
Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Bifurcações Elementares
em
Sistemas Reversíveis

por

Gastão Florêncio Miranda Junior *

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

* Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

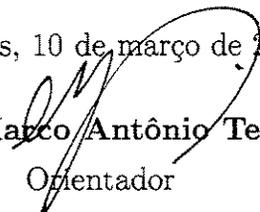
UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Bifurcações Elementares em Sistemas Reversíveis

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Gastão Florêncio Miranda Junior** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 10 de março de 2003.

Prof. Dr.  **Marco Antônio Teixeira.**
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira.

Prof^a. Dr^a. Ketty Rezende.

Prof. Dr. Cláudio Buzzi

Prof. Dr. Luiz San Martin (Suplente)

Prof. Dr. Alberto Saa (Suplente)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	UNICAMP M672b
V	EX
TOMBO BC	53401
PROC.	124103
<input type="checkbox"/> C	<input checked="" type="checkbox"/> X
PREÇO	R\$ 14,00
DATA	29/10/03
Nº CPD	

CM00182330-0

BIB ID 289873

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Miranda Júnior, Gastão Florêncio

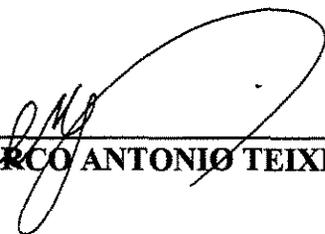
M672b Bifurcações elementares em sistemas reversíveis/Gastão Florêncio
Miranda Júnior -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2003.

Orientador : Marco Antonio Teixeira

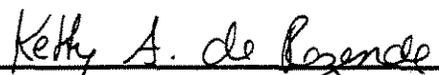
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Campos vetoriais. 2.Singularidades(Matемática). 3.Sistemas
dinâmicos. 4.Teoria da bifurcação. I. Teixeira, Marco Antonio. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

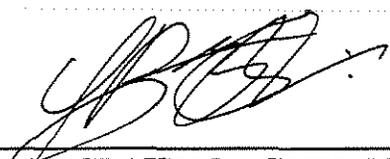
**Dissertação de Mestrado defendida em 16 de setembro de 2002 e aprovada pela
Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



Prof (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof (a). Dr (a). KETTY ABARÓ DE REZENDE



Prof (a). Dr (a). CLAUDIO AGUINALDO BUZZI

Agradecimentos

- Em primeiro lugar a Deus, pela fé e força de vontade de um sonho realizado.
- Ao meu orientador, Marco Antônio Teixeira, pela extrema competência e paciência.
- Ao professor e amigo Adonai pelos conselhos e incentivos.
- A minha família: meus pais (Gastão e Eluza) e a minha esposa (Rosa), pelo incentivo e carinho.
- Ao pessoal da república: Maurício, Rogério Casagrande (Velhinho), Gilberlândio, Clésio, Cristiano, Fábio, Germano, Marcão e Elder, que fizeram de Campinas a minha segunda casa. Em especial ao Maurício, Velhinho e Gil pelas numerosas vezes em que me ajudaram nas listas de exercícios e discursões das disciplinas.
- Aos alagoanos, Amaurí (pelos conselhos e ajuda), Alcindo (pela amizade), Fernando (pela amizade e ajuda no Latex), Zé Carlos, Zé Barros, Selma e Wagner.
- A todo o pessoal do predinho, especialmente ao Edson, Humbertão e Vanessa, pela amizade.
- Ao pessoal do escritório, pelos momentos de descontração.
- Ao pessoal da secretaria da pós-graduação, pela grande ajuda na parte burocrática e paciência.
- A CNPq pelo suporte financeiro.

Sumário

Neste trabalho apresentamos um estudo de singularidades de certas classes de campos vetoriais no \mathbb{R}^n . O objetivo principal é estudar o comportamento da dinâmica do sistema em \mathbb{R}^3 em torno de certas singularidades degeneradas, apresentando, suas formas normais, desdobramentos e diagramas de bifurcação. Interações entre certas bifurcações elementares (sela-nó, transcritical, pitchfork, histereses) com a bifurcação Hopf, também serão analisadas. As ferramentas principais utilizadas são a teoria de formas normais de Poincaré-Birkhoff e o método de redução de Liapunov-Schmidt do domínio de definição do sistema. Ressaltamos que desenvolvemos também um algoritmo computacional eficiente que permite deduzir formalmente formas normais de singularidades de campos de vetores.

Abstract

In this dissertation singularities of certain classes of vector fields in \mathbb{R}^n are studied. The main goal is to study the behavior of the local dynamics around degenerate singularities. Normal forms, unfoldings and interactions between certain elementary bifurcations (saddle-node, transcritical, pitchfork and hysteresis) and Hopf bifurcation are presented. Poincaré-Birkhoff normal form theorem and Liapunov-Schmidt reduction are fundamental tools, in our approach. We also developed an efficient computational algorithm which allows to obtain the required normal forms.

Sumário

Agradecimentos	iii
Sumário	iv
Abstract	v
Introdução	3
1 Preliminares	5
1.1 Redução de Liapunov-Schmidt	7
1.2 Formas Normais	16
1.2.1 Forma Normal para campos de vetores	16
1.2.2 Forma Normal de Poincaré-Birkhoff	28
2 Bifurcações Elementares	32
2.1 Bifurcação Sela-Nó	33
2.2 Bifurcação Transcrítica	35
2.3 Bifurcação Tipo Pitchfork	37
2.4 Bifurcação de Hopf	39
2.5 Bifurcação Histereses	40
2.6 Bifurcação no Toro de Naimark-Sacker	42
3 Interações das bifurcações estacionárias de Hopf	49
3.1 Transcrítica - Hopf	50
3.2 Pitchfork - Hopf	52
3.3 Sela-nó - Hopf	55
3.4 Histerese - Hopf	55

A	Bifurcações de codimensão 2	58
A.1	Um par de autovalores imaginários puros e um nulo	58
B	Usando o Mathematica	64

Introdução

Neste trabalho apresentamos um estudo de singularidades de certas classes de campos vectoriais no \mathbb{R}^n . O objetivo principal é estudar o comportamento da dinâmica em \mathbb{R}^3 em torno de certas singularidades degeneradas, apresentando, suas formas normais, desdobramentos e diagramas de bifurcação. Interações entre certas bifurcações elementares (sela-nó, transcritical, pitchfork, histereses) e a bifurcação Hopf, serão analisadas. As ferramentas principais utilizadas são a Teoria de formas normais de Poincaré-Birkoff e o método de redução (Liapunov-Schmidt) do domínio de definição do sistema. Ressaltamos que desenvolvemos também um algoritmo computacional eficiente que permite deduzir formalmente formas normais de singularidades de campos de vetores. As referências básicas utilizadas neste texto são [1], [2], [3], [10] e [8].

A dissertação está organizada da seguinte maneira.

No capítulo 1 enunciaremos algumas definições e conceitos básicos usados no decorrer do texto. Iremos apresentar o método de redução de Liapunov-Schmidt que reduz a dimensão do domínio, facilitando assim a análise do sistema. Definiremos também a forma normal de um campo de vetores, que é de grande utilidade no estudo da dinâmica em torno de uma singularidade, onde a partir da parte linear de um campo podemos analisar a topologia do espaço de fase do sistema. A partir daí poderemos então perceber se a dinâmica em questão sofrerá mudanças drásticas se certos termos de ordem superior forem suprimidos. Este estudo iniciar-se-á com a apresentação de dois métodos: o primeiro será o método do operador adjunto que a partir de um produto interno previamente definido, introduzimos H_n^k (o espaço dos termos homogêneos de ordem $k \geq 2$) do qual iremos escolher um subespaço complementar \mathfrak{U}^k a \mathfrak{R}^k (imagens do operador $(L_A^k)^*$ que é o operador adjunto de $L_A^k(\cdot)y = \frac{d}{dy}(\cdot)Ay - A(\cdot)(y)$,

com $y \in \mathbb{R}^n$ e (\cdot) um elemento de H_n^k . O segundo trata-se do método da representação matricial. Este último diz que para cada operador linear L_A^k (com k fixado), a sua matriz associada (\tilde{L}_A^k) permite reduzir o problema de encontrar uma forma normal do sistema através da determinação de um subespaço complementar a imagem de \tilde{L}_A^k contidas em \mathbb{C}^{d_k} , onde $d_k = \dim H_n^k$.

Nas seções subseqüentes aplicaremos os resultados do capítulo(1) no estudo de certos tipos de singularidades degeneradas.

No capítulo 2 estudaremos seis tipos de bifurcações elementares. Estas são conhecidas como: sela-nó, transcritical, pitchfork, Hopf, histereses e Naimark-Sacker no toro.

No capítulo 3 analisaremos algumas interações entre as bifurcações apresentadas no capítulo 2 com a bifurcação Hopf.

Apresentamos ainda dois apêndices. O primeiro, aborda uma análise qualitativa dos campos de vetores cuja parte linear é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e o segundo apresenta um algoritmo para calcular formas normais de campos de vetores a partir da sua parte linear (já na forma canônica de Jordan) em \mathbb{R}^n , $n = 2$ e $n = 4$.

Capítulo 1

Preliminares

Primeiramente vamos definir alguns conceitos importantes que iremos utilizar no decorrer do texto.

Seja $\mathfrak{C}^\infty(M)$ o espaço dos campos de vetores de classe C^∞ , em uma variedade M , munido da topologia C^∞ .

Definição 1.0.1. *Dois campos $X, Y \in \mathfrak{C}^\infty(M)$ são topologicamente (ou C^0 -orbitalmente) equivalentes se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando a orientação das trajetórias. Dizemos que h é uma equivalência topológica em $\mathfrak{C}^\infty(M)$.*

Uma relação mais forte é a conjugação entre os fluxos dos campos de vetores.

Definição 1.0.2. *Dois campos X e Y são conjugados se existe uma equivalência topológica h que preserva o parâmetro t ; isto é, $hX_t(p) = Y_t h(p)$ para todo $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$ (onde X_t e Y_t são os fluxos associados aos campos de vetores X e Y respectivamente).*

Definição 1.0.3. *Dizemos que $X \in \mathfrak{C}^\infty(M)$ é estruturalmente estável se existe uma vizinhança V de X em $\mathfrak{C}^\infty(M)$ tal que todo $Y \in V$ é topologicamente equivalente a X .*

Em outro termos, um campo de vetores é estruturalmente estável se o comportamento topológico de suas órbitas não se altera mediante pequenas perturbações do campo. Uma outra definição que nos será necessária é a de *desdobramento*.

Definição 1.0.4. *Qualquer família local, $X(\gamma, u)$, em $(0, 0)$ é dita um desdobramento do campo de vetores $X(0, u) = X_0(u)$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Quando $X(\gamma, u)$ tem uma singularidade em $u = 0$, $X(\gamma, u)$ é referido como um desdobramento da singularidade.*

Considere uma equação diferencial ordinária dada por

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \text{ aberto com fecho compacto.} \quad (1.1)$$

Admita F em $\mathcal{C}^\infty(U)$ definidos em \tilde{U} , transversal ao bordo de U , satisfazendo possivelmente a condição adicional de simetria definida posteriormente. Então (1.1) é *orbitalmente estruturalmente estável* se existe uma vizinhança V de $F \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que para qualquer $G \in V$ existe um homeomorfismo, o qual aplica trajetórias de F em trajetórias de G , preservando a orientação. Isto nos diz que pequenas perturbações de F não mudam qualitativamente o espaço de fase de (1.1). Iremos nos concentrar em $\mathcal{C}^\infty(U)$ e a estabilidade estrutural relativa a $\mathcal{C}^\infty(U)$. Quando não houver confusão falaremos simplesmente estruturalmente estável.

Consideremos uma família a 1-parâmetro de campo de vetores dependendo diferencialmente de λ expressadas por

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda), \quad f : U \times I \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I \text{ aberto,} \quad (1.2)$$

tal que para cada $\lambda \in I$, $f(\cdot, \lambda)$ tem as mesmas propriedades admitidas por F em (1.1). Nós dizemos que (1.2) tem uma bifurcação genérica em $\lambda_0 \in I$ se as seguintes hipóteses são satisfeitas:

- H. 1: $f(\cdot, \lambda_0)$ não é estruturalmente estável.
- H. 2: Existe um intervalo aberto I_0 , $\lambda_0 \in I_0 \subset I$, tal que se $\lambda_0 \neq \lambda \in I_0$ implica que $f(\cdot, \lambda)$ é estruturalmente estável.

Agora, seja D a classe de famílias a 1-parâmetro de campos de vetores como em (1.2). Pela definição, (1.2) tem uma *bifurcação genérica* (caracterizadas genericamente por famílias a 1-parâmetro de campos de vetores em \mathcal{C}^∞ de codimensão 1) em λ_0 se as hipóteses 1 e 2 são satisfeitas e ainda:

- H. 3: Existe uma vizinhança W de f em D tal que $g \in W$ implica que existe um homeomorfismo em $U \times I$ de forma que

$$(u, \lambda) \rightarrow [v(u, \lambda), u(\lambda)],$$

o qual aplica trajetórias de $f(\cdot, \lambda)$ em trajetórias de $g(\cdot, u)$, preservando a orientação.

Em caso contrário, f é dito ter uma *bifurcação degenerada* em λ_0 . Este capítulo concentra-se no estudo local em torno de um ponto crítico de um campo de vetores e suas *bifurcações locais* as quais podem ser bifurcações genéricas ou degeneradas. Dizemos que (1.2), ou f tem uma bifurcação (local) em (u_0, λ_0) se existe uma vizinhança U_0 de u_0 tal que as hipóteses 1, 2 e 3 dadas acima são válidas para qualquer vizinhança U satisfazendo $u_0 \in U \subset U_0$.

Apresentaremos no capítulo(2) uma série de exemplos todos eles apresentando bifurcações degeneradas. Também introduziremos parâmetros adicionais os quais *desdobram* a bifurcação degenerada e produz somente bifurcações genéricas. Esta nova família toma a seguinte forma:

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \quad (1.3)$$

Uma vantagem desta aproximação é que os exemplos canônicos de bifurcação genéricos serão estendidos, e então a sequência de bifurcações genéricas encontradas podem ser convenientemente descritas no diagrama de bifurcação e conseqüentemente muito útil nas aplicações. Então classificaremos estes diagramas de bifurcação tomando α como uma variável; isto simplificará a classificação dos retratos de fase. Um *diagrama de bifurcação* é uma representação geométrica relacionando soluções distinguidas e a variação do parâmetro λ .

1.1 Redução de Liapunov-Schmidt

O método de redução de Liapunov-Schmidt simplifica o estudo de certas aplicações abrindo a possibilidade de redução da dimensão do seu domínio de definição. Por exemplo, casos em dimensão infinita podem ser reduzidos ao estudo em dimensão finita.

Nesta seção consideraremos a família de EDO's \mathcal{R} -reversível

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

satisfazendo $f(\mathcal{R}x, \lambda) = -\mathcal{R}f(x, \lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ onde \mathcal{R} é uma involução linear em \mathbb{R}^n . Admitimos que $f(0, \lambda) = 0$, para todo λ numa vizinhança da origem.

