximo capítulo um subconjunto finito E de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ tal que $E \subseteq Nuc(\pi)$ e $\pi^{-1}(A)/E^{id}$ é álgebra de Lie abeliana. Isto seguirá dos resultados das seções 4.3, 4.4 e 4.5.

Vamos supor que já temos o subconjunto E satisfazendo todas as condições acima. Então $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})/\pi^{-1}(A) \simeq \mathfrak{L}/A \simeq Q$ e segue da seção 3.2 que $\pi^{-1}(A)/E^{id}$ tem estrutura natural via ação adjunta à direita de $\mathfrak{U}(\mathfrak{F}(\mathfrak{L})/E^{id})$-módulo.

Por semelhança com 3.5, o ideal abeliano $\pi^{-1}(A)/E^{id}$ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})/E^{id}$ é finitamente gerado como $\mathfrak{R}$-módulo.

Para continuarmos nosso trabalho, enunciaremos agora um teorema que será utilizado cuja demonstração pode ser encontrada em [8], Prop.6 de I.2.6.

Teorema 3.11 *Se Q tem dimensão finita então a álgebra universal envelopante $\mathfrak{R}$ é Noetheriana (à esquerda e à direita).*

Temos então que $Nuc(\pi)/E^{id}$ é finitamente gerado como $\mathfrak{R}$-módulo, pois $Nuc(\pi)/E^{id} \subseteq \pi^{-1}(A)/E^{id}$. Como o subconjunto E foi tomado finito, segue que $Nuc(\pi)$ é finitamente gerado como ideal de $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$. Finalmente, como $\mathfrak{F}/Nuc(\pi) \simeq \mathfrak{L}$, temos que $\mathfrak{L}$ é finitamente apresentável, como queríamos.

3.7 Produtos Tensoriais

Vamos considerar as seguintes aplicações entre $\mathbb{K}$-álgebras:

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R} \\ & f & \longmapsto & f\otimes 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \sigma: & \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R} \\ & f & \longmapsto & 1\otimes f \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \delta: & \mathfrak{R} & \longrightarrow & \mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R} \\ & f & \longmapsto & 1\otimes f + f\otimes 1 \end{array}$$

Observamos que δ é assim definido para $f \in \mathfrak{L}$.

Lema 3.12 *μ, σ e δ são monomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras.*
*Demonstração:*Vamos demonstrar que vale para μ e será análogo para σ. Sejam $f_1, f_2 \in \mathfrak{R}$. Assim $\mu(f_1)\mu(f_1) = (f_1 \otimes 1)(f_2 \otimes 1) = (f_1 f_2) \otimes 1 = \mu(f_1 f_2)$. Também $\mu(f_1) = \mu(f_2) \iff f_1 \otimes 1 = f_2 \otimes 1 \iff f_1 = f_2$ pois nosso produto tensorial é sobre corpo. A demonstração para δ foi feita em 2.27. ■

Desta maneira teremos que $\mu(\mathfrak{R})$, $\sigma(\mathfrak{R})$ e $\delta(\mathfrak{R})$ são subálgebras associativas de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$. Mais ainda, são isomorfas a $\mathfrak{R}$.

Lema 3.13 *Todo elemento de $\mu(\mathfrak{R})$ comuta com os elementos de $\sigma(\mathfrak{R})$ e $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R} = \mu(\mathfrak{R})\sigma(\mathfrak{R}) = \sigma(\mathfrak{R})\mu(\mathfrak{R})$.*

*Demonstração:*Sejam $(f_1 \otimes 1) \in \mu(\mathfrak{R})$ e $(1 \otimes f_2) \in \sigma(\mathfrak{R})$, então;
$(f_1 \otimes 1)(1 \otimes f_2) = f_1 \otimes f_2 = (1 \otimes f_2)(f_1 \otimes 1)$. ■

Como $A \otimes A$ é um $\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}$-módulo, $A \otimes A$ e também será módulo para as subálgebras $\mu(\mathfrak{R})$, $\sigma(\mathfrak{R})$ e $\delta(\mathfrak{R})$.

Por hipótese já temos que $A \otimes A$ é finitamente gerado como um $\mathfrak{R}$-módulo sob ação diagonal e também como $\delta(\mathfrak{R})$-módulo. Daqui em diante, usamos a notação $\circ$ também para ação à direita de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ sobre $A \otimes A$ induzida pela ação adjunta (à direita) de $\mathfrak{R}$ sobre A (essa ação também é denotada por $\circ$).

Lema 3.14 *Se $a \in A$, $f \in \mathfrak{R}$ e $q \in Q$ (mas não qualquer em $\mathfrak{R}$), então:*

1. $(a \otimes b) \circ \mu(f) = (a \circ f) \otimes b$;
2. $(a \otimes b) \circ \sigma(f) = a \otimes (b \circ f)$;
3. $(a \otimes b) \circ \delta(q) = a \otimes (b \circ q) + (a \circ q) \otimes b$.

Demonstração:

1. $(a \otimes b) \circ \mu(f) = (a \otimes b) \circ (f \otimes 1) = (a \circ f) \otimes (b \circ 1) = (a \circ f) \otimes b$;
2. $(a \otimes b) \circ \sigma(f) = (a \otimes b) \circ (1 \otimes f) = (a \circ 1) \otimes (b \circ f) = a \otimes (b \circ f)$;
3. $(a \otimes b) \circ \delta(q) = (a \otimes b) \circ (1 \otimes q + q \otimes 1) = (a \otimes b) \circ (1 \otimes q) + (a \otimes b) \circ (q \otimes 1) = (a \circ 1) \otimes (b \circ q) + (a \circ q) \otimes (b \circ 1) = a \otimes (b \circ q) + (a \circ q) \otimes b$.

■

Como $\{x_1, ..., x_n\}$ é base para Q, o teorema 2.17 nos garante que tal conjunto é gerador de $\mathfrak{R}$.

Considerando que as imagens, via as aplicações descritas serão da forma:

$$\mu(x_i) = x_i \otimes 1; \sigma(x_i) = 1 \otimes x_i; \delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1,$$

teremos que $\{\mu(x_1), ..., \mu(x_n)\}$ gera $\mu(\mathfrak{R})$, $\{\sigma(x_1), ..., \sigma(x_n)\}$ gera $\sigma(\mathfrak{R})$ e $\{\delta(x_1), ..., \delta(x_n)\}$ gera $\delta(\mathfrak{R})$ como álgebras associativas isomorfas a $\mathfrak{R}$.

Tomando quaisquer monômios f e g de $\mathfrak{R}$, o elemento $\mu(f)\sigma(g) = f \otimes g$ é dito monômio de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ e tem seu grau definido por $deg(f) + deg(g)$.

Dessa maneira, o grau de um elemento arbitrário de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ será definido de modo usual, por se tratarem de produtos de monômios.

Vale ressaltar que, como em 3.4 temos que quaisquer dois monômios de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ comutam módulo termos de menor grau.

Uma observação muito importante é que μ, σ e δ preservam o grau dos monômios de $\mathfrak{R}$, ou seja, se ω é um monômio em $\mathfrak{R}$ de grau α então teremos que $\mu(\omega), \sigma(\omega)$ e $\delta(\omega) \in \mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}$ e $\mu(\omega), \sigma(\omega)$ e $\delta(\omega)$ tem graus iguais a α.

Vamos denotar por $\mathfrak{R}_t$, para cada $t \geq 0$, o subespaço de $\mathfrak{R}$ que consiste de todos os elementos de grau no máximo t.

De maneira análoga teremos também $(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})_t$, $\mu(\mathfrak{R})_t$, $\sigma(\mathfrak{R})_t$ e $\delta(\mathfrak{R})_t$.

Lema 3.15 *Para inteiros não negativos s e t temos:*

$$\delta(\mathfrak{R})_s(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})_t = (\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})_t\delta(\mathfrak{R})_s.$$

*Demonstração:*Basta mostrar o resultado para os geradores, e como já sabemos que a álgebra associativa $\mathfrak{R}$ é gerada por $\{x_1, ..., x_n\}$, teremos que $\delta(\mathfrak{R})$ é gerada pelos elementos $\delta(x_i)$ com $i = 1, ..., n$ e $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ é gerada pelos elementos da forma $x_j \otimes 1$ e $1 \otimes x_j$, para $\forall j = 1, ..., n$.
Façamos então os seguintes casos:

1) $\delta(x_j)(x_i \otimes 1) = (x_j \otimes 1 + 1 \otimes x_j)(x_i \otimes 1) = (x_jx_i) \otimes 1 + x_i \otimes x_j = (x_ix_j + [x_j, x_i]) \otimes 1 + x_ix_j = x_ix_j \otimes 1 + x_i \otimes x_j + [x_j, x_i] \otimes 1 = (x_i \otimes 1)(x_j \otimes 1 + 1 \otimes x_j) + \sum_k \lambda_{ijk}x_k \otimes 1$. Dessa forma, temos que $\delta(x_j)(x_i \otimes 1) = (x_i \otimes 1)\delta(x_j)+$ elemento de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ nulo ou de grau 1.

