UNICAMP

Ariane Piovezan Entringer

Análise Matemática de Dois Modelos de Interação Fluido-Estrutura Utilizando as Equações alpha-Navier-Stokes e Campo de Fases

Campinas

2012

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

Ariane Piovezan Entringer

Análise Matemática de Dois Modelos de Interação Fluido-Estrutura Utilizando as Equações alpha-Navier-Stokes e Campo de Fases

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pela aluna Ariane Piovezan Entringer, e orientada pelo Prof. Dr. José Luiz Boldrini.

Assinatura do Orientador

Campinas

2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

En87a Entringer, Ariane Piovezan, 1984-
Análise matemática de dois modelos de interação fluido-estrutura utilizando as equações alpha-Navier-Stokes e campo de fases / Ariane Piovezan Entringer. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: José Luiz Boldrini.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Existência de solução (Equações diferenciais). 3. Unicidade de solução (Equações diferenciais). 4. Solidificação - Modelos matemáticos. 5. Dinâmica de vesículas - Modelos matemáticos. I. Boldrini, José Luiz,1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Mathematical analysis of two models of fluid-structure interaction used the alpha-Navier-Stokes equations and phase field
Palavras-chave em inglês:
Partial differential equations
Existence of solution (Differential equations)
Uniqueness of solution (Differential equations)
Solidification - Mathematical models
Vesicle dynamics - Mathematical models
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutora em Matemática
Banca examinadora:
José Lui Boldrini [Orientador]
Anne Caroline Bronzi
Gabriela Del Valle Planas
Bianca Morelli Rodolfo Calsavara
César Javier Niche Mazzeo
Data de defesa: 18-12-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 18 de dezembro de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof(a). Dr(a). ANNE CAROLINE BRONZI

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Prof(a). Dr(a). CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO

Agradecimentos

... "sois vós o Senhor de todas as coisas, é em vossa mão
que residem a força e o poder. E é vossa mão que tem o
poder de dar a todas as coisas grandeza e solidez."
Crônicas I, 29:12

Agradeço a Deus por mais esta oportunidade, por guiar meus passos até aqui, me dar força, coragem e esperança para superar as dificuldades, e também por ter colocado pessoas especiais no meu caminho.

Ao Prof. Dr. José Luiz Boldrini, meu orientador, a quem agradeço pela excelente orientação, pela paciência, pelos ensinamentos e pela atenção dedicada para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, Rita e João; agradeço por me ensinarem a lutar e não desistir, pelo apoio incondicional e por acreditarem em mim.

A minha irmã, Aline, pelo apoio nos momentos difíceis e pelo companheirismo e amizade sempre.

A meu noivo, Bruno, pelo seu apoio, carinho, pela compreensão nos momentos que estive ausente, pelas palavras de conforto nos momentos difíceis e por estar sempre ao meu lado. Agradeço também aos seus pais, Gisele e Anúncio, pelo incentivo nesta fase.

Agradeço aos professores do IMECC/Unicamp com os quais tive o privilégio de ter aulas, pelos ensinamentos passados que contribuíram muito para a minha formação.

Aos funcionários da secretaria da pós do IMECC/Unicamp, pelos serviços prestados sempre com eficiência e alegria.

Agradeço também aos professores e funcionários do DMA/UFV. Agradeço aos meus colegas do DMA/UFV que me ajudaram com as aulas em dias de viagem à Campinas, aos que auxiliaram em algumas contas para esta tese e aqueles que me incentivaram e torceram por mim. Em especial, agradeço aos colegas Anderson Luís A. de Araújo, Fernanda M. de Oliveira e Edson José Teixeira.

Aos membros da banca examinadora, pelas sugestões que contribuíram para melhorar a versão final.

Aos colegas e amigos do IMECC, pela companhia nos estudos, nos almoços no RU e nas conversas depois deste; pelas palavras de conforto e pelo apoio nos momentos difíceis; pelas boas conversas e momentos de alegria. Em especial, agradeço aos amigos Eduardo Neves, Igor dos Santos Lima, Iván I. G. Gargate, Júlio César dos Reis, Luis Roberto L. de Almeida, Luiz Alberto V. da Silva, Manuela da Silva Souza, Nelson D. Louza Júnior, Patrícia B. dos Santos, Régis L. B. Stabile, Thiago Castilho de Mello e Welington Vieira Assunção.

À Vânia, Yuri, Dri, Carol, Ana e Rívia, pela hospitalidade e, principalmente, pelo carinho e amizade.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o primeiro ano de doutorado e à UFV pelo auxílio com diárias e passagens nos demais anos.

Aos demais amigos e a todos que, de alguma forma, contribuíram para que esta caminhada se tornasse mais suave, o meu muito obrigada!

"As palavras de amizade e conforto podem ser
curtas e sucintas, mas seu eco é infindável."
Madre Tereza de Calcutá

Resumo

Neste trabalho analisaremos dois sistemas de equações diferenciais parciais não lineares de evolução associados a modelos de interação fluido-estrutura; esses sistemas foram obtidos utilizando as equações α-Navier-Stokes e a metodologia do campo de fases.

O primeiro de tais sistemas modela um processo de mudanças de fases envolvendo solidificação e fusão de certos materiais e leva em conta tanto os fenômenos de condução do calor quanto o da convecção da fase não sólida. Esse sistema é formado pelo acoplamento das equações α-Navier-Stokes para fluidos viscosos incompressíveis com uma equação para a variável campo de fases, cujos valores determinam a fase do material (sólida, líquida ou *mushy*), e também com uma equação de balanço de energia interna, a qual determina a evolução da temperatura.

O segundo sistema a ser estudado modela a dinâmica de vesículas em um fluido viscoso e incompressível. Tal sistema consiste do acoplamento das equações α-Navier-Stokes com uma equação para uma variável campo de fases, a qual neste caso determina a posição da membrana da vesícula que é deformada pela ação do fluido, bem como seu interior e exterior; esta última equação tem um termo descrevendo a interação do fluido com a membrana da vesícula.

Para ambos os sistemas, provaremos a existência e a unicidade das soluções em espaços funcionais adequados.

Abstract

In this work we analyze two systems of nonlinear evolution partial differential equations associated to models of fluid-structure interaction; such systems were obtained by using the α-Navier-Stokes equations and the phase field methodology.

The first of such systems models a process of phase change involving solidification and fusion of certain materials and take in consideration both the phenomena of heat conduction and convection of the non-solid phase. Such a system is formed by coupling the α-Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids to an equation for the phase field variable whose values determine the phase of the material (solid, liquid or mushy), and also to an equation for the balance of internal energy, which determines the evolution of the temperature.

The second system to be studied models the dynamics of vesicles in an incompressible viscous fluid. This system consists of the coupling of α-Navier- Stokes equation with an equation for the phase field variable, which in this case determines the position of vesicle membrane that is deformed by the action of the fluid, as well as its interior and exterior; this last equation has a term describing the interaction of the fluid with the vesicle membrane.

For both systems, we will prove the existence and uniqueness of solutions in suitable functional spaces.

Índice

Introdução

Neste trabalho analisaremos dois sistemas de equações diferenciais parciais não lineares de evolução, associadas a modelos de interação fluido-estrutura obtidos utilizando as equações α-Navier-Stokes e a metodologia do campo de fases.

Ambos sistemas utilizam as equações α-Navier-Stokes e a metodologia do campo de fases em sua formulação; o primeiro sistema corresponde a um modelo matemático que descreve o processo de solidificação e fusão de materiais e o segundo sistema corresponde a um modelo matemático que descreve a dinâmica de vesículas em fluidos.

Passemos a descrever brevemente a chamada metodologia de campo de fases. Ela utiliza o conceito de interface difusa (veja, por exemplo, [2], [4], [6], [7]), isto é, aquele que supõe que possíveis transições de propriedades físicas não ocorrem de forma brusca, mas sim em camadas de transição, eventualmente bastante finas, que admitem estrutura e propriedades físicas específicas.

Usualmente tais modelos introduzem uma função escalar da posição e do tempo, chamada campo de fase ou parâmetro de ordem, φ, cujos valores servem para indicar uma certa propriedade. No caso de processos de solidificação e fusão, os valores assumidos pelo parâmetro de campo de fase, indicam a fase do material (sólida, líquida ou *mushy*, isto é, uma mistura de sólido e líquido). Já no sistema de dinâmica de vesículas, os valores de tal parâmetro indicam a posição da membrana e se estamos no interior ou exterior da vesícula.

A metodologia de campo de fase tem despertado o interesse de muitos pesquisadores e isto se deve a uma das principais vantagens deste tipo de formulação: a possibilidade de se calcular computacionalmente interfaces complexas associadas a uma variedade de problemas. Citamos, por exemplo, as seguintes situações em que se aplica esta metodologia:

crescimento de cristais e mudanças de fase em geral, dinâmica de fraturas, dinâmica de vesículas, fenômenos da hidrodinâmica envolvendo capilaridade, etc. Observamos também que em muitas situações há interpretação física natural para o campo de fases.

O primeiro problema a ser analizado nesta tese corresponde a um modelo matemático, que utiliza a metodologia de campo de fases e descreve o processo de solidificação de certos materiais, levando em consideração os mecanismos de condução de calor e de convecção.

Como dissemos acima, os valores assumidos pelo parâmetro de campo de fase indicam o estado físico. Por exemplo, considera-se que um ponto x do domínio, no instante t está na fase sólida se $\varphi(x,t) \geq \varphi_s$; ele está na fase líquida se $\varphi(x,t) \leq \varphi_l$ e na fase *mushy* se $\varphi_l < \varphi(x,t) < \varphi_s$ (aqui φ_s e φ_l dependem do material considerado). Neste problema utilizaremos o parâmetro de ordem de forma indireta, pois o indicador básico das fases será a fração sólida, representada pela função $h(\cdot)$. Desta forma teremos que $h(\varphi) = 1$ na região sólida, isto é, quando $\varphi_s \leq \varphi$, teremos que $0 < h(\varphi) < 1$ na região *mushy*, isto é, quando $\varphi_l < \varphi < \varphi_s$ e teremos $h(\varphi) = 0$ na região líquida, isto é, quando $\varphi \leq \varphi_l$. A região *mushy* é uma região de transição que se comporta macroscopicamente como uma mistura de sólido e líquido e pode ser modelada do ponto de vista do escoamento, por exemplo, como um meio poroso não consolidado.

Em muitos dos modelos considerados com esta metodologia, há implicitamente a hipótese de que não ocorre transporte macroscópico de material durante o processo de mudança de fases. Isto é, supõe-se que, mesmo na fase líquida, não ocorre fluxo de material e, portanto, as únicas questões relevantes são aquelas associadas aos fluxos de energia e das mudanças de fase. Entretanto, em muitas situações relevantes na prática, esta não é uma hipótese realista e os efeitos dos fluxos são importantes para o resultado final do processo. Nestes casos, é necessário acoplar às equações anteriores as equações que descrevem a possibilidade de escoamento. Isto leva a maiores dificuldades matemáticas e esta situação tem sido muito menos estudada de forma rigorosa na literatura científica. Alguns resultados que levam em conta tal situação podem ser encontrados, por exemplo, em Blanc *et al.* [10], Planas e Boldrini [62, 63, 11].

No presente trabalho, o modelo matemático de solidificação que estamos interessados considera a possibilidade de movimentação do material utilizando variantes das chamadas equações α-Navier-Stokes, as quais são frequentemente usadas na simulação de escoamentos turbulentos e utilizam duas velocidades associadas ao escoamento. Tais equações têm a vantagem matemática de que a velocidade de transporte é mais regular que aquela que se tem quando se utilizam as equações do tipo de Navier-Stokes clássicas. Alguns exemplos de artigos que analisam as equações α-Navier-Stokes são os seguintes: Foias, Holm e Titi [34], [35], Guermond, Oden e Prudhomme [40], no caso de domínio espacialmente periódico, Çaglar [19] para o caso de domínios limitados e Bjorland e Schonbek [9] para o estudo destas equações em $\mathbb{R}^n$, para $n = 2, 3, 4$.

A seguir, apresentamos o modelo de solidificação em que estamos interessados. Suas equações são as seguintes:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + w\cdot\nabla u + (\nabla w)^t\cdot u + \nabla p = \nu\Delta u - K(h(\varphi))w + c\mathbf{g}\theta \quad \text{em } Q,\\
&u = w - \alpha^2\Delta w - \nabla\tilde{p} \text{ em } Q,\\
&\text{div } w = \text{div } u = 0 \text{ em } Q,\\
&u = w = 0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T),\\
&w = w_0, \quad \text{em } \Omega\times\{0\},\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} + w\cdot\nabla\varphi - \epsilon^2\Delta\varphi - (2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3) = \beta\theta \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial\theta}{\partial t} + w\cdot\nabla\theta - \kappa\Delta\theta = \frac{\ell}{2}h'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t} \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T),\\
&\varphi = \varphi_0,\ \theta = \theta_0 \ \text{ em } \Omega\times\{0\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Aqui Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave, onde ocorre o processo de solidificação ou fusão e fixamos $0 < T < +\infty$ que indica o tempo máximo de interesse; denotamos $Q = \Omega\times(0,T)$.

Quanto ao significado das variáveis neste problema, temos o seguinte:

As variáveis u e w denotam as velocidades associadas às equações α-Navier-Stokes, as quais incluem termos adicionais associados ao problema de mudança de fases; as pressões hidrostáticas correspondentes, requeridas pelas condições de divergentes nulos, são p e $\tilde{p}$, respectivamente. A velocidade w é aquela regularizada que é utilizada como velocidade de transporte. Os termos adicionais nessas equações são os seguintes: um termo de penalização do tipo Carman-Koseny para se levar em conta que quanto maior a fração sólida menor deve ser o fluxo; um termo do tipo aproximação de Boussinesq para as forças de empuxo causadas pelas pequenas alterações da densidade devido aos gradientes de temperatura. Maiores detalhes sobre tais termos serão fornecidos posteriormente.

As variáveis φ e θ são respectivamente o campo de fase e a temperatura.

Quanto aos coeficientes dessas equações, a constante $\nu > 0$ é a viscosidade do fluido; $\mathbf{g}$

é o vetor aceleração da gravidade; o parâmetro $\alpha > 0$ é uma constante dada associada à velocidade de transporte no modelo de α-Navier-Stokes.

O coeficiente $\epsilon > 0$ é um parâmetro constante associado à densidade de energia acumulada na interface; a constante $\kappa > 0$ é associada à condutividade térmica; $\ell > 0$ é uma constante associada ao calor latente; a função $f(\varphi, \theta) = 2a(x,t)\,\varphi + 3b(x,t)\,\varphi^2 - 4\varphi^3$ é a derivada com respeito a φ da densidade de energia potencial, a qual neste caso é basicamente o chamado potencial de duplo poço (*two-well potential*).

A i-ésima coordenada da expressão $(\nabla w)^t \cdot u$ é dada por $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} u_j$, para $i = 1, 2, 3$.

O segundo problema a ser analisado neste trabalho corresponde ao problema de dinâmica de vesículas.

Embora a análise das deformações causadas em vesículas pelas suas interações com o fluido onde elas estão imersas não é uma tarefa fácil, vários pesquisadores têm se empenhado no estudo deste tema nos últimos anos (veja, por exemplo, [3], [5], [8], [29], [27], [28]) devido à sua importância e aplicabilidade em várias áreas da biologia. A modelagem de vesículas é um primeiro passo para se estudar e entender o comportamento de células em meios fluidos, [64].

A seguir colocamos as equações do modelo de dinâmica de vesículas que estudaremos. Elas são as seguintes:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + w \cdot \nabla u + (\nabla w)^t \cdot u + \nabla p = \nu \Delta u + \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \nabla \phi \text{ em } Q,\\
&u = w - \alpha^2 \Delta w - \nabla \tilde{p} \text{ em } Q,\\
&\text{div } w = \text{div } u = 0 \text{ em } Q,\\
&w = u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0, T],\\
&w = w_0 \text{ em } \Omega \times \{0\},\\
&\frac{\partial \phi}{\partial t} + w \cdot \nabla \phi = -\gamma \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \text{ em } Q,\\
&\phi = -1, \quad \Delta \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0, T],\\
&\phi = \phi_0 \text{ em } \Omega \times \{0\}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Aqui, Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave, onde interagem o fluido e a vesícula.

O termo $E(\phi)$ é dado por

$$E(\phi) = \frac{k}{2\epsilon}\int_\Omega \big(\epsilon\Delta\phi + (\frac{1}{\epsilon}\phi + c_0\sqrt{2})(1-\phi^2)\big)^2 dx + \frac{1}{2}M_1(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha})^2 + \frac{1}{2}M_2(\mathcal{B}(\phi)-\tilde{\beta})^2$$

e corresponde à energia penalizada, com $\mathcal{A}(\phi) = \int_\Omega \phi\, dx$, termo relacionado ao volume da vesícula e $\mathcal{B}(\phi) = \int_\Omega \frac{\epsilon}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{4\epsilon}(\phi^2-1)^2 dx$, termo relacionado à área da superfície da membrana. M_1, M_2 são constantes usadas para forçar que o volume e a área superficial da vesícula se mantenham constantes e $\epsilon > 0$. Estes termos serão explicados com mais detalhes posteriormente.

Temos ainda,

$$\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi) = kg(\phi) + M_1(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}) + M_2(\mathcal{B}(\phi)-\tilde{\beta})f(\phi),$$

a derivada variacional de $E(\phi)$ com respeito à variável ϕ, com

$$f(\phi) = -\epsilon\Delta\phi + \frac{1}{\epsilon}(\phi^2-1)\phi, \quad g(\phi) = -\Delta f(\varphi) + \frac{1}{\epsilon^2}(3\phi^2-1)f(\phi);$$

nas equações modificadas de α-Navier-Stokes o termo adicional $\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\nabla\phi$ está relacionado à força de Willmore agindo entre o fluido e a superfície da membrana, veja [25]. As outras variáveis, coeficientes e parâmetros com as mesmas notações do modelo anterior, isto é das equações (1), têm o mesmo significado físico.

O modelo analisado no presente trabalho, é similar ao apresentado por Q. Du, M. Li and C. Liu em [25], com a diferença de que naquele artigo o comportamento do fluido onde se encontra a vesícula é governado por equações do tipo de Navier-Stokes, enquanto que aqui, o comportamento fluido é modelado pelas equações α-Navier-Stokes.

Como em [25], a descrição da membrana é dada com o auxílio de uma função campo de fase, ϕ. Tal função ϕ assume o valor 1 no interior da membrana e -1 fora da mesma, com uma fina camada de transição, cuja espessura é caracterizada por um pequeno parâmetro positivo ϵ. Os pontos onde ϕ se anula são identificados com os pontos da membrana. Na equação para o campo de fase ϕ, γ é uma constante positiva dada relacionada à espessura da membrana da vesícula.

Ressaltamos que Q. Du, M. Li and C. Liu em [25] obtêm resultados similares aos válidos para as equações clássicas de Navier-Stokes. No caso de dimensão espacial 2, eles provam a existência global no tempo e a unicidade de soluções fracas. Para dimensão espacial 3, eles obtêm a existência global no tempo de soluções fracas, mas a unicidade é garantida apenas com hipóteses adicionais demasiadamente exigentes. Recentemente, Liu, Takahashi e Tucsnak, em [56], provaram a existência de solução forte para um modelo de dinâmica de vesículas em dimensão espacial 3 similar ao modelo de Du, Li e Liu [25]. Neste trabalho foi provado a existência de solução forte local no tempo e a unicidade de solução, e adicionando a exigência de dados iniciais pequenos, foi provado que a solução está definida em $[0, T]$, para $T > 0$ fixado.

No presente trabalho, com o comportamento do fluido modelado pelas equações α-Navier-Stokes, somos capazes de provar mesmo no caso tridimensional a existência global no tempo e a unicidade de soluções de (2) com hipóteses naturais. Isto é possível porque, mesmo com não linearidades e acoplamentos mais fortes, seremos capazes de provar maior regularidade para as soluções.

Finalmente, descrevemos a seguir como esta tese está organizada.

No Capítulo 1 apresentamos a notação a ser utilizada neste trabalho bem como resultados básicos sobre imersões contínuas e compactas e a teoria L^p para as equações diferenciais parciais parabólicas. Falaremos um pouco sobre as equações α-Navier-Stokes e apresentaremos algumas de suas propriedades que utilizaremos ao longo dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 analisaremos o problema de equações diferenciais parciais não lineares que modela o processo de solidificação. Enunciaremos e provaremos um resultado de existência de solução para este problema e a unicidade das soluções encontradas. Usaremos argumentos de ponto fixo, compacidade e *bootstrapping*, usaremos também a teoria L^p de regularidade para equações parabólicas [47]. Também serão úteis os argumentos descritos por Boldrini e Vaz em [12] para a equação do campo de fases e os resultados sobre as equações α-Navier-Stokes descritos por Foias *et al.* em [34] e por Çaglar em [19].

No Capítulo 3 apresentaremos o sistema de equações diferenciais parciais que modela a dinâmica de vesículas em um fluido viscoso e incompressível. Para este sistema provaremos um resultado de existência de solução fraca e unicidade de solução. Usaremos para isto, resultados de imersão e algumas propriedades das equações α-Navier-Stokes presentes no primeiro capítulo deste texto. Para mostrar a existência de solução usaremos uma versão do Método de Galerkin, obtendo soluções aproximadas, em seguida obtemos estimativas para a passagem de limite, e então, verificamos que a função obtida é solução deste sistema. Ao final provamos a unicidade de solução pelo método usual de contradição.

Capítulo 1

Notações e Conceitos Preliminares

Neste capítulo introduziremos as notações, conceitos e os espaços funcionais a serem utilizados ao longo deste trabalho. Recordaremos alguns resultados envolvendo imersões em espaços de Sobolev e também da teoria L^p das equações diferenciais parciais parabólicas. A seguir apresentaremos alguns resultados a respeito das equações α-Navier-Stokes que serão necessários nos capítulos seguintes.

1.1 Notações e espaços funcionais

Ao longo deste texto usaremos a notação usual de espaços de Sobolev. Exporemos aqui os espaços utilizados para facilitar a leitura do mesmo. Esta notação e outros resultados a respeito destes espaços podem ser consultados em [1].

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $0 < T < +\infty$ e $Q = \Omega \times (0, T)$. Denotaremos nesta seção $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ um multi-índice, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ e $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$.

Iniciamos listando os seguintes espaços funcionais:

$C^m(\Omega)$ que denota a espaço das funções contínuas cujas derivadas de ordem menor ou igual a m também são contínuas em Ω (com m inteiro positivo ou m infinito),

$C_0^m(\Omega)$ é o espaço das funções em $C^m(\Omega)$ que possuem suporte compacto em Ω,

$L^p(\Omega)$ é o espaço de Banach das (classes de) funções $u(\cdot)$ de Ω em $\mathbb{R}$ mensuráveis a Lebesgue e q-integráveis, $q \geq 1$, cuja norma é dada por

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^q dx \right)^{1/q}, \text{ para } 1 \leq q < \infty, \text{ e}$$
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_\Omega |u(x)|.$$

Temos também,

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

o espaço de Banach com norma dada por

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Para $q = 2$ escrevemos $H^m(\Omega)$ em lugar de $W_2^m(\Omega)$. E, $H_0^m(\Omega)$ é o fecho de C_0^∞ em $H^m(\Omega)$.

Seguindo a notação de Temam em [66], descrevemos os espaços funcionais para o estudo das equações de Navier-Stokes,

$$\mathcal{V} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \text{div } w = 0\},$$
$$H \text{ é o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } (L^2(\Omega))^3,$$
$$V \text{ é o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } (H_0^1(\Omega))^3.$$

Introduziremos agora os espaços para as funções de variáveis espaciais e temporais.

Um espaço que trabalharemos muito é o espaço de Banach

$$W_q^{2,1}(Q) = \{u \in L^q(Q) : D_x u,\ D_x^2 u \in L^q(Q),\ D_t u \in L^q(Q)\},$$

cuja norma é definida por

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} = \|u\|_{L^q(Q)} + \|D_x u\|_{L^q(Q)} + \|D_x^2 u\|_{L^q(Q)} + \|D_t u\|_{L^q(Q)}.$$

Definiremos agora o espaço $H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q})$ que é o espaço das funções Hölder contínuas (com expoente τ em x e $\tau/2$ em t). Dizemos que uma função $u(x,t)$ definida em $\overline{Q}$ é Hölder contínua em x e t, com expoentes $\alpha, \beta \in (0,1)$, se as seguintes quantidades, chamadas constantes de Hölder, são finitas:

$$\langle u\rangle_x^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x_1,t),(x_2,t)\in\overline{Q}\\ x_1\neq x_2}} \frac{|u(x_1,t)-u(x_2,t)|}{|x_1-x_2|^{\alpha}},$$

$$\langle u\rangle_t^{(\beta)} = \sup_{\substack{(x,t_1),(x,t_2)\in\overline{Q}\\ t_1\neq t_2}} \frac{|u(x,t_1)-u(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}.$$

Agora dado $\tau > 0$ não inteiro, considere a seguinte norma:

$$|u|_Q^{(\tau)} = \sum_{2r+s=[\tau]} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_x^{(\tau-[\tau])} + \sum_{0<\tau-2r-s<2} \langle D_t^r D_x^s u\rangle_t^{(\frac{\tau-2r-s}{2})} + \sum_{j=0}^{[\tau]} \langle u\rangle_Q^{(j)},$$

com $\langle u\rangle_Q^{(j)} = \sum_{2r+s=j} \max |D_t^r D_x^s u|$ e $[\tau]$ o maior inteiro menor que τ.

Definimos o espaço de Banach $H^{\tau,\tau/2}(\overline{Q})$, com τ um número não inteiro, como o espaço das funções $u(x,t)$ contínuas em $\overline{Q}$ com derivadas da forma $D_t^r D_x^s u$ com $2r+s<\tau$ também contínuas e cuja norma $|u|_Q^{(\tau)}$ é finita.

Particularmente, estamos interessados em espaços de Hölder $H^{\tau,\tau/2}(Q)$ com $0 \leq \tau < 1$ ou $1 \leq \tau < 2$, com as seguintes normas respectivamente

$$||u||_{H^{\tau,\tau/2}(Q)} = \max_{\bar{Q}} |u| + \langle u\rangle_x^{(\tau)} + \langle u\rangle_t^{(\tau/2)},$$

$$||u||_{H^{\tau,\tau/2}(Q)} = \max_{\bar{Q}} |u| + \sum \max_{\bar{Q}} |D_x u| + \langle D_x u\rangle_x^{(\tau-1)} + \langle u\rangle_t^{(\tau/2)}.$$

Trabalharemos também com os seguintes espaços:

Sejam B um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_B$ e $0 < T < \infty$. $L^p(0,T;B)$ é o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to B$ mensuráveis tal que a função $t \in [0,T] \mapsto \|u(\cdot,t)\|_B$ é p-integrável ($1 \leq p \leq \infty$) com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \left(\int_0^T \|u(\cdot,t)\|_B^p\right)^{1/p}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} = ess \sup_{0\leq t\leq T} \|u(\cdot,t)\|_B.$$

Temos também,

$C([0,T];B)$ o espaço de Banach das funções $u : [0,T] \to B$ contínuas (com a topologia forte de B),

$W_p^m(0,T;B)$ o espaço das funções em $L^p(0,T;B)$ cujas derivadas generalizadas de ordem menor ou igual a m também pertencem a $L^p(0,T;B)$.

1.2 Resultados básicos

Nesta seção enunciamos resultados básicos sobre imersões de Sobolev e sobre a teoria L^p para as equações diferenciais parabólicas. Referências básicas para esta seção são [1] e [47].

Iniciaremos enunciando o seguinte resultado de imersão em espaços de Sobolev, que pode ser encontrado em Adams e Fournier [1].

Proposição 1.1 (Rellich-Kondrachov). *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$. Sejam j e m inteiros não negativos e p satisfazendo $1 \leq p < \infty$. Se Ω satisfaz a propriedade do cone, então as seguintes imersões são compactas:*

1. $W_p^{j+m}(\Omega) \to W_q^j(\Omega)$ *para* $0 < n - mp < n$ *e para todo* $1 \leq q \leq np/(n-mp)$.

2. $W_p^{j+m}(\Omega) \to W_q^j(\Omega)$ *para* $mp = n$ *e para todo* $1 \leq q < \infty$.

3. $W_p^{j+m}(\Omega) \to C^j(\Omega)$ *para* $mp > n$.

Observação 1.1. *Para que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfaça a propriedade do cone é suficiente que este seja Lipschitz, condição esta que é satisfeita por todo Ω de classe C^k, para qualquer $k > 1$.*

Um caso particular da Proposição anterior é o seguinte resultado, que usaremos neste texto.

Corolário 1.1. *Seja Ω um domínio de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo a propriedade do cone. Então a imersão $W_2^2(\Omega) \to W_q^1(\Omega)$ é compacta para todo $1 \leq q < 6$.*

Demonstração: Basta aplicar a Proposição anterior com $n = 3,\ p = 2,\ m = j = 1$. □

O próximo Lema é um resultado de imersão de Lions-Peetre e pode ser encontrado em [53, p. 15].

Lema 1.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com a propriedade do cone e $1 \leq q < \infty$. Então:*

$$
\begin{aligned}
&W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q), && se \quad \frac{1}{q} - \frac{2}{5} < 0;\\
&W_q^{2,1}(Q) \subset L^p(Q), \forall\, p \in [q, \infty) && se \quad \frac{1}{q} - \frac{2}{5} = 0;\\
&W_q^{2,1}(Q) \subset L^p(Q), p = \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{5}\right)^{-1} && se \quad \frac{1}{q} - \frac{2}{5} > 0,
\end{aligned}
$$

com as imersões compactas.

A seguir apresentamos outro resultado de imersão para o espaço $W_q^{2,1}(Q)$. Este resultado pode ser encontrado em [47, p. 80].

Lema 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e satisfazendo a propriedade do cone. Então a imersão $W_q^{2,1}(Q) \to H^{\tau,\tau/2}(Q)$ é contínua e existe uma constante M que depende de q, Ω e T tal que*

$$||u||_{H^{\tau,\tau/2}(Q)} \leq M||u||_{W_q^{2,1}(Q)},$$

com $q > 5/2$ e $0 \leq \tau = 2 - 5/q$.

Considere o seguinte problema parabólico linear:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u = f(x,t) \;\; em \; Q,\\
&\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \; em \; \partial\Omega \times (0,T),\\
&u(x,0) = u_0(x) \; em \; \Omega.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Apresentaremos agora resultados de existência de solução para este problema. Resultado este que pode ser consultado em Ladyzenskaja [47, p. 341 e remark em p. 351].

Lema 1.3. *Sejam $q > 1$ e Ω um domínio do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente suave. Suponha que:*

1. *$f \in L^q(Q)$ com $q \neq 3$.*
2. *$u_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_q^{3/2-\delta}(\Omega)$ com $q \neq 3/2$ e $\delta \in (0,1)$.*
3. *$b_i \in L^r(Q)$ com $r = \begin{cases} max(q, n+2), & se \; q \neq n+2 \\ n+2+\epsilon, & se \; q = n+2, \; \forall \epsilon > 0 \end{cases}$.*

4. $a \in L^s(Q)$ *com* $s = \begin{cases} max(q, \frac{n+2}{2}), & se\ q \neq \frac{n+2}{2} \\ \frac{n+2}{2} + \epsilon, & se\ q = \frac{n+2}{2},\ \forall \epsilon > 0 \end{cases}$.

