



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

ADSON MOTA ROCHA

**Análise e Aproximação de Soluções de uma  
Classe de Equações Integrais de Fredholm Não  
Lineares**

Campinas

2017

Adson Mota Rocha

## **Análise e Aproximação de Soluções de uma Classe de Equações Integrais de Fredholm Não Lineares**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Saulo Pomponet Oliveira

Coorientador: Maicon Ribeiro Correa

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Adson Mota Rocha e orientada pelo Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira.

Campinas

2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES

**ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-1200-9032>

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R582a Rocha, Adson Mota, 1979-  
Análise e aproximação de soluções de uma classe de equações integrais de Fredholm não lineares / Adson Mota Rocha. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Saulo Pomponet Oliveira.  
Coorientador: Maicon Ribeiro Correa.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fredholm, Equações integrais de. 2. Métodos de colocação. 3. Equações integrais - Soluções numéricas. 4. Métodos iterativos (Matemática). 5. Teoria do ponto fixo. I. Oliveira, Saulo Pomponet. II. Correa, Maicon Ribeiro, 1979-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

#### Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Analysis and approximation of solutions to a class of nonlinear Fredholm integral equations

**Palavras-chave em inglês:**

Fredholm integral equations

Collocation methods

Integral equations - Numerical solutions

Iterative methods (Mathematics)

Fixed point theory

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutor em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Saulo Pomponet Oliveira [Orientador]

Edmundo Capelas de Oliveira

Gabriela Del Valle Planas

Daniel Gregorio Alfaro Vigo

Suzete Maria Silva Afonso

**Data de defesa:** 10-07-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 10 de julho de 2017 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). SAULO POMPONET OLIVEIRA**

**Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA**

**Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS**

**Prof(a). Dr(a). DANIEL GREGORIO ALFARO VIGO**

**Prof(a). Dr(a). SUZETE MARIA SILVA AFONSO**

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

*A minha esposa Fernanda e meu filho Felipe.*

# Agradecimentos

A Deus pela vida e por ter me dado saúde, perseverança e paz nesta empreitada, e acima de tudo por ter colocado no meu caminho amigos abençoados e uma família companheira e adorável.

As instituições de ensino que estive vinculado neste período de doutoramento: Unicamp que me acolheu e tive oportunidade de ser discente de um centro de excelência e a UFRB, em especial ao Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, ao qual me proporcionou o incentivo e oportunidade que para aprofundar os meus estudos.

Agradeço também as seguintes pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para esta fase na minha vida. No âmbito acadêmico agradeço:

- Ao professor Saulo Oliveira, à sua orientação, sua dedicação, seus conselhos e principalmente sua amizade;
- A professora Maria Cristina, à sua orientação, que foi fundamental no início desta jornada acadêmica e a sua disposição;
- Ao professor Maicon Correa, à sua orientação, incentivo, amizade e empenho;
- Aos colegas de trabalho da área de matemática e estatística da UFRB, que acreditaram e me acompanharam sempre passando otimismo para este feito, em especial ao colega Juarez Azevedo;
- Aos professores Maria A. D. Ehrhardt (Cheti), Márcia A. G. Rugiero, Samuel R. de Oliveira e Petrônio Pulino, que muito contribuíram para minha formação profissional e científica com seus ensinamentos acadêmicos e postura profissional;
- Ao IMECC, por ter uma excelente estrutura de trabalho, em especial aos seus funcionários pela presteza no atendimento;
- A Banca Examinadora pelas sugestões, críticas, pela paciência e pela compreensão em avaliar o nosso trabalho.
- A CAPES, pelo apoio financeiro.

No âmbito pessoal, serei eternamente grato:

- A minha esposa Fernanda, pelas palavras, carinho, fraternidade, dedicação, compreensão e por ter me acompanhado e apoiado em toda esta jornada;
- A meu filho Felipe, que mesmo tão pequeno, mostrava-me o maior ensinamento de um amor incomensurável;
- Aos meus pais Antonio e Margarida (*in memoriam*), pelos ensinamentos iniciais que levou-me até aqui.
- Aos meus irmãos Alex, Nete e Cesar, por compartilharem comigo dificuldades e sonhos;
- Aos meus sogros Zélia e Fernando, pela compreensão, amizade e acolhimento;
- Aos amigos obtidos nesta jornada, em especial Lino Marcos, Valter Soares e Marcos pelos companheirismos e que conjuntamente crescemos pessoalmente e profissionalmente, e se tornaram novos irmãos de coração.

# Resumo

Nesta tese são estudadas as equações integro-funcionais, uma classe de equações integrais de Fredholm não lineares de segunda espécie, tanto do ponto de vista analítico quanto numérico. No que diz respeito aos aspectos analíticos, apresentamos condições que garantam existência e unicidade de soluções destas equações integrais sobre os espaços  $L^p([a, b])$ , com  $p \geq 1$ . As principais bases para obter os resultados de existência foram teoremas do ponto fixo, técnicas de medida de não compacidade e propriedades de operadores compactos. Em relação à aproximação numérica, consideramos uma aproximação para a solução da equação integral não linear pelo método da colocação com a base de funções contínuas por partes. Regras de integração numérica são utilizadas para discretizar as integrais presentes no sistema algébrico resultante. Este sistema é resolvido iterativamente com o algoritmo de Picard. Demonstramos a convergência do método da colocação, assim como determinamos a ordem de convergência. Por fim, através de experimentos numéricos, procuramos ilustrar os resultados preditos pela análise.

**Palavras-chave:** Equações Integrais de Fredholm não Lineares, Teoremas do Ponto Fixo, Método da Colocação, Iteração de Picard.

# Abstract

This thesis concerns functional integral equations, a class of nonlinear Fredholm-type integral equations of the second kind. These equations are studied from both the analytical and the numerical points of view. Regarding analytical aspects, we present conditions for existence and uniqueness of solutions to the integral equations over  $L^p([a, b])$  with  $p \geq 1$ . These results are based on fixed-point theorems, non-compactness measure techniques and properties of compact operators. For the numerical approximation, we consider the collocation method with piecewise continuous basis functions. Numerical integration techniques are employed to discretize the integrals of the resulting nonlinear algebraic system. This system is iteratively solved with the Picard algorithm. We prove the convergence of the collocation method and determine the convergence order. Finally, we provide some numerical examples to illustrate the predicted theoretical results.

**Keywords:** Nonlinear Fredholm Integral Equation, Fixed Point Theory, Collocation Method, Picard Iteration.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 CONCEITOS PRELIMINARES</b>	<b>15</b>
<b>1.1 Equações Integrais</b>	<b>15</b>
1.1.1 Relação entre as equações integro-funcionais e de Hammerstein	17
<b>1.2 Conceitos Básicos de Análise</b>	<b>17</b>
1.2.1 Espaço de Banach	17
1.2.2 Teoremas de Ponto Fixo e Operadores Compactos	20
1.2.3 Medida de Não Compacidade	23
<b>1.3 Conceitos Básicos de Análise Numérica</b>	<b>24</b>
1.3.1 Interpolação	25
1.3.2 Quadraturas	29
1.3.3 Método de Projeções	35
1.3.4 Método da Colocação	37
<b>2 RESULTADOS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE</b>	<b>39</b>
<b>2.1 Resultados sobre <math>L^1([a, b])</math></b>	<b>39</b>
<b>2.2 Resultados sobre <math>L^p([a, b])</math></b>	<b>43</b>
<b>2.3 Resultados sobre <math>L^\infty([a, b])</math></b>	<b>52</b>
<b>3 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO INTEGRO-FUNCIONAL</b>	<b>55</b>
<b>3.1 Método da Colocação e Iteração de Picard</b>	<b>55</b>
<b>3.2 Estudo da Convergência</b>	<b>56</b>
3.2.1 Convergência do Método da Colocação	57
3.2.2 Convergência da Iteração de Picard	61
<b>4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS</b>	<b>65</b>
<b>4.1 Função Quadrática</b>	<b>65</b>
<b>4.2 Função Raiz Cúbica</b>	<b>72</b>
<b>4.3 Função Exponencial</b>	<b>74</b>
<b>5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>78</b>
<b>5.1 Conclusões</b>	<b>78</b>
<b>5.2 Trabalhos Futuros</b>	<b>79</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>80</b>

# Introdução

A teoria das equações integrais tem sido um campo de pesquisa ativo por muitos anos e suas aplicações têm grande relevância na matemática. Vêm sendo usadas em modelos matemáticos para muitas e variadas situações físicas, assim como reformulações de outros problemas matemáticos.

Em diversas áreas de pesquisa podemos encontrar temas que se relacionam com equações integrais. Na análise funcional, como nos trabalhos de [Figueiredo e Gupta \(1973\)](#), [Dolph \(1949\)](#), [Krasnoselskii \(1964\)](#), [Krasnoselskii e Zabreiko \(1984\)](#), os autores pautam suas teorias num estudo analítico das equações integrais considerando-as operadores definidos sobre espaços de funções. A análise de métodos numéricos para estas equações tem sido essencial também na matemática aplicada, destacando-se os métodos de projeções. Além disso, observa-se o surgimento de aplicações das equações integrais nas formulações tipo BIE (Boundary Integral Equations), nos problemas inversos e de dinâmica dos fluidos ([Sauter e Schwab, 2011](#); [Hansen, 1998](#); [Canuto, Hussaini, Quarteroni e Tang, 1987](#)).

A motivação inicial deste trabalho surgiu justamente de um problema de meios porosos que envolveu uma equipe de pesquisadores vinculados a um projeto do Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), dentre eles o professor orientador. Nos trabalhos [Le, Moyne, Murad e Lima \(2013\)](#), [Rocha, Murad, Moyne, Oliveira e Le \(2016\)](#) as equações integrais não lineares foram usadas para descrever a generalização de distribuição de íons de Poisson-Boltzmann em modelos para meios porosos expansivos.

Intuitivamente uma equação integral possui como solução uma função e sua equação normalmente é dada implicitamente envolvendo uma integral. O estudo de equações integrais busca garantir a existência e unicidade de soluções, além de questões como regularidade e estabilidade. Existem várias classes de equações integrais, dentre as quais destacamos as equações integrais de Fredholm de segunda ordem, ver [Atkinson \(1997\)](#). A expressão da forma linear é:

$$u(x) = g(x) + \int_D k(x, y)u(y)dy, \quad x \in D, \quad (1)$$

com  $D$  um subconjunto fechado e limitado em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . As funções  $k(x, y)$  e  $g(x)$  são dadas. A função  $k(x, y)$  é chamada de *kernel* (ou *função kernel*).

A literatura sobre equações integrais lineares encontra-se bem consolidada. Um

panorama dos trabalhos realizados pode ser encontrado, por exemplo, nos livros de [Atkinson \(1997\)](#) e de [Hackbusch \(1995\)](#).

As equações integrais de Fredholm não lineares podem ser escritas da forma geral como

$$u(x) = g(x) + (Hu)(x),$$

onde  $H$  é um operador não linear. Dois importantes tipos de equações não lineares são as equações de Urysohn e Hammerstein. A forma geral da equação integral de Urysohn é dada como

$$u(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y, u(y)) dy, \quad x \in [a, b], \quad (2)$$

e Hammerstein é um caso particular da equação de Urysohn (2):

$$u(x) = g(x) + (Kf(u))(x), \quad x \in [a, b], \quad (Kv)(x) = \int_a^b k(x, y)v(y) dy. \quad (3)$$

Ambas equações de Urysohn e de Hammerstein vêm sendo muito bem estudadas do ponto de vista tanto analítico quanto numérico nas últimas décadas. Em [Dolph \(1949\)](#), são apresentados resultados analíticos para equação de Hammerstein para um caso particular quando o kernel é degenerado e simétrico. Casos mais gerais foram tratados em [Figueiredo e Gupta \(1973\)](#) usando métodos variacionais. Muitos outros trabalhos surgiram sobre existência da solução, boa parte deles usando teorias da análise funcional para provar a existência de soluções baseadas principalmente nos teoremas de ponto fixo e técnicas de medida de não compacidade, como por exemplo, ([Banaś, 1989](#); [Ibrahim, 2009](#)) e ([Karoui, 2005](#)). Embora estes três trabalhos usem a mesma técnica, [Banaś \(1989\)](#) determina a existência de soluções monótonas e integráveis, enquanto [Ibrahim \(2009\)](#) e [Karoui \(2005\)](#) determinam soluções contínuas. Ainda usando o teorema do ponto fixo (porém para os espaços  $L^p$ ), [Karoui e Jawahdou \(2010\)](#) e [Nadir e Gagui \(2014\)](#) provaram existência e unicidade de soluções para as equações de Hammerstein nestes espaços.

Do ponto de vista numérico, um método muito comum utilizado nos trabalhos científicos para obter soluções aproximadas para as equações de Urysohn e Hammerstein é o da colocação, onde tais soluções são obtidas com o uso de técnicas de projeções. Aqui podemos citar referências como [Atkinson \(1997\)](#), [Atkinson e Flores \(1993\)](#), [Kumar e Sloan \(1987\)](#) e [Maleknejad, Derili e Sohrabi \(2008\)](#), cada trabalho com uma certa especificidade. [Atkinson e Flores \(1993\)](#) aplicam o método da colocação para resolver as equações de Urysohn, em particular o método de Nystron, no qual as integrais também são resolvidas numericamente e são obtidos resultados de superconvergência. [Kumar e Sloan \(1987\)](#) utilizam uma mudança de variável sobre a equação de Hammerstein e aplicam o método da colocação sobre esta nova equação, visando reduzir o número de avaliações do operador integral. [Maleknejad, Derili e Sohrabi \(2008\)](#) analisam o método da colocação iterativo para a equação de Urysohn.

Uma variação das equações integrais de Hammerstein, no qual a função  $f$  inverte com o operador integral  $K$ , sendo ainda uma equação integral de Fredholm não linear é da forma

$$u(x) = g(x) + f(x, (Ku)(x)), \quad x \in [a, b], \quad (4)$$

e foi apresentada em (Banaś e Knap, 1989; Emmanuele, 1991) e denominada equação integro-funcional. Posteriormente, Kauthen (1997) e Anello (2006) estudaram equações semelhantes a (4), que foram denominadas equações integrais implícitas.

Apesar das equações integrais terem sido exaustivamente estudadas, principalmente ao longo do século XX, as equações integro-funcionais, não apresentaram uma discussão maior na academia, principalmente em propostas de métodos numéricos.

Seguindo os mesmos princípios das demais equações integrais não lineares, Emmanuele (1991), Emmanuele (1992), Banaś e Knap (1989) e Banaś e Sadarangani (2013) apresentam resultados de existência de soluções para equações integro-funcionais como aplicações dos teoremas do ponto fixo. Banaś e Knap (1989) estabelecem a existência de soluções integráveis monótonas para a equação integral (4) sobre o espaço  $L^1([a, b])$ , com  $[a, b] = [0, 1]$ , usando técnicas de medidas de não compacidade. Já Emmanuele (1991) expande este resultado dispensando as hipóteses de monotonicidade e aplica técnicas para obter continuidade fraca e depois aplica o teorema do ponto fixo de Schauder. Posteriormente, Emmanuele (1992) estudou, com praticamente as mesmas técnicas, uma equação integro-funcional mais geral que consiste numa combinação das equações integro-funcional e de Hammerstein. No entanto os resultados são para soluções em  $L^1([0, 1])$ . Recentemente, Banaś e Sadarangani (2013) apresentam uma revisão de resultados de existência para vários tipos de equações funcionais, diferenciais e integrais. Em particular, usam técnicas associadas a medida de não compacidade e ilustram aplicações em provar existência para algumas equações integro-funcionais, porém seus resultados são obtidos sobre o conjunto das funções contínuas.

Em relação aos estudos numéricos para a equação integro-funcional (4) há poucos trabalhos na literatura, principalmente quanto a análise da convergência numérica. Adibi e Rismani (2010) aplicam o método espectral com base de Legendre sobre a equação integro-funcional e apresentam experimentos que comprovam a eficiência do método, porém não demonstram analiticamente a convergência da solução obtida pelo método. Já Maleknejad, Mollapourasl e Mirzaei (2014) apresentam tanto comprovação teórica da convergência da solução numérica como também através de exemplos. Os autores combinam o método iterativo de Picard com funções B-splines cúbicas semiortogonais para obterem a solução numérica.

O objetivo desta tese é buscar uma análise teórica e numérica para as equações integro-funcionais com uma vertente diferente dos trabalhos existentes na literatura. A proposta se dará em duas linhas. Em termos analíticos, apresentaremos resultados de

existência e unicidade de soluções sobre o espaço de funções  $L^p([a, b])$ , sob hipóteses distintas para  $p = 1$ ,  $1 < p < \infty$  e  $p = \infty$ . Usaremos técnicas semelhantes às utilizadas nos trabalhos de [Karoui e Jawahdou \(2010\)](#), [Nadir e Gagui \(2014\)](#) nos quais os autores aplicam, respectivamente, os teoremas do ponto fixo de Schaefer e aproximações sucessivas para provar a existência de soluções. Em termos numéricos, apresentaremos um método iterativo aplicado às equações integro-funcionais de Fredholm (4) e provaremos a sua convergência sob, essencialmente, as mesmas hipóteses do problema contínuo. O método iterativo é uma combinação do método da colocação aplicado à equação integro-funcional resultando num sistema de equações não lineares que são então resolvidos utilizando o método iterativo de Picard. Apesar do uso frequente desses métodos nos trabalhos encontrados na literatura, pouco se encontra sobre os estudos de convergência no contexto de equação integro-funcionais. Com isso, buscaremos verificar os resultados analíticos desenvolvidos, com experimentos numéricos, exemplificando o uso do método proposto e verificando sua eficácia. Uma questão que vale ressaltar é que as mesmas hipóteses consideradas para provar a existência da solução de forma analítica serão utilizadas para verificar a convergência da solução numérica.

Inicialmente, faremos uma breve revisão de equações integrais, localizando nosso objeto de estudo, continuando com as principais teorias de análise funcional, destacando definições de operadores compactos e os principais teoremas de ponto fixo que usaremos ao longo dos demais capítulos. Além disso, apresentaremos um breve resumo dos métodos numéricos sobre os problemas de interpolação, integração numérica e os métodos de projeção, destacando o método da colocação tão usado na literatura e que por sua vez também aplicaremos na equação integro-funcional.

Com esta vertente de trabalhar duas linhas, teórica e numérica, organizamos o nosso trabalho da seguinte forma: No Capítulo 1, fizemos um texto com preliminares tanto da base de análise matemática quanto da análise numérica. No Capítulo 2, dando destaque aos resultados teóricos, apresentamos teoremas sobre a existência e unicidade de soluções sobre o espaço  $L^p([a, b])$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , principalmente para  $p > 1$  por se tratarem de resultados novos. No Capítulo 3, apresentamos um método numérico para a resolução das equações integro-funcionais de Fredholm (4) e provamos sob certas condições a convergência da solução. A fim de verificar os resultados no Capítulo 4 fizemos alguns experimentos numéricos e no último capítulo apresentamos nossas considerações finais e perspectivas futuras de trabalho.

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo revisaremos os conceitos iniciais de equações integrais, os principais resultados teóricos e os métodos numéricos, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Apresentaremos os conceitos e principais teoremas de análise real, análise funcional e análise numérica que utilizaremos nos capítulos seguintes.

### 1.1 Equações Integrais

Vamos recordar o exemplo da análise de equações diferenciais ordinárias. Considere o problema de valor inicial

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad u(x_0) = u_0. \quad (1.1)$$

Integrando de  $x_0$  a  $x$  reduzimos à equação integral

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(s, u(s)) ds, \quad x \in I. \quad (1.2)$$

Uma das razões para a reformulação (1.2) é o interesse para provar a existência e unicidade de soluções que é mais apropriado do que (1.1), Brauer e Nohel (1973). De modo geral, uma equação integral é uma equação com uma função desconhecida  $u$ . As equações integrais são classificadas por várias propriedades, que são listadas a seguir.

Quanto ao domínio de integração, há duas classes fundamentais:

**Equação integral de Fredholm:** No caso unidimensional, a integral é tomada ao longo de um intervalo  $[a, b]$  fixo, de uma semireta ou de toda reta. E, de forma mais geral, a integral é definida sobre um subconjunto fixo (não necessariamente limitado) do  $\mathbb{R}^d$ .

**Equação integral de Volterra:** A integral é tomada sobre um domínio definido em termos da variável independente do problema (como o problema (1.2)).

Outra classificação é quanto à forma em que aparece a função incógnita:

**Equação Integral de primeira espécie:** A função desconhecida aparece apenas no integrando.

**Equação integral de segunda espécie:** A função desconhecida aparece também fora da integral.

Podemos também distinguir por **equações integrais lineares** e por **equações integrais não lineares**, dependendo se a equação é ou não linear em relação à função desconhecida  $u$ .

Para ilustração, damos uma série de exemplos, onde  $g(x)$  e  $k(x, y)$  são funções conhecidas e a função  $u(x)$  é a função a ser determinada.

*Equação integral linear de Fredholm de primeira espécie:*

$$g(x) = \int_a^b k(x, y)u(y)dy \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (1.3)$$

*Equação integral linear de Fredholm de segunda espécie:*

$$u(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y)u(y)dy \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (1.4)$$

*Equação integral linear de Volterra de primeira espécie:*

$$g(x) = \int_a^x k(x, y)u(y)dy \quad \text{para } x \geq a. \quad (1.5)$$

*Equação integral linear de Volterra de segunda espécie:*

$$u(x) = g(x) + \int_a^x k(x, y)u(y)dy \quad \text{para } x \geq a. \quad (1.6)$$

*Equação integral não-linear de Fredholm de segunda espécie:*

$$u(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y, u(x), u(y))f(x, u(y))dy \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (1.7)$$

ou

$$u(x) = g(x) + f\left(x, \int_a^b k(x, y)u(y)dy\right) \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (1.8)$$

onde  $f(x, y)$  é uma função não linear que satisfaz certas propriedades a serem explicitadas posteriormente para a garantia de existência da solução.

Algumas subclasses especiais de (1.7) são a equação de Urysohn

$$u(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y, u(y))dy \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (1.9)$$

e a equação de Hammerstein

$$u(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y)f(y, u(y))dy \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (1.10)$$

As equações integrais não lineares de Fredholm de segunda espécie são nosso objeto de estudo, Capítulo 2 e 3, principalmente a equação (1.8) que também é denominada equação integro-funcional.

### 1.1.1 Relação entre as equações integro-funcionais e de Hammerstein

No desenvolvimento de um método de colocação para a equação de Hammerstein, Kumar e Sloan (1987) propuseram uma mudança de variáveis que transforma esta equação numa equação semelhante à equação integro-funcional (1.8).

Definindo  $z(x) = f(x, u(x))$ , segue de (1.10) que

$$u(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y)z(y)dy \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (1.11)$$

Para eliminar a variável  $u(x)$ , substitui-se (1.11) em  $z(x) = f(x, u(y))$ , o que resulta na equação

$$z(x) = f\left(x, g(x) + \int_a^b k(x, y)z(y)dy\right) \quad \text{para } x \in [a, b]. \quad (1.12)$$

Note que as equações (1.12) e (1.8) coincidem quando  $g(x) = 0$ . A semelhança entre estas equações sugere que a teoria e métodos de aproximação propostos na literatura para a equação de Hammerstein podem ser úteis para a equação integro-funcional.

## 1.2 Conceitos Básicos de Análise

Nesta Seção apresentaremos conceitos importantes para uma melhor compreensão dos Capítulos subsequentes. Destacamos os Teoremas do Ponto Fixo que servem de base para a prova de existência de soluções da equações integrais.

### 1.2.1 Espaço de Banach

Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Definimos uma norma  $\|\cdot\|_X$  ou  $\|\cdot\|$  sobre  $X$  sendo uma aplicação de  $X$  em  $[0, \infty)$  que satisfaz os seguintes axiomas:

$$\|x\| = 0 \quad \text{somente se } x = 0 \quad (1.13)$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \text{para todo } x \in X, \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{para todo } x, y \in X \text{ (desigualdade triangular)} \quad (1.15)$$

O par  $(X, \|\cdot\|)$  chama-se de espaço normado.

**Definição 1.2.1.** Uma sequência  $\{x_n\}$  de pontos no espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$  é dita convergente, se existe um elemento  $x \in X$  tal que a sequência das normas  $\|x_n - x\|$  converge em  $\mathbb{R}$  para zero,

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

**Definição 1.2.2.** Denotamos por  $X^*$  o espaço dual de  $X$ , ou seja, o espaço formado por todos funcionais sobre  $X$ ,  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Uma sequência  $\{x_n\}$  de pontos no espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$  é fracamente convergente se

$$\text{existe } x \in X, \text{ tal que } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \text{ para todo } f \in X^*.$$

**Definição 1.2.3.** Uma sequência  $\{x_n\}$  no espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$  é chamada de Cauchy, se para todo  $\epsilon > 0$  existe um número natural  $N$  tal que  $\|x_n - x_m\| < \epsilon$  para todo  $m, n > N$ .

Toda sequência convergente é também de Cauchy, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

**Definição 1.2.4.** O espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$  é chamado de espaço completo, se qualquer sequência de Cauchy em  $X$  é também convergente. Um espaço normado completo é dito espaço de Banach.

**Exemplo 1.2.5** (Espaço  $C(D)$ ). Consideremos um subconjunto  $D \subset \mathbb{R}$  ou  $D \subset \mathbb{R}^d$ , com  $d$  um número natural. Denotamos por  $C(D)$  o conjunto de todas as funções reais contínuas definidas sobre  $D$  e  $C^k(D)$  o conjunto das funções continuamente diferenciáveis até a ordem  $k$ .