2) Mostremos por indução que , para qualquer $\mu \in \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ não nulo teremos;

$$\delta(x_j)\mu - \mu\delta(x_j) \text{ é } 0 \text{ ou elemento de } grau \leq grau(\mu).$$

Pelo Teorema 2.21, é suficiente trabalhar com μ sendo um monômio.
Faremos então indução pelo $grau(\mu)$. Se $grau(\mu) = 1$, então μ é combinação linear de $x_i \otimes 1$ e $1 \otimes x_i$ e o resultado é válido pelo Caso 1.
Vamos então considerar o caso geral e escrever $\mu = \widetilde{\mu}t$, com t sendo um monômio de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ com $grau(t) = 1$ e assim $grau(\widetilde{\mu}) = grau(\mu) - 1$ e $\delta(x_j)\mu - \mu\delta(x_j) = \delta(x_j)\widetilde{\mu}t - \widetilde{\mu}t\delta(x_j)$. Pelo passo indutivo $\delta(x_j)\widetilde{\mu} - \widetilde{\mu}\delta(x_j) \in (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_{grau(\widetilde{\mu})}$ o que implica que $\delta(x_j)\widetilde{\mu}t - \widetilde{\mu}\delta(x_j)t \in (\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})_{grau(\widetilde{\mu})+1}$. Também, $\delta(x_j)t - t\delta(x_j) \in (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_1$, assim $\widetilde{\mu}\delta(x_j)t - \widetilde{\mu}t\delta(x_j) \in (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_{grau(\widetilde{\mu})+1}$

e fazendo-se os cancelamentos possíveis temos que $\delta(x_j)\widetilde{\mu}t - \widetilde{\mu}t\delta(x_j) \in (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_{grau(\mu)}$, já que $grau(\mu) = grau(\widetilde{\mu}) + 1$.
Segue portanto que $\delta(x_j)\mu - \mu\delta(x_j) \in (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_{grau(\mu)}$.

3) Mostremos agora que

$$\delta(\mathfrak{R})_s(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t \subseteq (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t\delta(\mathfrak{R})_s.$$

Vamos fazer indução por s.
Se $s = 1$, então o resultado é válido pelo Caso 2.
Passo Indutivo: $\delta(\mathfrak{R})_s = \sum_i \delta(x_i)\delta(\mathfrak{R})_{s-1}$. Observando que $\delta(x_i)(\delta(\mathfrak{R})_{s-1}(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t) \subseteq \delta(x_i)((\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t\delta(\mathfrak{R})_{s-1}) = (\delta(x_i)(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t)\delta(\mathfrak{R})_{s-1} \subseteq ((\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t\delta(x_i) + (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t)\delta(\mathfrak{R})_{s-1} \subseteq (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t\delta(\mathfrak{R})_s$. Assim, $\sum_i \delta(x_i)\delta(\mathfrak{R})_{s-1}(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t \subseteq (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t\delta(\mathfrak{R})_s$, portanto $\delta(\mathfrak{R})_s(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t \subseteq (\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t\delta(\mathfrak{R})_s$.

4) A inversa $(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t\delta(\mathfrak{R})_s \subseteq \delta(\mathfrak{R})_s(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R})_t$ é similar. ■

3.8 A Álgebra Associativa Livre

A partir de agora, denotemos $\mathfrak{F}(\mathfrak{L})$ simplesmente por $\mathfrak{F}$.

Lembrando que $\mathfrak{F}$ foi tomada em 3.6 como uma álgebra de Lie livre sobre o corpo $\mathbb{K}$ com base livre $\{W_1, ..., W_m, X_1, ..., X_n\}$, seja W o ideal de $\mathfrak{F}$ gerado por $\{W_1, ..., W_m\}$, daí $\mathfrak{F}/W$ pode ser identificada com a subálgebra G de $\mathfrak{F}$ gerada por $\{X_1, ..., X_n\}$.

Como G é livre em $\{X_1, ..., X_n\}$, sua álgebra universal envelopante $\mathfrak{U}(G)$ é $\mathbb{K}$-álgebra associativa livre sobre o conjunto $\{X_1, ..., X_n\}$, como já visto no Capítulo 2. Tal álgebra universal de G será denotada por $\widetilde{\mathfrak{R}}$.

Os elementos de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ da forma $X_{i_1}...X_{i_n}$ são ditos monômios.

Como W tem estrutura natural via ação adjunta de $\mathfrak{F}$-módulo à direita, W também será módulo à direita sobre $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Sua ação sobre os monômios de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ é dada pelo comutador normado à esquerda, ou seja:

$$w \circ X_{i_1}...X_{i_n} = [[...[w, X_{i_1}], ...], X_{i_n}],\ para\ \forall w \in W.$$

Lema 3.16 *A subálgebra de Lie de $\mathfrak{F}$ gerada pelos elementos da forma $W_r \circ \widetilde{f}$ com $1 \le r \le m$ e $\widetilde{f}$ monômio de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ é um ideal de $\mathfrak{F}$.*

*Demonstração:*Seja $\widetilde{W}$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{F}$ gerada pelos elementos da forma $W_r \circ \widetilde{f}$ com $1 \leq r \leq m$ e $\widetilde{f}$ monômio de $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Precisamos mostrar que $[\widetilde{W}, \mathfrak{F}] \subseteq \widetilde{W}$. Basta mostrar que é válido para os geradores de $\mathfrak{F}$, sendo eles os elementos $W_1, ..., W_m, X_1, ..., X_n$. Como $W_i = W_i \circ 1$, considerando 1 o monômio trivial de $\widetilde{\mathfrak{R}}$, temos que $W_i \subseteq \widetilde{W}$ e, sendo $\widetilde{W}$ uma subálgebra, segue imediatamente que $[\widetilde{W}, W_i] \subseteq \widetilde{W}$. Mostremos então que $[\widetilde{W}, X_i] \subseteq \widetilde{W}$, aqui também é suficiente mostrar o resultado para os geradores $W_i \circ \widetilde{f}$. Então, $[W_i \circ \widetilde{f}, X_i] = (W_i \circ \widetilde{f}) \circ X_i = W_i \circ (\widetilde{f} X_i)$. Como $(\widetilde{f} X_i) \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ segue o resultado. ■

Temos assim que esta subálgebra $\widetilde{W}$ é igual a W.

Como G é livre, existe epimorfismo natural de álgebras de Lie

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Q = \mathfrak{L}/A \\ X_i & \longmapsto & x_i = x_i' + A \end{array}$$

Tal epimorfismo é estendido a um epimorfismo $\rho : \widetilde{\mathfrak{R}} \longrightarrow \mathfrak{R}$ de álgebras envelopantes (associativas).