5. $\dfrac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$ *em* $\partial\Omega$ *se* $q > 3$.

Então existe uma única solução $u \in W_q^{2,1}(Q)$ *do problema* (1.1) *satisfazendo, para* $q > 3$, *a seguinte estimativa:*

$$||u||_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\Big(||f||_{L^q(Q)} + \big(||\vec{b}||_{L^r(Q)} + ||a||_{L^s(Q)}\big)||u_0||_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + ||u_0||_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}\Big)$$

com C *uma constante que depende de* T, q, r, s, *e* Ω.

Observação 1.2. *Este resultado também é válido para* $q = 3$, *de acordo com Ladyzenskaja [47, p.351].*

O próximo resultado é o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder, e pode ser consultado em [37, p. 189].

Lema 1.4 (Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder)**.** *Sejam* B *um espaço de Banach e* $T : [a,b] \times B \to B$ *um operador tal que* $y = T(\lambda, x)$ *com* x, $y \in B$ *e* $\lambda \in [a,b]$. *Suponha que:*

(i) $T(\lambda, x)$ *está definido* $\forall\, x \in B$ *e* $\forall\, \lambda \in [a,b]$.

(ii) Para λ *fixo,* $T(\lambda, \cdot)$ *é contínuo em* B.

(iii) Para λ *fixo,* $T(\lambda, \cdot)$ *é um operador compacto.*

(iv) Para $x \in A$, $A \subset B$ *limitado,* $T(\lambda, x)$ *é contínuo em* λ *uniformemente com relação a* x.

(v) Existe uma constante $M > 0$, *independente de* $\lambda \in [a,b]$, *tal que toda possível solução* x *de* $x = T(\lambda, x)$ *satisfaz* $||x||_B \leq M$.

(vi) A equação $x = T(a, x)$ *tem uma única solução em* B.

Então, existe uma solução da equação $x = T(b, x)$.

O Lema a seguir é um resultado de compacidade devido à Simon, que pode ser consultado em [65, Corolário 4, p. 85], e que será muito utilizado para as convergências ao longo das demonstrações dos resultados de existência nos Capítulos 2 e 3.

Lema 1.5. *Sejam X, Y, B espaços de Banach tais que $X \subset B \subset Y$, com a imersão $X \subset B$ compacta.*

Seja F limitado em $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\partial F/\partial t = \{\partial f/\partial t : f \in F\}$ limitado em $L^1(0,T;Y)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$.

Seja F limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\partial F/\partial t$ limitado em $L^r(0,T;Y)$, com $r > 1$. Então F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

A seguir apresentamos o Lema com a Desigualdade de Interpolação.

Lema 1.6 (Desigualdade de Interpolação)**.** *Se $u \in L^{p_1}(0,T;L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(0,T;L^{q_2}(\Omega))$ com $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, então $u \in L^{p_\theta}(0,T;L^{q_\theta}(\Omega))$ para todo $p_1 \leq p_\theta \leq p_2$, $q_1 \leq q_\theta \leq q_2$ e vale a desigualdade*

$$\|u\|_{L^{p_\theta}(0,T;L^{q_\theta}(\Omega))} \leq \|u\|^{\theta}_{L^{p_1}(0,T;L^{q_1}(\Omega))} \|u\|^{1-\theta}_{L^{p_2}(0,T;L^{q_2}(\Omega))},$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} \quad e \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}.$$

Demonstração: Para demonstrar esta desigualdade basta aplicar duas vezes o Teorema de Interpolação que pode ser encontrado em [1, p. 27]. □

Segue alguns exemplos de interpolação que serão usados nos Capítulos 2 e 3.

Corolário 1.2. *Se $w \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ então $w \in L^8(Q)$ e*

$$\|w\|_{L^8(Q)} \leq \|w\|^{3/4}_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \|w\|^{1/4}_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}. \tag{1.2}$$

Demonstração: Para demonstrar este fato, usa-se o resultado de interpolação acima e as imersões contínuas $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, para $n = 3$. □

Corolário 1.3. *Se $\varphi \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$ então $\varphi \in L^{10/3}(Q)$.*

Demonstração: De fato, basta considerar a imersão contínua $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$. Neste caso, temos a seguinte estimativa

$$\|\varphi\|_{L^{10/3}(Q)} \leq \|\varphi\|^{2/5}_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\varphi\|^{3/5}_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}.$$

□

1.3 Equações α-Navier-Stokes

Nesta seção vamos falar da importância e da escolha das equações α-Navier-Stokes para governar o escoamento de fluido nos dois problemas a serem analisados. Em seguida, exporemos algumas propriedades destas equações que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

Nos últimos anos, Holm *et al.* [43], [21], introduziram um novo modelo de turbulência, que ficou conhecido como o modelo α-Navier-Stokes (também conhecido como *viscous Camassa-Holm equation* ou *the Lagrangian Averaged Navier-Stokes-alpha*). As equações α-Navier-Stokes surgiram da tarefa de regularizar as equações de Navier-Stokes. A primeira regularização foi realizada por Leray [51], [52] e suas vantagens computacionais foram mostradas por Geurts e Holm [39], [38]. A partir daí surgiram vários caminhos de relacionar o modelo α- Navier-Stokes à ideia de Leray.

Consideraremos aqui a seguinte versão para domínios limitados das equações α-Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + w \cdot \nabla u + (\nabla w)^t \cdot u + \nabla p = \nu \Delta u + f \text{ em } Q, \\ u = w - \alpha^2 \Delta w - \nabla \tilde{p} \text{ em } Q, \\ \text{div } w = \text{div } u = 0 \text{ em } Q, \\ u = w = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\ w = w_0 \text{ em } \Omega \times \{0\}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Aqui, como já descrito na Introdução desta tese, Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave, fixamos $0 < T < +\infty$ que indica o tempo máximo de interesse; denotamos $Q = \Omega \times (0,T)$.

As variáveis u e w denotam as velocidades associadas às equações α-Navier-Stokes; as pressões hidrostáticas correspondentes, requeridas pelas condições de divergentes nulos, são p e $\tilde{p}$, respectivamente. A velocidade w é aquela regularizada que é utilizada como velocidade de transporte. Quanto aos coeficientes dessas equações, a constante $\nu > 0$ é a viscosidade do fluido; o parâmetro $\alpha > 0$ é uma constante dada associada à velocidade de transporte.

Estas equações são o resultado de uma modificação adequada no termo de convecção não-linear das equações de Navier-Stokes [24], tornando as equações α-Navier-Stokes melhores do ponto de vista computacional [35]. De fato, as equações Camassa-Holm, dadas as suas especiais propriedades geométricas e físicas, são bem adequadas para o estudo de escoamentos turbulentos e fornecem um promissor quadro teórico para auxiliar a entender alguns escoamentos turbulentos [21].

Os dois modelos que analisaremos nesta tese consideram o escoamento do fluido dado por variantes adequadas das equações α-Navier-Stokes, pois como a velocidade de transporte destas equações é um pouco mais regular que a velocidade correspondente das equações Navier-Stokes usuais, isto permitirá um melhor tratamento do acoplamento das equações do campo de fases tanto no modelo de mudanças de fase quanto no modelo de dinâmica de vesículas. Exemplos de artigos que analisam as equações α-Navier-Stokes são os seguintes: Foias, Holm e Titi [34], [35], Guermond, Oden e Prudhomme [40], no caso de domínio espacialmente periódico, Çaglar [19] para o caso de domínios limitados e Bjorland e Schonbek [9] para o estudo destas equações em $\mathbb{R}^n$, para $n = 2, 3, 4$.

A seguir introduzimos a notação e algumas definições que serão utilizadas no estudo dessas equações. Ressaltamos que propriedades básicas deste modelo podem ser encontradas em [34], [35] e [19].

Denotaremos por $\mathbb{P} : (L^2(\Omega))^3 \to H$ a projeção ortogonal, e definimos o operador de Stokes por

$$A = -\mathbb{P}\Delta : D(A) \to H, \tag{1.4}$$

onde o domínio do operador é dado por $D(A) = (H^2(\Omega))^3 \cap V \subset H$.

Note que, o operador de Stokes é autoadjunto e positivo. Além disso, no caso de Ω limitado, o operador inverso de A, denotado por A^{-1}, é linear e contínuo de H em $D(A)$, e como a imersão de $D(A)$ em H é compacta, o operador A^{-1} é compacto em H. Assim, o espaço H admite uma base ortonormal $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ de autofunções de A, isto é, $Av_j = \lambda_j v_j$, $v_j \in D(A)$, com $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$, $\lambda_j \to \infty$.

A seguir enuncia-se um resultado a respeito do operador A, que pode ser encontrado em Foias *et al.* [34].

Lema 1.7. *(i) O operador A pode ser estendido continuamente ao espaço $V = D(A^{1/2})$ com valores em $V' = D(A^{-1/2})$ tal que*

$$\langle Au, v\rangle_{V'} = (A^{1/2}u, A^{1/2}v) = \int_\Omega (\nabla u . \nabla v) dx,$$

para todo $u, v \in V$.

(ii) Analogamente, o operador A^2 pode ser estendido continuamente ao espaço $D(A)$

assumindo valores em $D(A)'$, que denota o espaço dual de $D(A)$, de forma que

$$\langle A^2 u, v\rangle_{D(A)'} = (Au, Av),\ \forall u, v \in D(A).$$

Ao trabalhar com as equações de Navier-Stokes, veja por exemplo Temam [66], é necessário definir uma forma trilinear b associada à não linearidade do termo convectivo. Primeiramente, define-se $B(u,v) = \mathbb{P}[(u\cdot\nabla)v]$, para $u, v \in H_0^1(\Omega)$. A forma trilinear b é então definida por

$$\langle B(u,v), w\rangle = b(u,v,w),\ \forall\, u,v,w \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega u_i D_i v_j w_j \, dx.$$

A forma b tem as seguintes propriedades:

Lema 1.8. *A forma b está bem definida e é trilinear e contínua em $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times \big(H_0^1(\Omega)\cap L^n(\Omega)\big)$, para $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ limitado ou ilimitado e para n qualquer. Em particular, para Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$, com $n\le 4$ tem-se que b é uma forma trilinear contínua em $V\times V\times V$.*

Lema 1.9. *Para Ω subconjunto aberto de R^n,*

$$b(u,v,v) = 0,\ \forall\, u\in V,\ v\in H_0^1(\Omega)\cap L^n(\Omega),$$

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v),\ \forall\, u\in V,\ v,w\in H_0^1(\Omega)\cap L^n(\Omega).$$

A demonstração de cada um destes dois lemas acima pode ser encontrada por exemplo em Temam [66].

Assim como para as equações de Navier-Stokes, definiremos uma forma trilinear para as Equações α-Navier-Stokes. Para isto, denote $\tilde{B}(u,v) = -\mathbb{P}[u\times(\nabla\times v)]$, para $u, v\in H_0^1(\Omega)$.

O operador $\tilde{B}$ é definido por

$$\langle \tilde{B}(u,v), w\rangle = -\langle \mathbb{P}[u\times(\nabla\times v)], w\rangle,\quad \forall\, u,v,w\in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Segue da identidade vetorial

$$(b\cdot\nabla)a + \sum_{j=1}^{3} a_j\nabla b_j = -b\times(\nabla\times a) + \nabla(a\cdot b) \tag{1.6}$$

que

$$\langle \tilde{B}(u,v), w\rangle = b(u,v,w) - b(w,v,u), \ \forall\, u,\ v,\ w \in H_0^1(\Omega).$$

O próximo lema nos apresenta outras propriedades do operador $\tilde{B}$.

Lema 1.10. *(i) O operador $\tilde{B}$ pode ser estendido continuamente de $V \times V$ com valores em V', e em particular satisfaz*

$$|\langle \tilde{B}(u,v), w\rangle_{V'}| \leq c\|u\|_H^{1/2}\|u\|_V^{1/2}\|v\|_V\|w\|_V,$$
$$|\langle \tilde{B}(u,v), w\rangle_{V'}| \leq c\|u\|_V\|v\|_V\|w\|_H^{1/2}\|w\|_V^{1/2},$$

para todo $u, v, w \in V$.

(ii) O operador $\tilde{B}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$\langle \tilde{B}(u,v), w\rangle_{V'} = -\langle \tilde{B}(w,v), u\rangle_{V'}, \ \forall u, v, w \in V,$$

$$\langle \tilde{B}(u,v), u\rangle_{V'} \equiv 0, \ \forall u, v \in V.$$

(iii) Temos também,

$$|\langle \tilde{B}(u,v), w\rangle_{D(A)'}| \leq c\|u\|_H\|v\|_V\|w\|_V^{1/2}\|Aw\|_H^{1/2}, \ \forall u \in H,\ v \in V \ \text{e}\ w \in D(A).$$

Por simetria, temos,

$$|(\tilde{B}(u,v), w)| \leq c\|u\|_V^{1/2}\|Au\|_H^{1/2}\|v\|_V\|w\|_H, \ \forall u \in D(A),\ v \in V \ \text{e}\ w \in H.$$

(iv) Temos ainda,

$$|\langle \tilde{B}(u,v), w\rangle_{D(A)'}| \leq c\Big(\|u\|_H^{1/2}\|u\|_V^{1/2}\|v\|_H\|Aw\|_H + \|u\|_V\|v\|_H\|w\|_V^{1/2}\|Aw\|_H^{1/2}\Big),$$

para todo $u \in V$, $v \in H$ e $w \in D(A)$.

(v) E, finalmente, temos

$$|\langle \tilde{B}(u,v), w\rangle_{V'}| \leq c\Big(\|u\|_V^{1/2}\|Au\|_H^{1/2}\|v\|_H\|w\|_V + \|Au\|_H\|v\|_H\|w\|_H^{1/2}\|w\|_V^{1/2}\Big),$$

para todo $u \in D(A)$, $v \in H$ e $w \in V$.

A demonstração deste Lema pode ser consultada em Foias *et al.* [34].

Observação 1.3. *As propriedade de $\tilde{B}$ do item (ii) do Lema acima, valem independentemente do fato que div $u = 0$, div $v = 0$, div $w = 0$, de acordo com o comentário anterior ao Lema.*

Vamos agora, reescrever a equação (1.3) em uma forma abstrata como em [34].

A identidade vetorial (1.6) nos permite substituir, na primeira equação de (1.3), o termo $w \cdot \nabla u + (\nabla w)^T u$ pelo termo $-w \times (\nabla \times u) + \nabla(u \cdot w)$.

Por outro lado, supondo que temos regularidade suficiente e aplicando o projetor $\mathbb{P}$ à segunda equação de (1.3), observando que u e w pertencem a H, obtemos que $u = w + \alpha^2 Aw$. Assim, utilizando esta expressão para u, a primeira equação de (1.3) se torna

$$\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw) - \nu\Delta(w + \alpha^2 Aw) - w \times \nabla \times (w + \alpha^2 Aw) + \nabla q = f,$$

onde $q = p + w \cdot w - \alpha^2 Aw \cdot w$.

Então, aplicando mais uma vez o projetor $\mathbb{P}$, agora na equação anterior, o problema (1.3) finalmente se reescreve como:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw) + \nu A(w + \alpha^2 Aw) + \tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw) = \mathbb{P}f \\ w = w_0 \text{ para } t = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

A formulação variacional deste modelo é obtida multiplicando a primeira equação de (1.7) por uma função $v \in D(A)$ e integrando por partes. O objetivo então, é, encontrar $w \in D(A)$ que satisfaz

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw), v\Big) + \nu\big((w + \alpha^2 Aw), Av\big) + \big(\tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw), v\big) = \big(f, v\big), \quad \forall v \in D(A), \tag{1.8}$$

observe que a projeção $\mathbb{P}$ não aparece mais no segundo lado da igualdade, isto ocorre pois este operador é autoadjunto e a função teste pertence à $D(A) \subset H$ (imagem de $\mathbb{P}$).

Enunciamos a seguir o resultado de existência e unicidade de solução para o problema (1.8), que pode ser consultado em Çaglar [19].

Teorema 1.1. *Sejam $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $w_0 \in V$ e $0 \leq T < \infty$ fixado. Então o problema (1.8) tem uma única solução $w(t)$ no intervalo $[0, T)$.*

A demonstração deste resultado pode ser consultada em Çaglar [19].

Neste mesmo artigo, Çaglar mostra que a solução w possui uma regularidade maior; ele obtém $w \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$.

Observação 1.4. *O resultado de existência provado por Çaglar em [19] também pode ser provado pelo método de compressibilidade artificial (ver, por exemplo [66, p. 287]) com a seguinte formulação aproximada para o problema.*

Para cada $\varepsilon > 0$ fixo, e dados $w_0 \in V$, $p_0 \in L^2(\Omega)$, queremos encontrar $w_\varepsilon \in L^2(0,T;D(A))$, $p_\varepsilon \in L^2(Q)$ que satisfazem a formulação variacional corresponde a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w_\varepsilon + \alpha^2 A w_\varepsilon) + \nu\Delta(w_\varepsilon + \alpha^2 A w_\varepsilon) + \tilde{B}(w_\varepsilon, w_\varepsilon + \alpha^2 A w_\varepsilon) + \nabla p_\varepsilon = f \;\; em \; Q,\\
&\varepsilon\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + div\; w_\varepsilon = 0 \;\; em \; Q,\\
&w_\varepsilon(0) = w_0, \;\; p_\varepsilon(0) = p_0, \;\; em \; \Omega,\\
&w_\varepsilon(0) = 0 \;\; em \; \partial\Omega \times (0,T).
\end{aligned}$$

Observe que no caso das equações de Navier-Stokes é necessária a adição do termo $\frac{1}{2}(div\; w_\varepsilon)w_\varepsilon$ à equação da velocidade (veja, e. g. Temam [66, p.287]), pois como não temos mais a condição $div\; w = 0$ a forma trilinear b perde a propriedade $b(w,w,w) = 0$.

O termo adicional é um termo de estabilidade, usado para substituir a forma b pela forma $\hat{b}$ de modo que $\hat{b}(u,v,w) = b(u,v,w)$, para todo $u,v,w \in V$, e $\hat{b}(w,w,w) = 0$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Neste caso, com as equações α-Navier-Stokes não há adição de nenhum termo já que a propriedade $(\tilde{B}(w,u),w) = 0$ é válida independentemente de $div\, w = 0$, pois o vetor $w \times \nabla \times u$ é ortogonal ao vetor w, para quaisquer vetores u e w, não havendo necessidade de substituir o operador $\tilde{B}$, o qual foi definido em (1.5).

Capítulo 2

Um Modelo Penalizado de Mudança de Fases com Convecção

Neste capítulo analisaremos o sistema de equações diferenciais parciais não lineares que descreve o processo de solidificação/fusão com o auxílio da metodologia de campo de fase e levando em consideração os mecanismos de condução e convecção da energia e material. O sistema é composto por uma equação de momento que determina o deslocamento (que se dá por fluido incompressível e é descrito pelas equações α-Navier-Stokes), uma equação para o parâmetro campo de fases que determina a fase do material e uma equação de balanço de energia interna, que determina a evolução da temperatura. Nosso objetivo aqui é mostrar a existência e unicidade de solução para este sistema.

2.1 Uma breve introdução a modelos de solidificação

Cada vez mais a compreensão do comportamento de materiais submetidos a diversas situações físicas é de fundamental importância para o desenvolvimento adequado de novos produtos. Entre tais materiais estão os compósitos, polímeros, colóides, misturas, e outros, os quais em geral apresentam comportamentos termomecânicos complexos e muitas vezes estão presentes em situações que podem acarretar mudanças de fases.

Portanto, o estudo cuidadoso de tais comportamentos, bem como das possibilidades de controlá-los, através das análises dos respectivos modelos termomecânicos, é tarefa essencial para o desenvolvimento de projetos de engenharia nos quais tais materiais estejam envolvidos. Em particular, para cada um desses modelos é necessário ter a correta compreensão de vários dos seus aspectos matemáticos.

Antes de apresentar o modelo a ser analisado neste capítulo faremos uma breve exposição de como se iniciou o estudo de modelos matemáticos para descrever o processo de mudanças de fase de materias e a forma que eles sofreram mudanças até chegarmos ao modelo que estudaremos aqui.

Como a metodologia da derivação das equações que descrevem o comportamento de materiais com transição de fases é mais conhecida, nos concentraremos aqui em descrever brevemente uma metodologia bastante adequada para incorporar tais fenômenos em modelos mais simples. Tal metodologia é aquela que utiliza o conceito de interface difusa (veja, por exemplo, [2], [4], [6], [7]), isto é, aquela que supõe de forma mais realista que tais transições não ocorrem de forma absolutamente brusca, mas sim em camadas de transição, eventualmente bastante finas, que admitem estrutura e propriedades físicas específicas.

Um exemplo importante de modelos de interface difusa são os chamados modelos de campos de fase. Usualmente tais modelos introduzem uma função escalar da posição e do tempo, chamada campo de fase ou parâmetro de ordem, φ, cujos valores servem para indicar a fase do material. Por exemplo, considera-se que um ponto x do domínio, no instante t está na fase sólida se $\varphi(x,t) \geq \varphi_s$; ele está na fase líquida se $\varphi(x,t) \leq \varphi_l$ e na fase *mushy* se $\varphi_l < \varphi(x,t) < \varphi_s$ (aqui φ_s e φ_l dependem do material considerado). Neste trabalho utilizaremos o parâmetro de ordem de forma indireta, pois o indicador básico das fases será a fração sólida, representada pela função h. Desta forma teremos que $h(\varphi) = 1$ na região sólida quando $\varphi_s \leq \varphi$, $0 < h(\varphi) < 1$ na região *mushy* quando $\varphi_l < \varphi < \varphi_s$ e $h(\varphi) = 0$ na região líquida quando $\varphi \leq \varphi_l$. A região *mushy* é uma região de transição que se comporta macroscopicamente como um mistura de sólido e líquido e pode ser modelada do ponto de vista do escoamento, por exemplo, como um meio poroso não consolidado.

Um modelo com o parâmetro campo de fases para descrever a transição de fase solidificação/liquefação de materiais puros foi proposto originalmente por Langer e Fix [48, 33]. Tal perspectiva foi posteriormente desenvolvida e generalizada por muitos pesquisadores; veja por exemplo [15, 16, 17, 18, 20, 23]. Apenas para ilustrar, recordamos que na derivação das equações que governam a mudança de fase, Langer [48] considerou um funcional energia livre com dois tipos de contribuições para a energia: uma parcela dependendo do gradiente do campo de fases (e que basicamente fornece a energia acumuladas nas interfaces) e outra correspondente à densidade de energia potencial com a estrutura de poço duplo (*double well potencial*), obtendo as seguintes equações para o campo de fase e a temperatura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \xi^2 \Delta \varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \kappa \Delta \theta + \ell \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aqui, como antes φ é o campo de fase, θ a temperatura; ξ é um coeficiente associado à densidade de energia acumulada na interface; κ é associado à condutividade térmica; ℓ é associado ao calor latente e $f(\varphi, \theta)$ é a densidade de energia potencial.

Posteriormente, Penrose e Fife [60, 61] e outros [67, 68] aplicaram argumentos da termodinâmica para obter variações das equações (2.1). Em suas várias generalizações elas têm sido extensamente estudadas por vários autores; veja por exemplo [13, 32, 42, 44, 45, 46, 50, 49, 57, 69].

Observamos que uma das principais vantagens deste tipo de formulação é a possibilidade de se calcular computacionalmente interfaces complexas associadas, por exemplo, a crescimento de cristais e mudanças de fase em geral. Uma variedade de outros problemas também têm sido tratados com a metodologia do campo de fase: fenômenos da hidrodinâmica envolvendo capilaridade, movimento de contato, nucleação, etc. Observamos também que em muitas situações há interpretação física natural para o campo de fase.

No entanto, uma característica comum à maioria dos modelos considerados que aplicam esta metodologia é o fato de que há implicitamente a hipótese de que não ocorre transporte macroscópico de material durante o processo de mudança de fases. Isto é, supõe-se que, mesmo na fase líquida, não ocorre fluxo de material e, portanto, as únicas questões relevantes são aquelas associadas aos fluxos de energia e das mudanças de fase. Entretanto, em muitas situações relevantes na prática, esta não é uma hipótese realista e os efeitos dos fluxos na parte fluida são importantes e interferem no resultado final do processo. Nestes casos, é necessário acoplar às equações anteriores as equações que descrevem o escoamento que ocorre na região fluida.

A análise de modelos de solidificação que consideram a possibilidade de movimentação na parte não-sólida é em geral mais difícil do ponto de vista matemático e tem sido menos consideradas na literatura científica. Alguns resultados que consideraram este tipo de situação podem ser encontrados, por exemplo, em Blanc *et al.* [10], Planas e Boldrini [62, 63, 11], nos quais utilizam-se variantes da equações de Navier-Stokes para fluidos viscosos e incompressíveis para descrever possíveis fluxos.

No presente trabalho também consideramos a possibilidade de fluxo do material durante o processo de solidificação-fusão, porém, para descrever tais movimentos utilizamos uma variação das equações α-Navier-Stokes, o que nos permitirá ter ganhos de regularidade das soluções mesmo no caso tridimensional.

2.2 Apresentação do modelo a ser analisado

Sejam Ω um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ e $T > 0$ fixo; denote $Q = \Omega \times (0, T)$.

O modelo que consideraremos é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} + w \cdot \nabla u + (\nabla w)^t \cdot u + \nabla p = \nu \Delta u - K(h(\varphi))w + c\mathbf{g}\theta \quad \text{em } Q, \\
& u = w - \alpha^2 \Delta w - \nabla \tilde{p} \text{ em } Q, \\
& \text{div } w = \text{div } u = 0 \text{ em } Q, \\
& u = w = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T), \\
& w = w_0, \quad \text{em } \Omega \times \{0\}, \\
& \frac{\partial \varphi}{\partial t} + w \cdot \nabla \varphi - \epsilon^2 \Delta \varphi - (2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3) = \beta\theta \text{ em } Q, \\
& \frac{\partial \theta}{\partial t} + w \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = \frac{\ell}{2} h'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ em } Q, \\
& \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0, T), \\
& \varphi = \varphi_0, \ \theta = \theta_0 \quad \text{em } \Omega \times \{0\}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Recordamos que as variáveis u e w denotam as velocidades associadas às equações α-Navier-Stokes, as quais incluem termos adicionais associados ao problema de mudança de fases; as pressões hidrostáticas correspondentes, requeridas pelas condições de divergentes nulos, são p e $\tilde{p}$, respectivamente. A velocidade w é aquela regularizada que é utilizada como velocidade de transporte. As variáveis φ e θ são respectivamente o campo de fase e a temperatura.

Quanto aos coeficientes dessas equações, a constante $\nu > 0$ é a viscosidade do fluido; $\mathbf{g}$ é o vetor aceleração da gravidade; o parâmetro $\alpha > 0$ é uma constante dada associada à velocidade de transporte no modelo de α-Navier-Stokes.

O coeficiente $\epsilon > 0$ é um parâmetro constante associado à densidade de energia acumulada na interface; a constante $\kappa > 0$ é associada à condutividade térmica; $\ell > 0$ é uma constante associada ao calor latente.

A função $f(\varphi, \theta) = 2a(x,t)\,\varphi + 3b(x,t)\,\varphi^2 - 4\varphi^3$ é a derivada com respeito a φ da densidade de energia potencial que está sendo considerada; neste caso $f(\varphi, \theta) = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, \theta)$, onde $F(\varphi,\theta) = a(x,t)\,\varphi^2 + b(x,t)\,\varphi^3 - \varphi^4 + \theta$, a qual é uma generalização do chamado potencial de duplo poço (*two-well potential*) (veja [58]).

Por simplicidade de exposição e sem perda de generalidade, supomos que a densidade média do material é igual a um e que a temperatura de referência é nula.

A primeira, a segunda e a terceira equações em (2.2) correspondem às equações do escoamento do material fundido (não sólido), o qual é suposto viscoso e incompressível e governado por uma adaptação das equações α-Navier-Stokes pela inclusão de termos adicionais descritos a seguir.

O termo $c\mathbf{g}\theta$ é chamado termo de aproximação de Boussinesq e é o responsável pelo efeito convectivo (movimento) causado pelas forças de empuxo geradas por pequenas alterações na densidade devido às diferenças de temperatura.

O termo $K(h(\varphi))w$ é um termo de penalização do tipo Carman-Koseny e corresponde a um termo de atrito que modifica o escoamento na região *mushy* de tal forma que espera-se que quanto maior a fração sólida menor é o fluxo.

Para tal efeito, é introduzida a função real $h(\cdot)$ que relaciona a fração sólida do material com o campo de fases; ela é uma função dada que depende do material considerado e satisfaz $h(\varphi) = 0$ quando $\varphi \leq \varphi_l$, $h(\varphi) = 1$ quando $\varphi_s \leq \varphi$ e é estritamente crescente em (φ_l, φ_s); aqui φ_l e φ_s são constantes conhecidas, dependendo do material, que determinam as fases, isto é, conforme já dito na Introdução, um ponto $x \in \Omega$ no instante $t \in [0,T]$ está na fase sólida se $\varphi(x,t) \geq \varphi_s$; ele está na fase líquida se $\varphi(x,t) \leq \varphi_l$ e na fase *mushy* se $\varphi_l < \varphi(x,t) < \varphi_s$ (aqui φ_s e φ_l dependem do material considerado).

Consideramos também que a função real $K(\cdot) \in C[0,1]$ dada satisfaz $K(0) = 0$, é estritamente positiva em $(0,1)$ e $K(1) = K_g$, com $K_g >> 1$. Conforme explicaremos logo depois do enunciado do resultado principal deste capítulo, estes requerimentos garantem que a velocidade do fluxo será bem pequena (para $K_g >> 1$) em uma certa norma na região sólida.

A sexta das equações em (2.2) é a equação do campo de fases φ, que descreve as fases do processo de solidificação.

A sétima equação corresponde ao balanço de energia escrita em termos da temperatura θ.

Observamos que, se utilizarmos a notação da Seção 1.3 e procedermos como feito para obtermos a equação (1.7), podemos reescrever o modelo deste capítulo como:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw)+\nu A(w+\alpha^2 Aw)+\tilde{B}(w,w+\alpha^2 Aw)=-\mathbb{P}(K(h(\varphi))w)+c\mathbb{P}(\mathbf{g}\theta),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial t}+w\cdot\nabla\varphi-\epsilon^2\Delta\varphi-(2a\varphi+3b\varphi^2-4\varphi^3)=\beta\theta \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial t}+w\cdot\nabla\theta-\kappa\Delta\theta=\frac{\ell}{2}h'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t} \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0,\ \frac{\partial\theta}{\partial n}=0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T),\\
&w=w_0,\ \varphi=\varphi_0,\ \theta=\theta_0, \quad \text{em } t=0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

lembrando que $\tilde{B}$ está definido em (1.5).

2.3 O resultado principal: existência e unicidade de solução

Nesta seção daremos o sentido de solução e apresentaremos o resultado de existência de solução para o sistema (2.3).

Considere as seguintes hipóteses para as funções K e h, que serão necessárias até o final deste capítulo:

(H1) K é uma função de classe $C^1[0,1]$ tal que $K(0)=0$ e $K(1)=K_g$, onde $K_g >> 1$ é uma constante positiva.

(H2) h e h' são funções Lipschitz contínuas definidas em $\mathbb{R}$ e $0\le h(r)\le 1,\ \forall r\in\mathbb{R}$.

