



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

CAROLINE APARECIDA DE LARA CAMPOS

**Algumas Aplicações de Cálculo Variacional:
da Braquistócrona a Desigualdade de
Hardy-Sobolev**

Campinas

2017

Caroline Aparecida de Lara Campos

**Algumas Aplicações de Cálculo Variacional:
da Braquistócrona a Desigualdade de Hardy-Sobolev**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA CAROLINE
APARECIDA DE LARA CAMPOS E ORIENTADA PELO
PROF. DR. YURI DIMITROV BOZHKOV.

**Campinas
2017**

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C157a Campos, Caroline Aparecida de Lara, 1987-
Algumas aplicações de cálculo variacional : da braquistócrona a desigualdade de Hardy-Sobolev / Caroline Aparecida de Lara Campos. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo das variações. 2. Euler-Lagrange, Equações de. 3. Noether, Teorema de. 4. Bliss, Função de. I. Bozhkov, Yuri Dimitrov, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Some applications of calculus of variations : from brachystochrone to the Hardy-Sobolev inequality

Palavras-chave em inglês:

Calculus of variations
Euler-Lagrange equations
Noether theorem
Bliss function

Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada e Computacional

Banca examinadora:

Yuri Dimitrov Bozhkov [Orientador]
Rodney Carlos Bassanezi
Stylianos Dimas

Data de defesa: 28-07-2017

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 28 de julho de 2017 e
aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). YURI DIMITROV BOZHKO

Prof(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI

Prof(a). Dr(a). STYLIANOS DIMAS

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Aos meus pais...

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional pela oportunidade concedida;

Ao meu orientador, Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov, pela paciência, compreensão e esmero na elaboração deste trabalho;

Aos docentes que tive ao longo desta trajetória, em especial à Prof^a Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa, pelo enorme aprendizado e constante incentivo à evolução acadêmica; e ao Prof. Dr. Estevão Esmi Laureano, pela amizade, apoio acadêmico e exemplo de profissionalismo;

À minha família: Meus pais, Norberto e Maria Elena por, desde sempre, serem os pilares da minha vida; e ao meu irmão, Eurico, exemplo de bondade e companheirismo;

Ao meu namorado Felipe, por sempre estar ao meu lado nos momentos mais importantes da minha vida;

À minha família de Rio Preto: Débora, Júlia e Luiz Carlos, por nunca deixarem faltar carinho, amor e otimismo diário;

Aos meus amigos de Campinas, em especial: Juliana, por simplesmente, em todos os sentidos, ser meu anjo da guarda; Felipe Félix por, desde sempre, ser um dos meus principais incentivadores e, finalmente, à minha turma de mestrado, que tornaram mais felizes os árduos dias de aula.

Você nunca achará o arco-íris, se você estiver olhando para baixo.

Charlie Chaplin

Resumo

Este trabalho nos direciona ao estudo do Cálculo Variacional, a fim de compreender e solucionar problemas que, desde muito tempo, desperta o interesse da sociedade matemática. Essencialmente, essa dissertação divide-se em duas partes: Na primeira, introduzimos os problemas variacionais clássicos - O Problema da Braquistócrona e o Problema de Didó e, em seguida, abordamos os resultados fundamentais do Cálculo Variacional, em especial as equações de Euler-Lagrange e as condições de existência de extremos: A Condição de Jacobi e as Condições de Weierstrass e de Legendre e, por fim, encerramos com o Teorema de Noether e algumas de suas aplicações à Física Moderna.

A segunda parte destina-se à algumas das aplicações de Cálculo Variacional, destacando-se as resoluções dos problemas propostos anteriormente e a obtenção da Função de Bliss e da melhor constante na Desigualdade de Hardy-Sobolev, utilizando os conceitos abordados na primeira parte.

As considerações finais encerram esta dissertação.

Palavras-chave: Cálculo Variacional. Equações de Euler-Lagrange. Teorema de Noether. Função de Bliss.

Abstract

In this work we study the basis of Calculus of Variations, in order to understand and solve problems that for a long time have aroused interest of mathematical society. Essentially, this work is divided into two parts. In the first one, classical variational problems were introduced: the Brachystochrone Problem and the Dido Problem; the fundamental results of the Calculus of Variations, in particular the Euler-Lagrange Equations and the conditions for the existence of extremum: the Jacobi Condition and the Weierstrass and Legendre Conditions, to name a few. Finally, we closed with the Noether Theorem and some of its applications to Modern Physics. The second part is dedicated to some applications of Calculus of Variations, especially the solutions of the problems proposed previously. Further an explicit formula for the Bliss Function is obtained, using the concepts discussed in the first part. Hence the best constant in the Hardy-Sobolev Inequality is found. The final considerations conclude this work.

Keywords: Calculus of Variations. Euler-Lagrange Equations. Noether's Theorem. Bliss Function.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema do problema no plano.	18
Figura 2 – Fio de couro para cercar o terreno	45

Sumário

Introdução	13
1 Resultados Fundamentais	14
1 Introdução	14
2 Contexto Histórico	14
3 Cálculo Variacional Unidimensional	16
4 Problemas Clássicos	17
5 O Lema de Lagrange	20
6 O Lema de Dubois - Raymond	21
7 O Lema Fundamental do Cálculo Variacional	22
8 As Equações de Euler - Lagrange	24
9 A Condição de Jacobi	27
10 As condições de Weierstrass e de Legendre	28
11 O Problema do Extremo Condicional	29
12 Equações de Euler - Lagrange para funcionais que dependem de n funções	32
13 Equações de Euler-Lagrange para funcionais que dependem das derivadas de ordem superior.	33
14 Equações de Euler-Lagrange para funcionais envolvendo funções de várias variáveis	34
15 Equações de Euler-Lagrange para funcionais em forma paramétrica	35
16 Equações de Euler-Lagrange para funcionais que diferem por uma Divergência Total	36
17 Teorema de Noether	38
17.1 A condição de invariância	38
17.2 O Teorema de Emmy Noether	39
18 Algumas Aplicações do Teorema de Noether	41
2 Algumas aplicações de Cálculo Variacional	43
1 Introdução	43
2 Os dois problemas clássicos	43
2.1 O Problema da Braquistócrona	43
2.2 O Problema da Didó	45
3 Um problema variacional com condições de fronteira de outro tipo	47
3.1 Uma generalização	49
4 Desigualdade de Wirtinger	52
5 Sobre a solução de Schwarzschild das Equações de Einstein	55
6 Função de Bliss	56
7 A melhor constante na Desigualdade de Hardy-Sobolev	65

3	Considerações Finais	67
	REFERÊNCIAS	68

Introdução

Sabiamente, dizia Heródoto: “Pensar o passado para compreender o presente e idealizar o futuro.”

Motivados pela épica frase do geógrafo e historiador grego, iniciamos a apresentação deste trabalho com um breve contexto histórico do Cálculo Variacional. Embora tenha sido a Grécia Antiga o berço de seu nascimento, o Cálculo Variacional desenvolveu-se, de fato, com os irmãos Jakob e Johann Bernoulli, quando o último propôs à sociedade da época, o que hoje conhecemos como Problema Clássico da Braquistócrona. Porém, sua consolidação ocorreu, de fato, no século XVIII, com as significativas contribuições de Leonhard Euler e Joseph-Louis Lagrange.

A finalidade deste trabalho é, essencialmente, abordar o Cálculo Variacional de maneira abrangente, introduzindo seus principais resultados e, a partir deles, possibilitar a resolução de problemas, dentre os quais, destacam-se os de otimização.

O desenvolvimento do mesmo se dá em duas partes:

Na primeira parte, foram apresentados os elementos fundamentais do Cálculo Variacional Clássico, tais como: O Lema de Lagrange, O Lema de Dubois - Reymond, O Lema Fundamental do Cálculo Variacional, As Equações de Euler - Lagrange e o Teorema de Euler; As Condições de Jacobi, de Weierstrass e de Legendre; O Problema do Extremo Condicional e o Teorema de Noether, bem como algumas de suas aplicações à Física Moderna.

A segunda parte destina-se à algumas aplicações do Cálculo Variacional, tendo como ponto de partida as resoluções dos Problemas Clássicos da Braquistócrona e da Didó; soluções de problemas variacionais com condições de fronteira de outro tipo e curvas hiperelíticas; a Desigualdade de Wirtinger; a obtenção da Função de Bliss e da melhor constante na Desigualdade de Hardy-Sobolev.

E, por fim, as considerações finais e referências bibliográficas encerram este trabalho.

1 Resultados Fundamentais

1 Introdução

Neste primeiro capítulo apresentaremos as principais definições e resultados do cálculo variacional a serem utilizados: O Lema de Lagrange, o Lema de Dubois-Reymond, o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, as Equações de Euler-Lagrange, o Teorema de Euler, A Condição de Jacobi, o Problema do Extremo Condicional e o Teorema de Noether. Juntamente com os resultados, abordaremos exemplos referentes às definições dadas; bem como, a formulação dos problemas clássicos do Cálculo Variacional: O Problema da Braquistócrona e o Problema da Didó. A exposição a seguir é semelhante à dada em [1].

Iniciaremos o capítulo apresentando uma nota histórica sobre o Cálculo Variacional.

2 Contexto Histórico

Indiscutivelmente, a matemática se faz cada vez mais presente em nosso dia a dia. Situações como: obter lucro máximo, realizar um determinado trajeto no menor tempo possível, minimizar o custo de fabricação de um determinado produto são alguns, dentre os muitos, problemas que ilustram nossos desafios rotineiros. Tais problemas, conhecidos como problemas de otimização, tem interessado matemáticos ao longo de toda a história, e muitos deles foram resolvidos por métodos engenhosos. Os gregos antigos sabiam que de todas as curvas com um dado perímetro, a que delimita maior área é o círculo.

Os precursores do cálculo variacional foram os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), frequentemente conhecidos também pela forma anglicizada de seus nomes, James e John. Em 1696, Johann Bernoulli propôs no jornal científico *Acta Eruditorum* o problema da Braquistócrona, já estudado anteriormente por Sir Isaac Newton, em 1686. Tal problema consiste em determinar, dentre todas as curvas possíveis que ligam dois pontos em um plano vertical, aquela para a qual uma partícula deslizando (sem atrito) ao longo da curva, sob a ação da gravidade, fará o percurso do ponto mais alto ao mais baixo em tempo mínimo. Ambos os irmãos resolveram o problema e suas soluções, embora distintas, foram publicadas em 1696.

A solução apresentada por Johann baseou-se em uma analogia com o problema em determinar o caminho percorrido por um raio de luz em um meio com índice de refração variável, método este de difícil aplicação a outros problemas. Já o método utilizado por Jakob na resolução do problema da Braquistócrona, possibilitou a resolução de uma série

de problemas, inclusive a de um problema isoperimétrico - em que o perímetro é mantido fixo, proposto como réplica ao problema de seu irmão.

Motivado pelo trabalho dos irmãos Bernoulli, Leonhard Euler (1701-1783), discípulo de Johann, começou a estudar e aprimorar o método utilizado por Jakob e, em 1744, publicou *A method for discovering curved lines having a maximum or minimum property or the solution of the isoperimetric problem taken in its widest sense*, cujo principal resultado foi a equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

denominada Equação de Euler.

Com o passar dos anos, os matemáticos começaram a sugerir problemas cada vez mais complexos e o método de Euler tornava suas resoluções ainda mais complicadas. Impulsionado pela necessidade de resolvê-los de maneira mais simples, Joseph-Louis Lagrange publicou, em 1762 e 1770, um método geral que tinha desenvolvido para tratar problemas de isoperimetria e de natureza física - problemas de mais rápida queda, que consistia basicamente em trocar a função $y(x)$, presente nas integrais que se desejavam minimizar, pela função $y(x) + \delta y(x)$. Posteriormente, Euler adotou a notação apresentada por Lagrange e nomeou $\delta y(x)$ de variação da função $y(x)$ e δI de variação da integral, originando assim, o Cálculo das Variações. Com esta e muitas outras contribuições à matemática, Lagrange tornou-se o mais notável matemático do século XVIII.

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) também contribuiu de maneira significativa para o cálculo variacional. Em 1837, aprofundou seus estudos na segunda variação, estudada anteriormente por Adrien-Marie Legendre em 1786, e descobriu quando a condição de Legendre era satisfeita ou não. Seu resultado mais significativo foi a descoberta dos pontos conjugados. Lembrando que a condição de Legendre afirmava que deveríamos ter $f_{y'y'} \geq 0$ para mínimos e $f_{y'y'} \leq 0$ para máximos, resultado porém, que não explicou de maneira conclusiva.

Posteriormente, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1895) deixou sua contribuição para o cálculo variacional, encontrando uma condição necessária para extremos envolvendo sua função $E(x, y, p, y')$, sendo posteriormente conhecido como o pai da Análise Moderna.

Já no século XX, merece destaque Amalie Emmy Noether. Nascida em 23 de março de 1882, em Erlanger, Emmy Noether, como é mais conhecida, foi uma mulher gentil, de aparência séria e despojada, dotada de franqueza em suas críticas, características que causavam um enorme fascínio entre seus colegas e alunos. Herdou de seu pai, Max Noether (1844-1921), renomado matemático da Universidade de Erlanger, a paixão pela álgebra. Sua tese de doutorado, intitulada *Sobre Sistemas Completos de Invariantes para*

Formas Biquadradas Ternárias, foi defendida em 1907, sob a orientação de Paul Gordan (1837-1912), também ligado à Universidade e amigo de sua família.

Depois de deixar Erlanger, Emmy Noether estudou em Gottingen, onde, em 1919, foi aprovada no exame de habilitação, embora houvesse objeções por grande parte da faculdade que se opunha ao magistério de mulheres. Apoiada por David Hilbert (1862-1943), Emmy tornou-se, em 1922, professora de Gottingen, permanecendo até 1933, quando, devido ao domínio nazista e por sua origem judia, foi proibida de exercer suas atividades acadêmicas. Logo após deixou a Alemanha para ocupar uma cadeira no Bryn Mawr College, Pennsylvania, tornando-se também membro do Instituto de Estudos Avançados de Princeton. Faleceu em 14 de abril de 1935 no auge de sua capacidade produtiva, com cinquenta e três anos de idade, vítima de uma complicação cirúrgica.

Natalie Angier (2012) [16], colunista do Jornal The New York Times, surpreendeu muitos dos admiradores de Emmy Noether, ao relembrar os 130 anos de seu nascimento, em artigo reeditado na seção História do jornal O Globo, de 7 de abril de 2012, sob o título *A matemática que o mundo esqueceu*. A citada jornalista chama a atenção para o trabalho da célebre cientista e relembra que Albert Einstein a considerava “o mais significativo e criativo matemático do sexo feminino de todos os tempos.” Enfatiza que um dos mais importantes pilares da Física Moderna e Contemporânea é o célebre Teorema de Noether, enunciado por Emmy em 1915 e demonstrado pela mesma em 1918, que une dois conceitos: as leis universais de conservação e as simetrias na natureza. Em síntese, toda e qualquer simetria (externa, interna ou de calibre) associado a uma grandeza conservada pode ser verificada por este Teorema, que se tornou um instrumento fundamental na busca de simetrias (invariâncias) na natureza.