Podemos definir sobre  $C(D)$  a seguinte função:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in D\} \quad (1.16)$$

Sobre o subconjunto das funções contínuas limitadas:

$$C_b(D) = \{f \in C(D) \mid f \text{ é limitada}\},$$

A função (1.16) define uma norma.

**Definição 1.2.6.** Dizemos que um conjunto  $D \subset X$  é compacto, se toda sequência  $\{x_n\}$  em  $D$  possui uma subsequência convergente  $x_{n_k} \rightarrow x$  e  $x \in D$ .

Podemos mostrar que se  $D$  é compacto então  $C_b(D) = C(D)$ , e, neste caso, a norma do supremo é também dita norma do máximo. Além disso, o espaço normado  $(C(D), \|\cdot\|_\infty)$  é um espaço de Banach.

Analogamente,  $(C^k(D), \|\cdot\|_{C^k(D)})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  é um espaço de Banach contendo todas as funções de  $C^k(D)$  que são limitadas com respeito a norma  $\|\cdot\|_{C^k(D)}$ , onde

$$\|f\|_{C^k(D)} := \max\{\|f^{(l)}\|_\infty, 0 \leq l \leq k\},$$

onde  $f^{(l)}$  denota a derivada de ordem  $l$ -ésima de  $f$ .

**Exemplo 1.2.7** (Espaço  $L^p$ ). Os espaços  $L^p$  são um dos mais importantes espaços funcionais, principalmente na teoria de funcional. Vejamos como definimos as normas sobre estes espaços. Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável à Lebesgue definida em domínio  $D$ ,

mensurável.

Se  $p \in [1, \infty)$ , então dizemos que  $f \in L^p(D)$  se a norma- $p$  for finita:

$$\|f\|_p = \left( \int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty. \quad (1.17)$$

Se  $p = \infty$ , então dizemos que  $f \in L^\infty(D)$  se existir uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$\mu\{x \in D : |f| > C\} = 0 \text{ (ou seja, } |f| \leq C \text{ exceto em conjunto de medida zero)}$$

e a norma- $\infty$  é definida por  $\|f\|_\infty = \inf\{C : \mu\{|f(x)| > C\} = 0\}$ , ou ainda,

$$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{S \subset D \\ \mu(D \setminus S) = 0}} \left\{ \sup_{x \in S} |f(x)| \right\}.$$

**Definição 1.2.8.** Seja  $A \subset X$  um subespaço de um espaço de Banach  $X$ . Dizemos que  $A$  é denso em  $X$  se em toda vizinhança de  $x \in X$  existe um ponto  $a \in A$ . Ou seja, dados  $x \in X$  e  $\epsilon > 0$ , existe  $a \in A$  tal que  $\|x - a\| < \epsilon$ .

Abaixo apresentamos o Teorema de Weierstrass, que é um dos resultados mais importantes da análise real, e afirma que toda função contínua definida sobre um compacto pode ser aproximada por um polinômio, ver maiores detalhes em (Lima, 2001).

**Teorema 1.2.9. (Teorema de Weierstrass)** Seja  $D \subset \mathbb{R}^d$  um conjunto compacto. Então o subespaço dos polinômios é denso em  $C(D)$ .

**Definição 1.2.10.** Sejam  $D \subset \mathbb{R}^d$  e  $X$  espaço de Banach. Uma função  $f : D \rightarrow X$  é dita *globalmente lipschitziana sobre  $D$*  se existe uma constante positiva  $L > 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in D.$$

E dizemos que  $f$  é *localmente lipschitziana sobre  $D$*  se para qualquer  $x \in D$  existe uma vizinhança  $U_x$  de  $x$  e uma constante  $L_x > 0$  tal que

$$\|f(y) - f(z)\| \leq L_x\|y - z\| \quad \text{para todo } y, z \in U_x.$$

Evidentemente se uma função  $f$  for globalmente lipschitziana também será localmente lipschitziana. E ambos os casos implicam que  $f$  é contínua. Além disso, se  $D$  for compacto as definições de local e global de funções Lipschitzianas se coincidem.

As definições de funções lipschitzianas também podem ser estendidas para funções  $f : X \rightarrow Y$ , sendo  $X$  e  $Y$  espaços de Banach.

## 1.2.2 Teoremas de Ponto Fixo e Operadores Compactos

A solução de uma equação que tem a forma

$$x = T(x) \quad (1.18)$$

onde  $T : X \rightarrow X$  é um operador sobre um espaço de Banach  $X$  é dita ponto fixo do operador  $T$ . Existem diversos Teoremas de Ponto Fixo, (Smart, 1980), os mais eficientes e úteis envolvem argumentações topológicas, especialmente aqueles com base no conceito de compacidade. Vamos apresentar somente neste trabalho os teoremas que utilizamos para obter resultados de existência e unicidade para equações integrais. Estes teoremas foram generalizados em várias direções, e vêm sendo muito utilizados para as conclusões de existência e unicidade de equações diferenciais, integrais e funcionais.

**Teorema 1.2.11. (Ponto Fixo de Banach)** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $T : X \rightarrow X$  uma contração, isto é,  $T$  é globalmente Lipschitz com constante de Lipschitz  $0 \leq L < 1$ , e assim satisfaz

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \text{para todo } x, y \in X. \quad (1.19)$$

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) A equação do ponto fixo (1.18) tem exatamente uma solução  $x^*$  em  $X$ .
- (ii) Para qualquer valor inicial  $x^{(0)} \in X$ , a sequência  $\{x^{(i)}\}$  em  $X$ , definida por

$$x^{(i+1)} = T(x^{(i)}), \quad (1.20)$$

converge para a solução  $x^*$  de (1.18).

- (iii) A estimativa de erro da convergência da sequência (1.20) é

$$\|x^* - x^{(i)}\| \leq \frac{L^i}{1 - L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \quad (1.21)$$

**Demonstração:** (i) Aplicando a equação (1.19) para  $x = x^{(i)}$  e  $y = x^{(i+1)}$  temos

$$\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| \leq L\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\| \leq L^i\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad \text{para } i \geq 1.$$

Usando a desigualdade triangular e somando sobre  $j = i, i + 1, \dots, k - 1$  segue

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x^{(i)}\| &\leq \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| + \dots + \|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| \\ &\leq (L^{k-1} + \dots + L^i)\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = \frac{L^i - L^k}{1 - L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \end{aligned} \quad (1.22)$$

Assim,  $\{x^{(i)}\}$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ , logo converge para algum  $x^* \in X$  no espaço de Banach  $X$ . A condição de Lipzchitz (1.19) implica continuidade de  $T$ , então

$$x^* = \lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i+1)} = \lim_{i \rightarrow \infty} T(x^{(i)}) = T(\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)}) = T(x^*).$$

ou seja,  $x^*$  é solução de (1.18).

(ii) Suponhamos  $x^*$  e  $x^{**}$  sejam duas soluções de (1.18). Por (1.19) e usando o fato que  $L < 1$ , temos  $\|x^* - x^{**}\| \leq L\|x^* - x^{**}\| < \|x^* - x^{**}\|$ , que é um absurdo.

(iii) Como  $\{x^{(i)}\}$  converge para  $x^*$ , basta fazer  $k \rightarrow \infty$  em (1.22).  $\square$

**Definição 1.2.12.** Sejam  $X$  um espaço de Banach. Dizemos que  $M \subset X$  é pré-compacto, ou relativamente compacto, se toda sequência  $\{x_n\}$  em  $M$  contém uma subsequência (uniformemente) convergente em  $X$ .  $M \subset X$  será compacto se  $M$  for pré-compacto e fechado.

Quando  $X = \mathbb{R}^d$ , para algum  $d \in \mathbb{N}$ , temos que conjuntos pré-compactos são sempre limitados, e conjuntos compactos são fechados e limitados.

**Definição 1.2.13.** Diremos que um operador  $T : X \rightarrow Y$  é *compacto*, se para todo subconjunto  $S \subset X$  limitado tem-se que  $T(S) \subset Y$  é pré-compacto. Equivalentemente,  $T$ , é compacto se para toda sequência limitada  $\{x_n\}$ , existe uma subsequência  $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$  tal que  $Tx_{n_k}$  é convergente.

Um operador  $T$  é dito *completamente contínuo* se para toda sequência  $\{x_n\}$  em  $X$  tal que  $x_n \rightarrow x$  fracamente tem-se  $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$  em  $Y$ . Conway (1985, Proposição VI.3.3) demonstra que todo operador compacto é completamente contínuo.

A noção de diferenciabilidade pode ser generalizada para espaços de Banach de várias maneiras. Em particular apresentamos a seguir uma definição, dada por Krasnoselskii e Zabreiko (1984, pag. 76), para a derivada de um operador.

**Definição 1.2.14.** Sejam  $X, Y$  espaços de Banach,  $A : X \rightarrow Y$  um operador e  $x_0 \in X$ . Dizemos que  $A$  é diferenciável no sentido de Fréchet em  $x_0$  se existe um operador linear  $B$  tal que a diferença  $\Delta A = A(x_0 + h) - A(x_0)$  satisfaz

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = Bh + \omega(x_0, h),$$

onde  $\omega(x_0, h) = o(\|h\|)$ . O operador  $B$  é dito a derivada (Fréchet) de  $A$  em  $x_0$  e denotado por  $A'(x_0)$ .

O próximo teorema diz que a propriedade de completamente contínuo é preservada por diferenciabilidade.

**Teorema 1.2.15.** Se  $A$  é um operador completamente contínuo e diferenciável no sentido de Fréchet em  $x_0$ , então a derivada  $A'(x_0)$  também é um operador completamente contínuo.

**Demonstração:** Suponha por contradição que  $A'(x_0)$  não é completamente contínuo. Logo o conjunto dos valores sobre a esfera unitária  $\{A'(x_0)(x) \in Y, \|x\|=1\}$  não é compacto. Então existe uma sequência de valores unitários  $e_m$  e um número  $\delta > 0$  tal que  $\|A'(x_0)(e_i - e_j)\| \geq 3\delta$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, i \neq j$  e, ainda,  $\omega(x_0, h) \leq \delta\|h\|$  sendo  $\|h\| \leq \rho$ ,  $\rho > 0$ . Defina a sequência em  $X$ ,  $x_m = x_0 + \rho e_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Como  $A$  é diferenciável em  $x_0$ , então

$$\begin{aligned} A(x_i) - A(x_j) &= A(x_i) - A(x_0) + A(x_0) - A(x_j) \\ &= A'(x_0)(x_i - x_j) + \omega(x_0, \rho e_i) - \omega(x_0, \rho e_j) \\ &= \rho A'(x_0)(e_i - e_j) + \omega(x_0, \rho e_i) - \omega(x_0, \rho e_j), \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \|A(x_i) - A(x_j)\| &\geq \rho \|A'(x_0)(e_i - e_j)\| - \|\omega(x_0, \rho e_i)\| - \|\omega(x_0, \rho e_j)\| \\ &\geq \rho\delta > 0. \end{aligned}$$

Isto significa que a sequência  $\{A(x_m)\}$  não tem subsequência convergente, o que é um absurdo pois  $A$  é completamente contínuo.  $\square$

O próximo teorema é muito utilizado na análise matemática para caracterizar os conjuntos pré-compactos em  $C(D)$  e, conseqüentemente, servem para provar a compacidade de certos operadores definidos sobre  $C(D)$ .

**Teorema 1.2.16. (Arzela-Ascoli (Lima, 2001))** Sejam  $D$  compacto e  $M \subset C(D)$ . O subconjunto  $M$  é pré-compacto se, e somente se,  $M$  é uniformemente limitado, isto é,

$$\sup\{\|f\|_\infty, f \in M\} < \infty$$

e  $M$  é equicontínuo, isto é, para todo  $\epsilon > 0$  e todo  $x \in D$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \quad \text{para todo } f \in M \text{ e } y \in D,$$

desde que  $\|x - y\| < \delta$ .

**Teorema 1.2.17. (Ponto Fixo de Schaefer (Smart, 1980))** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $T : X \rightarrow X$  um operador completamente contínuo. Segue que:

- (i) A equação  $x = \lambda Tx$  tem uma solução para  $\lambda = 1$ , ou
- (ii) O conjunto  $\varepsilon = \{x \in X; x = \lambda Tx, \lambda \in ]0, 1[ \}$  não é limitado.

**Teorema 1.2.18. (Ponto Fixo de Schauder (Smart, 1980))** Sejam  $K$  um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach  $X$  e  $T : X \rightarrow X$  um operador completamente contínuo. Se  $T : K \rightarrow K$  é contínuo e  $\overline{T(K)}$  é compacto, então  $T$  tem um ponto fixo em  $K$ .

O Teorema 1.2.17 é utilizado para demonstrar o Teorema 1.2.18 que utilizaremos no Capítulo 3 na prova da existência de soluções das equações integrais.

### 1.2.3 Medida de Não Compacidade

Para vermos o próximo teorema de ponto fixo definiremos antes o conceito de medida de não compacidade de um subconjunto  $S$  num espaço de Banach. A princípio vamos enfraquecer a hipótese sobre o operador  $T$  com respeito a ser compacto. A forma como foram apresentados estes conceitos axiomáticos foi proposta por Banaś (1980).

**Definição 1.2.19.** Seja um subconjunto  $U \subset X$  de um espaço de Banach  $X$ . O conjunto convexo de  $U$ , denotado por  $\text{Conv } U$ , é o maior conjunto convexo contido em  $U$ , ou seja, se  $V \subset U$  é convexo então  $V \subseteq \text{Conv } U$ .

**Definição 1.2.20.** Seja  $\mathcal{P}(X)$  o conjunto formado por todos os subconjuntos limitados não vazios de  $X$ . Uma função  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma medida de não compacidade no espaço de Banach  $X$  se satisfaz as seguintes condições:

- (i) A família  $\ker \mu = \{S \in \mathcal{P}(X), \mu(S) = 0\}$  é não nula e compacta.
- (ii) Se  $U \subset V$ , então  $\mu(U) \leq \mu(V)$ .
- (iii)  $\mu(U) = \mu(\text{Conv } U) = \mu(\bar{U}), \forall U \in \mathcal{P}(X)$ .
- (iv)  $\mu(\lambda U + (1 - \lambda)V) \leq \lambda\mu(U) + (1 - \lambda)\mu(V), \forall U, V \in \mathcal{P}(X)$  e  $\lambda \in [0, 1]$ .
- (v) Se  $\{U_n\} \subset \mathcal{P}(X)$  com  $U_{n+1} \subset U_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e, além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U_n) = 0$  então o conjunto  $U_\infty = \bigcap U_n$  é não vazio.

Introduzido o conceito de medida de não compacidade, podemos formular o seguinte teorema do ponto fixo (ver demonstração em Banaś (1980)).

**Teorema 1.2.21. (Ponto Fixo de Darbo)** Seja  $K$  um subconjunto não vazio, limitado, fechado e convexo do espaço de Banach  $X$ . Se  $T : K \rightarrow K$  é um operador fracamente contínuo (isto é, sequências fracamente convergentes em  $K$  quando aplicadas por  $T$  são também fracamente convergentes em  $K$ ) e uma contração com respeito à medida de não compacidade  $\mu$ , isto é, existe uma constante  $q, 0 \leq q < 1$ , tal que

$$\mu(T(U)) \leq q\mu(U), \quad \forall U \neq \emptyset, U \subset K, \quad (1.23)$$

então o operador  $T$  tem pelo menos um ponto fixo no conjunto  $K$ .

**Exemplo 1.2.22.** Uma das medidas de não compacidade mais importantes no espaço  $C([a, b])$  foi definida em [Banaś e Goebel \(1980\)](#). A sua definição foi formulada em termos de módulo de continuidade de um conjunto. Para cada  $x \in C([a, b])$ , o módulo de continuidade  $\omega$  associado a  $x$  é definido por uma função  $\omega(x, \cdot) : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  tal que

$$\omega(x, \epsilon) = \sup \{|x(t) - x(s)| : t, s \in [a, b], |t - s| \leq \epsilon\}. \quad (1.24)$$

O módulo de continuidade para um conjunto  $X \subset C([a, b])$  é dado pela função

$$\omega(X, \epsilon) = \sup\{\omega(x, \epsilon) : x \in X\}.$$

Considere a função

$$\omega_0(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega(X, \epsilon). \quad (1.25)$$

[Banaś e Goebel \(1980, Teorema 7.1.2, pag. 30\)](#) provam que  $\omega_0(X)$  é uma medida de não compacidade no espaço  $C([a, b])$ . Esta medida também tem algumas propriedades adicionais. Por exemplo,

$$\omega_0(\lambda X) = |\lambda| \omega_0(X) \quad \text{e} \quad \omega_0(X + Y) \leq \omega_0(X) + \omega_0(Y)$$

para quaisquer  $X, Y \subset C([a, b])$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.2.23.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $Y \subset X$  um subconjunto limitado e não-vazio de  $X$ . Denotemos por  $B_r$  a bola fechada em  $X$  centrada na origem e com raio igual a  $r$ . A medida de não compacidade usada por [Banaś e Knap \(1989\)](#) para demonstrar a existência de soluções de equações integro funcionais foi definida por [Blasi \(1977\)](#) da seguinte forma:

$$\beta(Y) = \inf \{r > 0 : \exists Q \subset X \text{ fracamente compacto tal que } Y \subset Q + B_r\}.$$

Uma conveniente fórmula para função  $\beta(Y)$  no espaço  $X = L^1([0, 1])$ , apresentada por [Appell e Pascale \(1984\)](#), é dada por:

$$\beta(Y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \sup_{u \in Y} \left\{ \sup_{l(D) \leq \epsilon} \left\{ \int_D |u(s)| ds : D \subset [0, 1] \right\} \right\} \right], \quad (1.26)$$

onde  $l(D)$  é a medida de Lebesgue de  $D$ .

### 1.3 Conceitos Básicos de Análise Numérica

Nesta seção buscamos apresentar os problemas de interpolação, de integração e de aproximação por meio de projeções, na forma clássica e sempre que possível direcionamos as aplicações à resolução aproximada de equações integrais.

### 1.3.1 Interpolação

Consideremos a seguinte partição do intervalo  $[a, b]$ :

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (1.27)$$

Em termos gerais, o problema de interpolação consiste em achar uma função  $\phi$  dentro de um subespaço de dimensão finita  $V_n$  de  $C[a, b]$ ,  $\dim V_n = n$ , que satisfaça:

$$\phi(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.28)$$

dados os pontos  $x_1, \dots, x_n$  de uma partição (1.27) e as ordenadas  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  correspondentes.

**Definição 1.3.1.** As soluções  $l_i \in V_n$  do problema de interpolação

$$l_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.29)$$

são chamadas de funções de Lagrange, e o conjunto  $\{l_i\}_{i=1, \dots, n}$  é chamado base de Lagrange.

Visto a característica (1.29) da base de Lagrange, podemos escrever a solução do problema interpolador por

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n y_i l_i(x), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.30)$$

**Exemplo 1.3.2.** (Interpolação polinomial) Consideremos  $P^n([a, b])$  o espaço dos polinômios de grau no máximo  $n - 1$  definidas no intervalo  $[a, b]$ . Neste caso, as funções de Lagrange são conhecidas por polinômios de Lagrange e definidos por

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (1.31)$$

**Exemplo 1.3.3.** (Interpolação linear por partes) Seja  $P_n^1([a, b])$  o subespaço formado por todas as funções contínuas lineares por partes definidas sobre os subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

A solução do problema de interpolação é dada explicitamente pela função

$$\phi(x) = \frac{(x - x_{i-1})y_i + (x_i - x)y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \text{para } x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (1.32)$$

As funções de Lagrange  $l_i$  são dadas por:

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (1.33)$$

O problema de interpolação pode ser usado para aproximar funções  $f \in C([a, b])$ , uma vez que podemos interpretar as ordenadas  $y_i$  sendo os valores das funções nos pontos da partição  $f(x_i)$ , ou seja, o problema de interpolação consiste em determinar uma função  $\phi \in V_n$  tal que

$$\phi(x_i) = f(x_i), \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n. \quad (1.34)$$

**Definição 1.3.4.** A aplicação  $\mathcal{I}_n : C([a, b]) \rightarrow V_n$  definida por  $\mathcal{I}_n f = \phi$ , onde  $\phi$  é a solução do problema de interpolação (1.34), é chamada de *Operador Interpolador*.

É fácil ver que o operador interpolador tem as seguintes propriedades:

- (a)  $\mathcal{I}_n$  é linear e, além disso, é uma projeção de  $C([a, b])$  sobre  $V_n$ , ou seja,  $\mathcal{I}_n^2 = \mathcal{I}_n$ ;
- (b)  $\mathcal{I}_n$  pode ser representado unicamente por

$$\mathcal{I}_n f := \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i. \quad (1.35)$$

onde  $l_i$  são as funções de Lagrange dadas em (1.31).

**Exemplo 1.3.5.** Seja  $V_n = P^n([a, b])$  associado à interpolação polinomial de grau  $n - 1$ , dada pelo Exemplo 1.3.2. O operador interpolador pode ser escrito da forma

$$\mathcal{I}_n f = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} y_i, \quad (1.36)$$

onde  $\omega_{n+1}$  é o *polinômio nodal* de grau  $n$  definido por

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (1.37)$$

### Erro na Interpolação

O erro de interpolação é dado pela diferença

$$E(f) = \mathcal{I}_n f - f.$$

No estudo do comportamento do erro é desejável que o erro convirja para zero quando  $n \rightarrow \infty$ , condicionada a uma ordem de convergência do método. Segundo Hackbusch (1995), a ordem de convergência do método de interpolação é um número  $\rho > 0$  tal que

$$\|\mathcal{I}_n f - f\|_\infty \leq Ch^\rho \|f\|_{C^\rho([a, b])} \quad \text{para todo } f \in C^\rho([a, b]), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.38)$$

para alguma constante  $C$  positiva, sendo  $h = (b - a)/n$ . Quando a partição (1.27) é uniforme,  $h$  corresponde ao comprimento de todos os subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Veamos a seguir uma sequência de resultados para o operador interpolador linear por partes (1.36). Na seguinte proposição vamos demonstrar que a interpolação linear por partes tem ordem no máximo igual a 2.

**Proposição 1.3.6.** A interpolação linear por partes definida sobre uma partição uniforme de  $[a, b]$  satisfazendo (1.34) satisfaz (1.38) com uma constante positiva  $C$  e a ordem de convergência  $\rho$  pertencendo ao intervalo  $(0, 2]$ .

**Demonstração:** Seguindo Hackbusch (1995, Obs 1.4.11), denotemos o erro por  $e_n = \mathcal{I}_n f - f$ . Dado  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  por (1.32) o erro pode ser escrito por

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \frac{(x - x_i)f(x_{i+1}) + (x_{i+1} - x)f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - f(x) \\ &= \frac{\alpha(f(x_{i+1}) - f(x)) + \beta(f(x_i) - f(x))}{\alpha + \beta}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

onde  $\alpha = x - x_i$  e  $\beta = x_{i+1} - x$ . Notemos que  $\alpha + \beta = x_{i+1} - x_i = h$ . Fazemos a demonstração em duas partes. Primeiramente demonstraremos para  $\rho \in (0, 1]$ . Aplicando a desigualdade de Hölder em  $f$  temos

$$|f(x) - f(y)| \leq C_f |x - y|^\rho, \quad \text{com } C_f > 0 \text{ e } 0 < \rho \leq 1.$$

Utilizando na equação (1.39) temos

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &\leq C_f \frac{\alpha\beta^\rho + \beta\alpha^\rho}{\alpha + \beta} \\ &\leq C_f \frac{\alpha(\alpha + \beta)^\rho + \beta(\alpha + \beta)^\rho}{\alpha + \beta} \\ &= C_f (\alpha + \beta)^\rho \\ &= C_f h^\rho \end{aligned}$$

logo  $f$  satisfaz a equação (1.38) com  $C = C_f$  e  $\rho \in (0, 1]$ .

Agora demonstraremos para  $\rho \in (1, 2]$ . Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e utilizando a mudança de variável  $\xi = x + \beta t$ , temos

$$f(x_{i+1}) - f(x) = \int_x^{x_{i+1}} f'(\xi) d\xi = \beta \int_0^1 f'(x + \beta t) dt, \quad \text{para algum } \beta \in (x, x_{i+1}).$$

Aplicando em (1.39) segue que

$$e_n(x) = \frac{\alpha\beta \int_0^1 [f'(x + \beta t) - f'(x - \alpha t)] dt}{\alpha + \beta}. \quad (1.40)$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder sobre a derivada  $f'$ , ou seja, existem  $C'_f > 0$  e  $\rho' \in (0, 1]$  tais que

$$|f'(\xi) - f'(\eta)| \leq C'_f |\xi - \eta|^{\rho'},$$

temos em (1.40),

$$\begin{aligned} |e_n(x)| &\leq \frac{C'_f \alpha\beta \int_0^1 [(\alpha + \beta)t]^{\rho'} dt}{\alpha + \beta} \\ &= \frac{C'_f \alpha\beta (\alpha + \beta)^{\rho'-1}}{\rho' + 1}. \end{aligned}$$

usando o fato  $4\alpha\beta \leq (\alpha+\beta)^2$ , segue que  $|e_n(x)| \leq \frac{C'_f(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)^{\rho'-1}}{4(\rho'+1)} \leq \frac{C'_f(\alpha+\beta)^{\rho'+1}}{4(\rho'+1)}$ . Logo satisfaz a equação (1.38) tomando  $\rho = \rho' + 1 \in (1, 2]$  e  $C = \frac{C'_f}{4\rho} > 0$ .  $\square$

No caso em que  $f \in C^0([a, b])$ , podemos garantir apenas a convergência de  $\mathcal{I}_n f$ :

**Proposição 1.3.7.** A interpolação linear por partes definida sobre uma partição uniforme de  $[a, b]$  satisfazendo (1.34) satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{I}_n f - f\|_\infty = 0 \quad \text{para todo } f \in C^0([a, b]). \quad (1.41)$$

**Demonstração:** Esta prova segue o argumento apresentado por [Atkinson, Graham e Sloan \(1983\)](#). Dado  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , segue de (1.39) que

$$|e_n(x)| \leq \max\{|f(x_{i+1}) - f(x)|, |f(x) - f(x_i)|\} \leq \max_{x_i \leq s, t \leq x_{i+1}} |f(s) - f(t)|,$$

de modo que

$$\|\mathcal{I}_n f - f\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} \max_{x_i \leq s, t \leq x_{i+1}} |f(s) - f(t)|,$$

e o resultado segue da continuidade de  $f$ .  $\square$

A proposição a seguir trata da limitação do operador de interpolação na norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Proposição 1.3.8.** A interpolação linear por partes satisfaz  $\|\mathcal{I}_n\|_\infty = 1$ .