Observação 2.1. *A função h' é limitada pois h é Lipschitz contínua.*

Observação 2.2. *A função $K\circ h$ é limitada pois a função K é contínua e a função h é limitada.*

Apresentamos agora o resultado principal deste capítulo:

Teorema 2.1. *Sejam $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto e limitado de classe C^3 e suponha que as condições iniciais satisfazem: $w_0 \in V$, $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_q^{3/2-\delta}(\Omega)$, com $5/2 < q \leq 8$ e $0 < \delta \leq 1$, e $\theta_0 \in W_2^1(\Omega)$, satisfazendo as condições de compatibilidade $\dfrac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0$ e $\dfrac{\partial \theta_0}{\partial n} = 0$ em $\partial\Omega$. Então, sob as hipóteses (H1)-(H2), existem únicas funções (w, φ, θ) tais que*

(i) $w \in L^2(0,T; D(A)) \cap L^\infty(0,T;V)$, $\dfrac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0,T;H)$, $w(0) = w_0$,

(ii) $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ *em* $\partial\Omega \times (0,T)$,

(iii) $\theta \in W_2^{2,1}(Q)$, $\theta(0) = \theta_0$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial n} = 0$ *em* $\partial\Omega \times (0,T)$,

satisfazendo

$$(w(t) + \alpha^2 Aw(t), v) - \int_0^t < w + \alpha^2 Aw, \frac{\partial v}{\partial t} > \, ds + \nu \int_0^t (w + \alpha^2 Aw, Av)\, ds$$

$$+ \int_0^t \left(\tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw), v\right) ds = - \int_0^t (K(h(\varphi))w, v)\, ds + c\mathbf{g} \int_0^t (\theta, v)\, ds + (w_0 + \alpha^2 Aw_0, v(0)),$$

para toda $v \in L^\infty(0,T;D(A))$ *tal que* $\dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;D(A)')$ *e* $\tilde{B}$ *está definido em* (1.5). *Além disso,*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + w \cdot \nabla\varphi - \epsilon^2 \Delta\varphi - (2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3) = \beta\theta \text{ no sentido de } L^q(Q),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + w \cdot \nabla\theta - \kappa\Delta\theta = \frac{\ell}{2} h'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ no sentido de } L^2(Q).$$

Se acrescentarmos a hipótese $\theta_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_q^{3/2-\delta}(\Omega)$, com q e δ como antes, obtemos adicionalmente que $\theta \in W_q^{2,1}(Q)$.

Observação 2.3. *Um resultado similar ao apresentado no Teorema 2.1 também é válido para domínios da forma $\Omega = [0, L]^3$ e condições de contorno periódicas para as incógnitas.*

Neste caso, diferentemente da situação das equações usuais de α-Navier-Stokes, não é possível supor sem perda de generalidade que a velocidade tem média nula em Ω em cada instante, uma vez que isso não é garantido pelas equações de evolução devido à presença dos termos do tipo Carman-Koseny e Boussinesq. Como por razões técnicas (para garantir desigualdades do tipo Poincaré) é importante trabalhar em espaços de funções com média *nula, para provar um resultado análogo de existência de soluções no caso de condições de contorno periódicas é conveniente acrescentar como variável extra a média espacial da velocidade u em Ω, a qual denotamos $m_u(t)$. Após uma mudança de variável, o sistema a ser resolvido tem uma equação adicional e se torna:*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw)+\nu A(w+\alpha^2 Aw)+\tilde{B}(w+m_u(t),w+\alpha^2 Aw)=\\
&\qquad -\mathbb{P}\big(K(h(\varphi))(w+m_u)\big)+c\mathbb{P}(\mathbf{g}\theta)+\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathbb{P}\big(K(h(\varphi))(w+m_u(t))\big)dx\\
&\qquad -\frac{1}{|\Omega|}c\int_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{g}\theta)dx,\\
&\frac{d}{dt}m_u=-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathbb{P}\big(K(h(\varphi))(w+m_u)\big)dx+\frac{1}{|\Omega|}c\int_\Omega \mathbb{P}(\mathbf{g}\theta)dx,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(w+m_u)\cdot\nabla\varphi-\epsilon^2\Delta\varphi-(2a\varphi+3b\varphi^2-4\varphi^3)=\beta\theta \;\; em\; Q,\\
&\frac{\partial\theta}{\partial t}+(w+m_u)\cdot\nabla\theta-\kappa\nabla\theta=\frac{\ell}{2}h'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\;\; em\; Q,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0,\;\frac{\partial\theta}{\partial n}=0 \quad em\;\partial\Omega\times(0,T),\\
&w(0)=w_0,\; m_u(0)=m_0,\; \varphi(0)=\varphi_0,\; \theta(0)=\theta_0\;\; em\;\Omega,
\end{aligned}
$$

com $\tilde{B}$ definido em (1.5).

Observação 2.4. *No decorrer da prova do Teorema 2.1, obteremos que a solução do sistema de equações satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\int_0^T\int_\Omega K(h(\varphi))|w|^2dx\,dt\le C,$$

onde C é uma constante positiva dependendo somente dos dados iniciais.

Em particular, se nos restringirmos à região sólida $Q_s=\{(x,t)\in Q;\; h(\varphi(x,t))=1\}$ associada à solução, lembrando que $K(1)=K_g$, teremos:

$$K_g\int_{Q_s}|w|^2dx\,dt\le\int_0^T\int_\Omega K(h(\varphi))|w|^2dx\,dt\le C,$$

e assim

$$\int_{Q_s}|w|^2dx\,dt\le\frac{C}{K_g}.$$

Desta forma, quanto maior for o valor de K_g, menor será a velocidade w na região sólida.

Este resultado sugere que se tivéssemos um termo de Carman-Kozeny com uma função K singular quando o material se torna sólido, isto é, quando $\lim_{x\to 1^-} K(x) = +\infty$, deveríamos esperar ter um fluxo em que velocidade se anulasse na região sólida. Um possível argumento para provar este tipo de resultado seria o seguinte: aproximamos adequadamente tal K por uma sequência de funções K_δ, com $\delta \to 0+$, cada uma das quais limitada, como a função que consideramos neste capítulo. A seguir deveríamos ter estimativas para as respectivas soluções dos problemas aproximados de tal forma que nos permitissem passar ao limite quando $\delta \to 0+$. Neste tipo de argumento em geral não há dificuldade em provar que a velocidade limite é de fato nula na região sólida. A dificuldade maior aparece em passar ao limite nas não linearidades da equação na parte não sólida; para isto, tenta-se buscar estimativas para as derivadas temporais que sejam locais no interior da região líquida. Tal procedimento pode ser completado para outros modelos de fluidos, sob certas condições(veja, por exemplo, [62] e [63]). No caso do presente problema, não foi possível realizar este último passo no caso de termos singulares, uma vez que para isso seriam necessárias estimativas locais para as derivadas temporais de ambas as velocidades no modelo; para uma dessas velocidades pode-se fazer um argumento desse tipo, mas não para a outra, já que o acoplamento entre elas é feito através de um operador global, e seria necessária uma invertibilidade local para passar a estimativa local para a outra velocidade.

Por essa razão, nesta tese consideramos apenas termos de Carman-Kozeny sem singularidades.

2.4 Um problema auxiliar

Para simplificar a apresentação da demonstração do Teorema 2.1, consideraremos inicialmente um problema auxiliar associado ao campo de fases φ. Tal problema é o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial t} + w\cdot\nabla\varphi - \epsilon^2\Delta\varphi - (2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3) = g \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \text{ em } \partial\Omega\times(0,T),\\
&\varphi(x,0) = \varphi_0(x) \quad \text{em } \Omega.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Para ele vale o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Seja* $g \in L^q(Q)$, *com* $2 \leq q \leq 8$, $w \in L^2(0,T;D(A))) \cap L^\infty(0,T;V)$, $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_q^{3/2-\delta}(\Omega)$ *com* $0 < \delta \leq 1$, *e a condição de compatibilidade* $\partial\varphi_0/\partial n = 0$ *em* $\partial\Omega$. *Então existe uma única solução para o problema* (2.4) *e esta satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\big(\|\varphi_0\|_{W_q^{q-2/q}(\Omega)} + \|g\|_{L^q(Q)} + \|\varphi_0\|^2_{W_q^{q-2/q}(\Omega)} + \|g\|^2_{L^q(Q)} \\ + \|\varphi_0\|^3_{W_q^{q-2/q}(\Omega)} + \|g\|^3_{L^q(Q)}\big),$$

onde C *depende apenas de* T, Ω *e* $\|w\|_{L^8(Q)}$.

Demonstração: A demonstração da existência de $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)$ solução deste problema é uma aplicação do teorema de ponto fixo de Leray-Schauder (Lema 1.4) e por ser absolutamente similar àquela feita por Planas em [63], com T_λ definido no espaço $B = L^6(\Omega)$, será omitida.

A unicidade é obtida de modo usual por argumento de contradição.

Para obter que $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ e que vale a estimativa enunciada, vamos analisar a regularidade da solução deste problema usando um argumento de *bootstrapping*.

Observe que, como $\varphi \in L^6(Q)$ e $g \in L^q(Q)$, $q \geq 2$ temos $2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3 + g \in L^2(Q)$. Podemos então aplicar o Lema 1.3, que nos fornece a existência de uma única solução $\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$ de (2.4), satisfazendo

$$\|\varphi\|_{L^{10}(Q)} \leq C\|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C(\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(Q)}).$$

Agora, como $\varphi \in L^9(Q)$, temos $2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3 + g \in L^3(Q)$, e aplicando novamente o Lema 1.3, obtemos $\varphi \in W_3^{2,1}(Q)$. Do Lema 1.1, temos que $\varphi \in W_3^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$. Agora, como $\varphi \in L^\infty(Q)$, $2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3 + g \in L^q(Q)$, para $q \geq 2$. Novamente, pelo Lema 1.3, temos $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$, para $q \geq 2$, única solução de (2.4), satisfazendo

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\big(\|2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3 + g\|_{L^q(Q)} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}\big) \\ &\leq C\big(\|2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3\|_{L^q(Q)} + \|g\|_{L^q(Q)} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}\big) \\ &\leq C\big(\|\varphi\|_{L^q(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^{2q}(Q)} + \|\varphi\|^3_{L^{3q}(Q)} + \|g\|_{L^q(Q)} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}\big).\end{aligned}$$

E, pelo Lema 1.1, temos a imersão $W_2^{2,1}(Q) \subset L^p(Q)$, para todo $2 \leq p < \infty$, o que nos fornece na estimativa acima

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\big(\|\varphi\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|^3_{W_2^{2,1}(Q)} + \|g\|_{L^q(Q)} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}\big)\\ &\leq C\big(\|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|g\|_{L^q(Q)} + \|\varphi_0\|^2_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|g\|^2_{L^q(Q)} + \|\varphi_0\|^3_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|g\|^3_{L^q(Q)}\big),\end{aligned}$$

onde esta última desigualdade decorre da primeira desigualdade desta demonstração e da imersão contínua $W_q^{2-2/q}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, para todo $q \geq 2$. $\square$

Observação 2.5. *Com respeito a este problema, observamos:*

1. *A restrição $q \leq 8$ nos Teoremas 2.1 e 2.2 deve-se à regularidade do campo velocidade, obtida em* (1.2) *e da hipótese 3. do Lema 1.3.*

2. *O resultado auxiliar acima vale para $q \geq 2$, mas será utilizado apenas com a restrição $q > 5/2$ no Teorema 2.1, pois devido ao Lema 1.2, temos a imersão contínua $W_q^{2,1}(Q) \hookrightarrow H^{\tau,\tau/2}(Q)$ para $q > 5/2$. Consideraremos então $5/2 < q \leq 8$ para o resultado de existência, pois desta forma temos esta imersão contínua e o resultado enunciado acima.*

2.5 Demonstração do teorema principal

Nesta seção provaremos o resultado principal deste capítulo, o Teorema 2.1, que nos garante a existência de solução fraca para o Problema (2.3).

2.5.1 Resultado preliminar sobre existência de solução

A demonstração de existência de solução para o Problema (2.3) será feita usando-se o teorema de ponto fixo de Leray- Schauder, Lema 1.4.

Assim, para cada $\lambda \in [0,1]$, definimos o operador

$$\begin{array}{rccl} T_\lambda: & B & \rightarrow & B,\\ & (\hat{w},\hat{\varphi},\hat{\theta}) & \rightarrow & T_\lambda(\hat{w},\hat{\varphi},\hat{\theta}) = (w,\varphi,\theta)\end{array}$$

com

$$B = L^2(0,T;V) \times L^2(Q) \times L^2(Q),$$

e (w, φ, θ) dado pela solução do sistema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw)+\nu A(w+\alpha^2 Aw)+\tilde{B}(w,w+\alpha^2 Aw) = -\lambda\mathbb{P}(K(h(\hat{\varphi}))\hat{w})+\lambda c\mathbb{P}(\mathbf{g}\hat{\theta}),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial t}+w\cdot\nabla\varphi-\epsilon^2\Delta\varphi-(2a\varphi+3b\varphi^2-4\varphi^3)=\lambda\beta\hat{\theta} \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial t}+w\cdot\nabla\theta-\kappa\Delta\theta=\frac{\ell}{2}h'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t} \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0,\ \frac{\partial\theta}{\partial n}=0,\ w=0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T),\\
&w(0)=w_0,\ \varphi(0)=\varphi_0,\ \theta(0)=\theta_0 \ \text{ em } \Omega.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Passemos à verificação das condições exigidas pelo teorema de ponto fixo de Leray-Schauder, Lema 1.4. Devido à extensão da prova, e para melhor organização dos argumentos, a seguir a verificação de cada condição será realizada em um bloco destacado.

T_λ está bem definido.

De fato, como $\hat{w}\in L^2(0,T;V)$, $K\in L^\infty(Q)$ e $\hat{\theta}\in L^2(Q)$, temos que $-\lambda\mathbb{P}K(h(\hat{\varphi}))\hat{w}+\lambda c\mathbb{P}(\mathbf{g}\hat{\theta})\in L^2(Q)$. Assim, pelo Teorema 1.1 (e o comentário abaixo deste), temos a existência e unicidade de solução para a equação α-Navier-Stokes, $w\in L^2(0,T;D(A))\cap L^\infty(0,T;V)$.

Para a equação em relação a φ do problema (2.5), observe que $w\in L^2(0,T;D(A))\cap L^\infty(0,T;V)$ e por interpolação, Corolário 1.2, temos $w\in L^8(Q)$. Assim, pelo resultado auxiliar para equações parabólicas, Teorema 2.2, temos que existe única $\varphi\in W_2^{2,1}(Q)$, solução desta equação.

Para a equação em relação à θ, como $w\in L^2(0,T;D(A))\cap L^\infty(0,T;V)$, concluímos por interpolação que $w\in L^8(Q)$, como $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^2(Q)$ e h' é limitada, temos que $h'(\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^2(Q)$. Assim, pelo resultado para equações parabólicas, Lema 1.3, temos que existe uma única solução $\theta\in W_2^{2,1}(Q)$.

Para λ fixo, T_λ é contínuo em B.

Seja $(\hat{w}^k,\hat{\varphi}^k,\hat{\theta}^k)$ uma sequência em B que converge fortemente a $(\hat{w},\hat{\varphi},\hat{\theta})\in B$ e seja (w^k,φ^k,θ^k) a solução do sistema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w^k+\alpha^2 Aw^k)+\nu A(w^k+\alpha^2 Aw^k)+\tilde{B}(w^k,w^k+\alpha^2 Aw^k)\\
&\qquad\qquad\qquad = -\lambda\mathbb{P}(K(h(\hat{\varphi}^k))\hat{w}^k)+\lambda c\mathbb{P}(\mathbf{g}\hat{\theta}^k),\\
&\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}+w^k\cdot\nabla\varphi^k-\epsilon^2\Delta\varphi^k-(2a\varphi^k+3b(\varphi^k)^2-4(\varphi^k)^3)=\lambda\beta\hat{\theta}^k \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial\theta^k}{\partial t}+w^k\cdot\nabla\theta^k-\kappa\Delta\theta^k=\frac{\ell}{2}h'(\varphi^k)\frac{\partial\varphi^k}{\partial t} \text{ em } Q,\\
&w^k=0,\quad \frac{\partial\varphi^k}{\partial n}=0,\ \frac{\partial\theta^k}{\partial n}=0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T),\\
&w^k(0)=w_0,\ \varphi^k(0)=\varphi_0,\ \theta^k(0)=\theta_0 \ \text{ em } \Omega.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Vamos mostrar que (w^k,φ^k,θ^k) converge a $(w,\varphi,\theta)=T_\lambda(\hat{w},\hat{\varphi},\hat{\theta})$. Para isto iremos estimar (w^k,φ^k,θ^k) por constantes independentes de k.

Fazendo o produto interno da primeira equação de (2.6) com w^k, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(w^k+\alpha^2 Aw^k)w^k\,dx+\nu\int_\Omega A(w^k+\alpha^2 Aw^k)w^k\,dx+\left(\tilde{B}(w^k,w^k+\alpha^2 Aw^k),w^k\right)=\\
&\qquad = -\lambda\int_\Omega K(h(\hat{\varphi}))\hat{w}^k\,w^k\,dx+\lambda c\mathbf{g}\int_\Omega \hat{\theta}^k w^k\,dx.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Agora, observando que $\left(\tilde{B}(w^k,w^k+\alpha^2 Aw^k),w^k\right)=0$ devido ao Lema 1.10, *(ii)*, e que a função $K\circ h$ é limitada, obtemos usando integração por partes e a Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(|w^k|^2+\alpha^2|\nabla w^k|^2)\,dx+\nu\int_\Omega(|\nabla w^k|^2+\alpha^2|Aw^k|^2)\,dx\\
&\qquad\le C\left(\int_\Omega |\hat{w}^k|^2+|\hat{\theta}^k|^2\,dx\right)+C\int_\Omega |w^k|^2\,dx\\
&\qquad\le C\left(\int_\Omega |\hat{w}^k|^2+|\hat{\theta}^k|^2\,dx\right)+C\left(\int_\Omega |w^k|^2+\alpha^2|\nabla w^k|^2\,dx\right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\int_\Omega(|w^k|^2+\alpha^2|\nabla w^k|^2)\,dx\le C\left(||w_0||_H^2+\alpha^2||\nabla w_0||_H^2\right)+C\left(||\hat{w}^k||^2_{L^2(Q)}+||\hat{\theta}^k||^2_{L^2(Q)}\right).$$

Ou seja,

$$||w^k||^2_{L^\infty(0,T;V)}\le C. \tag{2.9}$$

Voltando à estimativa (2.8), temos também que

$$||Aw^k||^2_{L^2(0,T;H)} \leq C,$$

o que nos dá

$$||w^k||^2_{L^2(0,T;D(A))} \leq C. \tag{2.10}$$

Para estimar $\dfrac{\partial w^k}{\partial t}$, denote $u^k = w^k + \alpha^2 A w^k$. Pela regularidade elíptica do operador de Stokes temos $\dfrac{\partial u^k}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(w^k + \alpha^2 A w^k)$. Isole o termo $\dfrac{\partial u^k}{\partial t}$ na primeira equação de (2.6), obtendo assim

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} = -\nu A u^k - \tilde{B}(w^k, u^k) - \lambda \mathbb{P}(K(h(\hat{\varphi}^k))\hat{w}^k) + \lambda c \mathbb{P}(\mathbf{g}\hat{\theta}^k).$$

Para $\eta \in D(A)$, com $\|\eta\|_{D(A)} \leq 1$, vamos estimar $\left|\left\langle \dfrac{\partial u^k}{\partial t}, \eta \right\rangle\right|^2$. Faremos isto estimando termo a termo. Para tanto, observamos que $\langle v, \eta\rangle = (v, \eta)$ quando $v \in L^2(\Omega)$ e usaremos a Desigualdade de Hölder. Temos então,

$$\begin{aligned} |\langle -\nu A u^k, \eta\rangle|^2 &= \nu^2 |\langle A u^k, \eta\rangle|^2 = \nu^2 |(u^k, A\eta)|^2 \\ &\leq \nu^2 ||u^k||^2_H ||A\eta||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \nu^2 ||u^k||^2_H ||\eta||^2_{D(A)} \\ &\leq \nu^2 ||u^k||^2_H, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$|\langle \lambda \mathbb{P}(K(h(\hat{\varphi}^k))\hat{w}^k), \eta\rangle|^2 \leq \lambda^2 |(K(h(\hat{\varphi}^k))\hat{w}^k, \eta)|^2 \leq \lambda^2 ||K||^2_{L^\infty(\Omega)} ||\hat{w}^k||^2_H ||\eta||^2_{L^2(\Omega)} \leq C ||\hat{w}^k||^2_H, \tag{2.12}$$

$$|\langle \lambda c \mathbb{P}(g\hat{\theta}^k), \eta\rangle|^2 \leq \lambda^2 c^2 g^2 |(\hat{\theta}^k, \eta)|^2 \leq C ||\hat{\theta}^k||^2_{L^2(\Omega)} ||\eta||^2_{L^2(\Omega)} \leq C ||\hat{\theta}^k||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Para estimar o termo $|\langle \tilde{B}(w^k, u^k), \eta\rangle|^2$ usaremos primeiramente o Lema 1.10 e em seguida a Desigualdade de Poincaré. Temos que,

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{B}(w^k, u^k), \eta\rangle| &\leq C\big(||w^k||_H^{1/2}\, ||\nabla w^k||_H^{1/2}\, ||u^k||_H\, ||A\eta||_H + ||u^k||_H\, ||\nabla w^k||_H\, ||\nabla \eta||_H^{1/2}\, ||A\eta||_H^{1/2}\big) \\ &\leq \big(||w^k||_H^{1/2}\, ||\nabla w^k||_H^{1/2}\, ||u^k||_H\, ||A\eta||_H + \lambda_1^{-1/4} ||u^k||_H\, ||\nabla w^k||_H\, ||A\eta||_H\big) \\ &\leq C\lambda_1^{-1/4}\big(||\nabla w^k||_H\, ||u^k||_H\, ||A\eta||_H + ||u^k||_H\, ||\nabla w^k||_H\, ||A\eta||_H\big) \\ &= 2C\lambda_1^{-1/4}\big(||\nabla w^k||_H\, ||u^k||_H\, ||A\eta||_H\big). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Logo,

$$|\langle \tilde{B}(w^k, u^k), \eta\rangle|^2 \leq 4C^2\lambda_1^{-1/2}||\nabla w^k||_H^2 \, ||u^k||_H^2. \tag{2.15}$$

Concluímos então, das estimativas (2.11)- (2.15), que

$$\Big\|\frac{\partial u^k}{\partial t}\Big\|^2_{D(A)'} = \sup_{\substack{\eta \in D(A) \\ ||\eta|| \leq 1}} \frac{|\langle \frac{\partial u^k}{\partial t}, \eta\rangle|^2}{||\eta||^2} \leq C\Big(\|\hat{\theta}^k\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\hat{w}^k\|^2_H + \|u^k\|^2_H + \|u^k\|^2_H \, \|\nabla w^k\|^2_H\Big). \tag{2.16}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\partial u^k}{\partial t}\Big\|^2_{L^2(0,T;D(A)')} &\leq C \int_0^T \Big(\|\hat{\theta}^k\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\hat{w}^k\|^2_H + \|u^k\|^2_H + \|u^k\|^2_H \, \|\nabla w^k\|^2_H\Big)\, ds \\ &\leq C\Big(\|\hat{\theta}^k\|^2_{L^2(Q)} + \|\hat{w}^k\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|w^k\|^2_{L^2(0,T;D(A))} + \|w^k\|^2_{L^\infty(0,T;V)} \, \|w^k\|^2_{L^2(0,T;D(A))}\Big) \\ &\equiv C, \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde C é uma constante que não depende de k, pois $\hat{\theta}^k$ é uniformemente limitada em $L^2(Q)$, $\hat{w}^k$ é uniformemente limitada em $L^2(0,T;V)$, e pelas estimativas (2.9) e (2.10).

Logo,

$$\Big\|\frac{\partial u^k}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T;D(A)')} \leq C, \tag{2.18}$$

e, recordando que $\dfrac{\partial u^k}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(w^k + \alpha^2 A w^k)$, concluímos que

$$\Big\|\frac{\partial w^k}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T;H)} \leq C. \tag{2.19}$$

Vamos à estimativa para φ^k. Pelo Teorema 2.2, temos a seguinte estimativa

$$\|\varphi^k\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\big(\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|G\|_{L^2(Q)} + \|\varphi_0\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|G\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi_0\|^3_{W_2^1(\Omega)} + \|G\|^3_{L^2(Q)}\big),$$

com $G = \lambda \mathbf{g} \hat{\theta}^k$. Assim,

$$\|\varphi^k\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\big(\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\hat{\theta}^k\|_{L^2(Q)} + \|\varphi_0\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|\hat{\theta}^k\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi_0\|^3_{W_2^1(\Omega)} + \|\hat{\theta}^k\|^3_{L^2(Q)}\big),$$

onde C depende de $\|w^k\|_{L^2(0,T;D(A)) \cap L^\infty(0,T;V)}$.

Como $\hat{\theta}^k$ são uniformemente limitadas em $L^2(Q)$ e de (2.9) e (2.10), temos que

$$\|\varphi^k\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C, \tag{2.20}$$

com C independente de k.

Vamos à estimativa para θ^k. Multiplicando a terceira equação de (2.6) por θ^k e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta^k}{\partial t}\theta^k\, dx + \int_\Omega w^k \nabla\theta^k \theta^k\, dx - \kappa \int_\Omega \Delta\theta^k\theta^k\, dx = \frac{\ell}{2}\int_\Omega h'(\varphi^k)\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}\theta^k\, dx.$$

Observando que div $w^k = 0$, as condições de fronteira e integrando por partes, temos

$$\int_\Omega w^k\nabla\theta^k\theta^k\, dx = \int_\Omega w^k \nabla\Big(\frac{|\theta^k|^2}{2}\Big)\, dx = -\int_\Omega \operatorname{div} w^k\Big(\frac{|\theta^k|^2}{2}\Big)\, dx + \int_{\partial\Omega} w^k \frac{\partial\big(\frac{|\theta^k|^2}{2}\big)}{\partial \eta}\, dS = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta^k|^2\, dx + \kappa\int_\Omega |\nabla\theta^k|^2\, dx = \frac{\ell}{2}\int_\Omega h'(\varphi^k)\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}\theta^k\, dx.$$

Integrando de 0 a t,

$$\int_\Omega |\theta^k|^2\, dx + 2\kappa\int_0^t\int_\Omega |\nabla\theta^k|^2\, dx\, ds = \|\theta_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \ell\int_0^t\int_\Omega h'(\varphi^k)\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}\theta^k\, dx\, ds.$$

Como h' é limitada, temos

$$\int_\Omega |\theta^k|^2\, dx + \kappa\int_0^t\int_\Omega |\nabla\theta^k|^2\, dx\, ds \leq \|\theta_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t\int_\Omega \Big|\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}\Big|\, |\theta^k|\, dx\, ds.$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\theta^k|^2\, dx + \kappa\int_0^t\int_\Omega |\nabla\theta^k|^2\, dx\, ds &\leq \|\theta_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi^k}{\partial t}\right|^2 dx\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |\theta^k|^2 dx\, ds\\ &\leq \|\theta_0\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|\varphi^k\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |\theta^k|^2 dx\, ds\\ &\leq C + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |\theta^k|^2 dx\, ds.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\int_\Omega |\theta^k|^2 dx \le C,$$

onde C independe de k, pela estimativa (2.20).

Logo,

$$\|\theta^k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C. \tag{2.22}$$

Voltando à estimativa (2.21), temos também,

$$\|\theta^k\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le C, \tag{2.23}$$

onde C não depende de k.

Vamos à estimativa para $\dfrac{\partial \theta^k}{\partial t}$. Fazendo o produto interno da terceira equação de (2.6) com $\eta \in H^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta^k}{\partial t}\eta\, dx = -\int_\Omega w^k \nabla\theta^k \eta\, dx + k\int_\Omega \Delta\theta^k \eta\, dx + \frac{\ell}{2}\int_\Omega h'(\varphi^k)\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}\eta\, dx.$$

Por integração por partes e as condições na fronteira de Ω, obtemos:

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta^k}{\partial t}\eta\, dx = \int_\Omega w^k \theta^k \nabla\eta\, dx - k\int_\Omega \nabla\theta^k \nabla\eta\, dx + \frac{\ell}{2}\int_\Omega h'(\varphi^k)\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}\eta\, dx.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial \theta^k}{\partial t}\eta\, dx \le{}& \left(\int_\Omega |w^k|^2|\theta^k|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla\eta|^2\, dx\right)^{1/2} + k\left(\int_\Omega |\nabla\theta^k|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla\eta|^2\right)^{1/2}\\
&+C\left(\int_\Omega |\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\eta|^2\, dx\right)^{1/2}\\
\le{}& \left(\int_\Omega |w^k|^4\, dx\right)^{1/4}\left(\int_\Omega |\theta^k|^4\, dx\right)^{1/4}\left(\int_\Omega |\nabla\eta|^2\, dx\right)^{1/2}\\
&+k\left(\int_\Omega |\nabla\theta^k|^2\, dx\right)^{1/2}\left(|\nabla\eta|^2\right)^{1/2} + C\left(\int_\Omega |\frac{\partial \varphi^k}{\partial t}|^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\int_\Omega |\eta|^2\, dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Das imersões contínuas $H^1(\Omega) \subset L^6(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, temos que $\|w^k\|_{L^4(\Omega)} \le C\|w^k\|_{H^1(\Omega)}$ e

$\|\theta^k\|_{L^4(\Omega)} \leq C\|\theta^k\|_{H^1(\Omega)}$, então

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta^k}{\partial t} \eta \, dx \leq C \left(\|w^k\|_{H^1(\Omega)} \, \|\theta^k\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla \theta^k\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\eta\|_{H^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\left\| \frac{\partial \theta^k}{\partial t} \right\|_{H^1(\Omega)'} \leq C \left(\|w^k\|_{H^1(\Omega)} \, \|\theta^k\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla \theta^k\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

De (2.10), (2.20) e (2.23), concluímos que

$$\left\| \frac{\partial \theta^k}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)')} \leq C, \tag{2.24}$$

onde C é uma constante independente de k.

Das estimativas (2.10), (2.19), (2.20), (2.23) e (2.24), concluímos que a sequência $\{(w^k, \varphi^k, \theta^k)\}$ é uniformemente limitada no seguinte espaço de Banach reflexivo

$$X = \{w \in L^2(0,T;D(A)); \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0,T;H)\} \times W_2^{2,1}(Q) \times \\ \{\theta \in L^2(0,T;H^1(\Omega)); \frac{\partial \theta}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')\}.$$

Então, existe uma subsequência de $\{(w^k, \varphi^k, \theta^k)\}$, que continuaremos denotando por $\{(w^k, \varphi^k, \theta^k)\}$, que converge fracamente a (w, φ, θ) em X.

Como a imersão de X em B é compacta, devido ao Lema 1.5, concluímos que a subsequência $\{(w^k, \varphi^k, \theta^k)\}$ converge a (w, φ, θ) forte em B.