Seja $A_\lambda := D_x f(0, \lambda)$. Suponha que A_0 tem autovalores 0 e $\pm i$.

Estudaremos o seguinte problema:

Problema 1.1.1. *Encontrar as pequenas soluções periódicas de (1.4) com período próximo de 2π com λ numa vizinhança de 0.*

Em seguida, para resolver este problema introduzimos o $C_{2\pi}^0$ o espaço das funções 2π -periódicas contínuas $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, e simultaneamente $C_{2\pi}^1$ pelo espaço correspondente a C^1 (funções diferenciáveis). Definimos um produto interno em $C_{2\pi}^0$ por

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle x_1(t), x_2(t) \rangle dt$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota um produto interno em \mathbb{R}^3 .

Consideramos a aplicação $F : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times I_0 \rightarrow C_{2\pi}^0$, onde I_0 é uma vizinhança de 0 em \mathbb{R} , definida por

$$F(x, \lambda, \sigma) = (1 + \sigma) \dot{x}(t) - f(x(t), \lambda).$$

Se $(x, \lambda, \sigma) \in C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \times I_0$ é tal que

$$F(x, \lambda, \sigma) = 0 \tag{1.5}$$

então $\tilde{x}(t) := x((1 + \sigma)t)$ é uma solução $\frac{2\pi}{1+\sigma}$ -periódica de (1.5). Daí para resolver (1.1.1) temos que determinar os zeros de F . Claramente, $(x_0, \lambda_0, \sigma_0) = (0, 0, 0)$ é uma solução de (1.5). Seja $L := D_x F(0, 0, 0) : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$, tal que

$$Lx(t) = \dot{x}(t) - A_0 x(t).$$

A forma normal adjunta $L^* : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$ de L é definida por

$$L^* x(t) = -\dot{x}(t) - A_0^T x(t)$$

de forma que $(Lx, y) = (x, L^*y)$.

Seja $A_0 = S_0 + N_0$ a única decomposição de A_0 (S_0 a parte semi-simples e N_0 nilpotente). Podemos escolher um produto interno (Veja [9]) em \mathbb{R}^3 de forma que $S_0 + S_0^T = 0$, e definimos um subespaço \mathfrak{D} de $C_{2\pi}^1$, por

$$\mathfrak{D} = \{q : q(t) = e^{tS_0} u, \quad u \in \mathbb{R}^3\}.$$

Colocaremos as soluções de (1.5) em correspondência injetiva com as soluções de uma equação em \mathfrak{D} . Para isto definimos os subespaços

$$X_1 = \{x \in C_{2\pi}^1 : (x, \mathfrak{D}) = 0\}$$

e

$$Y_1 = \{y \in C_{2\pi}^0 : (y, \mathfrak{D}) = 0\}$$

que são os complementos ortogonais de \mathfrak{D} em $\mathcal{C}_{2\pi}^1$ e $\mathcal{C}_{2\pi}^0$, respectivamente.

Seja (q_1, q_2, \dots, q_n) com $q_i(t) = e^{tS_0} u_i$ para algum u_i numa base $\{u_1, \dots, u_n\}$ do \mathbb{R}^n . Então definimos a projeção

$$Q(\cdot) = \sum_{i=1}^n q_i^*(\cdot) q_i \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi}^0)$$

onde $q_i^*(x) = (q_i, x)$.

Denotemos $\text{Im}(Q) = \mathfrak{D}$ e $\text{Ker}(Q) = Y_1$.

Sabemos ainda que

$$\mathcal{C}_{2\pi}^1 = X_1 \oplus \mathfrak{D} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{2\pi}^0 = Y_1 \oplus \mathfrak{D}.$$

Assim, consideramos

$$F(x, \lambda, \sigma) = F(q + x_1, \lambda, \sigma) =: \hat{F}(q, x_1, \lambda, \sigma), \quad q \in \mathfrak{D}, x_1 \in X_1.$$

Definição 1.1.2. O operador linear \hat{L} é dito um operador de Fredholm se $\text{Im}(L)$ (imagem de L) é fechada e tem codimensão finita.

Lema 1.1.3. A aplicação $\hat{L} := L|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y_1$ é injetiva e sobrejetiva.

Demonstração. Sejam $\mathcal{C}_{2\pi}^1, \mathcal{C}_{2\pi}^0$ espaços de Banach, $t \in I_0 \subset \mathbb{R}$ e $\hat{L} : X_1 \rightarrow Y_1$ um operador. \hat{L} é um operador de Fredholm, ou mais precisamente: $\dim \text{Ker}(L) = p < \infty$, $\text{codim} \text{Im}(L) = q < \infty$. Existem projeções contínuas: $P \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi}^1)$, $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi}^0)$, tal que $\text{Im}(P) = \text{Ker}(L)$, $\text{Im}(I - Q) = \text{Im}(L)$. Assim temos que

$$L|_{(I-P)(\mathcal{C}_{2\pi}^0)} : (I - P) \rightarrow \text{Im}(L)$$

é sobrejetiva e contínua. Do teorema do gráfico fechado temos que essa aplicação tem inversa $\mathcal{K} : \text{Im} \rightarrow (I - P)(\mathcal{C}_{2\pi}^0)$, contínua. Além disso vale que $\mathcal{K} \circ L = I - P$ e $L \circ \mathcal{K} = I_{\text{Im}(L)}$. \square

Retornando a (1.5) temos

$$\hat{F}(q, x_1, \lambda, \sigma) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (I - Q) \circ \hat{F}(q, x_1, \lambda, \sigma) = 0 \\ Q \circ \hat{F}(q, x_1, \lambda, \sigma) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema da Aplicação Implícita e pelo Lema (1.1.3) a equação acima podem localmente ser solucionada por $x_1 = x_1^*(q, \lambda, \sigma)$.

Desta forma (1.5) é reduzida para

$$\tilde{F}(q, \lambda, \sigma) := Q \circ \hat{F}(q, x_1^*(q, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) = 0.$$

Esta equação será satisfeita se, e só se,

$$q_i^* \left(\hat{F}(q, x_1^*(q, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Denotaremos agora a seguinte equação:

$$B(u, \lambda, \sigma) = 0 \tag{1.6}$$

com $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$B(u, \lambda, \sigma) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-tS_0} F(x^*(u, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt$$

onde

$$x^*(u, \lambda, \sigma)(t) = e^{tS_0}u + x_1^*(e^{tS_0}u, \lambda, \sigma)$$

Vejamos algumas propriedades de B . Definimos uma ação S^1, S_ϕ em $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ por $(S_\phi x)(t) = x(t - \phi)$. E em F temos

$$\begin{aligned} (S_\phi F(x, \lambda, \sigma))(t) &= F(x, \lambda, \sigma)(t - \phi) \\ &= (1 + \sigma) \dot{x}(t - \phi) - f(x(t - \phi), \lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F((S_\phi x)(t), \lambda, \sigma)(t) &= F(x(t - \phi), \lambda, \sigma) \\ &= (1 + \sigma) \dot{x}(t - \phi) - f(x(t - \phi), \lambda) \end{aligned}$$

o que nos dá, $(S_\phi F(x, \lambda, \sigma))(t) = F((S_\phi x)(t), \lambda, \sigma)(t)$.

A reversibilidade de (1.4) é refletida em F . Para isto definimos a aplicação $T_{\mathcal{R}} : \mathcal{C}_{2\pi}^0 \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}^0$ por $(T_{\mathcal{R}}x)(t) = \mathcal{R}x(-t)$. Pois de

$$\begin{aligned} (T_{\mathcal{R}}F(x, \lambda, \sigma))(t) &= \mathcal{R}F(x, \lambda, \sigma)(-t) \\ &= \mathcal{R}[(1 + \sigma) \dot{x}(-t) - f(x(-t), \lambda)] \\ &= (1 + \sigma) \mathcal{R}\dot{x}(-t) - \mathcal{R}f(x(-t), \lambda) \\ &= -(1 + \sigma) (T_{\mathcal{R}}\dot{x})(t) + f((T_{\mathcal{R}}x)(t), \lambda), \end{aligned}$$

assim $T_{\mathcal{R}}F(x, \lambda, \sigma) = -F(T_{\mathcal{R}}x, \lambda, \sigma)$.

Seja s_ϕ uma ação S^1 em \mathbb{R}^n definida por $s_\phi u = e^{-\phi S_0}u$.

Lema 1.1.4. *Seja s_ϕ definida acima. Então:*

1. $s_\phi(B(u, \lambda, \sigma)) = B(s_\phi u, \lambda, \sigma)$,

$$2. \mathcal{R}B(u, \lambda, \sigma) = -B(\mathcal{R}u, \lambda, \sigma).$$

Demonstração. Para o ítem (1) temos que

$$B(s_\phi u, \lambda, \sigma) = B(e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma)$$

assim

$$B(e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-t S_0} F(x^*(e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt$$

onde

$$x^*(e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma)(t) = e^{t S_0} e^{-\phi S_0} u + x_1^*(e^{t S_0} e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma),$$

ou ainda

$$x^*(e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma)(t) = e^{(t-\phi) S_0} u + x_1^*(e^{(t-\phi) S_0} u, \lambda, \sigma),$$

fazendo $\tau = t - \phi \Rightarrow t = \tau + \phi$, daí temos

$$B(e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(\tau+\phi) S_0} F(x^*(u, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt$$

e

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(\tau+\phi) S_0} F(x^*(u, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(\phi+\tau) S_0} F(x^*(u, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt.$$

Portanto,

$$B(e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma) = e^{-\phi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\tau S_0} F(x^*(u, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt \Rightarrow$$

$$B(e^{-\phi S_0} u, \lambda, \sigma) = e^{-\phi S_0} B(u, \lambda, \sigma).$$

E no ítem (2) sabemos que

$$\mathcal{R}B(u, \lambda, \sigma) = \mathcal{R} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-t S_0} F(x^*(u, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt \right),$$

mas como \mathcal{R} é involução linear temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}B(u, \lambda, \sigma) &= \mathcal{R} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-t S_0} F(x^*(q, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{-t S_0} \mathcal{R}F(x^*(q, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{-t S_0} F(\mathcal{R}x^*(q, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) dt \right) \\ &= -B(\mathcal{R}u, \lambda, \sigma). \end{aligned}$$

□

Assim se (u, λ, σ) é uma solução de (1.6), então $x = x^*(u, \lambda, \sigma)$ corresponde a uma solução $\frac{2\pi}{1+\sigma}$ -periódica de (1.4).

Desta forma, pelo lema (1.4) $(s_\phi u, \lambda, \sigma)$ é solução de (1.6), para todo $\phi \in S^1$.

Observação 1.1.5. *Seja $U = \ker(e^{tS_0} - I) \subset \mathbb{R}^4$, onde t está numa pequena vizinhança de 2π . Sem perda de generalidade, tomaremos $t = 2\pi$. Assim temos que A_0, S_0, N_0 e \mathcal{R} são invariantes por U . Desta forma denotamos por A, S, N e \mathcal{R} as respectivas restrições a U .*

Observação 1.1.6. *Observe que A_0 só tem $\pm i$ com autovalores. Segue que U coincide com os autoespaços correspondentes a $\pm i$ de A_0 , isto é, $U = \ker(A_0^2 + I)^2 = \ker(S_0^2 + I)$. Assim, $U = \ker(A^2 + I_U)^2 = \ker(S^2 + I_U)$, com $S\mathcal{R} = -\mathcal{R}S$, $N\mathcal{R} = -\mathcal{R}N$, $\mathcal{R}^2 = I_U$, $\dim U = 4$ e $\dim \text{Fix}(\mathcal{R}) = 2$. Definimos agora $U_1 = \ker(A^2 + I)$*

Lema 1.1.7. *Considere (1.4) com λ próximo de 0. Então, toda solução periódica desta equação com período próximo a 2π é simétrica com respeito a \mathcal{R} .*

Demonstração. Pelo fato de existir uma correspondência entre as soluções de (1.5) e as soluções de equações em \mathfrak{D} e pela equivalência da soluções de x com $\tilde{x}(t) = x((1+\sigma)t)$ numa vizinhança de $(\lambda_0, \sigma_0) = (0, 0)$, é suficiente mostrar que cada órbita- S^1 de soluções de (1.6) intercepta o $\text{Fix}(\mathcal{R})$. Portanto, isto não é verdade somente nas órbitas soluções, mas para qualquer órbita- S^1 em U_1 (onde $U_1 = \ker(N)$). De fato, seja $\bar{u}_1 \in U_1$ um autovetor da restrição de \mathcal{R} a U_1 , correspondendo ao autovalor $\epsilon = \pm i$; então $S\bar{u}_1$ é então um autovetor associado ao autovalor $-\epsilon$. Então a restrição de \mathcal{R} a U_1 tem ambos ± 1 como autovalores, e desde que U_1 seja S -irredutível concluímos que U_1 tem uma base $\{u_0, Su_0\}$ tal que $\mathcal{R}u_1^0 = u_1^0$. Então podemos escrever qualquer $u_1 \in U_1$ na forma

$$u_1 = (\rho \cos \theta) u_1^0 + (\rho \sin \theta) Su_1^0,$$

para algum $\rho \geq 0$ e algum $\theta \in S^1$; isto segue que $e^{-\theta S} u_1 = \rho u_1^0$, isto é, a órbita- S^1 em u_1 intercepta o $\text{Fix}(\mathcal{R})$. \square

Recordamos que uma solução periódica de (1.4) é \mathcal{R} -simétrica se e só se, intercepta o $\text{Fix}(\mathcal{R})$ em exatamente dois pontos.

Portanto, obtemos todas as pequenas soluções periódicas de (1.4) através das soluções da equação:

$$G(u, \lambda, \sigma) = 0 \text{ com } G(u, \lambda, \sigma) = B(u, \lambda, \sigma) |_{u \in \text{Fix}(\mathcal{R})}. \quad (1.7)$$

Observação 1.1.8. Tomando $\phi = \pi$ em (1) do Lema(1.1.4) segue que existe uma simetria- \mathbb{Z}_2 para B . Assim $B(-u, \lambda, \sigma) = -B(u, \lambda, \sigma)$ e conseqüentemente $G(-u, \lambda, \sigma) = -G(u, \lambda, \sigma)$.

Existem diversas caracterizações do conceito de uma forma normal. Nesta seção veremos uma delas. Convém ressaltar que na próxima seção estaremos usando outra caracterização.

Consideramos a equação

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^k, \quad n = 2m, \quad (1.8)$$

com λ numa vizinhança de 0 e suponha que para todo λ a origem é um ponto fixo, isto é, $f_\lambda(0) = 0$ (com $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$).

Seja $A_\lambda := Df_\lambda(0)$.