**Demonstração:** Sejam  $f \in C^0([a, b])$  e  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ . Vamos reescrever (1.32) na forma

$$\mathcal{I}_n f(x) = f(x_i) + \lambda(x)[f(x_{i+1}) - f(x_i)], \quad \lambda(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Note que  $0 \leq \lambda(x) \leq 1$ , ou seja,  $\mathcal{I}_n f(x)$  é uma combinação convexa de  $f(x_i)$  e  $f(x_{i+1})$ . Assim, se  $f(x_{i+1}) - f(x_i) \geq 0$ , então

$$0 \leq \lambda(x)[f(x_{i+1}) - f(x_i)] \leq f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

o que garante que  $f(x_i) \leq \mathcal{I}_n f(x) \leq f(x_{i+1})$ . Do mesmo modo, se  $f(x_{i+1}) - f(x_i) \leq 0$ , então  $f(x_{i+1}) \leq \mathcal{I}_n f(x) \leq f(x_i)$ . Como índice  $i$  foi arbitrário, temos que

$$|\mathcal{I}_n f(x)| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)| \leq \|f\|_\infty \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.42)$$

Por outro lado, tomando por exemplo  $g(x) = 1$ , obtemos  $\|\mathcal{I}_n g\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ , modo que  $\|\mathcal{I}_n\|_\infty = \sup\{\|\mathcal{I}_n f\|_\infty ; \|f\|_\infty = 1\} \geq \|\mathcal{I}_n g\|_\infty = 1$ , que junto com (1.42) resulta em  $\|\mathcal{I}_n\|_\infty = 1$ .  $\square$

### 1.3.2 Quadraturas

Seja  $f$  uma função real integrável sobre o intervalo  $[a, b]$ . O cálculo explícito da integral definida

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

pode não ser simples ou ser até mesmo impossível. Uma fórmula que calcula uma aproximação de  $I(f)$  é dita *fórmula de quadratura* ou *fórmula de integração numérica*. Normalmente falamos método das quadraturas, uma vez que não obtemos uma fórmula da quadratura, mas sim uma sequência  $I_n(f)$  de fórmulas de quadratura.

As fórmulas clássicas de quadraturas são expressões que envolvem os valores  $f(x_i)$  onde  $x_i$  são certos pontos sobre o intervalo  $[a, b]$ . As expressões de  $I_n(f)$  têm a forma explícita dada pela soma:

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i), \quad (1.43)$$

onde os coeficientes  $w_i$  são chamados de pesos da quadratura e os pontos  $x_i$  de nós da quadratura.

Uma forma de obter uma quadratura é substituir  $f$  por uma aproximação  $f_n$ , dependendo do número inteiro positivo  $n \geq 0$ , então calculamos  $I(f_n)$  sendo a aproximação de  $I(f)$ . Considerando  $I_n(f) = I(f_n)$ , temos que

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x) dx. \quad (1.44)$$

Se  $f \in C_0([a, b])$ , então o erro de quadratura,  $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$ , pode ser estimado por

$$|E_n(f)| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty.$$

Portanto, se  $f_n$  for uma aproximação de  $f$  tal que  $\|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon$ , a partir de um certo  $n$ , então  $|E_n(f)| \leq \epsilon(b - a)$ .

**Definição 1.3.9.** Definimos o grau de precisão da fórmula da quadratura sendo o maior inteiro não negativo  $r \geq 0$  tal que

$$I_n(f) = I(f), \quad \forall f \in P^r([a, b]). \quad (1.45)$$

Vejamos nas subseções seguintes as fórmulas de quadraturas mais usuais na literatura.

#### Quadraturas por Interpolação

Consideremos a aproximação  $f_n$  obtida pelo polinômio interpolador de Lagrange de  $f$  sobre um conjunto de nós distintos  $\{x_i\}$ , com  $i = 0, \dots, n$  do intervalo  $[a, b]$ . Substituindo (1.30) em (1.44) segue que

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx, \quad (1.46)$$

onde as funções  $\{l_i(x)\}$  formam a base dos polinômios de Lagrange. Notemos que (1.46) é um caso especial das fórmulas de quadratura (1.43) onde os pesos são dados por

$$w_i = \int_a^b l_i(x) dx. \quad (1.47)$$

A fórmula (1.46) é chamada de *fórmula de quadratura de Lagrange*

### Fórmulas de Newton-Cotes

Estas fórmulas são baseadas na interpolação de Lagrange (1.46) com os nós igualmente espaçados em  $[a, b]$ . Neste caso, denotamos os nós da quadratura por  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k = 0, \dots, n$ , e dizemos que:

a fórmula é fechada, se inclui os extremos do intervalo  $[a, b]$  como nós da quadratura, ou seja,  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  e  $h = (b - a)/n$ , ( $n \geq 1$ );

a fórmula é aberta, se não inclui os extremos do intervalo  $[a, b]$  como nós da quadratura, ou seja,  $x_0 = a + h$ ,  $x_n = b - h$  e  $h = (b - a)/(n + 2)$ , ( $n \geq 0$ ).

Supondo o caso da fórmula fechada, introduzindo a mudança de variável  $x = \Psi(t) = a + th$  temos que  $\Psi(0) = a$ ,  $\Psi(n) = b$  e  $x_k = a + kh$ , assim

$$\frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{a + th - (a + kh)}{a + ih - (a + kh)} = \frac{t - k}{i - k}. \quad (1.48)$$

Desta forma, usando a mudança de variável  $x = \Psi(t)$ , e (1.48), podemos reescrever os polinômios da base de Lagrange (1.31) em função da variável  $t \in [0, n]$ ,

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0, \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{\substack{k=0, \\ k \neq i}}^n \frac{t - k}{i - k} = \varphi_i(t), \quad 0 \leq i \leq n, \quad (n \geq 1)$$

onde denotamos  $\varphi_i(t)$  os polinômios de Lagrange na variável  $t \in [0, n]$ , e os pesos ou coeficientes da quadratura são obtidos por

$$w_i = \int_a^b l_i(x) dx = \int_0^n \varphi_i(t) h dt = h \int_0^n \varphi_i(t) dt,$$

consequentemente, a fórmula da quadratura (1.46) é reescrita por

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad \text{com } w_i = \int_0^n \varphi_i(t) dt,$$

denominada como *fórmula de Newton-Cotes*.

Analogamente, para a fórmula aberta se aplicarmos a mesma mudança de variável  $x = \Psi(t)$ , temos que  $\Psi(-1) = x_0 - h = a$  e  $\Psi(n+1) = x_n + h = b$ . Desta forma na fórmula aberta, os limites de integração muda e os pesos ficam definidos por

$$w_i = h \int_{-1}^{n+1} \varphi_i(t) dt.$$

O seguinte Teorema 1.3.10, Quateroni, Sacco e Saleri (2007, p. 388), nos diz o grau de precisão da fórmula de Newton-Cotes.

**Teorema 1.3.10.** Consideremos uma fórmula de Newton-Cotes. Se  $n$  for par, então o erro da quadratura é dado por

$$E_n(f) = \frac{M_n}{(n+2)!} h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi), \quad (1.49)$$

desde que  $f \in C^{n+2}([a, b])$ , com  $\xi \in (a, b)$  e

$$M_n = \begin{cases} \int_0^n t \omega_{n+1}(t) dt < 0 & \text{para fórmula fechada} \\ \int_{-1}^{n+1} t \omega_{n+1}(t) dt > 0 & \text{para fórmula aberta} \end{cases}$$

onde  $\omega_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^n (t - i)$ . De (1.49) verifica-se que o grau de precisão da quadratura é igual a  $n + 1$ . Analogamente, se  $n$  for ímpar, o erro da quadratura de Newton-Cotes é

$$E_n(f) = \frac{K_n}{(n+1)!} h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta), \quad (1.50)$$

desde que  $f \in C^{n+1}([a, b])$ , com  $\eta \in (a, b)$  e

$$K_n = \begin{cases} \int_0^n \omega_{n+1}(t) dt < 0 & \text{para fórmula fechada} \\ \int_{-1}^{n+1} \omega_{n+1}(t) dt > 0 & \text{para fórmula aberta} \end{cases}$$

Neste caso, o grau de precisão é  $n$ .

**Exemplo 1.3.11.** Tomando  $n = 0$ ,  $n = 1$  e  $n = 2$  na fórmula de Newton-Cotes resulta nas quadraturas conhecidas como fórmula do ponto médio, fórmula do trapézio e fórmula de Simpson, respectivamente.

*Fórmula do Ponto Médio:* Esta fórmula é obtida pela substituição da função  $f$  pela função constante igual ao valor obtido por  $f$  no ponto médio de  $[a, b]$ . Assim,

$$I_0(f) = (b - a) f \left( \frac{a + b}{2} \right)$$

e o único peso da integração é  $w_0 = b - a$  e o único nó é  $x_0 = (a + b)/2$ . Se  $f \in C^2([a, b])$ , calculando o erro temos que  $M_0 = 2/3$  e o erro da quadratura (1.49) é

$$E_0(f) = \frac{h^3}{3} f''(\xi), \quad h = (b - a)/2,$$

para algum  $\xi \in (a, b)$ . Note que a fórmula do ponto médio tem grau de precisão igual a 1.

*Fórmula do Trapézio:* Esta fórmula é obtida substituindo  $f$  por  $\Pi_1 f$ , que é o polinômio

interpolador de Lagrange de grau 1. Neste caso, temos os nós iguais aos extremos do intervalo  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$  e os pesos  $w_0 = w_1 = (b - a)/2$ , ficando a fórmula

$$I_1(f) = \frac{b - a}{2}[f(a) + f(b)].$$

Se  $f \in C^2([a, b])$ , calculando o erro da quadratura (1.50) temos  $K_1 = -1/6$  e

$$E_1(f) = \frac{-h^3}{12} f''(\xi), \quad h = b - a,$$

onde  $\xi \in (a, b)$ . Notemos que, como na regra do ponto médio, o grau de precisão da fórmula do trapézio é 1.

*Fórmula de Simpson:* Esta fórmula pode ser obtida pela substituição de  $f$  em  $[a, b]$  por um polinômio interpolador de grau 2. Os nós de integração são  $x_0 = a$ ,  $x_1 = (a + b)/2$  e  $x_2 = b$  e os pesos  $w_0 = w_2 = (b - a)/6$  e  $w_1 = 4(b - a)/6$ , desta forma a fórmula é

$$I_2(f) = \frac{b - a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Calculando o erro da quadratura (1.49), temos  $M_2 = -4/15$  e

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{b - a}{2},$$

desde que  $f \in C^4([a, b])$  e  $\xi \in (a, b)$ . Neste caso, temos o grau de precisão da fórmula igual a 3.

### Fórmula de Newton-Cotes Composta

O procedimento geral para obter a composição consiste em particionar o intervalo  $[a, b]$  em  $m$  subintervalos de tamanhos iguais  $T_j = [y_j, y_{j+1}]$  onde  $y_j = a + jh$  para  $j = 0, \dots, m$ , e  $h = (b - a)/m$ . Então, para cada subintervalo, aplica uma fórmula por interpolação com nós  $\{x_k^{(j)}, 0 \leq k \leq n\}$  e pesos  $\{w_k^{(j)}, 0 \leq k \leq n\}$ . E como

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x) dx,$$

a quadratura por interpolação composta é dada por

$$I_{n,m}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^n w_k^{(j)} f(x_k^{(j)}). \quad (1.51)$$

O erro da quadratura é definido como  $E_{n,m}(f) = I(f) - I_{n,m}(f)$ . Usando as mesmas notações do Teorema 1.3.10, segue o resultado de convergência da quadratura composta.

**Teorema 1.3.12.** Considere a fórmula de Newton-Cotes composta (1.51). Se  $f \in C^{n+2}([a, b])$  e  $n$  par, então

$$E_{n,m}(f) = \frac{b - a}{(n + 2)!} \frac{M_n}{\gamma_n^{n+3}} h^{n+2} f^{(n+2)}(\xi),$$

onde  $\xi \in (a, b)$ . Portanto, o erro da quadratura tem ordem infinitesimal igual a  $n + 2$  e o grau de precisão é  $n + 1$ .

Se  $f \in C^{n+1}([a, b])$  e  $n$  for ímpar, então

$$E_{n,m}(f) = \frac{b-a}{(n+1)!} \frac{K_n}{\gamma_n^{n+2}} h^{n+1} f^{(n+1)}(\eta),$$

onde  $\eta \in (a, b)$ . Assim, o erro da quadratura tem ordem infinitesimal igual a  $n + 1$  e a fórmula tem grau de precisão  $n$ . O valor  $\gamma_n = n + 2$  se a fórmula for aberta, enquanto  $\gamma_n = n$  se for fechada.

### Integração Gaussiana e Interpolação

Polinômios ortogonais têm um papel importante no desenvolvimento das fórmulas de quadraturas para maximizar o grau de precisão. Sejam  $x_0, \dots, x_n$  pontos distintos no intervalo  $[-1, 1]$ . Consideremos o problema de aproximar a integral com peso

$$I_w(f) = \int_{-1}^1 f(x)w(x)dx,$$

e inicialmente  $f \in C^0([-1, 1])$ . Vamos supor que a quadratura tem a forma

$$I_{n,w}(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \quad (1.52)$$

onde  $x_i$  são os nós da quadratura e  $w_i$  são os coeficientes a serem determinados. Denotemos por  $E_{n,w}(f) = I_w(f) - I_{n,w}(f)$  o erro entre a integral exata e sua aproximação. Se  $E_{n,w}(f) = 0$  para todo  $f \in P^r([a, b])$  (sendo  $r$  inteiro positivo) dizemos que a fórmula  $I_{n,w}$  tem *grau de precisão*  $r$  com respeito ao peso  $w$ .

Verificamos que o grau de precisão associado ao peso  $w$  é maior ou igual a  $n$ . De fato, se tomarmos o polinômio interpolador de Lagrange  $\mathcal{I}_n f$  como aproximação de  $f$ , teremos

$$I_{n,w}(f) = \int_{-1}^1 \mathcal{I}_n f(x)w(x) dx,$$

com os nós distribuídos uniformemente em  $[-1, 1]$ , temos que o grau de precisão é maior ou igual a  $n$ , onde os coeficientes são

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i(x)w(x)dx, \quad i = 0, \dots, n, \quad (1.53)$$

sendo  $l_i \in V_n$  os polinômios de Lagrange tais que  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ , para  $i, j = 0, \dots, n$ . A questão é saber o quanto maior o grau de precisão  $r$  pode ser, isto é, se  $r = n + m$ , determinar o  $m$  máximo.

**Teorema 1.3.13.** Dado  $m \geq 0$  e suponha que a quadratura é obtida por interpolação. O polinômio nodal  $\omega_{n+1}$  (1.37) associado aos nós  $\{x_i\}$  satisfaz

$$\int_{-1}^1 \omega_{n+1}(x)p(x)w(x)dx = 0, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{P}_{m-1}, \quad (1.54)$$

se, e somente se, a quadratura (1.52) tem grau de precisão  $n + m$ .

**Demonstração:** Dado  $f \in \mathcal{P}_{n+m}$  arbitrário, então existem  $\pi_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1}$  e  $q_n \in \mathcal{P}_n$  tal que  $f = \omega_{n+1}\pi_{m-1} + q_n$ . Como o grau de precisão de uma fórmula por interpolação com  $n + 1$  nós é maior ou igual a  $n$ , segue que

$$\sum_{i=0}^n w_i q_n(x_i) = \int_{-1}^1 q_n(x)w(x) dx = \int_{-1}^1 f(x)w(x) dx - \int_{-1}^1 \omega_{n+1}(x)\pi_{m-1}(x)w(x) dx.$$

Usando a hipótese (1.54) temos  $\int_{-1}^1 \omega_{n+1}(x)\pi_{m-1}(x)w(x) dx = 0$ , e assim

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x) dx = \int_{-1}^1 q_n(x)w(x) dx$$

Além disso, como  $\omega_{n+1}(x_i) = 0$  para todo  $i$ , então

$$I_{n,w}(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) = \sum_{i=0}^n w_i (\omega_{n+1}(x_i)\pi_{m-1}(x_i) + q_n(x_i)) = \sum_{i=0}^n w_i q_n(x_i).$$

Assim para todo  $f \in \mathcal{P}_{n+m}$

$$\begin{aligned} E_{n,w}(f) &= I(f) - I_{n,w}(f) \\ &= \int_{-1}^1 q_n(x)w(x) dx - \sum_{i=0}^n w_i q_n(x_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\omega_{n+1}(x_i) = 0$  para  $0 \leq i \leq n$  e  $\omega_{n+1}p$  tem grau no máximo  $m + n$  para todo  $p \in \mathcal{P}_{m-1}$ , a recíproca segue.  $\square$

**Teorema 1.3.14.** O maior grau de precisão de uma fórmula de quadraturas por interpolação é  $2n + 1$ .

**Demonstração:** Suponhamos por absurdo que não seja verdade. Tomemos  $m \geq n + 2$  no Teorema anterior 1.3.13 e que o grau de precisão da quadratura seja  $n + m$ . Como  $p = \omega_{n+1} \in \mathcal{P}_{m-1}$  então teríamos que ter

$$\int_{-1}^1 \omega_{n+1}(x)\omega_{n+1}w(x)dx = 0$$

o que é um absurdo, pois  $\omega_{n+1}^2(x)w(x) > 0$ .  $\square$

Desta forma, se  $m = n + 1$  (o maior valor admissível) segue que o polinômio nodal  $\omega_{n+1}$  satisfaz a relação (1.54),

$$\int_{-1}^1 \omega_{n+1}(x)p(x)w(x)dx = 0, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{P}_n.$$

Assim  $\omega_{n+1}$  é um polinômio de grau  $n + 1$  ortogonal a todos os polinômios de grau menor, concluímos que ele é múltiplo de  $p_{n+1}$  (chamamos de  $\{p_k\}$  uma sequência de polinômios ortogonais). Em particular, se considerarmos os nós sendo as raízes  $\{x_i\}$  de  $p_{n+1}$ , isto é,

$$p_{n+1}(x_i) = 0, \quad \text{para } j = 0, \dots, n, \tag{1.55}$$

então dizemos que as abscissas  $\{x_i\}$  são os nós de Gauss associados à função peso  $w(x)$ . Podemos concluir que a quadratura (1.52) com nós e coeficientes dados, respectivamente, por (1.55) e (1.53) tem grau de precisão  $2n+1$ , o valor máximo para fórmulas de quadraturas por interpolação com  $n+1$  nós, e a chamamos de quadratura Gaussiana.

Estes nós de Gauss são pontos internos do intervalo  $(-1, 1)$ . A fim de incluir no conjunto de nós os extremos do intervalo, aplicamos uma mudança na quadratura Gaussiana. Consideremos agora os nós sendo as  $n+1$  raízes do polinômio

$$\bar{\omega}_{n+1}(x) = p_{n+1}(x) + ap_n(x) + bp_{n-1}(x),$$

onde as constantes  $a$  e  $b$  são determinadas de tal maneira que  $\bar{\omega}_{n+1}(-1) = \bar{\omega}_{n+1}(1) = 0$ . Denotemos estas novas raízes por  $\bar{x}_0 = -1, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n = 1$ , e os coeficientes  $\{\bar{w}_i\}$  obtidos em (1.53), ou seja,

$$\bar{w}_i = \int_{-1}^1 \bar{l}_i(x)w(x) dx, \quad i = 0, \dots, n, \quad (1.56)$$

onde  $\bar{l}_i \in \mathcal{P}_n$  são os polinômios de Lagrange canônicos tais que  $\bar{l}_i(\bar{x}_j) = \delta_{ij}$ , para  $i, j = 0, \dots, n$ . A quadratura

$$I_{n,w}^{GL}(f) = \sum_{i=0}^n \bar{w}_i f(\bar{x}_i) \quad (1.57)$$

é chamada de fórmula de Gauss-Lobatto com  $n+1$  nós, e tem grau de precisão  $2n-1$ . De fato, para qualquer  $f \in \mathcal{P}_{2n-1}$ , existem polinômios  $\pi_{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}$  e  $q_n \in \mathcal{P}_n$  tal que  $f = \bar{\omega}_{n+1}\pi_{n-2} + q_n$ . A quadratura (1.57) tem grau de precisão maior ou igual a  $n$ , assim

$$\sum_{i=0}^n \bar{w}_i q_n(\bar{x}_i) = \int_{-1}^1 q_n(x)w(x) dx = \int_{-1}^1 f(x)w(x) dx - \int_{-1}^1 \bar{\omega}_{n+1}(x)\pi_{n-2}(x)w(x) dx.$$

De (1.56) concluímos que  $\bar{\omega}_{n+1}$  é ortogonal a todos os polinômios de grau menor ou igual a  $n-2$ . Além disso,  $f(\bar{x}_j) = q_n(\bar{x}_j)$ , assim concluímos que

$$I_w(f) = \int_{-1}^1 f(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^n \bar{w}_i f(\bar{x}_i) = I_{n,w}^{GL}(f), \text{ para todo } f \in \mathcal{P}_{2n-1}.$$

### 1.3.3 Método de Projeções

Sejam  $V$  e  $W$  espaços de Banach com  $W \subseteq V$ . Consideremos uma aplicação  $T : V \rightarrow W$  e  $w \in \text{Im}(T)$  fixo.

Dado o seguinte problema:

$$\text{Encontrar } v \in V \text{ tal que } T(v) = w, \quad (1.58)$$

os métodos de projeção buscam uma aproximação para a solução do problema (1.58),  $v_n \approx v$ , em um subespaço  $V_n \subset V$  com dimensão finita,  $\dim V_n = n$ .

Lembramos que uma *projeção* é um operador linear  $\Pi_n : V \rightarrow V$  tal que  $\Pi_n^2 = \Pi_n$ . Cada projeção define um subespaço sendo o conjunto imagem:

$$V_n := \text{Im}(\Pi_n).$$

Neste caso, dizemos que  $\Pi_n$  é uma projeção de  $V$  sobre  $V_n$ .

Vamos mostrar que  $V_n$  é caracterizado pelo conjunto dos pontos fixos,

$$V_n = \{v \in V, \Pi_n(v) = v\}. \quad (1.59)$$

De fato, se  $v \in V_n$  então existe  $\tilde{v} \in V$  tal que  $\Pi_n(\tilde{v}) = v$  e aplicando a projeção, segue que

$$v = \Pi_n(\tilde{v}) = \Pi_n^2(\tilde{v}) = \Pi_n(v),$$

logo  $\Pi_n(v) = v$ . Por outro lado, se  $v \in V$  e  $v = \Pi_n(v)$ , obviamente  $v \in \text{Im}(\Pi_n) = V_n$ .

Consideremos uma sequência de projeções  $\{\Pi_n\}$ ,  $\Pi_n : V \rightarrow V$ , sendo  $V$  um espaço de Banach, com a seguinte característica,

$$\dim V_n = n, \text{ onde } V_n = \text{Im}(\Pi_n).$$

**Definição 1.3.15.** Dizemos que a sequência  $\{\Pi_n\}$  é convergente se

$$\Pi_n(v) \rightarrow v \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

para todo  $v \in V$ .

Consideremos uma sequência de projeções  $\{\Pi_n\}$  convergente e seus respectivos subespaços  $V_n$ . O método das projeções consiste em determinar soluções  $f_n$  no subespaço  $V_n$  do problema (1.58), ou seja,

$$\text{Encontrar } v_n \in V_n, \text{ tal que } T(v_n) = w. \quad (1.60)$$

Em geral este problema não admite solução no subespaço  $V_n$ , mas cada  $v_n \in V_n$  gera um erro

$$d_n := T(v_n) - w.$$

Não esperamos que  $d_n$  seja nulo, mas impomos que a projeção do erro seja nulo, isto é,  $\Pi_n(d_n) = 0$ , obtendo

$$\Pi_n(T(v_n) - w) = 0 \quad \text{ou seja, } \Pi_n(T(v_n)) = \Pi_n(w).$$

**Exemplo 1.3.16.** Seja  $V = W = C(D)$ . Consideremos o problema dado pela equação

$$\lambda v = g + Kv, \text{ onde } g \in C(D) \text{ e } K \in L(C(D), C(D)),$$

que consiste em achar  $v$  para cada  $\lambda$  fixado.