Em particular, temos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned} &w^k \to w \text{ fraco em } L^2(0,T;D(A)), \\ &w^k \to w \text{ forte em } L^2(0,T;V), \\ &\varphi^k \to \varphi \text{ fraco em } L^2(0,T;H^2(\Omega)), \\ &\varphi^k \to \varphi \text{ forte em } L^2(Q), \\ &\theta^k \to \theta \text{ fraco em } L^2(0,T;H^1(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Temos também, pelo Lema 1.5, e das estimativas (2.9)-(2.24) as seguintes convergências

$$\begin{aligned} &w^k \to w \text{ forte em } C([0,T];H),\\ &\varphi^k \to \varphi \text{ forte em } C([0,T];L^2(\Omega)),\\ &\theta^k \to \theta \text{ forte em } C([0,T];H^1(\Omega)'). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Proposição 1.1) temos $H^2(\Omega) \subset\subset W_p^1(\Omega)$, para $1 \leq p < 6$. Temos também a imersão contínua $W_p^1(\Omega) \subset L^2(Q)$, para $1 \leq p \leq 3$. Assim, pela estimativa (2.20) e o Lema 1.5, temos

$$\varphi^k \to \varphi \text{ forte em } L^2(0,T;W_p^1(\Omega)), \ \forall\, 1 \leq p \leq 3. \tag{2.27}$$

Como $u^k = w^k + \alpha^2 A w^k$, temos as seguintes convergências para u^k:

$$\begin{aligned} &u^k \to u \text{ fraco em } L^2(0,T;H),\\ &u^k \to u \text{ forte em } L^2(0,T;V'),\\ &u^k \to u \text{ forte em } L^2(0,T;D(A)'). \end{aligned}$$

Vamos à passagem do limite quando $k \to +\infty$.

Seja $v \in L^\infty(0,T;D(A))$, com $\dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;D(A)')$. De (2.6) e denotando $u^k = w^k + \alpha^2 A w^k$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}u^k(s), v(s)\right) ds + \nu \int_0^t (u^k(s), Av)ds + \int_0^t (\tilde{B}(w^k(s), u^k(s)), v)ds \\ = -\lambda \int_0^t (K(h(\varphi^k))\hat{w}^k, v)ds + \lambda c \mathbf{g} \int_0^t (\hat{\theta}^k, v)ds, \end{aligned}$$

para todo $t \in (0,T)$. Observando que

$$\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t}u^k(s), v(s)\right) ds = -\int_0^t \left(u^k(s), \frac{\partial}{\partial t}v(s)\right) ds + (u(t), v(t)) - (u(0), v(0)),$$

temos,

$$\begin{aligned} (u^k(t), v(t)) - \int_0^t \left(u^k(s), \frac{\partial}{\partial t}v(s)\right) ds + \nu \int_0^t (u^k(s), Av)ds + \int_0^t (\tilde{B}(w^k(s), u^k(s)), v)ds \\ = (u^k(0), v(0)) - \lambda \int_0^t (K(h(\varphi^k))\hat{w}^k, v)ds + \lambda c \mathbf{g} \int_0^t (\hat{\theta}^k, v)ds, \end{aligned} \tag{2.28}$$

para todo $t \in (0,T)$. Como $u^k \to u \in L^2(0,T;H)$ fraco, então $u^k(s) \to u(s)$ em H para quase todo $s \in [0,T]$. Em particular, existe uma subsequência de u^k, que ainda denotaremos por u^k, tal que $u^k(s) \to u(s)$ forte em V' e $D(A)'$, para quase todo $s \in [0,T]$.

Temos então,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^t (u^k(s), Av)ds = \int_0^t (u(s), Av)ds.$$

Como $K(h(\cdot))$ é uma função limitada e Lipschitz contínua, e $\varphi^k(s) \to \varphi(s)$ em $L^p(\Omega)$, para $1 \le p < 6$, temos que $K(h(\varphi^k(s))) \to K(h(\varphi(s)))$ em $L^p(\Omega)$, para $1 \le p < 6$. Como $\hat{w}^k(s) \to \hat{w}(s)$ em V, temos que $K(h(\varphi^k(s)))\hat{w}^k \to K(h(\varphi(s)))\hat{w}$ em $L^2(\Omega)$ e em $D(A)'$, particularmente. Logo,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^t (K(h(\varphi^k))\hat{w}^k, v)ds = \int_0^t (K(h(\varphi))\hat{w}, v)ds.$$

E, como $\hat{\theta}^k(s) \to \hat{\theta}(s)$ em $L^2(\Omega)$, temos, em particular, que $\hat{\theta}^k(s) \to \hat{\theta}(s)$ em $D(A)'$. Assim,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^t (\hat{\theta}^k, v)ds = \int_0^t (\hat{\theta}, v)ds.$$

Para o termo $\big(\tilde{B}(w^k, u^k), v\big)$ temos,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t (\tilde{B}(w^k, u^k), v) - (\tilde{B}(w,u), v)ds\right| \\
&\qquad = \left|\int_0^t (\tilde{B}(w^k - w, u^k), v) + (\tilde{B}(w, u^k), v) - (\tilde{B}(w,u), v)ds\right| \\
&\qquad \le \left|\int_0^t (\tilde{B}(w^k - w, u^k), v)ds\right| + \left|\int_0^t (\tilde{B}(w, u^k - u), v)ds\right| \\
&\qquad \equiv I_k^{(1)} + I_k^{(2)}.
\end{aligned}$$

Pelo item *(iv)* do Lema 1.10, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t (\tilde{B}(w^k - w, u^k), v)ds\right| \le C &\left|\int_0^t \Big(\|w - w^k\|_H^{1/2} \|\nabla(w^k - w)\|_H^{1/2} \|u^k\|_H \|Av\|_H \right. \\
&\left. + \|u^k\|_H \|\nabla(w^k - w)\|_H \|\nabla v\|_H^{1/2} \|Av\|_H^{1/2}\Big) ds \right|.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Poincaré,

$$\left|\int_0^t (\tilde{B}(w^k - w, u^k), v)ds\right| \leq C \left|\int_0^t \|\nabla(w^k - w)\|_H \|u^k\|_H \|Av\|_{L^\infty(0,T;H)} ds\right|.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$I_k^{(1)} \leq C \left(\int_0^t \|\nabla(w^k - w)\|_H^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \|u^k\|_H^2 ds\right)^{1/2} \|v\|_{L^\infty(0,T;D(A))}.$$

Como $w^k \to w$ em $L^2(0,T;V)$ e u^k é limitado em $L^2(0,T;H)$, temos, respectivamente,

$$\int_0^t \|\nabla(w^k - w)\|_H^2 ds \to 0 \quad \text{e} \quad \int_0^t \|u^k\|_H^2 ds \to \int_0^t \|u\|_H^2 ds.$$

Concluímos então, que

$$\lim_{k\to+\infty} I_k^{(1)} = 0.$$

Seguindo o mesmo raciocínio para $I_k^{(2)}$, temos

$$\begin{aligned}
I_k^{(2)} &= \left|\int_0^t (\tilde{B}(w, u^k - u), v)ds\right| \\
&\leq C \int_0^t \left(\|w\|_H^{1/2} \|\nabla w\|_H^{1/2} \|u^k - u\|_H \|Av\|_H + \|u^k - u\|_H \|\nabla w\|_H \|\nabla v\|_H^{1/2} \|Av\|_H^{1/2}\right) ds \\
&\leq C \int_0^t \left(\|\nabla w\|_H \|u^k - u\|_H \|Av\|_H\right) ds \\
&\leq C \left(\int_0^t \|\nabla w\|_H^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \|u^k - u\|_H^2 ds\right)^{1/2} \|v\|_{L^\infty(0,T;D(A))}.
\end{aligned}$$

Como $u^k \to u$ fraco em $L^2(0,T;H)$, concluímos que

$$\lim_{k\to+\infty} I_k^{(2)} = 0.$$

Concluímos assim, que $\langle \tilde{B}(w^k, u^k), v\rangle_{D(A)'} \to \langle \tilde{B}(w, u), v\rangle_{D(A)'}$.

Logo, podemos passar o limite em (2.28), obtendo

$$\begin{aligned}(u(t),v(t)) - \int_0^t (u,\frac{\partial v}{\partial t})ds + \nu\int_0^t (u,Av)ds + \int_0^t (\tilde{B}(w,u),v)ds \\ = (u(0),v(0)) - \lambda\int_0^t (K(h(\varphi))\hat{w},v)ds + \lambda c\mathbf{g}\int_0^t (\hat{\theta},v)ds,\end{aligned} \tag{2.29}$$

para todo $v \in L^\infty(0,T;D(A))$, $\dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;D(A)')$ e todo $t \in (0,T)$.

Da imersão compacta $W_2^{2,1}(Q) \subset L^p(Q)$, para $1 \leq p < 10$ e do fato que φ^k é limitada em $W_2^{2,1}(Q)$, temos que $(\varphi^k)^3$ converge a φ^3 em $L^{p/3}(Q)$.

Das convergências (2.25), (2.26) e (2.27), podemos passar o limite na segunda equação de (2.6), obtendo a equação de (2.5) para φ.

Como $\varphi^k(s)$ converge a $\varphi(s)$ em $L^p(\Omega)$, para $1 \leq p \leq 3$ e h' é uma função limitada e Lipschitz contínua, temos que $h'(\varphi^k(s)) \to h'(\varphi(s))$ em $L^p(\Omega)$. Assim, $h'(\varphi^k(s))\dfrac{\partial \varphi^k}{\partial t} \to h'(\varphi(s))\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ fraco em $L^2(Q)$. Das convergências (2.25), (2.26) e (2.27) podemos passar o limite na terceira equação de (2.6), obtendo assim, a equação de (2.5) para θ.

Concluímos então, que T_λ é contínuo com relação à subsequência. Além disso, pela unicidade do limite e a escolha arbitrária da subsequência, temos que este resultado vale para toda a sequência. Assim, $(w^k,\varphi^k,\theta^k) \to (w,\varphi,\theta)$ em B.

Portanto, T_λ é operador contínuo em B para λ fixo.

Para λ fixo, T_λ é operador compacto.

De fato, pelas estimativas (2.10), (2.19), (2.20), (2.23) e (2.24), temos que T_λ é limitado em

$$\begin{aligned}X = \{w \in L^2(0,T;D(A));\ \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0,T;H)\} \times W_2^{2,1}(Q)\times \\ \{\theta \in L^2(0,T;H^1(\Omega));\ \frac{\partial \theta}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')\}.\end{aligned}$$

Devido ao Lema 1.5 e ao Lema 1.1, as seguintes imersões são compactas

$$\begin{aligned}
&\{w \in L^2(0,T;D(A));\ \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0,T;H)\} \subset L^2(0,T;V),\\
&W_2^{2,1}(Q) \subset L^p(Q),\ \text{para todo } 1 \le p < 10,\\
&\{\theta \in L^2(0,T;H^1(\Omega));\ \frac{\partial \theta}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega)')\} \subset L^2(Q).
\end{aligned}$$

Concluímos, então, que X está compactamente imerso em B. Logo, $T_\lambda(\cdot)$ é operador compacto.

T_λ é uniformemente contínuo em λ para todo $x \in A$; $A \subset B$ limitado.

Seja $(\hat{w}, \hat{\varphi}, \hat{\theta})$ um elemento de um subconjunto limitado de B. Sejam $0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1$ e $(w_i, \varphi_i, \theta_i)$, $i = 1, 2$ a solução do sistema (2.5) para λ_1 e λ_2, respectivamente. Considere $w = w_1 - w_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Temos que, (w, φ, θ) é solução do problema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw) + \nu A(w + \alpha^2 Aw) + \tilde{B}(w_1, w_1 + \alpha^2 Aw_1) - \tilde{B}(w_2, w_2 + \alpha^2 Aw_2)\\
&\qquad = -(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbb{P}(K(h(\hat{\varphi}))\hat{w}) + (\lambda_1 - \lambda_2)c\mathbb{P}(\mathbf{g}\hat{\theta}),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} + w_1 \cdot \nabla\varphi - \epsilon^2\Delta\varphi = -w \cdot \nabla\varphi_2 + U\varphi + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta\hat{\theta} \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial t} + w_1 \cdot \nabla\theta - \kappa\Delta\theta = -w \cdot \nabla\theta_2 + \frac{\ell}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}h'(\varphi_1) + \frac{\ell}{2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}[h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)] \text{ em } Q,\\
&w = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T),\\
&w(0) = 0,\ \varphi(0) = 0,\ \theta(0) = 0 \ \text{ em } \Omega,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

onde $U = 2a + 3b(\varphi_1 + \varphi_2) - 4(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) \in L^5(Q)$ pois $\varphi_i \in W_2^{2,1}(Q)$, para $i = 1, 2$, pela demonstração que T_λ está bem definido e pela imersão $W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$, devido ao Lema 1.1.

Observação 2.6. *As equações do sistema acima são obtidas subtraindo as equações respectivas do problema para λ_2 das equações para λ_1 e usando que*

1. $w_1\nabla\varphi_1 - w_2\nabla\varphi_2 = w_1\nabla\varphi + w\nabla\varphi_2,$

2. $w_1\nabla\theta_1 - w_2\nabla\theta_2 = w_1\nabla\theta + w\nabla\theta_2$ *e*

3. $h'(\varphi_1)\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} - h'(\varphi_2)\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}h'(\varphi_1) + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t}[h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)].$

Fazendo o produto interno da primeira equação deste sistema com w, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw)w\,dx &+ \nu\int_\Omega A(w+\alpha^2 Aw)w\,dx\\ &= -\big(\tilde{B}(w_1, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) + \big(\tilde{B}(w_2, w_2+\alpha^2 Aw_2), w\big)\\ &-(\lambda_1-\lambda_2)\int_\Omega K(h(\hat{\varphi}))\hat{w}w\,dx + (\lambda_1-\lambda_2)c\mathbf{g}\int_\Omega \hat{\theta}w\,dx. \qquad (2.31)\end{aligned}$$

Observe que, as propriedades de $\tilde{B}$ apresentadas no Lema 1.10 implicam que

$$\begin{aligned}&\big(\tilde{B}(w_1, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) - \big(\tilde{B}(w_2, w_2+\alpha^2 Aw_2), w\big)\\ &\quad= \big(\tilde{B}(w_1, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) - \big(\tilde{B}(w_2, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) + \big(\tilde{B}(w_2, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big)\\ &\quad-\big(\tilde{B}(w_2, w_2+\alpha^2 Aw_2), w\big)\\ &\quad= \big(\tilde{B}(w, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) + \big(\tilde{B}(w_2, w+\alpha^2 Aw), w\big)\\ &\quad= \big(\tilde{B}(w_2, w+\alpha^2 Aw), w\big)\\ &\quad= -\big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big). \qquad (2.32)\end{aligned}$$

Agora, para estimar o termo $\big|\big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big)\big|$ usamos o Lema 1.10, e a Desigualdade de Poincaré, obtendo

$$\begin{aligned}&\big|\big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big)\big|\\ &\qquad\le C\Big(\|w\|_H^{1/2}\,\|\nabla w\|_H^{1/2}\,\|w+\alpha^2 Aw\|_H\,\|Aw_2\|_H\\ &\qquad+\|w+\alpha^2 Aw\|_H\,\|\nabla w\|_H\,\|\nabla w_2\|_H^{1/2}\,\|Aw_2\|_H^{1/2}\Big)\\ &\qquad\le C\|\nabla w\|_H\,\|w+\alpha^2 Aw\|_H\,\|Aw_2\|_H. \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Usando esta última estimativa na equação (2.31), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw)w\,dx &+ \nu\int_\Omega A(w+\alpha^2 Aw)w\,dx\\ &\le C\|\nabla w\|_H\,\|w+\alpha^2 Aw\|_H\,\|Aw_2\|_H + |\lambda_1-\lambda_2|\int_\Omega |K(h(\hat{\varphi}))\hat{w}w|\,dx\\ &+|\lambda_1-\lambda_2|c\mathbf{g}\int_\Omega |\hat{\theta}w|\,dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes, usando o fato que $K\circ h\in L^\infty(Q)$ e aplicando a Desigualdade de

Young,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+\nu\int_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx\\
&\qquad\le C(C_\varepsilon\|\nabla w\|_H^2\,\|Aw_2\|_H^2+\varepsilon\|w+\alpha^2 Aw\|_H^2)+C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_\Omega |\hat{w}|^2\,dx\\
&\qquad+C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_\Omega |\hat{\theta}|^2\,dx+C\int_\Omega |w|^2\,dx\\
&\qquad\le C\|\nabla w\|_H^2\,\|Aw_2\|_H^2+\varepsilon C\|w+\alpha^2 Aw\|_H^2\\
&\qquad+C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_\Omega \Big(|\hat{w}|^2+|\hat{\theta}|^2\Big)\,dx+C\int_\Omega |w|^2\,dx\\
&\qquad\le C\|\nabla w\|_H^2\,\|Aw_2\|_H^2+\varepsilon C(\|w\|_H^2+\alpha^2\|Aw\|_H^2)\\
&\qquad+C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_\Omega \Big(|\hat{w}|^2+|\hat{\theta}|^2\Big)\,dx+C\int_\Omega |w|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Para $\varepsilon>0$ fixado, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+\frac{\nu}{2}\int_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx\\
&\qquad\le C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_\Omega (|\hat{w}|^2+|\hat{\theta}|^2)\,dx+C\int_\Omega (1+\|Aw_2\|_H^2)|w|^2\,dx\\
&\qquad\le C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_\Omega (|\hat{w}|^2+|\hat{\theta}|^2)\,dx+C\int_\Omega (1+\|Aw_2\|_H^2)\big(|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2\big)\,dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando o Lema de Gronwall e observando que $w_0=0$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx\\
&\qquad\le e^{C\int_0^t(1+\|Aw_2\|_H^2)ds}\left(\|w_0\|_H^2+\alpha^2\|\nabla w_0\|_H^2+C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_0^t\int_\Omega (|\hat{w}|^2+|\hat{\theta}|^2)\,dx\,ds\right)\\
&\qquad\le C|\lambda_1-\lambda_2|^2,
\end{aligned}
$$

onde $C=C(T,\|w_2\|_{L^2(0,T;D(A))},\,\|\hat{w}\|_{L^2(0,T;V)},\,\|\hat{\theta}\|_{L^2(Q)})$ é uma constante independente de λ_i, $i=1,2$.

Temos, então

$$
\|w\|_{L^\infty(0,T;V)}^2\le C|\lambda_1-\lambda_2|^2. \tag{2.34}
$$

Voltando à antepenúltima estimativa, temos ainda que,

$$\|w\|^2_{L^2(0,T;D(A))} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2. \tag{2.35}$$

Agora, multiplicando a segunda equação de (2.30) por φ, integrando em Ω e usando integração por partes, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2\,dx + \int_\Omega w_1 \cdot \nabla\varphi\varphi\,dx + \epsilon^2\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx = -\int_\Omega w\cdot\nabla\varphi_2\varphi\,dx + \int_\Omega U\varphi^2\,dx$$
$$+(\lambda_1-\lambda_2)\beta\int_\Omega \hat{\theta}\varphi\,dx.$$

Observando que $\int_\Omega w_1 \cdot \nabla\varphi\varphi\,dx = 0$ (pois div $w = 0$ e pelas condições de fronteira), integrando no tempo e aplicando as Desigualdades de Hölder e de Young, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\varphi|^2\,dx + \epsilon^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\,dt \\
&\leq \left(\int_0^T\int_\Omega |w|^5\,dx\,dt\right)^{1/5}\left(\int_0^T\int_\Omega |\nabla\varphi_2|^{10/3}\,dx\,dt\right)^{3/10}\left(\int_0^T\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt\right)^{1/2} \\
&+\left(\int_0^T\int_\Omega |U|^5\,dx\,dt\right)^{1/5}\left(\int_0^T\int_\Omega (|\varphi|^2)^{5/4}\,dx\,dt\right)^{4/5} \\
&+ C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_0^T\int_\Omega |\hat{\theta}|^2\,dx\,dt + C\int_0^T\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt \\
&\leq C\|w\|^2_{L^5(Q)}\|\nabla\varphi_2\|^2_{L^{10/3}(Q)} + \|U\|_{L^5(Q)}\|\varphi\|^2_{L^{5/4}(Q)} \\
&+ C|\lambda_1-\lambda_2|^2\|\hat{\theta}\|^2_{L^2(Q)} + C\|\varphi\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Pelas imersões contínuas $L^2(Q) \subset L^{5/4}(Q)$ e $L^8(Q) \subset L^5(Q)$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\varphi|^2\,dx + \epsilon^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\,dt \\
&\leq C\|w\|^2_{L^8(Q)}\|\nabla\varphi_2\|^2_{L^{10/3}(Q)} + C|\lambda_1-\lambda_2|^2\|\hat{\theta}\|^2_{L^2(Q)} + C\left(1+\|U\|_{L^5(Q)}\right)\|\varphi\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Por argumentos de interpolação, obtemos $\|\nabla\varphi_2\|_{L^{10/3}(Q)}$ estimada pelas normas $\|\nabla\varphi_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ e $\|\nabla\varphi_2\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ (veja Corolário 1.3) e $\|w\|_{L^8(Q)}$ estimada pelas normas $\|w\|_{L^\infty(0,T;V)}$ e $\|w\|_{L^2(0,T;D(A))}$ (veja Corolário 1.2), e pelas estimativas (2.34) e (2.35), temos

$$\int_\Omega |\varphi|^2\,dx + \epsilon^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\,dt$$
$$\leq C|\lambda_1-\lambda_2|^2(\|\nabla\varphi_2\|^2_{L^{10/3}(Q)} + \|\hat{\theta}\|^2_{L^2(Q)}) + C\left(1+\|U\|_{L^5(Q)}\right)\int_0^T\int_\Omega|\varphi|^2\,dx\,dt$$

Aplicando o Lema de Gronwall e observando que $\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} = 0$, temos

$$\int_\Omega |\varphi|^2\,dx \leq C|\lambda_1-\lambda_2|^2,$$

onde $C = C(T, \Omega, \|U\|_{L^5(Q)}, \|\varphi_2\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}, \|\hat{\theta}\|_{L^2(Q)})$ é uma constante que não depende de λ_i, $i=1,2$.

Logo,

$$\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|^2. \tag{2.36}$$

Voltando à desigualdade antes de aplicar o Lema de Gronwall, temos também que,

$$\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|^2. \tag{2.37}$$

Agora, multiplicando a segunda equação de (2.30) por $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + \int_\Omega w_1\cdot\nabla\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx - \epsilon^2\int_\Omega \Delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx = -\int_\Omega w\cdot\nabla\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx$$
$$+\int_\Omega U\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx + (\lambda_1-\lambda_2)\beta\int_\Omega\hat{\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx.$$

Integrando por partes, e em seguida usando as Desigualdades de Hölder e Young, respectivamente, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx &= -\int_\Omega w_1\cdot\nabla\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx - \int_\Omega w\cdot\nabla\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx \\
&\quad + \int_\Omega U\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx + (\lambda_1-\lambda_2)\beta\int_\Omega \hat\theta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx \\
&\le C\|w_1\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\nabla\varphi|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| dx \\
&\quad + \left(\int_\Omega |w|^5\,dx\right)^{1/5}\left(\int_\Omega |\nabla\varphi_2|^{10/3}\,dx\right)^{3/10}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&\quad + \|U\|_{L^5(\Omega)}\left(\int_\Omega |\varphi|^{10/3}\,dx\right)^{3/10}\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx\right)^{1/2} + C|\lambda_1-\lambda_2|\int_\Omega\left|\hat\theta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| dx \\
&\le C\|w_1\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|w\|^2_{L^5(\Omega)}\|\nabla\varphi_2\|^2_{L^{10/3}(\Omega)} + \varepsilon\int_\Omega\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx \\
&\quad + C\|U\|^2_{L^5(\Omega)}\|\varphi\|^2_{L^{10/3}(\Omega)} + \varepsilon\int_\Omega\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_\Omega|\hat\theta|^2\,dx + \varepsilon\int_\Omega\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Para $\varepsilon > 0$ fixado, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx &\le C\|w_1\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|w\|^2_{L^5(\Omega)}\|\nabla\varphi_2\|^2_{L^{10/3}(\Omega)} \\
&\quad + C\|U\|^2_{L^5(\Omega)}\|\varphi\|^2_{L^{10/3}(\Omega)} + C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_\Omega|\hat\theta|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 a T e observando que $\varphi(\cdot,0)=0$, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx\,dt + \frac{\epsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx &\le C\int_0^T \|w_1\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}dt \\
&\quad + C\int_0^T \|w\|^2_{L^5(\Omega)}\|\nabla\varphi_2\|^2_{L^{10/3}(\Omega)}dt + C\int_0^T \|U\|^2_{L^5(\Omega)}\|\varphi\|^2_{L^{10/3}(\Omega)}dt \\
&\quad + C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_0^T\int_\Omega|\hat\theta|^2\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Pela imersão contínua $V \subset L^5(\Omega)$, temos $\|w\|_{L^5(\Omega)} \le C\|w\|_V$. Deste fato e aplicando a

Desigualdade de Hölder no termo $\int_0^T \|U\|^2_{L^5(\Omega)}\, \|\varphi\|^2_{L^{10/3}(\Omega)} dt$, temos

$$\int_0^T \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|^2 dx\, dt + \frac{\epsilon^2}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2\, dx \leq C \int_0^T \|w_1\|^2_{L^\infty(\Omega)}\, \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} dt$$
$$+ C\|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)} \int_0^T \|\nabla \varphi_2\|^2_{L^{10/3}(\Omega)} dt + C\|U\|^2_{L^5(Q)}\, \|\varphi\|^2_{L^{10/3}(Q)}$$
$$+ C|\lambda_1 - \lambda_2|^2 \int_0^T \int_\Omega |\hat{\theta}|^2\, dx\, dt.$$

Por interpolação obtemos $\|\nabla \varphi_2\|_{L^{10/3}(Q)}$ estimada pelas normas $\|\nabla \varphi_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ e $\|\nabla \varphi_2\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ (veja Corolário 1.3), o mesmo argumento estima também a norma $\|\varphi\|_{L^{10/3}(Q)}$ pelas normas $\|\varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ e $\|\varphi\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$. Pelas estimativas (2.34), (2.36) e (2.37), temos

$$\int_0^T \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|^2 dx\, dt + \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla \varphi|^2\, dx \leq \int_0^T \|w_1\|^2_{L^\infty(\Omega)}\, \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\Omega)} dt$$
$$+ C|\lambda_1 - \lambda_2|^2 (\|D\|^2_{L^5(Q)} + \|\hat{\theta}\|^2_{L^2(Q)}).$$

Pela Desigualdade de Gronwall, temos:

$$\int_\Omega |\nabla \varphi|^2\, dx \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2,$$

onde $C = C(\|w_1\|_{L^2(0,T;D(A))}, \|\varphi_2\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \|U\|_{L^5(Q)}, \|\hat{\theta}\|_{L^2(Q)})$ é uma constante que não depende de λ_i, $i = 1, 2$, e observando que $\|w_1\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq C\|w_1\|_{L^2(0,T;D(A))}$ devido à imersão contínua $L^2(0,T;D(A)) \subset L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$. Logo

$$\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2. \tag{2.38}$$

Voltando à antepenúltima desigualdade, temos também que,

$$\int_0^T \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|^2 dx\, dt \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2. \tag{2.39}$$

Agora, multiplicando a segunda equação por $-\Delta\varphi$, integrando em $\Omega \times (0,T)$, e usando integração por partes, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \epsilon^2\int_0^T\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega w\nabla\varphi_2\Delta\varphi\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega U|\nabla\varphi|^2\,dx\,dt$$
$$-(\lambda_1-\lambda_2)\beta\int_0^T\int_\Omega \hat{\theta}\Delta\varphi\,dx\,dt,$$

observando que $\int_0^T\int_\Omega w_1\nabla\varphi\Delta\varphi\,dx\,dt = 0$, pois $\int_0^T\int_\Omega w_1\nabla\varphi\Delta\varphi\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega w_1\nabla\left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\right)dx\,dt = 0$, devido às condições de fronteira e ao fato que div $w = 0$.

Aplicando a Desigualdade de Hölder e Young, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \epsilon^2\int_0^T\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\,dt\\
&\quad\le \left(\int_0^T\int_\Omega |w|^5\,dx\,dt\right)^{1/5}\left(\int_0^T\int_\Omega |\nabla\varphi_2|^{10/3}\,dx\,dt\right)^{3/10}\left(\int_0^T\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\,dt\right)^{1/2}\\
&\quad+\|D\|_{L^5(Q)}\left(\int_0^T\int_\Omega \left(|\nabla\varphi|^2\right)^{5/4}\,dx\,dt\right)^{4/5} + C|\lambda_1-\lambda_2|\int_0^T\int_\Omega |\hat{\theta}\Delta\varphi|\,dx\,dt\\
&\quad\le C\|w\|^2_{L^5(Q)}\|\nabla\varphi_2\|^2_{L^{10/3}(Q)} + \varepsilon\int_0^T\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\,dt + \|D\|_{L^5(Q)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^{5/4}(Q)}\\
&\quad+C|\lambda_1-\lambda_2|^2\int_0^T\int_\Omega |\hat{\theta}|^2\,dx\,dt + \varepsilon\int_0^T\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$ fixado, pelas imersões contínuas $L^8(Q) \subset L^5(Q)$ e $L^2(Q) \subset L^{5/4}(Q)$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^T\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\,dt\\
&\quad\le C\|w\|^2_{L^8(Q)}\|\nabla\varphi_2\|^2_{L^{10/3}(Q)} + C|\lambda_1-\lambda_2|^2\|\hat{\theta}\|^2_{L^2(Q)} + C\|U\|_{L^5(Q)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Por interpolação, veja Corolário 1.3 e Corolário 1.2, e das estimativas (2.34) e (2.35), temos

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \frac{\epsilon^2}{2}\int_0^T\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\,dt$$
$$\leq C|\lambda_1-\lambda_2|^2 + C|\lambda_1-\lambda_2|^2\|\hat{\theta}\|^2_{L^2(Q)} + C\|U\|_{L^5(Q)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(Q)}.$$

Agora, aplicando o Lema de Gronwall, temos

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx \leq C|\lambda_1-\lambda_2|^2,$$

onde $C = C(\|\varphi_2\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}, \|\hat{\theta}\|_{L^2(Q)}, \|U\|_{L^5(Q)})$ é uma constante que não depende de λ_i, $i=1,2$.

Voltando à penúltima desigualdade, temos também que

$$\int_0^T\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx\,dt \leq C|\lambda_1-\lambda_2|^2. \tag{2.40}$$

Das estimativas (2.37)- (2.40), concluímos que

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|^2. \tag{2.41}$$

Agora, multiplicando a terceira equação de (2.30) por θ, integrando em Ω e usando integração por partes, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx = -\int_\Omega w\cdot\nabla\theta_2\theta\,dx + \frac{\ell}{2}\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}h'(\varphi_1)\theta\,dx$$
$$+\frac{\ell}{2}\int_\Omega \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(h'(\varphi_1)-h'(\varphi_2))\theta\,dx,$$

observando que $\int_\Omega w_1\nabla\theta\cdot\theta\,dx = 0$ devido às condições de fronteira e ao fato que div $w=0$.