O impacto de sua contribuição científica influenciou a Física Clássica e a Física Moderna - mecânica, teoria eletromagnética, teorias de relatividade, entre outras, dando suporte teórico às mais extraordinárias descobertas da Física nos últimos anos.

Procuramos, nesta seção, apresentar um pouco da história do surgimento e desenvolvimento do cálculo variacional, objeto de estudo deste trabalho.

Para esta seção tomamos como referências os textos de [8], [2], [10], [5] e [16].

Mais informações sobre o contexto histórico podem ser encontradas em [19].

3 Cálculo Variacional Unidimensional

Considere o seguinte funcional:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx.$$

Suponha que L_x , L_{xy} , $L_{xy'}$ existem e são contínuas, $J[y]$ é definido para

$y \in C^1([x_0, x_1])$, em que x_0 e x_1 são números reais tais que $x_0 < x_1$.

Lembremos que a norma do espaço $C^1([x_0, x_1])$ é definida por:

$$\|y\| = \sup_{[x_0, x_1]} |y| + \sup_{[x_0, x_1]} |y'|$$

O Problema Fundamental do Cálculo Variacional consiste em encontrar $y \in C^1([x_0, x_1])$, que satisfaça as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, tal que $J[y]$ atinja o seu extremo.

Definição 3.1. Fixemos $y_0 \in C^1([x_0, x_1])$. Dizemos que y_0 é mínimo local se existe $\delta > 0$, tal que para todo y satisfazendo $\|y - y_0\| < \delta$ temos $J[y_0] \leq J[y]$. Analogamente, dizemos que y_0 é máximo local se existe $\delta > 0$, tal que para todo y satisfazendo $\|y - y_0\| < \delta$ temos $J[y_0] \geq J[y]$.

Desta forma, segue abaixo dois exemplos de funcionais bem conhecidos dos cursos de cálculo.

Exemplo 3.2. Área sob o gráfico de $y = y(x)$:

$$J[y] = \int_a^b y(x) dx.$$

Exemplo 3.3. Cumprimento de arco

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

4 Problemas Clássicos

Um dos famosos problemas da história da matemática e do cálculo variacional é o Problema da Braquistócrona. Tal problema consiste em encontrar uma curva que uma partícula P precisa descrever para sair do ponto A e chegar no ponto B , no menor tempo possível, sem atrito e somente sob a ação da força da gravidade.

Proposto por Johann Bernoulli em 1696, o Problema da Braquistócrona surgiu como um desafio aos grandes matemáticos da época, sendo um dos precursores do cálculo das variações. Soluções corretas foram apresentadas pelos irmãos Johann e Jacob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e pelo Marquês L'Hospital.

Assumiremos que os pontos A e B estão no plano xy . Vide Figura 1. Consideremos $y = y(x)$, como sendo o caminho percorrido pela partícula. Observe que o eixo y está orientado no sentido oposto ao usual. Isto é conveniente pois, neste caso, a força exercida pela gravidade fica orientada no sentido positivo [9].

Consideremos o ponto A como sendo a origem e B como sendo o ponto de chegada (ponto inferior), isto é, os pontos relacionados do problemas são: $A(0, 0)$ e $B(a, b)$.

Denotemos T , o tempo gasto pela partícula para cumprir seu trajeto. Veja abaixo o esquema do Problema da Braquistócrona no plano.

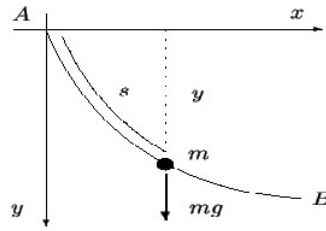


Figura 1 – Esquema do problema no plano.

Como a partícula atua somente sob a ação da gravidade, em física, o trabalho realizado pela partícula P ao se deslocar do ponto A até o ponto $M(x, y)$ é igual à variação da energia cinética, isto é,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.1)$$

em que v é o módulo da velocidade da partícula no ponto M , y o seu deslocamento vertical e m sua massa. Como $m \neq 0$, segue de (1.1) e do fato que a velocidade escalar é a variação do trajeto percorrido S pelo tempo t , temos:

$$v^2 = 2gy \text{ e } v = \frac{dS}{dt}. \quad (1.2)$$

Logo, segue de (1.2)

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = 2gy, \quad \frac{dS}{\sqrt{2gy}} = dt \quad \text{e} \quad T = \int_{\widehat{OM}} \frac{dS}{\sqrt{2gy}} \quad (1.3)$$

em que $\widehat{OM}$ é representado por uma função $y = y(x)$ suficientemente diferenciável.

Sabemos que o comprimento de arco entre $A(0,0)$ e $M(x,y)$, representado pelo gráfico da função $y = y(x)$, é dado por:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(\tau))^2} d\tau$$

que derivando, resulta

$$dS = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (1.4)$$

Sendo T , o tempo gasto pela partícula P no trajeto, segue de (1.3) e (1.4)

$$J[y] = T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy}} dx. \quad (1.5)$$

Dado o objetivo, queremos então encontrar $y = y(x) \in C^1([0, x])$ que minimize (1.5).

Outro problema de extrema importância histórica no Cálculo das Variações é o Problema de Didó, que consiste em encontrar uma função $y(x) > 0$ tal que:

1. $y(x_0) = 0$ e $y(x_1) = 0$, onde $0 < x_0 < x_1$.
2. O comprimento

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (1.6)$$

tem um valor $S = \text{constante fixa}$, tal que $|x_1 - x_0| \leq S$

3. A área

$$A = J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y dx \quad (1.7)$$

seja máxima.

Apresentados os problemas clássicos do Cálculo Variacional, o exemplo a seguir, pertencente a Weierstrass, mostra que extremo (máximo e mínimo) nem sempre existe.

Consideremos

$$J[y] = \int_{-1}^1 x^2 (y'(x))^2 dx \geq 0 \quad (1.8)$$

tal que $y(-1) = -1$ e $y(1) = 1$.

Mostraremos a seguir, que não existe $y \in C^1([-1, 1])$ tal que $J[y] = 0$, embora os valores do funcional (1.8) estejam suficientemente próximos de zero.

De fato, considere

$$y_a(x) = \frac{\arctan(x/a)}{\arctan(1/a)}. \quad (1.9)$$

Note que $y_a(x)$ satisfaz as condições de fronteira

$$y_a(1) = 1, \quad y_a(-1) = -1. \quad (1.10)$$

Derivando (1.9) com relação a x temos:

$$y'_a(x) = \frac{a}{\arctan(1/a)(x^2 + a^2)}. \quad (1.11)$$

Substituindo (1.11) em (1.8) temos:

$$J[y_a] = \int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{a}{\arctan(1/a)(x^2 + a^2)} \right)^2 \Rightarrow$$

$$J[y_a] = \left(\frac{a}{\arctan(1/a)} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx. \quad (1.12)$$

Por outro lado, é válida a desigualdade

$$\left(\frac{x}{a^2 + x^2} \right)^2 \leq \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad (1.13)$$

cujas verificações são imediatas.

Logo, segue de (1.12) e (1.13) que

$$J[y_a] = \left(\frac{a}{a^2 + x^2} \right)^2 \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{a^2 + x^2} \right)^2 dx \leq \left(\frac{a}{\arctan(1/a)} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{a^2 + x^2} dx. \quad (1.14)$$

Mas,

$$\left(\frac{a}{\arctan(1/a)} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{2a}{\arctan(1/a)}.$$

Fixado um número $\varepsilon > 0$ qualquer, considere a tal que

$$\frac{2a}{\arctan(1/a)} < \varepsilon. \quad (1.15)$$

Deste modo, de (1.14) e (1.15) obtemos que

$$\left(\frac{a}{\arctan(1/a)} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{a^2 + x^2} dx < \varepsilon$$

Isto é,

$$J[y_a] < \varepsilon$$

Se $J[y] = 0$, então $y' = 0$ e, conseqüentemente, $y = y(x)$ é constante; mas por (1.10), chegamos a uma contradição. Portanto, $J[y] \neq 0$, $y \in C^1([-1, 1])$, em que $y(-1) = -1$ e $y(1) = 1$. Isto é, embora próximo de zero, $J[y]$ é sempre positivo.

Observação 4.1. Neste estudo, consideramos que todas as funções consideradas são diferenciáveis tantas vezes quantas forem necessárias nos respectivos problemas. Por exemplo, para a função L exibida anteriormente, densidade do funcional J , a condição imposta é $L \in C^2(D)$, em que $D \subset \mathbb{R}^3$ é aberto e conexo.

5 O Lema de Lagrange

Lema 5.1. Sejam $f \in C([x_0, x_1])$ e $\eta \in C^1([x_0, x_1])$ uma função que se anula nos extremos do intervalo $[x_0, x_1]$. Nestas condições, se

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)dx = 0$$

para qualquer η com as características descritas, então

$$f \equiv 0.$$

Demonstração: Vamos supor que $f \not\equiv 0$. Então, existe um ponto ξ pertencente ao intervalo aberto (x_0, x_1) tal que $f(\xi) > 0$. Como f é contínua, existe uma vizinhança de ξ onde $f(x) > 0$. Tomemos dois pontos distintos, ξ_1 e ξ_2 , com $\xi_1 < \xi_2$, dessa vizinhança. Assim, para qualquer $x \in [\xi_1, \xi_2]$, tem-se $f(x) > 0$. Consideremos a função η_0 tal que

$$\eta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin (\xi_1, \xi_2) \\ (x - \xi_1)^2(x - \xi_2)^2 & \text{se } x \in (\xi_1, \xi_2) \end{cases} \quad (1.16)$$

em que $x_0 < \xi_1 < \xi_2 < x_1$.

Observe que η_0 satisfaz as condições do Lema acima, pois $\eta_0(x_0) = \eta_0(x_1) = 0$ e $\eta_0 \in C^1([x_0, x_1])$. Logo,

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta_0(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)\eta_0(x)dx, \quad (1.17)$$

pois $\eta_0(x) = 0$ para $x \in [x_0, \xi_1] \cup [\xi_2, x_1]$. No entanto, $f(x) > 0$ e $\eta_0(x) > 0$ no intervalo (ξ_1, ξ_2) , contrariando (1.17). Portanto, f não é positiva. Analogamente, mostra-se que f não pode ser negativa. Logo, $f \equiv 0$, finalizando a demonstração. $\square$

6 O Lema de Dubois - Reymond

Lema 6.1. Sejam $f \in C([x_0, x_1])$ e $\eta \in C^1([x_0, x_1])$ uma função que se anula nos extremos do intervalo $[x_0, x_1]$. Nestas condições, se

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta'(x)dx = 0$$

para qualquer função η com as características descritas, então $f(x) \equiv C = \text{constante}$.

Demonstração: Definimos a constante C como:

$$C := \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx. \quad (1.18)$$

Consideremos

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x) - C)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} Cdx = -C(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx. \quad (1.19)$$

Logo,

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x) - C)dx = 0 \quad (1.20)$$

Seja

$$\eta(x) := \int_{x_0}^x (f(\tau) - C) d\tau. \quad (1.21)$$

De (1.20) e (1.21) obtemos $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo $\eta \in C^1([x_0, x_1])$ e satisfaz as condições do Lema acima.

Derivando (1.21) com relação a x temos:

$$\eta'(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x (f(\tau) - C) d\tau = f(x) - C.$$

Então,

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \eta'(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) (f(x) - C) dx.$$

Portanto,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) (f(x) - C) dx = 0. \quad (1.22)$$

Agora, multiplicando ambos os lados de (1.20) por $-C$ temos:

$$-C \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - C) dx = 0. \quad (1.23)$$

Somando-se (1.22) com (1.23) obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x) - C)^2 dx = 0.$$

Esta última igualdade implica que $f(x) - C = 0$, ou seja, $f(x) = C$, o que finaliza a demonstração. $\square$

Para esta seção tomamos como referência o texto de [11].

7 O Lema Fundamental do Cálculo Variacional

Lema 7.1. *Sejam duas funções $a(x)$ e $b(x)$ contínuas no intervalo fechado $[x_0, x_1]$. Seja $\eta \in C^1([x_0, x_1])$ tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Nestas condições, se*

$$\int_{x_0}^{x_1} (a(x)\eta(x) + b(x)\eta'(x)) dx = 0$$

para qualquer função η com as características descritas, então $b \in C^1([x_0, x_1])$ e $b'(x) = a(x)$.

Demonstração: Consideremos

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt ; \quad \frac{dA(x)}{dx} = a(x) \quad (1.24)$$

Então, segue da equação (1.24) que

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x)\eta(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dA(x)}{dx}\eta(x)dx.$$

Integrando por partes a expressão dada acima obtemos:

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x)\eta(x)dx = A(x_1)\eta(x_1) - A(x_0)\eta(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} A(x)\eta'(x)dx. \quad (1.25)$$

Como $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, de (1.25) tem-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x)\eta(x)dx = - \int_{x_0}^{x_1} A(x)\eta'(x)dx. \quad (1.26)$$

Mas, como por hipótese temos

$$\int_{x_0}^{x_1} a(x)\eta(x)dx = - \int_{x_0}^{x_1} b(x)\eta'(x)dx. \quad (1.27)$$

Deste modo, segue de (1.26) e (1.27)

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x)\eta'(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} b(x)\eta'(x)dx = 0,$$

isto é,

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta'(x)(A(x) - b(x))dx = 0.$$

Chamemos $A(x) - b(x) = f(x)$. Pelo Lema de Dubois - Reymond, temos que $f(x) \equiv \text{constante}$. Seja $(-C)$ essa constante, então:

$$A(x) - b(x) = -C$$

Como $A(x)$ é dado por (1.24), segue que

$$b(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt + C.$$

Finalmente, derivando $b(x)$ com relação a x e utilizando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos:

$$b'(x) = a(x),$$

o que encerra a demonstração. □

8 As Equações de Euler - Lagrange

Neste parágrafo, procuraremos uma condição necessária para $y \in C^1([x_0, x_1])$, com $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, seja extremo (no espaço de funções) do funcional $J[y]$ dado por (1.1).

Sejam $\eta \in C^1([x_0, x_1])$, α um número suficientemente pequeno e $y(x)$ um extremo do funcional J . Consideramos a função $y_1(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$, em que $\eta(x)$ é uma função diferenciável arbitrária. Observe que, o que fizemos foram variações na função $y(x)$, isto é, somamos a ela um número α multiplicado por uma outra função $\eta(x)$. Daí vem o nome cálculo das variações.

A função $y_1(x)$ pertence a uma vizinhança de $y(x)$, no sentido da norma no espaço $C^1([x_0, x_1])$.