Neste caso, tomemos o operador linear  $T : C(D) \rightarrow C(D)$  como sendo  $T = \lambda I - K$ . O método da projeção aplicado neste problema corresponde a achar  $v_n \in V_n$  tal que

$$\Pi_n T v_n = \Pi_n g \quad \implies \quad \Pi_n \lambda v_n = \Pi_n g + \Pi_n K v_n.$$

Pela linearidade da projeção  $\Pi_n$  e como a solução  $v_n \in V_n$ , temos  $\Pi_n \lambda v_n = \lambda v_n$  e podemos reescrever o problema na forma

$$\lambda v_n = g_n + K_n v_n, \text{ com } g_n = \Pi_n g \text{ e } K_n = \Pi_n \circ K. \quad (1.61)$$

Os métodos de projeção mais conhecidos são os métodos de Galerkin e da colocação. Para o método de Galerkin, assumimos que o espaço de Banach  $X$  também é um espaço de Hilbert com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Consideramos uma sequência de subespaços,  $X_n \subset X$ , e as respectivas projeções ortogonais,  $\Pi_n : X \rightarrow X_n$ , definidas por  $\langle \Pi_n(x) - x, v_n \rangle = 0$  para todo  $v_n \in V_n$ . O método de Galerkin para o problema  $T(v) = w$  pode ser expresso pelas equações  $\langle T(v_n) - w, \phi_j \rangle = 0$  ( $1 \leq i \leq j$ ), sendo  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  uma base para  $V_n$ . [Atkinson \(1997, Seção 3.1.2\)](#) e [Hackbusch \(1995, Seção 4.5\)](#) descrevem o método de Galerkin para equações integrais.

Desenvolvemos mais detalhadamente na próxima seção o método da colocação visto a sua maior importância no método que propomos na seção 3.1. Escrevemos esta seção utilizando como base os livros de [Atkinson \(1997\)](#) e [Hackbusch \(1995\)](#).

### 1.3.4 Método da Colocação

Consideremos  $V = W = C([a, b])$ . Definimos o método da colocação sendo o método da projeção cuja sequência de projeções é determinada pelos operadores interpoladores  $\mathcal{I}_n$ , Definição 1.3.4.

Dada uma discretização  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  seja  $\{l_i, i = 1, \dots, n\}$  a base de Lagrange correspondente aos pontos  $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$ , satisfazendo (1.29),

$$l_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Consideremos os subespaços  $V_n$  gerados pela base de Lagrange. Pela definição do operador interpolador e por (1.35), para cada  $v \in V$  a projeção de  $v$  é dada por

$$\mathcal{I}_n v = \sum_{i=1}^n v(x_i) l_i.$$

Desta forma, o método da colocação consiste em: dado  $w \in W$ , achar  $v_n \in V_n$  tal que

$$\mathcal{I}_n(T(v_n)) = \mathcal{I}_n(w),$$

que é equivalente a

$$\sum_{i=1}^n y_n(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^n w(x_i) l_i(x), \quad y_n(x) = T(v_n(x)).$$

Como as funções  $l_1, \dots, l_n$  são linearmente independentes, segue que

$$y_n(x_i) = w(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad y_n(x) = T(v_n(x)). \quad (1.62)$$

**Observação 1.3.17.** No caso particular em que  $T$  é um operador linear, temos

$$y_n(x) = T(v_n(x)) = T\left(\sum_{j=1}^n v_{n,j} l_j(x)\right) = \sum_{j=1}^n v_{n,j} \tilde{l}_j(x),$$

onde  $\tilde{l}_j = T(l_j)$ , e substituindo no sistema (1.62) tem-se o sistema linear

$$\sum_{j=1}^n v_{n,j} \tilde{l}_j(x_i) = w_n(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Exemplo 1.3.18.** Consideremos o operador definido por  $T = \lambda I - K$ , o mesmo do Exemplo 1.3.16. O método da colocação consiste em resolver o problema de autovalores (1.61),

$$\lambda v_n(x_i) = g(x_i) + (Kv_n)(x_i). \quad \text{para } 1 \leq i \leq n,$$

onde  $v_n(x) = \sum_{j=1}^n v_{n,j} l_j(x)$ . Substituindo  $v_n$  nas equações acima, obtemos

$$\lambda \sum_{j=1}^n v_{n,j} l_j(x_i) = g(x_i) + \left( K \left[ \sum_{j=1}^n v_{n,j} l_j \right] \right) (x_i). \quad 1 \leq i \leq n.$$

Como  $K$  é um operador linear e  $l_j(x_i) = \delta_{i,j}$  segue que

$$\lambda v_{n,i} - \sum_{j=1}^n ((Kl_j)(x_i)) v_{n,j} = g(x_i) \quad 1 \leq i \leq n,$$

que é um sistema linear nas incógnitas  $v_{n,j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

## Capítulo 2

# Resultados de Existência e Unicidade

Neste capítulo, vamos considerar um intervalo real  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e um número real positivo  $p \geq 1$ . Estudaremos diferentes resultados de existência e unicidade de solução da equação integral não linear de Fredholm (1.8),

$$u(x) = g(x) + f(x, (Ku)(x)), \quad x \in [a, b], \quad (2.1)$$

sendo que  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $K$  é o operador integral

$$(Ku)(x) = \int_a^b k(x, y)u(y) dy, \quad \text{com } k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

e abordaremos soluções no espaço  $L^p([a, b])$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

Na primeira parte, apresentamos resultados sobre existência de soluções sobre  $L^1([a, b])$ , simplificamos os resultados obtidos por [Banaś e Knap \(1989\)](#) e [Emmanuele \(1991\)](#). Acrescentamos uma condição e obtemos unicidade da solução (um resultado que não foi apresentado por estes autores). Na segunda parte demonstramos resultados com hipóteses adequadas para garantir existência e unicidade sobre o espaço  $L^p([a, b])$ ,  $1 < p < \infty$ . Apresentamos também resultados em  $L^p([a, b])$  para uma forma mais geral da equação integro-funcional. Por fim, demonstramos resultados em  $L^\infty([a, b])$ , que serão uteis na análise numérica do método da colocação.

### 2.1 Resultados sobre $L^1([a, b])$

Nesta seção apresentamos resultados sobre existência de soluções sobre  $L^1([a, b])$ , de forma similar aos resultados obtidos por [Banaś e Knap \(1989\)](#) e [Emmanuele \(1991\)](#). Acrescentamos uma condição e obtemos a unicidade da solução.

**Definição 2.1.1.** Dizemos que uma função  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as *condições de Carathéodory* se

(i)  $f(\cdot, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável para cada  $y \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua para q.t.p.  $x \in [a, b]$  (q.t.p := quase todo ponto).

**Definição 2.1.2.** Seja  $X = L^p([a, b])$ ,  $p \geq 1$ , um espaço de Banach. Dizemos que um operador  $F : X \rightarrow X$  é *de Nemytskii*, ou *superpositivo*, com relação a uma função  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se para cada função  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  associa a função  $Fu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)). \quad (2.3)$$

O operador de Nemytskii tem importância nos principais resultados de existência de solução para equações integrais não lineares sobre o espaço  $L^p([a, b])$ . Uma das propriedades muito usadas é quando o operador  $F$  é contínuo e limitado. Condições necessárias são apresentadas no resultado a seguir.

**Teorema 2.1.3.** (Karoui e Jawahdou, 2010) Seja  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz as condições de Carathéodory. Considere  $1 \leq p, r < \infty$ . O operador superpositivo  $F$ , com respeito a  $f$ , é limitado e contínuo de  $L^p([a, b])$  a  $L^r([a, b])$  se existem uma constante positiva  $\tau > 0$  e uma função não negativa  $\theta(x)$  em  $L^r([a, b])$  tais que

$$|f(x, y)| \leq \theta(x) + \tau |y|^{p/r} \quad \text{para q.t.p. } x \in [a, b] \text{ e } y \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

**Observação 2.1.4.** Note que pode acontecer  $p = 1$ , em cujo caso escolhemos  $r = 1$ , e o operador superpositivo aplica  $L^1([a, b])$  nele próprio continuamente. No caso em que  $p > 1$  tomamos  $r = q$  sendo o seu conjugado,  $1/p + 1/q = 1$ .

Os resultados apresentados por Banaś e Knap (1989) e Emmanuele (1991) foram obtidos adotando o intervalo  $[0, 1]$ . Visando reescrever a equação integral não-linear (2.1) na forma de operador funcional, vamos denotar por  $H$  o operador obtido por  $H = FK$  sendo  $K$  operador linear integral, definido em (2.2) e  $F$  o operador superpositivo, associado a  $f$ , definido em (2.3), ou seja,

$$(Hu)(x) = f \left( x, \int_0^1 k(x, y)u(y) dy \right) \quad (2.5)$$

e denotar o operador  $A$  por:

$$Au = g + Hu, \quad (2.6)$$

assim, a equação integral (2.1) pode ser reescrita da forma  $u = Au$ . Veremos abaixo que os resultados de existência se baseiam na determinação de um ponto fixo para o operador  $A$ .

**Teorema 2.1.5.** A equação (2.1) tem pelo menos uma solução  $u \in L^1([0, 1])$  se valem as seguintes condições:

(i)  $g \in L^1([0, 1])$ ;

(ii) a função kernel  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  satisfaz as condições de Carathéodory e existe uma função não negativa  $\gamma \in L^1([0, 1])$  tal que

$$k(x, y) \leq \gamma(x), \quad \text{para q.t.p. } x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1],$$

(iii) a função  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  também satisfaz as condições de Carathéodory e existem uma constante positiva  $\tau > 0$  e uma função não negativa  $\theta \in L^1([0, 1])$  tais que

$$f(x, y) \leq \theta(x) + \tau|y|, \quad \text{para q.t.p. } x \in [0, 1], \quad y \in \mathbb{R}.$$

(iv) o operador  $K$  satisfaz a relação

$$\tau\|K\|_1 < 1,$$

onde  $\|K\|_1$  é a norma induzida pela norma-1 sobre  $L^1([0, 1])$ .

**Demonstração:** A hipótese (ii) implica que o operador integral  $K$  aplica continuamente  $L^1([0, 1])$  sobre ele próprio. Além disso, aplicando o Teorema 2.1.3 a função  $f$ , satisfazendo a hipótese (iii), obtemos que  $F$  aplica continuamente  $L^1([0, 1])$  sobre ele próprio e, portanto, conclui-se o mesmo para o operador  $H$  em (2.5).

Finalmente, pela hipótese (i) temos que o operador  $A$ , definido em (2.6), também aplica continuamente  $L^1([0, 1])$  sobre ele próprio. Além disso,

$$\begin{aligned} \|Au\|_1 &\leq \|g\|_1 + \|FKu\|_1 \leq \|g\|_1 + \int_0^1 \left| \theta(x) + \tau \int_0^1 k(x, y)u(y) dy \right| dx \\ &\leq \|g\|_1 + \|\theta\|_1 + \tau\|K\|_1\|u\|_1. \end{aligned}$$

Segue desta estimativa que o operador  $A$  aplica a bola fechada  $B_r$  sobre ela mesma, com  $r = (\|g\|_1 + \|\theta\|_1) / (1 - \tau\|K\|_1)$ . Evidentemente  $B_r$  é não vazio, limitado, fechado e convexo. Usando o Teorema 3 de Banaś e Knap (1989) mostra-se que o operador  $A$  restrito à bola fechada  $B_r$ ,  $A|_{B_r} : B_r \rightarrow B_r$  é fracamente contínuo.

Mostraremos agora que existe  $L \in [0, 1)$ , tal que  $\beta(A(Y)) = L\beta(Y)$ , onde  $\beta$  é a medida de não compacidade (1.26), para subconjuntos não vazios  $Y \subset B_r$ . Sejam um conjunto não vazio  $Y \subset B_r$  e um número positivo  $\varepsilon > 0$  fixado. Além disso, tome  $D \subset [0, 1]$  tal que seu comprimento  $l(D) \geq \varepsilon$ . Então, para todo  $u \in Y$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_D |(Au)(x)| dx &\leq \int_D |g(x)| dx + \int_D \theta(x) dx + \tau \int_D \left| \int_0^1 k(x, y)u(y) dy \right| dx \\ &\leq \|g\|_1 + \|\theta\|_1 + \tau\|Ku\|_1 \\ &\leq \|g\|_1 + \|\theta\|_1 + \tau\|K\|_1\|u\|_1 \end{aligned}$$

visto que  $K$  é um operador contínuo sobre  $L^1([a, b])$ . Uma vez que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup \left[ \int_D |g(x)| dx + \int_D \theta(x) dx : \text{com } D \subset [0, 1] \text{ e } l(D) \leq \varepsilon \right] \right\} = 0$$

pois  $g$  e  $\theta$  são integráveis, conseguimos obter

$$\beta(A(Y)) \leq \tau \|K\|_1 \beta(Y)$$

e, pela condição (iv),  $\tau \|K\|_1 < 1$ , temos que  $A$  é uma contração com respeito a medida de não compacidade  $\beta$ . Portanto pelo Teorema 1.2.21 do ponto fixo de Darbo o operador  $A$  tem pelo menos um ponto fixo em  $B_r$ .  $\square$

A unicidade da solução da equação integral não linear (2.6) é dada pelo seguinte teorema.

**Teorema 2.1.6.** A equação integro funcional de Fredholm (2.6) tem solução única se, além das hipóteses (i) a (iv) do Teorema de existência 2.1.5 serem satisfeitas, a função  $f(\cdot, \cdot)$  é Lipschitz com respeito à segunda variável com a constante de Lipschitz  $\tau$  dada em (ii), isto é,

$$(v) \quad |f(x, u) - f(x, v)| \leq \tau |u - v|, \quad \forall x \in [0, 1] \text{ e } u, v \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração:** Por contradição, suponha que a equação (2.1) tem duas soluções distintas  $u, v \in L^1([0, 1])$ , ou seja  $u, v$  são pontos fixos de  $A$ . Temos que

$$\begin{aligned} |Au(x) - Av(x)| &= |f(x, (Ku)(x)) - f(x, (Kv)(x))| \\ &\leq \tau |(Ku)(x) - (Kv)(x)|, \quad \forall x \in [0, 1], \end{aligned}$$

assim

$$\|Au - Av\|_1 \leq \tau \|K(u - v)\|_1 \leq \tau \|K\|_1 \|u - v\|_1 \quad (2.7)$$

e pela condição (iv),  $\|Au - Av\|_1 < \|u - v\|_1$ .

Por outro lado,  $u, v$  são pontos fixos de  $A$ , conseqüentemente  $\|Au - Av\|_1 = \|u - v\|_1$  o que é uma contradição. Portanto, a solução é única.  $\square$

**Observação 2.1.7.** A condição (v) pode substituir a desigualdade na condição (iii). De fato, uma vez fixado  $u_0 \in \mathbb{R}$ , segue de (v) que

$$|f(x, y)| - |f(x, u_0)| \leq |f(x, y) - f(x, u_0)| \leq \tau |y - u_0| \leq \tau |u_0| + \tau |y|,$$

logo

$$|f(x, y)| \leq \tau |u_0| + |f(x, u_0)| + \tau |y|$$

satisfazendo (ii) tomando  $\theta(x) = \tau |u_0| + |f(x, u_0)|$ .

## 2.2 Resultados sobre $L^p([a, b])$

Nesta seção apresentaremos resultados de existência e unicidade quando o espaço é  $X = L^p([a, b])$  com  $1 < p < \infty$ . Seja  $1 < q < \infty$  o conjugado de  $p$ , isto é  $1/p + 1/q = 1$ , e consideremos a equação integro-funcional (2.1) e as seguintes condições sobre as funções  $g, f$  e  $k$ :

$$(a) \ g \in L^p([a, b]), \text{ isto é, } \left( \int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty;$$

$$(b) \ k \in L^q([a, b] \times [a, b]), \text{ isto é, } \left( \int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^q dx dy \right)^{1/q} < \infty.$$

(c)  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as condições de Carathéodory e existem uma constante positiva  $\tau_1 > 0$  e uma função não negativa  $\theta_1 \in L^p([a, b])$  tais que

$$|f(x, y)| \leq \theta_1(x) + \tau_1 |y|^{q-1}, \quad y \in \mathbb{R}, \ x \in [a, b].$$

(d)  $f$  é Lipschitz em relação a segunda variável com constante de Lipschitz  $\tau_2 > 0$ ,

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq \tau_2 |u - v|, \quad \text{para todo } x \in [a, b] \text{ e } u, v \in \mathbb{R}.$$

**Lema 2.2.1.** Seja  $1 < p < \infty$  e  $q$  o conjugado de  $p$ . Seja  $A$  o operador definido em (2.6) e admita que as funções  $g, f$  e  $k$  satisfazem as condições (a) – (d), então  $A$  aplica  $L^p([a, b])$  sobre ele próprio, ou seja,

$$\forall u \in L^p([a, b]) \implies Au \in L^p([a, b]).$$

**Demonstração:** Basta mostrar que o operador  $H$  aplica  $L^p([a, b])$  sobre ele próprio.

Dado  $u \in L^p([a, b])$ , utilizando a desigualdade em (c) temos

$$\begin{aligned} \|Hu\|_p &= \left( \int_a^b |F(Ku)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_a^b |f(x, (Ku)(x))|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_a^b |\theta_1(x) + \tau_1 |(Ku)(x)|^{q-1}|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|Hu\|_p &\leq \left( \int_a^b |\theta_1(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |\tau_1 |(Ku)(x)|^{q-1}|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \|\theta_1\|_p + \tau_1 \left( \int_a^b \left| \int_a^b k(x, y)u(y) dy \right|^q dx \right)^{1/p} \\ &\leq \|\theta_1\|_p + \tau_1 \left( \int_a^b \left( \int_a^b |k(x, y)u(y)| dy \right)^q dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

agora aplicando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\|Hu\|_p &\leq \|\theta_1\|_p + \tau_1 \left\{ \int_a^b \left[ \left( \int_a^b |k(x, y)|^q dy \right)^{1/q} \left( \int_a^b |u(y)|^p dy \right)^{1/p} \right]^q dx \right\}^{1/p} \\
&= \|\theta_1\|_p + \tau_1 \left\{ \int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^q dy dx \right\}^{1/p} \|u\|_p^{q-1} \\
&= \|\theta_1\|_p + \tau_1 \|k\|_q^{q-1} \|u\|_p^{q-1}
\end{aligned}$$

logo  $\|Hu\|_p < \infty$  e  $Hu \in L^p([a, b])$ . □

**Lema 2.2.2.** Consideremos o operador  $A$ , definido em 2.6. Admitindo as hipóteses (a)–(d), então o operador  $A$  é compacto.

**Demonstração:** Escrevemos  $A = A_1 + H$ , onde  $A_1$  é o operador constante  $A_1 u = g$  e  $H$  é o operador  $Hu = F(Ku)$  dado em (2.5). Obviamente  $A_1$  é um operador compacto sobre  $L^p([a, b])$ , pois é um operador constante e  $g \in L^p([a, b])$ . Desta forma, basta provar que  $H$  é compacto.

*Etapa 1:* Suponha que  $k \in C([a, b]^2)$ . Vamos mostrar que  $H : L^p([a, b]) \rightarrow C([a, b])$  é compacto.

Sejam  $u \in L^p([a, b])$  e  $x, x_0 \in [a, b]$ , segue de (d) que

$$\begin{aligned}
|(Hu)(x) - (Hu)(x_0)| &= \left| f \left( x, \int_a^b k(x, y)u(y) dy \right) - f \left( x_0, \int_a^b k(x_0, y)u(y) dy \right) \right| \\
&\leq \tau_2 \left| \int_a^b k(x, y)u(y) dy - \int_a^b k(x_0, y)u(y) dy \right| \\
&\leq \tau_2 \int_a^b |k(x, y) - k(x_0, y)| |u(y)| dy \\
&\leq \tau_2 \left( \int_a^b |k(x, y) - k(x_0, y)|^q dy \right)^{1/q} \left( \int_a^b |u(y)|^p dy \right)^{1/p} \\
&\leq \tau_2 \sup_{y \in [a, b]} |k(x, y) - k(x_0, y)| (b - a)^{1/q} \|u\|_p \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Como  $k(\cdot, \cdot)$  é uniformemente contínua em  $[a, b]^2$ , então da desigualdade acima segue que  $Hu \in C([a, b])$ .

Dada uma sequência limitada  $S = \{u_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  em  $L^p([a, b])$ , vamos provar que  $HS$  é uniformemente limitada e equicontínua.

Por hipótese de  $S$ , existe uma constante  $M_S > 0$  tal que  $\|u_n\|_p \leq M_S$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pela hipótese (c) e usando procedimento análogo de (2.8), temos que

$$|(Hu_n)(x)| \leq \theta_1(x) + \tau_1 \left| \int_a^b k(x, y)u_n(y) dy \right|^{q-1} \leq \theta_1(x) + \tau_1 \|k\|_\infty^{q-1} (b - a)^{q-1} M_S^{q-1},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [a, b]$ . Como  $\theta_1$  é limitada, logo  $HS$  é uniformemente limitada em  $C([a, b])$ . Além disso, para todo  $x, x_0 \in [a, b]$  e  $n \in \mathbb{N}$  em (2.8) temos

$$|(Hu_n)(x) - (Hu_n)(x_0)| \leq \tau_2 \sup_{y \in [a, b]} |k(x, y) - k(x_0, y)| (b - a)^{1/q} M_S$$

que implica a equicontinuidade de  $HS$ . Portanto pelo Teorema de Arzela-Ascoli 1.2.16 temos que  $HS$  é pré-compacto em  $C([a, b])$ . Como  $C([a, b])$  é imerso continuamente em  $L^p([a, b])$  segue que  $H$  também é compacto em  $L^p([a, b])$ .

*Etapa 2:* Suponha  $k \in L^q([a, b]^2)$ . Vamos mostrar que  $H : L^p([a, b]) \rightarrow L^p([a, b])$  é compacto. Como  $C([a, b]^2)$  é denso em  $L^q([a, b]^2)$ , existe uma sequência de operadores  $(k_n(\cdot, \cdot))_{n \in \mathbb{N}} \subset C([a, b]^2)$  tal que  $\|k_n - k\|_q \rightarrow 0$ .

Tomemos a mesma sequência  $S$  da Etapa 1. Denotemos por  $H_{k_n}$  o operador similar a  $H$  substituindo a função  $k$  por  $k_n$ . Como  $k_1 \in C([a, b])$ , pela Etapa 1 segue que  $H_{k_1}$  é compacto, logo existe uma subsequência  $(u_n^{(1)})_n$  da sequência  $(u_n)_n$  tal que  $(H_{k_1} u_n^{(1)})_n$  é convergente. Analogamente, existe uma subsequência  $(u_n^{(2)})_n$  de  $(u_n^{(1)})_n$  tal que  $(H_{k_2} u_n^{(2)})_n$  é convergente. Consequentemente, para todo  $m \in \mathbb{N}$  podemos obter uma subsequência  $(u_n^{(m)})_n$  de  $(u_n^{(m-1)})_n$  tal que  $(H_{k_m} u_n^{(m)})_n$  é convergente. Consideremos a sequência diagonal  $(u_n^{(n)})_n$ , vamos mostrar que  $(Hu_n^{(n)})_n$  é uma sequência de Cauchy em  $L^p([a, b])$ . Para todo  $m, l, n \in \mathbb{N}$  temos

$$\|Hu_m^{(m)} - Hu_l^{(l)}\|_p \leq \|Hu_m^{(m)} - H_{k_n} u_m^{(m)}\|_p + \|H_{k_n} u_m^{(m)} - H_{k_n} u_l^{(l)}\|_p + \|H_{k_n} u_l^{(l)} - Hu_l^{(l)}\|_p. \quad (2.9)$$

Como  $(H_{k_n} u_l^{(l)})_l$  é convergente, então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N_\varepsilon > 0$  tal que

$$\|H_{k_n} u_m^{(m)} - H_{k_n} u_l^{(l)}\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall m, l \geq N_\varepsilon. \quad (2.10)$$

Usando o mesmo desenvolvimento de (2.8) temos que

$$\begin{aligned} \|Hu_m^{(m)} - H_{k_n} u_m^{(m)}\|_p^p &\leq \int_a^b |Hu_m^{(m)}(x) - H_{k_n} u_m^{(m)}(x)|^p dx \\ &\leq \tau_2 \int_a^b \|k - k_n\|_q^p \|u_m^{(m)}\|_p^p dx \\ &= \tau_2 \|k - k_n\|_q^p \|u_m^{(m)}\|_p^p (b - a) \end{aligned}$$

Como  $\|k - k_n\|_q \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então existe  $M_\varepsilon > 0$  tal que

$$\|Hu_m^{(m)} - H_{k_n} u_m^{(m)}\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Combinando (2.9)-(2.11) concluímos que  $(Hu_n^{(n)})_n$  é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach  $L^p([a, b])$ . Desta forma, temos que qualquer sequência de  $HS$  tem uma subsequência convergente, portanto  $HS$  é compacto sobre  $L^p([a, b])$ , sempre que  $S$  for limitado em  $L^p([a, b])$ . Isto mostra que  $H$  é um operador compacto sobre  $L^p([a, b])$ .  $\square$

Vejam agora o nosso primeiro resultado de existência de solução da equação integral não-linear em  $L^p([a, b])$ . A demonstração do seguinte resultado utiliza-se do teorema do ponto fixo de Schauder 1.2.18.

**Teorema 2.2.3.** Consideremos um número real  $1 < p < \infty$ ,  $q$  o seu conjugado, e a equação integral (2.1),

$$u(x) = g(x) + f \left( x, \int_a^b k(x, y)u(y) dy \right), \quad x \in [a, b], \quad (2.12)$$

onde  $g, f$  e  $k$  satisfazem as condições (a) – (d). Além disso, suponha que

(e) o kernel  $k$  e a constante  $\tau_1$  satisfaem,

$$\tau_1 \|k\|_q^{q/p} < 1,$$

e, se  $1 < p < 2$ ,

$$(f) \|g\|_p + \|\theta_1\|_p < 1 - \tau_1 \|k\|_q^{q/p}.$$

Nas condições acima, a equação integral (2.12) tem uma solução única  $u \in L^p([a, b])$ .