Aplicando a Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx \\
&\quad\le C\int_\Omega |w|^2\,|\nabla\theta_2|^2\,dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx + C\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 |h'(\varphi_1)|^2\,dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx \\
&\quad + C\int_\Omega |(h'(\varphi_1)-h'(\varphi_2)|^2 \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|^2 dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Como h' é Lipschitz contínua e limitada, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx &\le C\int_\Omega |w|^2\,|\nabla\theta_2|^2\,dx \\
&\quad + C\int_\Omega |\varphi_1-\varphi_2|^2 \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|^2 dx + C\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx \\
&\quad = C\int_\Omega |w|^2\,|\nabla\theta_2|^2\,dx + C\int_\Omega |\varphi|^2 \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|^2 dx + C\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx &\le C\|w\|^2_{L^4(\Omega)}\|\nabla\theta_2\|^2_{L^4(\Omega)} + C\int_\Omega |\varphi|^2 \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|^2 dx + C\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx \\
&\quad + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall, como $\theta_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\theta|^2\,dx &\le C\left(\int_0^T \|w\|^2_{L^4(\Omega)}\|\nabla\theta_2\|^2_{L^4(\Omega)}\,ds + \int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx\,ds + \int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|^2 |\varphi|^2\,dx\,ds\right) \\
&\le C\left(\int_0^T \|w\|^2_{L^4(\Omega)}\|\nabla\theta_2\|^2_{L^4(\Omega)}\,ds + \int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx\,ds + \int_0^T\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|^2 |\varphi|^2\,dx\,ds\right) \\
&\le C\left(\|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)}\,\|\theta_2\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\varphi_2\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}\right),
\end{aligned}$$

onde nesta última desigualdade usamos que $\|w\|_{L^\infty(0,T;L^4(\Omega))} \le C\|w\|_{L^\infty(0,T;V)}$ e $\|\nabla\theta_2\|_{L^2(0,T;L^4(\Omega))} \le C\|\theta_2\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le C\|\theta_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}$, devido ao fato de que $w \in L^\infty(0,T;V)$ e $\theta_2 \in W_2^{2,1}(Q)$ e às imersões contínuas $V \subset L^4(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$.

Pelas estimativas (2.34) e (2.41), concluímos que

$$\int_\Omega |\theta|^2\, dx \le C|\lambda_1 - \lambda_2|^2,$$

onde $C = C(T,\, \|\theta_2\|_{W_2^{2,1}(Q)},\, \|\varphi_2\|_{W_2^{2,1}(Q)})$ é uma constante que não depende de $\lambda_i,\ i = 1, 2$. Ou seja,

$$\|\theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C|\lambda_1 - \lambda_2|^2. \tag{2.42}$$

Das estimativas (2.34), (2.35), (2.41) e (2.42), concluímos

$$\|w\|^2_{L^2(0,T;D(A))\cap L^\infty(0,T;V)} + \|\varphi\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|\theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C|\lambda_1 - \lambda_2|^2.$$

Portanto, T_λ é contínuo em λ uniformemente com respeito a (w, φ, θ).

Limitação dos pontos fixos de T_λ em $B = L^2(0,T;V) \times L^2(Q) \times L^2(Q)$.

Para mostrar este fato, considere (w, φ, θ) um ponto fixo de T_λ, ou seja, (w, φ, θ) é solução do sistema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw) + \nu A(w + \alpha^2 Aw) + \tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw) = -\lambda \mathbb{P}(K(h(\varphi))w) + \lambda c \mathbb{P}(\mathbf{g}\theta),\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} + w\cdot\nabla\varphi - \epsilon^2\Delta\varphi - (2a\varphi + 3b\varphi^2 - 4\varphi^3) = \lambda\beta\theta \text{ em } Q,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial t} + w\cdot\nabla\theta - \kappa\Delta\theta = \frac{\ell}{2}h'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t} \text{ em } Q,\\
&w = 0,\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,\ \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T),\\
&w(0) = w_0,\ \varphi(0) = \varphi_0,\ \theta(0) = \theta_0 \ \text{ em } \Omega.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Fazendo o produto interno da primeira equação de (2.43) com w, usando integração por partes e o fato que $(B(w,\cdot), w) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2 + \alpha^2|\nabla w|^2)dx + \nu\int_\Omega (|\nabla w|^2 + \alpha^2|Aw|^2)dx&\\
= -\lambda\int_\Omega K(h(\varphi))|w|^2\, dx + \lambda c\mathbf{g}\int_\Omega \theta w\, dx.&
\end{aligned}$$

Como $K \circ h$ é limitada, pela Desigualdade de Young e a expressão acima, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)dx + \nu\int\limits_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)dx \\ \leq C\int\limits_\Omega |w|^2\,dx + C\int\limits_\Omega |\theta|^2\,dx.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Multiplicando a segunda equação de (2.43) por φ e integrando em Ω, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |\varphi|^2\,dx + \int\limits_\Omega (w\cdot\nabla)\varphi\varphi\,dx + \epsilon^2\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx - \int\limits_\Omega (2a\varphi+3b\varphi^2-4\varphi^3)\varphi\,dx \\ = \lambda\beta\int\limits_\Omega \theta\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Observando que $\int\limits_\Omega (w\cdot\nabla\varphi)\varphi\,dx = 0$ (pois $\operatorname{div} w = 0$ e pelas condições de fronteira) e aplicando a Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |\varphi|^2\,dx + \epsilon^2\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + 4\int\limits_\Omega |\varphi|^4\,dx \\ \leq C\int\limits_\Omega |\varphi|^2\,dx + \varepsilon\int\limits_\Omega |\varphi|^4\,dx + C\int\limits_\Omega |\theta|^2\,dx + C\int\limits_\Omega |\varphi|^2\,dx.\end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ fixado suficientemente pequeno. Temos, da estimativa anterior,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |\varphi|^2\,dx + \epsilon^2\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \int\limits_\Omega |\varphi|^4\,dx \leq C\int\limits_\Omega |\theta|^2\,dx + C\int\limits_\Omega |\varphi|^2\,dx. \tag{2.45}$$

Multiplicando a terceira equação de (2.43) por $e = \theta - \dfrac{\ell}{2}h(\varphi)$ e integrando em Ω, temos

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \frac{\partial\theta}{\partial t}\left(\theta - \frac{\ell}{2}h(\varphi)\right)\,dx + \int\limits_\Omega w\cdot\nabla\theta\left(\theta - \frac{\ell}{2}h(\varphi)\right)\,dx - \kappa\int\limits_\Omega \Delta\theta\left(\theta - \frac{\ell}{2}h(\varphi)\right)\,dx \\ = \frac{\ell}{2}\int\limits_\Omega h'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\theta - \frac{\ell}{2}h(\varphi)\right)\,dx,\end{aligned}$$

observando que $\int\limits_{\Omega}(w\cdot\nabla\theta)\theta\,dx = 0$ (pois div $w=0$ e pelas condições de fronteira). Ou seja,

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\ell}{2}h'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\left(\theta-\frac{\ell}{2}h(\varphi)\right)dx+\kappa\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx\\ =\frac{\ell}{2}\int\limits_{\Omega} w\cdot\nabla\theta\,h(\varphi)\,dx-\kappa\frac{\ell}{2}\int\limits_{\Omega}\Delta\theta\,h(\varphi)\,dx.\end{aligned}$$

Da desigualdade anterior, como h é Lipschitz contínua e limitada, e da Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|e|^2\,dx+\kappa\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx\\ &\quad\le C\int\limits_{\Omega}|w|\,|\nabla\theta|\,dx+C\int\limits_{\Omega}\nabla\theta\,h'(\varphi)\nabla\varphi\,dx\\ &\quad\le C\int\limits_{\Omega}|w|^2\,dx+\frac{\kappa}{4}\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx+C\int\limits_{\Omega}|h'(\varphi)|^2\,|\nabla\varphi|^2\,dx+\frac{\kappa}{4}\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx.\end{aligned}$$

Logo, como h' é limitada,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|e|^2\,dx+\frac{\kappa}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx\le C\int\limits_{\Omega}|w|^2\,dx+C\int\limits_{\Omega}|\nabla\varphi|^2\,dx.$$

Multiplicando a desigualdade (2.45) por um parâmetro arbitrário $M>0$ e somando com a estimativa (2.44) e esta acima, temos:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(M|\varphi|^2+|e|^2)\,dx\\ &\quad+\nu\int\limits_{\Omega}(|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)dx+\int\limits_{\Omega}\left[(M\epsilon^2-C)|\nabla\varphi|^2+M|\varphi|^4+\frac{\kappa}{2}|\nabla\theta|^2\right]dx\\ &\quad\le C\int\limits_{\Omega}|w|^2\,dx+C\int\limits_{\Omega}(|\varphi|^2+|\theta|^2)\,dx.\end{aligned}$$

Tomando M suficientemente grande de forma que $M\epsilon^2-C>0$, temos da desigualdade acima:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (M|\varphi|^2+|e|^2)\,dx\\ \leq C\int_\Omega |w|^2\,dx + C\int_\Omega (|\varphi|^2+|\theta|^2)\,dx.\end{aligned}$$

Agora, aplicando o Lema de Gronwall, obtemos a seguinte estimativa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (M|\varphi|^2+|e|^2)\,dx \leq C,$$

onde C não depende de λ. Da qual concluímos que,

$$\|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)}+\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|e\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leq C,$$

onde C não depende de λ.

Agora, observe que $e=\theta-\frac{\ell}{2}h(\varphi)$. Como h é limitada, concluímos que $\theta\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Da estimativa anterior, concluímos então, que

$$\|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)}+\|\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+\|\theta\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leq C,$$

onde C não depende de λ.

Portanto, os pontos fixos de T_λ em B são limitados por uma constante independente de λ.

Para $\lambda = 0$, T_λ possui uma única solução

Este fato é provado pelos mesmos argumentos utilizados para mostrar que o operador T_λ está bem definido.

Aplicação do teorema do ponto fixo de Leray-Schauder

Portanto, com os resultados anteriores podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder (Lema 1.4) e obter um ponto fixo (w,φ,θ) de T_1 em B; com as estimativas obtidas nos argumentos anteriores podemos concluir que, de fato, $(w,\varphi,\theta)\in B\cap\{L^2(0,T;D(A))\cap L^\infty(0,T;V)\}\times W_2^{2,1}(Q)\times W_2^{2,1}(Q)$, o qual corresponde a uma solução do Problema (2.3) um pouco menos regular do que a anunciada no teorema.

2.5.2 Aumento da regularidade da solução

Já sabemos que existe uma solução $(w, \varphi, \theta) \in \{L^2(0,T;D(A)) \cap L^\infty(0,T;V)\} \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$. Entretanto, podemos melhorar tal regularidade.

De fato, para obter $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$ basta seguir os mesmos argumentos da demonstração da regularidade do problema auxiliar, Teorema 2.2, já que $\theta \in W_2^{2,1}(Q)$ e temos a imersão contínua $W_2^{2,1}(Q) \subset L^{10}(Q)$, devido ao Lema 1.1. Além disso, para $5/2 < q \leq 8$ temos que $\varphi \in H^{\tau,\tau/2}(Q)$ com $0 \leq \tau = 2 - 5/q$ devido ao Lema 1.2.

Para θ, como temos que vale:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + w \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = \frac{\ell}{2} h'(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

com $w \in L^8(Q)$, h' Lipschitz contínua e $\varphi_t \in L^q(Q)$, quando o dado inicial θ_0 for regular tal como no final do enunciado do teorema, pelo Lema 1.3, concluímos então que $\theta \in W_q^{2,1}(Q)$.

Assim concluímos a demonstração do Teorema 2.1.

2.5.3 Unicidade de solução

Provaremos agora a unicidade de solução para o problema (2.3).

Suponha, por contradição, que o sistema admita duas soluções distintas, $(w_1, \varphi_1, \theta_1)$, $(w_2, \varphi_2, \theta_2) \in \{L^2(0,T;D(A)) \cap L^\infty(0,T;V)\} \times W_q^{2,1}(Q) \times W_q^{2,1}(Q)$. Sejam $w = w_1 - w_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Temos que, (w, φ, θ) é solução do seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 A w) + \nu A(w + \alpha^2 A w) + \tilde{B}(w_1, w_1 + \alpha^2 A w_1) - \tilde{B}(w_2, w_2 + \alpha^2 A w_2) \\
&\qquad = -\mathbb{P}(K(h(\varphi_1))w_1) + \mathbb{P}(K(h(\varphi_2))w_2) + c\mathbf{g}\mathbb{P}\theta, \\
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} + w_1 \cdot \nabla \varphi - \epsilon^2 \Delta \varphi = -w \cdot \nabla \varphi_2 + U\varphi + \beta\theta \text{ em } Q, \\
&\frac{\partial \theta}{\partial t} + w_1 \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta = -w \cdot \nabla \theta_2 + \frac{\ell}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} h'(\varphi_1) + \frac{\ell}{2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}[h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)] \text{ em } Q, \\
&w = 0, \ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \ \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega \times (0,T), \\
&w(0) = 0, \ \varphi(0) = 0, \ \theta(0) = 0 \ \text{ em } \Omega,
\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde $U = 2a + 3b(\varphi_1 + \varphi_2) - 4(\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) \in L^\infty(Q)$ pois $\varphi_i \in W_q^{2,1}(Q) \subset L^\infty(Q)$, com $5/2 < q \leq 8$, para $i = 1, 2$.

Observação 2.7. *As equações do sistema acima são obtidas subtraindo as equações respectivas do problema para $(w_2, \varphi_2, \theta_2)$ das equações para $(w_1, \varphi_1, \theta_1)$ e usando que*

1. $w_1\nabla\varphi_1 - w_2\nabla\varphi_2 = w_1\nabla\varphi + w\nabla\varphi_2$,

2. $w_1\nabla\theta_1 - w_2\nabla\theta_2 = w_1\nabla\theta + w\nabla\theta_2$ *e*

3. $h'(\varphi_1)\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t} - h'(\varphi_2)\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}h'(\varphi_1) + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}[h'(\varphi_1) - h'(\varphi_2)]$.

Observação 2.8. *Usaremos logo abaixo os seguintes fatos:*

1. $\big(\tilde{B}(w_1, w_1 + \alpha^2 Aw_1), w\big) - \big(\tilde{B}(w_2, w_2 + \alpha^2 Aw_2), w\big) = -\big(\tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw), w_2\big)$, *que foi mostrado em* (2.32).

2. $\displaystyle\int_\Omega \big[-\mathbb{P}(K(h(\varphi_1))w_1) + \mathbb{P}(K(h(\varphi_2))w_2)\big]w dx = \int_\Omega \big[-K(h(\varphi_1))w_1 + K(h(\varphi_2))w_2\big]w dx$, *onde, usamos que* $\mathbb{P}$ *é autoadjunto em* $L^2(Q)$ *e* $w \in D(A) \subset H$ *implicando que* $\mathbb{P}w = w$. *Observando ainda, que*

$$-K(h(\varphi_1))w_1 + K(h(\varphi_2))w_2 = \big[K(h(\varphi_2)) - K(h(\varphi_1))\big]w_1 - K(h(\varphi_2))w,$$

temos,

$$\int_\Omega \big[-\mathbb{P}(K(h(\varphi_1))w_1) + \mathbb{P}(K(h(\varphi_2))w_2)\big]w dx = \int_\Omega \big[K(h(\varphi_2)) - K(h(\varphi_1))\big]w_1\, w\, dx - \int_\Omega K(h(\varphi_2))|w|^2\, dx.$$

Fazendo o produto interno da primeira equação deste sistema com w, aplicando as duas últimas observações acima, observando ainda que $K \geq 0$ e aplicando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2 + \alpha^2|\nabla w|^2)\, dx + \nu\int_\Omega (|\nabla w|^2 + \alpha^2|Aw|^2)\, dx + \int_\Omega K(h(\varphi_2))|w|^2\, dx \\ = -\big(\tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw), w_2\big) + \int_\Omega [K(h(\varphi_2)) - K(h(\varphi_1))]w_1 w\, dx + \ c\mathbf{g}\int_\Omega \theta w\, dx.\end{aligned}$$

Estimando o termo $\big(\tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw), w_2\big)$, como em (2.33), e observando que a função

$K(h(\cdot))$ é Lipschitz contínua, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+\nu\int_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx+\int_\Omega K(h(\varphi_2))|w|^2\,dx\\ \le C\|\nabla w\|_H\,\|w+\alpha^2 Aw\|_H\,\|Aw_2\|_H+\int_\Omega |\varphi||w_1||w|\,dx+c\mathbf{g}\int_\Omega |\theta w|\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+\nu\int_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx+\int_\Omega K(h(\varphi_2))|w|^2\,dx\\ \le C\big(C_\varepsilon\|\nabla w\|_H^2\,\|Aw_2\|_H^2+\varepsilon\|w+\alpha^2Aw\|_H^2\big)+C\int_\Omega |\varphi|^2|w_1|^2\,dx+C\int_\Omega |w|^2\,dx\\ +C\int_\Omega |\theta|^2\,dx+C\int_\Omega |w|^2\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder no termo $\int_\Omega |\varphi|^2|w_1|^2\,dx$ e pelas imersões contínuas $H^1(\Omega)\subset L^4(\Omega)$ e $V\subset L^4(\Omega)$, a desigualdade acima se torna

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+\nu\int_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx+\int_\Omega K(h(\varphi_2))|w|^2\,dx\\ \le C\|\nabla w\|_H^2\,\|Aw_2\|_H^2+\varepsilon(\|w\|_H^2+\alpha^2\|Aw\|_H^2)+C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2\|w_1\|_V^2+C\int_\Omega |w|^2\,dx\\ +C\int_\Omega |\theta|^2\,dx+C\int_\Omega |w|^2\,dx.\end{aligned}$$

Para $\varepsilon>0$ fixado, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+\frac{\nu}{2}\int_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx+\int_\Omega K(h(\varphi_2))|w|^2\,dx\\ \le C\|\nabla w\|_H^2\,\|Aw_2\|_H^2+C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2\|w_1\|_V^2+C\int_\Omega |\theta|^2\,dx+C\int_\Omega |w|^2\,dx\\ \le C(1+\|Aw_2\|_H^2)\int_\Omega |w|^2+|\nabla w|^2\,dx+C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2+C\int_\Omega |\theta|^2\,dx,\end{aligned}$$

pois $w_1\in L^\infty(0,T;V)$.

Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|w|^2 + \alpha^2 |\nabla w|^2)\, dx &\leq e^{\int_0^T (1+\|Aw_2\|_H^2)dt} \big(\|\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \big) \\ &\leq C\big(\|\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \big) \end{aligned} \tag{2.47}$$

Temos, então

$$\|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)} \leq C\big(\|\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \big). \tag{2.48}$$

Voltando à antepenúltima estimativa, temos ainda que,

$$\|w\|^2_{L^2(0,T;D(A))} \leq C\big(\|\theta\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \big). \tag{2.49}$$

Multiplicando a segunda equação de (2.46) por φ, integrando em Ω e integrando por partes, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2\, dx + \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx = -\int_\Omega w\cdot\nabla\varphi_2 \varphi\, dx + \int_\Omega U\varphi^2\, dx + \beta\int_\Omega \theta\varphi\, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Young e observando que $U \in L^\infty(Q)$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2\, dx + \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx \leq C\int_\Omega |w|^2|\nabla\varphi_2|^2\, dx + C\int_\Omega |\varphi|^2\, dx + C\int_\Omega |\theta|^2\, dx.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder no termo $\int_\Omega |w|^2|\nabla\varphi_2|^2\, dx$ e pelas imersões contínuas $V \subset L^4(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varphi|^2\, dx + \epsilon^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx \leq C\|w\|_V^2 \|\nabla\varphi_2\|^2_{H^1(\Omega)} + C\int_\Omega |\varphi|^2\, dx + C\int_\Omega |\theta|^2\, dx. \tag{2.50}$$

Multiplicando a segunda equação de (2.46) por $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$, integrando em Ω e integrando por partes, temos

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx = -\int_\Omega w_1\cdot\nabla\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dx - \int_\Omega w\cdot\nabla\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dx$$
$$+\int_\Omega U\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dx + \beta\int_\Omega \theta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\, dx.$$

Como $U \in L^\infty(Q)$, aplicando a desigualdade de Young e em seguida a desigualdade de Hölder, usando também as imersões contínuas $V \subset L^4(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx \le C\|w_1\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|w\|^2_V\|\nabla\varphi_2\|^2_{H^1(\Omega)} + C\int_\Omega |\varphi|^2\, dx$$
$$+C\int_\Omega |\theta|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{\epsilon^2}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx \le C\|w_1\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|w\|^2_V\|\nabla\varphi_2\|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$+C\int_\Omega |\varphi|^2\, dx + C\int_\Omega |\theta|^2\, dx. \tag{2.51}$$

Agora, multiplicando a segunda equação de (2.46) por $-\Delta\varphi$, integrando em Ω e integrando por partes, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx + \epsilon^2\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\, dx = \int_\Omega w\nabla\varphi_2\Delta\varphi\, dx - \int_\Omega U\,\varphi\,\Delta\varphi\, dx$$
$$-\beta\int_\Omega \theta\Delta\varphi\, dx\, dt.$$

Sabendo que $U \in L^\infty(Q)$, aplicando a desigualdade de Young e em seguida a desigualdade de Hölder, usando também as imersões contínuas $V \subset L^4(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx + \epsilon^2\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\, dx \le C\|w\|^2_V\|\nabla\varphi_2\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\epsilon^2}{2}\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\, dx$$
$$+\, C\int_\Omega |\varphi|^2\, dx + C\int_\Omega |\theta|^2\, dx.$$

Temos então,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \frac{\epsilon^2}{2}\int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx \le C\|w\|_V^2\|\nabla\varphi_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + C\int_\Omega |\varphi|^2\,dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx.$$

Da desigualdade acima e das desigualdades (2.50) e (2.51), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right)dx + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta\varphi|^2\,dx + \int_\Omega |\frac{\partial\varphi}{\partial t}|^2\,dx \\
&\qquad \le C\|w_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|w\|_V^2\|\nabla\varphi_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + C\int_\Omega |\varphi|^2\,dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a T, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right)dx + \int_0^T\int_\Omega \left(|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2\right)dx\,dt \\
&\qquad \le C\int_0^T \|w_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2\,dt + C\int_0^T \|w\|_V^2\|\nabla\varphi_2\|_{H^1(\Omega)}^2\,dt + C\int_0^T\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt \\
&\qquad + C\int_0^T\int_\Omega |\theta|^2\,dx\,dt \\
&\qquad \le C\|w\|_{L^\infty(0,T;V)}^2\|\nabla\varphi_2\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + C\|\theta\|_{L^2(Q)}^2 + C\int_0^T\int_\Omega |\varphi|^2\,dx\,dt \\
&\qquad + C\int_0^T\left(\|w_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\right)dt \\
&\qquad \le C\|w\|_{L^\infty(0,T;V)}^2 + C\|\theta\|_{L^2(Q)}^2 + C\int_0^T\left(\left(1+\|w_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)\int_\Omega \left(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right)\,dx\right)dt.
\end{aligned}$$

Pela estimativa (2.48), temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right)dx + \int_0^T\int_\Omega \left(|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2\right)dx\,dt \\
&\qquad \le C\int_0^T \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + C\|\theta\|_{L^2(Q)}^2 + C\int_0^T\left(\left(1+\|w_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)\int_\Omega \left(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right)\,dx\right)dt \\
&\qquad \le C\int_0^T \left(1+\|w_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2\right)\int_\Omega \left(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right)\,dx\,dt + C\|\theta\|_{L^2(Q)}^2.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall , obtemos

$$\int_\Omega \left(|\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2\right) dx \leq C\|\theta\|^2_{L^2(Q)}, \tag{2.52}$$

onde C é uma constante que depende de $\|w_1\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \leq C\|w_1\|^2_{L^2(0,T;D(A))}$.

Temos ainda, pela penúltima desigualdade que

$$\|\varphi\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\|\theta\|^2_{L^2(Q)}. \tag{2.53}$$

Multiplicando a terceira equação de (2.46) por θ, integrando em Ω e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx &= -\int_\Omega w\cdot\nabla\theta_2\theta\,dx + \frac{\ell}{2}\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}h'(\varphi_1)\theta\,dx\\ &+\frac{\ell}{2}\int_\Omega \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(h'(\varphi_1)-h'(\varphi_2))\theta\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx\\ &\quad\leq C\int_\Omega |w|^2\,|\nabla\theta_2|^2\,dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx + C\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2\,|h'(\varphi_1)|^2\,dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx\\ &\quad+C\int_\Omega |h'(\varphi_1)-h'(\varphi_2)|^2\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|^2\,dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx.\end{aligned}$$

Como h' é Lipschitz contínua e limitada, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2\,dx + \kappa\int_\Omega |\nabla\theta|^2\,dx &\leq C\int_\Omega |w|^2\,|\nabla\theta_2|^2\,dx + C\int_\Omega |\varphi|^2\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|^2\,dx\\ &+C\int_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2\,dx + C\int_\Omega |\theta|^2\,dx.\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx+\kappa\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx\leq C\|w\|^2_{L^4(\Omega)}\|\nabla\theta_2\|^2_{L^4(\Omega)}+C\|\varphi\|^2_{L^4(\Omega)}\left\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right\|^2_{L^4(\Omega)}$$
$$+C\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^2 dx+C\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx.$$

Integrando de 0 a T, e pelas imersões contínuas $H^1(\Omega)\subset L^4(\Omega)$ e $V\subset L^4(\Omega)$, temos

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx+\kappa\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx\,dt\leq C\|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)}+C\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$$
$$+C\|\varphi\|^2_{W_2^{2,1}(Q)}\,dx+C\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx\,dt.$$

Pelas estimativas (2.48) e (2.53), temos

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx+\kappa\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta|^2\,dx\,dt\leq C\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx\,dt. \tag{2.54}$$

Agora, das estimativas (2.47), (2.52) e (2.54), obtemos

$$\int\limits_{\Omega}(|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+\int\limits_{\Omega}(|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\,dx+\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx$$
$$\leq C\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\,dx\,dt+C\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx\,dt$$

Aplicando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\int\limits_{\Omega}(|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+\int\limits_{\Omega}(|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\,dx+\int\limits_{\Omega}|\theta|^2\,dx\leq 0,$$

em particular,

$$\|w\|^2_{L^2(0,T;V)}+\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}+\|\theta\|^2_{L^2(Q)}\leq 0.$$

Concluímos então, que

$$w=0,\ \varphi=0,\ \theta=0.$$

Logo, $w_1=w_2$, $\varphi_1=\varphi_2$ e $\theta_1=\theta_2$, concluindo assim a prova da unicidade de solução para o sistema (2.3).

Capítulo 3

Um Modelo de Dinâmica de Vesículas

Neste capítulo analisaremos um sistema de equações diferenciais parciais não lineares que modela a dinâmica das membranas de vesículas em fluidos viscosos incompressíveis. O sistema é composto por uma variação das equações α-Navier-Stokes, que descreve o fluido onde a vesícula está imersa, e por uma equação para o campo de fases, que determina a posição da membrana da vesícula e distingue tanto o seu interior quanto o seu exterior. Tanto a vesícula quanto o fluido encontram-se em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e o tempo máximo de interesse é $0 < T < +\infty$. Nas equações estão presentes termos relacionados à energia do sistema; o resultado da interação do fluido com a membrana reflete a competição e o acoplamento da energia cinética e a energia elástica (flexão) da membrana. Nosso objetivo aqui é mostrar a existência e a unicidade de solução para este sistema.

3.1 Introdução ao modelo de dinâmica de vesículas

O estudo de propriedades hidrodinâmicas de fluidos envolvendo membranas de vesículas e células tem importância em várias aplicações da biologia e da fisiologia. Uma vesícula é uma membrana elástica que contém um líquido rodeada por outro líquido. Sua função é armazenar e/ou transportar substâncias. Bicamadas lipídicas formando vesículas é o modelo mais simples de membrana biológica. A modelagem de vesículas é um primeiro passo para estudar e entender o comportamento de células mais complexas, como por exemplo as células vermelhas.

Por esse motivo, suas propriedades físicas e sua interação com biomoléculas têm sido intensamente estudadas. Modelar a deformação elástica de uma vesícula em um fluido não é uma tarefa fácil. Uma forma de fazer tal estudo é considerar equações para a elasticidade da membrana e as equações de Navier-Stokes para descrever o escoamento do fluido fora da membrana. Outra forma de modelar a interação fluido-vesícula é usar a metodologia de campo de fases, onde a membrana da vesícula é descrita pela função campo de fase, ϕ, [56].

Em [25], Q. Du *et al.* analisaram um sistema relacionado à dinâmica de vesículas, no qual o parâmetro campo de fase é utilizado para descrever a posição em relação à membrana da vesícula (dentro ou fora) e o escoamento do fluido é descrito pelas equações de Navier-Stokes. Eles abordaram o caso bidimensional e o caso tridimensional deste sistema, sendo que para o caso bidimensional foi provado resultados de existência e unicidade de solução para o sistema. Porém, no caso tridimensional, foi provado apenas a existência de solução. Para obter o resultado de unicidade foi necessário a adição de hipóteses sobre o campo velocidade.

O nosso trabalho é baseado neste descrito acima, onde abordaremos o caso tridimensional. Continuaremos a considerar o parâmetro campo de fases para descrever a membrana da vesícula, porém consideramos as equações α-Navier-Stokes para descrever o escoamento do fluido. Tal mudança foi feita pois as equações α-Navier-Stokes possuem maior regularidade que as equações de Navier-Stokes, o que nos garante a existência de solução mais regular para o sistema, regularidade esta que será suficiente para garantir a unicidade de solução, sem a necessidade de adicionar hipóteses para isto.

Em trabalhos recentes, modelos de campo de fases foram desenvolvidos em termos da energia, utilizando a energia elástica de flexão da membrana , dada por ([30], [41], [55], [59], [64]):

$$E = \int_\Gamma \frac{k}{2}(H - c_0)^2 dS,$$

onde Γ é a superfície da membrana da vesícula, H é a curvatura média de Γ, k é a rigidez de flexão da membrana e c_0 é a curvatura espontânea, isto é, a curvatura da membrana se não houver tensões externas atuando.

Neste modelo, a descrição da membrana é dada em termos da função campo de fase, ϕ. A função ϕ assume o valor 1 no interior da membrana e -1 fora da mesma, com uma fina camada de transição, cuja espessura é caracterizada por um pequeno parâmetro ϵ. Na superfície da membrana, a função ϕ se anula. O fluido é modelado pelas equações α-Navier-Stokes no domínio que contém a vesícula e o fluido. Os fluidos dentro e fora da vesícula são fluidos newtonianos viscosos e incompressíveis, e a energia associada com a deformação da vesícula vem principalmente da energia de flexão [25].

Como em [26] a energia de deformação correspondente ao modelo de campo de fases é dada por

$$E_\epsilon(\phi) = \frac{k}{2\epsilon}\int_\Omega \left(\epsilon\Delta\phi + \left(\frac{1}{\epsilon}\phi + c_0\sqrt{2}\right)(1-\phi^2)\right)^2 dx.$$

Consideraremos apenas o caso em que $c_0 = 0$, no entanto o resultado pode ser extendido para o caso em que a curvatura espontânea não seja nula.