Lema 3.17 *A ação de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ sobre W e de $\mathfrak{R}$ sobre A são compatíveis, no sentido que:*

$$\pi(w \circ \widetilde{f}) = \pi(w) \circ (\rho(\widetilde{f})), w \in W, \widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{R}}.$$

*Demonstração:*É suficiente mostrar o resultado tomando um monômio $\widetilde{f}$ qualquer. Usemos a indução sobre o $grau(\widetilde{f})$. É trivial que vale para $grau(\widetilde{f}) = 1$, pois $w \circ \widetilde{f} = [w, \widetilde{f}]$, daí $\pi(w \circ \widetilde{f}) = \pi([w, \widetilde{f}]) = [\pi(w), \pi(\widetilde{f})] = \pi(w) \circ \rho(\widetilde{f})$, lembrando que π é homomorfismo de álgebras de Lie.
No caso geral, podemos escrever $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1 \widetilde{f}_2$, com $grau(\widetilde{f}_2) = 1$ e $grau(\widetilde{f}_1) = grau(\widetilde{f}) - 1$. Teremos então que: $\pi(w \circ \widetilde{f}) = \pi(w \circ (\widetilde{f}_1 \widetilde{f}_2)) = \pi((w \circ \widetilde{f}_1) \circ \widetilde{f}_2) = \pi(w \circ \widetilde{f}_1)\rho(\widetilde{f}_2)$, que por indução é igual a $(\pi(w) \circ \rho(\widetilde{f}_1)) \circ \rho(\widetilde{f}_2) = \pi(w) \circ (\rho(\widetilde{f}_1)\rho(\widetilde{f}_2)) = \pi(w) \circ \rho(\widetilde{f}_1 \widetilde{f}_2) = \pi(w) \circ \rho(\widetilde{f})$, considerando que ρ é um homomorfismo de álgebras associativas. ■

Vamos agora, como na seção 3.7 definir as aplicações de álgebras universais:

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\mu}: & \widetilde{\mathfrak{R}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}} \\ & \widetilde{f} & \longmapsto & \widetilde{f} \otimes 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \widetilde{\sigma}: & \widetilde{\mathfrak{R}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}} \\ & \widetilde{f} & \longmapsto & 1 \otimes \widetilde{f} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \widetilde{\delta}: & \widetilde{\mathfrak{R}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}} \\ & \widetilde{f} & \longmapsto & 1 \otimes \widetilde{f} + \widetilde{f} \otimes 1 \end{array}$$

Observando que, para $\widetilde{\delta}$, a definição acima vale para $\widetilde{f} \in G$.

Obtemos, de maneira análoga à feita em tal seção que $\widetilde{\mu}, \widetilde{\sigma}$ e $\widetilde{\delta}$ são monomorfismos e também que $\widetilde{\mu}(\widetilde{\mathfrak{R}})$, $\widetilde{\sigma}(\widetilde{\mathfrak{R}})$ e $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$ são subálgebras associativas de $\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}$ isomorfas à $\widetilde{\mathfrak{R}}$.

Seja $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$, então suas imagens via tais aplicações serão denotadas por $\widetilde{\mu}(\widetilde{f}) \in \widetilde{\mu}(\widetilde{\mathfrak{R}})$, $\widetilde{\sigma}(\widetilde{f}) \in \widetilde{\sigma}(\widetilde{\mathfrak{R}})$ e $\widetilde{\delta}(\widetilde{f}) \in \widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$.

Observe que, como em 3.13, aqui também $\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}} = \widetilde{\mu}(\widetilde{\mathfrak{R}})\widetilde{\sigma}(\widetilde{\mathfrak{R}}) = \widetilde{\sigma}(\widetilde{\mathfrak{R}})\widetilde{\mu}(\widetilde{\mathfrak{R}})$.

Dessa maneira, $\{\widetilde{\mu}(X_1), ..., \widetilde{\mu}(X_n)\}$ gera $\widetilde{\mu}(\widetilde{\mathfrak{R}})$, $\{\widetilde{\sigma}(X_1), ..., \widetilde{\sigma}(X_n)\}$ gera $\widetilde{\sigma}(\widetilde{\mathfrak{R}})$ e $\{\widetilde{\delta}(X_1), ..., \widetilde{\delta}(X_n)\}$ gera $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$ como álgebras associativas.

Para os elementos de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ e $\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}$ as definições de grau são análogas às de elementos de $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$, também com propriedades semelhantes.

Considerando as restrições devidas, teremos a função grau definida também para as subálgebras $\widetilde{\mu}(\widetilde{\mathfrak{R}})$, $\widetilde{\sigma}(\widetilde{\mathfrak{R}})$ e $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$.

Aqui também podemos definir o subespaço $\widetilde{\mathfrak{R}}_t$ de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ como o subespaço que consiste de todos os elementos de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ com grau no máximo t, bem como podemos definir os subespaços $(\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}})_t$, $\widetilde{\mu}(\widetilde{\mathfrak{R}})_t$, $\widetilde{\sigma}(\widetilde{\mathfrak{R}})_t$ e $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})_t$ de forma análoga, isto é, o índice t significa que consideramos o subespaço de elementos com grau no máximo t.

Capítulo 4

Relações nas Álgebras Envelopantes

Neste capítulo vamos continuar o estudo do artigo [4], enfatizando as relações nas álgebras envelopantes envolvidas para que possamos concluir a demonstração da Proposição 3.2, enunciada no capítulo anterior.

4.1 A aplicação $\mathbb{K}$-linear η

Se considerarmos o epimorfismo $\rho : \widetilde{\mathfrak{R}} \longrightarrow \mathfrak{R}$, conseguido em 3.8 de modo que $\rho(X_i) = x_i$, obteremos para cada i um epimorfismo induzido

$$\rho \otimes \rho : \widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}} \longrightarrow \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R};$$

que aplica $\widetilde{\mu}(X_i) = X_i \otimes 1$ em $\mu(x_i) = x_i \otimes 1$, $\widetilde{\sigma}(X_i) = 1 \otimes X_i$ em $\sigma(x_i) = 1 \otimes x_i$ e $\widetilde{\delta}(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1$ em $\delta(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$.

Seja $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$, então teremos que $\rho \otimes \rho$ age sobre as subálgebras $\widetilde{\mu}(\widetilde{\mathfrak{R}})$ e $\widetilde{\sigma}(\widetilde{\mathfrak{R}})$ da seguinte forma:

- $(\rho \otimes \rho)(\widetilde{f}(\widetilde{\mu}(X_i))) = (\rho \otimes \rho)(\widetilde{f}(X_i \otimes 1)) = \rho(\widetilde{f}(X_i)) \otimes \rho(1) = \rho\widetilde{f}(X_i) \otimes 1 = \widetilde{\mu}(\rho\widetilde{f})$.
- $(\rho \otimes \rho)(\widetilde{f}(\widetilde{\sigma}(X_i))) = (\rho \otimes \rho)(\widetilde{f}(1 \otimes X_i)) = \rho(1) \otimes \rho(\widetilde{f}(X_i)) = 1 \otimes \rho\widetilde{f}(X_i) = \widetilde{\sigma}(\rho\widetilde{f})$.

Assim, existe uma aplicação $\mathbb{K}$-linear:

$$\begin{array}{cccc} \eta : & \mathfrak{R} & \longrightarrow & \widetilde{\mathfrak{R}} \\ & x_1^{l_1} x_2^{l_2} ... x_n^{l_n} & \longmapsto & X_1^{l_1} X_2^{l_2} ... X_n^{l_n} \end{array}$$

É importante observar que a composição $\rho\eta$ é a identidade em $\mathfrak{R}$, bem como $(\rho \otimes \rho)(\eta \otimes \eta)$ é a identidade em $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ e que tanto η quanto $\eta \otimes \eta$ preservam grau. O mesmo não pode ser assegurado com relação aos produtos. Observamos que η não é homomorfismo de álgebras associativas.

Para cada inteiro não negativo t, vamos escrever:

$$Nuc(\rho)_t = Nuc(\rho) \cap \widetilde{\mathfrak{R}}_t \ \ e \ \ Nuc(\rho \otimes \rho)_t = Nuc(\rho \otimes \rho) \cap (\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}})_t.$$

Lema 4.1 *1. Se $t \geq 2$, então $Nuc(\rho)_t$ é gerado por elementos de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ da forma*

$$\widetilde{p_1}(X_jX_i - X_iX_j - \sum_k \lambda_{ijk}X_k)\widetilde{p_2},$$

com $1 \leq i < j \leq n$ e $\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}$ monômios de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que $grau(\widetilde{p_1}\widetilde{p_2}) \leq t - 2$;

2. Se $t \geq 2$, então $Nuc(\rho \otimes \rho)_t$ é gerado por elementos de $\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}$ da forma

$$\widetilde{\mu_1}((X_j \otimes 1)(X_i \otimes 1) - (X_i \otimes 1)(X_j \otimes 1) - \sum_k \lambda_{ijk}(X_k \otimes 1))\widetilde{\mu_2},$$

e

$$\widetilde{\mu_1}((1 \otimes X_j)(1 \otimes X_i) - (1 \otimes X_i)(1 \otimes X_j) - \sum_k \lambda_{ijk}(1 \otimes X_k))\widetilde{\mu_2},$$

com $1 \leq i < j \leq n$ e $\widetilde{\mu_1}, \widetilde{\mu_2}$ monômios de $\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que $grau(\widetilde{\mu_1}\widetilde{\mu_2}) \leq t - 2$.