**Demonstração:** A ideia da demonstração é usar o Teorema do ponto fixo de Schauder sobre o operador  $A$  definido sobre  $L^p([a, b])$ . Tomemos a bola fechada de raio  $R$ ,

$$B_R = \{f \in L^p([a, b]), \|f\|_p \leq R\},$$

para algum  $R > 0$ . Evidentemente  $B_R$  é um conjunto limitado, fechado e convexo em  $L^p([a, b])$ . Além disso, pelo Lema 2.2.2 o operador  $A$ , dado por (2.6), é compacto sobre  $L^p([a, b])$ . Como  $B_R$  é um conjunto limitado em  $L^p([a, b])$ , então  $A(B_R)$  é pré-compacto em  $L^p([a, b])$ .

Provaremos agora que existe  $R_0 > 0$  tal que  $A(B_{R_0}) \subset B_{R_0}$ . Usando a condição (b) e desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|Hu\|_p &= \left\{ \int_a^b \left| f \left( x, \int_a^b k(x, y)u(y) dy \right) \right|^p dx \right\}^{1/p} \\ &\leq \left\{ \int_a^b \left| \theta_1(x) + \tau_1 \left| \int_a^b k(x, y)u(y) dy \right|^{q-1} \right|^p dx \right\}^{1/p} \\ &\leq \left\{ \int_a^b |\theta_1(x)|^p dx \right\}^{1/p} + \tau_1 \left\{ \int_a^b \left| \int_a^b k(x, y)u(y) dy \right|^q dx \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder sobre a segunda parcela

$$\begin{aligned} \|Hu\|_{p,\mu} &\leq \|\theta_1\|_p + \tau_1 \left\{ \int_a^b \left( \int_a^b |k(x, y)|^q dy \right) \left( \int_a^b |u(y)|^p dy \right)^{q/p} dx \right\}^{1/p} \\ &= \|\theta_1\|_p + \tau_1 \left\{ \int_a^b \left( \int_a^b |k(x, y)|^q dy \right) dx \right\}^{1/p} \|u\|_p^{q/p} \\ &= \|\theta_1\|_p + \tau_1 \|k\|_q^{q/p} \|u\|_p^{q/p}. \end{aligned}$$

Como  $Au = g + Hu$ , segue que

$$\|Au\|_p \leq \|g\|_p + \|\theta_1\|_p + \tau_1 \|k\|_q^{q/p} \|u\|_p^{q/p}. \quad (2.13)$$

Definimos a constante

$$R_1 = \frac{\alpha}{1 - \beta},$$

onde  $\alpha = \|g\|_p + \|\theta_1\|_p$  e  $\beta = \tau_1 \|k\|_q^{q/p}$ . Está bem definida pois  $\tau_1 \|k\|_q^{q/p} < 1$ .

Para o caso  $p = q = 2$ , basta tomar  $R_0 = R_1$  e temos que se  $\|u\|_p \leq R_0$  em (2.13) implica que  $\|Au\|_p \leq \alpha + \beta R_0 = R_0$ . Consequentemente, temos  $A(B_{R_0}) \subset B_{R_0}$ .

Para o caso, que  $p > 2$ , notemos que  $q < 2$  e, assim  $q/p < 1$ . Neste caso, um pouco mais delicado, consideremos  $\xi \in \mathbb{R}$  que satisfaça a equação

$$\xi - \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}} = \xi^{q/p}. \quad (2.14)$$

A existência de um número  $\xi$  segue dos seguintes argumentos. Para  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $q/p < 1$ , notemos que a função  $h(\xi) = \xi - \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}} - \xi^{q/p}$  é contínua, além disso,  $h(1) = -\alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}} < 0$  e

$$\begin{aligned} h\left(1 + \frac{p}{p-q} \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}}\right) &= 1 + \frac{p}{p-q} \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}} - \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}} - \left(1 + \frac{p}{p-q} \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}}\right)^{q/p} \\ &> 1 + \frac{p}{p-q} \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}} - \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}} - \left(1 + \frac{q}{p} \left(\frac{p}{p-q} \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}}\right)\right) \\ &= \alpha \beta^{-\frac{p}{p-q}} \left(\frac{p}{p-q} - 1 - \frac{q}{p-q}\right) = 0, \end{aligned}$$

logo pelo teorema do valor intermediário segue que a equação (2.14) tem uma solução no intervalo  $\left(1, 1 + (p/(p-q))\alpha\beta^{-\frac{p}{p-q}}\right)$ . Tomemos  $R_0 = \xi\beta^{-\frac{p}{p-q}}$ , e se  $\|u\|_p \leq R_0$  em (2.13) implica que

$$\begin{aligned} \|Au\|_p &\leq \alpha + \beta \left(\xi\beta^{-\frac{p}{p-q}}\right)^{q/p} \\ &= \alpha + \xi^{q/p} \beta^{1 + \frac{q}{p-q}} \\ &= \alpha + \left(\xi - \alpha\beta^{-\frac{p}{p-q}}\right) \beta^{\frac{p}{p-q}} \\ &= \xi\beta^{\frac{p}{p-q}} = R_0 \end{aligned}$$

logo  $Au \in B_{R_0}$ .

Por fim, se  $1 < p < 2$  temos que  $q/p > 1$  ( $p/q > 1$ ) e, por hipótese,  $R_1 = \alpha/(1 - \beta) > 1$ , assim  $R_1 < R_1^{p/q}$ . Tomemos  $R_0 = R_1^{p/q}$ , logo se  $\|u\|_p \leq R_0$  temos  $\|Au\|_p \leq \alpha + \beta R_1 = R_1 \leq R_0$ . Portanto, para  $1 < p < \infty$  obtemos  $A(B_{R_0}) \subset B_{R_0}$ , desde que  $R_0$  seja escolhido conforme indicado acima.

Finalmente, usando o teorema do ponto fixo de Schauder 1.2.18, concluímos que (2.12) tem uma única solução em  $u \in B_{R_0}$ . Como  $B_{R_0} \subset L^p([a, b])$ , temos que existe uma solução da equação integral em  $L^p([a, b])$ .

A prova da unicidade é análoga à demonstração do teorema de unicidade 2.1.6.  $\square$

Vamos agora aos próximos resultados de existência de soluções em  $L^p([a, b])$  para equações integro-funcionais. No entanto, consideremos uma mudança na equação integro-funcional (2.12) admitindo uma aplicação, podendo ser não linear, sobre a função variável no integrando, ou seja, consideremos as equações integro-funcionais na forma:

$$u(x) = f \left( x, \int_a^b k(x, y)l(y, u(y)) dy \right), \quad x \in [a, b], \quad (2.15)$$

que, certa forma, é uma generalização da equação integro-funcional (2.12).

Em Emmanuele (1992), o autor considera a equação (2.15) e prova a existência de soluções desta equação em  $L^1([0, 1])$ .

A técnica aplicada foi utilizar o teorema do ponto fixo de Schauder para obter um ponto fixo do operador  $A : L^1([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$  dado por

$$(Au)(x) = f \left( x, \int_0^1 k(x, y)l(y, u(y)) dy \right), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.16)$$

Em Nadir e Gagui (2014), os autores provaram a existência e unicidade de soluções da equação integral de Hammerstein no intervalo  $[a, b]$ :

$$u(x) = \int_a^b k(x, y)l(y, u(y)) dy, \quad x \in [a, b]$$

em espaços  $L^p([0, 1])$ .

Assim como no Teorema 2.1.5, a base principal para a obtenção dos próximos resultados serão os teoremas de ponto fixo agregados a convergência de aproximações sucessivas. Para isso, definimos um operador  $A$  por

$$(Au)(x) = f \left( x, \int_a^b k(x, y)l(y, u(y)) dy \right) \quad x \in [a, b]. \quad (2.17)$$

Vamos mostrar que, sob certas condições,  $A$  aplica  $L^p([a, b])$  nele próprio. Isto significa que a solução da equação (2.15) está em  $L^p([a, b])$ . E, adicionando hipóteses, provaremos que a equação (2.15) tem solução única em  $L^p([a, b])$ . Veremos que esta solução poderá ser obtida como limite de uma aproximação sucessiva, diferente da técnica usada no Teorema 2.1.5

Apresentamos abaixo as hipóteses que usaremos nos teoremas seguintes:

(A) A função  $l : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as condições de Carathéodory; além disso, existe uma função não negativa  $\theta_0 \in L^p([a, b])$ , e uma constante positiva  $\tau_0 > 0$  tal que

$$|l(x, y)| \leq \theta_0(y) + \tau_0|y|.$$

(B) O kernel  $k(x, y) \in L^q([a, b])$  para todo  $x \in [a, b]$  e que

$$\left( \int_a^b |k(x, y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq \varphi_1(x), \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

onde  $\varphi_1 \in L^q([a, b])$  é uma função não negativa.

(C) Existe uma função não negativa  $\theta_1 \in L^p([a, b])$  e uma contante positiva  $\tau_1 > 0$  tais que

$$|f(x, y)| \leq \theta_1(x) + \tau_1 |y|^{q/p} \quad x \text{ para q.t.p. } x \in [a, b] \text{ e } y \in \mathbb{R}.$$

(D)  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é Lipschitz em relação à segunda variável com constante de Lipschitz  $\tau_2 > 0$ ,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \tau_2 |y_1 - y_2| \quad \text{para todo } x \in [a, b] \text{ e } y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

(E)  $l : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$  é lipschitziana em relação à segunda variável com constante de Lipschitz  $\tau_3 > 0$ ,

$$|l(x, y_1) - l(x, y_2)| \leq \tau_3 |y_1 - y_2| \quad \text{para todo } x \in [a, b] \text{ e } y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

**Lema 2.2.4.** Sejam  $1 < p < \infty$ ,  $q$  o conjugado de  $p$  e  $A$  o operador definido em (2.17). Se as funções  $l$ ,  $k$  e  $f$  satisfazem as condições (A) – (C), então  $A$  aplica  $L^p([a, b])$  sobre ele próprio.

**Demonstração:** Dado  $u \in L^p([a, b])$ , temos que  $l(y, u(y)) \in L^p([a, b])$ . De fato, pela condição (A) temos que  $|l(y, u(y))|^p \leq (\theta_0(y) + \tau_0 |u(y)|)^p$ , logo

$$\|l(y, u(y))\|_p = \left( \int_a^b |l(y, u(y))|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b (\theta_0(y) + \tau_0 |u(y)|)^p dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

e, usando a desigualdade de Minkowski, segue que

$$\begin{aligned} \|l(y, u(y))\|_q &\leq \left( \int_a^b |\theta_0(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b \tau_0^p |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\theta_0\|_p + \tau_0 \|u\|_p < \infty. \end{aligned}$$

Mostraremos que  $Au \in L^p([a, b])$ . Dado  $x \in [a, b]$ , segue da condição (C) que

$$\begin{aligned} |(Au)(x)|^p &= \left| f \left( x, \int_a^b k(x, y) l(y, u(y)) dy \right) \right|^p \\ &\leq \left[ \theta_1(x) + \tau_1 \left| \int_a^b k(x, y) l(y, u(y)) dy \right|^{q/p} \right]^p \\ &\leq \left( 2 \max \left\{ \theta_1(x), \tau_1 \left| \int_a^b k(x, y) l(y, u(y)) dy \right|^{q/p} \right\} \right)^p \\ &= 2^p \max \left\{ [\theta_1(x)]^p, \tau_1^p \left| \int_a^b k(x, y) l(y, u(y)) dy \right|^q \right\} \\ &\leq 2^p \left\{ [\theta_1(x)]^p + \tau_1^p \left[ \int_a^b |k(x, y) l(y, u(y))| dy \right]^q \right\}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_a^b |k(x, y)l(y, u(y))| dy &\leq \left( \int_a^b |k(x, y)|^q dy \right)^{1/q} \left( \int_a^b |l(y, u(y))|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq \varphi_1(x) \|l(y, u(y))\|_p \end{aligned}$$

Desta maneira, segue que

$$\left[ \int_a^b |k(x, y)l(y, u(y))| dy \right]^q \leq [\varphi_1(x)]^q \|l(y, u(y))\|_p^q,$$

o que implica

$$|Au(x)|^p \leq 2^p \left\{ [\theta_1(x)]^p + \tau_1^p [\varphi_1(x)]^q \|l(y, u(y))\|_p^q \right\}.$$

Finalmente, obtemos

$$\begin{aligned} \|Au\|_p^p &\leq 2^p \left\{ \|\theta_1\|_p^p + \tau_1^p \|l(y, u(y))\|_p^q \int_a^b [\varphi_1(x)]^q dx \right\} \\ &\leq 2^p \left\{ \|\theta_1\|_p^p + \tau_1^p \|l(y, u(y))\|_p^q \|\varphi_1\|_q^q \right\} < \infty, \end{aligned}$$

o que conclui a prova.  $\square$

Agora, adicionaremos hipóteses sobre  $f$ ,  $k$  e  $l$  para garantir a existência de uma solução da equação integral (2.15) por um processo iterativo.

**Teorema 2.2.5.** Suponha que as condições (A) – (E) são satisfeitas. Então, a sequência  $\{u_n\}$  obtida pelo processo iterativo

$$u_{n+1}(y) = f \left( x, \int_a^b k(x, y)l(y, u_n(y)) dy \right) \quad (2.18)$$

converge sempre para uma solução da equação integral (2.15), desde que

$$\tau_2^p \tau_3^p \int_a^b [\varphi_1(x)]^p dx = N^p < 1. \quad (2.19)$$

**Demonstração:** Seja  $u_0 \in L^p([a, b])$  uma aproximação inicial para a sequência (2.18). Pelo Lema 2.2.4 temos que  $u_1 = Au_0 \in L^p([a, b])$ , logo  $u_1 - u_0 \in L^p([a, b])$ . Façamos  $C = \|u_1 - u_0\|_p < \infty$ .

Por (D) e (E), segue que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) - u_n(x)| &\leq \tau_2 \int_a^b |k(x, y)| |l(y, u_n(y)) - l(y, u_{n-1}(y))| dy \\ &\leq \tau_2 \int_a^b |k(x, y)| \tau_3 |u_n(y) - u_{n-1}(y)| dy, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Hölder,

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \tau_2 \tau_3 \left( \int_a^b |k(x, y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_a^b |u_n(y) - u_{n-1}(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

logo, por (B),

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)|^p \leq \tau_2^p \tau_3^p [\varphi_1(x)]^p \int_a^b |u_n(y) - u_{n-1}(y)|^p dy. \quad (2.20)$$

Fazendo  $n = 1$  em (2.20) temos que

$$|u_2(x) - u_1(x)|^p \leq \tau_2^p \tau_3^p [\varphi_1(x)]^p \int_a^b |u_1(y) - u_0(y)|^p dy = \tau_2^p \tau_3^p [\varphi_1(x)]^p C^p,$$

fazendo  $n = 2$  e usando a hipótese (2.19)

$$\begin{aligned} |u_3(x) - u_2(x)|^p &\leq \tau_2^p \tau_3^p [\varphi_1(x)]^p \int_a^b |u_2 - u_1|^p dy \\ &= \tau_2^p \tau_3^p [\varphi_1(x)]^p \int_a^b |u_2(y) - u_1(y)|^p dy \\ &\leq \tau_2^p \tau_3^p [\varphi_1(x)]^p C^p N^p \end{aligned}$$

e sucessivamente

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)|^p \leq \tau_2^p \tau_3^p [\varphi_1(x)]^p C^p N^{(n-1)p},$$

que é equivalente a

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \tau_2 \tau_3 \varphi_1(x) C N^{n-1}. \quad (2.21)$$

Notemos que o limite da sequência  $\{u_n(x)\}$  pode ser escrita como uma série:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_0(x) + (u_1(x) - u_0(x)) + \cdots + (u_{n+1}(x) - u_n(x))) \\ &= u_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} (u_{i+1}(x) - u_i(x)) \end{aligned}$$

Como esta série, por (2.21), é majorada pela série geométrica

$$\tau_2 \tau_3 \varphi_1(x) C \sum_{n=0}^{\infty} N^n = \tau_2 \tau_3 \varphi_1(x) C (1 + N + N^2 + \cdots + N^j + \cdots).$$

que é convergente,  $0 < N < 1$ , concluímos que a sequência  $\{u_n(x)\}$  converge para a solução da equação integral (2.15).  $\square$

Nosso próximo resultado é sobre a unicidade da equação integral (2.15) e sua prova é imediata pelo teorema do ponto fixo de Banach 1.2.11 e o Teorema 2.2.5.

**Teorema 2.2.6.** Considere que as condições (A) – (E) são satisfeitas. Além disso, se (2.19) é satisfeita, então a equação integral (2.15) tem uma única solução em  $L^p([a, b])$ , que é obtida pelo limite da sequência iterativa (2.18).

Observamos que as equações integrais de Hammerstein são casos particulares da equação (2.15), em virtude disso, o nosso resultado generaliza os resultados obtidos por Nadir e Gagui (2014). Além disso, nossos resultados expandem o trabalho de Emmanuele (1992) para o espaço  $L^p([a, b])$  com  $p \geq 1$ .

## 2.3 Resultados sobre $L^\infty([a, b])$

Nesta seção apresentaremos resultados de existência e unicidade quando o espaço é  $X = L^\infty([a, b])$ . Consideremos a equação integro-funcional (2.1) e as seguintes condições sobre as funções  $g$ ,  $f$  e  $k$ :

(a')  $g \in C([a, b])$ ;

(b')  $k \in C([a, b]^2)$ ;

(c')  $f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$  e existem uma constante  $\tau_1 > 0$  e uma função não negativa  $\theta \in C([a, b])$  tais que

$$|f(x, y)| \leq \theta(x) + \tau_1 |y|, \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \in [a, b].$$

(d')  $f$  é Lipschitz em relação a segunda variável com constante de Lipschitz  $\tau_2 > 0$ ,

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq \tau_2 |u - v|, \quad \text{para todo } x \in [a, b] \text{ e } u, v \in \mathbb{R}.$$

(e') o operador  $K$  satisfaz a relação

$$\tau_2 \|K\|_\infty < 1.$$

Notemos que, se (b') é satisfeito então o kernel  $k$  satisfaz

(1b') 
$$\sup_{x \in [a, b]} \int_a^b |k(x, y)| dy < \infty$$

e

(2b') 
$$\lim_{x \rightarrow x'} \int_a^b |k(x, y) - k(x', y)| dy = 0.$$

**Lema 2.3.1.** Seja  $A$  o operador definido em (2.6) e admita que as funções  $g$ ,  $f$  e  $k$  satisfazem as condições (a') – (c'), então  $A$  aplica  $L^\infty([a, b])$  sobre ele próprio.

**Demonstração:** Dado  $u \in L^\infty([a, b])$ , utilizando a desigualdade em (c') temos

$$\begin{aligned} |(Au)(x)| &= |g(x) + f(x, (Ku)(x))| \\ &\leq |g(x)| + \theta(x) + \tau_1 |(Ku)(x)| \\ &\leq \|g\|_\infty + \|\theta\|_\infty + \tau_1 \int_a^b |k(x, y)u(y)| dy \\ &\leq \|g\|_\infty + \|\theta\|_\infty + \tau_1 \|u\|_\infty \int_a^b |k(x, y)| dy. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Segue de (1b') que  $\|Au\|_\infty < \infty$ , ou seja,  $Au \in L^\infty([a, b])$ . □

**Lema 2.3.2.** Consideremos o operador  $A$ , definido em (2.6). Admitindo as hipóteses  $(a') - (d')$ , então o operador  $A$  é compacto.

**Demonstração:** Dada uma sequência limitada  $S = \{u_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  em  $L^\infty([a, b])$ , vamos provar que  $A(S)$  é uniformemente limitada e equicontínua. Por hipótese de  $S$ , existe uma constante  $M_S > 0$  tal que  $\|u_n\|_\infty \leq M_S$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Usando procedimento análogo de (2.22), temos que

$$|(Au_n)(x)| \leq \|g\|_\infty + \|\theta\|_\infty + \tau_1 M_S \int_a^b |k(x, y)| dy,$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in [a, b]$ , logo  $A(S)$  é uniformemente limitada em  $L^\infty([a, b])$ .

Dados  $x, x_0 \in [a, b]$ , segue de  $(d')$  que

$$\begin{aligned} |(Au_n)(x) - (Au_n)(x_0)| &= \left| f\left(x, \int_a^b k(x, y)u_n(y) dy\right) - f\left(x_0, \int_a^b k(x_0, y)u_n(y) dy\right) \right| \\ &\leq \tau_2 \left| \int_a^b k(x, y)u_n(y) dy - \int_a^b k(x_0, y)u_n(y) dy \right| \\ &\leq \tau_2 \int_a^b |k(x, y) - k(x_0, y)| |u_n(y)| dy \\ &\leq \tau_2 \left( \int_a^b |k(x, y) - k(x_0, y)| dy \right) \|u_n\|_\infty, \end{aligned}$$

e aplicando  $(2b')$  na desigualdade acima, obtemos a equicontinuidade de  $A(S)$ . Portanto, pelo Teorema de Arzela-Ascoli 1.2.16 temos que  $A(S)$  é pré-compacto em  $C([a, b])$ . Como  $C([a, b])$  é continuamente imerso em  $L^\infty([a, b])$ , segue que  $A(S)$  é pré-compacto em  $L^\infty([a, b])$ . Pelo Lema 2.3.1,  $A(L^\infty([a, b])) \subset L^\infty([a, b])$ , portanto  $A$  é compacto em  $L^\infty([a, b])$ .  $\square$

**Teorema 2.3.3.** Suponha que as condições  $(a') - (e')$  são satisfeitas. Então a sequência  $\{u_n\}$  obtida pelo processo iterativo

$$u_{n+1}(y) = f\left(x, \int_a^b k(x, y)u_n(y) dy\right) \quad (2.23)$$

converge para uma solução da equação integral (2.12) em  $L^\infty([a, b])$ .

**Demonstração:** A demonstração deste teorema usa a mesma ideia do Teorema 2.2.5. Consideremos  $u_0 \in L^\infty([a, b])$  uma aproximação inicial para a sequência (2.23). Pelo Lema 2.3.1 temos que  $u_1 = Au_0 \in L^\infty([a, b])$ , logo  $u_1 - u_0 \in L^\infty([a, b])$ . Fixamos  $C = \|u_1 - u_0\|_\infty < \infty$ . Como  $(Ku_n)(x) = \int_a^b k(x, y)u_n(y) dy$  e por  $(d')$ , segue que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) - u_n(x)| &\leq \tau_2 |(Ku_n)(x) - (Ku_{n-1})(x)| \\ &\leq \tau_2 \|K\|_\infty \|u_n - u_{n-1}\|_\infty, \end{aligned}$$

o que implica

$$\|u_{n+1} - u_n\|_\infty \leq \tau_2 \|K\|_\infty \|u_n - u_{n-1}\|_\infty.$$

Fazendo  $n = 1$  acima obtemos

$$\|u_2 - u_1\|_\infty \leq \tau_2 \|K\|_\infty \|u_1 - u_0\|_\infty = \tau_2 \|K\| C,$$

e fazendo  $n = 2$ ,

$$\|u_3 - u_2\|_\infty \leq \tau_2 \|K\|_\infty \|u_2 - u_1\|_\infty \leq \tau_2^2 \|K\|_\infty^2 C$$

e sucessivamente

$$\|u_{n+1} - u_n\|_\infty \leq \tau_2^n \|K\|_\infty^n C.$$

Notemos que limite da sequência  $\{u_n(x)\}$  pode ser escrita como uma série:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_0(x) + (u_1(x) - u_0(x)) + \cdots + (u_{n+1}(x) - u_n(x))) \\ &= u_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x)) \end{aligned}$$

Como esta série é majorada pela série geométrica

$$C \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_2 \|K\|_\infty)^n = C(1 + \tau_2 \|K\|_\infty + (\tau_2 \|K\|_\infty)^2 + \cdots + (\tau_2 \|K\|_\infty)^j + \cdots).$$

que é convergente, pois por (e') tem-se  $\tau_2 \|K\|_\infty < 1$ , concluímos que a sequência  $\{u_n(x)\}$  converge para a solução da equação integral (2.1).  $\square$

## Capítulo 3

# Resolução Numérica da Equação Integro-Funcional

Nesta seção apresentaremos um método numérico para resolver as equações integro-funcionais de Fredholm não lineares (2.12). A ideia é usarmos o método da colocação com funções de Lagrange obtendo um sistema não linear. Depois escrevemos de forma a resolver iterativamente pelo método de Picard a fim de encontrar um ponto fixo. Por fim, faremos a análise da convergência deste método.

### 3.1 Método da Colocação e Iteração de Picard

Consideremos uma malha, não necessariamente uniforme, do intervalo  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad (3.1)$$

com subintervalos  $J_i = (x_{i-1}, x_i)$  de comprimento  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ .

Denominemos  $V_n$  o subespaço das funções interpoladoras contínuas definidas no intervalo  $[a, b]$  com relação à malha 3.1. Consideremos as funções interpoladoras sendo as funções de Lagrange  $\{l_j\}$ ,  $j = 0, \dots, n$ . Lembramos que as funções  $l_j \in V_n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  satisfazem a relação  $l_j(x_i) = \delta_{ij}$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ .

Conforme a Seção 1.3.4, o método da colocação para a equação (2.12),

$$u(x) = (Au)(x) = g(x) + f\left(x, \int_a^b k(x, y)u(y) dy\right), \quad x \in [a, b], \quad (3.2)$$

utilizando funções de Lagrange associadas à discretização (3.1), consiste em aproximar a solução por uma função  $u_h$  no subespaço  $V_n = \text{span}\{l_0(x), \dots, l_n(x)\}$  expressa da forma

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^n u_j l_j(x), \quad (3.3)$$

onde os coeficientes  $u_j$ , com  $u_j = u_h(x_j)$ ,  $j = 0, \dots, n$ , serão determinados de forma que  $u_h$  satisfaça a equação integral (2.1) nos pontos da malha  $\{x_i\}$  da discretização (3.1), ou seja,

$$u_h(x_i) = g(x_i) + f(x, (Ku_h)(x_i)), \quad 0 \leq i \leq n. \quad (3.4)$$

Pela linearidade do operador integral  $K$  temos

$$u_i = g(x_i) + f\left(x_i, \sum_{j=0}^n (Kl_j)(x_i)u_j\right), \quad 0 \leq i \leq n. \quad (3.5)$$

Considerando o vetor dos coeficientes  $\mathbf{u} = [u_0, \dots, u_n]^T$  e o vetor da malha  $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_n]^T$ , podemos reescrever (3.5) na forma matricial,

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_1(\mathbf{u}), \quad \mathbf{A}_1(\mathbf{u}) = \mathbf{g} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{K}\mathbf{u}), \quad (3.6)$$

sendo que  $\mathbf{g} = [g(x_0), \dots, g(x_n)]^T$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [f(x_0, y_0), \dots, f(x_n, y_n)]^T$  e  $\mathbf{K}$  é uma matriz  $(n+1) \times (n+1)$  tal que

$$\mathbf{K}_{i,j} = (Kl_j)(x_i) = \int_a^b k(x_i, y)l_j(y) dy, \quad \text{para } 0 \leq i, j \leq n. \quad (3.7)$$

Note que o problema matricial (3.6) não é linear e pode ser visto como um problema de encontrar um ponto fixo. Assim aplicando o método de iteração de Picard, no qual a solução é obtida como limite de uma sequência  $\{\mathbf{u}^{(r)}\}_{r \in \mathbb{N}}$  definida iterativamente por

$$\mathbf{u}^{(r+1)} = \mathbf{A}_1(\mathbf{u}^{(r)}), \quad \text{com } \mathbf{A}_1(\mathbf{u}^{(r)}) = \mathbf{g} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{K}\mathbf{u}^{(r)}). \quad (3.8)$$

**Observação 3.1.1.** No cálculo da integral (3.7) que fornece os elementos da matriz  $\mathbf{K}$  podemos usar uma quadratura cujos pontos coincidem com os da malha usada para construir as funções de Lagrange. Neste caso a integral é aproximada por:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_a^b k(x_i, y)l_j(y) dy \approx \sum_{s=0}^n w_s k(x_i, x_s)l_j(x_s) = w_j k(x_i, x_j), \quad (3.9)$$

onde  $w_0, \dots, w_n$  são os pesos da quadratura e  $x_0, \dots, x_n$  são os pontos da partição (3.1).

Quando usamos uma quadratura para aproximar o valor da integral o método é dito *método da colocação discreto*, ver Atkinson e Flores (1993), Atkinson e Potra (1987), Kumar e Sloan (1987), Kumar (1988). Além disso, se os nós da quadratura forem os mesmos da discretização, como em (3.9), dizemos *método de Nystron*, ver Atkinson (1997).

## 3.2 Estudo da Convergência

Nesta seção faremos a análise da convergência do método proposto na Seção 3.1. Para esta análise consideraremos que a discretização do intervalo  $[a, b]$  é uniforme com tamanho de passo  $h = (b - a)/n$ . Faremos separadamente a análise dos métodos usados.

### 3.2.1 Convergência do Método da Colocação

Atkinson e Potra (1987) apresentam uma análise de convergência das soluções obtidas pelos métodos de projeções para a equação de Urysohn. Utilizaremos estes resultados para concluirmos a convergência do método da colocação aplicado à equação integro-funcional. Os autores consideram um equação não linear na forma

$$u = \mathcal{A}u, \quad (3.10)$$

sendo  $\mathcal{A}$  um operador completamente contínuo definido sobre o fecho  $\bar{D}$  de um subconjunto aberto  $D$  do espaço de Banach  $X$ , com  $\mathcal{A}u \in Y$  para todo  $u \in \bar{D}$ , sendo  $Y$  um subespaço fechado de  $X$ . Atkinson e Potra (1987) consideraram uma sequência de subespaços de dimensão finita  $X_n$ ,  $n \geq 1$ , que se aproxima de  $X$ , e as respectivas projeções  $\Pi_n : X \rightarrow X_n$  satisfazendo

$$\|\Pi_n v - v\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \text{ para todo } v \in Y. \quad (3.11)$$

O método de projeção para resolver (3.10) consiste em determinar a solução

$$u_n = \Pi_n \mathcal{A}u_n, \quad \text{com } u_n \in X_n. \quad (3.12)$$

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em Krasnoselskii e Zabreiko (1984, Teorema 50.3), diz respeito a existência e convergência de  $\{u_n\}$ :

**Teorema 3.2.1.** Suponha que  $u^* \in D$  é um ponto fixo não nulo de um operador não linear  $\mathcal{A}$  completamente contínuo e as projeções  $\Pi_n$  satisfazem (3.11). Para  $n$  suficientemente grande, a equação (3.12) tem pelo menos uma solução  $u_n \in X_n \cap D$ . Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^*\| = 0.$$

Agora, admitimos que  $\mathcal{A}$  é diferenciável no sentido de Fréchet em  $u^*$  (Definição 1.2.14) e denominamos a derivada por  $L = \mathcal{A}'(u^*)$ . Vimos no Teorema 1.2.15 que, se  $\mathcal{A}$  for completamente contínuo, então  $L$  é também completamente contínuo. Além disso, como  $L$  é um operador linear, temos que  $L$  é compacto.

Esta condição do operador  $\mathcal{A}$  ser diferenciável num ponto fixo  $u^*$  também é encontrada em outros trabalhos, como em Kumar e Sloan (1987) na análise da convergência da solução aproximada obtida pelo método da colocação para a equação de Hammerstein.

**Lema 3.2.2.** Sejam  $\Pi_n$  uma sequência de projeções satisfazendo (3.11),  $\mathcal{A}$  um operador completamente contínuo e diferenciável num ponto fixo  $u^*$  e  $L = \mathcal{A}'(u^*)$ . Então

(i) Se  $a_n := \|(I - \Pi_n)L\|$ , então  $a_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ ;

(ii) Se  $b_n := \|L(I - \Pi_n)|_Y\|$ , então  $b_n$  é uniformemente limitada.

**Demonstração:** (i) De imediato pela definição de  $L$ , como  $\mathcal{A}(D) \subset Y$  e  $Y$  é um

subespaço fechado, então  $Im(L) \subset Y$ . Por (3.11) temos que  $\|\Pi_n v - v\| \rightarrow 0$  para todo  $v \in Y$ , em particular, para  $v \in Im(L)$ . Assim para todo  $w \in Y$ , temos  $v = Lw \in Y$  e  $\|(I - \Pi_n)Lw\| \rightarrow 0$  para todo  $\|w\| \leq 1$ , portanto  $\|(I - \Pi_n)\| \rightarrow 0$ .

(ii) Por (3.11), temos que  $(I - \Pi_n)|_Y$  é uniformemente limitado. Além disso,  $L$  é um operador linear e completamente contínuo, logo limitado. Portanto  $b_n = \|L(I - \Pi_n)|_Y\| \leq \|L\| \|(I - \Pi_n)|_Y\|$  é uniformemente limitada.  $\square$

**Teorema 3.2.3.** Consideremos as mesmas condições do Lema 3.2.2. Se o operador linear  $L = \mathcal{A}'(u^*)$  não possui autovalor 1, então existem sequências não negativas,  $\{\epsilon_n\}$  e  $\{\delta_n\}$ , ambas convergentes para zero, e constantes  $c, d > 0$ , tais que

$$d(1 - \epsilon_n)\|\Pi_n u^* - u^*\| \leq \|u^* - u_n\| \leq c(1 + \delta_n)\|\Pi_n u^* - u^*\| \quad (3.13)$$

**Demonstração:** Se 1 não é autovalor de  $L$ , então o operador linear  $(I - L)$  é inversível sobre  $X$ . Somando e subtraindo  $\Pi_n L(u_n - u^*)$  e  $\Pi_n u^*$  a  $(I - L)(u_n - u^*)$  temos

$$\begin{aligned} (I - L)(u_n - u^*) &= (I - L)(u_n - u^*) + \Pi_n L(u_n - u^*) - \Pi_n L(u_n - u^*) + \Pi_n u^* - \Pi_n u^* \\ &= (\Pi_n - I)L(u_n - u^*) + (u_n - u^*) + \Pi_n u^* - \Pi_n u^* - \Pi_n L(u_n - u^*) \end{aligned}$$

Utilizando as equações (3.10) e (3.12) temos

$$\begin{aligned} (I - L)(u_n - u^*) &= (\Pi_n - I)L(u_n - u^*) + (\Pi_n \mathcal{A}u_n - u^*) \\ &\quad + \Pi_n u^* - \Pi_n(\mathcal{A}u^*) - \Pi_n L(u_n - u^*) \\ &= (\Pi_n - I)L(u_n - u^*) + (\Pi_n u^* - u^*) \\ &\quad + \Pi_n \mathcal{A}u_n - \Pi_n \mathcal{A}u^* - \Pi_n L(u_n - u^*), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(I - L)(u_n - u^*) = (\Pi_n - I)L(u_n - u^*) + (\Pi_n - I)u^* + \Pi_n [\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u^* - L(u_n - u^*)]. \quad (3.14)$$

Defina a constante  $c = \|(I - L)^{-1}\|$  e a sequência

$$r_n = \frac{\|\mathcal{A}(u_n) - \mathcal{A}(u^*) - L(u_n - u^*)\|}{\|u_n - u^*\|}.$$

Segue da definição de  $L$  que  $r_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Por (3.14),

$$\|u_n - u^*\| \leq c(\|(\Pi_n - I)L\|\|u_n - u^*\| + \|\Pi_n u^* - u^*\| + \|\Pi_n\|r_n\|u_n - u^*\|).$$

Segue de (3.11) que as projeções são limitadas uniformemente, ou seja,  $\|\Pi_n\| \leq b$ , para algum  $b$ . Usando a sequência  $a_n$  definida acima, temos

$$\|u_n - u^*\| - c(a_n + br_n)\|u_n - u^*\| \leq c\|\Pi_n u^* - u^*\|$$

o que implica

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{c}{1 - c(a_n + br_n)} \|\Pi_n u^* - u^*\|$$

obtendo a segunda inequação de (3.13) onde  $\delta_n = \frac{c(a_n + br_n)}{1 - c(a_n + br_n)}$ . Analogamente, obtemos a primeira inequação de (3.13) com  $\epsilon_n = \frac{d(a_n + pr_n)}{1 + d(a_n + pr_n)}$  e  $d = (\|(I - L)\|)^{-1}$ .  $\square$

**Observação 3.2.4.** O Teorema 3.2.3 diz que a velocidade com que  $u_n$  se aproxima de  $u^*$  é a mesma com que  $\Pi_n u^*$  se aproxima de  $u^*$ , ou seja, os erros obtidos ao aproximar  $u^*$  pelas sequências  $u_n$  e  $\Pi_n u^*$  possuem a mesma ordem de convergência.

No caso do método da colocação as sequências das projeções são obtidas pelos operadores interpoladores  $\{I_n\}$  e, desta forma, a ordem de convergência do método da colocação é exatamente a mesma ordem obtida pela interpolação.

**Operador integro-funcional.**

Vejamos como aplicar estes resultados ao caso particular em que  $\mathcal{A}$  é o operador integro-funcional (2.17),

$$(\mathcal{A}u)(x) = (Au)(x) = g(x) + f\left(x, \int_a^b k(x, y)u(y) dy\right), \quad x \in [a, b]. \quad (3.15)$$

e analisar a convergência da solução obtida pelo método da colocação.

Vimos resultados sobre a existência e unicidade da solução sobre os espaços  $L^p([a, b])$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Para a análise numérica do método da colocação é conveniente considerar o espaço  $L^\infty([a, b])$ , admitindo que as funções  $g$ ,  $f$  e  $k$  satisfaçam as condições (a') – (e') do Teorema 2.3.3 sobre existência da solução da equação integro-funcional em  $L^\infty([a, b])$ .

Consideremos  $Y = C([a, b])$ . Evidentemente  $Y$  é um subespaço fechado de  $L^\infty([a, b])$  e o operador  $A$  aplica  $Y$  sobre ele próprio. Além disso, no método da colocação a projeção é o operador interpolador  $\mathcal{I}_n$  e vamos supor que satisfaz (3.11),

$$\|\mathcal{I}_n v - v\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.16)$$

para todo  $v \in Y$ . Por exemplo, se  $\mathcal{I}_n$  for o operador interpolador linear por partes, pela Proposição 1.3.7, a propriedade (3.16) é garantida.

O seguinte resultado nos garante a convergência da solução  $u_h$  obtida pelo método da colocação quando aplicado à equação integro-funcional.

**Proposição 3.2.5.** Consideremos o operador integro-funcional  $A$  dado por (3.15). Supomos que as condições (a') – (e') são satisfeitas e que o operador interpolador  $\mathcal{I}_n$  satisfaça a condição (3.16). Sejam  $u^* \in C([a, b])$  a solução da equação integro-funcional (3.2). Se

$u^* \in C([a, b])$ , então a equação (3.5) tem pelo menos uma solução  $u_h \in V_n \cap C([a, b])$ ,  $h = (b - a)/n$ , para  $n$  suficientemente grande, e

$$\|u^* - u_h\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

**Demonstração:** Pelos Lemas 2.3.1 e 2.3.2 temos que  $A$  em (3.15) é compacto, logo completamente contínuo em  $L^\infty([a, b])$ . Assim, o resultado segue do teorema 3.2.1.  $\square$

Vejam as condições sobre o operador integro-funcional  $A$  em (3.15) para que seja Fréchet-diferenciável.

**Proposição 3.2.6.** Suponha que  $(a') - (e')$  são satisfeitas. Admita que a derivada parcial de  $f$  em relação a segunda variável,  $f_y(x, y) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  exista e seja contínua em  $x \in [a, b]$  e  $y \in \mathbb{R}$ . Então o operador  $A$  é continuamente Fréchet-diferenciável sobre  $L^\infty([a, b])$ , além disso,

(i) se  $u \in C([a, b])$ , para todo  $x \in [a, b]$  e  $v \in L^\infty([a, b])$  tem-se

$$[A'(u)v](x) = f_y(x, (Ku)(x))(Kv)(x);$$

onde  $(Kv)(x) = \int_a^b k(x, y)v(y) dy$ .

(ii) Se  $u^*$  é um ponto fixo de  $A$ , então  $L = A'(u^*)$  não possui autovalor igual a 1.

**Demonstração:** (i) Dados  $x \in [a, b]$  e  $v \in L^\infty([a, b])$  temos que

$$(A(u^* + v) - Au^*)(x) = f(x, (K(u^* + v))(x)) - f(x, (Ku^*)(x)). \quad (3.17)$$

Pela linearidade de  $K$ , segue que

$$(A(u^* + v) - Au^*)(x) = f(x, (Ku^* + Kv)(x)) - f(x, (Ku^*)(x)).$$

Denotemos  $z^* = (Ku^*)(x)$  e  $w = (Kv)(x)$ . Como  $f_y$  existe e contínua num intervalo  $I$  contendo  $z^*$  e  $w$ , temos que

$$f(x, z^* + w) = f(x, z^*) + f_y(x, z^*)w + \omega(z^*, w) \quad (3.18)$$

com  $\omega(z^*, w) = o(\|w\|_\infty)$ . Substituindo (3.18) em (3.17) obtemos o resultado, visto que  $f_y(x, (Ku)(x))$  é um operador linear.

(ii) Suponha por contradição que  $L = A'(u^*)$  tenha autovalor igual a 1. Neste caso, existiria  $v \in L^\infty([a, b])$  tal que  $\|v\|_\infty = 1$  e

$$A'(u^*)v = v.$$

Por definição,

$$A(u^* + tv) - A(u^*) = A'(u^*)(tv) + \omega(u^*, tv) = v + \omega(u^*, tv)$$

com  $\omega(u^*, tv) = o(\|tv\|_\infty)$  e qualquer  $t \in \mathbb{R}^*$ . Tomando  $t > 0$ , temos que

$$\frac{A(u^* + tv) - A(u^*)}{t} = A'(u^*)(v) + \frac{\omega(u^*, tv)}{\|tv\|_\infty},$$

assim

$$\left\| v + \frac{\omega(u^*, tv)}{\|tv\|_\infty} \right\|_\infty = \left\| \frac{A(u^* + tv) - A(u^*)}{t} \right\|_\infty.$$

Por outro lado, usando (d'),

$$\begin{aligned} \left| \frac{A(u^* + tv)(x) - A(u^*)(x)}{t} \right| &= \left| \frac{f(x, (K(u^* + tv))(x)) - f(x, (Ku^*)(x))}{t} \right| \\ &\leq \frac{\tau_2}{t} |(K(u^* + tv))(x) - (Ku^*)(x)| \\ &= \frac{\tau_2}{t} |tK(v)(x)| \\ &\leq \tau_2 \|K\|_\infty \|v\|_\infty \end{aligned}$$

Além disso, segue de (e') que existe  $0 < \epsilon < 1$  tal que

$$\left\| v + \frac{\omega(u^*, tv)}{\|tv\|_\infty} \right\|_\infty = \left| \frac{A(u^* + tv)(x) - A(u^*)(x)}{t} \right| \leq (1 - \epsilon)' \|v\|_\infty.$$

Por outro lado, como  $\omega(u^*, tv) = o(\|tv\|_\infty)$ , existe  $T > 0$  tal que

$$\left\| \frac{\omega(u^*, tv)}{\|tv\|_\infty} \right\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t < T.$$

Assim,

$$\left\| v + \frac{\omega(u^*, tv)}{\|tv\|_\infty} \right\|_\infty \geq \|v\|_\infty - \left\| \frac{\omega(u^*, tv)}{\|tv\|_\infty} \right\|_\infty > \|v\|_\infty - \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t < T,$$

o que leva à contradição  $\|v\|_\infty < 1/2$ . Logo  $\lambda = 11$  não pode ser autovalor de  $A'(u^*)$ .  $\square$

### 3.2.2 Convergência da Iteração de Picard

Nesta seção, consideremos o sistema das equações discretizadas (3.5), obtido ao aplicarmos o método da colocação sobre a equação integro-funcional (3.2), e sua respectiva forma matricial (3.6). Conforme vimos, pela Proposição 3.2.5, sob certas condições existe uma solução  $u_h \in C([a, b])$  para  $n$  suficientemente grande. Nas mesmas hipóteses das Proposições 3.2.5 e 3.2.6, vamos demonstrar que a solução aproximada obtida pelo processo iterativo de Picard, (3.8), converge para a solução exata do sistema (3.5),  $\mathbf{u}_h$ .

**Observação 3.2.7.** Notemos que existe uma relação entre  $\mathbb{R}^{n+1}$  e o subespaço de projeção  $V_n$ , na qual a cada  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  associamos a função  $v_h(x) = \sum_{j=0}^n v_j \phi_j(x) \in V_n$ . É fácil ver que esta relação é biunívoca. Além disso, vamos admitir que  $\|v_h\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_\infty$ , que equivale a dizer que  $v_h$  atinge o máximo em algum ponto  $x_j$  da discretização. Isto acontece, por exemplo, se considerarmos operadores lineares por partes e  $V_n = \text{Im}(\mathcal{I}_n)$ .

**Teorema 3.2.8.** O operador  $\mathbf{A}_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , definido em (3.8) é uma contração com respeito a norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Demonstração:** Por definição do operador  $\mathbf{A}_1$  e norma  $\|\cdot\|_\infty$ , temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{v})\|_\infty &= \|\mathbf{g} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{K}\mathbf{u}) - (\mathbf{g} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{K}\mathbf{v}))\|_\infty \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} \left| f \left( x_i, \sum_{j=0}^n K_{ij}u_j \right) - f \left( x_i, \sum_{j=0}^n K_{ij}v_j \right) \right| \end{aligned} \quad (3.19)$$

Usando a condição (d') do Teorema 2.3.3 em (3.19) segue que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{v})\|_\infty &\leq \tau_2 \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^n K_{ij}u_j - \sum_{j=0}^n K_{ij}v_j \right| \\ &= \tau_2 \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^n K_{ij}(u_j - v_j) \right| \\ &= \tau_2 \|\mathbf{K}(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_\infty \\ &\leq \tau_2 \|\mathbf{K}\|_\infty \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Por outro lado, dado  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$  com  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$  e  $v_h \in V_n$  associado a  $\mathbf{v}$  de acordo com a Observação 3.2.7,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}\mathbf{v}\|_\infty &= \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^n K_{ij}v_j \right| \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^n \int_a^b k(x_i, y) l_j(y) dy v_j \right| \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} \left| \int_a^v k(x_i, y) v_h(y) dy \right| \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} |(Kv_h)(x_i)| \\ &\leq \|Kv_h\|_\infty \\ &\leq \|K\|_\infty \|v_h\|_\infty = \|K\|_\infty, \end{aligned}$$

pois  $\|v_h\|_\infty = \|\mathbf{v}\|_\infty = 1$ , donde segue

$$\|\mathbf{K}\|_\infty \leq \|K\|_\infty. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.20) obtemos

$$\|\mathbf{A}_1(\mathbf{u}) - \mathbf{A}_1(\mathbf{v})\|_\infty \leq M \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_\infty, \quad \text{com } M = \tau_2 \|K\|_\infty. \quad (3.22)$$

Logo  $\mathbf{A}_1$  é uma contração, visto que, por (e'),  $M = \tau_2 \|K\|_\infty < 1$ .  $\square$

**Corolário 3.2.9.** O operador  $\mathbf{A}_2$  tem um ponto fixo.

**Demonstração:** Basta usar o Teorema 1.2.11, visto que  $A_2$  é uma contração.  $\square$

### Análise do erro na iteração de Picard

Seja  $e_r$  o erro dado por

$$e_r = \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}^{(r)}\|_\infty$$

onde  $\mathbf{u}_h$  é a solução exata da equação (3.8) e  $\mathbf{u}^{(r)}$  é a solução do método de Picard após  $r$  iterações.

Usando o item (iii) do Teorema 1.2.11, temos que a estimativa de erro da convergência das iterações de Picard  $\{\mathbf{u}^{(r)}\}$  será

$$e_r = \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}^{(r)}\|_\infty \leq \frac{M^r}{1-M} \|\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(0)}\|_\infty, \quad (3.23)$$

em que  $M$  é a constante da contração do operador  $\mathbf{A}_2$ . Por (3.22), temos que  $M$  depende das condições  $(d')$  –  $(e')$ .

Agora, vejamos um estudo do erro da solução obtida pelo método iterativo de Picard,  $\mathbf{u}^{(r)} = [u_0^{(r)}, \dots, u_n^{(r)}]^T$ , da equação (3.6), em relação à solução exata  $u^*$  da equação integro-funcional (3.2). Evidentemente  $u^{(r)}$  e  $u^*$  não estão no mesmo espaço, desta forma consideremos

$$u^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^n u_j^{(r)} l_j(x),$$

onde  $l_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , formam a base de Lagrange que define o espaço de projeção  $V_n$  e o operador interpolador  $\mathcal{I}_n$ . Definamos o erro global sendo dado por

$$e_{n,r} = \|u^* - u^{(r)}\|_\infty. \quad (3.24)$$

**Teorema 3.2.10.** Consideremos que as condições  $(a')$  –  $(e')$  são satisfeitas e que  $u^* \in C([a, b])$  é uma solução da equação integro-funcional (3.2). Além disso, supomos que as projeções  $\mathcal{I}_n$  que surgem no método da colocação satisfaçam a condição (3.11),

$$\|\mathcal{I}_n v - v\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \text{ para todo } v \in C([a, b]).$$

Então temos o seguinte resultado:

$$e_{n,r} \rightarrow 0 \text{ desde que } n, r \rightarrow \infty,$$

ou seja, o método da colocação conjugado com o método de Picard determinam uma solução convergente da equação integro-funcional.

**Demonstração:** Consideremos  $\mathbf{u}_h = [u_0, \dots, u_n]$  o vetor solução da equação (3.8), de tal forma que

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^n u_j l_j(x)$$

é uma aproximação da solução exata pelo método da colocação e esta aproximação existe para  $n$  suficientemente grande, conforme a Proposição 3.2.5.

Notemos que

$$e_{n,r} \leq \|u^* - u_h\|_\infty + \|u_h - u^{(r)}\|_\infty. \quad (3.25)$$

Dado  $\epsilon > 0$ , ainda pela Proposição 3.2.5, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|u^* - u_h\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \text{ se } n \geq n_0. \quad (3.26)$$

Já a segunda parcela de (3.25), pela Observação 3.2.7, satisfaz

$$e_r = \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}^{(r)}\|_\infty = \|u_h - u^{(r)}\|_\infty.$$

Por (3.23), temos que  $e_r \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ , logo existe  $r_0 > 0$  tal que

$$\|u_h - u^{(r)}\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.27)$$

Usando (3.26) e (3.27) em (3.25), temos que

$$e_{n,r} < \epsilon, \text{ desde que } n \geq n_0 \text{ e } r \geq r_0,$$

como queríamos provar. □

# Capítulo 4

## Experimentos Numéricos

Neste capítulo aplicaremos o método proposto na Seção 3.1 sobre algumas equações integro-funcionais da forma (3.2). Procuramos utilizar exemplos que possuíssem uma solução exata a fim de avaliarmos melhor a convergência do método a partir do erro global  $e_{n,r}$  definido em (3.24).