De fato,

Considere $\delta > 0$ um número qualquer. Temos:

$$\|y_1 - y\| = \|y(x) + \alpha\eta(x) - y(x)\| = \|\alpha\eta\| = |\alpha|\|\eta\| \leq C|\alpha|,$$

em que C é um majorante de $\|\eta\|$. Então, se α é tal que $|\alpha| < \frac{\delta}{C}$ (sempre possível), é válida a desigualdade

$$\|y_1 - y\| \leq \delta.$$

Impondo as condições $y_1(x_0) = y_0$ e $y_1(x_1) = y_1$, temos $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Como a função $y_1(x)$ pertence ao domínio de definição do funcional J , podemos introduzir a função

$$\varphi(\alpha) := J[y(x) + \alpha\eta(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx.$$

Do cálculo diferencial, a condição $\varphi'(0) = 0$ é uma condição necessária para y ser extremo. Desta forma, segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}\varphi(\alpha) &= \varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{d\alpha} L(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} (L_y(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')\eta + L_{y'}(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')\eta') dx \end{aligned} \quad (1.28)$$

Das condições descritas e de (1.28) tem-se:

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (L_y\eta + L_{y'}\eta') dx = 0 \quad (1.29)$$

Fazendo $a = L_y(x, y, y')$, $b = \frac{d}{dx} L_{y'}(x, y, y')$ em (1.29) e, como do Lema 7.1 temos $b' = a$, segue que

$$L_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} L_{y'}(x, y, y') = 0, \quad (1.30)$$

com $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$.

A equação obtida em (1.30) é chamada de Equação de Euler - Lagrange.

Definição 8.1. *Uma solução $y = y(x)$ da equação de Euler - Lagrange é chamada de ponto crítico (no espaço das funções) do funcional J . O valor $J[y]$ é chamado de valor crítico.*

Desta forma, demonstramos o seguinte Teorema:

Teorema 8.2. *(Euler) Se $y \in C^1([x_0, x_1])$ é um extremo de $J[y]$, com $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, então $y = y(x)$ satisfaz a Equação de Euler - Lagrange.*

Observação 8.3. *A Equação de Euler - Lagrange é condição necessária para a existência do extremo, porém não é suficiente.*

Observação 8.4. *Caso possamos fazer a diferenciação em (1.30), pela regra da cadeia teremos:*

$$L_y - L_{xy'} - L_{yy'}y' - L_{y'y'}y'' = 0. \quad (1.31)$$

Observação 8.5. *Vale o seguinte resultado, caso particular do Teorema de Hilbert: “Seja $y \in C^1([x_0, x_1])$ um extremo, com $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ e $L_{y'y'} \neq 0$ sobre as condições de (1.32), então $y \in C^2([x_0, x_1])$ ”*

A existência de soluções da equação de Euler - Lagrange (1.31) pode ser obtida a partir do seguinte teorema:

Teorema 8.6. *(Teorema de Bernstein): Seja $y = y(x)$ solução do problema*

$$y'' = G(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0 \text{ e } y(x_1) = y_1 \quad (1.32)$$

em que $G \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ - domínio limitado para todo $y' = y'(x)$ fixado.

Suponhamos que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$1. \quad G_y(x, y, y') \geq K;$$

$$2. \quad \text{Existem funções } \alpha = \alpha(x, y) \geq 0 \text{ e } \beta = \beta(x, y) \geq 0 \text{ tais que}$$

$$|G(x, y, y')| \leq \alpha y'^2 + \beta$$

para todo domínio limitado, a qual (x, y) pertença.

Então, para todo (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , com $x_0 \neq x_1$, existe uma única solução em C^1 do problema (1.32).

A função $L = L(x, y, y')$ chama-se **Função de Lagrange**. Definiremos agora uma outra função $H = H(x)$, em termos de L :

$$H := y' L_{y'} - L = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L. \quad (1.33)$$

$H(x)$ é chamada de **Função de Hamilton**, cuja importância se verifica no teorema abaixo.

Teorema 8.7. *Se $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ e $y = y(x)$ é solução da equação de Euler - Lagrange, então $H \equiv \text{constante}$.*

Demonstração: Derivando (1.33) com relação a x temos:

$$\frac{d}{dx} H = \frac{d}{dx} (y' L_{y'}) - \frac{d}{dx} L = y'' L_{y'} + y' \frac{d}{dx} L_{y'} - \frac{d}{dx} L. \quad (1.34)$$

Mas,

$$\frac{d}{dx} L(x, y, y') = L_x + L_y y' + L_{y'} y'' \quad (1.35)$$

e, da equação de Euler - Lagrange, temos

$$\frac{d}{dx} L_{y'} = L_y \quad (1.36)$$

De (1.35) e (1.36), a equação (1.34) se reduz à:

$$\frac{d}{dx} H = -L_x.$$

No entanto, por hipótese, temos $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$.

Logo,

$$\frac{d}{dx} H = 0$$

o que implica que $H = \text{constante}$. □

Observação 8.8. *Se $L = \frac{1}{2} y'^2 - F(y)$, temos $H = \frac{1}{2} y'^2 + F(y)$. Neste caso, a Função de Hamilton é constituída por dois termos: o primeiro representa a energia cinética e, o outro, a energia potencial. Desta forma, a relação $H = \text{constante}$ é a expressão da Lei de Conservação de Energia. Em geral, se $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, o Teorema 8.7 nos dá $H = \text{constante}$, que representa uma primeira integral da Equação de Euler - Lagrange.*

Observação 8.9. *Em física, temos as seguintes notações e terminologia: a função*

$$\delta y = \alpha \eta$$

é chamada de variação da função y ; e o número

$$\delta J = \delta J_y(\eta) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} J(y + \alpha \eta) = \int_{x_0}^{x_1} (L_y - \frac{d}{dx} L_{y'}) \eta dx$$

é a primeira variação do funcional J . A última fórmula é obtida via integração por partes em (1.29).

9 A Condição de Jacobi

Como mencionado na observação 8.3, a Equação de Euler - Lagrange fornece uma condição necessária para a existência de extremos, porém não suficiente. Para encontrarmos uma condição suficiente, podemos fazer a analogia com o caso de funções que fornecem condições em termos das segundas derivadas. Deste modo, analisemos a segunda variação de J , dada por:

$$\delta^2 J_y(\eta^2) := \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} J(y + \alpha\eta).$$

Por cálculo direto, temos

$$\delta^2 J_y(\eta^2) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2} \left(L_{yy} - \frac{d}{dx} L_{yy'} \right) \eta^2 + \frac{1}{2} L_{y'y'} \eta'^2 dx.$$

Chamando de

$$P(x) := \frac{1}{2} L_{y'y'}(x, y(x), y'(x)),$$

$$Q(x) := \frac{1}{2} (L_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} L_{yy'}(x, y(x), y'(x))),$$

temos a seguinte equação diferencial:

$$-(P(x)u'(x))' + Q(x)u(x) = 0, \quad (1.37)$$

chamada de **Equação de Jacobi**.

Definição 9.1. Um número real x^* é chamado ponto conjugado de x_0 , se existe uma solução $u(x)$ da Equação de Jacobi tal que $u(x) \neq 0$ no intervalo aberto (x_0, x^*) e $u(x^*) = 0$

Teorema 9.2. (Jacobi) Seja $y = y(x)$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

1. $\delta J_y(\eta) = 0$ para todo $\eta \in C^1([x_0, x_1])$ tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$;
2. $P(x) > 0$ em $[x_0, x_1]$;
3. x_0 não tem pontos conjugados em $(x_0, x_1]$

Então, $y = y(x)$ é um mínimo de J .

Observação 9.3. Observemos que a condição 1 acima é equivalente à Equação de Euler - Lagrange, isto é, $y = y(x)$ é um ponto crítico de J .

Observação 9.4. Existem outras condições suficientes para a existência de extremo como, por exemplo, a condição de Legendre e de Weierstrass, que serão abordadas na próxima seção.

Observação 9.5. Não apresentaremos neste trabalho a demonstração do Teorema de Jacobi, que pode ser encontrada com detalhes em [12].

10 As condições de Weierstrass e de Legendre

Considere o seguinte funcional:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (1.38)$$

no domínio das funções sujeitas às condições de fronteira

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \quad (1.39)$$

As condições de Weierstrass.

Denomina-se *função de Weierstrass* a função

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p).$$

Nestes termos, para que uma curva Y seja um extremo do funcional (1.38) com as condições de fronteira (1.39), basta que se cumpram as seguintes condições:

- 1) Y é um ponto estacionário de (1.38) sujeito às condições (1.39), isto é, Y é uma solução da equação de Euler-Lagrange para (1.38) satisfazendo as condições de fronteira (1.39);
- 2) Pode-se incluir Y num campo de lagrangianas para o funcional (1.38) (o que acontecerá, por exemplo, ao se cumprir a condição de Jacobi).

Cumpridas algumas condições geométricas relacionadas com E , Weierstrass mostrou que um ponto crítico será um máximo se $E \leq 0$ e, um mínimo, se $E \geq 0$.

As condições de Legendre:

Pode-se, levando em conta que a função $F(x, y, y')$ admita a segunda derivada contínua $F_{y'y'}(x, y, y')$, substituir as condições suficientes de Weierstrass pelas condições de Legendre, condições de mais simples verificação.

Assim, para que a função $\tilde{y}(x)$ seja um extremo fraco do funcional (1.38) no domínio das funções sujeitas às condições (1.39), basta que, além das condições 1. e 2. de Weierstrass se cumpra, para qualquer x , $x_0 \leq x \leq x_1$ e $y = \tilde{y}(x)$, se $F_{y'y'}(x, y, y') > 0$, então $\tilde{y}(x)$ é um mínimo, ou, para qualquer x , $x_0 \leq x \leq x_1$ e $y = \tilde{y}(x)$, se $F_{y'y'}(x, y, y') < 0$, então $\tilde{y}(x)$ é um máximo.

Para que $\tilde{y}(x)$ seja um extremo forte de (1.38) com as condições de fronteira (1.39), além de cumpridas as condições 1. e 2. de Weierstrass, basta que, para as coordenadas x, y dos pontos de uma vizinhança de $\tilde{y}(x)$ e, para qualquer valor de y' , se $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$, então $\tilde{y}(x)$ é um mínimo; sendo $\tilde{y}(x)$ um máximo se tivermos $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$. Para os detalhes vide [1].

11 O Problema do Extremo Condicional

Problemas desse tipo foram considerados por Euler e Lagrange, baseados em ideias com origem na mecânica.

Teorema 11.1. (Euler) Consideremos a equação:

$$J_1[v] := \int_{x_0}^{x_1} G(x, v, v') dx = a$$

em que a é uma constante. Seja $y(x) \in C^1([x_0, x_1])$, com $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, uma função que obedece as seguintes condições:

1. $y = y(x)$ é solução da equação

$$J_1[v] = a;$$

2. $y = y(x)$ é extremo do funcional

$$J[\omega] := \int_{x_0}^{x_1} L(x, \omega, \omega') dx;$$

3. $y = y(x)$ não é ponto crítico de $J_1[v]$.

Então, existe um número real λ tal que $y = y(x)$ é ponto crítico do funcional

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} (L + \lambda G) dx$$

Demonstração: Seja

$$y_1 = y(x) + \alpha_1 \eta_1(x) + \alpha_2 \eta_2(x)$$

uma variação de $y = y(x)$, em que $\eta_j(x) \in C^1([x_0, x_1])$, $j = 1, 2$. Para α_1 e α_2 números suficientemente pequenos, a função $y_1(x)$ pertence a uma vizinhança de $y(x)$ suficientemente pequena. Além disso,

$$y_1(x_0) = y_0, \quad y_1(x_1) = y_1;$$

logo; $\eta_j = 0$, $j = 1, 2$. Então, $y_1(x)$ pertence ao domínio de definição do funcional J .

Por outro lado, estamos interessados em funções e suas variações, tais que, além de serem extremos de J , satisfaçam a equação dada na condição 1 do Teorema. De fato, essa é a razão de utilizarmos dois parâmetros de variação: o primeiro está relacionado com a variação do funcional J e, o segundo, garante que estas variações sejam soluções da equação 1.

Então, considerando a função $\Phi(\alpha_1, \alpha_2) := J_1[y_1(x)] = J_1[y(x) + \alpha_1 \eta_1(x) + \alpha_2 \eta_2(x)]$ temos que

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = a, \quad (1.40)$$

e, em particular, $\Phi(0, 0) = a$. Observamos que Φ é uma função continuamente diferenciável.

As variações do funcional J_1 são dadas por:

$$\left. \frac{dJ_1}{d\alpha_j} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) \eta_j(x) dx, \quad j = 1, 2 \quad (1.41)$$

em que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\int_{x_0}^{x_1} \left(G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right) \eta_j dx \neq 0$, pois $y = y(x)$ não é ponto crítico de J_1 (condição 3 do Teorema).

Em particular, podemos escolher η_2 , quando $j=2$ em (1.41), tal que

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}(0, 0) = \int_{x_0}^{x_1} \left[G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} \right] \eta_2(x) dx \neq 0$$

Isto garante que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}(0, 0) \neq 0$$

Estabelecidas as condições acima, podemos aplicar o Teorema da Função Implícita [13]: Dada a função $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0; \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:

1. $B \times \bar{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$;
2. Para todo $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c$.