3. Seja $\widetilde{p}$ um monômio de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ de grau $t \geq 1$. Tome $l \geq 0$ e suponha que algum gerador X_k de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ aparece pelo menos $l+1$ vezes quando $\widetilde{p}$ é escrito como produto de geradores, $\widetilde{p} = X_{i_1}...X_{i_t}$. Então podemos escrever $\widetilde{p}$ da forma:

$$\widetilde{p} = X_k^{l+1}X_1^{l_1}X_2^{l_2}...X_n^{l_n} + \widetilde{f_1} + \widetilde{f_2},$$

com $l + 1 + l_1 + ... + l_n = t$, $\widetilde{f_1} \in \widetilde{\mathfrak{R}}_{t-1}$ e $\widetilde{f_2} \in Nuc(\rho)_t$.

Demonstração:

1. Seja $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{R}}_t$. Vamos escrever $\widetilde{f} = \widetilde{f_1} + \widetilde{f_2}$, onde $\widetilde{f_1}$ é combinação linear de monômios da forma $X_1^{l_1}X_2^{l_2}\cdots X_n^{l_n}$ de grau no máximo t e $\widetilde{f_2}$ uma combinação linear de elementos do tipo especificado em (1). É fácil ver que $\widetilde{f_2} \in Nuc(\rho)_t$. Também por causa da forma de $\widetilde{f_1}$ existe $f_1 \in \mathfrak{R}$ tal que $\eta(f_1) = \widetilde{f_1}$.
   Suponha que $\widetilde{f} \in Nuc(\rho)_t$. Então segue que $\widetilde{f_1} \in Nuc(\rho)_t$ e que $f_1 = \rho\eta(f_1) = \rho(\widetilde{f_1}) = 0$. Assim, $\widetilde{f_1} = 0$ e $\widetilde{f} = \widetilde{f_2}$.

2. Semelhante ao caso (1).

3. Usando as idéias da demonstração do Lema 3.4, podemos escrever $\rho(\widetilde{p}) = q + f_1$, onde $q = x_k^{l+1}x_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$ e $grau(f_1) \leq t-1$. Tome $\widetilde{q} = X_k^{l+1}X_1^{l_1}\cdots X_n^{l_n}$, $\eta(f_1) = \widetilde{f}_1$ e $\widetilde{f}_2 = \widetilde{p} - \widetilde{q} - \widetilde{f}_1$. Assim, $\widetilde{f}_1 \in \widetilde{\mathfrak{R}}_{t-1}$.
Também, $grau(\widetilde{f}_2) \leq t$ e

$$\rho(\widetilde{f}_2) = \rho(\widetilde{p}) - \rho(\widetilde{q}) - \rho(\widetilde{f}_1) = q + f_1 - q - f_1 = 0.$$

Assim, $\widetilde{f}_2 \in Nuc(\rho)_t$ e o resultado segue do fato que $\widetilde{p} = \widetilde{q} + \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$.

■

Como visto em 3.8, W é um $\widetilde{\mathfrak{R}}$-módulo, assim temos também que W⊗W é um $\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}$-módulo e concluímos que, por restrição, $W \otimes W$ é um $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$-módulo.

Consideramos $W \otimes W$ como $\widetilde{\mathfrak{R}}$-módulo via o isomorfismo $\widetilde{\mathfrak{R}} \simeq \widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$. Denotamos por $\circ$ a ação de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ sobre $W \otimes W$ definida acima e também a ação adjunta de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ sobre W. Vamos denotar o subespaço de $\mathfrak{F}$ gerado pelos comutadores $[y,z]$ com $y, z \in W$ por $[W,W]$. Consideremos a aplicação entre espaços vetoriais:

$$\begin{array}{rccc} \chi: & W \otimes W & \longrightarrow & [W,W] \\ & (y \otimes z) & \longmapsto & [y,z] \end{array}$$

Lema 4.2 *χ é homomorfismo de $\widetilde{\mathfrak{R}}$-módulos.*

*Demonstração:*Para mostrarmos que χ é um homomorfismo de $\widetilde{\mathfrak{R}}$-módulos, é suficiente mostrarmos que $\chi((w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}) = \chi(w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}$, para $w_1, w_2 \in W$ e $\widetilde{f}$ sendo um monômio de $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Usamos indução pelo comprimento de $\widetilde{f}$.
Se o comprimento de $\widetilde{f}$ for igual a 1, então $\widetilde{f} = X_i$, então;
$\chi((w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}) = \chi((w_1 \otimes w_2) \circ X_i) = \chi((w_1 \circ X_i) \otimes w_2 + w_1 \otimes (w_2 \circ X_i)) = $
$= \chi([w_1, X_i] \otimes w_2 + w_1 \otimes [w_2, X_i]) = [[w_1, X_i], w_2] + [w_1, [w_2, X_i]] = [[w_1, w_2], X_i] = $
$= \chi(w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}$, sendo a penúltima igualdade um resultado direto da Igualdade de Jacobi.
No caso geral, para qualquer $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$, podemos escrever $\widetilde{f} = \widetilde{f}_1 \cdot X_i$, com o comprimento de $\widetilde{f}_1$ igual ao comprimento de $\widetilde{f}$ menos 1, daí teremos que:
$\chi((w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}) = \chi((w_1 \otimes w_2) \circ (\widetilde{f}_1 \cdot X_i) = \chi(((w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}_1) \circ X_i$ que pela primeira parte é igual à $\chi((w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}_1) \circ X_i = (\chi(w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}_1) \circ X_i = \chi(w_1 \otimes w_2) \circ (\widetilde{f}_1 \cdot X_i) = \chi(w_1 \otimes w_2) \circ \widetilde{f}$, sendo a primeira igualdade garantida pela indução. ■

Como $Nuc(\chi)$ é um $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$-submódulo de W$\otimes$W segue que [W,W] herda uma estrutura de $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$-módulo e assim χ se torna um homomorfismo de $\widetilde{\mathfrak{R}}$-módulos.

Para cada $y, z \in$ W e $\widetilde{g} \in G$ temos:

$$[y,z] \circ \delta(\widetilde{g}) = [[y,\widetilde{g}],z] + [y,[z,\widetilde{g}]] = [[y,z],\widetilde{g}]. \tag{4.1}$$

4.2 Anuladores do Ideal Abeliano

Definição 4.3 *Considere o ideal abeliano A da álgebra de Lie finitamente gerada $\mathfrak{L}$ e sejam $a, b \in A$. Definimos os anuladores de a em $\mathfrak{R}$ e de $a \otimes b$ em $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ respectivamente como:*

1. $Ann_{\mathfrak{R}}(a) = \{f \in \mathfrak{R} \mid a \circ f = 0\}$;
2. $Ann_{\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}}(a \otimes b) = \{\phi \in \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R} \mid (a \otimes b) \circ \phi = 0\}$.

Denotamos por $\circ$ a ação adjunta de $\mathfrak{R}$ sobre A e a ação de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ sobre $A \otimes A$ que ela induz. Observamos que tais anuladores são ideais em seus respectivos anéis.

Lema 4.4 $Ann_{\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}}(a \otimes b) = (Ann_{\mathfrak{R}}(a) \otimes \mathfrak{R}) + (\mathfrak{R} \otimes Ann_{\mathfrak{R}}(b))$.
*Demonstração:*Identificando $a \circ \mathfrak{R}$ por V_a e $b \circ \mathfrak{R}$ por V_b, vamos considerar as seguintes sequências exatas:

$$0 \longrightarrow Ann(a) \longrightarrow \mathfrak{R} \longrightarrow V_a \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

$$0 \longrightarrow Ann(b) \longrightarrow \mathfrak{R} \longrightarrow V_b \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

$$0 \longrightarrow Ann(a \otimes b) \longrightarrow (\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) \longrightarrow (a \otimes b) \circ (\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) \longrightarrow 0 \tag{4.4}$$

Considerando que estamos trabalhando somente com corpos, temos que o produto tensorial preserva sequência exata curta (veja [10], p. 85). Então se aplicarmos $\otimes V_b$ em 4.2 e $\mathfrak{R}\otimes$ em 4.3, teremos que as sequências abaixo também serão exatas:

$$0 \longrightarrow (Ann(a)) \otimes V_b \xrightarrow{\alpha_1} \mathfrak{R} \otimes V_b \xrightarrow{\alpha_2} V_a \otimes V_b \longrightarrow 0 \ ;$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{R} \otimes (Ann(b)) \xrightarrow{\beta_1} \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R} \xrightarrow{\beta_2} \mathfrak{R} \otimes V_b \longrightarrow 0 \ ;$$

Fazendo a composição $\theta = \alpha_2 \circ \beta_2$ conseguimos a seguinte sequência exata curta;

$$0 \longrightarrow Nuc(\theta) \longrightarrow \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R} \xrightarrow{\theta} V_a \otimes V_b \longrightarrow 0 \ ,$$

com $Nuc(\theta) = \beta_2^{-1}(Nuc(\alpha_2) = \beta_2^{-1}(Ann(a) \otimes V_b) = Ann(a) \otimes \mathfrak{R} + \mathfrak{R} \otimes Ann(b)$ e segue o resultado. ∎

Lembremos que A é gerado como ideal (ou equivalentemente como $\mathfrak{R}$-módulo) pelo conjunto $\{w_1, ..., w_m\}$. Como $\mathfrak{R}$ é Noetheriano (à direita) e cada $Ann_{\mathfrak{R}}(w_r)$ é um ideal em $\mathfrak{R}$, segue que cada $Ann_{\mathfrak{R}}(w_r)$ é finitamente gerado como ideal à direita de $\mathfrak{R}$.