A deformação da vesícula e o campo velocidade do fluido são considerados como o resultado da competição entre a energia de flexão da membrana da vesícula e a energia cinética do fluido, sendo que o volume da vesícula e a área da superfície da membrana da mesma são preservados. Para obter estas restrições, usaremos uma formulação da energia penalizada, a mesma usada por Q. Du *et al.* em [25], na qual são adicionados dois termos penalizados à energia elástica de flexão $E_\epsilon(\phi)$, o primeiro está relacionado ao volume e o segundo à área da superfície da membrana. Desta forma, a energia modificada é dada por

$$E(\phi) = E_\epsilon(\phi) + \frac{1}{2}M_1(\mathcal{A}(\phi) - \tilde{\alpha})^2 + \frac{1}{2}M_2(\mathcal{B}(\phi) - \tilde{\beta})^2, \tag{3.1}$$

onde

$$\mathcal{A}(\phi) = \int_\Omega \phi\, dx, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{B}(\phi) = \int_\Omega \frac{\epsilon}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{1}{4\epsilon}(\phi^2-1)^2 dx, \tag{3.3}$$

com $\epsilon > 0$ um parâmetro pequeno associado à espessura da membrana da vesícula, M_1 e M_2 são constantes usadas para forçar o volume e a área da superfície da vesícula continuarem constantes, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são contantes relacionadas ao volume e à área total da superfície da membrana, respectivamente.

Aqui, como já comentado na Introdução desta tese, Ω é um domínio aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$ com fronteira suave, $\partial\Omega$, onde interagem o fluido e a vesícula e $0 < T < +\infty$ o tempo máximo de interesse. Denotamos $Q = \Omega \times (0, T)$.

O sistema a ser analisado neste capítulo é o seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + w \cdot \nabla u + (\nabla w)^t \cdot u + \nabla p = \nu \Delta u + \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \nabla \phi \text{ em } Q, \\
&u = w - \alpha^2 \Delta w - \nabla \tilde{p} \text{ em } Q, \\
&\operatorname{div} w = \operatorname{div} u = 0 \text{ em } Q, \\
&w = u = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0,T], \\
&w = w_0 \text{ em } \Omega \times \{0\}, \\
&\frac{\partial \phi}{\partial t} + w \cdot \nabla \phi = -\gamma \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \text{ em } Q, \\
&\phi = -1, \quad \Delta \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0,T], \\
&\phi = \phi_0 \text{ em } \Omega \times \{0\}.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Aqui, como no capítulo anterior, u e w são as velocidades associadas às equações α-Navier-Stokes, agora adaptadas ao problema de dinâmica de vesículas (w é a velocidade regularizada que é utilizada como velocidade de transporte); também como antes p e $\tilde{p}$ são as respectivas pressões devidas ao requerimento de incompressibilidade para tais velocidades. A variável ϕ denota o campo de fases.

O parâmetro $\nu > 0$ é a viscosidade; os parâmetros $\alpha > 0$ e γ são constantes dadas. O termo $E(\phi)$ denota a energia definida em (3.1), o termo $\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)$ denota a derivada variacional de $E(\phi)$ com respeito à variável ϕ e será descrito mais adiante; o termo adicional $\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\nabla\phi$ na equação do momento linear está relacionado à força agindo entre o fluido e a superfície da membrana (*Willmore force*) [25].

Utilizando a notação da Seção 1.3 e procedendo como feito para obtermos a equação (1.7), podemos reescrever o modelo (3.4) como:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 A w) + \nu A(w + \alpha^2 A w) + \tilde{B}(w, w + \alpha^2 A w) = \mathbb{P}\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \nabla \phi \right), \\
&\frac{\partial \phi}{\partial t} + w \cdot \nabla \phi = -\gamma \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \text{ em } Q, \\
&w = w_0, \quad \phi = \phi_0 \text{ em } \Omega \times \{0\}, \\
&\phi = -1, \quad \Delta \phi = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0,T].
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

3.1.1 Estimativas formais da energia e de $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$

Nesta subseção, derivaremos formalmente certas estimativas para o modelo que estamos considerando. Isto é feito para introduzir ideias que serão reutilizadas posteriormente em um contexto rigoroso.

A dissipação de energia cinética é uma propriedade básica das equações α-Navier-Stokes para fuidos incompressíveis. Uma lei de dissipação de energia também é válida para o nosso modelo, quando à energia cinética se adiciona a energia de deformação elástica de deformação da membrana para produzir a energia total. Nesta seção obteremos formalmente uma estimativa que descreve tal dissipação para a energia associada ao nosso modelo.

Denotando

$$f(\phi) = -\epsilon\Delta\phi + \frac{1}{\epsilon}(\phi^2 - 1)\phi \tag{3.6}$$

e

$$g(\phi) = -\Delta f(\phi) + \frac{1}{\epsilon^2}(3\phi^2 - 1)f(\phi), \tag{3.7}$$

podemos reescrever a energia definida em (3.1) como

$$E(\phi) = \frac{k}{2\epsilon}\int\limits_{\Omega} |f(\phi)|^2\,dx + \frac{1}{2}M_1(\mathcal{A}(\phi) - \tilde{\alpha})^2 + \frac{1}{2}M_2(\mathcal{B}(\phi) - \tilde{\beta})^2. \tag{3.8}$$

A derivada variacional de $E(\phi)$ com relação à variável ϕ, denotada por $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}$, é definida por

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(\varphi + h\psi) - E(\varphi)}{h} = \int\limits_{\Omega}\frac{\delta E}{\delta\phi}(\varphi)\psi\,dx = \left\langle \frac{\delta E}{\delta\phi}(\varphi), \psi \right\rangle,$$

para ψ uma função arbitrária.

Para determinar $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)$ deve-se fazer o cálculo direto da definição da derivada variacional. Faremos a derivada variacional de cada um dos três termos da expressão para $E(\phi)$ individualmente, para simplicar os cálculos.

Vamos determinar $\dfrac{\delta\left(\dfrac{M_1}{2}\big(\mathcal{A}(\phi) - \tilde{\alpha}\big)^2\right)}{\delta\phi}(\phi)$.

De acordo com a definição de derivada variacional, temos:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\delta\left(\left(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}\right)^2\right)}{\delta\phi}(\phi),\psi\right\rangle &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\mathcal{A}(\phi+h\psi)-\tilde{\alpha}\right)^2-\left(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}\right)^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\int\limits_\Omega(\phi+h\psi)\,dx-\tilde{\alpha}\right)^2-\left(\int\limits_\Omega\phi\,dx-\tilde{\alpha}\right)^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\int\limits_\Omega(\phi+h\psi)\,dx\right)^2-2\tilde{\alpha}\int\limits_\Omega(\phi+h\psi)\,dx+(\tilde{\alpha})^2-\left(\int\limits_\Omega\phi\,dx\right)^2+2\tilde{\alpha}\int\limits_\Omega\phi\,dx-(\tilde{\alpha})^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\int\limits_\Omega\phi\,dx+h\int\limits_\Omega\psi\,dx\right)^2-2\tilde{\alpha}h\int\limits_\Omega\psi\,dx-\left(\int\limits_\Omega\phi\,dx\right)^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2h\int\limits_\Omega\phi\,dx\int\limits_\Omega\psi\,dx+h^2\left(\int\limits_\Omega\psi\,dx\right)^2-2\tilde{\alpha}h\int\limits_\Omega\psi\,dx}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\int\limits_\Omega\psi\,dx\left(2\int\limits_\Omega\phi\,dx+h\int\limits_\Omega\psi\,dx-2\tilde{\alpha}\right)\\
&= 2\int\limits_\Omega\psi\,dx\left(\int\limits_\Omega\phi\,dx-\tilde{\alpha}\right)\\
&= 2\int\limits_\Omega\psi\left(\int\limits_\Omega\phi\,dx-\tilde{\alpha}\right)dx\\
&= 2\int\limits_\Omega\left(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}\right)\psi\,dx\\
&= \left\langle 2\left(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}\right),\psi\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Como a igualdade acima vale para toda ψ, concluímos que

$$
\frac{\delta\left(\left(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}\right)^2\right)}{\delta\phi}(\phi)=2\left(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}\right).
$$

Logo,

$$
\frac{\delta\left(\frac{M_1}{2}\left(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}\right)^2\right)}{\delta\phi}(\phi)=M_1\left(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha}\right).
$$

Este mesmo cálculo deve ser feito para os outros dois termos na expressão de $E(\phi)$ em (3.8). Estas contas serão omitidas pois são longas e seguem exatamente o raciocínio acima. Ao finalizar este cálculo, obtemos

$$\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) = kg(\phi) + M_1(\mathcal{A}(\phi) - \tilde{\alpha}) + M_2(\mathcal{B}(\phi) - \tilde{\beta})f(\phi). \tag{3.9}$$

Para obter a estimativa formal da lei de energia para soluções suaves w e ϕ de (3.5), calculamos o produto interno da primeira equação de (3.5) com w,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|w|^2 + \alpha^2|\nabla w|^2\right)dx + \nu\int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + \alpha^2|Aw|^2\right)dx = \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\nabla\phi\, w\, dx,$$

multiplicamos a segunda equação de (3.5) por $\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)$ e integramos em Ω,

$$\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\, dx + \int_\Omega w\nabla\phi\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\, dx = -\gamma\int_\Omega \left|\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\right|^2 dx,$$

somando estas duas igualdades e observando que $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\, dx = \frac{d}{dt}E(\phi)$, obtemos a seguinte lei de dissipação de energia

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}\left(|w|^2 + \alpha^2|\nabla w|^2\right)dx + E(\phi)\right) = -\nu\int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + \alpha^2|Aw|^2\right)dx - \gamma\int_\Omega \left|\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\right|^2 dx. \tag{3.10}$$

Da equação de energia (3.10) concluimos que, se w e ϕ fornecem uma solução de (3.5), devemos ter as limitações uniformes (com respeito a $T > 0$) nos seguintes espaços:

- $w \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$;
- $\phi \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$;
- $f(\phi) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$;
- $\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \in L^2(Q)$.

Mostraremos posteriormente que para (w,ϕ) solução fraca de (3.5), será válida uma versão fraca para a lei de dissipação de energia descrita anteriormente; isto será feito mais adiante via o método de Galerkin. Estes argumentos nos permitirão então obter rigorosamente as estimativas anteriores.

A seguir buscaremos estimativas formais para $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$.

Baseados nas estimativas dadas pela lei da dissipação de energia anterior, utilizando outra vez as equações do modelo (3.5), deduziremos formalmente estimativas para as derivadas temporais. Como observado anteriormente, as ideias usadas aqui para deduzir tais estimativas serão reutilizadas posteriormente.

Seja $v \in L^2(\Omega)$ e $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$. Multiplicando a segunda equação de (3.5) por v e integrando em Ω, temos

$$\left|\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial t} v \, dx\right| \leq \left|\int_\Omega w \cdot \nabla\phi \, v \, dx\right| + \gamma \left|\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) v \, dx\right|.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega w \cdot \nabla\phi \, v \, dx\right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \, \|\nabla\phi\|_{L^3(\Omega)} \, \|w\|_{L^6(\Omega)},$$

$$\left|\gamma \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) v \, dx\right| \leq C \left\|\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Concluímos, destas estimativas, das imersões contínuas $H^1(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \subset L^6(\Omega)$, e de $\|\nabla\phi\|_{L^3(\Omega)} \leq C\|\nabla\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}$, que

$$\left\|\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\right\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Logo,

$$\left\|\frac{\partial \phi}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \left(\|\phi\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)} + \left\|\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\right\|^2_{L^2(Q)} \right). \tag{3.11}$$

Agora, tomando $v \in D(A)$, $\|v\|_{D(A)} \leq 1$, e recordando que $u = w + \alpha^2 Aw$, temos da primeira equação de (3.5)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v\,dx = -\nu \int_\Omega Au\,v\,dx - \left(\tilde{B}(w,u),v\right) + \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\nabla\phi\, v\,dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} v\,dx = -\nu \int_\Omega uAv\,dx - \left(\tilde{B}(w,u),v\right) + \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\nabla\phi\, v\,dx.$$

Vamos estimar cada um dos termos do segundo membro desta equação individualmente.

No primeiro termo, aplicamos a Desigualdade de Hölder, obtendo

$$\left|\nu \int_\Omega u\,Av\,dx\right| \le \|u\|_{L^2(\Omega)}\|Av\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para estimar o termo $\tilde{B}(w,u,v)$ usamos o Lema 1.10 e em seguida aplicamos a Desigualdade de Poincaré, obtendo

$$\begin{aligned}\left|\left(\tilde{B}(w,u),v\right)\right| &\le C\left(\|w\|_H^{1/2}\|\nabla w\|_H^{1/2}\|u\|_H\|Av\|_H + \|u\|_H\|\nabla w\|_H\|\nabla v\|_H^{1/2}\|Av\|_H^{1/2}\right)\\ &\le C\|\nabla w\|_H\|u\|_H\|Av\|_H.\end{aligned}$$

Por fim, aplicamos a Desigualdade de Hölder no terceiro termo, utilizamos as imersões contínuas $H^1(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ e $D(A) \subset L^6(\Omega)$, e que $\|\nabla\phi\|_{L^3(\Omega)} \le C\|\nabla\phi\|_{H^1(\Omega)} \le C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}$, obtendo

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\nabla\phi\,v\,dx\right| &\le \left\|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\right\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi\|_{L^3(\Omega)}\|v\|_{L^6(\Omega)}\\ &\le C\left\|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\right\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{H^2(\Omega)}\|v\|_{D(A)}.\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{D(A)'} \le C\left(\|u\|_H + \|\nabla w\|_H\|u\|_H + \left\|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\right\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{H^2(\Omega)}\right).$$

Como $u = w + \alpha^2 Aw$, temos também $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw)$; pela regularidade elíptica do operador de Stokes. Portanto,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw)\right\|^2_{L^2(0,T;D(A)')} &= \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;D(A)')} \\ \leq C\left(\|w\|^2_{L^2(0,T;D(A))} + \|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)}\|w\|^2_{L^2(0,T;D(A))} + \left\|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\right\|^2_{L^2(Q)}\|\phi\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\right).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Obtemos então:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial w}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H)} \leq C\Bigg(&\|w\|^2_{L^2(0,T;D(A))} + \|w\|^2_{L^\infty(0,T;V)}\|w\|^2_{L^2(0,T;D(A))} \\ &+ \left\|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\right\|^2_{L^2(Q)}\|\phi\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\Bigg).\end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 Existência e unicidade de solução

Nesta seção enunciamos o resultado principal deste Capítulo, o qual nos garante a existência e unicidade de solução para o problema (3.5).

Teorema 3.1. *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^3$, com fronteira suave, $\partial\Omega$. Suponha que $w_0 \in V$ e $\phi_0 + 1 \in H_0^2(\Omega)$. Então exitem funções w e ϕ tais que*

1. $w \in L^2(0,T;D(A)) \cap L^\infty(0,T;V)$, $\dfrac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0,T;H)$, $w = w_0$ *em* $\Omega \times \{0\}$,
2. $\dfrac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw) \in L^2(0,T;D(A)')$,
3. $\phi \in W_2^{2,1}(Q)$, $\phi = \phi_0$ *em* $\Omega \times \{0\}$,
4. $f(\phi) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$; $\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \in L^2(Q)$,

e o par (w,ϕ) é a única solução do problema (3.5) no seguinte sentido:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw), v\right\rangle + \nu\left\langle A(w+\alpha^2 Aw), v\right\rangle + \left\langle \tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), v\right\rangle = \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\nabla\phi\cdot v\,dx,$$

para cada $v(x,t) \in L^2(0,T,D(A))$, onde $\tilde{B}$ está definido em (1.5) e também,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + w\cdot\nabla\phi = -\gamma\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi) \text{ no sentido de } L^2(Q).$$

Observação 3.1. *No decorrer da demonstração deste teorema ficará claro que a expressão* $\left\langle \tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw), v \right\rangle$ *tem sentido.*

3.3 Demonstração da existência de solução

Nesta seção provaremos a existência de solução fraca para o problema (3.5). Para tanto usaremos o método de Galerkin modificado, obtendo soluções aproximadas, em seguida passaremos ao limite e então verificaremos que a função obtida é solução do problema em questão.

Seja $\{v_n\} \subset H$ uma base ortonormal de H formada por autofunções do operador de Stokes. Seja

$$V_n = span\{v_1, v_2, \cdots, v_n\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando o método de Galerkin para o campo velocidade w, temos para $w : [0, T] \to V_n$ e $\phi : [0, T] \to H^2(\Omega)$, o seguinte problema aproximado:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw) + \mathbb{P}_n(\tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw)) = -\nu A(w + \alpha^2 Aw) + \mathbb{P}_n\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\nabla\phi\right),\\
&\frac{\partial \phi}{\partial t} + w \cdot \nabla\phi = -\gamma\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi),\\
&w(0) = \mathbb{P}_n(w_0),\\
&\phi(0) = \phi_0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde

$$\mathbb{P}_n : H \to V_n \subset H$$

denota a projeção ortogonal de H em V_n.

O próximo lema nos garante a existência de solução para o problema aproximado (3.14) bem como uma estimativa uniforme da energia para a solução aproximada, com respeito à dimensão n.

Lema 3.1. *Existe um par de funções $w : [0,T] \to V_n$, $\phi : [0,T] \to H^2(\Omega)$ satisfazendo*

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw), v \right\rangle + \left\langle \tilde{B}(w, w + \alpha^2 Aw), v \right\rangle = -\nu \left\langle A(w + \alpha^2 Aw), v \right\rangle + \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \nabla \phi \cdot v \, dx, \\
&\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, \eta \right\rangle + \langle w \cdot \nabla \phi, \eta \rangle = -\gamma \left\langle \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi), \eta \right\rangle, \\
&w(0) = \mathbb{P}_n(w_0), \\
&\phi(0) = \phi_0,
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

para todo $v \in L^2(0,T;V_n)$, $\eta \in L^2(Q)$ e para quase todo $t \in [0,T]$.

Além disso, para todo $t \in [0,T]$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \left(|w(x,t)|^2 + \alpha^2 |\nabla w(x,t)|^2 \right) dx + E(\phi(x,t)) + \nu \int_0^t \int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + \alpha^2 |Aw|^2 \right) dx \, dt \\
+ \gamma \int_0^t \int_\Omega \left| \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) \right|^2 dx \, dt \le M,
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

onde M é uma constante independente de n.

Demonstração: Aplicaremos o método de aproximação de Galerkin para ϕ. Denote $\{\eta_j\}$ as autofunções do operador Δ sob as condições de Dirichlet homogêneas. Estas autofunções formam uma base ortonormal de $L^2(\Omega)$. Pelas hipóteses sobre o domínio Ω temos que as autofunções do operador Laplaciano possuem regularidade $H^2(\Omega)$.

Seja

$$N_m = span\{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m\},$$

para cada $m \in \mathbb{N}$.

Aplicando o método de Galerkin modificado para ϕ, obtemos um problema aproximado do problema (3.15). Nosso objetivo aqui é encontrar $w_m(x,t)$ e $\phi_m(x,t)$ da forma

$$w_m(x,t) = \sum_{i=1}^{n} d_i(t) v_i(x) \in V_n \quad \text{e} \quad \phi_m(x,t) + 1 = \sum_{j=1}^{m} h_j(t) \eta_j(x) \in N_m,$$

tais que

$$
\begin{aligned}
&\langle w_m' + \alpha^2 A w_m', v\rangle + \langle \tilde{B}(w_m, w_m + \alpha^2 A w_m), v\rangle = -\nu\langle A(w_m + \alpha^2 A w_m), v\rangle \\
&\qquad\qquad + \int_\Omega \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\nabla\phi_m\cdot v\,dx, \quad \forall\ v\in V_n \\
&\langle \phi_m', \eta\rangle + \langle w_m\cdot\nabla\phi_m, \eta\rangle = -\gamma\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\eta\,dx, \quad \forall\ \eta\in N_m \\
&w_m = \mathbb{P}_n(w_0) \text{ para } t=0, \\
&\phi_m = \pi_m(\phi_0+1)-1 \text{ para } t=0,
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

onde $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)$ denota a expressão $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)$ (veja (3.9)) calculada em ϕ_m, isto é,

$$
\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m) = kg(\phi_m) + M_1(\mathcal{A}(\phi_m)-\tilde{\alpha}) + M_2(\mathcal{B}(\phi_m)-\beta)f(\phi_m), \tag{3.18}
$$

com f e g definidas em (3.6) e (3.7), respectivamente.

Aqui a derivada temporal é denotada por $'$ e

$$
\pi_m : L^2(\Omega)\to N_m\subset L^2(\Omega)
$$

denota a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ em N_m.

As soluções deste problema possuem naturalmente dependência no índice n, mas para simplificar a notação, este índice será omitido.

Observe que basta exigir que as equações anteriores seja satisfeitas para $v = v_k$, para $k = 1, 2, \cdots, n$, e $\eta = \eta_l$, para $l = 1, 2, \cdots, m$. Assim, o sistema (3.17) é na verdade é um sistema de equações ordinárias para o qual a teoria clássica de existência local no tempo e unicidade de soluções pode ser aplicada, garantindo-nos assim a existência de uma única solução em um intervalo $[0, t_{mn}]$.

Queremos que a solução seja global no tempo. Para mostrar este fato, faremos uma estimativa de energia para o problema aproximado (3.17), obtendo assim estimativas uniformes para w_m e ϕ_m, que implicarão, em particular, que a solução (3.17) existe globalmente no tempo.

Estimativa de Energia:

No problema (3.17) substituindo v por w_m e η por $\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w_m|^2+\alpha^2|\nabla w_m|^2)dx = -\nu\int_\Omega (|\nabla w_m|^2+\alpha^2|Aw_m|^2)dx\\
&\qquad\qquad + \int_\Omega \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\nabla\phi_m\cdot w_m\,dx,\\
&\left\langle \phi_m', \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right\rangle + \int_\Omega w_m\cdot\nabla\phi_m\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)dx = -\gamma\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)dx,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

pois $\left(\tilde{B}(w_m,\cdot),w_m\right)=0$, de acordo com as propriedade do operador $\tilde{B}$ apresentadas no Lema 1.10.

Observando que

$$\left\langle \phi_m', \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right\rangle = \left\langle \pi_m(\phi_m'), \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right\rangle = \left\langle \phi_m', \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right\rangle = \frac{d}{dt}E(\phi_m),$$

e que

$$\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)dx = \int_\Omega \left|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right|^2 dx,$$

uma vez que π_m é uma projeção ortogonal em $L^2(\Omega)$, somando as equações em (3.19), obtemos a lei de dissipação da energia para as aproximações:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega (|w_m|^2+\alpha^2|\nabla w_m|^2)dx + E(\phi_m)\right) &= -\nu\int_\Omega (|\nabla w_m|^2+\alpha^2|Aw_m|^2)dx\\
&\quad -\gamma\int_\Omega \left|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega (|w_m(x,t)|^2+\alpha^2|\nabla w_m(x,t)|^2)dx + E(\phi_m(x,t))\\
&\qquad + \nu\int_0^t\int_\Omega (|\nabla w_m(x,t)|^2+\alpha^2|Aw_m(x,t)|^2)dx\,dt + \gamma\int_0^t\int_\Omega \left|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right|^2 dx\,dt\\
&\qquad \le \frac{1}{2}\int_\Omega (|w_m(x,0)|^2+\alpha^2|\nabla w_m(x,0)|^2)dx + E(\phi_m(x,0)).
\end{aligned}$$

Como $\|w_m(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_0\|_{L^2(\Omega)}$, e pela definição de $\phi_m(x,0)$ temos que $\phi_m(x,0)$ converge a ϕ_0 em $H^2(\Omega)$, quando $m \to +\infty$, temos que existe uma constante $M > 0$ independente de n e m tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega (|w_m(x,t)|^2 + \alpha^2|\nabla w_m(x,t)|^2)dx + E(\phi_m(x,t)) \\
&\quad + \nu \int_0^t \int_\Omega (|\nabla w_m(x,t)|^2 + \alpha^2|Aw_m(x,t)|^2)dx\,dt + \gamma \int_0^t \int_\Omega \left|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\right|^2 dx\,dt \\
&\quad \leq M.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Note que esta lei de dissipação da energia implica que as soluções locais não explodem em norma para tempos finitos, ela nos garante que as soluções locais do problema de equações diferenciais ordinárias (3.17) na verdade são globais, isto é, estão definidas em todo o intervalo $[0,T]$.

Além disto, esta lei da dissipação energia nos dá as seguintes estimativas uniformes em m e n:

$$\begin{aligned}
&\bullet\ \|w_m\|_{L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;D(A))} \leq M, \\
&\bullet\ \|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq M, \\
&\bullet\ \left\|\pi_m\left(\frac{\delta E(\phi_m)}{\delta\phi_m}\right)\right\|_{L^2(Q)} \leq M.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

A seguir, queremos obter estimativas para as derivadas temporais. Comecemos por obter uma estimativa para ϕ_m'.

Para isto, observe que para todo $\xi \in L^2(\Omega)$ temos $\int_\Omega \phi_m'\xi\,dx = \int_\Omega \phi_m'\pi_m\xi\,dx$, devido ao fato da projeção π_m ser autoadjunta em $L^2(\Omega)$ e $\pi_m(\phi_m') = \phi_m'$.

Assim, tomando qualquer $\xi \in L^2(\Omega)$ e utilizando $\eta = \pi_m\xi$ na segunda equação de (3.17), podemos escrever:

$$\int_\Omega \phi_m'\xi\,dx = \int_\Omega \phi_m'\pi_m\xi\,dx = -\gamma\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\pi_m\xi\,dx - \int_\Omega w_m\nabla\phi_m\,\pi_m\xi\,dx.$$

Observando que π_m é autoadjunto em $L^2(Q)$ e que $w_m\nabla\phi_m \in L^2(Q)$, obtemos:

$$\int_\Omega \phi_m'\xi\,dx = -\gamma\int_\Omega \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\xi\,dx - \int_\Omega w_m\nabla\phi_m\,\xi\,dx.$$

Temos então,

$$\left|\int_\Omega \phi_m' \xi \, dx\right| \leq \gamma \left|\int_\Omega \pi_m \left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right) \xi \, dx\right| + \left|\int_\Omega w_m \nabla \phi_m \, \xi \, dx\right|.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, temos:

$$\left|\int_\Omega \phi_m' \xi \, dx\right| \leq C \left\|\pi_m \left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \|\xi\|_{L^2(\Omega)} + \|w_m\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \phi_m\|_{L^3(\Omega)} \|\xi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pelas imersões contínuas $V \subset L^6(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \subset L^3(\Omega)$, temos que

$$\|\phi_m'\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\|\pi_m \left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + C \|w_m\|_V \|\nabla \phi_m\|_{H^1(\Omega)},$$

ou seja,

$$\|\phi_m'\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\|\pi_m \left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} + C \|w_m\|_V \|\phi_m\|_{H^2(\Omega)}.$$

Portanto,

$$\|\phi_m'\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \left(\left\|\pi_m \left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(Q)}^2 + \|w_m\|_{L^2(0,T;V)}^2 \|\phi_m\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right). \tag{3.22}$$

Vamos agora à estimativa para w_m'.

Tomando qualquer $\xi \in D(A)$, utilizando $v = \mathbb{P}_n \xi$ na primeira equação de (3.17), e substituindo $u_m = w_m + \alpha^2 A w_m$, podemos escrever:

$$\int_\Omega u_m' \mathbb{P}_n \xi \, dx = -\nu \int_\Omega A u_m \, \mathbb{P}_n \xi \, dx - \left\langle \tilde{B}(w_m, u_m), \mathbb{P}_n \xi \right\rangle + \int_\Omega \pi_m \left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right) \nabla \phi_m \, \mathbb{P}_n \xi \, dx.$$

Lembrando que $\mathbb{P}_n$ é autoadjunto em $L^2(\Omega)$, que u_m', $A u_m \in V_n$, e assim $\mathbb{P}_n u_m' = u_m'$ e $\mathbb{P}_n A u_m = A u_m$, e ainda que A também é autoadjunto temos que

$$\int_\Omega u_m' \xi \, dx = -\nu \int_\Omega u_m \, A\xi \, dx - \left\langle \tilde{B}(w_m, u_m), \mathbb{P}_n \xi \right\rangle + \int_\Omega \pi_m \left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right) \nabla \phi_m \, \mathbb{P}_n \xi \, dx.$$

Vamos estimar cada um dos termos do segundo membro desta equação individualmente.

No primeiro termo, aplicamos a Desigualdade de Hölder, obtendo

$$\left|\nu \int_\Omega u_m\, A\xi\, dx\right| \leq \nu \|u_m\|_H \|A\xi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para estimar o termo $\left\langle \tilde{B}(w_m, u_m), \mathbb{P}_n\xi \right\rangle$ usamos o Lema 1.10 *(v)*, a Desigualdade de Poincaré e lembrando que $\|\mathbb{P}_n\xi\|_H \leq \|\xi\|_H$, $\|\mathbb{P}_n\xi\|_V \leq \|\xi\|_V$ e que $\|\xi\|_{H^2(\Omega)}$ é equivalente à $\|A\xi\|_H$, segue que

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \tilde{B}(w_m, u_m), \mathbb{P}_n\xi \right\rangle\right| &\leq C\Big(\|w_m\|_H^{1/2}\|\nabla w_m\|_H^{1/2}\|u_m\|_H\|\mathbb{P}_n\xi\|_V \\ &\quad + \|u_m\|_H\|\nabla w_m\|_H\|\mathbb{P}_n\xi\|_H^{1/2}\|\mathbb{P}_n\xi\|_V^{1/2}\Big) \\ &\leq C\|\nabla w_m\|_H\|u_m\|_H\|A\xi\|_H.\end{aligned}$$

Por fim, aplicamos a Desigualdade de Hölder no terceiro termo, e utilizamos $\|\mathbb{P}_n\xi\|_{L^6(\Omega)} \leq \|\mathbb{P}_n\xi\|_V \leq \|\xi\|_V \leq C\|\xi\|_{D(A)}$ e também $\|\nabla\phi_m\|_{L^3(\Omega)} \leq C\|\phi_m\|_{H^2(\Omega)}$ para obter:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\nabla\phi_m\,\mathbb{P}_n\xi\,dx\right| &\leq \left\|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi_m\|_{L^3(\Omega)}\|\mathbb{P}_n\xi\|_{L^6(\Omega)} \\ &\leq C\left\|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\|\phi_m\|_{H^2(\Omega)}\|\xi\|_{D(A)}.\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\|u_m'\|_{D(A)'} \leq C\left(\|u_m\|_H + \|\nabla w_m\|_H\|u_m\|_H + \left\|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}\|\phi_m\|_{H^2(\Omega)}\right).$$

Como $u_m = w_m + \alpha^2 A w_m$, temos também $u_m' = w_m' + \alpha^2 A w_m'$; pela regularidade elíptica do operador de Stokes, portanto,

$$\begin{aligned}\|w_m' + \alpha^2 A w_m'\|^2_{L^2(0,T;D(A)')} &= \|u_m'\|^2_{L^2(0,T;D(A)')} \\ &\leq C\Bigg(\|w_m\|^2_{L^2(0,T;D(A))} + \|w_m\|^2_{L^\infty(0,T;V)}\|w_m\|^2_{L^2(0,T;D(A))} \\ &\quad + \left\|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\right\|^2_{L^2(Q)}\|\phi_m\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\Bigg).\end{aligned}$$

Obtemos então:

$$\|w_m'\|^2_{L^2(0,T;H)} \leq C\Bigg(\|w_m\|^2_{L^2(0,T;D(A))} + \|w_m\|^2_{L^\infty(0,T;V)}\|w_m\|^2_{L^2(0,T;D(A))} + \left\|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\right\|^2_{L^2(Q)} \|\phi_m\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\Bigg). \tag{3.23}$$

Logo, das estimativas (3.21), (3.22) e (3.23), concluímos que:

- w_m' é uniformentente limitada em $L^2(0,T;H)$,
- ϕ_m' é uniformemente limitada em $L^2(Q)$.