Dada uma função $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ seja $T_m g$ seu polinômio de Taylor de grau m em $x = 0$ e seja $\tilde{T}_m g$ a sua parte homogênea de grau m em $T_m g$, explicitamente definido por

$$T_m g := \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!} D^l g(0) \cdot \mathbf{x}^{(l)}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$\tilde{T}_m g := \frac{1}{m!} D^m g(0) \cdot \mathbf{x}^{(m)}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

onde $\mathbf{x}^{(l)}$ denota a l -úpla $(\overbrace{x, \dots, x}^l)$.

Definição 1.1.9. Dizemos que o campo de vetores f_λ está na forma normal (com respeito a A_0) sob a ordem m ($m \geq 2$) se

$$T_m f_\lambda \circ \exp(tA_0^T) = \exp(tA_0^T) \circ T_m f_\lambda, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

onde a adjunta A_0^T de A_0 é dada com respeito ao produto interno usual em \mathbb{R}^n .

Podemos escrever a equação (1.7) explicitamente, onde (1.4) está na forma normal. Admitimos que (1.4) está na forma normal com respeito a A_0 acima para uma certa ordem m . Esta não é uma restrição desde que pelo Teorema de Formas Normais (veja [8]) podemos sempre encontrar uma transformação $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ que leva (1.4) na sua forma normal. Note que isso implica que a E.D.O. está na forma normal com respeito a S_0 e N_0 .

Assim, seja $f(x, \lambda) = A_\lambda x + \tilde{f}(x, \lambda) + r(x, \lambda)$, onde $T_m \tilde{f}_\lambda \circ \exp(tA_0^T) = \exp(tA_0^T) \circ T_m \tilde{f}_\lambda$ e $r(x, \lambda) = O(\|x\|^{m+1})$ uniformemente em λ . Portanto, temos:

Teorema 1.1.10. .

1. $x^*(u, \lambda, \sigma) = \exp(tS_0)u + O(\|u\|^{m+1})$,
2. $B(u, \lambda, \sigma) = (1 + \sigma)Su - A_\lambda u - f(u, \lambda) + O(\|u\|^{m+1})$ uniformemente para (λ, σ) numa vizinhança de $(0, 0)$.

Demonstração. É suficiente provar (1) pois a segunda parte segue imediatamente da definição de B . Então consideremos a restrição de F a \mathfrak{D} 'visto como uma aplicação de u

$$\mathcal{F}(u, \lambda, \sigma) = \hat{F}(\exp(tS_0)u, 0, \lambda, \sigma).$$

Desde de que $\dot{q} = S_0 q; \forall q \in \mathfrak{D}$, e que A_λ, \tilde{f} comutam com $\exp(S_0)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u, \lambda, \sigma) &= (1 + \sigma)(\exp(tS_0))'u - f(\exp(tS_0)u, \lambda) \\ &= \exp(tS_0) \left((1 + \sigma)S_0 u - A_\lambda - \tilde{f}(u, \lambda) \right) - r(\exp(tS_0)u, \lambda) \end{aligned}$$

o qual para $\tilde{\mathcal{F}}(u, \lambda, \sigma) := (I - Q)\mathcal{F}(u, \lambda, \sigma)$ implica que $D_1^j \tilde{\mathcal{F}}(0, \lambda, \sigma) = 0$ para $0 \leq j \leq m$ para todo (λ, σ) . Temos

$$(I - Q)\hat{F}(\exp(tS_0)u, x^*(\exp(tS_0)u, \lambda, \sigma), \lambda, \sigma) \equiv 0.$$

Diferenciando esta identidade em $u = 0$ obtemos $D_1^j x^*(\exp(tS_0)u, \lambda, \sigma) = 0$ para $0 \leq j \leq m$ para todo (λ, σ) numa vizinhança de $(0, 0)$. Desta forma,

$$x^*(\exp(tS_0)u, \lambda, \sigma) = O(\|u\|^{m+1}) \tag{1.10}$$

segue da definição de $x^*(u, \lambda, \sigma)$. □

Exemplo 1.1.11. Considere o campo de vetores em $\mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

satisfazendo a hipótese da reversibilidade como em (1.4), com parte linear

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

e seja

$$R : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_1, x_2, x_3, -x_4). \quad (1.13)$$

Assim a forma normal associada ao campo (1.11) é dada por

$$\dot{x} = A_\lambda x + \tilde{f}(x, \lambda) + O(|x|^5) \quad (1.14)$$

com

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

e

$$\tilde{f}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(x, \lambda) \\ \tilde{f}_2(x, \lambda) \\ \tilde{f}_3(x, \lambda) \\ \tilde{f}_4(x, \lambda) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x, \lambda) &= a_1(\lambda)x_1^2x_3 + 2a_2(\lambda)x_1x_3x_4 - 2a_2(\lambda)x_2x_3^2 - a_1(\lambda)x_3^3, \\ \tilde{f}_2(x, \lambda) &= b_1(\lambda)x_1^3 + (2b_2(\lambda) - a_1(\lambda))x_1^2x_4 - 2b_2(\lambda)x_1x_2x_3 + b_1(\lambda)x_1x_3^2 \\ &\quad + 2a_2(\lambda)x_1x_4^2 - 2a_2(\lambda)x_2x_3x_4 - a_1(\lambda)x_3^2x_4, \\ \tilde{f}_3(x, \lambda) &= a_1(\lambda)x_1^3 - 2a_2(\lambda)x_1^2x_4 + 2a_2(\lambda)x_3^2x_4, \\ \tilde{f}_4(x, \lambda) &= a_1(\lambda)x_1^2x_2 + b_1(\lambda)x_1^2x_3 - 2a_2(\lambda)x_1x_2x_4 + 2b_2(\lambda)x_1x_3x_4 \\ &\quad + 2a_2(\lambda)x_2^2x_3 + (a_1(\lambda) - 2b_2(\lambda))x_2x_3^2 + b_1(\lambda)x_3^3 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Os coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2 dependem diferencialmente de λ . Assim aplicando o teorema(1.1.10) em $x_1 = x_4 = 0$ temos

$$G(\mu, \lambda, \sigma) = G(x_2, x_3, \lambda, \sigma).$$

com $\beta = -x_2, \alpha = x_3$, a equação da bifurcação torna-se

$$0 = \sigma\alpha - \beta - a_1(\lambda)\alpha^3 + 2a_2(\lambda)\alpha^2\beta + O(|(\alpha, \beta)|^5), \quad (1.18)$$

$$0 = \sigma\beta + \lambda\alpha - a_1(\lambda)\alpha^2\beta + 2a_2(\lambda)\alpha\beta^2 + b_1(\lambda)\alpha^3 + 2b_2(\lambda)\alpha^2\beta + O(|(\alpha, \beta)|^5). \quad (1.19)$$

Da equação (1.18) temos que $\beta = \sigma\alpha + O(|(\alpha, \sigma)|^3)$. Substituindo em (1.19) temos

$$0 = b_1(\lambda)\alpha^3 + \sigma^3\alpha + \lambda\alpha + O(|(\alpha, \sigma)|^4) \quad (1.20)$$

de forma que ou $\alpha = 0$ ou $\lambda = -\sigma^2 - b_1(\lambda)\alpha^2 + O(|(\alpha, \sigma)|^3)$. Assim o diagrama da bifurcação de (1.14) usando σ e α podem ser facilmente descrito. Note ainda que a solução $\alpha = \sigma = 0$ corresponde ao ponto fixo $x = 0$.

Desde que b_1 depende diferencialmente de λ segue que se $b_1(0) \neq 0$ então $b_1(\lambda) \neq 0$ para $|\lambda|$ pequeno. Portanto, a forma quadrática em (1.20) é não degenerada e determina o comportamento qualitativo das soluções em torno da origem (o sinal de $b_1(0)$ determina qual bifurcação ocorre).

1.2 Formas Normais

A grosso modo o método de determinação de formas normais consiste em estabelecer mudanças de coordenadas formais de tal maneira que o sistema dinâmico toma uma forma “mais simples” que o original. Desta forma a sua manipulação torna-se mais fácil.

1.2.1 Forma Normal para campos de vetores

A mudança de coordenadas

$$x = Ty$$

transforma a equação diferencial

$$\dot{x} = Ax$$

em

$$\dot{y} = (T^{-1}AT)y,$$

onde $x, y \in \mathbb{R}^n$, A e T são matrizes $n \times n$, e T é não degenerada. Desta forma sem mudar a estrutura topológica das órbitas, podemos considerar o caso em que A está na forma canônica de Jordan.

Fixe um campo de vetores sobre \mathbb{C}^n expressado pela seguinte equação diferencial ordinária.

$$\dot{x} = Ax + o(x), \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad (1.21)$$

onde $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, a matriz $n \times n$ com entradas complexas, e $o(x) = O(|x|^2)$ quando $|x| \rightarrow 0$.

O nosso objetivo é realizar, através da *Teoria de Formas Normais*, uma investigação local de X em torno da origem.

Considere ainda uma transformação de classe C^r sobre uma vizinhança Ω da origem:

$$x = \xi(y), \quad y \in \Omega, \quad (1.22)$$

onde $\xi(0) = 0$. Substituindo (1.22) em (1.21), temos:

$$\dot{y} = \xi_y^{-1}(y)A\xi(y) + y = \xi_y^{-1}(y)o(\xi(y)), \quad y \in \Omega, \quad (1.23)$$

onde $\xi_y(y)$ denota a função derivada de $\xi(y)$ com respeito a y e $\xi_y^{-1}(y)$ é a inversa de $\xi_y(y)$ em Ω . Note que a parte linear de (1.23) é $\xi_y^{-1}(0)A\xi(0)y$. Assim, se A está na forma canônica, podemos admitir que o difeomorfismo $\xi(y)$ em (1.22) toma a forma

$$\xi(y) = y + O(|x|^2), \quad \text{quando } y \rightarrow 0. \quad (1.24)$$

Assim, podemos escrever (1.23) como

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad y \in \Omega, \quad (1.25)$$

onde $g(y) = O(|y|^2)$ quando $|y| \rightarrow 0$.

Nosso objetivo é determinar uma mudança de coordenadas do tipo de (1.22) tal que a equação (1.25) adquira uma forma mais simples. A simplificação desejada de (1.21) será obtida, por uma sequência de mudanças de coordenadas da forma

$$\xi(y) = y + \xi^k(y), \quad y \in \Omega_k, \quad (1.26)$$

onde $\xi^k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é um polinômio homogêneo de ordem $k \geq 2$ e Ω_k é uma vizinhança da origem em \mathbb{C}^n . Note que qualquer aplicação da forma (1.26) é um difeomorfismo em alguma vizinhança da origem. Para ver como g pode ser simplificado, escrevemos $o(x)$ como uma série de potências

$$o(x) = o^2(x) + o^3(x) + \dots, \quad (1.27)$$

onde $o^k(x)$ denota os termos homogêneos de ordem k da série e para cada $k \geq 2$, $o^k \in H_n^k$, o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de ordem k em \mathbb{C}^n . De (1.26) temos

$$\xi_y(y) = I + \xi_y^k(y), \quad (1.28)$$

e então

$$(\xi_y(y))^{-1} = I - \xi_y^k(y) + O(|y|^{2k-2}), \quad y \in \Omega_k, \quad (1.29)$$

onde Ω_k é uma vizinhança pequena da origem em \mathbb{C}^n . Substituindo (1.26) e (1.29) em (1.23) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{y} = & Ay + o^2(x) + \cdots + o^{k-1}(y) + \\ & + \{o^k(y) - [\xi_y^k(y)Ay - A\xi^k(y)]\} + O(|y|^{k+1}), \quad y \in \Omega_k. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Para simplificar o termo $o^k(x)$ temos que escolher um $\xi^k(y)$ apropriado diante da transformação (1.26). Para ver a dependência de ξ^k em o^k (1.2.1) sugerimos introduzir para cada $k \geq 2$ um operador linear $L_A^k : H_n^k \rightarrow H_n^k$ definido por

$$(L_A^k \xi^k)(y) = \xi_y^k(y)Ay - A\xi^k(y), \quad \xi^k \in H_n^k. \quad (1.31)$$

Então (1.2.1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{y} = & Ay + o^2(x) + \cdots + o^{k-1}(y) + \\ & + (o^k(y) - L_A^k \xi^k(y)) + O(|y|^{k+1}), \quad y \in \Omega_k. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Sejam \mathfrak{R}^k as imagens de L_A^k em H_n^k e \mathfrak{U}^k o subespaço complementar a \mathfrak{R}^k em H_n^k .

Assim temos

$$H_n^k = \mathfrak{R}^k \oplus \mathfrak{U}^k, \quad k \geq 2. \quad (1.33)$$

Vejam agora o seguinte teorema.

Teorema 1.2.1. *Seja $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ um campo de vetores em \mathcal{C}_n^∞ com $X(0) = 0$ e $DX(0) = A$. Seja (1.33) a decomposição de H_n^k dada por $k = 2, \dots, r$. Então existe uma sequência de transformações tangentes a identidade $x = y + \xi^k(y)$, $y \in \Omega_k$, onde $\xi^k \in H_n^k$ e Ω_k é uma vizinhança da origem, $\Omega_{k+1} \subseteq \Omega_k$, $k = 2, \dots, r$, e tal que a equação (1.21) é transformada em*

$$\dot{y} = Ay + g_2(y) + \cdots + g_r(y) + O(|y|^{r+1}), \quad y \in \Omega_k, \quad (1.34)$$

onde $g_k \in \mathfrak{U}^k$ para $k = 2, \dots, r$.

Demonstração. Seja $X(x) = Ax + o^2(x) + \cdots + o^r(x) + O(|x|^{r+1})$, quando $x \rightarrow 0$. Para $k = 2$, (1.32) torna-se

$$\dot{y} = Ay + (o^2(y) - L_A^2 \xi^2(y)) + O(|y|^3), \quad y \in \Omega_2, \quad (1.35)$$

onde Ω_2 é tão pequeno que $I + \xi_y^2(y)$ é inversível. Desta forma para cada $o^2 \in H_n^2$ existe $f_2 \in \mathfrak{R}^2$ e $g_2 \in \mathfrak{U}^2$ tal que $o^2 = f_2 + g_2$, daí podemos encontrar um $\xi^2 \in H_n^2$ com $L_A^2 \xi^2 = f_2$, e então (1.35) torna-se

$$\dot{y} = Ay + g_2(y) + O(|y|^3), \quad y \in \Omega_2.$$

Agora seguiremos com o processo de indução. Admita que o Teorema(1.2.1) é verdadeiro para $2 \leq k \leq s-1 \leq r$. Por uma mudança de variáveis, podemos admitir que (1.21) torna-se

$$x = Ax + g_2(x) + \cdots + g_{s-1}(x) + o^s(x) + O(|x|^{s+1}), \quad x \in \Omega_{s-1},$$

onde $g_k \in \mathfrak{U}^k$ para $k = 2, \dots, s-1$, $o^s \in H_n^s$, e Ω_{s-1} é uma vizinhança da origem. Seja $x = y + \xi^s(y)$, $y \in \Omega_s$, onde $\xi^s \in H_n^s$ é escolhido de acordo com (1.33) de forma que $o^s = L_A^s \xi^s + g_s$, $g_s \in \mathfrak{U}^s$, e $\Omega_s \subseteq \Omega_{s-1}$ é uma vizinhança da origem na qual $y + \xi^s(y)$ é inversível. Assim, de (1.32) com $k = s$ obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + g_2(y) + \cdots + g_{s-1}(y) + (o^s(y) - L_A^s \xi^s(y)) + O(|y|^{s+1}) \\ &= Ay + g_2(y) + \cdots + g_{s-1}(y) + g_s(y) + O(|y|^{s+1}), \quad y \in \Omega_s. \end{aligned}$$

□

Definição 1.2.2. *Suponha que a decomposição (1.33) é dada. A seguinte aproximação da equação (1.34)*

$$\dot{y} = Ay + g_2(y) + \cdots + g_r(y) \tag{1.36}$$

onde $g_k \in \mathfrak{U}^k$, $k = 2, \dots, r$, é dita uma forma normal da equação (1.21) de ordem r com respeito a A .