Vamos então supor que $Ann_{\mathfrak{R}}(w_r)$ é gerado pelo conjunto $\{g_{r1}, ..., g_{rc}\}$ de $\mathfrak{R}$. Daí teremos:

$$Ann_{\mathfrak{R}}(w_r) = g_{r1}\mathfrak{R} + ... + g_{rc}\mathfrak{R}.$$

Como $\{w_1, ..., w_m\}$ é finito, podemos assumir que c é independente de r e segue do Lema 4.4 que para qualquer $r, s \in \{1, ..., m\}$ teremos:

$$Ann_{\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}}(w_r \otimes w_s) = \mu(g_{r1})(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}) + ... + \mu(g_{rc})(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}) + \sigma(g_{s1})(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}) + ... + \sigma(g_{sc})(\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}). \tag{4.5}$$

De fato, pois;

$Ann_{\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}}(w_r \otimes w_s) = (Ann_{\mathfrak{R}}(w_r) \otimes \mathfrak{R}) + (\mathfrak{R} \otimes Ann_{\mathfrak{R}}(w_s)) = (g_{r1}\mathfrak{R} + ... + g_{rc}\mathfrak{R}) \otimes \mathfrak{R} + \mathfrak{R} \otimes (g_{s1}\mathfrak{R} + ... + g_{sc}\mathfrak{R}) = (g_{r1}\mathfrak{R}) \otimes \mathfrak{R} + ... + (g_{rc}\mathfrak{R}) \otimes \mathfrak{R} + \mathfrak{R} \otimes (g_{s1}\mathfrak{R}) + ... + \mathfrak{R} \otimes (g_{sc}\mathfrak{R}) = (g_{r1} \otimes 1)(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) + ... + (g_{rc} \otimes 1)(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) + (1 \otimes g_{s1})(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) + ... + (1 \otimes g_{sc})(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) = \mu(g_{r1})(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) + ... + \mu(g_{rc})(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) + \sigma(g_{s1})(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}) + ... + \sigma(g_{sc})(\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})$.

Para $1 \le r, s \le m$ e $1 \le k \le n$ seja $M(r, s, k)$ o $\delta(\mathfrak{R})$-submódulo de $A \otimes A$ gerado pelos elementos da forma $(w_r \otimes w_s) \circ (x_k \otimes 1)^i, i = 1, 2....$ Como $A \otimes A$ é finitamente gerado como módulo para o anel Noetheriano (à direira) $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$, segue que $M(r, s, k)$ é finitamente gerado como $\widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})$-módulo.

Lema 4.5 *Existe um inteiro positivo l tal que $M(r, s, k)$ é gerado por $(w_r \otimes w_s) \circ (x_k \otimes 1)^i$, $i = 0, 1, ..., l$, independente de r, s e k.*
*Demonstração:*Para r, s, k fixos defina V_j como sendo o $\delta(\mathfrak{R})$-submódulo de $A \otimes A$ gerado pelos elementos da forma $(w_r \otimes w_s) \circ (x_k \otimes 1)^i$ para $0 \le i \le j$.
Considere a cadeia de $\delta(\mathfrak{R})$-submódulo de $A \otimes A$ dada por $V_0 \subseteq \cdots \subseteq V_n \subseteq \cdots$
Como $A \otimes A$ é Noetheriano, tal cadeia se estabiliza. Assim existe l inteiro positivo tal que $V_l = V_{l+1} = \cdots$, daí segue que $A \otimes A = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = V_l$, tomando l o máximo necessário e l será independente de r, s, k. ∎

A partir de agora denotaremos $x_k \otimes 1$ por u_k.

Assim, para cada r, s e k, existem $f_{rski} \in \mathfrak{R}$ tais que:

$$(w_r \otimes w_s) \circ u_k^{l+1} + \sum_{i=0}^{l} (w_r \otimes w_s) \circ u_k^i \delta(f_{rski}) = 0.$$

Assim $u_k^{l+1} + \sum_{i=0}^{l} u_k^i \delta(f_{rski}) \in Ann_{\mathfrak{R}\otimes\mathfrak{R}}(w_r \otimes w_s)$.

Então usando o Lema 4.5, existem elementos $\phi_{rsk1}, ..., \phi_{rskc}$ e $\psi_{rsk1}, ..., \psi_{rskc}$ de $\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R}$ tais que

$$u_k^{l+1} + \sum_{i=0}^{l} u_k^i \delta(f_{rski}) + \sum_{j=1}^{c} (g_{rj} \otimes 1)\phi_{rskj} + \sum_{j=1}^{c} (1 \otimes g_{sj})\psi_{rskj} = 0. \tag{4.6}$$

4.3 Definição do subconjunto E

Seja e_0 um inteiro positivo tal que $e_0 \geq 2$, $e_0 \geq ln$ e $e_0/2$ seja maior que o grau de cada um dos $f_{rski}, (g_{rj} \otimes 1)\phi_{rskj}$ e $(1 \otimes g_{sj})\psi_{rskj}$ para qualquer que seja a escolha de r, s, k, i, j possível. Observamos que o conjunto de r, s, k, i, j por sua vez é finito.

Podemos agora definir o subconjunto E de $\mathfrak{F}$, o qual apresentará a álgebra de Lie $\mathfrak{L}$. Tome E o subconjunto de $\mathfrak{F}$ que consiste nos elementos das formas:

1. $[X_j, X_i] - \sum_k \lambda_{ijk} X_k - W_{\sigma(i,j)}$, para $1 \leq i < j \leq n$;
2. $W_r \circ \eta(g_{rj})$, para $1 \leq r \leq m$, $1 \leq j \leq c$;
3. $[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{q}]$, para todos $r, s \in \{1, ..., m\}$ e quaisquer monômios $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que $grau(\widetilde{pq}) \leq e_0$.

É muito fácil observar que E é um subconjunto finito e que $E \subseteq Nuc(\pi)$. Os elementos da forma (2) pertencem a $Nuc(\pi)$ considerando 3.1 e os elementos da forma (3) também pertencem a $Nuc(\pi)$, basta lembrar de 3.17. Para completar a prova da Proposição 3.2, basta mostrarmos que $\pi^{-1}(A)/E^{id}$ é abeliano.

Lema 4.6 $W + E^{id} = \pi^{-1}(A)$.

*Demonstração:*Primeiramente, temos que $W + E^{id} \subseteq \pi^{-1}(A) \Leftrightarrow \pi(W + E^{id}) \subseteq A$. Lembremos que π é um homomorfismo de álgebras de Lie, daí $\pi(W + E^{id}) = \pi(W) + \pi(E^{id})$. Mas temos que $\pi(W)$ é ideal de $\mathfrak{L}$ gerado por $\{\pi(W_1), \cdots, \pi(W_n)\} = \{w_1, \cdots, w_n\} \subseteq A$,

também $E \subseteq Nuc(\pi)$ assim, $E^{id} \subseteq Nuc(\pi)$, ou seja, $\pi(E^{id}) = 0$, logo é contido em A.
Isso resulta em $W + E^{id} \subseteq \pi^{-1}(A)$.
Por outro lado, já temos que $\pi(W + E^{id}) \subseteq A \subseteq \mathfrak{L} = \pi(\mathfrak{F})$.
Temos também que $\mathfrak{L}/\pi(W + E^{id}) = \pi(\mathfrak{F})/\pi(W + E^{id})$. Assim usando a definição de E, a álgebra de Lie $\mathfrak{F}/W + E^{id}$ é isomorfa ao quociente G que é livre sobre $X_1, ..., X_n$ quocientada pelo seu ideal gerado pelos elementos da forma $[X_j, X_i] - \sum \lambda_{ijk} X_k$, dessa forma é isomorfa também a Q, daí $dim(\mathfrak{F}/W + E^{id}) = n$.
Considerando π segue a desigualdade

$$n = dim(\mathfrak{L}/A) \leq dim(\mathfrak{L}/\pi(W + E^{id})) \leq dim(\mathfrak{F}/W + E^{id}) = n,$$

daí $\pi^{-1}(A) = \pi^{-1}(\pi(W + E^{id})) = W + E^{id}$. ■

Como consequência imediata do Lema acima, a fim de mostrar que $\pi^{-1}(A)/E^{id}$ é abeliano é suficiente mostrar que $[W, W] \subseteq E^{id}$.