A função $\xi: B \rightarrow J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

O Teorema implica que a equação (1.40) determina α_2 como uma função de α_1 , numa vizinhança de zero suficientemente pequena. Então, existe uma função φ continuamente diferencial nesta vizinhança, tal que $\alpha_2 = \varphi(\alpha_1)$ e $\varphi(0) = 0$. Substituindo em (1.41) temos

$$\Phi(\alpha_1, \varphi(\alpha_1)) = a. \quad (1.42)$$

Diferenciando (1.42) com relação a α_1 , obtemos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \varphi(\alpha_1)) \cdot 1 + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}(\alpha_1, \varphi(\alpha_1)) \varphi'(\alpha_1) = \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \varphi'(\alpha_1) = 0 \quad (1.43)$$

Seja $\alpha_1 = 0$. Então, temos de (1.43)

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}(0, 0) + \frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \varphi'(0) = 0. \quad (1.44)$$

Como $\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2} \neq 0$, segue de (1.44) que

$$\varphi'(0) = \frac{-\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_1}(0, 0)}{\frac{\partial J_1}{\partial \alpha_2}(0, 0)} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} (G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}) \eta_1 dx}{\int_{x_0}^{x_1} (G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}) \eta_2 dx}. \quad (1.45)$$

Agora, a variação do funcional J é dada por:

$$y(x) = y + \alpha_1 \eta_1 + \varphi(\alpha_1) \eta_2$$

Mas, $y = y(x)$ é extremo de J (condição 3 do Teorema de Euler) e, conseqüentemente,

$$\left. \frac{dJ}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = 0.$$

Então, para

$$J[\alpha_1] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y + \alpha_1 \eta_1 + \varphi(\alpha_1) \eta_2, y' + \alpha_1 \eta'_1 + \varphi'(\alpha_1) \eta'_2) dx,$$

a Equação de Euler - Lagrange é dada por:

$$0 = \left. \frac{dJ}{d\alpha_1} \right|_{\alpha_1=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} \right) \eta_1(x) dx + \varphi'(0) \int_{x_0}^{x_1} \left(L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} \right) \eta_2(x) dx. \quad (1.46)$$

Substituindo $\varphi'(0)$ de (1.45) em (1.46) temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_0}^{x_1} \left(L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} \right) \eta_1(x) dx - \\ &\quad - \frac{\int_{x_0}^{x_1} (G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}) \eta_1 dx}{\int_{x_0}^{x_1} (G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}) \eta_2 dx} \int_{x_0}^{x_1} \left(L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} \right) \eta_2(x) dx \end{aligned} \quad (1.47)$$

A equação (1.47) sugere que denotemos por

$$\lambda = - \frac{\int_{x_0}^{x_1} (L_y - \frac{d}{dx} L_{y'}) \eta_2(x) dx}{\int_{x_0}^{x_1} (G_y - \frac{d}{dx} G_{y'}) \eta_2(x) dx}. \quad (1.48)$$

Desta forma, a equação dada em (1.47) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$0 = \int_{x_0}^{x_1} \left[(L_y + \lambda G_y) - \frac{d}{dx} (L_{y'} + \lambda G_{y'}) \right] \eta_1(x) dx.$$

Como $\eta_1(x) \in C^1$ e $\eta_1(x_0) = \eta_1(x_1) = 0$, pelo Lema de Lagrange, temos:

$$(L_y + \lambda G_y) - \frac{d}{dx} (L_{y'} + \lambda G_{y'}) = 0$$

Seja $M = L + \lambda G$. Então,

$$M_y = L_y + \lambda G_y, \quad M_{y'} = L_{y'} + \lambda G_{y'} \quad \text{e} \quad M_y - \frac{d}{dx} M_{y'} = 0 \quad (1.49)$$

ou seja, $y = y(x)$ satisfaz (1.49), que é a equação de Euler - Lagrange do funcional

$$I[Z] : J[Z] + \lambda J_1[Z] = \int_{x_0}^{x_1} M dx,$$

em que $M = L + \lambda G$ e λ é um número real (vide (1.48)).

12 Equações de Euler - Lagrange para funcionais que dependem de n funções

Considere um funcional do tipo

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx,$$

com as condições de fronteira dadas por:

$$y_k(x_0) = y_{k_0}, \quad y_k(x_1) = y_{k_1} \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, n.$$

Para obtermos as condições necessárias de extremo, variamos só uma das funções $y_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, deixando as demais invariáveis. Seja

$$\varphi_j[\alpha] \equiv J[y_1, \dots, y_j + \alpha \eta_j, \dots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1, \dots, y_j + \alpha \eta_j, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_j + \alpha \eta'_j, \dots, y'_n) dx,$$

em que $\eta_j \in C^1([x_0, x_1])$ tal que $\eta_j(x_0) = \eta_j(x_1) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Derivando φ_j com relação a α obtemos:

$$\frac{d\varphi_j}{d\alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial \alpha} (y_j + \alpha \eta_j) + \frac{\partial L}{\partial y'_j} \frac{\partial}{\partial \alpha} (y'_j + \alpha \eta'_j) \right] dx$$

Igualando $\frac{d\varphi_j}{d\alpha}$ a zero temos:

$$\int_{x_0}^{x_1} [L_{y_j} \eta_j + L_{y'_j} \eta'_j] dx = 0$$

Mas, o Lema 7.1 implica que

$$L_{y_j} - \frac{d}{dx} L_{y'_j} = 0.$$

Fazendo, de forma exatamente análoga, para qualquer outra função $y_j(x)$, $j=1,2,\dots,n$, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$L_{y_j} - \frac{d}{dx} L_{y'_j} = 0 \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, n \quad (1.50)$$

que determinam, geralmente, uma família dependente de $2n$ parâmetros de curvas integrais no espaço $x, y_1, y_2, \dots, y_n$, que correspondem a uma família de extremais do problema variacional dado.

13 Equações de Euler-Lagrange para funcionais que dependem das derivadas de ordem superior.

Dado o funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) dx,$$

em que L é uma função $n + 2$ vezes diferenciável com relação a todos os seus argumentos, e suponhamos que as condições de fronteira se apresentam da seguinte forma:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1},$$

$$y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{n-1}(x_1) = y_1^{n-1}.$$

Para obtermos as condições necessárias de extremo, devemos inicialmente variar $y = y(x)$, como segue:

$$\varphi[\alpha] \equiv J[y + \alpha\eta] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', \dots, y^n + \alpha\eta^n) dx,$$

em que $\eta \in C^n([x_0, x_1])$, tal que $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$.

Diferenciando φ com relação a α e igualando a zero obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y'} \eta'(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y''} \eta''(x) dx + \dots + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y^n} \eta^n(x) dx = 0.$$

Integrando por partes o segundo termo uma vez, o terceiro duas vezes, o quarto três vezes e, assim sucessivamente, até o n -ésimo termo, e, colocando η em evidência, obtemos:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[\sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \frac{\partial L}{\partial y^j} \right] dx = 0$$

Pelo Lema de Lagrange, conclui-se que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{\partial L}{\partial y^j} \right) = 0. \quad (1.51)$$

Dessa forma, a função $y = y(x)$ que é extremo do funcional dado no início, deve ser solução da equação (1.52). Tal equação, chamada de Euler-Lagrange, é uma equação diferencial de ordem $2n$, e suas curvas integrais, chamadas de extremais do problema proposto.

Agora, se o funcional J tem a forma

$$J[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', \dots, y^n, z, z', \dots, z^m) dx,$$

variando $y = y(x)$ e, considerando $z = z(x)$ fixa e, posteriormente, variando $z = z(x)$ e considerando $y = y(x)$ fixa, concluímos que as funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$, que são extremos, devem satisfazer o seguinte sistema de equações de Euler-Lagrange:

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{\partial L}{\partial y^j} \right) = 0, \quad (1.52)$$

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{\partial L}{\partial z^i} \right) = 0. \quad (1.53)$$

Analogamente, podemos analisar o extremo de um funcional que depende de um número arbitrário de funções:

$$J[y_1, y_2, \dots, y_m] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{n_1}, y_2, y_2', \dots, y_2^{n_2}, \dots, y_m, y_m', \dots, y_m^{n_m}) dx$$

Variando somente alguma das funções $y = y_i(x)$, obtemos a condição necessária de extremo (na forma de sistema) dado pelo somatório:

$$\sum_{j=0}^{n_i} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{\partial L}{\partial y_i^{(j)}} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.54)$$

14 Equações de Euler-Lagrange para funcionais envolvendo funções de várias variáveis

Consideremos o seguinte funcional para $u = u(x, y)$

$$J[u] = \iint_D L \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy,$$

em que L é uma função três vezes diferenciável com relação a seus argumentos e $D \subset \mathbb{R}^2$.

Supondo que seja possível encontrar a função $u = u(x, y)$, satisfazendo as seguintes condições:

1. Seja contínua, juntamente com suas derivadas de segunda ordem; inclusive em D ;
2. E, por fim, que seja o extremo do funcional dado.

Variando $u = u(x, y)$, obtemos:

$$\varphi[\alpha] \equiv J[u + \alpha\eta] = \iint_D L(x, y, u + \alpha\eta, u_x + \alpha\eta_x, u_y + \alpha\eta_y) dx dy,$$

em que $\eta \in C^1(D)$ e que anula na fronteira de D . Derivando φ com relação a α e igualando $\frac{d}{d\alpha}\varphi(0)$ a zero, obtemos:

$$\iint_D (L_u\eta + L_p\eta_x + L_q\eta_y) dx dy = 0,$$

em que $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Integrando por partes, temos:

$$\int \int_D (L_u - D_x L_p - D_y L_q) \eta(x) dx dy = 0.$$

Acima, cada derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$, quando aplicada às derivadas L_p e L_q , pela Regra da Cadeia, torna-se a derivada total D_x e D_y respectivamente, uma vez que L , L_p e L_q dependem de x e y através da função $u = u(x, y)$ (para a definição de derivada total, vide a definição ao final deste parágrafo). Aplicando o Lema 5.1, ainda válido neste contexto, conclui-se que:

$$L_u - D_x L_p - D_y L_q = 0. \quad (1.55)$$

Desta forma, para o funcional

$$J[u(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \int_D L(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

em que $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, obtemos de forma completamente análoga a seguinte equação de Euler-Lagrange, a qual deverá satisfazer a função $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, configurando-se no extremo de J :

$$L_u - \sum_{i=1}^n D_i L_{p_i} = 0, \quad (1.56)$$

em que o operador da derivada total com relação a x_i é dado por:

$$D_i = \frac{D}{Dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \dots + u_{ii_1 i_2 \dots i_l} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_l}} + \dots$$

$$\text{e } u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots$$

Para o exposto acima, foi usada a convenção de Einstein - somatório sobre índices repetidos.

15 Equações de Euler-Lagrange para funcionais em forma paramétrica

Em muitos problemas variacionais, é conveniente a busca por soluções em forma paramétrica. Desta forma, se tivermos um funcional

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx$$

e buscarmos soluções do tipo $x = x(t)$ e $y = y(t)$, o funcional é reduzido à seguinte forma:

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) \dot{x}(t) dt$$

A função subintegral obtida após a troca de variáveis não contém explicitamente t , e é uma função homogênea de primeiro grau de homogeneidade com respeito às variáveis $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Sua forma se mantém inalterada ao mudarmos a representação paramétrica da curva.

Logo, o funcional depende apenas da forma da curva e não de sua representação paramétrica. Podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$J[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt$$

Variando $x = x(t)$ e considerando $y = y(t)$ fixa e, depois vice versa, concluímos que, para se encontrar as funções que extremizam o funcional na forma paramétrica, temos que resolver o seguinte sistema de Equações de Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \Phi_x - \frac{d}{dx} \Phi_{\dot{x}} = 0, \\ \Phi_y - \frac{d}{dy} \Phi_{\dot{y}} = 0. \end{cases} \quad (1.57)$$

16 Equações de Euler-Lagrange para funcionais que diferem por uma Divergência Total

Neste parágrafo, apresentaremos resultados referentes às Equações de Euler-Lagrange para funcionais que diferem entre si por uma Divergência Total.

Considere o seguinte funcional:

$$J_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx$$

Sejam $A = A(x, y, y') \in C^2([x_0, x_1] \times \mathbb{R})$ e $J_2[y]$ um funcional da forma

$$J_2[y] = \int_{x_0}^{x_1} \tilde{L} dx,$$

em que $\tilde{L} = L + \frac{dA}{dx}$. Então, as Equações de Euler-Lagrange para os funcionais $J_1[y]$ e $J_2[y]$ são as mesmas. Esse resultado se estende para o caso em que A é uma função das k -ésimas derivadas, isto é,

$$A = A(x, y, y', y'', \dots, y^k).$$

Consideremos agora o seguinte funcional:

$$J_1[u] = \int_D L(x, u, p) dx,$$

com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $p = p(p_1, p_2, \dots, p_n)$, tal que $p_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Sejam:

1. $A_j = A_j(x, u, p)$, com $j = 1 \dots n$, funções de x, u, p e suas derivadas primeiras;
2. $J_2[u]$ um funcional do tipo

$$J_2[u] = \int_D \tilde{L} dx,$$

em que $\tilde{L} = L + D_j A_j$ e D_j é a derivada total.

Para o funcional $J_2[u]$, temos:

$$J_2[u] = \int_D \left(L + \frac{\partial A_j}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial A_j}{\partial u} + p_{ji} \frac{\partial A_j}{\partial p_i} \right) dx$$

Variando u , obtemos:

$$\varphi(\alpha) \equiv J_2[u + \alpha \eta] = \int_D (L(x, u + \alpha \eta, p_k + \alpha \eta_k) + A_{j,x_j}(x, u + \alpha \eta, p_k + \alpha \eta_k) + (p_j + \alpha \eta_j) A_{j,u}(x, u + \alpha \eta, p_k + \alpha \eta_k) + (p_{ji} + \alpha \eta_{ji} + A_{j,p_j}(x, u + \alpha \eta, p_k + \alpha \eta_k)) dx.$$

Diferenciando $\varphi(\alpha)$ com relação a α , igualando $\frac{d}{d\alpha} \varphi(0)$ a zero e, por último, integrando por partes obtemos:

$$\int_D [L_u - D_i L_{p_i}] \eta dx = 0$$

Pelo Lema de Lagrange, conclui-se que, para o funcional $J_2[u]$ teremos a seguinte equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - D_i \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \quad (1.58)$$

Mas, a equação (1.58) corresponde à Equação de Euler-Lagrange para o funcional $J_1[u]$, o que nos permite concluir que as Equações de Euler-Lagrange para os funcionais $J_1[u]$ e $J_2[u]$ são as mesmas.

Finalmente, o resultado acima pode ser generalizado para o caso de funcionais, cujas funções de Lagrange (também conhecidas como funções Lagrangianas), dependam de m funções de n variáveis e de suas derivadas de ordem k . Isto é, funcionais da forma:

$$J_1[u^1, u^2, \dots, u^m] = \int_D L \left(x, u^i, \frac{\partial u^i}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial^k u^i}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}} \right) dx,$$

em que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u^i = u^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $i_1 + i_2 + \dots + i_s = k$, com $i = 1, 2, \dots, m$.

Sejam $A_j = A_j \left(x, u^1, \dots, u^m, \frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \right)$ e

$$J_2[u^1, u^2, \dots, u^m] = \int_D \tilde{L} dx,$$

com $\tilde{L} = L + D_j A_j$. Desta forma, demonstramos o seguinte Teorema:

Teorema 16.1. *As equações de Euler-Lagrange para J_1 e J_2 são as mesmas.*

17 Teorema de Noether

17.1 A condição de invariância

Dado o funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt$$

em que $t_0 < t_1$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ - coordenadas generalizadas e $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ - velocidades generalizadas.

Consideremos transformações do tipo:

$$\begin{cases} u = \Phi(t, q(t), \dot{q}(t), \alpha) \\ y_i = \Psi_i(t, q(t), \dot{q}(t), \alpha) \end{cases} \quad (1.59)$$

em que $\alpha \in (-\delta, \delta)$ é um parâmetro e $i = 1, \dots, n$. Suponha que:

i) Para $\alpha = 0$:

$$\Phi(t, q, \dot{q}, 0) = t, \quad (1.60)$$

$$\Psi_i(t, q, \dot{q}, 0) = q_i. \quad (1.61)$$

ii) Para todo α , a transformação dada em (1.59) é inversível, isto é, existe uma função θ tal que

$$t = \theta(u, \alpha).$$

Desta forma, segue de (1.61) que y_i pode ser escrito como função de u e α , isto é,

$$y_i = \Psi_i(u, \alpha).$$

Denotemos $u_0(\alpha) = \Phi(t_0, \alpha)$ e $u_1(\alpha) = \Phi(t_1, \alpha)$.

iii) Seja

$$\tilde{J}[\alpha] = \int_{u_0(\alpha)}^{u_1(\alpha)} L\left(u, y, \frac{dy}{du}\right) du.$$

Suponhamos que

$$\tilde{J}[\alpha] = J \quad (1.62)$$

para todo $\alpha \in (-\delta, \delta)$.