Apresentaremos três exemplos, cada um deles com um objetivo específico e apresentando uma não linearidade diferente. No exemplo da Seção 4.1 apresentado no trabalho em [Azevedo, Rocha e Oliveira \(2017\)](#) tem a função  $f$  sendo quadrática e o kernel exponencial. Este exemplo foi construído a partir da equação 3.2-1 em [Poluanin e Manzhirov \(1998\)](#). No exemplo da Seção 4.2 consideramos a função  $f$  do tipo raiz cúbica e kernel linear por partes. Neste exemplo, a solução exata estará contida no espaço  $V_n$ . Na Seção 4.3 vamos considerar o exemplo proposto por [Kumar e Sloan \(1987\)](#), em que a função  $f$  é exponencial e o kernel é quadrático por partes.

Em todos os exemplos, o espaço de projeção será o conjunto das funções contínuas lineares por partes, denotado por  $P_1([a, b])$ . As funções de Lagrange, base para o espaço  $P_1([a, b])$ , foram construídas de acordo com o Exemplo 1.3.3,

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{se } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} & \text{se } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{se } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (4.1)$$

### 4.1 Função Quadrática

Consideremos  $[a, b] = [0, 4\pi]$  e a equação integro-funcional (3.2) da seguinte forma

$$u(x) = -\alpha \cos^2(x) + \left(2\alpha - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}\right) \cos(x) + \left(\frac{\lambda}{2} - \alpha\right) + \alpha \left(\int_0^{4\pi} e^{\lambda|x-y|} u(y) dy\right)^2, \quad (4.2)$$

onde o kernel é  $k(x, y) = e^{\lambda|x-y|}$  e a função não linear  $f(x, y) = \alpha y^2$ , com parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$ , respectivamente. A função  $g(x)$  é dada por

$$g(x) = -\alpha \cos^2(x) + \left(2\alpha - \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}\right) \cos(x) + \left(\frac{\lambda}{2} - \alpha\right),$$

de modo que a equação (4.2) possui uma solução exata dada por:

$$u_{ex}(x) = \frac{1}{2\lambda} [-(1 + \lambda^2) \cos(x) + \lambda^2].$$

O parâmetro  $\alpha$  controla a não linearidade do problema no sentido de que pondera  $f$  em (2.12), enquanto o parâmetro  $\lambda$  está relacionado com o comprimento de correlação do kernel  $k$ . Se  $|\lambda|$  for grande, então  $k(x, y)$  decai mais rapidamente para zero a medida que  $|x - y|$  aumenta, o que exige uma discretização mais fina. Vejamos este comportamento na Figura 1, que apresenta gráficos do kernel  $k$  em  $[0, 4\pi] \times [0, 4\pi]$  para diversos valores de  $\lambda$ .

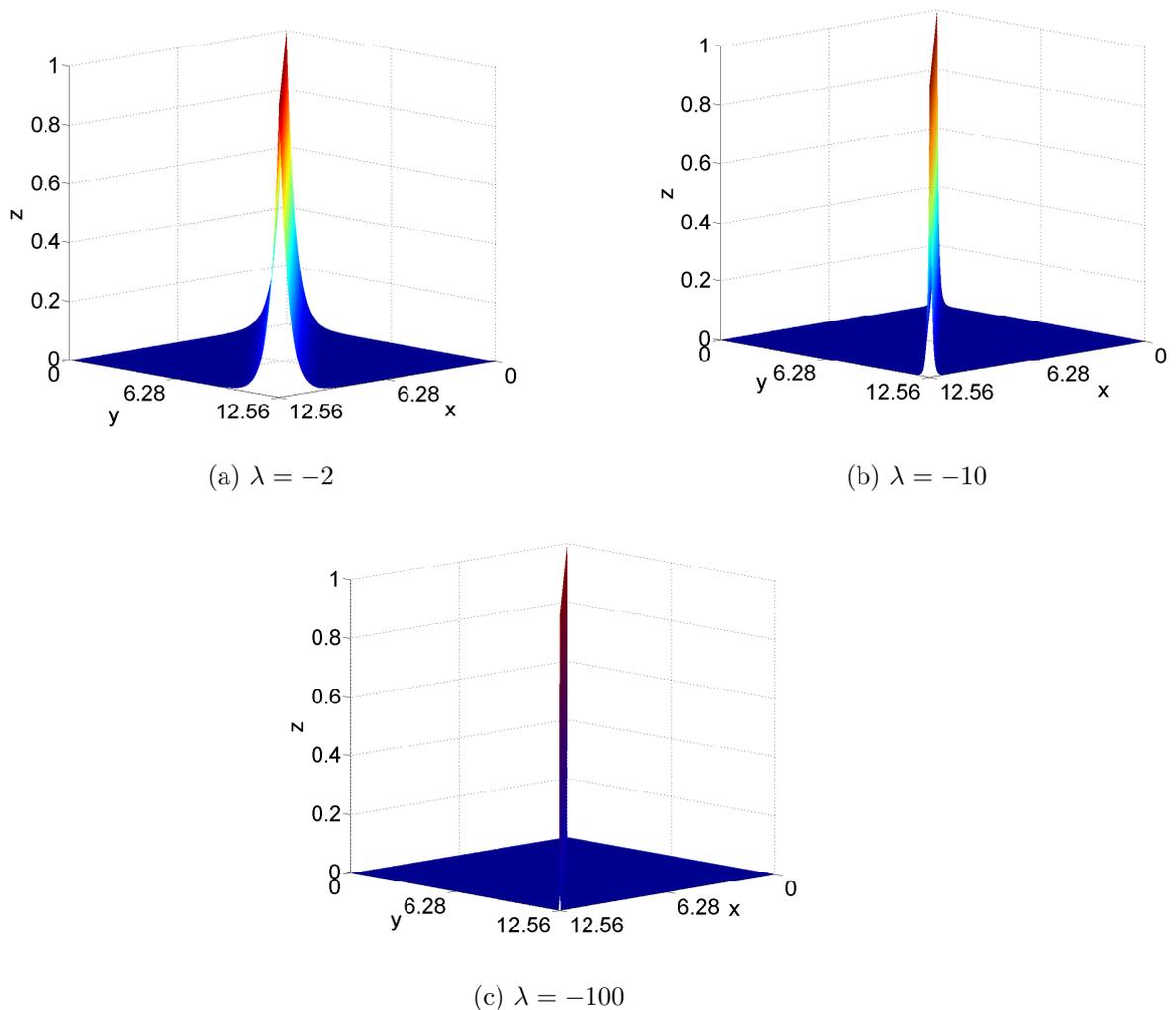


Figura 1 – Gráficos do kernel  $k(x, y) = \exp(\lambda|x-y|)$  em  $[0, 4\pi] \times [0, 4\pi]$ . (a)  $\lambda = -2$ , (b)  $\lambda = -10$  e (c)  $\lambda = -100$ .

Para calcular as integrais (3.7) que fornecem os elementos da matriz  $\mathbf{K}$  vamos fazer uma aproximação utilizando quadraturas Gaussianas em cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . O objetivo é que o erro cometido nesta quadratura não influencie no resultado da solução.

Para determinar quantos pontos de integração são necessários, vamos estimar a partir de quantos pontos a adição de pontos adicionais deixa de afetar o valor das integrais. Como referência, utilizaremos a norma da matriz  $\mathbf{K}$ . A Figura 2 exibe o valor de  $\|\mathbf{K}\|_\infty$  em função do número de pontos de integração  $n_{int}$ . Para todos os valores do parâmetro  $\lambda$  considerados, não houve variação significativa de  $\|\mathbf{K}\|_\infty$  a partir de  $n_{int} = 6$ . Por este motivo, utilizaremos  $n_{int} = 6$  nesta seção.

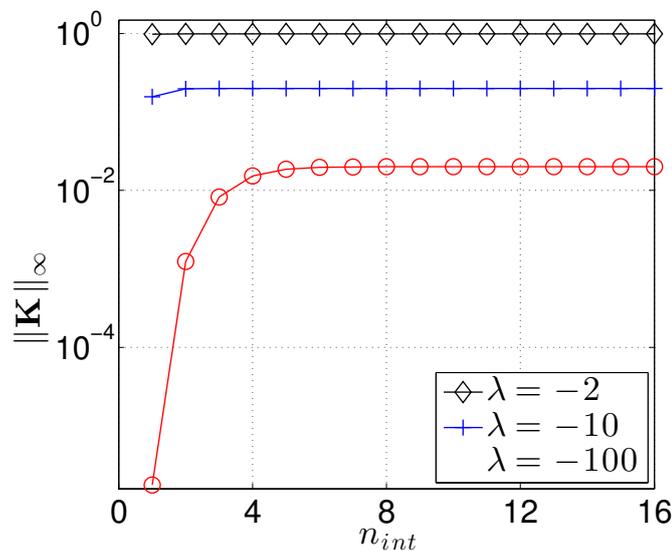
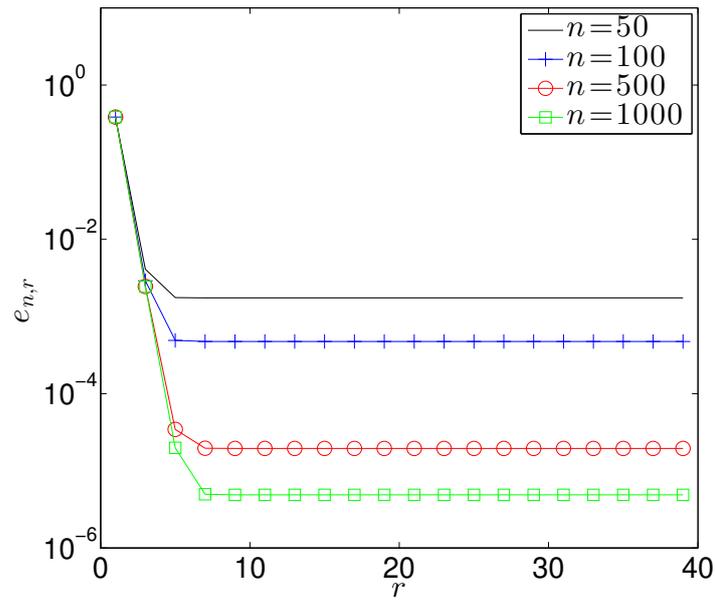


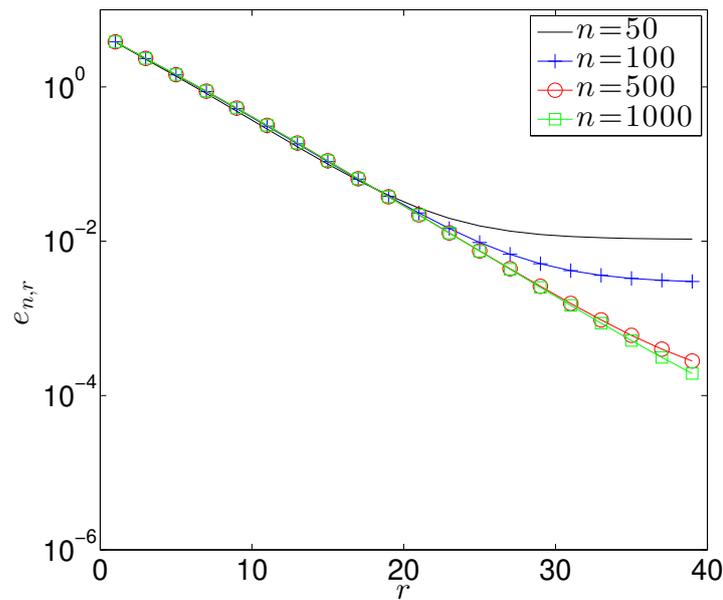
Figura 2 – Norma da matriz  $\mathbf{K}$  associada ao kernel  $k(x, y) = \exp(\lambda|x - y|)$ .

Seja  $r$  o número de iterações do método de Picard e  $n$  o número de intervalos da discretização uniforme do intervalo  $[0, 4\pi]$ . A seguir, estudamos como o erro global depende de  $r$ ,  $n$ , e dos parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$ . Em todos os testes tomamos como aproximação inicial a função constante  $u_0(x) = 2$  para as iterações de Picard.

Iniciamos com a análise da convergência de acordo com o número de iterações  $r$ , que está representada na Figura 3. Fixamos os parâmetros  $\lambda = -10$  e  $\alpha = 0.1$  e  $1$ . Admitimos as quantidades de pontos da malha  $n = 50, 100, 500$  e  $1000$ . De acordo com as Figuras 3a ( $\alpha = 0.1$ ) e 3b ( $\alpha = 1$ ), o método de Picard converge para uma solução aproximada cujo erro diminui com o aumento de  $n$ . Quando  $\alpha = 0.1$  o método é convergente, basta ver que o erro estabiliza aproximadamente para iterações  $r \geq 5$ . Para  $\alpha = 1$  também tem convergência, embora precise de mais iterações para obter a estabilidade. Além disso, para  $\alpha = 1$  os erros apresentados são maiores.



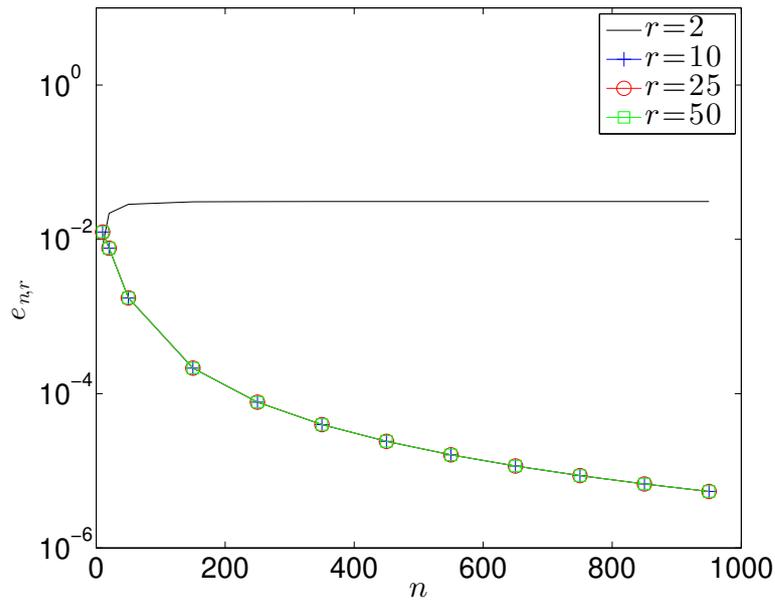
(a)  $\lambda = -10$  e  $\alpha = 0.1$



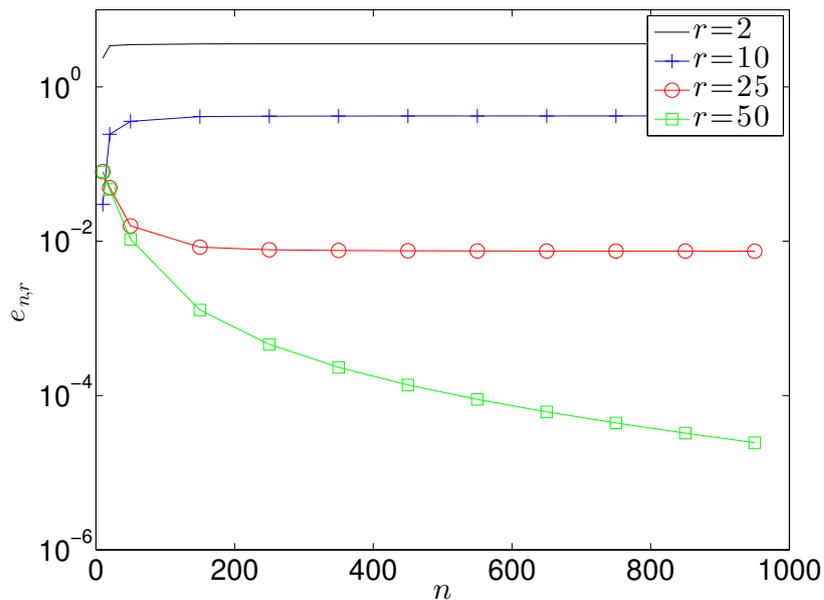
(b)  $\lambda = -10$  e  $\alpha = 1$

Figura 3 – Erro global em termos do número de iterações  $r$  (Problema 4.1).

Agora vejamos a análise da convergência do método de acordo com o parâmetro refinamento da malha,  $n$ . Na Figura 4, variamos o parâmetro  $n$  supondo o número de iterações  $r = 2, 10, 25$  e  $50$ . Fixamos novamente os parâmetros  $\alpha = 0.1$  e  $1$  e  $\lambda = -10$ . Para um número de iterações suficientemente grande os erros decaem rapidamente à medida que refinamos a malha.



(a)  $\lambda = -10$  e  $\alpha = 0.1$



(b)  $\lambda = -10$  e  $\alpha = 1$

Figura 4 – Erro global em termos do número de intervalos  $n$  da discretização (Problema 4.1).

Observamos que o parâmetro  $\alpha$  interfere no comportamento da solução numérica. No entanto veremos que o parâmetro  $\lambda$  também pode interferir. Na Figura 5, apresentamos o comportamento da solução numérica variando  $\lambda$  no intervalo  $[-10, -0.2]$  e consideremos os casos em que  $n = 500$ , e admitimos  $r = 2, 10, 20$  e  $40$  iterações para cada caso.

A Figura 5 mostra que se  $|\lambda| < 2$  as soluções apresentam erro maior. Porém se  $|\lambda| > 2$  notemos que os erros crescem à medida que  $\lambda$  for maior. Fizemos testes com  $|\lambda| > 10$  e os

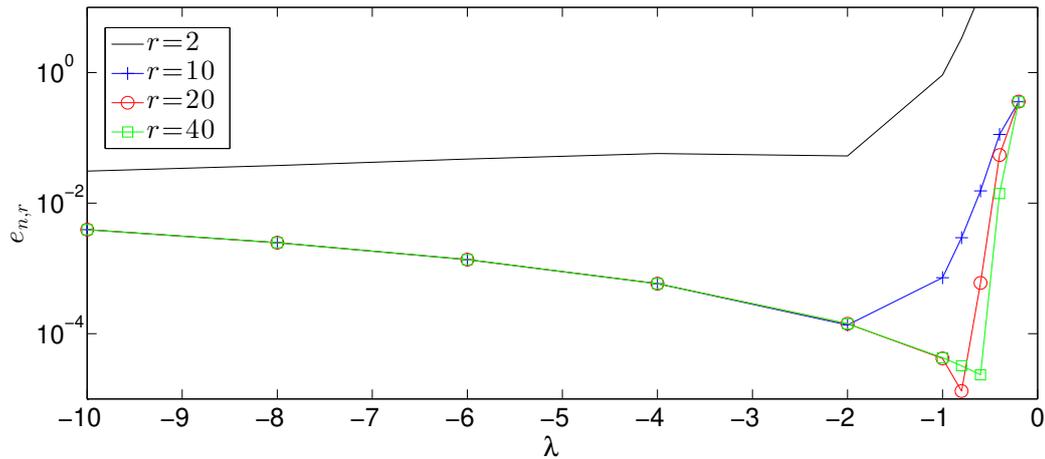


Figura 5 – Erro global em termos do parâmetro  $\lambda$  (Problema 4.1). Admitimos  $\alpha = 0.1$ .

erros cresceram. Estes valores são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Erro global considerando  $\alpha = 0.1$ ,  $n = 500$  e  $r = 20$  (Problema 4.1).

$\lambda$	$e_{n,r}$
-10	0.000336232609091
-100	0.003985016436447
-1000	0.048265106666473
-10000	0.285008983193370

Já na Figura 6 analisamos o impacto da escolha de  $\alpha$  sobre os valores presentes no intervalo  $[0, 3]$ . Note que quando  $\alpha > 1$  (mais precisamente  $\alpha > 2.5$ ) o método diverge.

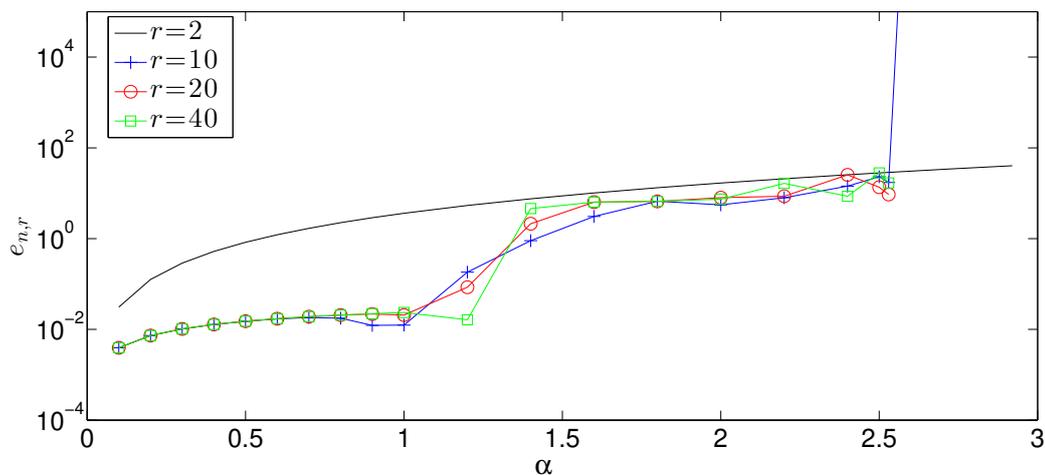


Figura 6 – Erro global da solução numérica em termos do parâmetro  $\alpha$  (Problema 4.1). Admitimos  $\lambda = -10$ .

Pela expressão de  $f(x, y) = \alpha y^2$  temos que  $f$  é localmente Lipschitziana e a constante

de Lipschitz  $\tau_2$  é diretamente proporcional a  $\alpha$ . Desta forma, o que pode ter provocado a divergência do método é o fato que fazendo  $\alpha > 2.5$  teremos  $\tau_2 \|K\|_\infty > 1$ , violando a condição ( $e'$ ).

Por (3.25) o erro global,  $e_{n,r}$ , é a soma do erro dado pelas iterações de Picard,  $e_r$ , e do erro dado pela aproximação obtida pelo método da colocação,  $\|u^* - u_h\|_\infty$ . Como  $f$  é diferenciável, temos pelo Teorema 3.2.3 e a Proposição 3.2.6 que o erro da aproximação do método da colocação tem a mesma taxa de convergência do erro da interpolação utilizada. Como estamos usando funções lineares por partes, conforme a Proposição 1.3.6, temos que ordem de convergência é no máximo 2. Já o erro das iterações de Picard, por (3.23), assim como sua “rapidez” da convergência, depende da constante de Lipschitz  $M$ . Em (3.22) temos que

$$M = \tau_2 \|K\|_\infty.$$

Portanto,  $M$  depende da constante  $\tau_2$  (constante de Lipschitz em relação a segunda variável da função  $f$ , logo depende de  $\alpha$ ) e depende do valor da norma  $\|K\|_\infty$  (logo depende de  $\lambda$ ). Desta forma, escolhendo  $\alpha$  e  $\lambda$  adequadamente, tal que  $M < 1$  garantimos que  $e_r$  converge para zero. Portanto o erro global  $e_{n,r}$  terá uma ordem de convergência proporcional à ordem de convergência da interpolação utilizada.

Conforme foram definidas as funções  $k$  e  $f$ , a variação dos parâmetros de  $\alpha$  e  $\lambda$  podem interferir sobre as condições ( $a'$ ) – ( $e'$ ), principalmente as condições ( $d'$ ) e ( $e'$ ). No entanto, a equação integral (4.2) continua tendo solução, o que não contradiz o Teorema 2.1.5, visto que ( $a'$ ) – ( $e'$ ) são condições suficientes para a existência da solução. Já a solução numérica, as condições ( $d'$ ) e ( $e'$ ) são também condições necessárias para a convergência do método numérico.

Para concluir este exemplo, estimamos a ordem de precisão  $p$  do erro global  $e_{n,r}$  associado ao tamanho da discretização  $n$  depois de  $r$  iterações. Por definição, a ordem de convergência  $p$  satisfaz a relação com o erro para cada  $r$  suficientemente grande

$$e_{n,r} := e_n \approx Ch_n^p,$$

onde  $C > 0$  e  $h_n = (b - a)/n$ . Desta forma, podemos calcular  $p$  da seguinte forma:

$$p_n \approx \frac{\log(e_n/e_{n-1})}{\log(h_n/h_{n-1})}, \quad n \geq 2 \quad (4.3)$$

onde  $e_n = \|u_n - u_{ex}\|/\|u_{ex}\|$  é o erro global. Esta fórmula é somente para testes em que é conhecida a solução exata e usada para comprovar a ordem de convergência. Mas não tem vantagem prática. No entanto, Davis (1983) e Roache (1998), apresentam uma outra forma de estimar a ordem de convergência  $p$  associado a  $h_n$  sem uso da solução exata:

$$\tilde{p}_{i,n} = \frac{\log(|u_{n-2}(x_i) - u_{n-1}(x_i)|/|u_{n-1}(x_i) - u_n(x_i)|)}{\log(h_{n-1}/h_n)}, \quad i = 0, \dots, n. \quad (4.4)$$

Como esta estimativa depende da malha, consideraremos a ordem ao longo do intervalo como a menor das ordens, ou seja,

$$\tilde{p}_n = \min_{0 \leq i \leq n_n} \tilde{p}_{i,n}. \quad (4.5)$$

Na Tabela 2 apresentamos os resultados dos cálculos das ordens de convergência obtidas e os dados sugerem que ambas,  $p$  e  $\tilde{p}$ , tendem a 2.

Tabela 2 – Estimativas da ordem de convergência  $p$  obtidas pelas fórmulas (4.3) e (4.5) considerando  $\lambda = -10$ ,  $\alpha = 0.1$  e com  $r = 10$  iterações (Problema 4.1). Na fórmula (4.3) foi usada a norma  $\|\cdot\|_\infty$ .