Vamos agora introduzir uma notação que facilite nosso trabalho. Para $y, z \in W$ escreveremos $y =_E z$ para denotar $y - z \in E^{id}$.

Nesta notação, mostremos que $[y, z] =_E 0$ para $\forall y, z \in W$.

Em 3.17, vimos que W é gerado como álgebra de Lie por elementos da forma $W_r \circ \widetilde{f}$ com $1 \leq r \leq m$ e $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$. Assim, é suficiente mostrar que $[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{q}] =_E 0$ para $r, s \in \{1, ..., m\}$ e quaisquer monômios $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$. Pela forma (3) dos elementos de E, temos que vale para $grau(\widetilde{pq}) \leq e_0$. Mostremos o caso geral usando indução sobre o grau do produto. Suponha $e \geq e_0$ e assuma as seguintes hipóteses indutivas:

$[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{q}] =_E 0$, para todos $r, s \in \{1, ..., m\}$ e quaisquer monômios $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que $grau(\widetilde{pq}) \leq e$. Queremos demonstrar que o mesmo vale se o $grau(\widetilde{pq}) = e + 1$.

Para que possamos completar o passo indutivo, precisamos de resultados preliminares.

4.4 Resultados Preliminares

Lema 4.7 $W_r \circ \widetilde{f} =_E 0$ *para* $\forall r \in \{1, ..., m\}$ *e qualquer elemento* $\widetilde{f} \in Nuc(\rho)_{e+2}$.

Demonstração: Da parte (1) do Lema 4.1, podemos assumir que $\widetilde{f}$ tem a forma $\widetilde{f} = \widetilde{p}_1(X_j X_i - X_i X_j - \sum_k \lambda_{ijk} X_k)\widetilde{p}_2$, onde $\widetilde{p}_1$ e $\widetilde{p}_2$ são monômios tais que $grau(\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2) \leq e$.

Como a ação de $\mathfrak{R}$ em W estende a ação adjunta de G em W e $X_jX_i - X_iX_j - \sum \lambda_{ijk}X_k = W_{\sigma(i,j)}$, temos que
$W \circ \widetilde{f} = W \circ (\widetilde{p}_1(X_jX_i - X_iX_j - \sum_k \lambda_{ijk}X_k)\widetilde{p}_2) = ((W \circ \widetilde{p}_1) \circ (X_jX_i - X_iX_j - \sum_k \lambda_{ijk}X_k)) \circ \widetilde{p}_2 =_E [W \circ \widetilde{p}_1, W_{\sigma(i,j)}] \circ \widetilde{p}_2$ que está contido no ideal de $\mathfrak{F}$ gerado por $[W \circ \widetilde{p}_1, W_{\sigma(i,j)}]$.
Como $grau(\widetilde{p}_1) \leq e$, por indução, $[W \circ \widetilde{p}_1, W_{\sigma(i,j)}] =_E 0$ segue imediatamente que $W \circ \widetilde{f} =_E 0$, como queríamos. ∎

Lema 4.8 $[[\ W_r \circ \widetilde{h}_r, W_s \circ \widetilde{h}_s\ ]\ , W_t \circ \widetilde{h}_t\ ] =_E 0$ *para quaisquer* $r, s, t \in \{1, ..., m\}$ *e quaisquer monômios* $\widetilde{h}_r, \widetilde{h}_s, \widetilde{h}_t \in \mathfrak{R}$ *tais que* $grau(\widetilde{h}_r\widetilde{h}_s\widetilde{h}_t) \leq (3e/2) - 2$.

*Demonstração:*Primeiramente, se $grau(\widetilde{h}_r, \widetilde{h}_s, \widetilde{h}_t) = 0$, então $\widetilde{h}_r = \widetilde{h}_s = \widetilde{h}_t = 1$, e temos que $[[W_r, W_s], W_t] \subseteq E^{id}$ pelo fato de $[W_r, W_s] \subseteq E$, assim $[[W_r, W_s], W_t] =_E 0$. Seja $N = grau(\widetilde{h}_r\widetilde{h}_s\widetilde{h}_t)$.
Vamos supor que $0 < N \leq (3e/2) - 2$ e que o resultado seja válido para todo r, s, t e todo $\widetilde{h}_r, \widetilde{h}_s, \widetilde{h}_t$ tais que $grau(\widetilde{h}_r\widetilde{h}_s\widetilde{h}_t) < N$.
Escreva $N_r = grau(\widetilde{h}_r)$, $N_s = grau(\widetilde{h}_s)$ e $N_t = grau(\widetilde{h}_t)$. Assim $N_r + N_s + N_t = N$.
Pela Identidade de Jacobi, segue que

$$[[W_r \circ \widetilde{h}_r, W_s \circ \widetilde{h}_s], W_t \circ \widetilde{h}_t] = [[W_t \circ \widetilde{h}_t, W_s \circ \widetilde{h}_s], W_r \circ \widetilde{h}_r] - [[W_t \circ \widetilde{h}_t, W_r \circ \widetilde{h}_r], W_s \circ \widetilde{h}_s]. \quad (4.7)$$

Também

$$[[W_r \circ \widetilde{h}_r, W_s \circ \widetilde{h}_s], W_t \circ \widetilde{h}_t] = -[[W_s \circ \widetilde{h}_s, W_r \circ \widetilde{h}_r], W_t \circ \widetilde{h}_t]. \quad (4.8)$$

É suficiente mostrar que o resultado vale para o caso $N_r \geq max(N_s, N_t)$, de fato, pois se $N_r < N_s$, podemos usar 4.8 para efetuarmos a troca e supormos que $N_r \geq N_s$ e se $N_r < N_t$ teremos que $N_s \leq N_r < N_t$ e usamos 4.7 para obtermos o comutador com a primeira entrada com o maior grau.
Então, assumindo que $N_r \geq max(N_s, N_t)$ e considerando o caso onde $N_r - max(N_s, N_t) \geq 2$ podemos escrever $\widetilde{h}_r = \widetilde{p}X_i$ onde $\widetilde{p}$ é um monômio de grau igual a $grau(\widetilde{h}_r) - 1$.
Assim, pela Identidade de Jacobi teremos que:
$[[W_r \circ \widetilde{h}_r, W_s \circ \widetilde{h}_s], W_t \circ \widetilde{h}_t] = [[W_r \circ (\widetilde{p}X_i), W_s \circ \widetilde{h}_s], W_t \circ \widetilde{h}_t] = [[[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{h}_s], X_i], W_t \circ \widetilde{h}_t] - [[[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ (\widetilde{h}_sX_i)], W_t \circ \widetilde{h}_t]$
e usando novamente a Identidade de Jacobi segue que
$[[W_r \circ \widetilde{h}_r, W_s \circ \widetilde{h}_s], W_t \circ \widetilde{h}_t] = [[[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{h}_s], W_t \circ \widetilde{h}_t], X_i] - [[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{h}_s], W_t \circ (\widetilde{h}_tX_i)] - [[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ (\widetilde{h}_sX_i)], W_t \circ \widetilde{h}_t]$. Por indução, $[[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{h}_s], W_t \circ \widetilde{h}_t] \in E^{id}$.
Da redução feita, conseguimos que $0 \leq N_r - max\{N_s, N_t\} \leq 1$, assim $N_r \geq N/3$ e teremos

dois casos possíveis; $N_s = max\{N_s, N_t\} \geq N_r - 1$ ou $N_t = max\{N_s, N_t\} \geq N_r - 1$.
Vamos supor primeiro que $N_s \geq N_r - 1$, então, como $N_s \leq N_r$ temos