Dadas as condições acima, definiremos:

Definição 17.1. *Seja uma transformação do tipo (1.59) que satisfaz as condições i) e ii). Um funcional J é dito invariante sob a ação desta transformação, ou simplesmente invariante, se satisfaz a condição iii) acima para valores arbitrários de t_0 e t_1 .*

Exemplo 17.2. *Seja a energia cinética dada por:*

$$J[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{dq}{dt} \right|^2 dt.$$

Consideremos a transformação do tipo (1.59) na seguinte forma:

$$\begin{cases} u = t + \alpha = \Phi(t, \alpha), \\ y_i = q_i = \Psi_i(t, \alpha). \end{cases}$$

Então, $t = u - \alpha$, $y_i = q_i(u - \alpha) = \Psi_i(u - \alpha, \alpha)$, além de

$$t_0 \leq t_1 \Rightarrow t_0 + \alpha \leq u \leq t_1 + \alpha.$$

Temos:

$$\tilde{J}[\alpha] = \int_{t_0+\alpha}^{t_1+\alpha} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right|^2 du = \int_{t_0+\alpha}^{t_1+\alpha} \left| \frac{dq(u - \alpha)}{du} \right|^2 du = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{dq}{dt} \right|^2 dt = J.$$

Logo, J não depende de α , o que nos permite concluir que J é invariante em relação às translações do tempo.

17.2 O Teorema de Emmy Noether

Denotemos

$$\omega(t) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad \Omega_i(t) = \left. \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (1.63)$$

Teorema 17.3. *Dado o funcional e a transformação (1.60) que obedecem as condições i), ii) e iii) da seção anterior, então o sistema de Equações de Euler-Lagrange tem primeira integral da seguinte forma:*

$$\left(\sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} q_i - L \right) \omega(t) - \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \Omega_i = \text{const.}$$

Demonstração De (1.60), (1.61) e (1.633) temos:

$$u = \Phi = t + \alpha \omega(t) + O(\alpha^2), \quad (1.64)$$

$$y_i = \Psi_i = q_i + \alpha \Omega_i(t) + O(\alpha^2) \quad (1.65)$$

numa vizinhança de $\alpha = 0$, suficientemente pequena. Da Regra da Cadeia, segue que:

$$\frac{dy_i}{du} = \frac{dy_i}{dt} : \frac{du}{dt}. \quad (1.66)$$

Substituindo (1.59), (1.65) em (1.62) tem-se:

$$\begin{aligned}\tilde{J}[\alpha] &= \int_{u_0(\alpha)}^{u_1(\alpha)} L \left(\Phi(t, \alpha), \Psi_i(t, \alpha), \frac{\dot{\Psi}_i(t, \alpha)}{\dot{\Phi}(t, \alpha)} \right) du = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L \left(\Phi(t, \alpha), \Psi_i(t, \alpha), \frac{\dot{\Psi}_i(t, \alpha)}{\dot{\Phi}(t, \alpha)} \right) \dot{\Phi}(t, \alpha) dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt\end{aligned}\quad (1.67)$$

Diferenciando (1.67) com relação a α e avaliando em $\alpha = 0$, temos:

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \int_{t_0}^{t_1} L \left(\Phi(t, \alpha), \Psi_i(t, \alpha), \frac{\dot{\Psi}_i(t, \alpha)}{\dot{\Phi}(t, \alpha)} \right) \dot{\Phi}(t, \alpha) dt \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (1.68)$$

Substituindo (1.64) e (1.66) em (1.68) e aplicando a Regra da Cadeia temos:

$$\int_{t_0}^{t_1} L\dot{\omega} + L_t\omega + \sum_{i=1}^n L_{q_i}\Omega_i + \sum_{i=1}^n L_{q_i}(\dot{\Omega}_i - \dot{q}_i\dot{\omega}) dt = 0. \quad (1.69)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\omega L - \omega \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i \right) &= \dot{\omega} L + \omega L_t + \omega \sum_{i=1}^n L_{q_i} \dot{q}_i + \omega \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \ddot{q}_i - \\ &\quad - \dot{\omega} \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i - \omega \left(\sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \ddot{q}_i + \dot{q}_i \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} \right) = \\ &= \dot{\omega} L + \omega L_t - \dot{\omega} \sum_{i=1}^n L_{q_i} \dot{q}_i + \omega \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \left(L_{q_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} \right) = \dot{\omega} L + \omega L_t - \dot{\omega} \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i.\end{aligned}\quad (1.70)$$

Substituindo (1.70) em (1.69) obtemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\omega L - \omega \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \sum_{i=1}^n (L_{q_i} \Omega_i + L_{\dot{q}_i} \dot{\Omega}_i) dt = 0.$$

Mas,

$$\frac{d}{dt} (L_{\dot{q}_i} \Omega_i) = \dot{\Omega}_i L_{\dot{q}_i} + \Omega_i \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} = \dot{\Omega}_i L_{\dot{q}_i} + \Omega_i L_{q_i},$$

pelas equações de Euler-Lagrange. Então,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\omega L - \omega \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \Omega_i \right) dt = 0. \quad (1.71)$$

Portanto, segue de (1.71) que

$$A(t_0) = A(t_1),$$

em que

$$A = \omega L - \omega \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \Omega_i.$$

Mas, t_0 e t_1 são arbitrários, o que implica que $A = \text{constante}$.

□

18 Algumas Aplicações do Teorema de Noether

- 1.) Consideremos um sistema de N partículas. A Função de Lagrange correspondente é dada por:

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i < j} V_{ij}(|r_i - r_j|).$$

Então, consideremos o funcional dado por:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt,$$

em que $q_i = r_i$, $\dot{q}_i = v_i$. Seja

$$\begin{cases} u = t + \alpha, \\ y_i = q_i. \end{cases}$$

Já vimos que $J^* = J$; $\omega(t) = 1$ e $\Omega_i(t) = 0$. Logo, segue do Teorema de Noether que

$$\sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{constante}.$$

Isto é,

$$\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i < j} V_{ij}(|r_i - r_j|) = \text{constante}$$

Temos, portanto, que a invariância com relação à translação do tempo implica na conservação da energia total do sistema.

- 2.) Vamos considerar uma translação do sistema das coordenadas dada por:

$$\begin{cases} u = t, \\ x_i^* = x_i + \alpha, \\ y_i^* = y_i, \\ z_i^* = z_i. \end{cases}$$

em que $i = 1, \dots, N$, $J^* = J$, $\omega = 0$, $\Omega_{x_i} = 1$, $\Omega_{y_i} = \Omega_{z_i} = 0$, o que implica, pelo Teorema de Noether, que:

$$\sum_{i=1}^n L_{\dot{q}_{i,x}} = \text{constante}.$$

Mas, $\dot{q}_{i,x} = v_{i,x}$ e $L_{\dot{q}_{i,x}} = m_i v_{i,x}$; logo

$$\sum_{i=1}^n m_i v_{i,x} = \text{constante}.$$

Temos, portanto, que a translação das coordenadas espaciais leva à conservação do momento linear.

3.) Consideremos agora:

$$\begin{cases} u = t, \\ x_i^* = x_i \cos(\alpha) - y_i \sin(\alpha), \\ y_i^* = x_i \sin(\alpha) + y_i \cos(\alpha), \\ z_i^* = z_i. \end{cases}$$

em que $i = 1, \dots, N$, $J^* = J$, $\omega = 0$, $\Omega_{x_i} = -y_i$, $\Omega_{y_i} = x_i$ e $\Omega_{z_i} = 0$. Novamente, pelo Teorema de Noether, concluimos que:

$$M_z = \sum_{i=1}^n (x_i m_i v_{i,y} - y_i m_i v_{i,x}) = \text{constante}.$$

Logo, a invariância com relação às rotações implica em conservação do momento angular.

Para esta seção usamos como referência os textos de [15] e [17].

2 Algumas aplicações de Cálculo Variacional

1 Introdução

Neste capítulo, iremos resolver os problemas propostos no capítulo 1: o Problema da Braquistócrona e o famoso problema isoperimétrico conhecido como Problema da Didó. Apresentadas tais resoluções, abordaremos também outras aplicações do cálculo variacional, tais como: soluções de problemas variacionais com condições de fronteira de outro tipo, curvas hiperelíticas, Desigualdade de Wirtinger, a obtenção da Função de Bliss e da melhor constante na Desigualdade de Hardy-Sobolev.

2 Os dois problemas clássicos

2.1 O Problema da Braquistócrona

Devemos recordar que o problema consiste em: dados dois pontos A e B em um plano vertical, encontrar a curva que uma partícula P precisa descrever para sair de A e chegar em B no menor tempo possível. Consideramos, na abordagem do problema, que a partícula esteja sujeita apenas à força da gravidade.

Do capítulo 1, seção 4, exibimos o funcional dado por:

$$J[y] = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Observe que a Função de Lagrange

$$L = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

é independente da variável dependente x , isto é, $L = L(y, y')$. Logo, como $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ neste caso, segue do Teorema 8.7 que

$$H \equiv y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = C_1 = \text{constante}. \quad (2.1)$$

Portanto, segue de (2.1) que

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C_1,$$

ou seja,

$$y(1 + y'^2) = C_2. \quad (2.2)$$

Para resolver esta equação diferencial, introduziremos um parâmetro t e considerando $y'(x(t)) = \cotg(t)$, segue de (2.2)

$$y = \frac{C_2}{1 + y'^2} \Rightarrow y = \frac{C_2}{1 + (\cotg(t))^2}. \quad (2.3)$$

Substituindo as igualdades $\cotg(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ e $\sin^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}$ em (2.3) obtemos:

$$y = \frac{C_2}{2}(1 - \cos(2t)). \quad (2.4)$$

Derivando (2.4) com relação a t e tomando $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, temos:

$$dy = C_2 \sin(2t) dt = 2C_2 \sin(t) \cos(t) dt. \quad (2.5)$$

Como $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ então $dx = \frac{dy}{y'(x)}$. Assim,

$$dx = \frac{2C_2 \sin(t) \cos(t)}{\cotg(x)} dt = 2C_2 \sin^2(t) dt. \quad (2.6)$$

Novamente, tomando $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$ temos:

$$dx = C_2(1 - \cos(2t)) dt. \quad (2.7)$$

Integrando com relação a t a equação (2.7) temos:

$$x(t) = C_2 t - \frac{C_2 \sin(2t)}{2} + C_3 = \frac{C_2}{2}(2t - \sin(2t)) + C_3.$$

Finalmente, a solução paramétrica é dada por:

$$y(t) = \frac{C_2}{2}(1 - \cos(2t)) \text{ e } x(t) - C_3 = \frac{C_2}{2}(2t - \sin(2t)). \quad (2.8)$$

Tomando $t_1 = 2t$ e $C_3 = 0$, pois $x(0) = 0$, obtemos:

$$y = \frac{C_2}{2}(1 - \cos(t_1)) \text{ e } x = \frac{C_2}{2}(t_1 - \sin(t_1)). \quad (2.9)$$

As equações dadas por (2.9) são conhecidas como equações paramétricas da cicloide, cuja definição será dada a seguir.

Definição 2.1. *Seja C uma circunferência de raio r , s uma reta e P um ponto de C . Denomina-se cicloide à curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre a reta s , sem deslizar, dada pela equação paramétrica:*

$$\begin{cases} x = r(\alpha - \sin \alpha) \\ y = r(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

Observamos que a resolução do Problema Clássico da Braquistócrona apresentado acima foi feita utilizando a teoria do cálculo das variações.

Para o desenvolvimento desta subseção, tomamos como referência o texto de [9]

2.2 O Problema da Didó

Provavelmente o Problema de Didó é o problema de máximo e mínimo mais antigo de que se tenha conhecimento. Datado de 850 a.c, Elissa (nome tírio de Didó), filha de um rei fenício, refugiou-se ao norte da África depois do assassinato de seu marido, onde foi recebida amistosamente por indígenas. Didó pediu um pouco de terra para estabelecer-se, tendo-lhe sido concedido que tomasse tanta quanta pudesse conter numa pele de boi. Diz a lenda que ela fez uma longa e fina correia com o couro e, em seguida, cercou um terreno de forma semi-circular beirando o Mar Mediterrâneo. Essa é a épica história da fundação de Cartago [14]. A lenda de Didó é abordada com riqueza de detalhes em Eneida, de Virgílio [21].



Figura 2 – Fio de couro para cercar o terreno

Resumidamente, o Problema da Didó consiste em encontrar, dentre todas as curvas de comprimento fixo, a que tinha delimitado maior área. A lenda de Didó comprova que, desde muito tempo, máximos e mínimos vem despertando o interesse da humanidade.

Novamente, utilizando ferramenta do cálculo das variações, resolveremos o problema e, de fato, constataremos que Didó fez a escolha certa ao cercar o terreno com forma semi-circular.

Da seção 4, capítulo 1, estabelecemos que nosso objetivo é encontrar uma função $y = y(x)$ que maximize o funcional dado abaixo (área):

$$A = J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx \quad (2.10)$$

no domínio das funções para as quais

$$y(x_0) = y(x_1) = 0, \quad J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = S \text{ e } |x_1 - x_0| < S. \quad (2.11)$$

Pelo Teorema 11.1 consideremos a função $F = f + \lambda h = y + \lambda \sqrt{1 + y'(x)^2}$ e o funcional

$$\tilde{A} = \tilde{J}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F^*(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx \quad (2.12)$$

Note que $F = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$ independe da variável x . Logo, pelo Teorema 8.7

$$F - y'Fy' = C_1 \quad (2.13)$$

isto é,

$$y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1 \quad (2.14)$$

que simplificada nos fornece:

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (2.15)$$

Para resolver a equação diferencial acima, introduziremos um parâmetro t , mediante a expressão

$$y' = \operatorname{tg}(t). \quad (2.16)$$

Logo, substituindo (2.16) em (2.15) temos :

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(t)}},$$

isto é,

$$y - C_1 = -\lambda \cos(t). \quad (2.17)$$

Como $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(t)$, temos que

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}(t)} = \frac{\lambda \operatorname{sen}(t)}{\operatorname{tg}(t)} dt = \lambda \cos(t) dt,$$

isto é ,

$$dx = \lambda \cos(t) dt. \quad (2.18)$$

Integrando ambos os lados de (2.18) obtemos:

$$x = \lambda \operatorname{sen}(t) + C_2.$$

Portanto, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = \lambda \operatorname{sen}(t) + C_2 \\ y = -\lambda \cos(t) + C_1 \end{cases}$$

em que $0 \leq t \leq \pi$.