$n$	$h$	$p$	$\tilde{p}$
10	1.25664	—	—
20	0.62832	1.55623	—
40	0.31416	1.91185	1.83072
80	0.15708	2.01779	1.95607
160	0.07854	2.00764	1.98843
320	0.03927	1.99814	1.99704
640	0.01963	1.99841	1.99925
1280	0.00982	1.99876	1.99981
2560	0.00491	1.99779	1.99995

## 4.2 Função Raiz Cúbica

Nesta seção, consideremos a função  $f(x, y) = y^{1/3}$  e tomamos

$$g(x) = 6x - (2x^3 - 3x + 2)^{1/3}$$

tal que a equação

$$u(x) = g(x) + f\left(x, \int_0^1 |x - y|u(y) dy\right), \quad x \in [0, 1], \quad (4.6)$$

tenha a solução exata  $u(x) = 6x$ .

Adotemos as mesmas condições da Seção 4.1 para aplicar o método da colocação e nas iterações de Picard. Na equação integral (4.6) o kernel é uma função contínua por partes,  $k(x, y) = |x - y|$ . Considerando o espaço de projeções sendo as funções contínuas lineares por partes a integração do problema é realizada sobre funções contínuas lineares por partes. Assim, iremos considerar a quadratura Gaussiana sobre cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  com um só ponto ( $n_{int} = 1$ ).

Na Figura 7 vemos o comportamento do erro global  $e_{n,r}$  à medida que  $r$  cresce. Fixamos  $n = 50, 100, 500$  e  $1000$ . Notemos que as iterações sucessivas tendem a uma

estabilidade do erro. Assim como na Figura 3, quanto maior o refinamento da malha menor será o erro global  $e_{n,r}$ .

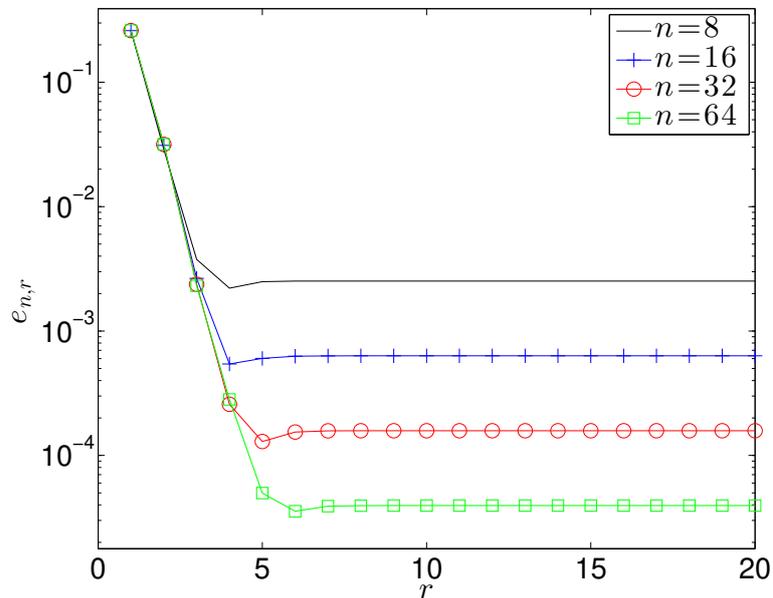


Figura 7 – Erro global em termos da quantidade de iterações  $r$  (Problema 4.2).

Na Figura 8 vemos o comportamento do erro global  $e_{n,r}$  à medida que  $n$  cresce. Fixamos  $r = 2, 5, 10$  e  $20$ .

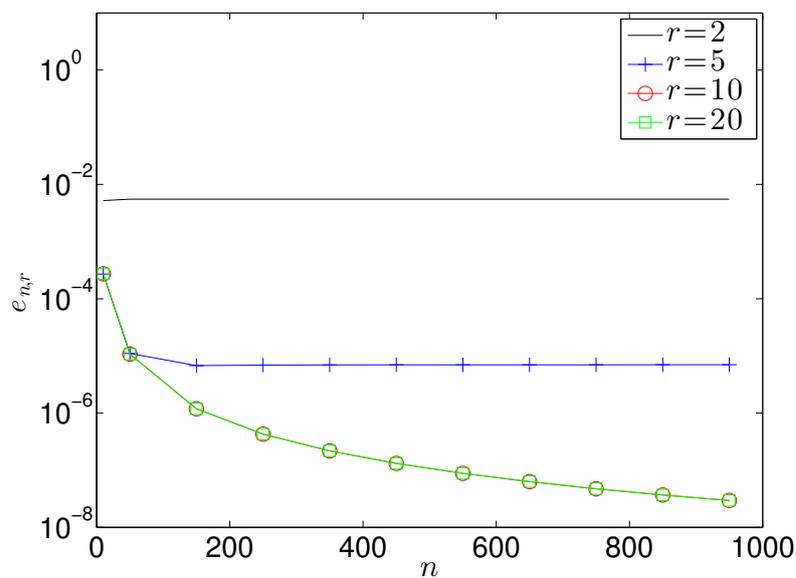


Figura 8 – Erro global em termos do número de pontos da discretização  $n$  (Problema 4.2).

Notemos que quando  $n$  cresce o erro global  $e_{n,r}$  decresce. Comparada com a Figura 4, a Figura 7 revela que para este problema o método atinge mais rapidamente a solução exata, o que decorre do fato do kernel ser melhor representado.

Desta forma, obtemos neste exemplo o comportamento esperado para o erro global  $e_{n,r}$ . Para concluir, na Tabela abaixo é apresentado a ordem de convergência usando a fórmula 4.3.

Tabela 3 – Estimativas da ordem de convergência  $p$  obtida pela fórmula (4.3) e com  $r = 20$  iterações (Problema 4.2).

$n$	$h$	$e_{n,r}$	$p$
2	0.50000	3.93526e-02	—
4	0.25000	1.00450e-02	1.96999
8	0.12500	2.52335e-03	1.99306
16	0.06250	6.31603e-04	1.99825
32	0.03125	1.57949e-04	1.99956
64	0.01563	3.94902e-05	1.99989

### 4.3 Função Exponencial

Consideremos a equação integro-funcional (3.2) da seguinte forma

$$u(x) = \exp\left(\int_0^1 k(x,y)u(y) dy\right), \quad (4.7)$$

com o kernel

$$k(x,y) = \begin{cases} -y(1-x) & y \leq x, \\ -x(1-y) & y > x. \end{cases}$$

A solução exata para este problema é dada por

$$u^*(x) = \frac{1}{2} + c^2 + \frac{1}{\cos(c(x - \frac{1}{2})/2)},$$

onde  $c$  é a solução da equação  $c/\cos(c/4) = \sqrt{2}$ . Esta equação foi obtida através de uma mudança de variável sugerida no artigo de Kumar e Sloan (1987) para equações de Hammerstein. Sua equação original tem a forma

$$v(x) = \int_0^1 k(x,y) \exp(v(y)) dy, \quad (4.8)$$

e fazendo a mudança de variável  $u(x) = \exp(v(x))$  obtemos (4.7).

Novamente, como no Exemplo 4.1, vamos supor como aproximação inicial a função constante  $u_0(x) = 2$  para o método de Picard. Como o kernel é uma função bilinear por partes, utilizaremos a quadratura Gaussiana com dois pontos ( $n_{int} = 2$ ).

Na Figura 9 apresentamos o comportamento do erro global  $e_{n,r}$  à medida que aumentamos a quantidade  $n$  de intervalos da malha. Fixamos  $r = 5, 8, 12$  e  $20$ .

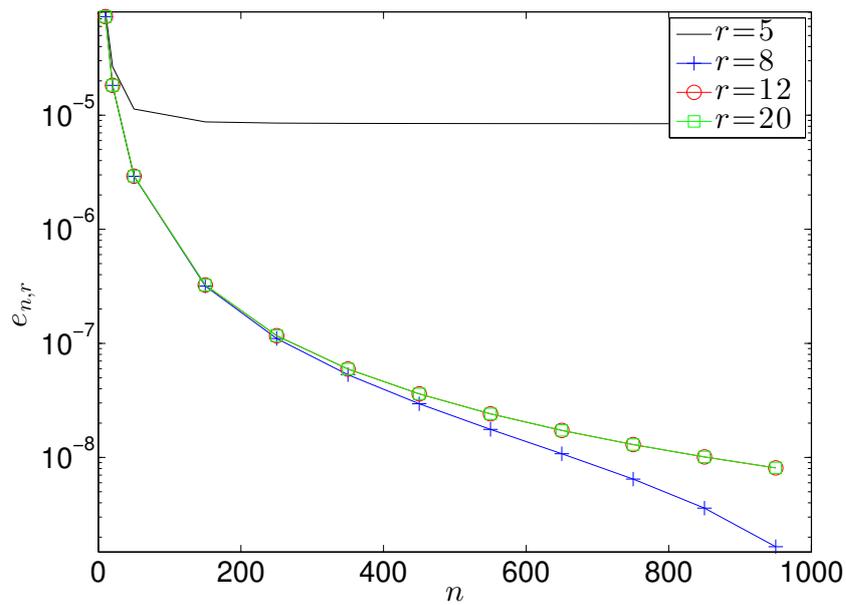


Figura 9 – Erro global em termos da número de intervalos da malha  $n$  (Problema 4.3).

Na Figura 10 apresentamos o erro global  $e_{n,r}$  para as número de intervalos da malha  $n = 8, 16, 32$  e  $64$  e o comportamento quando aumentamos a quantidade de iterações.

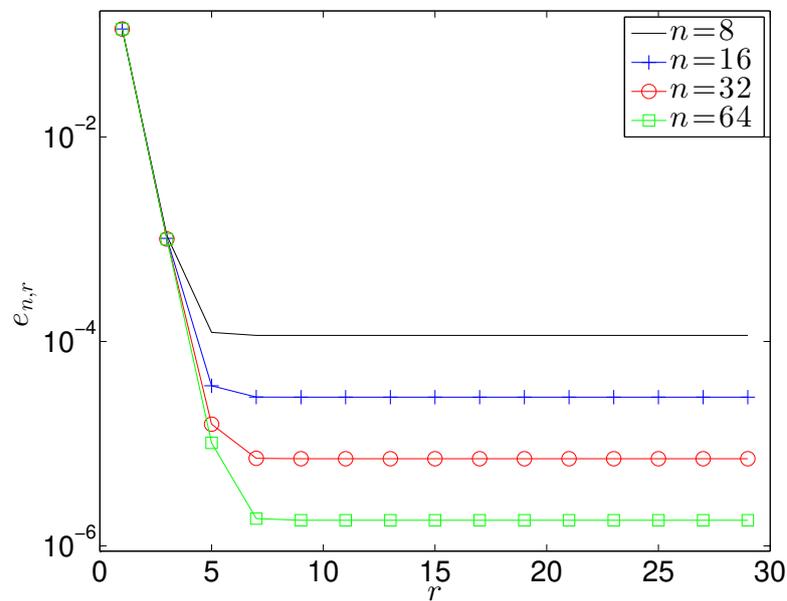


Figura 10 – Erro global em termos do número de iterações  $r$  (Problema 4.3).

Pela Figura 10 as iterações sucessivas tendem a uma estabilidade do erro. Como nos exemplos anteriores, quanto maior o refinamento da malha menor será o erro global  $e_{n,r}$ , de acordo com a Figura 9.

Visando comparar os resultados aqui obtidos com os resultados apresentados na

Tabela I de Kumar e Sloan (1987), na Tabela 5 apresentamos os erros à medida que aumentamos  $n$  além da ordem de convergência, calculada pela fórmula (4.3).

Tabela 4 – Estimativas da ordem de convergência  $p$  e do erro na norma  $\|\cdot\|_\infty$ . (Problema 4.3)

$n$	$h$	iterações	erro $\ u^* - u^{(r)}\ _\infty$	ordem $p$
2	0.50000	8	3.37677e-03	—
4	0.25000	9	8.66958e-04	1.96161
8	0.12500	9	2.24651e-04	1.94827
16	0.06250	9	5.72966e-05	1.97117
32	0.03125	9	1.44250e-05	1.98988
64	0.01563	9	3.62225e-06	1.99361

Com o intuito de verificar quantas iterações são necessárias para que as aproximações sucessivas  $u^{(r)}$  e  $u^{(r+1)}$  sejam suficientemente próximos fizemos um teste de parada quando implementamos as iterações. Pelas condições observadas da Figura 10 fizemos um teste de parada com  $\|u^{(r+1)} - u^{(r)}\|_\infty < 10^{-8}$ . Este resultado é apresentado na coluna “iterações”.

A partir da Tabela 5 temos que 9 iterações são suficientes para obter o erro global na casa de  $10^{-6}$  e que a ordem de convergência do método é 2. Comparando com o trabalho de Kumar e Sloan (1987), os nossos resultados foram similares referentes ao erro e ordem de convergência.

Agora verificaremos que a escolha da quadratura não interfere no erro global do método, ou seja, considerando um outro método de integração não alterará o comportamento do erro global. Para isso, vamos aplicar a fórmula do trapézio composta para comparar com a quadratura Gaussiana.

Na regra do trapézio os nós da quadratura são os mesmos da discretização uniforme e os pesos são  $w_0 = w_n = h/2$  e  $w_j = h$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Na Figura 11, assim como a Figura 10, vemos o comportamento do erro global  $e_{n,r}$  em função de  $r$  para  $n$  fixado em 8, 16, 32 e 64, porém usando a regra do trapézio para calcular as integrais envolvidas.

Notemos que  $e_{n,r}$  tem comportamento análogo na Figura 10. Para concluir vemos na Tabela 5 que a ordem de convergência também tende a 2 no método do trapézio.

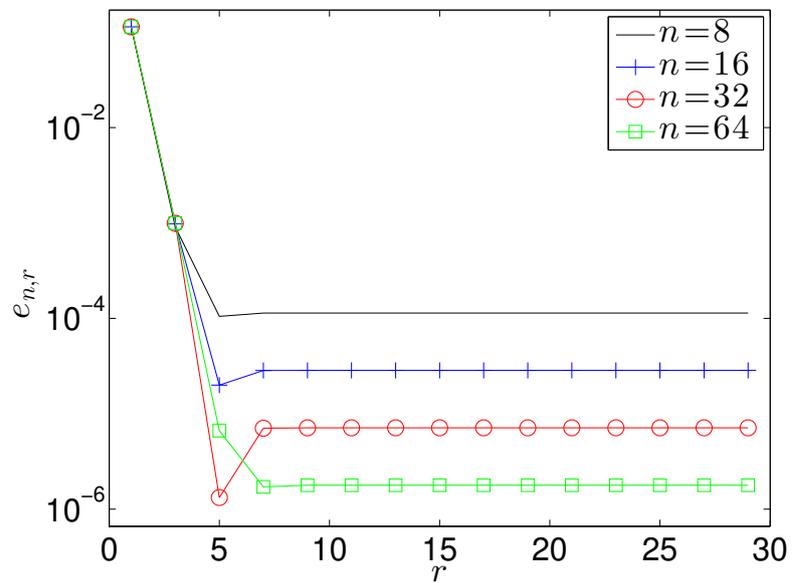


Figura 11 – Erro global em termos do número de iterações  $r$  usando a regra do trapézio para a integração numérica. (Problema 4.3).

Tabela 5 – Estimativas da ordem de convergência  $p$  e do erro  $e_{r,n}$ , quando usado regra do trapézio para aproximar as integrais (Problema 4.3).

$n$	$h$	$e_{n,r}$	ordem $p$
2	0.50000	1.71846e-03	—
4	0.25000	4.48949e-04	1.93649
8	0.12500	1.13570e-04	1.98297
16	0.06250	2.84781e-05	1.99566
32	0.03125	7.12495e-06	1.99890
64	0.01563	1.78162e-06	1.99969

# Capítulo 5

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 5.1 Conclusões

A teoria sobre equações integro-funcionais, cujo desenvolvimento se iniciou nos trabalhos de [Banaś \(1989\)](#) e [Emmanuele \(1991\)](#), foi significativamente ampliada nesta tese. Abordamos o tema de forma teórica e computacionalmente com resultados que expandem os trabalhos existentes na literatura.

Do ponto de vista analítico, provamos existência e unicidade de solução para a equação integro-funcional sobre os espaços de funções  $L^p([a, b])$  em todos os casos:  $1 \leq p \leq \infty$ . Usamos técnicas do ponto fixo ora associadas à teoria de não compacidade, ora associadas à teoria de operadores continuamente completos ou ainda associadas à teoria de aproximações sucessivas. Os novos resultados para  $L^p$  também foram estendidos para uma equação integro-funcional ainda mais geral, que inclui uma não linearidade em relação a  $u$  no integrando, equação (2.17).

Do ponto de vista numérico, propusemos o uso do método da colocação para aplicar na equação integro-funcional e para resolver o sistema obtido usamos iterações de Picard. Comprovamos os resultados tanto quanto teoricamente, através da demonstração da convergência do método, e quando experimentalmente, por meio de exemplos em que as soluções exatas são conhecidas. Para a demonstração da convergência da solução numérica, utilizamos como pressupostos as mesmas hipóteses da existência de solução em  $L^\infty$  e provamos a convergência sobre o espaço das funções contínuas. Os experimentos serviram também para comprovarem os resultados teóricos. Durante os testes obtivemos tendência a ordem de convergência igual a 2. Esta ordem de convergência é muito comum nos trabalhos direcionados à equações integrais não lineares de Urysohn e Hammerstein. Além disso, o custo computacional foi pequeno nos experimentos realizados.

Como na literatura não existem muitos trabalhos com ensejo numérico, especificamente, para equações integro-funcionais da forma (3.15), então pouco podemos comparar

com resultados existentes. No entanto, os experimentos numéricos apresentaram resultados satisfatórios e dentro do esperado da análise de convergência.

## 5.2 Trabalhos Futuros

O tema proposto neste trabalho pode continuar a ser explorado em diversas direções:

- Verificamos numericamente que a taxa de convergência teórica foi observada também com a regra do trapézio. Isto indica que deve ser possível estender a análise para o método de colocação discreto, de modo análogo ao trabalho de [Kumar \(1988\)](#). A regra do trapézio é uma alternativa interessante por apresentar um custo computacional menor que o da quadratura gaussiana;
- Os experimentos numéricos também sugerem que a condição de Lipschitz global poderia ser relaxada: embora a análise apresentada generalize os resultados clássicos em que se admite continuidade, a continuidade das funções  $k$ ,  $g$  e  $f$  pode ter contribuído para o bom funcionamento do método;
- Ainda sobre o ponto anterior, a análise desenvolvida para espaços  $L^p([a, b])$ , sobretudo com  $p = 2$ , pode ser útil no estudo da convergência do método de Galerkin para a equação integro-funcional;
- Uma alternativa para melhorar a ordem de convergência é utilizar espaços de projeções como sendo funções polinomiais contínuas por partes. No entanto, mais exigências podem ser consideradas sobre a equação, como apresentado por [Maleknejad, Mollapourasl e Mirzaei \(2014\)](#) que usam espaços de projeção sendo as funções cúbicas por partes  $B$ -splines.

## Referências

- ADIBI, H.; RISMANI, A. Numerical solution to a functional integral equation using the Legendre-spectral method. *Austr J. Basic Appl. Sci.*, v. 4, n. 3, p. 481–486, 2010.
- ANELLO, G. An existence theorem for an implicit integral equation with discontinuous right-hand side. *J. Inequal. Appl.*, v. 2006, n. 1, p. 71396, 2006.
- APPELL, J.; PASCALE, E. D. Su alcuni parametri connessi con la misura di non compattezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili. *Boll. Un. Mat. Ital.*, v. 6, n. 3, p. 497–515, 1984.
- ATKINSON, K.; FLORES, J. The discrete collocation method for nonlinear integral equations. *IMA J. Numer. Anal.*, v. 13, n. 2, p. 195–213, 1993.
- ATKINSON, K.; GRAHAM, I.; SLOAN, I. Piecewise continuous collocation for integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 20, p. 172–186, 1983.
- ATKINSON, K. E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. New York: Cambridge Monographs on Applied and Computational Mechanics, 1997.
- ATKINSON, K. E.; POTRA, F. A. Projection and iterated projection methods for nonlinear integral equations. *SIAM journal on numerical analysis*, SIAM, v. 24, n. 6, p. 1352–1373, 1987.
- AZEVEDO, J. S.; ROCHA, A. M.; OLIVEIRA, S. P. Iterative solution of a class of nonlinear Fredholm integral equations. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 5, n. 1, p. 1–7, 2017.
- BANAŚ, J. On measures of noncompactness in Banach spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, v. 21, n. 1, p. 131–143, 1980.
- \_\_\_\_\_. Integrable solutions of Hammerstein and Urysohn integral equations. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, v. 46, n. 1, p. 61–68, 1989.
- BANAŚ, J.; GOEBEL, K. Measures of noncompactness in Banach spaces. In: *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. New York: Marcel Dekker, 1980. v. 60.
- BANAŚ, J.; KNAP, Z. Integrable solutions of a functional-integral equation. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, v. 2, n. 1, p. 31–38, 1989.
- BANAŚ, J.; SADARANGANI, K. Compactness condition in the study of functional, differential and integral equations. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, v. 2, n. 1, p. 31–38, 2013.

- BLASI, F. S. D. On a property of the unit sphere in a Banach space. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, v. 21, p. 259–262, 1977.
- BRAUER, F.; NOHEL, J. A. *Ordinary Differential Equations: A First Course (University Mathematics Series)*. Second edition. New York: W. A. Benjamin, 1973.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; TANG, T. A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin: Springer, 1987.
- CONWAY, J. B. *A Course in Functional Analysis*. New York: Springer Science, 1985.
- DAVIS, G. de V. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, v. 3, n. 3, p. 249–264, 1983.
- DOLPH, C. Nonlinear integral equations of the Hammerstein type. *Trans. Am. Math. Soc.*, v. 66, n. 2, p. 289–307, 1949.
- EMMANUELE, G. About the existence of integrable solutions of a functional-integral equation. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, v. 4, n. 1, p. 65–69, 1991.
- \_\_\_\_\_. Integrable solutions of a functional-integral equation. *J. Integral Equations Appl.*, v. 4, n. 1, p. 89–94, 1992.
- FIGUEIREDO, D. G. de; GUPTA, C. P. On the variational method for the existence of solutions of nonlinear equations of Hammerstein type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 40, n. 2, p. 470–476, 1973.
- HACKBUSCH, W. *Integral Equations: Theory and Numerical Treatment*. Basel: Birkhauser Verlag, 1995.
- HANSEN, P. C. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. Numerical Aspects of Linear Inversion*. Philadelphia: SIAM, 1998.
- IBRAHIM, I. A. On the existence of solutions of functional integral equation of Urysohn type. *Comput. Math. Appl.*, v. 57, n. 10, p. 1609–1614, 2009.
- KAROUI, A. On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equations. *Appl. Math. Lett.*, v. 18, n. 3, p. 299–305, 2005.
- KAROUI, A.; JAWAHDOU, A. Existence and approximate  $L^p$  and continuous solutions of nonlinear integral equations of the Hammerstein and Volterra types. *Appl. Math. Comp.*, v. 216, n. 7, p. 2077–2091, 2010.
- KAUTHEN, J.-P. A survey of singularly perturbed Volterra equations. *Appl. Numer. Math.*, v. 24, n. 2-3, p. 95–114, 1997.
- KRASNOSELSKII, M. A. *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. Oxford: Pergamon Press, 1964.
- KRASNOSELSKII, M. A.; ZABREIKO, P. P. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. New York - Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- KUMAR, S. A discrete collocation-type method for Hammerstein equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 25, n. 2, p. 328–341, 1988.

- KUMAR, S.; SLOAN, I. H. A new collocation-type method for Hammerstein integral equations. *Math. Comp.*, v. 48, n. 178, p. 585–593, 1987.
- LE, T.; MOYNE, C.; MURAD, M.; LIMA, S. A two-scale non-local model of swelling porous media incorporating ion size correlation effects. *J. Mech. Phys. Solids*, v. 61, n. 12, p. 2493–2521, 2013.
- LIMA, E. L. *Análise Real Volume 1*. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2001.
- MALEKNEJAD, K.; DERILI, H.; SOHRABI, S. Numerical solution of Urysohn integral equations using the iterated collocation method. *Int. J. Comput. Math.*, v. 85, n. 1, p. 143–154, 2008.
- MALEKNEJAD, K.; MOLLAPOURASL, R.; MIRZAEI, P. Numerical solution of Volterra functional integral equation by using cubic B-spline scaling functions. *Numer. Meth. Part. Diff. Equ.*, v. 30, n. 2, p. 699–722, 2014.
- NADIR, M.; GAGUI, B. A numerical approximation for solutions of Hammerstein integral equations in  $L_p$  spaces. *The São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, v. 8, n. 1, p. 23–31, 2014.
- POLUANIN, A. D.; MANZHIROV, A. V. *Handbook of Integral Equations*. Boca Raton: CRC Press, 1998.
- QUATERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. *Numerical Mathematics*. Second edition. Berlin: Springer, 2007.
- ROACHE, P. J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. New Mexico: Hermosa Publishers, 1998.
- ROCHA, A. C.; MURAD, M. A.; MOYNE, C.; OLIVEIRA, S. P.; LE, T. D. A new methodology for computing ionic profiles and disjoining pressure in swelling porous media. *Computational Geosciences*, v. 20, n. 5, p. 975–996, 2016.
- SAUTER, S. A.; SCHWAB, C. *Boundary Element Methods*. Berlin: Springer Verlag, 2011.
- SMART, D. *Fixed Point Theorems*. New York: Cambridge University Press, 1980.