Notamos que a forma normal não é única para uma matriz A fixada. Isto depende da escolha do subespaço complementar \mathfrak{U}^k ($k = 2, \dots, r$).

Observação 1.2.3. *Seja $K = \{k \in \mathbb{N}; \mathfrak{U}^k \neq \emptyset\}$. Suponha que $\dim \mathfrak{U}^k = n_k \geq 1$ e $\{v_1^k, \dots, v_{n_k}^k\}$ é uma base de \mathfrak{U}^k para $k \in K$. Então (1.36) pode ser escrito como*

$$\dot{y} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \in K}}^r \sum_{j=1}^{n_k} a_{kj} v_j^k, \tag{1.37}$$

onde $a_{kj} \in \mathbb{C}$ para todo $j = 1, \dots, n_k$, $k = 2, \dots, r$. Então uma forma normal de (1.21) de ordem r é da forma (1.37). Geralmente não é fácil determinar os coeficientes de (1.37) para uma equação particular (1.21) e não é fácil encontrar a transformação cuja (1.21) leva em (1.37). A equação (1.37) com coeficientes arbitrários é dita uma forma geral da forma normal de ordem r com respeito a A .

Para a forma normal com respeito a A (fixada) a escolha do subespaço complementar \mathfrak{U}^k ($k = 2, \dots, r$) é determinada somente pela mesma matriz A . Em geral, encontrar os subespaços complementares \mathfrak{U}^k não é uma tarefa simples.

Um monômio $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} e_j$ em H_n^k será denotado por $x^\alpha e_j$, onde α_j são inteiros não negativos, com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ e $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ é o j -ésimo elemento da base canônica de \mathbb{C}^n . Uma base para o espaço vetorial H_n^k , $n \geq 1$, é dada por

$$\{x^\alpha e_j \mid |\alpha| = k, 1 \leq j \leq n\}.$$

A dimensão de H_n^k é

$$\dim H_n^k = n \cdot \binom{n+k-1}{k}.$$

Apresentamos agora métodos para encontrar o subespaço complementar \mathfrak{U}^k para a matriz A .

- O primeiro é o método do operador adjunto. Desde que um produto interno seja introduzido em H_n^k , uma possível escolha de \mathfrak{U}^k (o complemento ortogonal de \mathfrak{R}^k), o qual será caracterizado por $\text{Ker}((L_A^k)^*)$, o núcleo do operador adjunto $(L_A^k)^*$ de L_A^k .
- O segundo é o método de representação matricial. Cada L_A^k é um operador linear de dimensão finita sobre H_n^k . Se \tilde{L}_A^k é a matriz do operador L_A^k com respeito a uma base de H_n^k , então o problema reduz-se a encontrar um subespaço complementar a imagem de \tilde{L}_A^k em \mathbb{C}^{d_k} onde $d_k = \dim H_n^k$.

Sejam $p(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} x^\alpha e_j$ e $q(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} q_{\alpha j} x^\alpha e_j$, onde $p_{\alpha j}$ e $q_{\alpha j}$ são constantes complexas. Definimos o seguinte produto interno em H_n^k .

$$[p, q] = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} \bar{q}_{\alpha j} \alpha!, \quad (1.38)$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$.

Exemplo 1.2.4. *Sejam $|\alpha| = |\beta| = k$ e $1 \leq i, j \leq n$. Então definiremos o seguinte produto interno:*

$$[x^\alpha e_i, x^\beta e_j] = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \alpha!$$

onde δ_{ij} e $\delta_{\alpha\beta}$ são os símbolos de Kronecker.

Teorema 1.2.5. *O operador $L_{A^*}^k$, é o operador adjunto de L_A^k com respeito ao produto interno $[\cdot, \cdot]$ em H_n^k para cada $k \geq 2$, onde A^* é o operador adjunto de A com respeito ao produto interno usual (\cdot, \cdot) em \mathbb{C}^n .*

Demonstração. Sejam $p, q \in H_n^k$, $p(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} x^\alpha e_j$, $q(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} q_{\alpha j} x^\alpha e_j$. Usando a linearização de L_A^k , $L_{A^*}^k$ e propriedades do produto interno, temos

$$\begin{aligned} [L_A^k p, q] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} p_{\alpha j} \bar{q}_{\alpha j} [L_A^k(x^\alpha e_i), x^\beta e_j], \\ [p, L_{A^*}^k q] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} p_{\alpha j} \bar{q}_{\alpha j} [x^\alpha e_i, L_{A^*}^k(x^\beta e_j)]. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente provar que

$$[L_A^k(x^\alpha e_i), x^\beta e_j] = [x^\alpha e_i, L_{A^*}^k(x^\beta e_j)]$$

para qualquer α, β, i, j com $|\alpha| = |\beta| = k$ e $1 \leq i, j \leq n$. Daí

$$\begin{aligned} L_A^k(x^\alpha e_i) &= D(x^\alpha e_i) Ax - A(x^\alpha e_i) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_l a_{lm} \frac{x^\alpha x_l}{x_m} e_i - \sum_{l=1}^n a_{li} x^\alpha e_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{A^*}^k(x^\beta e_j) &= D(x^\beta e_j) A^* x - A^*(x^\beta e_j) \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_m \bar{a}_{lm} \frac{x^\beta x_l}{x_m} e_j - \sum_{l=1}^n \bar{a}_{jm} x^\beta e_m, \end{aligned}$$

onde D é a diferencial do operador. Desta forma

$$[L_A^k(x^\alpha e_i), x^\beta e_j] = \begin{cases} (\sum_{l=1}^n \alpha_l a_{ll} - a_{ii}) \alpha!, & \text{se } i = j \text{ e } \alpha = \beta, \\ \alpha_l a_{lm} \beta!, & \text{se } i = j; \beta_l = \alpha_l - 1, \\ & \beta_m = \alpha_m + 1 \text{ para qualquer } l \neq m; \\ -a_{ji} \alpha! & \text{se } i \neq j \text{ com } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$[x^\alpha e_i, L_{A^*}^k(x^\beta e_j)] = \begin{cases} (\sum_{l=1}^n \beta_l a_{ll} - a_{ii}) \beta!, & \text{se } i = j \text{ e } \beta = \alpha, \\ \beta_m a_{lm} \alpha!, & \text{se } i = j; \alpha_l = \beta_l + 1, \\ & \alpha_m = \beta_m - 1 \text{ para qualquer } s \neq l, m; \\ -a_{ji} \alpha! & \text{se } i \neq j \text{ com } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As suas expressões acima são iguais. □

Corolário 1.2.6. $\text{Ker}(L_{A^*}^k)$ é o subespaço complementar ortogonal a \mathfrak{R}^k com respeito ao produto interno $[\cdot, \cdot]$ em H_n^k para cada $k \geq 2$.

Observação 1.2.7. Se definirmos $L_A : C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ por

$$(L_A \xi)(x) = \xi_x(x) Ax - A\xi(x),$$

então $L_A^k = L_A|_{H_n^k}$, $L_{A^*}^k = L_{A^*}|_{H_n^k}$. Assim um polinômio de grau r , $g(x) = g^2(x) + \dots + g^r(x)$, onde $g^k \in H_n^k$, $k = 2, \dots, r$, pertence a $\text{Ker}(L_{A^*})$, se e somente se $g^k \in \text{Ker}(L_{A^*}^k)$, $k = 2, \dots, r$. Desta maneira para encontrar a forma normal, é suficiente resolver a equação diferencial $L_{A^*}\xi = 0$ para polinômios de ordem r não constantes e termos lineares.

Exemplo 1.2.8. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \xi(x) = \begin{pmatrix} \xi_1(x_1, x_2) \\ \xi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

onde $\xi_1(x_1, x_2)$ e $\xi_2(x_1, x_2)$ são polinômios escalares de grau $r \geq 2$. Então

$$\begin{aligned} L_{A^*}\xi(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(x_1, x_2) \\ \xi_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ x_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \xi_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos ver que o polinômio solução de grau r (sem as constantes e os termos de primeira ordem) da equação $L_{A^*}\xi(x) = 0$, expressada por

$$\begin{cases} x_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0, \\ x_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \xi_1 = 0, \end{cases}$$

são

$$\xi_1(x_1, x_2) = x_1^2 \phi_1(x_1), \quad \xi_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \phi_2(x_1) + x_1^2 \phi_1(x_1),$$

onde $\phi_1(x_1)$ e $\phi_2(x_1)$ são polinômios escalares arbitrários de grau $r - 2$. Desta forma a forma normal de ordem r é

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \phi_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \phi_2(x_1) + x_1^2 \phi_1(x_1). \end{cases}$$

Uma forma normal de ordem 2 é

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + b x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a x_1 x_2 + b x_1^2, \end{cases}$$

onde a, b são constantes complexas. Podemos escolher o subespaço gerado por $\{x_1^2 e_2, x_1 x_2 e_2\}$ como um subespaço complementar de \mathfrak{R}^2 . De fato, se $v_1 = x_1^2 e_2$, $v_2 = x_1 x_2 e_2$, $w_1 = \frac{1}{2} x_1^2 e_2$, e $w_2 = x_1 x_2 e_2$, então $\{v_1, v_2\}$ é uma base do $\text{Ker}(L_{A^*}^2)$ e vemos que $[v_i, w_j] = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, 2$. Consequêntemente o subespaço gerado por $\{w_1, w_2\}$ é outro subespaço complementar de \mathfrak{R}^2 . Assim uma forma normal diferente de ordem 2 é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1^2 + bx_1 x_2, \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Um método diferente de encontrar a forma normal é usar a matriz de representação do operador linear L_A^k com respeito a base dada de H_n^k . Primeiro, damos uma ordenação aos elementos da base de H_n^k , $\{x^\alpha e_j \mid |\alpha| = k, 1 \leq j \leq n\}$. Isto pode ser feito por uma ordenação *lexográfica reversa*,

$$x^\alpha e_i < x^\beta e_j, \text{ se e somente se } (i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) > (j, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

onde $(i, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) > (j, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ se e somente se $i > j$ ou $i = j$ e o primeiro componente de desigualdade, $\alpha_s \neq \beta_s$, satisfazendo $\alpha_s > \beta_s$, $1 \leq s \leq n$. Escrevemos $i \sim (j, \alpha)$ se $x^\alpha e_j$ é o i -ésimo elemento da base com respeito a ordenação *lexográfica reversa*.

Seja $d_k = \dim H_n^k$ e $U_k = \{u_1, \dots, u_{d_k}\}$ uma base ortogonal de H_n^k . Usaremos a base U_k da forma

$$u_i(x) = x^\alpha e_j, \quad |\alpha| = k, \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde $i \sim (j, \alpha)$ está na ordem *lexográfica reversa* para $i = 1, \dots, d_k$. Denotamos por \tilde{L}_A^k a representação matricial de L_A^k com respeito a base U_k de H_n^k . Então \tilde{L}_A^k é uma matriz $d_k \times d_k$ a qual pode ser vista como um operador em \mathbb{C}^{d_k} . Seja $\tilde{\mathfrak{R}}^k$ é a imagem de \tilde{L}_A^k em \mathbb{C}^{d_k} e $\tilde{\mathfrak{U}}^k$ qualquer subespaço complementar, onde $\mathbb{C}^{d_k} = \tilde{\mathfrak{R}}^k \oplus \tilde{\mathfrak{U}}^k$. Se definimos

$$\begin{cases} \mathfrak{R}^k = \left\{ \xi^k = \sum_{i=1}^{d_k} a_i u_i \in H_n^k \mid (a_1, \dots, a_{d_k}) \in \tilde{\mathfrak{R}}^k \right\}, \\ \mathfrak{U}^k = \left\{ \xi^k = \sum_{i=1}^{d_k} a_i u_i \in H_n^k \mid (a_1, \dots, a_{d_k}) \in \tilde{\mathfrak{U}}^k \right\}, \end{cases} \quad (1.39)$$

então \mathfrak{R}^k é a imagem de L_A^k em H_n^k e \mathfrak{U}^k é um subespaço complementar a \mathfrak{R}^k em H_n^k . Deste modo, encontrar um subespaço complementar \mathfrak{U}^k a \mathfrak{R}^k é equivalente por (1.39) a encontrar um subespaço complementar $\tilde{\mathfrak{U}}^k$ a $\tilde{\mathfrak{R}}^k$ em \mathbb{C}^{d_k} . De modo que um subespaço complementar é dado por $\tilde{\mathfrak{U}}^k = \text{Ker} \left(\left(\tilde{L}_A^k \right)^* \right)$, o qual é subespaço complementar ortogonal de $\tilde{\mathfrak{R}}^k$ em \mathbb{C}^{d_k} com respeito ao produto interno (\cdot, \cdot) em \mathbb{C}^{d_k} . Um outro subespaço complementar a \mathfrak{U}^k pode ser obtido de $\text{Ker} \left(\left(\tilde{L}_A^k \right)^* \right)$ usando álgebra linear elementar.

Observação 1.2.9. Temos que a dimensão da matriz \tilde{L}_A^k é

$$d_k \times d_k = n \cdot \binom{n+k-1}{n-1} \times n \cdot \binom{n+k-1}{n-1},$$

para calcular a matriz \tilde{L}_A^k e encontrar a base do subespaço complementar $\tilde{\mathfrak{U}}^k$ torna-se genericamente mais difícil. Portanto, a matriz \tilde{L}_A^k depende somente da matriz A e de k , e isso envolve somente o cálculo dos coeficientes da base de H_n^k na expressão:

$$L_A^k(x^\alpha e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i} a_{il} x_l \right) x^\alpha e_j - \sum_{i=1}^n a_{ij} x^\alpha e_i. \quad (1.40)$$

Uma vez que a matriz \tilde{L}_A^k é conhecida, encontrar a base do $\text{Ker} \left(\left(\tilde{L}_A^k \right)^* \right)$ ou algum outro subespaço complementar $\tilde{\mathfrak{U}}^k$, e conseqüentemente de \mathfrak{U}^k pela identificação (1.39), torna-se um problema algébrico.