Ao excluir t , temos:

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2,$$

que é uma família de circunferências de centro (C_2, C_1) .

3 Um problema variacional com condições de fronteira de outro tipo

Considere o seguinte problema:

Dado o funcional

$$J[y] = \int_0^1 (Cy'^2 - y^2)dx,$$

encontrar $\min J[y]$, dados $C = \text{const} \geq 0$, $y(0) = 0$ e $y'(1) = 0$.

Solução:

Seja

$$L(y, y') = Cy'^2 - y^2.$$

Primeiramente, encontremos a primeira variação de J . Definimos a função

$$\Phi(\alpha) = J[y + \alpha\eta].$$

Usando integração por partes tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= 2 \int_0^1 (Cy'\eta' - y\eta)dx = \\ &= 2C(y'(1)\eta(1) - y'(0)\eta(0)) - 2 \int_0^1 (Cy'' + y)\eta dx = 2 \int_0^1 (Cy'' + y)\eta dx, \end{aligned}$$

pois $y'(1) = \eta(0) = 0$.

Agora, uma variante do Lema de Lagrange implica que:

$$y'' + \frac{1}{C} = 0.$$

A solução geral desta Equação de Euler-Lagrange é:

$$y_0(x) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right) + B \sin\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right)$$

A condição $y_0(0) = 0$ resulta em $A = 0$ e, conseqüentemente,

$$y_0(x) = B \sin\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right).$$

Derivando a expressão acima com relação a x temos:

$$y'_0(x) = \frac{B}{\sqrt{C}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right).$$

Como $y'_0(1) = 0$, conclui-se que

$$B \cos\left(\frac{1}{\sqrt{C}}\right) = 0. \quad (2.19)$$

Analisemos dois casos:

1) $B = 0$.

Neste caso, $y_0(0) = 0$ e $J[y_0] = 0$.

2) $B \neq 0$.

Da equação (2.19), temos:

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = (2K + 1)\frac{\pi}{2},$$

com $K = 0, 1, 2 \dots$

Equivalentemente, temos:

$$C = \frac{4}{\pi^2(2K + 1)^2}$$

Logo,

$$y_0(x) = B \operatorname{sen} \left(\frac{2K + 1}{2} \pi x \right).$$

Observe que temos mais de uma solução.

Desta forma, verifiquemos as condições do Teorema 9.2 - Condição de Jacobi:

i) y_0 é solução da equação de Euler-Lagrange;

ii) $P(x) = C > 0$;

iii) $Q(x) = -1$

A equação de Jacobi é:

$$Cu'' + u = 0, \tag{2.20}$$

em que $C = \frac{4}{\pi^2(2K + 1)^2}$.

A equação (2.20) tem solução geral dada por:

$$u(x) = A_1 \cos \left(\frac{x}{\sqrt{C}} \right) + B_1 \operatorname{sen} \left(\frac{x}{\sqrt{C}} \right).$$

Considere $A_1 = B_1$. Procuremos, neste caso, os zeros da função $u = u(x)$. Desta forma, segue a equação:

$$-\operatorname{sen} \left(\frac{2K + 1}{2} \pi x^* \right) = \cos \left(\frac{2K + 1}{2} \pi x^* \right)$$

Então,

$$\operatorname{sen} \left(-\frac{2K + 1}{2} \pi x^* - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

Assim,

$$x^* = -\frac{4n+1}{4K+2},$$

em que n é um número inteiro. Para o caso em que $4n+1 > 0$, os zeros são negativos e, conseqüentemente, não pertencem ao intervalo $[0, 1]$.

Caso contrário, se $4n+1 < 0$, temos $n \leq -1$, isto é, $n = -1, -2, -3, \dots$

Logo, $x^* \geq \frac{3}{4k+2}$.

Se $k < \frac{1}{4}$, o ponto x^* não pertence ao intervalo fechado $[0, 1]$. Desta forma, para $k = 0$, o ponto 0 não tem pontos conjugados em $(0, 1]$.

Portanto, $y = y(x)$ é mínimo. Assim, $J[y] \geq J[y_0] = 0$, ou seja, $J[y] \geq 0$ e, conseqüentemente,

$$\int_0^1 y^2 dx < \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 y'^2 dx.$$

3.1 Uma generalização

Encontrar o mínimo do funcional dado por:

$$\int_0^1 (Cy'^n - y^n) dx,$$

em que n é um número inteiro positivo par, $C > 0$, $y(0) = 0$ e $y'(1) = 0$.

Solução: Seja

$$L(y, y') = Cy'^n - y^n. \quad (2.21)$$

Obviamente $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, pois L independe da variável x . Assim, a Equação de Euler-Lagrange tem uma primeira integral

$$H = y' L_{y'} - L = \text{constante}.$$

Derivando (2.21) com relação a y' , temos:

$$L_{y'} = nCy'^{n-1}. \quad (2.22)$$

Desta forma, tem-se:

$$H = y'(nCy'^{n-1}) - (Cy'^n - y^n) = A, \quad (2.23)$$

em que A é uma constante.

Colocando Cy'^n em evidência, a equação (2.23) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$C(n-1)y'^n + y^n = A. \quad (2.24)$$

Temos $A \geq 0$, pois n é par; $C > 0$ e $n - 1 > 0$. Se $A = 0$, então $y \equiv 0$. Caso contrário, se $A \neq 0$, tome

$$\sqrt[n]{A} = \alpha \Rightarrow A = \alpha^n. \quad (2.25)$$

Além disso,

$$y = \alpha Y, \quad (2.26)$$

$$y' = \alpha Y' \quad (2.27)$$

com $\alpha \neq 0$.

Substituindo (2.27), (2.26), (2.25) em (2.24) temos:

$$C(n-1)\alpha^n Y'^n + \alpha^n Y^n = \alpha^n. \quad (2.28)$$

Como $\alpha \neq 0$, segue que:

$$Y' = (1 - Y^n)^{\frac{1}{n}} [C(n-1)]^{-\frac{1}{n}}, \quad (2.29)$$

isto é,

$$dY = (1 - Y^n)^{\frac{1}{n}} [C(n-1)]^{-\frac{1}{n}} dx. \quad (2.30)$$

Logo,

$$x = [C(n-1)]^{\frac{1}{n}} \int_0^Y (1 - t^n)^{-\frac{1}{n}} dt. \quad (2.31)$$

Com as condições dadas e com $\alpha \neq 0$, obtemos: $y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$ e $y'(1) = 0$ implica em:

$$Y'(1) = 0. \quad (2.32)$$

Das equações (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27) escrevemos:

$$C(n-1)Y'^n + Y^n = 1.$$

Para $x = 1$, temos:

$$C(n-1)(Y'(1))^n + (Y(1))^n = 1,$$

Mas, de (2.32) temos $Y(1) = 1$ e, então, segue de (2.31) que:

$$1 = [C(n-1)]^{\frac{1}{n}} \int_0^1 (1 - t^n)^{-\frac{1}{n}} dt. \quad (2.33)$$

Efetuating os cálculos necessários - que pode ser facilmente confirmado pelo software “Mathematica”, obtemos a seguinte igualdade:

$$\int_0^1 (1 - t^n)^{-\frac{1}{n}} dt = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}. \quad (2.34)$$

Desta forma, substituindo (2.34) em (2.33), determinamos a constante C , que é dada por:

$$C = \left(\frac{n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\pi} \right)^n \frac{1}{n - 1}. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.35) em (2.31) temos:

$$x = \frac{n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\pi} \int_0^Y (1 - t^n)^{-\frac{1}{n}} dt \quad (2.36)$$

Isto é,

$$\int_0^Y (1 - t^n)^{-\frac{1}{n}} dt = \frac{\pi x}{n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}. \quad (2.37)$$

A curva apresentada por $Y(x)$ é chamada de *Curva Hiperelítica*.

Toda solução y da equação de Euler-Lagrange é dada por $y = \alpha Y$, em que Y é a Curva Hiperelítica. Em particular, Y satisfaz a equação (2.37) dada acima.

Substituindo $y = \alpha Y$ no funcional

$$J[y] = \int_0^1 (C y'^n - y^n) dx, \quad (2.38)$$

implica em $J[\alpha Y] = 0$ e, além disso, tem-se

$$J \geq \min J = 0 \quad (2.39)$$

De (2.39), segue que

$$\int_0^1 (C y'^n - y^n) dx \geq 0, \quad (2.40)$$

ou ainda,

$$\int_0^1 y^n dx \leq C \int_0^1 y'^n dx, \quad (2.41)$$

em que C é uma constante dada em (2.35). Assim,

$$\int_0^1 y^n dx \leq \frac{1}{n - 1} \left(\frac{n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\pi} \right)^n \int_0^1 y'^n dx, \quad (2.42)$$

obtendo a igualdade se, e somente se, $y = \alpha Y$, em que Y é a Curva Hiperelítica.

4 Desigualdade de Wirtinger.

Para todo $y = y(x) \in C^1([0, \pi])$, tais que $y(0) = y(\pi) = 0$, mostre que a desigualdade

$$\int_0^\pi y^2 dx \leq \int_0^\pi y'^2 dx$$

é válida, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $y(x) = \alpha \sin(x)$.

Solução: Seja

$$J[y] = \int_0^\pi y'^2 dx \rightarrow \min, \quad (2.43)$$

sob a condição

$$J_1[y] = \int_0^\pi y^2 dx = l, \quad (2.44)$$

em que l é uma constante positiva.

Denotando $L = y'^2$ e $G = y^2$, do Teorema de Euler, consideremos a função $H = L + \lambda G$, isto é,

$$H = y'^2 + \lambda y^2. \quad (2.45)$$

Considere o funcional dado por:

$$\tilde{J}[y] = \int_0^\pi H dx = \int_0^\pi (y'^2 + \lambda y^2) dx. \quad (2.46)$$

Para encontrar o mínimo de (2.46), calculemos a Equação de Euler-Lagrange para a função H :

$$H_y - \frac{d}{dx}(H_{y'}) = 0 \Rightarrow y'' - \lambda y = 0 \quad (2.47)$$

Para resolvermos a equação (2.47), devemos considerar os seguintes casos:

- 1) $\lambda > 0$;
- 2) $\lambda = 0$;
- 3) $\lambda < 0$.

Caso 1) $\lambda > 0$:

Como (2.47) é uma equação diferencial de segunda ordem, temos que sua solução geral é dada por:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad (2.48)$$

em que C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas. Utilizando as condições dadas, ou seja, $y(0) = y(\pi) = 0$, obtemos $C_1 = -C_2$, que satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}}, \end{cases}$$

cujas únicas soluções são $C_1 = C_2 = 0$ e então $y = y(x) = 0$, isto é, com $\lambda > 0$, a única solução da equação de Euler-Lagrange é $y = y(x) = 0$.

Caso 2) $\lambda = 0$:

Com essa condição, a equação (2.47) se reduz à:

$$y''(x) = 0 \quad (2.49)$$

Desta forma, temos que a solução é dada por:

$$y = Ax + B, \quad (2.50)$$

em que A e B são constantes a serem determinadas. Novamente, aplicando as condições dadas, ou seja, $y(0) = y(\pi) = 0$, obtemos $A = B = 0$.

Logo, com $\lambda = 0$, a solução de (2.50) é $y = y(x) = 0$, que é a única solução da Equação de Euler-Lagrange neste caso.

Caso 3) $\lambda < 0$:

Nessas condições, a equação diferencial linear de segunda ordem (2.47) tem como solução geral:

$$y(x) = A \cos \sqrt{-\lambda}x + B \sin \sqrt{-\lambda}x, \quad (2.51)$$

em que A e B são constantes a serem determinadas.

Da condição $y(0) = 0$, a equação (2.51) nos fornece

$$A = 0. \quad (2.52)$$

Agora, se $B = 0$, então $y = y(x) = 0$. Se $B \neq 0$ e utilizando a condição $y(\pi) = 0$, temos $\lambda = -K^2$, em que $K = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Neste caso, a equação (2.51) se reduz à:

$$y_0(x) = B \sin(Kx). \quad (2.53)$$

Observação 4.1. Note que a equação (2.53) contém o caso particular $y_0(x) = 0$, o que corresponde a $B = 0$.

Substituindo (2.53) em (2.44) temos:

$$J_1[y_0] = \int_0^\pi B^2 \sin^2(Kx) dx = \ell. \quad (2.54)$$

Resolvendo (2.54), obtemos:

$$B = \sqrt{\frac{2\ell}{\pi}}. \quad (2.55)$$

Um cálculo direto nos mostra que $\tilde{J}[y_0] = 0$. Considerando H dado em (2.45), temos:

$$H = y'^2 - K^2 y^2. \quad (2.56)$$

Observe que $y = y_0(x)$ é um mínimo quando $K = 1$, sendo tal fato consequência do Teorema de Jacobi. De forma análoga ao feito anteriormente, mostra-se que entre todas as soluções de Euler-Lagrange, temos uma única que representa um mínimo correspondente ao caso $K = 1$. Sendo y_0 dado por (2.53), segue que $y'_0 = KB \cos(Kx)$, e, como y_0 é mínimo, temos que H é dado por:

$$H = B^2 \cos(2Kx) \quad (2.57)$$

Assim,

$$\tilde{J}[y_0] = \int_0^\pi H dx = B^2 \int_0^\pi \cos(2Kx) dx = 0 \quad (2.58)$$

Então,

$$\tilde{J}[y] \geq \tilde{J}[y_0] = 0, \quad (2.59)$$

pois y_0 é mínimo.

Consequentemente,

$$\tilde{J}[y] \geq 0, \quad (2.60)$$

isto é,

$$\tilde{J}[y] = J[y] - \int_0^\pi y^2 dx \geq 0 \quad (2.61)$$

Assim,

$$J[y] \geq \int_0^\pi y^2 dx \quad (2.62)$$

Portanto,

$$\int_0^\pi y'^2 dx \geq \int_0^\pi y^2 dx. \quad (2.63)$$

Se $y(x) = \alpha \sin(x)$, verifica-se trivialmente a igualdade, pois

$$\int_0^\pi \sin^2(x) dx = \int_0^\pi \cos^2(x) dx = \pi.$$

5 Sobre a solução de Schwarzschild das Equações de Einstein

Usualmente, na teoria geral da relatividade, a solução de Schwarzschild é obtida através da utilização da simetria esférica da métrica e substituição direta nas equações de Einstein. O físico japonês Utiyama sugeriu em seu livro [20], um método elegante de se obter essa solução. Ele utilizou a simetria esférica da métrica diretamente na integral de ação de Hilbert e, assim, o problema se reduz a encontrar os pontos críticos do seguinte funcional em dimensão 1.

$$\begin{cases} J[u, v] = \int_{x_0}^{x_1} (u'v')x^2 dx. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 1. \end{cases} \quad (2.64)$$

Esse problema variacional unidimensional pode ser abordado facilmente com os métodos já abordados.

Solução.