$$grau(\widetilde{h_t}\widetilde{h_s}) \leq grau(\widetilde{h_t}\widetilde{h_r}) = N - N_s,$$

considerando agora que $N_s \geq N_r - 1$ e $N_r \geq N/3$, obtemos respectivamente que

$$N - N_s \leq N - (N_r - 1) \leq (2N/3) + 1 \leq e.$$

Assim, aplicando a hipótese de indução aos termos de 4.7, obtemos o resultado nesse caso, isto é, como $max\{grau(\widetilde{h_t}\widetilde{h_s}), grau(\widetilde{h_t}\widetilde{h_r})\} \leq e$ segue que $[W_t \circ \widetilde{h}_t, W_s \circ \widetilde{h}_s] =_E 0$ e $[W_t \circ \widetilde{h}_t, W_r \circ \widetilde{h}_r] =_E 0$ e podemos utilizar 4.7.
Suponha agora que $N_t \geq N_r - 1$. Então,

$$grau(\widetilde{h_r}\widetilde{h_s}) = N - N_t \leq N - (N_r - 1) \leq (2N/3) + 1 \leq e,$$

para tanto, usamos para as desigualdades que $N_t \geq N_r - 1$ e que $N_r \geq N/3$, respectivamente.
Então $[W_r \circ \widetilde{h}_r, W_s \circ \widetilde{h}_s] =_E 0$ da hipótese de indução. ■

Para simplificar, vamos denotar $U_i = X_i \otimes 1$ e $V_i = 1 \otimes X_i$ e também $u_i = x_i \otimes 1$ e $v_i = 1 \otimes x_i$.

Lema 4.9 *Seja* $\widetilde{\zeta} \in Nuc(\rho \otimes \rho)_{3e/2}$. *Então* $\chi((W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\zeta}) =_E 0$ *para* $\forall r, s \in \{1, ..., m\}$.

Demonstração: Sejam $r, s \in \{1, ..., m\}$, então pela parte (2) do Lema 4.1 é suficiente mostrar que

$$\chi((W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\mu_1}(U_jU_i - U_iU_j - \sum_k \lambda_{ijk}U_k)\widetilde{\mu_2}) =_E 0$$

e

$$\chi((W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\mu_1}(V_jV_i - V_iV_j - \sum_k \lambda_{ijk}V_k)\widetilde{\mu_2}) =_E 0$$

com $1 \leq i < j \leq n$ e $\widetilde{\mu_1}, \widetilde{\mu_2}$ monômios de $\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que $grau(\widetilde{\mu_1}\widetilde{\mu_2}) \leq (3e/2) - 2$.
Vamos provar a primeira igualdade, já que a segunda seguirá de forma análoga. Suponha que $i, j, \widetilde{\mu_1}, \widetilde{\mu_2}$ satisfaçam as condições acima. Escreva $\widetilde{\mu_1} = \widetilde{p_1} \otimes \widetilde{q_1}$ e $\widetilde{\mu_2} = \widetilde{p_2} \otimes \widetilde{q_2}$, onde $\widetilde{p_1}, \widetilde{q_1}, \widetilde{p_2}, \widetilde{q_2}$ são monômios de $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Então,

$$(W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\mu_1}(U_jU_i - U_iU_j - \sum_k \lambda_{ijk}U_k)\widetilde{\mu_2} = (W_r \circ (\widetilde{p_1}(X_jX_i - X_iX_j - \sum_k \lambda_{ijk}X_k)\widetilde{p_2})) \otimes (W_s \circ (\widetilde{q_1}\widetilde{q_2})).$$

Assim,
$\chi((W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\mu_1}(U_jU_i - U_iU_j - \sum_k \lambda_{ijk}U_k)\widetilde{\mu_2}) = [(W_r \circ (\widetilde{p_1}(X_jX_i - X_iX_j - \sum_k \lambda_{ijk}X_k)\widetilde{p_2})), W_s \circ (\widetilde{q_1}\widetilde{q_2})] =_E [[W_r \circ \widetilde{p_1}, W_{\sigma(i,j)}] \circ \widetilde{p_2}, W_s \circ (\widetilde{q_1}\widetilde{q_2})]$, onde a última igualdade é obtida como na demonstração do Lema 4.7, isto é, $X_jX_i - X_iX_j - \sum_k \lambda_{ijk}X_k =_E W_{\sigma(i,j)}$.
Tome $t = \sigma(i,j)$, aplicando a Identidade de Jacobi repetidas vezes, podemos escrever uma expressão da forma

$$[[W_r \circ \widetilde{h_r}, W_t \circ \widetilde{h_t}], W_s \circ \widetilde{h_s}],$$

onde $\widetilde{h_r}, \widetilde{h_t}, \widetilde{h_s}$ são monômios de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que

$$grau(\widetilde{h_r}\widetilde{h_t}\widetilde{h_s}) = grau(\widetilde{p_1}\widetilde{p_2}\widetilde{q_1}\widetilde{q_2}) = grau(\widetilde{\mu_1}\widetilde{\mu_2}) \leq (3e/2) - 2.$$

E o resultado segue do Lema 4.8 ∎

4.5 Conclusão do Passo Indutivo

Retornemos ao passo indutivo lembrando a hipótese de indução: $e \geq e_0$; $[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{q}] =_E 0$, para todos $r, s \in \{1, ..., m\}$ e quaisquer monômios $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que $grau(\widetilde{p}\widetilde{q}) \leq e$.

Seja $r, s \in \{1, ..., m\}$ e quaisquer monômios $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que $grau(\widetilde{p}\widetilde{q}) = (e+1)$.

Devemos mostrar que $[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{q}] =_E 0$.

Suponha que $grau(\widetilde{q}) \geq 1$ e escreva $\widetilde{q} = \widetilde{q}_1 X_i$ com $\widetilde{q}_1$ monômio de $\mathfrak{R}$ com $grau(\widetilde{q}_1) = grau(\widetilde{q}) - 1$. Então, pela Identidade de Jacobi:

$[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{q}] = [W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ (\widetilde{q}_1 X_i)] = [W_r \circ \widetilde{p}, [W_s \circ \widetilde{q}_1, X_i]] = [[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{q}_1], X_i] - [W_r \circ (\widetilde{p}X_i), W_s \circ \widetilde{q}_1]$; com $[W_r \circ \widetilde{p}, W_s \circ \widetilde{q}_1] \in E^{id}$ pela hipótese de indução.

Assim, é suficiente mostrar que $[W_r \circ (\widetilde{p}X_i), W_s \circ \widetilde{q}_1] =_E 0$.

Um argumento indutivo evidente sobre o grau de $\widetilde{q}$ nos permite assumir que $grau(\widetilde{q}) = 0$. Dessa maneira, basta mostrar que $[W_r \circ \widetilde{p}, W_s] =_E 0$, onde $\widetilde{p}$ é um monômio de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ de grau $e+1$. Como $e + 1 > e_0 > l_n$, então algum gerador de X_k aparece ao menos $l+1$ vezes quando $\widetilde{p}$ é escrito como produto dos geradores de $\widetilde{\mathfrak{R}}$.

Pelo Lema 4.1, parte (3) podemos escrever

$$\widetilde{p} = X_k^{l+1} X_1^{l_1} ... X_k^{l_k} ... X_n^{l_n} + \widetilde{f_1} + \widetilde{f_2},$$

com $l+1+l_1+...+l_n = e+1$, $\widetilde{f}_1 \in \widetilde{\mathfrak{R}}_e$ e $\widetilde{f}_2 \in Nuc(\rho)_{e+1}$.

Sendo $[W_r \circ \widetilde{f}_1, W_s] =_E 0$ pela hipótese de indução e $[W_r \circ \widetilde{f}_2, W_s] =_E 0$ pelo Lema 4.7, podemos assumir que $\widetilde{p} = X_k^{l+1} X_1^{l_1} ... X_k^{l_k} ... X_n^{l_n} = X_k^{l+1}\widetilde{h}$, com $\widetilde{h} = X_1^{l_1}...X_n^{l_n}$.

Fazendo $h = \rho(\widetilde{h})$ obtemos $\widetilde{h} = \eta(h)$, sendo h um monômio de $\mathfrak{R}$ de grau $e-l$. Mais ainda, $\widetilde{\mu}(\widetilde{p}) = U_k^{l+1}\widetilde{\mu}(\widetilde{h})$ e $(\rho \otimes \rho)(\widetilde{\mu}(\widetilde{p})) = (\rho \otimes \rho)(\widetilde{p} \otimes 1) = u_k^{l+1}\mu(h)$.