Assim, pelos resultados de compacidade, Lema 1.5 e Proposição 1.1, temos, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned}
&w_m \to w \text{ fraco em } L^2(0,T;D(A)),\\
&w_m \to w \text{ forte em } L^2(0,T;V),\\
&w_m \to w \text{ forte em } C([0,T];H),\\
&\phi_m \to \phi \text{ fraco em } L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\
&\phi_m \to \phi \text{ forte em } C([0,T];H^1(\Omega)),\\
&\phi_m \to \phi \text{ forte em } L^2(0,T;W^{1,p}(\Omega)), \quad 1 \leq p \leq 3.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Explicitando as equações para passagem ao limite quando $m \to +\infty$

Escolha $\tilde{v}(x,t) = \beta(t)\delta(x)$, $\tilde{\eta}(x,t) = \beta(t)\xi(x)$, onde $\beta \in C([0,T])$, $\delta \in V_n$ e $\xi \in N_m$. Temos, das duas primeiras equações de (3.17), que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(w_m + \alpha^2 A w_m)\tilde{v}\,dx\,dt + \int_0^T \langle \tilde{B}(w_m, w_m + \alpha^2 A w_m), \tilde{v}\rangle\,dt\\
&\qquad = -\nu\int_0^T\int_\Omega A(w_m + \alpha^2 A w_m)\tilde{v}\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\nabla\phi_m\tilde{v}\,dx\,dt
\end{aligned} \tag{3.25}$$

e

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\phi_m}{\partial t}\tilde{\eta}\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega w_m\nabla\phi_m\tilde{\eta}\,dx\,dt = -\gamma\int_0^T\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\tilde{\eta}\,dx\,dt.$$

Para obter solução para o problema aproximado (3.15), vamos tomar o limite nestas equações acima, fazendo $m \to +\infty$. Para calcular este limite precisaremos das convergências (3.24) e, além dessas, precisaremos de convergências fracas para os termos $\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)$ e $\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)$. Obteremos essas duas convergências fracas a seguir.

Convergência fraca de $\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)$.

Relembrando a expressão de $\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)$ em (3.18), podemos reescrever este termo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m) &= k\left\{-\Delta f(\phi_m) + \frac{1}{\epsilon^2}(3\phi_m^2 - 1)f(\phi_m)\right\} + M_1(\mathcal{A}(\phi_m) - \tilde{\alpha}) \\ &+ M_2(\mathcal{B}(\phi_m) - \tilde{\beta})f(\phi_m) \\ &= k\left\{-\Delta(-\epsilon\Delta\phi_m + \frac{1}{\epsilon}(\phi_m^2 - 1)\phi_m) + \frac{1}{\epsilon^2}(3\phi_m^2 - 1)f(\phi_m)\right\} \\ &+ M_1(\mathcal{A}(\phi_m) - \tilde{\alpha}) + M_2(\mathcal{B}(\phi_m) - \tilde{\beta})f(\phi_m) \\ &= \epsilon k\Delta^2\phi_m + L(\phi_m),\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $L(\phi_m)$ denota os termos de menor ordem. Observe que $\|L(\phi_m)\|_{L^2(Q)}$ é uniformemente limitado, devido à limitação uniforme de ϕ_m em $L^\infty(0, T; H^2(\Omega))$.

Temos então,

$$\begin{aligned}\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right) &= \pi_m(\epsilon k\Delta^2\phi_m) + \pi_m(L(\phi_m)) \\ &= \epsilon k\Delta^2\phi_m + \pi_m(L(\phi_m)).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Desta igualdade e observando que o termo $\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)$ é limitado em $L^2(Q)$ devido à equação (3.20), temos

$$\begin{aligned}\|\epsilon k\Delta^2\phi_m\|_{L^2(Q)} &\leq \left\|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(Q)} + \|\pi_m(L(\phi_m))\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \left\|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(Q)} + \|L(\phi_m)\|_{L^2(Q)}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Logo, de (3.26) e em seguida aplicando (3.28), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right\|_{L^2(Q)} &\leq \|\epsilon k\Delta^2\phi_m\|_{L^2(Q)} + \|L(\phi_m)\|_{L^2(Q)}\\
&\leq \left\|\pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right)\right\|_{L^2(Q)} + 2\|L(\phi_m)\|_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)$ converge fraco a $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)$ em $L^2(Q)$, ou seja,

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)g\,dx\,dt = \int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\,g\,dx\,dt,$$

para toda $g\in L^2(Q)$.

Na verdade, vamos mostrar esta convergência para toda $g\in C_0^\infty(Q)$. E, como $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\in L^2(Q)$ e o espaço $C_0^\infty(Q)$ é denso em $L^2(Q)$, podemos concluir que o mesmo resultado vale para toda $g\in L^2(Q)$.

Faremos isto, trabalhando termo a termo na equação (3.26).

Primeiramente, temos que

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega \Delta^2\phi_m g\,dx\,dt = \int_0^T\!\!\int_\Omega \Delta\phi_m\Delta g\,dx\,dt \to \int_0^T\!\!\int_\Omega \Delta\phi\Delta g\,dx\,dt = \int_0^T\!\!\int_\Omega \Delta^2\phi g\,dx\,dt, \tag{3.29}$$

quando $m\to+\infty$, pois $\phi_m\to\phi$ fraco em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e $g\in C_0^\infty(Q)$.

Temos também, que

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^T\int_\Omega \Delta(\phi_m^3-\phi^3)g\,dx\,dt\right| &= 3\left|\int_0^T\int_\Omega (\phi_m^2\nabla\phi_m-\phi^2\nabla\phi)\nabla g\,dx\,dt\right|\\
&= 3\left|\int_0^T\int_\Omega \big((\phi_m^2-\phi^2)\nabla\phi_m\nabla g+\phi^2(\nabla\phi_m-\nabla\phi)\nabla g\big)\,dx\,dt\right|\\
&\leq C\left|\int_0^T\int_\Omega (\phi_m^2-\phi^2)\nabla\phi_m\nabla g\,dx\,dt\right| + C\left|\int_0^T\int_\Omega \phi^2(\nabla\phi_m-\nabla\phi)\nabla g\,dx\,dt\right|\\
&\leq C\|\phi_m^2-\phi^2\|_{L^2(Q)}\|\nabla\phi_m\|_{L^2(Q)} + C\|\phi\|_{L^2(0,T;L^4(\Omega))}\|\nabla\phi_m-\nabla\phi\|_{L^2(Q)}\\
&\leq C\|\phi_m^2-\phi^2\|_{L^2(Q)}\|\nabla\phi_m\|_{L^2(Q)} + C\|\phi\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\|\nabla\phi_m-\nabla\phi\|_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

onde usamos que $g\in C_0^\infty(Q)$, a Desigualdade de Hölder e a imersão contínua $H^2(\Omega)\subset L^4(\Omega)$.

Assim, fazendo $m \to +\infty$, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta(\phi_m^3 - \phi^3) g \, dx \, dt \to 0, \tag{3.30}$$

pois a convergência forte $\phi_m \to \phi$ em $C([0,T]; H^1(\Omega))$ e a imersão contínua $H^1(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, para $1 \leq p^* \leq 6$ implicam que $\phi_m \to \phi$ forte em $C([0,T]; L^4(\Omega))$, que por sua vez, implica que $\phi_m^2 \to \phi^2$ forte em $L^2(Q)$, e a convergência forte $\phi_m \to \phi$ em $C([0,T]; H^1(\Omega))$ implica também que $\nabla\phi_m \to \nabla\phi$ forte em $L^2(Q)$.

Temos ainda,

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta\phi_m g \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi g \, dx \, dt, \tag{3.31}$$

pois $\phi_m \to \phi$ fraco em $L^2(0,T; H^2(\Omega))$.

Considere agora

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T \int_\Omega \big(\phi_m^2 f(\phi_m) - \phi^2 f(\phi)\big) g \, dx \, dt \right| &= \left| \int_0^T \int_\Omega \Big[(\phi_m^2 - \phi^2) f(\phi_m) + \phi^2 (f(\phi_m) - f(\phi)) \Big] g \, dx \, dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^T \int_\Omega \phi^2 (f(\phi_m) - f(\phi)) g \, dx \, dt \right| + \left| \int_0^T \int_\Omega (\phi_m^2 - \phi^2) f(\phi_m) g \, dx \, dt \right| \\
&\equiv I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Se mostrarmos que $f(\phi_m)$ converge a $f(\phi)$ fraco em $L^2(Q)$, teremos que $I_1 \to 0$.

Mostremos que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega f(\phi_m) g \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega f(\phi) g \, dx \, dt.$$

Pela definição de f em (3.6), temos

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega f(\phi_m) g \, dx \, dt = \lim_{m \to +\infty} \int_0^T \int_\Omega \Big[-\epsilon \Delta\phi_m + \frac{1}{\epsilon}(\phi_m^2 - 1)\phi_m \Big] g \, dx \, dt.$$

Verificaremos apenas a convergência do termo não linear, pois a do primeiro termo já foi provada anteriormente e a do último segue da convergência fraca $\phi_m \to \phi$ em $L^2(0,T; H^2(\Omega))$.

Vamos, então, mostrar que $\lim\limits_{m\to+\infty} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \phi_m^3 g\, dx\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \phi^3 g\, dx\, dt.$

Como ϕ_m é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ e pela Proposição 1.1, temos

$$\|\phi_m(\cdot,t)\|_{C^{0,1/2}(\Omega)} \leq C\|\phi_m(\cdot,t)\|_{H^2(\Omega)} \leq M,$$

para quase todo $t \in [0,T]$. Assim, $\phi_m(x,t)$ é uniformemente limitada em Q. Além disso, ϕ_m possui uma subsequência convergindo forte a ϕ em $L^2(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, para $1 \leq p \leq 3$. Logo, esta subsequência de ϕ_m converge a ϕ q.t.p. em Q. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \phi_m^3 g\, dx\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \phi^3 g\, dx\, dt.$$

Portanto, concluímos que $f(\phi_m)$ converge a $f(\phi)$ fraco em $L^2(Q)$. E, então, $I_1 \to 0$.

Agora, analisaremos I_2. Temos, pela lei de energia (3.20), que $f(\phi_m)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, portanto, uniformemente limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Assim, temos

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\phi_m^2 - \phi^2) f(\phi_m) g\, dx\, dt \right| \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(Q)} \|f(\phi_m)\|_{L^2(Q)} \|\phi_m^2 - \phi^2\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

pela Desigualdade de Hölder e observando que a convergência forte $\phi_m \to \phi$ em $C([0,T];H^1(\Omega))$ e a imersão contínua $H^1(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, para $1 \leq p^* \leq 6$ implicam que $\phi_m \to \phi$ forte em $C([0,T];L^4(\Omega))$, que por sua vez, implica que $\phi_m^2 \to \phi^2$ forte em $L^2(Q)$. Segue então, que $I_2 \to 0$.

Portanto,

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \big(\phi_m^2 f(\phi_m) - \phi^2 f(\phi)\big) g\, dx\, dt \to 0, \tag{3.32}$$

quando $m \to +\infty$.

Temos, ainda, que

$$\int_0^T \int_\Omega \mathcal{A}(\phi_m) g \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \mathcal{A}(\phi) g \, dx \, dt, \tag{3.33}$$

pela definição de $\mathcal{A}$ em (3.2).

Mostremos agora que $\int_0^T \int_\Omega \mathcal{B}(\phi_m) f(\phi_m) g \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \mathcal{B}(\phi) f(\phi) g \, dx \, dt$. Pela definição de $\mathcal{B}$ em (3.3), temos

$$\int_0^T \int_\Omega \mathcal{B}(\phi_m) f(\phi_m) g \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \left[\int_\Omega \frac{\epsilon}{2} |\nabla \phi_m|^2 + \frac{1}{4\epsilon} (\phi_m^2 - 1)^2 dx \right] f(\phi_m) g \, dx \, dt.$$

Faremos a análise de um termo da soma e depois do outro, para melhor organização.

1° **Termo:** Temos que,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T \int_\Omega \left[\int_\Omega |\nabla \phi_m|^2 \right] f(\phi_m) g \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \left[\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dy \right] f(\phi) g \, dx \, dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^T \left[\int_\Omega (|\nabla \phi_m|^2 - |\nabla \phi|^2) dy \int_\Omega f(\phi_m) g \, dx \right] dt \right| \\
&+ \left| \int_0^T \left[\int_\Omega |\nabla \phi|^2 dy \int_\Omega [f(\phi_m) - f(\phi)] g \, dx \right] dt \right| \\
&\equiv I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Analisaremos primeiro I_3. Aplicando a desigualdade triangular e em seguida a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \left| \int_0^T \left[\int_\Omega |\nabla(\phi_m - \phi)| (|\nabla \phi_m| + |\nabla \phi|) dy \int_\Omega f(\phi_m) g \, dx \right] dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla(\phi_m - \phi)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_\Omega (|\nabla \phi_m| + |\nabla \phi|)^2 dy \right)^{1/2} \int_\Omega f(\phi_m) g \, dx \, dt \right| \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_\Omega |\nabla(\phi_m - \phi)|^2 dy \right)^{1/2} \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\int_\Omega (|\nabla \phi_m| + |\nabla \phi|)^2 dy \right)^{1/2} \left| \int_0^T \int_\Omega f(\phi_m) g \, dx \, dt \right|.
\end{aligned}$$

Como $\phi_m \to \phi$ forte em $C([0,T];H^1(\Omega))$ e $f(\phi_m) \to f(\phi)$ fraco em $L^2(Q)$, concluímos que $I_3 \to 0$.

Temos também,

$$I_4 = \left| \int_0^T \left[\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dy \int_\Omega [f(\phi_m) - f(\phi)] g\, dx \right] dt \right|$$
$$\leq \sup_{0\leq t\leq T} \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^2 dy \right) \left| \int_0^T \int_\Omega [f(\phi_m) - f(\phi)] g\, dx\, dt \right|.$$

Logo, $I_4 \to 0$ pois $f(\phi_m) \to f(\phi)$ fraco em $L^2(Q)$.

2° **Termo:** Temos que

$$\left| \int_0^T \left[\int_\Omega (\phi_m^2 - 1)^2 dy \int_\Omega f(\phi_m) g\, dx \right] dt - \int_0^T \left[\int_\Omega (\phi^2 - 1)^2 dy \int_\Omega f(\phi) g\, dx \right] dt \right|$$
$$\leq \left| \int_0^T \left[\int_\Omega [(\phi_m^2 - 1)^2 - (\phi^2 - 1)^2] dy \int_\Omega f(\phi_m) g\, dx \right] dt \right|$$
$$+ \left| \int_0^T \left[\int_\Omega (\phi^2 - 1)^2 dy \int_\Omega (f(\phi_m) - f(\phi)) g\, dx \right] dt \right|$$

Observe que a convergência forte $\phi_m \to \phi$ em $C([0,T];H^1(\Omega))$ e a imersão contínua $H^1(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, para $1 \leq p^* \leq 6$ implicam que $\phi_m \to \phi$ em $C([0,T];L^4(\Omega))$. Logo,

$$\left| \int_0^T \left[\int_\Omega [(\phi_m^2 - 1)^2 - (\phi^2 - 1)^2] dy \int_\Omega f(\phi_m) g\, dx \right] dt \right|$$
$$\leq \sup_{1\leq t\leq T} \int_\Omega [(\phi_m^2 - 1)^2 - (\phi^2 - 1)^2] dy \left| \int_0^T \int_\Omega f(\phi_m) g\, dx dt \right| \to 0,$$

já que $f(\phi_m) \to f(\phi)$ fraco em $L^2(Q)$.

Temos também, que

$$\left| \int_0^T \left[\int_\Omega (\phi^2 - 1)^2 dy \int_\Omega (f(\phi_m) - f(\phi)) g\, dx \right] dt \right|$$
$$\leq \sup_{1\leq t\leq T} \int_\Omega (\phi^2 - 1)^2 dy \left| \int_0^T \int_\Omega (f(\phi_m) - f(\phi)) g\, dx dt \right| \to 0,$$

pois $f(\phi_m) \to f(\phi)$ fraco em $L^2(Q)$. Logo, provamos que

$$\int_0^T \int_\Omega \mathcal{B}(\phi_m) f(\phi_m) g \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega \mathcal{B}(\phi) f(\phi) g \, dx \, dt. \tag{3.34}$$

Portanto, de (3.29)- (3.34) concluimos que $\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)$ converge a $\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)$ em $L^2(Q)$ fraco.

Convergência fraca de $\pi_m\left(\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)$.

Escolha $g \in L^2(Q)$. Temos que,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T \left\langle \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right) - \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi), g \right\rangle dt \right| &= \left| \int_0^T \left\langle \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m), \pi_m(g) \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi), g \right\rangle dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^T \left\langle \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m) - \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi), g \right\rangle dt \right| + \left| \int_0^T \left\langle \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m), \pi_m(g) - g \right\rangle dt \right|.
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)$ converge a $\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)$ em $L^2(Q)$ fraco e $\pi_m(g)$ converge forte a g em $L^2(Q)$, temos que as duas integrais acima convergem a zero quando $m \to +\infty$, implicando que

$$\int_0^T \left\langle \pi_m\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right) - \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi), g \right\rangle dt \to 0. \tag{3.35}$$

Logo, $\pi_m\left(\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_m)\right)$ converge fraco a $\dfrac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)$ em $L^2(Q)$.

Agora que já temos estas duas convergências fracas, e as convergências (3.24), podemos tomar o limite nas equações aproximadas. Mas, antes de o fazermos, vamos estudar o termo $\langle \tilde{B}(w_m, w_m + \alpha^2 A w_m), \tilde{v} \rangle$ separadamente, pois a convergência deste termo também dará algum trabalho, sendo que nos demais já podemos tomar o limite, devido às convergências citadas.

Passando o limite quando $m \to +\infty$ no termo $\displaystyle\int_0^T \langle \tilde{B}(w_m, w_m + \alpha^2 A w_m), \tilde{v} \rangle dt$.

Denotando $u_m = w_m + \alpha^2 A w_m$, temos,

$$\left|\int_0^T \langle\tilde{B}(w_m,u_m),\tilde{v}\rangle - \langle\tilde{B}(w,u),\tilde{v}\rangle dt\right| \leq \left|\int_0^T \langle\tilde{B}(w_m - w,u_m),\tilde{v}\rangle dt\right| + \left|\int_0^T \langle\tilde{B}(w,u-u_m),\tilde{v}\rangle dt\right|$$
$$\equiv J_1 + J_2.$$

Aplicando o Lema 1.10, usando o fato que $\tilde{v} = \beta(t)\delta(x)$, com $\beta \in C[0,T]$, e a Desigualdade de Hölder, respectivamente, em J_1, temos

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \int_0^T |\langle\tilde{B}(w_m - w,u_m),\tilde{v}\rangle|dt \leq C\int_0^T \|\nabla(w_m - w)\|_H\|u_m\|_H\|A\tilde{v}\|_H dt \\
&\leq C\int_0^T \|\nabla(w_m - w)\|_H\|u_m\|_H\|A\delta\|_H dt \\
&\leq C\left(\int_0^T \|\nabla(w_m - w)\|_H^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \|u_m\|_H^2 dt\right)^{1/2}\|A\delta\|_H.
\end{aligned}$$

Como u_m é uniformemente limitado em $L^2(0,T;H)$ e $w_m \to w$ em $L^2(0,T;V)$, concluímos que $J_1 \to 0$ quando $m \to +\infty$.

Temos ainda, pelos mesmos argumentos, que

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq \int_0^T |\langle\tilde{B}(w,u-u_m),\tilde{v}\rangle|dt \leq C\int_0^T \|\nabla w\|_H\|u_m - u\|_H\|A\tilde{v}\|_H dt \\
&\leq C\int_0^T \|\nabla w\|_H\|u_m - u\|_H\|A\delta\|_H dt \\
&\leq C\left(\int_0^T \|\nabla w\|_H^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \|u_m - u\|_H^2 dt\right)^{1/2}\|A\delta\|_H.
\end{aligned}$$

Como $u_m \to u$ fraco em $L^2(0,T;H)$ temos que $J_2 \to 0$.

Concluímos então, que

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^T \langle\tilde{B}(w_m,w_m+\alpha^2 Aw_m),\tilde{v}\rangle dt = \int_0^T \langle\tilde{B}(w,w+\alpha^2 Aw),\tilde{v}\rangle dt \tag{3.36}$$

Passagem ao limite quando $m \to +\infty$

Devido às convergências (3.24), $\pi_m\left(\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m)\right) \to \dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)$ fraco em $L^2(Q)$, $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_m) \to \dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)$ fraco em $L^2(Q)$ e de (3.36), podemos passar o limite em (3.25), fazendo $m \to +\infty$, obtendo

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw), \tilde{v} \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), \tilde{v} \right\rangle dt$$
$$= -\nu \int_0^T \langle A(w+\alpha^2 Aw), \tilde{v}\rangle\, dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\nabla\phi \cdot \tilde{v}\, dx\, dt, \qquad (3.37)$$

onde $\tilde{v} = \beta(t)\delta(x)$ como na página 82, e

$$\int_0^T \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tilde{\eta}\right) dt + \int_0^T (w\cdot\nabla\phi, \tilde{\eta})\, dt = -\gamma \int_0^T \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\tilde{\eta}\, dx\, dt, \qquad (3.38)$$

onde $\tilde{\eta} = \beta(t)\xi(x)$ como na página 82.

Temos ainda, que a equação (3.37) é válida para funções que são somas finitas da forma $\sum_{i=1}^{N} \beta_i(t)\delta_i(x)$, com $\beta_i(x) \in C([0,T])$ e $\delta_i(x) \in V_n$. Como o espaços das funções desta forma é denso em $L^2(0,T;V_n)$, concluímos que a equação (3.37) é válida para toda função $v(x,t) \in L^2(0,T;V_n)$.

Temos também, que a equação (3.38) é válida para funções que são somas finitas da forma $\sum_{i=1}^{N} \beta_i(t)\xi_i(x)$, com $\beta_i(x) \in C([0,T])$ e $\xi_i(x) \in N_m$. Como o espaços das funções desta forma é denso em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluímos que a equação (3.38) é válida para toda função $\eta(x,t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$.

Agora, tomando $\beta = \beta(t) \in C([0,T])$ tal que $\beta(0) = 1$ e $\beta(T) = 0$, é possível verificar que $w(x,0) = \mathbb{P}_n(w_0(x))$ e $\phi(x,0) = \phi_0(x)$.

Resta apenas mostrar que $w(\cdot,t) \in V_n$, para cada $t \in [0,T]$. De fato, temos que, para $i > n$,

$$\int_0^T \int_\Omega w_m(x,t)\zeta(t)v_i(x)\, dx\, dt = 0,$$

para toda $\zeta \in C([0,T])$. Logo, fazendo $m \to +\infty$, temos

$$\int_\Omega w(x,t)v_i(x)\,dx = 0,$$

para quase todo $t \in [0,T]$, para $i > n$. Portanto, $w(\cdot,t) \in V_n$.

Podemos também tomar o limite quando $m \to +\infty$ em (3.20), obtendo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega (|w(x,t)|^2 + \alpha^2|\nabla w(x,t)|^2)dx + E(\phi(x,t))\\
&\quad + \nu\int_0^t\int_\Omega (|\nabla w(x,t)|^2 + \alpha^2|Aw(x,t)|^2)dx\,dt + \gamma\int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\right|^2 dx\,dt\\
&\quad \le M.
\end{aligned}$$

Concluímos assim a prova deste lema. □

Seguiremos na prova de existência de solução.

De acordo com o Lema 3.1, para todo $t \in [0,T]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, o problema (3.14) possui uma solução (w_n, ϕ_n) que satisfaz

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega (|w_n(x,t)|^2 + \alpha^2|\nabla w_n(x,t)|^2)dx + E(\phi_n(x,t))\\
&\quad + \nu\int_0^t\int_\Omega (|\nabla w_n(x,t)|^2 + \alpha^2|Aw_n(x,t)|^2)dx\,dt + \gamma\int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_n)\right|^2 dx\,dt \qquad (3.39)\\
&\quad \le M,
\end{aligned}$$

onde M é uma constante independente de n. Desta estimativa, obtemos

- w_n é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;D(A))$,
- ϕ_n é uniformemente limitada em $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$,
- $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_n)$ é uniformemente limitada em $L^2(Q)$.

Para obter estimativas uniformes para as derivadas temporais w_n' e ϕ_n', usamos raciocínio análogo aquele para estimar as derivadas temporais w_m' e ϕ_m' (veja páginas 79-82), com as seguintes modificações: Para estimar w_n', para qualquer $\xi \in D(A)$, tome $v = \mathbb{P}_n\xi$ na primeira equação de (3.15); para estimar ϕ_n', tome $\eta \in L^2(\Omega)$ na segunda equação de (3.15). Estas estimativas, juntamente com as limitações uniformes de w_n, ϕ_n e $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_n)$ acima, nos dão que:

- w_n' é uniformemente limitada em $L^2(0,T;H)$,
- ϕ_n' é uniformemente limitada em $L^2(Q)$.

Pelos resultados de compacidade, Lema 1.5 e Proposição 1.1, concluímos, a menos de subsequência, que

$$\begin{aligned}
&w_n \to w \text{ fraco em } L^2(0,T;D(A)),\\
&w_n \to w \text{ forte em } L^2(0,T;V),\\
&w_n \to w \text{ forte em } C([0,T];H),\\
&\phi_n \to \phi \text{ fraco em } L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\
&\phi_n \to \phi \text{ forte em } C([0,T];H^1(\Omega)),\\
&\phi_n \to \phi \text{ forte em } L^2(0,T;W^{1,p}(\Omega)), \quad 1 \le p \le 3.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Agora, tomando $\tilde{v}(x,t) = \beta(t)\delta(x)$, $\tilde{\eta}(x,t) = \beta(t)\xi(x)$, onde $\beta \in C([0,T)]$, $\delta \in V_n$ e $\xi \in C(\Omega)$, e de acordo com as equações (3.37) e (3.38), para cada n, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(w_n + \alpha^2 A w_n), \tilde{v} \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \tilde{B}(w_n, w_n + \alpha^2 A w_n), \tilde{v} \right\rangle dt&\\
= -\nu \int_0^T \left\langle A(w_n + \alpha^2 A w_n), \tilde{v} \right\rangle dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_n)\nabla\phi_n \cdot \tilde{v}\, dx\, dt&
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \phi_n}{\partial t}, \tilde{\eta}\right) dt + \int_0^T (w_n \cdot \nabla\phi_n, \tilde{\eta})\, dt = -\gamma \int_0^T \int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_n)\tilde{\eta}\, dx\, dt.$$

Pelas convergências (3.40), da convergência fraca $\dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi_n) \to \dfrac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)$ em $L^2(Q)$ e da convergência $\displaystyle\int_0^T \langle \tilde{B}(w_n, w_n + \alpha^2 A w_n), \tilde{v}\rangle dt \to \int_0^T \langle \tilde{B}(w, w + \alpha^2 A w), \tilde{v}\rangle dt$, estas duas últimas obtidas por argumentos similares àqueles realizados na demonstração do Lema 3.1, podemos tomar o limite nestas equações acima, fazendo $n \to +\infty$, obtendo

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw),\tilde{v}\right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \tilde{B}(w,w+\alpha^2 Aw),\tilde{v}\right\rangle dt \\ = -\nu \int_0^T \left\langle A(w+\alpha^2 Aw),\tilde{v}\right\rangle\, dt + \int_0^T\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)\nabla\phi\cdot\tilde{v}\,dx\,dt,\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde $\tilde{v}(x,t)=\beta(t)\delta(x)$ como na página 93, e

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial t},\tilde{\eta}\right) dt + \int_0^T (w\cdot\nabla\phi,\tilde{\eta})\,dt = -\gamma\int_0^T\int_\Omega \frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\tilde{\eta}\,dx\,dt, \tag{3.42}$$

onde $\tilde{\eta}(x,t)=\beta(t)\xi(x)$ como na página 93.

Temos ainda, que a equação (3.41) é válida para funções que são somas finitas da forma $\sum_{i=1}^{N}\beta_i(t)\delta_i(x)$, com $\delta_i(x)\in V_n$ e $\beta_i(x)\in C([0,T])$. Como o espaços das funções desta forma é denso em $L^2(0,T;D(A))$, concluímos que a equação (3.41) é válida para toda função $v(x,t)\in L^2(0,T;D(A))$.

Temos também, que a equação (3.42) é válida para funções que são somas finitas da forma $\sum_{i=1}^{N}\beta_i(t)\xi_i(x)$, com $\beta_i(x)\in C([0,T])$ e $\xi_i(x)\in C(\Omega)$. Como o espaços das funções desta forma é denso em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluímos que a equação (3.42) é válida para toda função $\eta(x,t)\in L^2(0,T;L^2(\Omega))=L^2(Q)$.

Tomando $\beta=\beta(t)\in C([0,T])$ tal que $\beta(0)=1$ e $\beta(T)=0$, podemos mostrar que $w(x,0)=w_0(x)$ e $\phi(x,0)=\phi_0(x)$.

Podemos ainda tomar o limite, fazendo $n\to+\infty$ em (3.39), obtendo a lei de energia

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_\Omega (|w(x,t)|^2+\alpha^2|\nabla w(x,t)|^2)dx + E(\phi(x,t)) \\ &\quad + \nu\int_0^t\int_\Omega (|\nabla w(x,t)|^2+\alpha^2|Aw(x,t)|^2)dx\,dt + \gamma\int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\delta E}{\delta\phi}(\phi)\right|^2\,dx\,dt \\ &\quad \le M.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Concluindo assim a prova da existência de solução para o problema (3.5) e obtemos uma estimativa de energia para a solução deste sistema.

□

3.4 Demonstração da unicidade de solução

Nesta seção mostraremos que a solução do sistema (3.5) é única.

Faremos isto por contradição. Suponha que existam duas soluções distintas para o sistema (3.5), (w_1, ϕ_1) e (w_2, ϕ_2). Considerando $w = w_1 - w_2$ e $\phi = \phi_1 - \phi_2$, temos que (w, ϕ) é solução do seguinte problema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw) + \nu A(w + \alpha^2 Aw) + \tilde{B}(w_1, w_1 + \alpha^2 Aw_1) - \tilde{B}(w_2, w_2 + \alpha^2 Aw_2) \\
&\qquad\qquad = \mathbb{P}\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_1)\nabla\phi_1\right) - \mathbb{P}\left(\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_2)\nabla\phi_2\right), \\
&\frac{\partial \phi}{\partial t} + w_1 \cdot \nabla\phi_1 - w_2 \cdot \nabla\phi_2 = -\gamma\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_1) + \gamma\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi_2) \text{ em } Q, \\
&w(x,0) = 0, \quad \phi(x,0) = 0 \text{ em } \Omega, \\
&w(x,t) = 0, \quad \phi(x,t) = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0,T], \\
&\Delta\phi(x,t) = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0,T].
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Para simplificar a exposição dos argumentos vamos introduzir alguns termos. Defina

$$G(\phi) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(k\epsilon|\Delta\phi|^2 + \frac{k}{\epsilon}|\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\right)dx, \tag{3.45}$$

observando que $\frac{1}{C}\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)} \le G(\phi) \le C\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)}$.