Exemplo 1.2.10. Considere a seguinte equação em \mathbb{C}^2 :

$$\dot{x} = Ax + O(|x|^2), \quad x \in \mathbb{C}^2,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para qualquer $k \geq 2$, determinamos um subespaço complementar \mathfrak{U}^k para a imagem \mathfrak{R}^k de L_A^k em H_n^k . Temos que $\dim H_2^k = 2(k+1)$ e a base de H_2^k na ordem lexicográfica reversa é

$$\{u_i(x)\}_{i=1}^{2(k+1)} = \{x_1^k x_2^0 e_2, x_1^{k-1} x_2^1 e_2, \dots, x_1^0 x_2^k e_2, x_1^k x_2^0 e_1, x_1^{k-1} x_2^1 e_1, \dots, x_1^0 x_2^k e_1\},$$

isto é, $u_i(x) = x_1^{k-i+1} x_2^{i-1} e_2$, $u_{k+i+1}(x) = x_1^{k-i+1} x_2^{i-1} e_1$ para $1 \leq i \leq k+1$, onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbb{C}^2 . Para $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in H_2^k$ temos

$$\begin{aligned} L_A^k(\xi) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \xi_2 \\ x_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então aplicando L_A^k aos elementos da nossa base temos

$$\begin{cases} L_A^k u_i = (k-i+1) u_{i+1} - u_{i+k+1}, & 1 \leq i \leq k+1, \\ L_A^k u_{i+k+1} = (k-i+1) u_{k+i+2}, \end{cases}$$

com a convenção $u_{2k+3} = 0$. Temos a seguinte matriz $2(k+1) \times 2(k+1)$ para \tilde{L}_A^k .

$$\tilde{L}_A^k = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & k-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & -1 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right)_{2(k+1) \times 2(k+1)}$$

Seja $\{\tilde{e}_j \mid j = 1, \dots, 2k+2\}$ a base canônica de \mathbb{C}^{2k+2} . Então uma base para o $\text{Ker} \left(\left(\tilde{L}_A^k \right)^* \right)$ é dada por

$$\tilde{v}_1 = \tilde{e}_1, \quad \tilde{v}_2 = \tilde{e}_2 + k\tilde{e}_{k+2}.$$

Podemos escolher também \mathfrak{U}^k como sendo o espaço gerado por $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$, onde $\tilde{w}_1 = \tilde{e}_1$ e $\tilde{w}_2 = \tilde{e}_{k+2}$, como um subespaço complementar de \mathfrak{R}^k em \mathbb{C}^{2k+2} . Pela correspondência entre H_2^k e \mathbb{C}^{2k+2} , temos que \mathfrak{U}^k é igual ao espaço gerado por $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^k \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, e é um subespaço complementar a \mathfrak{R}^k em H_2^k e uma forma normal da equação de ordem r é

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^r \begin{pmatrix} a_k x_1^k \\ b_k x_1^k \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

onde $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 2, \dots, r$. Podemos reescrever (1.41) como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 \phi_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \phi_2(x_1), \end{cases}$$

onde ϕ_1, ϕ_2 são polinômios de grau $r-2$, para $r \geq 2$. Assim podemos escolher $\tilde{\mathfrak{U}}^k$ como sendo o espaço gerado por $\{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$, onde $\tilde{w}_1 = \tilde{e}_1$ e $\tilde{w}_2 = \tilde{e}_2$, como uma base para o subespaço complementar a \mathfrak{R}^k em \mathbb{C}^{2k+2} , correspondendo a forma normal

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^r \begin{pmatrix} 0 \\ a_k x_1^k + b_k x_1^{k-1} x_2 \end{pmatrix},$$

onde $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 2, \dots, r$, ou

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \phi_1(x_1) + x_1 x_2 \phi_2(x_1), \end{cases}$$

onde ϕ_1, ϕ_2 são polinômios de grau $r - 2$, para $r \geq 2$. Em particular,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = ax_1^2 + bx_1 x_2, \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$ é uma forma normal de ordem 2.

Exemplo 1.2.11. Considere o campo de vetores com parte linear

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\dot{x} = Ax + h(x)$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ .

Devemos agora fixar uma base para os monômios para H_2^2 , pois queremos encontrar os termos ressonantes de ordem 2. Sabemos que

$$\dim H_2^2 = 2 \cdot \binom{3}{2} = 6,$$

assim temos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base para H_2^2 . Podemos então calcular a imagem do operador homológico (L_A^2) para cada um dos elementos ($h_i^2(x, y)$) de base de H_2^2 .

$$\text{Im}(L_A^2) = \left\{ \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^2 + y^2 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -xy \\ -x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y^2 \\ -2xy \end{pmatrix} \right\},$$

desta forma temos que a representação matricial do operador L_A^2 será

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e assim temos que o determinante é diferente de zero. Assim teremos que repetir o processo para H_2^3 , pois não existem termos ressonantes de ordem 2. Definimos então uma base para H_2^3

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^3 \end{pmatrix} \right\}$$

e $\dim H_2^3 = 8$. Daí, as imagens do operador homológico (L_A^3) de cada elemento $(h_i^3(x, y))$ de H_2^3 será

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + 2xy^2 \\ x^2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2x^2y + y^3 \\ xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3xy^2 \\ y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 \\ 3x^2y \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -x^2y \\ -x^3 + 2xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -xy^2 \\ -2x^2y + y^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y^3 \\ -3xy^2 \end{pmatrix} \right\},$$

de forma que a matriz do operador será

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tem determinante igual a zero. Assim o $\text{Ker}(L_A^3) \neq 0$, o que implica que teremos termos ressonantes de ordem 3. Agora iremos observar quais são os elementos do $\text{Ker}(L_A^3)$.

$$\text{Ker}(L_A^3) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Assim, voltando a escrever os elementos de $\text{Ker}(L_A^3)$ na base de H_2^3 , temos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3a_1x^3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2xy^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_3x^2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3b_4y^3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} -a_3x^2y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a_4y^3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3b_1x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2xy^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

produzindo a seguinte forma normal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 3a_1x^3 - a_2x^2y + a_3xy^2 - 3a_4y^3 \\ x + 3b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + 3b_4y^3 \end{pmatrix}.$$

Para maiores detalhes a respeito do algoritmo, veja o apêndice(B).

1.2.2 Forma Normal de Poincaré-Birkhoff

Exibiremos aqui uma outra caracterização de formas normais.

Considere o sistema Hamiltoniano dado por

$$\dot{x} = J\nabla H(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2n}, \quad (1.42)$$

onde Ω é uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^{2n} ,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$, $H \in C^r(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, $r \geq 1$, e $\nabla H(x)$ é o gradiente de $H(x)$. Note que $J^T = J^{-1} = -J$, onde J^T é a transposta de J .

A função Hamiltoniana $H(x) = H_2(x) + H_3(x) + \dots + H_r(x) + O(|x|^{r+1})$, $H_k \in P_{2n}^k$, o espaço de todas os polinômios escalares homogêneos de k -ésima ordem nas $2n$ variáveis, $k = 2, \dots, r$.

Definição 1.2.12. Um operador linear $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é dito infinitesimalmente simplético se e somente se

$$A^* = JAJ,$$

onde A^* é operador adjunto de A .

Teorema 1.2.13. *Um sistema linear de equações*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

é Hamiltoniano se e somente se A é um operador infinitesimalmente simplético.

Demonstração. Suponha que o sistema é Hamiltoniano. Então $A = JB$ para alguma matriz simétrica B . Desta forma,

$$A^T = B^T J^T = -BJ = -J^{-1}AJ = JAJ.$$

Assim, supondo $A^T = JAJ$. Definimos $B = J^{-1}A$, então

$$B^T = -A^T J^T = -JAJJ^T = -JA = J^{-1}A = B,$$

daí, B é simétrica. Definimos $H(x) = \frac{1}{2}(x, Bx)$. Então o sistema pode ser reescrito como

$$\dot{x} = J\nabla H(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

□

Definição 1.2.14. *Um operador linear $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é dito operador simplético se e somente se*

$$S^*JS = J,$$

onde S^* é o operador adjunto de S .

Definição 1.2.15. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sob os reais. Uma forma bilinear $\tau(\cdot, \cdot)$ em V é chamado de anti simétrica se*

$$\tau(x, y) = -\tau(y, x), \quad \forall x, y \in V,$$

onde $\tau(\cdot, \cdot)$ é dito não-degenerado se $\tau(x, y) = 0$ para todo $y \in V$ então $x = 0$. Uma forma bilinear "anti simétrica" não-degenerada $\tau(\cdot, \cdot)$ definida em V é chamada de uma forma simplética e (V, τ) é chamado de espaço vetorial simplético. Uma base $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$ de um espaço vetorial simplético é chamado de uma base simplética se

$$\tau(v_i, v_j) = 0, \quad \tau(w_i, w_j) = 0, \quad e \quad \tau(v_i, w_j) = \delta_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n,$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Seja $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ um vetor do espaço vetorial gerado por (V, τ) .

Definição 1.2.16. Uma função Hamiltoniana $H(x)$ é dita uma forma H_2 -normal de ordem $r \geq 3$ se $H(x) = H_2(x) + K_2(x) + \dots + K_r(x)$, onde $H_2(x)$ é uma forma quadrática e $K_j(x) \in C^j$ (classe das funções j -diferenciáveis), $j = 3, \dots, r$.

Definição 1.2.17. Se o Hamiltoniano H é um polinômio de grau r nas variáveis simpléticas $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, que é um polinômio de grau $[r/2]$ na variável $\rho_i = (x_i^2 - y_i^2)/2$, $i = 1, \dots, n$, então H é chamada de forma normal de Poincaré-Birkhoff de grau r .

Definição 1.2.18. Sejam $P_1, P_2 \in C^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$

$$[P_1, P_2] = (J\nabla P_1, \nabla P_2) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial P_2}{\partial x_i} - \frac{\partial P_2}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial P_1}{\partial x_i} \right)$$

é chamado de colchete de Poisson de P_1 e P_2 .

Se H_2 é uma forma quadrática em x_1, \dots, x_{2n} e $F_k \in P_{2n}^k$ com $k \geq 3$ temos que (veja [10] pág. 130)

$$H_2(x) + J\nabla F_k(x) + O(|x|^k) = H_2(x) + [F_k(x), H_2(x)] + O(|x|^{k+1}). \quad (1.43)$$

Para uma forma quadrática $H_2(x)$, definimos um operador $ad_{H_2}^k : P_{2n}^k \rightarrow P_{2n}^k$ por

$$ad_{H_2}^k F(x) = [H_2(x), F(x)], \quad F \in P_{2n}^k,$$

onde

Teorema 1.2.19. Suponha $A = S + N$ é a decomposição de A . Então $ad_A^k = ad_S^k + ad_N^k$ é a decomposição de ad_A^k e $Ker(ad_S^k) \cap Ker(ad_N^k)$ é o subespaço complementar para a imagem de ad_A^k em P_{2n}^k para $k \geq 3$.

O leitor pode encontrar a demonstração em ([10]) na pág. 65.

Exemplo 1.2.20. Suponha $H_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_2 \mp \frac{1}{2} x_2^2$. Então

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $k = 3$, sobre a base x^α , $|\alpha| = 3$ de P_4^3 a qual está na ordem lexicográfica reversa, a representação matricial \widetilde{ad}_A^3 do operador ad_A^3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \pm 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então $\text{Ker}(\widetilde{ad}_A^3)$ é o espaço gerado por $e_{14} \pm \frac{1}{2}e_{19}, 2e_8 + e_{15} \pm e_{20}, e_{17}$. Podemos escolher \widetilde{C}^3 como sendo o espaço gerado por e_{14}, e_{15}, e_{17} que é o subespaço complementar da imagem de \widetilde{ad}_A^3 em \mathbb{R}^{20} .

Então a forma H_2 -normal de ordem 3 é

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_2 \mp \frac{1}{2} x_2^2 + a_1 x_2 y_1^2 + a_2 x_2 y_1 y_2 + a_3 y_1^3,$$

onde a_1, a_2, a_3 são constantes reais.

Capítulo 2

Bifurcações Elementares

Neste capítulo iremos sumarizar seis bifurcações clássicas que serão ilustradas em exemplos na próxima seção.

Seja a E.D.O.

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda),$$

com

$$f(u, \lambda) = 0, \quad f : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathcal{C}^\infty. \quad (2.1)$$

Suponha que (u_0, λ_0) é uma solução de (2.1) e que o Jacobiano, $D_u f(u_0, \lambda_0)$ não tem autovalores zero ou imaginários puros. Neste caso u_0 é chamado de um estado estável *hiperbólico* de (1.2) e existe uma vizinhança de u_0 na qual $f(\cdot, \lambda)$ é estruturalmente estável. O teorema da aplicação implícita garante a existência de um único ramo de soluções suaves de (2.1) $[u(\lambda), \lambda]$ em (u_0, λ_0) . Neste caso os autovalores de $D_u f(u_0, \lambda_0)$ permanecem fora do eixo imaginário para λ próximo de λ_0 .

Uma condição necessária de (1.2) para termos uma bifurcação local em (u_0, λ_0) é que $D_u f(u_0, \lambda_0)$ tenha autovalores com parte real nula. O caso em que os autovalores são imaginários puros produz a bifurcação de Hopf. Consideramos também o caso de autovalores simples nulos. Admitiremos que

$$f(u_0, \lambda_0) = 0, \quad D_u f(u_0, \lambda_0) \varphi = 0, \quad |\varphi| = 1, \quad (2.2)$$

onde φ é autovetor de $D_u f(u_0, \lambda_0)$. Ainda que o teorema da função implícita falhe em garantir um único ramo $[u(\lambda), \lambda]$, pode-se exibir condições sob as quais o comportamento de todas as soluções de (2.1) próximas da origem podem ser detalhado.

Observação 2.0.21. *Iremos usar a seguinte legenda para os diagramas de bifurcação elementares:*

- *estável*
- *instável*
- *órbita periódica instável*
- *órbita periódica estável*
- * *ramos de toros*

2.1 Bifurcação Sela-Nó

Admita (2.2) e

$$a \equiv \psi D_{\lambda} f(u_0, \lambda_0) \neq 0, \quad b \equiv \psi D_{uu} f(u_0, \lambda_0) \varphi \neq 0. \quad (2.3)$$

Então numa vizinhança de (u_0, λ_0) existe um único ramo de soluções (2.1) da forma $[u(z), \lambda(z)]$ para $z \in \mathbb{R}$ pequeno, expressado por

$$u(z) = u_0 + z\varphi + O(z^2), \quad \lambda(z) = \lambda_0 + z^2 \frac{-b}{2a} + O(z^3). \quad (2.4)$$

Veja o diagrama (2.1).

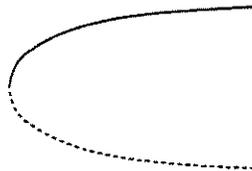


Figura 2.1: Diagrama da bifurcação sela-nó.