Considerando $L = u'v'x^2$, escreveremos as Equações de Euler-Lagrange com relação a u e v , resultando no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial v'} = 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

isto é,

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(u'x^2) = 0 \Rightarrow (u'x^2)' = 0 \\ -\frac{d}{dx}(v'x^2) = 0 \Rightarrow (v'x^2)' = 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Resolvendo o sistema de equações diferenciais dado acima, obtemos:

$$\begin{cases} u(x) = \frac{c_1}{x} + c_2 \\ v(x) = \frac{c_3}{x} + c_4 \end{cases} \quad (2.67)$$

Para encontrarmos os valores das constantes c_2 e c_4 basta aplicarmos a condição imposta anteriormente, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c_1}{x} + c_2 = c_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c_3}{x} + c_4 = c_4 = 1$$

Portanto, chamando $c_1 = A$ e $c_2 = B$, temos que a solução do problema acima é dada por:

$$u(x) = 1 + \frac{A}{x}, \quad v(x) = 1 + \frac{B}{x}.$$

Observação 5.1. Neste trabalho não abordaremos teoria geral de relatividade e as Equações de Einstein. Também não é nosso objetivo apresentar os detalhes para finalizar a obtenção da solução de Schwarzschild das Equações de Einstein.

6 Função de Bliss

O objetivo deste parágrafo é provar o seguinte:

Teorema 6.1. ([6], [7]). Sejam p, q —números reais e n —um número natural tais que

$$i) \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p},$$

$$ii) \quad 1 < q < p$$

Então o problema

$$\begin{cases} -(x^{n-1}|y'|^{q-2}y')' = kx^{n-1}y^{p-1} & \text{em } (0, \infty) \\ y(0) = y_0 > 0, \quad y'(0) = 0, \\ y > 0 & \text{em } [0, \infty), \end{cases} \quad (2.68)$$

em que $k \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva, tem a única solução

$$y_*(x) = (y_0^{-\sigma} + k_0 x^s)^{-1/\sigma}, \quad (2.69)$$

em que

$$\sigma = \frac{q}{n-q},$$

$$s = \frac{q}{q-1}$$

e

$$k_0 = \frac{q-1}{n-q} \left(\frac{ky_0^\sigma}{n} \right)^{1/(q-1)}.$$

A função definida em (2.69) é conhecida como Função de Bliss ([4], [7]).

A seguir, desenvolveremos os cálculos para a obtenção da Função de Bliss no caso $q > 1$, utilizando os conceitos já abordados, mediante a sequência dos passos a seguir:

Passo 1.

Primeiramente observamos que o problema (2.68) tem estrutura variacional. Para provar este fato, considere a seguinte Função de Lagrange dada por:

$$L = \frac{1}{q} x^{n-1} |y'|^q - \frac{k}{p} x^{n-1} y^p.$$

Encontraremos a Equação de Euler-Lagrange correspondente a L . Lembrando que a Equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0,$$

temos:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial L}{\partial y} &= -kx^{n-1}y^{p-1} \\ 2) \quad \frac{\partial L}{\partial y'} &= \frac{1}{q}x^{n-1}(-q|y'|^{q-1}) = -x^{n-1}|y'|^{q-1}, \end{aligned}$$

pois $(|y'|^q)' = -q|y'|^{q-1}$ para $y' < 0$, levando em consideração que $y' < 0$, isto é, $|y'| = -y'$ para as soluções da equação em (2.68) [7].

E, por fim, diferenciando com relação a x a equação dada em 2) obtemos:

$$\frac{d}{dx}(-x^{n-1}|y'|^{q-1}) = -(n-1)x^{n-2}|y'|^{q-1} + x^{n-1}(q-1)|y'|^{q-2}y''. \quad (2.70)$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange correspondente é:

$$(n-1)x^{n-2}|y'|^{q-1} - x^{n-1}(q-1)|y'|^{q-2}y'' = kx^{n-1}y^{p-1}. \quad (2.71)$$

Passo 2.

Realizando manipulações algébricas, podemos escrever a equação (2.71) da seguinte forma:

$$-x^{n-1}(q-1)|y'|^{q-2}y'' = -(n-1)x^{n-2}|y'|^{q-1} + kx^{n-1}y^{p-1}$$

Sendo $x \neq 0$, $q-1 \neq 0$ e $|y'|^{q-2} \neq 0$, obtemos:

$$y'' = \frac{(n-1)x^{n-2}|y'|^{q-1}}{x^{n-1}(q-1)|y'|^{q-2}} - \frac{kx^{n-1}y^{p-1}}{x^{n-1}(q-1)|y'|^{q-2}} = \frac{(n-1)x^{-1}}{(q-1)|y'|^{-1}} - \frac{ky^{p-1}}{(q-1)|y'|^{q-2}}.$$

Como $y' < 0$, segue que:

$$y'' = -\frac{(n-1)}{q-1} \frac{y'}{x} - \frac{k}{q-1} y^{p-1} |y'|^{2-q}. \quad (2.72)$$

Passo 3.

Considere a transformação dada por:

$$\begin{cases} \tilde{x} = e^{\frac{q-p}{q}\alpha} x. \\ \tilde{y} = e^{\alpha} y. \end{cases}$$

Mostraremos, a seguir, que a transformação acima satisfaz as condições *i*), *ii*) e *iii*) do Teorema de Noether.

Provemos *i*).

Observe que a transformação dada é da seguinte forma:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \Phi(x, y(x), \dot{y}(x), \alpha) = e^{\frac{q-p}{q}\alpha} x \\ \tilde{y} = \Psi_i(x, y(x), \dot{y}(x), \alpha) = e^\alpha y \end{cases} \quad (2.73)$$

Note que, para $\alpha = 0$, temos:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{y} = y(x) \end{cases}$$

Logo, a condição *i*) é satisfeita.

Provemos *ii*).

Provaremos que, para todo α , a transformação dada é inversível, isto é, existe uma função Θ tal que

$$x = \Theta(\tilde{x}, \alpha)$$

De fato, observe que, $\tilde{x} = e^{\frac{q-p}{q}\alpha} x$ é bijetora em $\mathbb{R}_+^*$; logo, admite inversa. Efetuando cálculos algébricos, obtemos que a mesma é dada por:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{e^{\frac{q-p}{q}\alpha}}$$

Logo, existe uma função

$$\Theta(\tilde{x}, \alpha) = \frac{x}{e^{\frac{q-p}{q}\alpha}}$$

tal que

$$x = \Theta(\tilde{x}, \alpha).$$

Portanto, a transformação dada é inversível e, conseqüentemente, conclui-se que $\tilde{y}$ pode ser escrito em função de $\tilde{x}$ e α , isto é,

$$\tilde{y} = \Psi_i(\tilde{x}, \alpha).$$

Logo, a condição *ii*) é satisfeita.

Finalmente, provemos que o funcional com densidade $L = \frac{1}{q} \tilde{x}^{n-1} |y'|^q - \frac{k}{p} \tilde{x}^{n-1} y^p$ é invariante perante a transformação dada em (2.73), isto é,

$$\int \tilde{L} d\tilde{x} = \int L dx \quad (2.74)$$

De (2.73), temos:

$$d\tilde{x} = e^{\frac{q-p}{q}\alpha} dx \quad \text{e} \quad (\tilde{y})' = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{e^\alpha dy}{e^{\frac{q-p}{q}\alpha} dx} \Rightarrow (\tilde{y})' = e^{\alpha - \frac{q-p}{q}\alpha} y'$$

Logo, a equação (2.74) nos fornece:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{q} \left(e^{\frac{q-p}{q}\alpha} x \right)^{n-1} |e^{\alpha - (\frac{q-p}{q}\alpha)} y'|^q - \frac{k}{p} \left(e^{\frac{q-p}{q}\alpha} x \right)^{n-1} (e^\alpha y)^p e^{\frac{q-p}{q}\alpha} \right) dx \\ = \int \left(\frac{1}{q} x^{n-1} |y'|^q - \frac{k}{p} x^{n-1} y^p \right) dx. \end{aligned} \quad (2.75)$$

O lado esquerdo da equação (2.75) se escreve como

$$\int \left(\frac{1}{q} e^{(\frac{q-p}{q}\alpha)(n-1)} x^{n-1} |e^{\alpha - (\frac{q-p}{q}\alpha)} y'|^q - \frac{k}{p} e^{\frac{q-p}{q}\alpha(n-1)} x^{n-1} e^{\alpha p} y^p e^{\frac{q-p}{q}\alpha} \right) dx.$$

Como $e^{\alpha - (\frac{q-p}{q}\alpha)} > 0$, segue que a ultima expressão assume a forma:

$$\int \frac{1}{q} e^{\frac{q-p}{q}\alpha(n-1)} x^{n-1} \left(e^{\alpha - \frac{q-p}{q}\alpha} \right)^q |y'|^q e^{\frac{q-p}{q}\alpha} dx - \int \frac{k}{p} e^{\frac{q-p}{q}\alpha(n-1)} x^{n-1} e^{\alpha p} y^p e^{\frac{q-p}{q}\alpha} dx$$

e utilizando propriedade de potência, temos:

$$\frac{1}{q} \int e^{\frac{q-p}{q}\alpha(n-1) + \alpha p - (\frac{q-p}{q}\alpha)q + \frac{q-p}{q}\alpha} x^{n-1} |y'|^q dx - \frac{k}{p} \int e^{\frac{q-p}{q}\alpha(n-1) + \alpha p + \frac{q-p}{q}\alpha} x^{n-1} y^p dx.$$

$$\text{Tomando } A = \left(\frac{q-p}{q} \right) \alpha(n-1) + \alpha q - \alpha q \left(\frac{q-p}{q} \right) + \left(\frac{q-p}{q} \right) \alpha$$

e $B = \frac{q-p}{q} \alpha(n-1) + \alpha p + \frac{q-p}{q} \alpha$, o lado esquerdo de (2.75) é:

$$\int \frac{1}{q} e^A x^{(n-1)} |y'|^q - \frac{k}{p} e^B x^{(n-1)} y^p dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \tilde{L} d\tilde{x} = \int L dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{q} e^A x^{n-1} |y'|^q - \frac{k}{p} e^B x^{(n-1)} y^p dx = \int \frac{1}{q} x^{n-1} |y'|^q - \frac{k}{p} x^{n-1} y^p dx \\ \Leftrightarrow A = B = 0. \end{aligned}$$

De fato, simplificando a expressão dada por A , temos:

$$A = \frac{q-p}{q} \alpha n + \alpha p.$$

Da condição i), sabemos que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \Rightarrow n = \frac{qp}{p-q}.$$

Logo, substituindo n em A , temos:

$$A = \frac{q-p}{q} \alpha \left(\frac{qp}{p-q} \right) + \alpha p = 0.$$

De maneira análoga, substituindo n em B , temos:

$$B = \frac{q-p}{q}\alpha n - \left(\frac{q-p}{q}\right)\alpha + \alpha p + \frac{q-p}{q}\alpha = \frac{q-p}{q}\alpha \left(\frac{qp}{p-q}\right) + \alpha p = 0.$$

Portanto, $A = B = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o que mostra que a condição *iii*) é satisfeita.

Passo 4.

Uma vez cumpridas as condições *i*), *ii*) e *iii*) estabelecidas anteriormente, o Teorema de Noether nos garante que a Equação de Euler-Lagrange do funcional com Função de Lagrange L , perante a transformação dada em (2.25), tem primeira integral da seguinte forma:

$$\left(\sum_{i=1}^n L_{y'} y - L\right) \omega(t) - \sum_{i=1}^n L_{y'} \Omega_i = \text{const},$$

em que

$$\omega(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{q-p}{q}x, \quad \Omega(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = y. \quad (2.76)$$

Logo, segue de $\frac{\partial L}{\partial y'} = -x^{n-1}|y'|^{q-1}$ que a primeira integral do funcional L é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{q-p}{q}x \left[y'(-x^{n-1}|y'|^{q-1}) - \frac{1}{q}x^{n-1}|y'|^q + \frac{k}{p}x^{n-1}y^p \right] - y(-x^{n-1}|y'|^{q-1}) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{q-p}{q}x \left[y'(-x^{n-1}|y'|^q|y'|^{-1}) - \frac{1}{q}x^{n-1}|y'|^q + \frac{k}{p}x^{n-1}y^p \right] + yx^{n-1}|y'|^{q-1} &= 0. \end{aligned}$$

Como $y' < 0$, segue que $|y'| = -y'$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{q-p}{q}x \left[y' \left(-x^{n-1}|y'|^q \left(-\frac{1}{y'} \right) \right) - \frac{1}{q}x^{n-1}|y'|^q + \frac{k}{p}x^{n-1}y^p \right] - y(-x^{n-1}|y'|^{q-1}) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{q-p}{q}x \left[x^{n-1}|y'|^q - \frac{1}{q}x^{n-1}|y'|^q \right] + \frac{k}{p} \left(\frac{q-p}{q} \right) x x^{n-1}y^p + yx^{n-1}|y'|^{q-1} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{q-p}{q}x x^{n-1}|y'|^p \left(1 - \frac{1}{q} \right) + \frac{q-p}{pq}k x x^{n-1}y^p + yx^{n-1}|y'|^{q-1} &= 0. \end{aligned}$$

Como $x^{n-1} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{R}$, dividiremos a equação acima por x^{n-1} , resultando

$$\frac{q-p}{q}x|y'|^q \left(1 - \frac{1}{q} \right) + \frac{q-p}{pq}kxy^p + y|y'|^{q-1} = 0. \quad (2.77)$$

Passo 5.

Agora, multiplicando a equação (2.77) por $|y'|^{2-q}y^{-1}x^{-1}$, temos:

$$\begin{aligned} |y'|^{2-q}y^{-1}x^{-1}x|y'|^q \left(\frac{q-p}{q} \right) \left(\frac{q-1}{q} \right) + \frac{q-p}{pq}kxy^p|y'|^{2-q}y^{-1}x^{-1} + \\ + y|y'|^{q-1}|y'|^{2-q}y^{-1}x^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Realizando as operações algébricas necessárias, temos:

$$|y'|^2y^{-1} \frac{(q-p)(q-1)}{q^2} + \frac{(q-p)}{pq}ky^{p-1}|y'|^{2-q} + |y'|x^{-1} = 0.$$

Logo,

$$\frac{q-p}{pq}k|y'|^{2-q}y^{p-1} = -\frac{(q-p)(q-1)}{q^2}|y'|^2y^{-1} - |y'|x^{-1}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por (-1) , obtemos:

$$\left(\frac{p-q}{pq} \right) k|y'|^{2-q}y^{p-1} = \frac{(q-p)(q-1)}{q^2}|y'|^2y^{-1} + \frac{1}{x}|y'|.$$

Como $q \neq 1$, dividindo ambos os membros da equação acima por $(q-1)$, temos:

$$-\left(\frac{q-p}{pq} \right) \frac{k}{q-1}|y'|^{2-q}y^{p-1} = \frac{(q-p)}{q^2}|y'|^2y^{-1} + \frac{|y'|}{x(q-1)}.$$

Dividindo por $\left(\frac{q-p}{pq} \right) \neq 0$, pois $p \neq q$, ambos os lados da equação acima, tem-se:

$$-\frac{k}{q-1}|y'|^{2-q}y^{p-1} = \frac{p}{q}|y'|^2y^{-1} + \frac{pq}{(q-p)(q-1)}\frac{1}{x}|y'|.$$

Agora, como $y' < 0$, temos:

$$-\frac{k}{q-1}|y'|^{2-q}y^{p-1} = \frac{p}{q}(-y')^2y^{-1} - \frac{pq}{(p-q)(q-1)}\frac{1}{x}(-y').$$

Portanto,

$$-\frac{k}{q-1}|y'|^{2-q}y^{p-1} = \frac{p}{q}y'^2y^{-1} + \frac{pq}{(p-q)(q-1)}\frac{1}{x}y'. \quad (2.78)$$

Passo 6.