Multiplicando 4.6 por $\mu(h) = h \otimes 1$, temos: $(u_k^{l+1} + \sum u_k^i \delta(f_{rski}) + \sum (g_{rj} \otimes 1)\phi_{rskj} + \sum (1 \otimes g_{sj})\psi_{rskj}(h \otimes 1) = u_k^{l+1}(h \otimes 1) + \alpha + \sum (g_{rj} \otimes 1)\beta_j + \sum (1 \otimes g_{sj})\gamma_j = 0$, com $\alpha = \sum u_k^i \delta(f_{rski})\mu(h)$, $\beta_j = \phi_{rskj}\mu(h)$ e $\gamma = \psi_{rskj}\mu(h)$.

Pela escolha de e_0 temos que $grau(f_{rski}) < e_0/2 \leq e/2$ para cada i e assim, pelo Lema 3.15:

$$\alpha \in (\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})_l \delta(\mathfrak{R})_{e/2} (\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})_{e-l} \subseteq (\mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R})_l \delta(\mathfrak{R})_{e/2}.$$

Por cálculo semelhante, obteremos que os elementos $(g_{rj} \otimes 1)\beta_j$ e $(1 \otimes g_{sj})\gamma_j$ têm graus no máximo $3e/2$.

Analisando a aplicação $\eta \otimes \eta : \mathfrak{R} \otimes \mathfrak{R} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}$, podemos encontrar elemento $\widetilde{\alpha} \in (\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}})_e \widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{R}})_{e/2}$ tal que $(\rho \otimes \rho)(\widetilde{\alpha}) = \alpha$.

Para cada j escreva $\widetilde{\beta}_j = (\eta \otimes \eta)\beta_j$ e $\widetilde{\gamma}_j = (\eta \otimes \eta)\gamma_j$.

Seja $\widetilde{\tau} \in \widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}}$, definido como:

$$\widetilde{\tau} = \widetilde{p} \otimes 1 + \widetilde{\alpha} + \sum_{j=1}^{c} (\eta(g_{rj}) \otimes 1)\widetilde{\beta}_j + \sum_{j=1}^{c} (1 \otimes \eta(g_{sj}))\widetilde{\gamma}_j. \tag{4.9}$$

É fácil ver que $grau(\widetilde{\tau}) \leq 3e/2$.

Como a aplicação $\rho \otimes \rho$ aplicada em $\widetilde{p} \otimes 1 + \widetilde{\alpha} + \sum_{j=1}^{c} (\eta(g_{rj}) \otimes 1)\widetilde{\beta}_j + \sum_{j=1}^{c} (1 \otimes \eta(g_{sj}))\widetilde{\gamma}_j$ resulta em $(u_k^{l+1} + \sum u_k^i \delta(f_{rski}) + \sum (g_{rj} \otimes 1)\phi_{rskj} + \sum (1 \otimes g_{sj})\psi_{rskj})(h \otimes 1)$, segue que $\widetilde{\tau} \in Nuc(\rho \otimes \rho)$, assim $\widetilde{\tau} \in Nuc(\rho \otimes \rho)_{3e/2}$.

Se conseguirmos mostrar que $\chi((W_r \otimes W_s) \circ (\widetilde{p} \otimes 1)) =_E 0$, então seguirá imediatamente que $[W_r \circ \widetilde{p}, W_s] =_E 0$ como queremos.

Assim, por 4.9, é suficiente mostrar que $\chi((W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\zeta}) =_E 0$ nas seguintes possibilidades:

•$\widetilde{\zeta} = \widetilde{\tau}$,

•$\widetilde{\zeta} = \widetilde{\alpha}$,

•$\widetilde{\zeta} = (\eta(g_{rj}) \otimes 1)\widetilde{\beta}_j$,
•$\widetilde{\zeta} = (1 \otimes \eta(g_{rj}))\widetilde{\gamma}_j$.

Estas possibilidades são cobertas pelos seguintes casos:

1. $\widetilde{\zeta} \in Nuc(\rho \otimes \rho)_{3e/2}$;

2. $\widetilde{\zeta} \in (\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}})_e \delta(\widetilde{\mathfrak{R}})$;

3. $\widetilde{\zeta} \in (g_{rj} \otimes 1)(\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}})$ ou $\widetilde{\zeta} \in (1 \otimes g_{sj})(\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}})$.

O Caso (1) está no Lema 4.9.

Seja $\widetilde{\zeta} \in (\widetilde{\mathfrak{R}} \otimes \widetilde{\mathfrak{R}})_e \delta(\widetilde{\mathfrak{R}})$, como no Caso (2). Então $\widetilde{\zeta}$ é uma combinação linear de termos da forma $(\widetilde{q}_1 \otimes 1)(1 \otimes \widetilde{q}_2)\delta(\widetilde{q}_3)$, onde $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, \widetilde{q}_3$ são monômios de $\widetilde{\mathfrak{R}}$ tais que $grau(\widetilde{q}_1\widetilde{q}_2) \leq e$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\widetilde{\zeta}$ tem essa forma e então

$$(W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\zeta} = ((W_r \circ \widetilde{q}_1) \otimes (W_s \circ \widetilde{q}_2)) \circ \delta(\widetilde{q}_3).$$

Como χ é um homomorfismo de $\delta(\widetilde{\mathfrak{R}})$-módulos, obtemos

$$\chi((W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\zeta}) = [W_r \circ \widetilde{q}_1, W_s \circ \widetilde{q}_2] \circ \delta(\widetilde{q}_3).$$

Temos que $[W_r \circ \widetilde{q}_1, W_s \circ \widetilde{q}_2]$ pertence à E^{id} pela hipótese de indução e por 4.1 $[W, W] \cap E^{id}$ é invariante sob a ação de $\delta(\widetilde{\mathfrak{R}})$.

Portanto $\chi((W_r \circ W_s) \circ \widetilde{\zeta}) =_E 0$, como queríamos.

Finalmente, se $\widetilde{\zeta}$ for tomado como no Caso (3), então $\widetilde{\zeta}$ será combinação linear de termos da forma $(\eta(g_{rj}) \otimes 1)(\widetilde{q}_1 \otimes 1)(1 \otimes \widetilde{q}_2)$ ou $(1 \otimes \eta(g_{sj}))(\widetilde{q}_1 \otimes 1)(1 \otimes \widetilde{q}_2)$, com $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2$ sendo monômios de $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $\widetilde{\zeta}$ seja de uma dessas formas. Então $\chi((W_r \otimes W_s) \circ \widetilde{\zeta})$ será $[(W_r \circ \eta(g_{rj})) \circ \widetilde{q}_1, W_s \circ \widetilde{q}_2]$ ou $[W_r \circ \widetilde{q}_1, (W_s \circ \eta(g_{sj})) \circ \widetilde{q}_2)]$. Donde $W_r \circ \eta(g_{rj}) =_E 0$ e $W_s \circ \eta(g_{sj}) =_E 0$ por definição dos elementos de E do tipo (2).

O que completa a demonstração da Proposição.

Referências Bibliográficas

[1] Jacobson, Nathan *Lie Algebras*. Interscience Publishers (a division of John Wiley Sons), New York-London, 1962.

[2] Martin, Luiz A. B. *Álgebras de Lie*. Unicamp, Campinas, 1999.

[3] Athiyah, M.F , Macdonald, I.G. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Published, Co Ready, 1969.

[4] R. M. Bryant, J. R. J. Groves, *Finite Representation of Abelian-by-finite-dimensional Lie algebras*. Journal of London Math Society 60 (1999), $n^0 1$, 45-57.

[5] Greub, W. H., *Multilinear Algebra*. Springer-Verlag, New York Inc, 1967.

[6] R. M. Bryant, J. R. J. Groves, *Finitely presented Lie algebras*, J. Algebra 218 (1999), no. 1, 1–25.

[7] N. Bourbaki, *Algebra I*, (Addison-Wesley, Reading, MA,1974)Capítulos 1-3.

[8] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras - Part I*, (Addison-Wesley, Reading, MA,1975)Capítulos 1-3.

[9] Goodearl, K. R., Warfield, R. B., Jr.,*An introduction to noncommutative Noetherian rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[10] Rotman, Joseph J., *An introduction to homological algebra*, Academic Press, Inc., 1979.