Neste caso, (u_0, λ_0) é chamado de um *ponto de giro* (ou ponto limite) da solução de (2.1), e uma *sela-nó* da equação diferencial (1.2). A obtenção de (2.4) dá-se pelo método de Liapunov-Schmidt: que consiste basicamente em projetar (2.1) no autoespaço e na imagem do espaço; noutro caso eles são complementares. Solucionando primeiro na imagem do espaço usando o fato de que $D_u f(u_0, \lambda_0)$ restrito a imagem é inversível. Aqui, como no exemplo seguinte, z é único pela condição de que os termos $O(z^2)$ em $u(z)$ são satisfeitos na imagem do espaço. Isto persiste somente para satisfazer a projeção do autoespaço de (2.1). Mas para $a \neq 0$ em (2.2) garante que existe uma solução para λ , e resulta em (2.4).

Retornando a equação diferencial (1.2), queremos conhecer a estabilidade do estado-estável (2.4). Somente em casos cuja solução é no mínimo assintoticamente estável são mais interessantes. Portanto, se uma das soluções de μ para um dado $\lambda \neq \lambda_0$ em (2.4) é assintoticamente estável, e se $n \geq 2$, o outro é sela. Como $\lambda \rightarrow \lambda_0$ para o lado apropriado, um ponto de sela instável e um nó estável (ou foco) une e desaparece. Daí o nome *sela-nó*.

Este é o exemplo de bifurcação num autovalor nulo o qual é genérico para a definição dada na seção (1).

Exemplo 2.1.1. *Considere o campo de vetores*

$$\dot{x} = f(x, \lambda) = \lambda - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

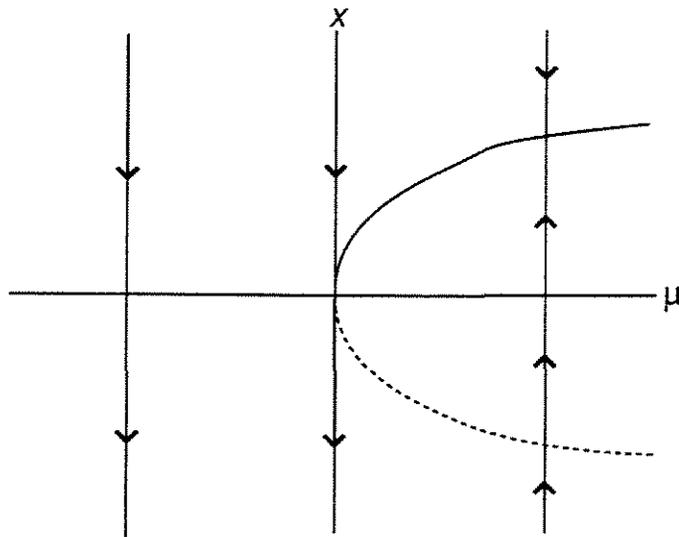
Temos que $f(0, 0) = 0$ e que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Os pontos fixos de (2.5) são dados por

$$\lambda - x^2 = 0$$

ou

$$\lambda = x^2.$$

Isto representa uma parábola no plano (x, λ) .



Exemplo 2.1.2. *Exibiremos a seguir um exemplo de bifurcação sela-nó* no \mathbb{R}^2 . Seja X_0 um campo de vetores em \mathbb{R}^2 com uma singularidade sela-nó. Então temos que $\det DX_0(0) = 0$*

*Neste caso o desdobramento não é versal.

e X_0 tem forma normal

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\lambda - a_1 y) \\ b_1 y^2 \end{pmatrix} + O(|\mathbf{x}|^3) \quad (2.6)$$

que também admite

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x\lambda + y^2 \end{pmatrix} + O(|\mathbf{x}|^3)$$

como forma normal, onde $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, com $\lambda = \text{tr}DX_0(0)$ e b_1 são não nulos. Temos ainda que os autovetores de (2.6), desconsiderando os termos de ordem maior ou igual a 3,

são $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2b_1 y + \lambda - a_1 y}{a_1 x} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, correspondente a $2b_1 y$ e $\lambda - a_1 y$ respectivamente, numa vizin-

hança da origem. Além disso, os autovetores adjuntos de (2.6), são $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$ e $\begin{pmatrix} \frac{-2b_1 y + \lambda - a_1 y}{a_1 x} \\ 1 \end{pmatrix}^T$ relativos a $\lambda - a_1 y$ e $2b_1 y$, com λ próximo de 0. Assim temos que

$$a = (0, 1) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } a = \left(\frac{-2b_1 y + \lambda - a_1 y}{a_1 x}, 1 \right) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$b = \left(\frac{-2b_1 y + \lambda - a_1 y}{a_1 x}, 1 \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2b_1 y + \lambda - a_1 y}{a_1 x} \end{pmatrix}$$

ou

$$b = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mas como a e b têm que ser diferentes de zero, temos

$$a = \left(\frac{-2b_1 y + \lambda - a_1 y}{a_1 x}, 1 \right) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$b = \left(\frac{-2b_1 y + \lambda - a_1 y}{a_1 x}, 1 \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2b_1 y + \lambda - a_1 y}{a_1 x} \end{pmatrix}.$$

2.2 Bifurcação Transcrítica

Suponha que (2.1) tem uma “solução trivial” $[u(\lambda), \lambda]$ para todo $\lambda \in I_0$. Isto é,

$$f(0, \lambda) = 0 \text{ para todo } \lambda \in I. \quad (2.7)$$

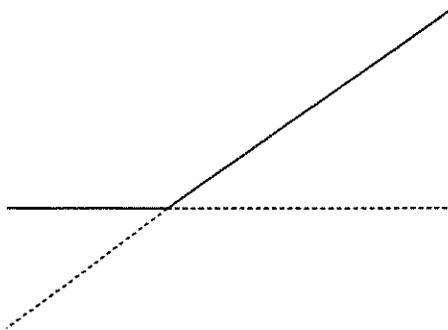


Figura 2.2: Transcrítica

Vamos considerar a classe \mathcal{C}^∞ dos campos de vetores definidas no capítulo(1) satisfazendo a condição (2.7). Isto exclui (2.3) visto que $D_\lambda f(0, \lambda) = 0$.

Admita em (2.2), (2.7) e

$$c \equiv \psi D_{u\lambda} f(0, \lambda_0) \varphi \neq 0, \quad b \equiv \psi D_{uu} f(0, \lambda_0) \varphi \varphi \neq 0. \quad (2.8)$$

Então existe um único ramo suave de soluções não triviais $[u(z), \lambda(z)]$ para todo $z \in \mathbb{R}$ da forma

$$u = z\varphi + O(z^2), \quad \lambda = \lambda_0 + z \frac{-b}{2c} + O(z^2). \quad (2.9)$$

Observe que (2.9) é obtido pelo método de Liapunov-Schmidt; o diagrama de bifurcação típico é mostrado na figura seguinte.

Exemplo 2.2.1. *Considere o campo de vetores*

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Observamos que

$$f(0, 0) = 0 \quad (2.11)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0. \quad (2.12)$$

Além disso, os pontos fixos de (2.10) são dados por

$$x = 0, \quad x = \mu \quad (2.13)$$

como mostra a figura(2.3). Consequentemente, para $\mu < 0$, existem dois pontos fixos; $x = 0$ (estável) e $x = \mu$ (instável). Estes dois pontos unem-se em $\mu = 0$ e, para $\mu > 0$, $x = 0$ (instável) e $x = \mu$ (estável). Desta forma, ocorre uma mudança da estabilidade da singularidade em $\mu = 0$.

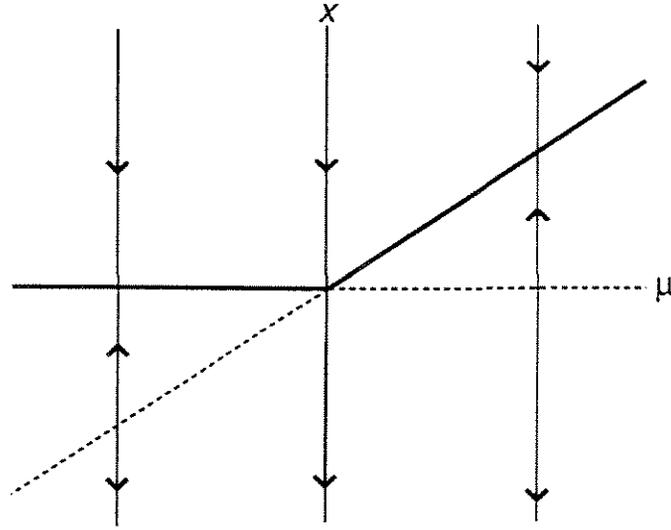


Figura 2.3: transcítica

2.3 Bifurcação Tipo Pitchfork

Considere agora a classe de campos de vetores \mathcal{C}_S^∞ , $f \in \mathcal{C}^\infty$ satisfazendo a condição de simetria

$$Sf(u, \lambda) = f(Su, \lambda), \quad S\varphi = -\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

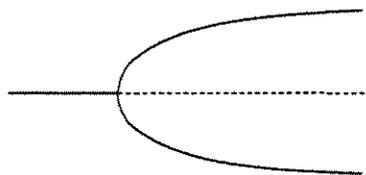
onde S é um operador linear em \mathbb{R}^n . Esta é uma generalização no caso de f ser uma função ímpar em u ; por exemplo $S = -I$. Sob (2.14) segue que ambos, a e b em (2.4) são nulos. Vamos supor (2.2), (2.14) e

$$c \equiv \psi D_{u\lambda} f(u_0, \lambda_0) \varphi \neq 0, \quad d \equiv \psi D_{uuu} f(u_0, \lambda_0) \varphi \varphi \neq 0. \quad (2.15)$$

Concluimos então que existem exatamente dois ramos suaves de soluções $[u(z), \lambda(z)]$ próximo de (u_0, λ_0) . Um destes é “trivial” (u_0, λ_0) e pode ser transformada em (2.7), o outro é da forma

$$u(z) = z\varphi + O(z^2), \quad \lambda(z) = \lambda_0 + z^2 \frac{-d}{6c} + O(z^4), \quad (2.16)$$

e $\lambda = \lambda(z)$. Veja abaixo o diagrama típico da bifurcação na figura (2.3).



Bifurcação pitchfork.

Exemplo 2.3.1. Considere o campo de vetores

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Podemos ver que

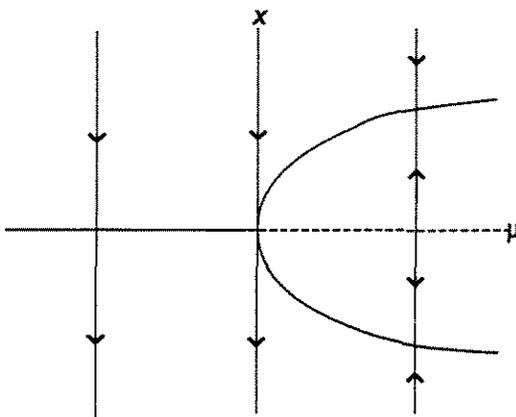
$$f(0, 0) = 0 \quad (2.18)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0. \quad (2.19)$$

Além disso, todos os pontos fixos de (2.17) são dados por

$$\mu = 0 \text{ e } \mu = x^3 \quad (2.20)$$



e são exibidos na figura(2.3). Para $\mu < 0$, existe apenas um ponto fixo, $x = 0$ estável. Para $\mu > 0$, $x = 0$, temos ainda um ponto fixo, mas a partir deste surge em $\mu = 0$ dois pontos fixos estáveis e são dados por $x^2 = \mu$. Neste caso $x = 0$ é instável para $\mu > 0$, com outros dois pontos fixos estáveis. Este tipo de bifurcação é chamado de "pitchfork".

2.4 Bifurcação de Hopf

Agora suponha que $D_{u\lambda}f(u_0, \lambda_0)$ é invertível mas tem um par de autovalores imaginários puros $\pm i$, com autovetores complexos correspondentes $\varphi, \bar{\varphi}$ (a barra denota o complexo conjugado de φ) e autovetores adjuntos $\psi, \bar{\psi}$. A ausência do autovalor zero nos dá, pelo teorema da aplicação implícita, um único ramo de soluções estacionárias $[u(\lambda), \lambda]$, $\lambda \in I$, o qual sem perda de generalidade suponhamos que é a solução trivial (2.7). Admita (2.2), (2.7) e

$$c \equiv \psi D_{u\lambda}f(u_0, \lambda_0) \varphi \neq 0 \quad (2.21)$$

Então existe sobre uma vizinhança de $(0, \lambda_0)$, (em (2.15)) uma família diferenciável de soluções periódicas $[u(t; r), \lambda(r)]$ de período $T = T(r)$, para $r \in \mathbb{R}$ pequenos, da forma

$$\begin{aligned} u &= r \operatorname{Re} \{ \varphi \exp [i(2\pi t/T + \theta)] \} + O(r^2) \\ \lambda &= \lambda_0 + \lambda_2 r^2 + O(r^4), \quad T = 2\pi + T_2 r^2 + O(r^4) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Aqui r é essencialmente a amplitude da órbita, e θ é um período arbitrário. A fórmula explícita de λ_2 e T_2 pode ser encontrada em [4]. Genericamente $\lambda_2 \neq 0$, e daí a amplitude da oscilação satisfaz a relação

$$r \sim (\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

Se existe um outro autovalor nulo ($\lambda_2 = 0$) ou (2.21) falha, ou ambos, então a bifurcação de Hopf é degenerada no sentido do capítulo(1) (ver diagrama[†] (2.4)).

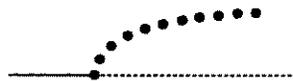


Figura 2.4: Bifurcação de Hopf.

Exemplo 2.4.1. Seja X_0 o campo de vetores em \mathbb{C}^∞ com uma singularidade de Hopf na origem. A forma normal[‡] de X_0 pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \left\{ a_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\} + O(|x|^5) \quad (2.24)$$

[†](●) indica a formação de órbitas periódicas estáveis, enquanto que (○) órbitas periódicas instáveis.

[‡]Para maiores detalhes veja [3] pág. 203.