Substituindo (2.78) em (2.72), obtemos:

$$y'' = \frac{-n+1}{q-1} \frac{y'}{x} + \frac{p}{q} y'^2 y^{-1} + \frac{pq}{(p-q)(q-1)} \frac{y'}{x}.$$

Sabemos, da condição *i*) que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \Leftrightarrow n = \frac{qp}{p-q}$$

e

$$\frac{p}{q} = \frac{n}{n-q}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{qp}{(p-q)(q-1)} \frac{y'}{x} + \frac{1}{q-1} \frac{y'}{x} + \frac{n}{n-q} \frac{y'^2}{y} + \frac{pq}{(p-q)(q-1)} \frac{y'}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow y'' &= \frac{1}{q-1} \frac{y'}{x} + \frac{n}{n-q} \frac{y'^2}{y} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Passo 7.

E, por fim, resolveremos a equação diferencial dada por (2.79). Primeiramente, façamos a seguinte mudança de variável:

$$y' = v(x)y(x).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} (v(x)y(x))' - \frac{1}{q-1} \frac{v(x)y(x)}{x} - \frac{n}{n-q} \frac{v(x)^2 y(x)^2}{y(x)} &= 0 \Rightarrow \\ v'(x)y(x) + v(x)(v(x)y(x)) - \frac{1}{q-1} \frac{v(x)y(x)}{x} - \frac{n}{n-q} \frac{v(x)^2 y(x)^2}{y(x)} &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$v'(x)y(x) + v(x)^2 y(x) - \frac{1}{q-1} \frac{v(x)y(x)}{x} - \frac{n}{n-q} \frac{v(x)^2 y(x)^2}{y(x)} = 0$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por $y(x)$, obtemos:

$$v'(x) + v(x)^2 - \frac{1}{q-1} \frac{v(x)}{x} - \frac{n}{n-q} v(x)^2 = 0,$$

que, por sua vez, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$v'(x) - \frac{1}{(q-1)x}v(x) + v(x)^2 \left(1 - \frac{n}{n-q}\right) = 0,$$

isto é,

$$v'(x) - \frac{1}{q-1} \frac{1}{x} v(x) = \frac{q}{n-q} v(x)^2. \quad (2.80)$$

Observe que a equação dada acima é uma equação de Bernoulli. Agora, fazendo a mudança de variável

$$r = v^{1-n} = v^{1-2} = v^{-1},$$

segue, da regra da cadeia que

$$\frac{dr}{dx} = -v^{-2} \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -v^2 \frac{dr}{dx}.$$

Substituindo $\frac{dv}{dx} = -v^2 \frac{dr}{dx}$ em (2.80), temos:

$$-v^2 \frac{dr}{dx} - \frac{1}{(q-1)x} v(x) = v(x)^2 \frac{q}{n-q}.$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por $-v^2$, temos:

$$\frac{dr}{dx} + \frac{1}{x(q-1)} v(x)^{-1} = -\frac{q}{n-q}.$$

Como $v^{-1} = r$, a equação acima é dada por:

$$\frac{dr}{dx} + \frac{1}{x(q-1)} r = -\frac{q}{n-q},$$

isto é,

$$r' + \frac{1}{x(q-1)} r = -\frac{q}{n-q}, \quad (2.81)$$

que corresponde a uma EDO linear não-homogênea de primeira ordem, cuja solução geral é dada por

$$r(x) = c_1 x^{-\frac{1}{q-1}} - \left(\frac{q-1}{n-1}\right) x. \quad (2.82)$$

Como $r = v^{-1}$, segue de (2.82) que

$$v(x) = \left(c_1 x^{-\frac{1}{q-1}} - \left(\frac{q-1}{n-1}\right) x \right)^{-1}. \quad (2.83)$$

Dividindo por $y(x)$ a equação $y' = v(x)y(x)$, temos:

$$\frac{y'}{y(x)} = v(x) \Rightarrow (\ln y(x))' = v(x). \quad (2.84)$$

Assim, segue de (2.83) e (2.84) que

$$\ln y(x) = \int v(x) + \tilde{c}_2,$$

isto é,

$$\ln y(x) = \int \frac{x^{\frac{1}{q-1}} dx}{c_1 - \left(\frac{q-1}{n-1}\right) x^{\frac{q}{q-1}}} + \tilde{c}_2. \quad (2.85)$$

Utilizando a mudança de variável $x = t^{(q-1)/q}$ para calcular a integral acima, obtemos que a solução $y = y(x)$ da equação diferencial em (2.68) deve ter a forma

$$y(x) = c_2 \left(c_1 + \frac{q-1}{n-q} x^s \right)^{-1/\sigma}, \quad (2.86)$$

em que c_1, c_2 são constantes positivas,

$$\sigma = \frac{q}{n-q},$$

$$s = \frac{q}{q-1}.$$

A condição inicial $y(0) = y_0$ implica $c_2 = y_0 c_1^{1/\sigma}$. Assim, de (2.86)

$$y(x) = (y_0^{-\sigma} + \frac{q-1}{n-q} y_0^{-\sigma} c x^s)^{-1/\sigma},$$

isto é,

$$y(x) = (\alpha + \beta x^s)^{-1/\sigma}, \quad (2.87)$$

com $\alpha = y_0^{-\sigma}$, $\beta = \frac{q-1}{n-q} y_0^{-\sigma} c$ e $c > 0$, uma constante.

Agora, substituindo a função em (2.87) na equação (2.71), obtemos

$$y(x) = (y_0^{-\sigma} + k_0 x^s)^{-1/\sigma},$$

em que

$$\sigma = \frac{q}{n-q},$$

$$s = \frac{q}{q-1}$$

e

$$k_0 = \frac{q-1}{n-q} \left(\frac{k y_0^q}{n} \right)^{1/(q-1)}.$$

□

Observação 6.2. O método de usar o Teorema de Noether para obter uma primeira integral da Equação de Euler-Lagrange, da qual uma quantidade (vide (2.78)) é expressa e substituída na Equação de Euler-Lagrange (2.79) foi proposto e usado por Yuri Bozhkov et al. em [6] num contexto mais geral.

7 A melhor constante na Desigualdade de Hardy-Sobolev

Um dos mais importantes teoremas da teoria de funções com ampla utilização em Equações Diferenciais Parciais é o Teorema de Sobolev. Existem várias provas deste teorema, uma das quais foi sugerida pelo matemático francês Thierry Aubin (vide [3] e as referências nele). Esta prova consiste em três passos, reduzindo a demonstração ao caso de dimensão um. Assim, consiste-se em provar a seguinte desigualdade integral.

Teorema 7.1. *Seja $y(x)$ uma função decrescente absolutamente contínua em $[0, \infty)$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$.*

Então vale a seguinte desigualdade:

$$\left(\int_0^\infty x^{n-1} |y(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq C(n, q) \left(\int_0^\infty x^{n-1} |y'(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad (2.88)$$

em que $1 \leq q < p$, $1/p = 1/q - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ e

$$C(n, q) = \frac{q-1}{n-q} \left[\frac{n-q}{n(q-1)} \right]^{1/q} \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n/q)\Gamma(n+1-n/q)} \right]^{1/n}$$

se $1 < q < n$, e

$$C(n, 1) = n^{-(n-1)/n}.$$

De fato, a desigualdade (2.88) é a Desigualdade de Hardy, a qual a Desigualdade de Sobolev se reduz ao procedimento sugerido por Thierry Aubin. A melhor constante na desigualdade de Hardy se atinge pela Função de Bliss, que foi observado por Gilbert A. Bliss em [4].

A ideia da prova de (2.88) é como segue em [3].

Para $q > 1$, considere o problema variacional condicional:

Maximize

$$I(y) = \int_0^\infty x^{n-1} |y(x)|^p dx$$

com a condição

$$J(y) = \int_0^\infty x^{n-1} |y'(x)|^q dx = \text{constante} > 0.$$

A Equação de Euler-Lagrange do problema variacional incondicional associado pelo Teorema de Euler é exatamente a equação (2.71) ou, equivalentemente, (2.72). Para esta equação, a Função de Bliss y_* é solução como visto na seção precedente e, por um lema de Bliss ([3], [4]), ela é máximo absoluto do problema condicional acima. Isto é,

$$I(y_*) \geq I(y) \quad (2.89)$$

para toda y tal que

$$J(y) = \text{const.} = J(y_*). \quad (2.90)$$

De (2.89) e (2.90):

$$I(y)^{1/p} \leq (I(y_*)^{1/p} J(y_*)^{-1/q}) J(y)^{1/q}.$$

Como para $y = y_*$ em (2.88) temos igualdade, a constante $C(n, p)$ é dada por:

$$C(n, q) = I(y_*)^{1/p} J(y_*)^{-1/q}. \quad (2.91)$$

Então, basta calcular as integrais em (2.91). Usando a mudança de variável $x = t^{(q-1)/q}$, temos

$$J(y_*) = \left(\frac{n-q}{q-1} \right)^q \frac{q-1}{q} A \quad (2.92)$$

em que

$$A = \int_0^\infty (1+t)^{-n} t^{n(q-1)/n} dt.$$

Por outro lado,

$$I(y_*) = \frac{q-1}{q} B \quad (2.93)$$

em que

$$B = \int_0^\infty (1+t)^{-n} t^{n-1-n/q} dt.$$

Então, de (2.91), (2.92) e (2.93) temos

$$C(n, q) = \frac{q-1}{n-q} \left(\frac{B}{A} \right)^{1/q} \left(\frac{q-1}{q} B \right)^{-1/n}. \quad (2.94)$$

Integrando por partes em A , obtemos:

$$A = \frac{n}{n-1} \frac{q-1}{q} (A + B)$$

e daqui

$$\frac{B}{A} = \frac{n-q}{n(q-1)}. \quad (2.95)$$

De (2.94) e (2.95):

$$C(n, q) = \frac{q-1}{n-q} \left(\frac{n-q}{n(q-1)} \right)^{1/q} \left(\frac{q-1}{q} B \right)^{-1/n}.$$

Com o software “Mathematica”, rapidamente se calcula que

$$B = \frac{\Gamma(n/q) \Gamma(n - n/q)}{\Gamma(n)},$$

em que Γ é a Função Gamma. Usando $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, temos

$$\Gamma(n+1-n/q) = \frac{n(q-1)}{q} \Gamma(n-n/q).$$

As últimas três fórmulas implicam a fórmula para $C(n, q)$. Agora, $C(n, 1)$ é obtida calculando

$$C(n, 1) = \lim_{q \rightarrow 1} C(n, q).$$

3 Considerações Finais

Neste trabalho nos dedicamos, primeiramente, em abordar e compreender os aspectos teóricos do Cálculo Variacional. Posteriormente, apresentamos algumas de suas aplicações, o que conferiu vitalidade à teoria abordada.

O famoso Teorema de Noether, de grande aplicação à Física Moderna, e a utilização do Cálculo Variacional na teoria moderna de controle ótimo (vide [19]), ilustram o quão promissora é esta área da matemática; sendo importante ressaltar que, dentre os vinte e três problemas propostos por David Hilbert no Congresso Internacional de Matemática (Paris, 1900), três estão relacionados ao Cálculo Variacional [18]. Desta forma, esperamos que este trabalho desperte o interesse para o estudo desta área tão vigorosa da matemática - dotada de problemas desafiadores, que, ao nosso ver, instigam o desenvolvimento acadêmico da comunidade científica.

Referências

- [1] AKHIEZER, N. I. *Aulas de Cálculo Variacional*. GITTL, Moscou, 1955.
- [2] ARAGON, F. F. Cálculo variacional e aplicações. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, Campinas, 1980.
- [3] AUBIN, T. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer, Berlin, 1998.
- [4] BLISS, G. A. An integral inequality. *Journal of the London Mathematical Society*, 5:40–46, 1930.
- [5] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1996.
- [6] BOZHKOV, Y. D. & MARTINS, A. C. G. Lie point symmetries and exact solutions of quasilinear differential equations with critical exponents. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 57:773–793, 2004.
- [7] CLEMENT, P.; DE FIGUEIREDO, D. G. & MITIDIERI, E. Quasilinear elliptic equations with critical exponents. *Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center*, 7:133–170, 1996.
- [8] DE LIMA, G. L. Cálculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC, Campinas, 2004.
- [9] DE SOUSA JÚNIOR, J. R. A. O cálculo variacional e o problema da bráquistócrona. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista - UNESP, 2010.
- [10] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora da Unicamp, Campinas SP, 1997.
- [11] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*, vol. 1. LTC - Livros Técnicos Científicos, Rio de Janeiro, 2001.
- [12] KRANSNOV, M. L.; MAKARENKO, G. I. & KISELEV, A. I. *Cálculo Variacional (ejemplos y problemas)*. Editora Mir, Moscú, 1976.
- [13] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, vol. 2. Projeto Euclides, IMPA, 1999.

-
- [14] MADEIRA, T. M. O problema isoperimétrico clássico. Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Portugal, 2004.
 - [15] NEUENSCHWANDER, D. E. *Emmy Noether's Wonderful Theorem*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2011.
 - [16] SAITOVITCH, E. M. B.; FUNCHAL, R. Z.; BARBOSA, M. C. B.; DE PINHO, S. T. R. & DE SANTANA, A. E. *Mulheres na Física - casos históricos, panorama e perspectivas*. LF - Livraria da Física, 2015.
 - [17] SCHWARZBACH, I. K. *Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*. Springer, France, 2011.
 - [18] S.HILDEBRANDT. The calculus os variations today. *The Mathematical Intelligencer*, (11(4)):50–60, 1989.
 - [19] SUSSMANN, H. J. & WILLEMS, J. C. 300 years of optimal control: From the brachystochrone to the maximum principle. *IEEE Control Systems*, pages 32–44, 1997.
 - [20] UTIYAMA, R. *Teoria da Relatividade (em russo, tradução do japonês)*. Atomizdat, Moscou, 1979.
 - [21] VIRGÍLIO. *Eneida*. Atena Editora, São Paulo, 1956.
-