Defina também

$$M(\phi) = \frac{\delta G}{\delta \phi}(\phi) = k\epsilon\Delta^2\phi - \frac{k}{\epsilon}\Delta\phi + \phi, \tag{3.46}$$

$$N(\phi) = \frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi) - M(\phi), \tag{3.47}$$

recordando que $\frac{\delta E}{\delta \phi}(\phi)$ está definido em (3.9).

Com esta notação, o sistema (3.44) é reescrito da forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(w + \alpha^2 Aw) + \nu A(w + \alpha^2 Aw) + \tilde{B}(w_1, w_1 + \alpha^2 Aw_1) - \tilde{B}(w_2, w_2 + \alpha^2 Aw_2) \\
&\qquad\qquad = \mathbb{P}\left(\big(M(\phi_1) + N(\phi_1)\big)\nabla\phi_1\right) - \mathbb{P}\left(\big(M(\phi_2) + N(\phi_2)\big)\nabla\phi_2\right), \\
&\frac{\partial \phi}{\partial t} + w_1 \cdot \nabla\phi_1 - w_2 \cdot \nabla\phi_2 = -\gamma\big(M(\phi) + N(\phi_1) - N(\phi_2)\big), \\
&w(x,0) = 0, \quad \phi(x,0) = 0 \text{ em } \Omega, \\
&w(x,t) = 0, \quad \phi(x,t) = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0,T], \\
&\Delta\phi(x,t) = 0 \text{ em } \partial\Omega \times [0,T].
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Calculando o produto interno da primeira equação do sistema acima com w, e lembrando que o projetor $\mathbb{P}$ é autoadjunto e $w \in D(A) \subset H$ (a imagem de $\mathbb{P}$), temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(w+\alpha^2 Aw)w\,dx + \nu\int_\Omega A(w+\alpha^2 Aw)w\,dx \\
&\quad = -\big(\tilde{B}(w_1, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) + \big(\tilde{B}(w_2, w_2+\alpha^2 Aw_2), w\big) \\
&\quad + \int_\Omega \big(M(\phi_1)+N(\phi_1)\big)\nabla\phi_1 w\,dx - \int_\Omega \big(M(\phi_2)+N(\phi_2)\big)\nabla\phi_2 w\,dx
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Observe que, as propriedades de $\tilde{B}$ apresentadas no Lema 1.10 implicam que

$$\begin{aligned}
&\big(\tilde{B}(w_1, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) - \big(\tilde{B}(w_2, w_2+\alpha^2 Aw_2), w\big) \\
&\quad = \big(\tilde{B}(w_1, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) - \big(\tilde{B}(w_2, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) \\
&\quad + \big(\tilde{B}(w_2, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) - \big(\tilde{B}(w_2, w_2+\alpha^2 Aw_2), w\big) \\
&\quad = \big(\tilde{B}(w, w_1+\alpha^2 Aw_1), w\big) + \big(\tilde{B}(w_2, w+\alpha^2 Aw), w\big) \\
&\quad = \big(\tilde{B}(w_2, w+\alpha^2 Aw), w\big) \\
&\quad = -\big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big).
\end{aligned}$$

Logo, fazendo esta alteração na equação (3.49) e integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx + \nu\int_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx = \big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big) \\
&\quad + \int_\Omega \big(M(\phi_1)\nabla\phi_1 - M(\phi_2)\nabla\phi_2\big)w\,dx + \int_\Omega \big(N(\phi_1)\nabla\phi_1 - N(\phi_2)\nabla\phi_2\big)w\,dx.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Multiplicando a segunda equação do sistema (3.48) por $M(\phi)$ e integrando em Ω, temos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}M(\phi)\,dx + \int_\Omega \big(w_1\cdot\nabla\phi_1 - w_2\cdot\nabla\phi_2\big)M(\phi)\,dx = -\gamma\int_\Omega |M(\phi)|^2\,dx \\
&\quad -\gamma\int_\Omega \big(N(\phi_1)-N(\phi_2)\big)M(\phi)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Observando que $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial t}M(\phi)\,dx = \frac{d}{dt}G(\phi)$, reescrevemos a equação acima da forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}G(\phi) + \gamma\int_\Omega |M(\phi)|^2\,dx = -\int_\Omega \big(w_1\cdot\nabla\phi_1 - w_2\cdot\nabla\phi_2\big)M(\phi)\,dx \\
&\quad -\gamma\int_\Omega \big(N(\phi_1)-N(\phi_2)\big)M(\phi)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Agora, somando as equações (3.50) e (3.52), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}(|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx + G(\phi)\right) + \gamma\int_\Omega |M(\phi)|^2\,dx + \nu\int_\Omega (|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx \\
&\quad = \big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big) + \int_\Omega \big(M(\phi_1)\nabla\phi_1 - M(\phi_2)\nabla\phi_2\big)w\,dx \\
&\quad - \int_\Omega \big(w_1\cdot\nabla\phi_1 - w_2\cdot\nabla\phi_2\big)M(\phi)\,dx + \int_\Omega \big(N(\phi_1)\nabla\phi_1 - N(\phi_2)\nabla\phi_2\big)w\,dx \\
&\quad -\gamma\int_\Omega \big(N(\phi_1)-N(\phi_2)\big)M(\phi)\,dx
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Vamos estimar cada um dos termos que aparecem após o sinal de igualdade.

Para estimar o termo $\big|\big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big)\big|$ usamos o Lema 1.10, e a Desigualdade de Poincaré, obtendo

$$\begin{aligned}
&\big|\big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big)\big| \\
&\qquad \le C\big(\|w\|_H^{1/2}\,\|\nabla w\|_H^{1/2}\,\|w+\alpha^2 Aw\|_H\,\|Aw_2\|_H \\
&\qquad + \|w+\alpha^2 Aw\|_H\,\|\nabla w\|_H\,\|\nabla w_2\|_H^{1/2}\,\|Aw_2\|_H^{1/2}\big) \\
&\qquad \le C\|\nabla w\|_H\,\|w+\alpha^2 Aw\|_H\,\|Aw_2\|_H.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Young, obtemos

$$\big|\big(\tilde{B}(w, w+\alpha^2 Aw), w_2\big)\big| \le C\big(c_\varepsilon\|\nabla w\|_H^2\,\|Aw_2\|_H^2 + \varepsilon\|w+\alpha^2 Aw\|_H^2\big). \tag{3.54}$$

Temos também, somando e subtraindo termos,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big(M(\phi_1)\nabla\phi_1 - M(\phi_2)\nabla\phi_2\big)w\,dx - \int_\Omega \big(w_1\cdot\nabla\phi_1 - w_2\cdot\nabla\phi_2\big)M(\phi)\,dx \\
&\qquad = \int_\Omega \Big[\big(M(\phi_1)\nabla\phi + M(\phi)\nabla\phi_2\big)w - \big(w_1\cdot\nabla\phi - w\cdot\nabla\phi_2\big)M(\phi)\Big]\,dx \\
&\qquad = \int_\Omega M(\phi_1)\nabla\phi w\,dx - \int_\Omega w_1\cdot\nabla\phi M(\phi)\,dx \\
&\qquad \equiv J_1 + J_2.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Estimando J_1, temos,

$$\begin{aligned}|J_1| &\leq \|M(\phi_1)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon\|w\|^2_{L^4(\Omega)} + c_\varepsilon \|M(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|^2_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon\|w\|^2_V + c_\varepsilon\|M(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.56}$$

onde usamos as Desigualdades de Hölder e Young, respectivamente, as Imersões Contínuas $V \subset L^4(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, e $\|\nabla\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}$.

Pelos mesmos argumentos, estimamos J_2:

$$\begin{aligned}|J_2| &\leq \|w_1\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^4(\Omega)} \|M(\phi)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon\|M(\phi)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_\varepsilon\|w_1\|^2_V\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Temos também,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big(N(\phi_1)\nabla\phi_1 - N(\phi_2)\nabla\phi_2\big)w\,dx &= \int_\Omega N(\phi_1)\nabla\phi w\,dx + \int_\Omega \big(N(\phi_1) - N(\phi_2)\big)\nabla\phi_2 w\,dx \\ &\equiv K_1 + K_2, \end{aligned} \tag{3.58}$$

com

$$\begin{aligned}|K_1| = \left|\int_\Omega N(\phi_1)\nabla\phi w\,dx\right| &\leq \|N(\phi_1)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon\|w\|^2_V + c_\varepsilon\|N(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)} \|\phi\|^2_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

devido às Desigualdades de Hölder e Young, respectivamente, às imersões contínuas $V \subset L^4(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, e $\|\nabla\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}$.

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}|K_2| &= \left|\int_\Omega \big(N(\phi_1) - N(\phi_2)\big)\nabla\phi_2 w\,dx\right| \leq \|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi_2\|_{L^4(\Omega)} \|w\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \varepsilon\|w\|^2_V + c_\varepsilon\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|^2_{L^2(\Omega)} \|\phi_2\|^2_{H^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Por estes mesmos argumentos, obtemos ainda,

$$\int_\Omega M(\phi)\big(N(\phi_1) - N(\phi_2)\big)dx \le \|M(\phi)\|_{L^2(\Omega)} \|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\le \varepsilon\|M(\phi)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_\varepsilon\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Usaremos a seguinte afirmação, que será provada posteriormente:

Afirmação 3.1. $\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\phi_1 - \phi_2\|_{H^2(\Omega)} = C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}$.

Por esta Afirmação e da última estimativa acima, obtemos

$$\int_\Omega M(\phi)\big(N(\phi_1) - N(\phi_2)\big)dx \le \varepsilon\|M(\phi)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_\varepsilon\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{3.61}$$

Das estimativas (3.54)-(3.61), concluímos

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}(|w|^2 + \alpha^2|\nabla w|^2)\,dx + G(\phi)\right) + \gamma\int_\Omega |M(\phi)|^2\,dx + \nu\int_\Omega (|\nabla w|^2 + \alpha^2|Aw|^2)\,dx$$
$$\le C\big(c_\varepsilon\|\nabla w\|^2_H\,\|Aw_2\|^2_H + \varepsilon\|w + \alpha^2 Aw\|^2_H\big) + \varepsilon\|w\|^2_V + c_\varepsilon\|M(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)}\|\nabla\phi\|^2_{H^2(\Omega)}$$
$$+ \varepsilon\|M(\phi)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_\varepsilon\|w_1\|^2_V\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)} + \varepsilon\|w\|^2_V + c_\varepsilon\|N(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)}$$
$$+ \varepsilon\|w\|^2_V + c_\varepsilon\|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\|\phi_2\|^2_{H^2(\Omega)} + \varepsilon\|M(\phi)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_\varepsilon\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Relembrando que $\|\phi\|^2_{H^2(\Omega)} \le CG(\phi)$ (veja comentário abaixo da equação (3.45)) e usando novamente a Afirmação 3.1, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}(|w|^2 + \alpha^2|\nabla w|^2)\,dx + G(\phi)\right) + \gamma\int_\Omega |M(\phi)|^2\,dx + \nu\int_\Omega (|\nabla w|^2 + \alpha^2|Aw|^2)\,dx$$
$$\le C\|\nabla w\|^2_H\,\|Aw_2\|^2_H + C\Big(\|M(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w_1\|^2_V + \|N(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\phi_2\|^2_{H^2(\Omega)} + 1\Big)G(\phi)$$
$$+ \varepsilon\Big(\|w + \alpha^2 Aw\|^2_H + \|w\|^2_V + \|M(\phi)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Fixando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}(|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+G(\phi)\right)&+\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |M(\phi)|^2\,dx+\frac{\nu}{2}\int_\Omega(|\nabla w|^2+\alpha^2|Aw|^2)\,dx\\
&\leq C\|\nabla w\|_H^2\,\|Aw_2\|_H^2\\
&+C\Big(\|M(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_1\|_V^2+\|N(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\phi_2\|^2_{H^2(\Omega)}+1\Big)G(\phi) \qquad (3.62)\\
&\leq C\left(\int_\Omega \frac{1}{2}(|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+G(\phi)\right)\times\\
&\qquad\Big(\|Aw_2\|_H^2+\|M(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|w_1\|_V^2+\|N(\phi_1)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\phi_2\|^2_{H^2(\Omega)}+1\Big).
\end{aligned}
$$

Pela Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{1}{2}(|w(\cdot,t)|^2+\alpha^2|\nabla w(\cdot,t)|^2)\,dx+G(\phi(x,t))\\
&\qquad\leq C\Big(\|w(x,0)\|_H^2+\alpha^2\|\nabla w(x,0)\|_H^2+G(\phi(x,0))\Big),
\end{aligned}
$$

para todo $t\in[0,T]$, onde
$C=C(\|w_2\|_{L^2(0,T;D(A))},\,\|\phi_1\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))},\,\|w_1\|_{L^2(0,T;V)},\,\|\phi_2\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))},\,T)$.

Como $w(x,0)=0$ e $\phi(x,0)=0$, concluímos que

$$
\int_\Omega \frac{1}{2}(|w|^2+\alpha^2|\nabla w|^2)\,dx+G(\phi)=0, \tag{3.63}
$$

onde $G(\phi)$ está definida em (3.45).

Desta forma obtemos uma soma de termos positivos se anulando. O que nos mostra que os termos devem ser nulos, ou seja, $w=0$ e $\phi=0$. Portanto $w_1=w_2$ e $\phi_1=\phi_2$, concluindo assim a prova de que a solução do problema (3.5) é única.

Prova da Afirmação 3.1

Faremos agora a demonstração da Afirmação 3.1 usada na demonstração da unicidade de solução.

De acordo com as definições de M e N em (3.46) e (3.47), respectivamente, temos que

$$
N(\phi)=-\frac{k}{\epsilon}\Delta\phi^3+\frac{2k}{\epsilon}\Delta\phi+\frac{3k}{\epsilon^2}\phi^2 f(\phi)-\frac{k}{\epsilon^2}f(\phi)-\phi+M_1(\mathcal{A}(\phi)-\tilde{\alpha})+M_2(\mathcal{B}(\phi)-\beta)f(\phi).
$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|N(\phi_1) - N(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)} \le C\big(&\|\Delta\phi_1^3 - \Delta\phi_2^3\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &+\|\phi_1^2 f(\phi_1) - \phi_2^2 f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(\phi_1) - f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &+\|A(\phi)\|_{L^2(\Omega)} + \|B(\phi_1)f(\phi_1) - B(\phi_2)f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)}\big). \end{aligned} \tag{3.64}$$

A estimativa de energia obtida na prova da existência (3.43) implica que $\phi_i \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$, $i = 1,2$. Assim, para $i,j = 1,2$, temos

$$\begin{aligned} &\|\phi_i\|_{L^\infty(Q)} \le M, \\ &\|\nabla(\phi_i\phi_j)\|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))} \le M, \\ &\|\Delta(\phi_i\phi_j)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le M, \end{aligned}$$

para uma constante $M > 0$.

Para demonstrar a Afirmação 3.1, vamos estimar individualmente cada termo de (3.64). Denotaremos $\tilde{\phi} = \phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2$.

Para o primeiro termo de (3.64), temos:

$$\begin{aligned} \|\Delta\phi_1^3 - \Delta\phi_2^3\|_{L^2(\Omega)} &= \|\Delta(\phi_1^3 - \phi_2^3)\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta((\phi_1 - \phi_2)\tilde{\phi})\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\Delta(\phi)\tilde{\phi} + \phi\Delta\tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|\Delta(\phi)\tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\Delta\tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le 2\|\nabla\phi\cdot\nabla\tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.65}$$

onde usamos integração por partes e que $\tilde{\phi} \in L^\infty(0,T;L^6(\Omega))$.

Estimando o terceiro termo de (3.64), temos:

$$\begin{aligned} \|\phi_1^2 f(\phi_1) - \phi_2^2 f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)} &\le \|(\phi_1^2 - \phi_2^2) f(\phi_1)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_2^2(f(\phi_1) - f(\phi_2))\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|f(\phi_1)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\phi(\phi_1 + \phi_2)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_2\|_{L^\infty(Q)}\|f(\phi_1) - f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C\big(\|\phi_1\|_{L^\infty(Q)} + \|\phi_2\|_{L^\infty(Q)}\big)\|\phi\|_{L^2(\Omega)} + C\|\phi\|_{H^2(\Omega)} \\ &\le C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.66}$$

Para o quarto termo, temos:

$$
\begin{aligned}
\|f(\phi_1)-f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)} &= \|-\epsilon\Delta\phi_1+\tfrac{1}{\epsilon}(\phi_1^3-\phi_1)+\epsilon\Delta\phi_2-\tfrac{1}{\epsilon}(\phi_2^3-\phi_2)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq C\Big(\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi_1^3-\phi_2^3\|_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\leq C\Big(\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi\tilde{\phi}\|_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\leq C\Big(\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\leq C\Big(\|\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|_{L^2(\Omega)}+\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\leq C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{3.67}
$$

Como,

$$
\begin{aligned}
|B(\phi_1)-B(\phi_2)| &= \left|\int_\Omega \big[\frac{\epsilon}{2}|\nabla\phi_1|^2+\frac{1}{4\epsilon}(\phi_1^2-1)^2-\frac{\epsilon}{2}|\nabla\phi_2|^2-\frac{1}{4\epsilon}(\phi_2^2-1)^2\big]\,dx\right|\\
&= \left|\int_\Omega \big[\frac{\epsilon}{2}|\nabla\phi_1|^2-\nabla\phi_2|^2+\frac{1}{4\epsilon}(\phi_1^2+\phi_2^2-2)(\phi_1+\phi_2)\phi\big]\,dx\right|\\
&= \left|\int_\Omega \big[\frac{\epsilon}{2}|(\nabla\phi_1|+\nabla\phi_2|)(\nabla\phi_1|-\nabla\phi_2|)+\frac{1}{4\epsilon}(\phi_1^2+\phi_2^2-2)(\phi_1+\phi_2)\phi\big]\,dx\right|\\
&\leq C\|\nabla(\phi_1+\phi_2)\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}+C\left|\int_\Omega(\phi_1^2+\phi_2^2-2)(\phi_1+\phi_2)\phi\,dx\right|\\
&\leq C\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}+C\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\\
&\leq C\|\phi\|_{H^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

segue a estimativa para o último termo de (3.64):

$$
\begin{aligned}
&\|B(\phi_1)f(\phi_1)-B(\phi_2)f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad\leq \|B(\phi_1)(f(\phi_1)-f(\phi_2))\|_{L^2(\Omega)}+\|(B(\phi_1)-(B(\phi_2))f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad\leq \|f(\phi_1)-f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)}+|B(\phi_1)-B(\phi_2)|\|f(\phi_2)\|_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad\leq C\|\phi\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Substituindo as estimativas (3.65)-(3.68), em (3.64), concluímos a prova da Afirmação 3.1.

Conclusão

Neste trabalho analisamos dois sistemas de equações diferenciais parciais não lineares de evolução, associados à modelos de interação fluido-estrutura; esses sistemas foram obtidos utilizando as equações α-Navier-Stokes e a metodologia do campo de fases, em domínio $Q = \Omega \times (0, T)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado e com fronteira suave, e $0 < T < +\infty$ o tempo máximo de interesse.

O primeiro sistema estudado modela o processo de mudanças de fase (solidificação e fusão) considerando os processos de condução-convecção e o segundo sistema modela a dinâmica de vesículas situadas em um fluido viscoso e incompressível.

Para ambos os sistemas provamos a existência de soluções e a unicidade das soluções encontradas.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A. and Fournier, J. J. F. *Sobolev Spaces*. Second Edition. Academic Press, 2003.

[2] Anderson, D.M., McFadden, G.B. and Wheeler, A.A. *Diffuse-interface methods in fluid dynamics*, Annu. Rev. Fluid. Mech. 30, pp. 139-165, 1998.

[3] Abkarian, M., Lartigue, C. and Viallat, A. *Tank Treading and Unbinding of Deformable Vesicles in Shear Flow: Determination of the Lift Force*. Phys. Rev. Lett., 88, 2002, 068103.

[4] Anderson, D.M., McFadden, G.B. and Wheeler, A.A. *A phase field model of solidification with convection*, Phys. D 135, pp. 175-194, 2000.

[5] Beauncourt, J., Rioual, F., Sion, T., Biben, T. and Misbah, C. *Steady to Unsteady Dynamics of a Vesicle in a flow*. Phys. Rev. E, 69, 2004, 011906.

[6] Beckermann, C., Diepers, H.J., Steinbach, I., Karma, A. and Tong, X. *Modeling melt convection in phase-field simulations of solidification*, J. Comp. Phys. 154, pp. 468-496, 1999.

[7] Beckermann, C. and Sun, Y. *Diffuse interface modelng of two-phase flows based on averaging: mass and momentum equations*, Phys. D 198,pp. 281-308, 2004.

[8] Biben, T., Kassner, K. and Misbah, C. *Phase Field Approach to Three-dimensional Vesicle Dynamics*. Physical Rev. E, 72, 2005, 041921.

[9] Bjorland, C., Schonbek, M. E. *On questions of decay and existence for the viscous Camassa-Holm equations*. Ann. I. H. Poincaré. AN 25, pp. 907-936, 2008.

[10] Blanc, Ph., Gasser, L. and Rappaz, J. *Existence for a stationary model of binary alloy solidification*, Math. Modelling Num. Anal. Vol. 29, 06, pp. 687-699, 1995.

[11] Boldrini, J.L. and Planas, G. *A tridimensional phase-field model with convection for phase change of an alloy*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 13, n. 2, p. 429-450, 2005.

[12] Boldrini, J.L. and Vaz, C. *A mathematical analysis of a isothermal phase-field model of a binary alloy*, Anais do 59º Seminário Brasileiro de Análise, 2004.

[13] Boldrini, J.L. and Vaz, C. *Existence and regularity of solutions of a phase field model for solidification with convection of pure materials in two dimension*, Electron. J. Diff. Eqns., vol. 2003, No. 109, pp. 1-25, 2003.

[14] Brézis, H. *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editoral, S.A., Madrid, 1984.

[15] Caginalp, G. *An Analysis of phase field model of a free boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal. 92, pp. 205-245, 1986.

[16] Caginalp, G. *Stefan and Hele-Shaw type model as asymptotic limits of the phase-field equations*, Phys. Rev. A, vol 39, No. 11, pp. 5887-5896, 1989.

[17] Caginalp, G. *The dinamic of a conserved phase-field system: Stefan-like, Hele-Shaw and Cahn-Hilliard Models as asymptotic limits*, IMA J. Appl. Math. 44, pp. 77-94, 1990.

[18] Caginalp, G. and Jones, J. *A derivation and analysis of phase field models of thermal alloy*, Annals of Phys, 237, pp. 66-107, 1995.

[19] Çağlar, A. *Convergence analysis of the Navier-Stokes alpha model*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Vol. 26, Issue 5, pp. 1154-1167, 2010.

[20] Charach, Ch. and Fife, P.C. *Phase-field models of solidification in binary alloy: capillarity and solute trapping effects*, J. Crystal Growth, 198/199, pp. 1267-1274, 1999.

[21] Chen, S. Foias, C. Holm, D. D., Olson, E. Titi E. S. and Wynne, S. *A connection between Camassa-Holm equations and turbulent flows in channels and pipes*. Phys. Fluids 11, pp. 2343-2353, 1999.

[22] Chen, S. Foias, C. Holm, D. D., Olson, E. Titi E. S. and Wynne, S. *The Camassa-Holm equations and turbulence*. Physica D 133, pp. 49-65, 1999.

[23] Colli, P., Gentil, G. and Giorgi, C. *Nonlinear systems describing phase transition models compatible with thermodynamics*, Math. Models. Methods. Appl. Sci., vol 9, 7, pp. 1015-1037, 1999.

[24] Domaradzki, J. A. and Holm, D. D. *Navier-Stokes-alpha Model: LES equations with nonlinear dispersion.* Special LES volume of ERCOFTAC Bulletin, Modern Simulations Strategies for turbulent flow. B. J. Geurts, editor, Edwards Publising, 2001.

[25] Du, Q., Li, M., Liu, C. *Analysis of a phase field Navier-Stokes vesicle-fluid interation model*. Discrete Contin, Dyn. Syst. Ser. B, 8 (3), p. 539-556, 2007 (eletronic).

[26] Du, Q. Liu, C., Ryhan, R. and Wang, X. *A phase field approach in the numerical study of the elastic bending energy for vesicle membranes*. Journal of Computational Physics, 198, pp. 450-468, 2004.

[27] Du, Q., Liu, C., Ryhan, R. and Wang, X. *A Phase Field Formulation of the Willmore Problem*. Nonlinearity, 18, pp. 1249-1267, 2005.

[28] Du, Q., Liu, C., Ryhan, R. and Wang, X. *Modeling the Spontaneous Curvature Effects in Static Cell Membrane Deformations by a Phase Field Formulation*. Communications in Pure and Applied Analysis, 4, pp.537-548, 2005.

[29] Du, Q., Liu, C., Ryhan, R. and Wang, X. *Retrieving Topological Information for Phase Field Models*. SIAM Journal on Applied Mathematics, 65, pp. 1913-1932, 2005.

[30] Du, Q., Liu, C. and Wang, X. *Simulating the deformation of vesicle membranes under elastic bending energy in three dimensions*. Journal of Computational Physics, 212, pp. 757-777, 2006.

[31] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, vol.9. American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.

[32] Fife, P.C. *Models for phase separation and their mathematic*, EJDE, vol. 2000, No. 48, pp. 1-26, 2000.

[33] Fix, G. J. *Phase field Methods for free boundary Problems*, in: A. Fasano e M. Primicerio (Editors). Free Boundary Problems: Theory and Applications. Research Notes in Mathematics, 78. Pitman, pp. 580-589, 1983.

[34] Foias, C., Holm, D. D. and Titi, E. S. *The Tree Dimensional Viscous Camassa-Holm Equations and Their Relation to the Navier-Stokes Equations and Turbulence Theory.* Jornal of Dynamics and Differential Equations, vol. 14, n° 1, pp. 1-35, 2002.

[35] Foias, C., Holm, D. D. and Titi, E. S. *The Navier-Stokes alpha Model and Fluid Turbulence*. Phys. D, 152/153, pp. 505-519, 2001.

[36] Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley, 2^a Edição, New York, 1999.

[37] Friedman, A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice Hall, New York, 1964.

[38] Geurts, B. J. and Holm, D. D. *Leray and LANS-alpha modeling of turbulent mixing.* J. Turbulence 7, pp. 1-33, 2006.

[39] Geurts, B. J. and Holm, D. D. *Regularization modeling for large eddy simulation.* Phys. Fluid 15, L13-L16, 2003.

[40] Guermond, L., Oden, J. T. and Prudhomme, S. *An Interpretation of the Navier-Stokes alpha Model as a frame-indifferent Leray Regularization*. Phys. D, 177, pp. 23-30, 2003.

[41] Helfrich, W. *Elastic properties of lipid bilayers: theory and possible experiments*. Z. Natur- forsch. C, 28, 693-703, 1973.

[42] Hoffman, K.H. and Jiang, L. *Optimal Control a phase field model for solidification*, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 13 (1 & 2), pp. 11-27, 1992.

[43] Holm, D. d., Marsden, J. E., Ratiu, T. S. *Euler-Poicaré equations and semidirect products with applications to continiuum theories*. Adv. in Math. 137, pp. 1-80.

[44] Klein, O. *A semidiscrete scheme for a Penrose-Fife system and some Stefan problem* R^3, Adv. Math. Sci. Appl., 7(1), pp. 491-523, 1997.

[45] Klein, O. *A class of time discretization schemes for a phase-field system of Penrose-Fife type*, M2AN, vol 33, No. 6, pp. 1261-1292, 1999.

[46] Kobayshi, R. *Modeling and numerical simulation of dentritic crystal growth*, Phys. D vol. 63, pp. 410-479, 1993.

[47] Ladyzhenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. American Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[48] Langer, J. S. in: G. Grinstein, G. Mazenko (Eds.). *Directions in Condensed Matter Phisics*. World Scientific, Philadelphia, p.165, 1986.

[49] Laurençot, Ph. *Weak solutions to a phase-field model with non-constant thermal conductivity*, Quart. Appl. Math., vol LV, No. 4, pp. 739-760, 1997.

[50] Laurençot, Ph. *Solutions to a Penrose-Fife model of phase-field type*, J. Math. Anal. Appl., 185, pp. 262-274, 1994.

[51] Leray, J. *Essay sur les mouvements plans d'une liquide visqueux que limitent des parois*. J. Math Pure Appl. Paris Ser IX, 13, pp. 331-418, 1934.

[52] Leray, J. *Sur les mouviments d'une liquide visqueux emplissant l'espace*. Acta Math. 63, pp. 193-248, 1934.

[53] Lions, J. L. *Control of Distributed Singular Systems*. Gauthier-Villars, Paris, 1985.

[54] Lions, P.L. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, vol 1, Clarendon Press Oxford, 1996.

[55] Lipowsky, R. *The morphology of lipid membranes*. Current Opinion in Structural Biology. 5, pp. 531-540, 1995.

[56] Liu, Y., Takahashi, T., Tucsnak, M. *Strong solutions for a Phase-Field Navier-Stokes Vesicle-Fluid Interation Model*, J. Math. Fluid Mech. 14, pp. 177-195, 2012.

[57] McFadden, G.B., Wheeler, A.A., Braun, R.J. and Coriell, S.R. *Phase-field models for anisotropic interfaces*, Phys. Review E, vol. 48, No. 3, pp. 2016-2024, 1993.

[58] Moroşanu,C. and Motreanu,D. *A generalized phase-field system*. J. Math. Anal. Appl., vol. 273, pp. 515-540, 1999.

[59] Ou-Yang, Z., Liu, J. and Xie,Y. *Geometric Methods in the Elastic Theory of Membranes in Liquid Crystal Phases*. World Scientific, Singapore, 1999.

[60] O. Penrose and P.C. Fife. *Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetic phase transitions*. Phys D, vol **43**(1990), pp. 44-62.

[61] O. Penrose and P.C. Fife. *On the relation between the standard phase-field model and a thermodynamically consistent phase-field model*, Phys. D, vol. 69, 1993, pp. 107-113.

[62] Planas, G. and Boldrini, J.L. *Weak solutions of a phase-field model with convection for solidification of an alloy. Communications in Applied Analysis*, v. 8, n. 4, p. 503-532, 2004.

[63] Planas, G., Boldrini, J. L. *A bidimensional phase-field model with convection for change phase of an alloy*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 303, n. 2, pp. 669-687, 2005.

[64] Seifert, U. *Configurations of fluid membranes and Vesicles*. Advances in Physics,vol. 46, pp. 13-137, 1997.

[65] Simon, J. *Compact Sets in the Space* $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura et Applicata (IV), vol. CXLVI, pp. 65-96, 1987.

[66] Temam, R. *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*. North-Holland Publishing Company, 1977.

[67] Wheeler, A.A., Murray, B.T. and Shafer, R.J. *Computation of dentrites using phase-field model*, Phys. D, 66, pp. 243-262, 1993.

[68] Wheeler, A.A., Boettinger, W.J. and McFadden, G.B. *Phase-field model of solute trapping during solidification*, Phys. Rev. E, vol. 47, No. 3, pp. 1893-1909, 1993.

[69] Yue, P., Ferig, J.J., Liu, C. and Shen, J. *A diffuse-interface method of simulating two-phase flows of complex fluids*, J. Fluid. Mech., vol 515, pp. 293-317, 2004.