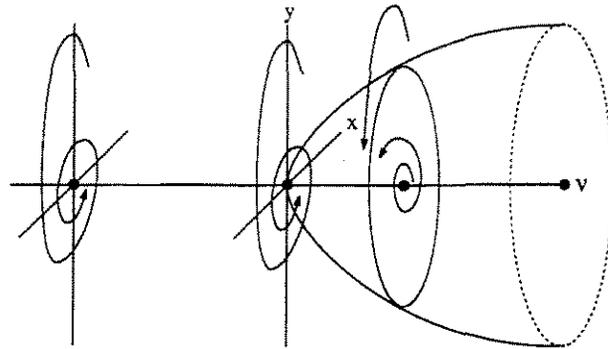
onde $\beta = (\det(DX_0))^{\frac{1}{2}} > 0$ e $a_1 \neq 0$ (veja [3], pág. 81, 102 e 203) donde obtemos um desdobramento de X_0 é

$$X(\nu, x) = \begin{pmatrix} \nu & -\beta \\ \beta & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \left\{ a_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\} + O(|x|^5). \quad (2.25)$$

A menos dos termos $O(|x|^5)$ de (2.25), a família local (2.25) é mais fácil de ser observada no plano (r, θ) . Assim temos que (2.25) em coordenadas polares torna-se

$$\dot{r} = r(\nu + a_1 r^2), \quad \dot{\theta} = \beta + b_1 r^2. \quad (2.26)$$

onde $a_1 < 0$. O retrato de fase de (2.26) na região $\nu < 0$ consiste de um foco estável na origem. Sobre o retrato de fase $\nu = 0$, $\dot{r} = a_1 r^3$, isto implica que a origem é assintoticamente estável. Quando $\nu > 0$ os pontos críticos serão dados por $r = \left(\frac{\nu}{|a_1|}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $r = 0$. Portanto para $\nu > 0$ existe um ciclo limite estável, de raio proporcional a $\nu^{\frac{1}{2}}$, na vizinhança do foco instável na origem $r = 0$. Esta bifurcação é chamada de "bifurcação de Hopf subcrítica". Se $a_1 > 0$,

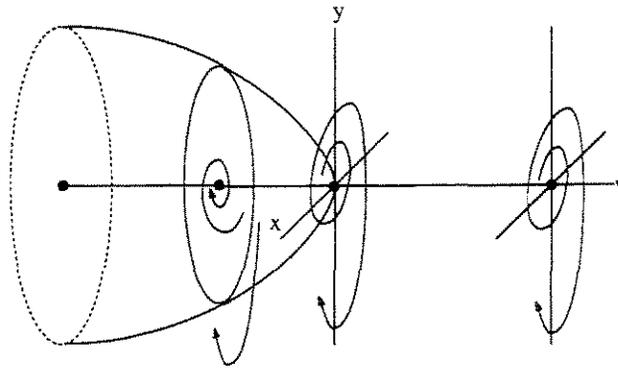


então o ciclo limite ocorre quando $\nu < 0$: isto é, o ciclo limite instável envolve um ponto fixo estável. A medida que $\nu \rightarrow 0^-$, o raio do círculo decresce para zero em $\nu = 0$, onde o ponto fixo na origem torna-se um foco instável. Quando $\nu > 0$, $(x_1, x_2)^T = 0$ é hiperbólico e instável. Isto é conhecido como bifurcação de Hopf subcrítica.

Nas figuras (2.4.1) e (2.4.1) o produto qualitativo destes diagramas não dependem dos termos $O(|x|^5)$. Para maiores detalhes, veja [3] pág. 203.

2.5 Bifurcação Histereses

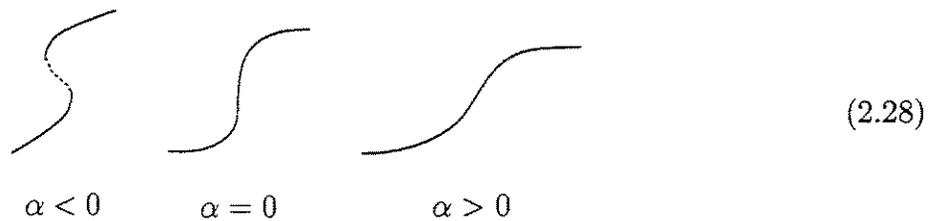
Suponha que na definição da bifurcação sela-nó tenhamos $b = 0$. Então podemos levar para a redução de Liapunov-Schmidt. O resultado é um ramo de soluções $[u(z), \lambda(z)]$ para



$z \in \mathbb{R}$ próximo de 0 da forma

$$u(z) = u_0 + z\varphi + O(z^2) \text{ e } \lambda(z) = \lambda_0 + z^3\lambda_3 + O(z^4) \quad (2.27)$$

como no diagrama de bifurcação abaixo.



com $\alpha = 0$ (se $\lambda_3 \neq 0$). Portanto, esta é uma bifurcação degenerada de acordo com o capítulo(1). Pequenas perturbações podem remover a degenerescência e dá outras duas selas-nó ou não-bifurcações, como mostra a figura(2.28). Desta forma introduzimos um “desdobramento” da equação através de α , cujo efeito tem o seguinte comportamento.

Seja $f = f(u, \lambda, \alpha)$ como em (1.3), satisfazendo (2.2) para $\alpha = 0$, e

$$\begin{aligned} \psi D_\lambda f(u_0, \lambda_0, 0) &\neq 0 \\ \psi D_{uu} f(u_0, \lambda_0, 0) \varphi \varphi &= 0 \\ \psi D_{uuu} f(u_0, \lambda_0, 0) \varphi \varphi \varphi &\neq 0 \\ \psi D_{u\alpha} f(u_0, \lambda_0, 0) \varphi \varphi \varphi &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

As primeiras três condições asseguram justamente que $\alpha \neq 0$ desdobra a degenerescência. Sem perda de generalidade

$$\psi D_{u\alpha} f(u_0, \lambda_0, 0) \varphi \varphi \varphi \neq 0. \quad (2.30)$$

Então (1.3) tem solução estacionária $[u(z, \alpha), \lambda(z, \alpha)]$ da forma

$$\begin{aligned} u(z, \alpha) &= z\varphi + \dots \\ \lambda(z, \alpha) &= \lambda_0 + c_1\alpha z + c_3\alpha z^3 + \dots \end{aligned}$$

onde ... denota os termos de ordem superior em α e z . Isto segue por Liapounov-Schmidt e pelo teorema da aplicação implícita. Os diagramas da bifurcação são agora como na figura(2.28). Observamos que a 'bifurcação histereses' é similar a 'bifurcação cúspide' da teoria da catástrofe elementar [13,14].

Através da Teoria de Singularidades, em presença de simetria ([24]) podemos deduzir as seguintes formas normais para curvas de singularidades.

sela-nó	$\lambda \pm z^2 = 0$
transcrítica	$\lambda z \pm z^2 = 0$
pitchfork	$\lambda z \pm z^3 = 0$
Hopf	$\lambda r \pm r^3 = 0$
histereses	$\lambda \pm \alpha z \pm z^3 = 0$

Isto é importante para perceber que, enquanto estas formas normais preservam os ramos estacionários e soluções periódicas, elas não preservam a dinâmica completa da equação diferencial (1.2).

2.6 Bifurcação no Toro de Naimark-Sacker

Suponha $u = p(t)$ é uma solução T -periódica de (1.2). Então p é (órbita assintoticamente) estável se os múltiplicadores de Floquet ρ todos tem módulo $|\rho| < 1$. Equivalentemente, se são autovalores da derivada da aplicação de Poincaré em $p(0)$.

Considere um par de complexos simples $\rho, \bar{\rho}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} |\rho(\lambda_0)| &= 1, \quad \frac{d}{d\lambda} |\rho(\lambda_0)| > 0, \\ \rho(\lambda_0)^k &\neq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Então para f genérico um toro invariante de soluções bifurca-se da órbita periódica p . A dimensão mínima do espaço de fase deve ser pelo menos tridimensional para isto ocorrer. A maior dificuldade em aplicar este teorema origina-se de características globais: os

multiplicadores ρ raramente podem ser calculados analiticamente porque estes requerem conhecimentos de toda a órbita $p(t)$, $0 \leq t \leq T$.

A bifurcação do tipo Naimark-Sacker descreve um comportamento análogo a bifurcação de Hopf, porém com diferenças de rotação.

Consideremos a aplicação

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.31)$$

Restringindo a aplicação do teorema da variedade central, por algumas transformações preliminares temos que os pontos fixos de (2.31) são dados por $(x, \mu) = (0, 0)$, isto é, temos

$$f(0, 0) = 0 \quad (2.32)$$

com a matriz

$$D_x f(0, 0) \quad (2.33)$$

tendo dois autovalores complexos conjugados, denotados por $\lambda(0)$, $\bar{\lambda}(0)$, com

$$|\lambda(0)| = 1. \quad (2.34)$$

Iremos então requerer que

$$\lambda^n(0) \neq 1, \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (2.35)$$

Observe que se $\lambda(0)$ satisfaz (2.35), então $\bar{\lambda}(0)$ também satisfaz, e vice-versa.

Temos a forma normal[§] de (2.31) é dada por

$$z \mapsto \lambda(\mu)z + c(\mu)z^2\bar{z} + O(4), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.36)$$

De forma que (2.36) em coordenadas polares torna-se

$$z = re^{2\pi i\theta}$$

e temos

$$\begin{aligned} r &\mapsto |\lambda(\mu)| \left(r + \left(\operatorname{Re} \left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)} \right) \right) r^3 + O(r^4) \right), \\ \theta &\mapsto \theta + \phi(\mu) + \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{Im} \left(\frac{c(\mu)}{\lambda(\mu)} \right) \right) r^2 + O(r^3), \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde

$$\phi \equiv \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega(\mu)}{\alpha(\mu)} \quad (2.38)$$

[§]Veja [2] pág. 226.

e

$$c(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu) \quad (2.39)$$

Temos então na expansão de Taylor de (2.37) quando $\mu = 0$ que

$$\begin{aligned} r &\mapsto \left(1 + \frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)| \Big|_{\mu=0}\right) r + \left(\operatorname{Re} \left(\frac{c(0)}{\lambda(0)}\right)\right) r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^4), \\ \theta &\mapsto \theta + \phi(0) + \frac{d}{d\mu} (\phi(\mu)) \Big|_{\mu=0} + \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{Im} \left(\frac{c(0)}{\lambda(0)}\right)\right) r^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^3), \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde usamos a condição $|\lambda(0)| = 1$. Note que, $\lambda^n(0) \neq 1$, onde $n = 1, 2, 3, 4$, de (2.38) vemos que $\phi(0) \neq 0$. Simplificamos a notação de (2.40) por

$$\begin{aligned} d &\equiv \frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)| \Big|_{\mu=0}, \\ a &\equiv \operatorname{Re} \left(\frac{c(0)}{\lambda(0)}\right), \\ \phi_0 &\equiv \phi(0), \\ \phi_1 &\equiv \frac{d}{d\mu} (\phi(\mu)) \Big|_{\mu=0}, \\ b &\equiv \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \frac{c(0)}{\lambda(0)}; \end{aligned}$$

e conseqüentemente, (2.40), torna-se

$$\begin{aligned} r &\mapsto r + (d\mu + ar^2) r + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^4), \\ \theta &\mapsto \theta + \phi_0 + \phi_1 \mu + br^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^3). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Estamos interessados na dinâmica de (2.41) para r e μ pequenos. Desprezando os termos de ordem superior $O(\mu^2 r, \mu r^3, r^4)$ e $O(\mu^2, \mu r^2, r^3)$ temos a forma normal

$$\begin{aligned} r &\mapsto r + (d\mu + ar^2) r, \\ \theta &\mapsto \theta + \phi_0 + \phi_1 \mu + br^2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Note que $r = 0$ é um ponto fixo de (2.42) que será

$$\begin{array}{ll} \text{assintoticamente estável} & \text{para } d\mu < 0, \\ \text{instável} & \text{para } d\mu > 0, \\ \text{instável} & \text{para } \mu = 0, a > 0 \text{ e} \\ \text{assintoticamente estável} & \text{para } \mu = 0, a < 0. \end{array}$$

Veja a seção (1.2.2). No caso que, pontos fixos da componente \dot{r} da forma normal truncada, com $r > 0$, corresponde a órbitas periódicas.

Lema 2.6.1. $\left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 \mid r = \sqrt{\frac{-\mu d}{a}} \right\}$ é um círculo o qual é invariante sobre a dinâmica produzida por (2.42).

Isto mostra que o círculo invariante pode existir para outros $\mu > 0$ ou $\mu < 0$ dependendo do sinal de d e a e que isto será somente um círculo invariante com distância $O(\sqrt{|\mu|})$ da origem. A estabilidade do círculo invariante depende do sinal de a .

Lema 2.6.2. O círculo invariante é assintoticamente estável para $a < 0$ e instável para $a > 0$.

Veja as demonstrações dos lemas (2.6.1) e (2.6.2) em [2] pág. 378.

Descrevemos os quatro casos possíveis para a bifurcação de um círculo invariante de um ponto fixo.

Caso 1: ($d > 0, a > 0$). Neste caso, a origem é um ponto fixo instável para $\mu > 0$ e um ponto fixo assintoticamente estável para $\mu < 0$ com um círculo invariante instável para $\mu < 0$; veja figura (2.5).

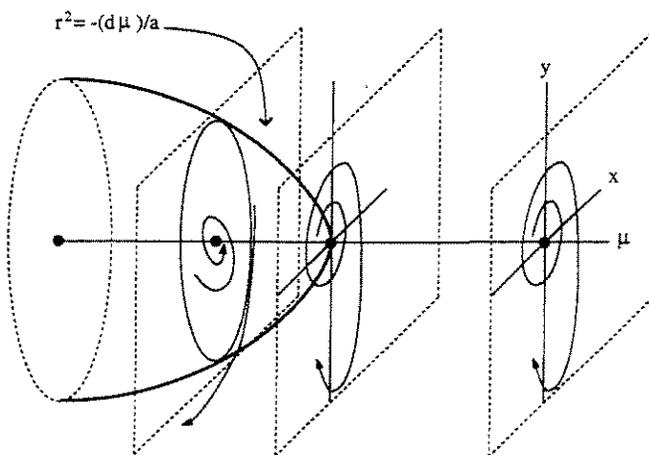
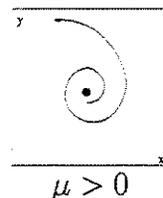
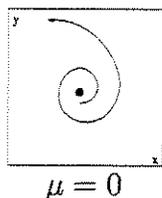
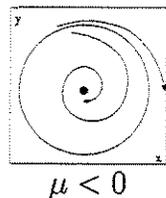


Figura 2.5: $d > 0, a > 0$.



Caso 2: $d > 0$, $a < 0$. Neste caso, a origem é um ponto fixo instável para $\mu > 0$ e um ponto fixo assintoticamente estável para $\mu < 0$ com um círculo invariante assintoticamente instável para $\mu > 0$; veja figura (2.6).

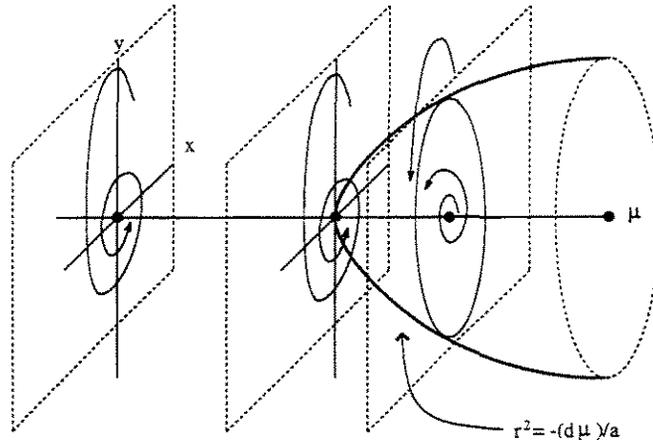
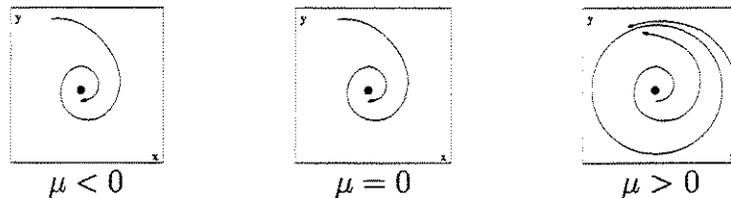
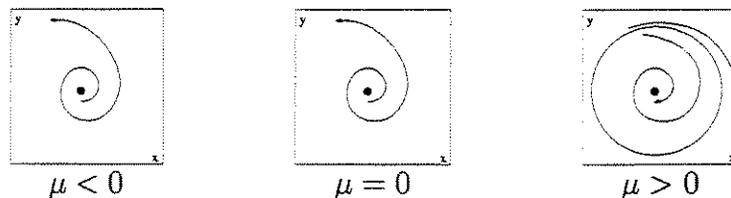


Figura 2.6: $d > 0$, $a < 0$.



Caso 3: $d < 0$, $a > 0$. Neste caso, a origem é um ponto fixo assintoticamente estável para $\mu > 0$ e um ponto fixo instável para $\mu < 0$ com um círculo invariante instável para $\mu > 0$; veja figura (2.7).



Caso 4: $d < 0$, $a < 0$. Neste caso, a origem é um ponto fixo assintoticamente estável para $\mu > 0$ e um ponto fixo para $\mu < 0$ com um círculo invariante assintoticamente estável para $\mu < 0$; veja figura (2.8).

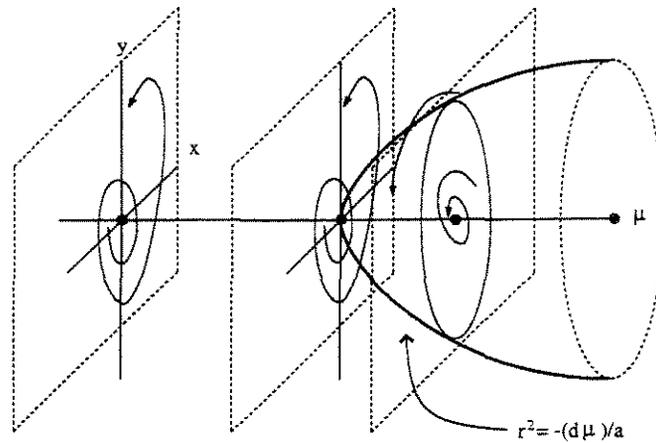


Figura 2.7: $d < 0, a > 0$.

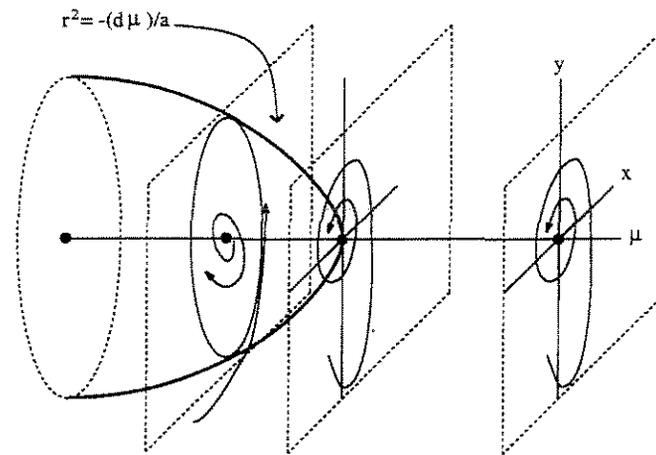
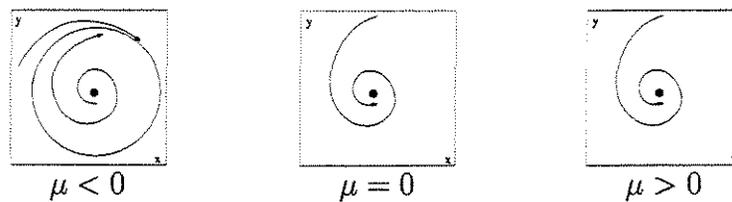


Figura 2.8: $d < 0, a < 0$.



Observação 2.6.3. Para $a > 0$, o círculo invariante pode existir para outro $\mu < 0$ (Caso 1) ou $\mu > 0$ (Caso 3) e, em cada caso, o círculo invariante é instável. Para $a < 0$, o círculo invariante pode existir para $\mu < 0$ (Caso 4) ou $\mu > 0$ (Caso 2), e nestes casos o círculo invariante é assintoticamente estável. Conseqüentemente, a determina a estabilidade do

círculo invariante mas não diz qual lado de $\mu = 0$ o círculo invariante existe.

Observação 2.6.4. Lembrando que

$$d = \frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)|_{\mu=0}.$$

Conseqüentemente, para $d > 0$, os autovalores cruzam de dentro para fora do círculo unitário quando μ cresce, para $d < 0$, os autovalores cruzam de fora para dentro do círculo unitário quando μ cresce. Desta forma, para $d > 0$, segue que a origem é assintoticamente estável para $\mu < 0$ e instável para $\mu > 0$. E para $d < 0$, a origem é instável para $\mu < 0$ e assintoticamente estável para $\mu > 0$.

Podemos estudar a dinâmica no círculo invariante estudando a dinâmica de (2.42) restrita ao círculo invariante (isto é, considerando somente condições iniciais que começam no círculo invariante). Pontos no círculo invariante têm coordenada inicial dada por

$$r = \sqrt{\frac{-\mu d}{a}},$$

que esta associada a aplicação

$$\theta \mapsto \theta + \phi_0 + \left(\phi_1 - \frac{d}{a}\right) \mu. \quad (2.43)$$

A dinâmica de (2.42) depende de $\phi_0 + \left(\phi_1 - \frac{d}{a}\right) \mu$. Se $\phi_0 + \left(\phi_1 - \frac{d}{a}\right) \mu$ é racional, então todas as órbitas no círculo invariante são periódicas. Se $\phi_0 + \left(\phi_1 - \frac{d}{a}\right) \mu$ é irracional, então todas as órbitas no círculo invariante, preenchem densamente o círculo. As provas destas afirmações podemos encontrar em [2].

Teorema 2.6.5 (Bifurcação de Naimark-Sacker). *Considere a forma normal de (2.42). Então, para μ suficientemente pequeno, os casos, 1, 2, 3 e 4 são descritos como mencionado acima.*

A demonstração pode ser encontrada em [43].

Capítulo 3

Interações das bifurcações estacionárias de Hopf

Nesta seção consideramos a equação diferencial como em (2)

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda, \alpha), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^3. \quad (3.1)$$

e admita que

$$f(0, 0, 0) = 0,$$

e que $D_u f(0, 0, 0)$ tem autovalores simples $0, -i, i$. Então f tem uma bifurcação degenerada em $\lambda = 0$ (para $\alpha = 0$) e escolhemos a dependência de α para remover esta degenerescência. Em geral, para $\alpha \neq 0$ os autovalores 0 e $\pm i$ ocorrem para dois valores diferentes de λ . Esperamos encontrar a bifurcação estado-estável e Hopf como descrita na seção anterior entre os valores de λ . De fato a bifurcação do estado-estável persiste sempre para $\alpha \neq 0$, porque estes cálculos da seção (2) não são afetados pela presença de autovalores $\pm i$. Por outro lado, o autovalor 0 invalida o Teorema da Bifurcação de Hopf, conduzindo a um novo fenômeno.

Consideramos quatro exemplos, cada um deles corresponde a união da bifurcação de Hopf com um dos quatro tipos de bifurcação estacionária apresentados na seção anterior.

- Em cada exemplo, para $\alpha \neq 0$, retomamos a bifurcação estacionária local esperada e ao tipo de bifurcação de Hopf da seção (2); estes chamamos de bifurcações *primárias*.
- Em dois casos, encontramos bifurcações adicionais de órbitas periódicas em ramos não-triviais; estes chamamos de bifurcações *secundárias*.

- Em todos os quatro exemplos mostramos a possibilidade do surgimento de bifurcações adicionais dando ascensão à dinâmica tridimensional (criação de toros invariantes); a estes chamamos de bifurcações *terciárias*.

A ferramenta principal desta seção é o método da forma normal de Poincaré-Birkhoff, como na seção(1.2.2). Este procedimento consiste de transformações não-lineares sucessivas de coordenadas próximas a identidade o que sistematicamente elimina termos da série de potência da representação de f em termos de u . Certos termos não podem ser eliminados; eles são chamados ressonantes, e são fundamentais na determinação da dinâmica do sistema. A desvantagem é que estes procedimento em geral não convergem. Para os casos aqui considerados, a vizinhança de validade da forma normal pode tender para zero como o cálculo para termos de grau superior.

Usamos coordenadas Cartesianas (x, y, z) ou coordenadas cilíndricas (r, θ, z) ,

$$x = r \cos\theta,$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta,$$

$$z = z,$$

onde z é a coordenada no autoespaço correspondendo a 0 e (x, y) ou (r, θ) são coordenadas no espaço bidimensional correspondendo a $\pm i$.

3.1 Transcrítica - Hopf

Este será o primeiro exemplo em que exploraremos a bifurcação terciária. A forma normal de Poincaré é

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z + az^2 + br^2 + O(|(z, r)|^3)$$

$$\frac{dr}{dt} = r(\lambda - \alpha + cz) + O(|(z, r)|^3) \tag{3.2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + O(|(z, r)|^2)$$

onde $O(|(z, r)|^n)$ denota os termos de ordem superior a n , os coeficientes a, b, c são genericamente não nulos e dependem suavemente do parâmetro. Claramente (3.2) tem a solução trivial $z = r = 0$, e omitindo o termo $O(|(z, r)|^n)$ recuperamos a bifurcação estado-estável

transcrítica com $r = 0$ em $\lambda = 0$, e a bifurcação com $r \neq 0$ em $\lambda = \alpha$. Existem seis diagramas de bifurcações genéricas dependentes de a, b, c , como documentado em [6]. Todas estas exibem uma bifurcação de Hopf secundária, mas somente uma tem uma bifurcação terciária (3.1). Neste caso, o ramo de soluções periódicas muda sua própria estabilidade, um par de múltiplicadores complexos de Floquet produzem um círculo unitário próximo de 1, e o teorema de Naimark-Sacker na seção (2.6) implica que para termos de ordem superior genéricos existem toros invariantes de soluções vizinhas a órbitas periódicas, ou *subcríticas* e estáveis ou *subcríticas* e instáveis. Este resultado está demonstrados no apêndice de [6]. Vários autores ([13], [15], [17], [18]) têm notado que as equações truncadas (isto é, termos $O(n)$ são desprezados) são integráveis no ponto de bifurcação (do toro), dando uma família de ninhos numa vizinhança do toro por uma sela-sela conectando círculos em (r, z) . Embora esta situação não será utilizada genericamente, isto pode ser usado no cálculo de bifurcações no toro genéricas como uma perturbação da integral exata. As figuras (3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5) mostram o retrato de fase típico para (3.2) com termos cúbicos incluídos (observe que existem toros atratores).

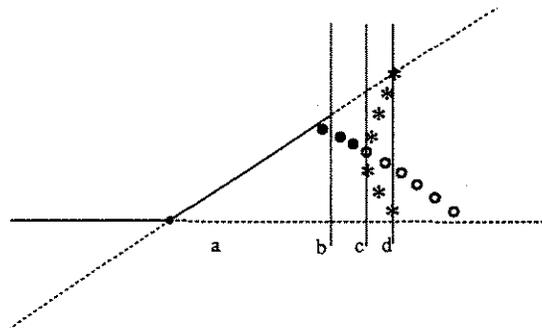


Figura 3.1: (a)



Figura 3.2: (b)



Figura 3.3: (c)



Figura 3.4: (b)

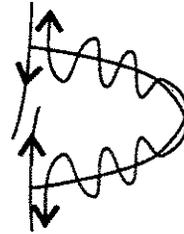


Figura 3.5: (c)

O segundo fato interessante deste caso é o desdobramento da conexão sela-sela para as equações em termos de (r, z) , veja figura(3.5). A variável θ rotacionará as soluções numa variedade bidimensional ligando as duas selas, para a aproximação da forma normal que obedecem as condições de simetria. Entretanto, lembrando que em geral o cálculo da forma normal não converge, então as equações exatas devem permanecer assimétrica com relação ao eixo. Isto conduz (veja figura(3.5)), para interseções transversais de variedades bidimensionais estáveis e instáveis de dois pontos de sela, a existência da “ferradura de Smale” e comportamentos caóticos ([26],[35],[36]).

3.2 Pitchfork - Hopf

Este caso, tem a seguinte forma normal

$$\frac{dz}{dt} = z(\lambda + az^2 + br^2) + O(|(z, r)|^5)$$

$$\frac{dr}{dt} = r(e\lambda - \alpha + cz^2 + dr^2) + O(|(z, r)|^5) \quad (3.3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + O(|(z, r)|^2).$$

Claramente, este sistema tem uma solução trivial e, suprimindo os termos de ordem superior ($O(|(z, r)|^n)$), encontramos também bifurcações primárias $r = 0$, $\lambda = -az^2$ (“pitchfork”), e $z = 0$, $\lambda = \frac{(\alpha - dr^2)}{e}$ (Hopf). O caso com a, d ambos negativos têm bifurcações subcríticas primárias em ambos e, dadas secundária mas não bifurcações terciárias ([37]). Para $ad < 0$, porém, encontramos bifurcações terciárias para toros invariantes ([16],[5]). Alguns destes toros são envolvidos por conexões de selas como no exemplo anterior, enquanto outros são limitados, pelo menos para as equações normais truncadas ([16],[17],[26]).

Suponha $d > 0$, e inclua um termo r^5 com coeficiente negativo na r -equação. Então, formalmente, o ramo Hopf começa fora de um subcrítico mas retorna ao subcrítico. Este termo negativo r^5 tem então o efeito de estabilizar a bifurcação no toro tornando-o subcrítico. Se supormos que todos os outros termos $O(|(z, r)|^5)$ são tais que modificam este quadro, conduzimos para a equação (3.4) abaixo.

Observação 3.2.1. *Do ponto de vista da teoria das singularidades, para d próximo de 0, d torna-se de fato um segundo parâmetro do desdobramento. Assim para mostrar que os outros termos de r^5 não modificam o diagrama da bifurcação para o estado estacionário ou para os ramos Hopf, embora o curso da dinâmica global pode mudar. De fato a dinâmica muda para $d \rightarrow 0$, em (3.4).*

As pequenas variáveis e parâmetros, $x, y, z, \lambda, \alpha, d$, serão reescaladas, reestruturando então a ordem. Durante o processo o tempo t passa a ser uma variável mais lenta, tornando ω grande e fazendo os coeficientes de r^5 pequenos.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xH - \omega y \\ \frac{dy}{dt} &= \omega x + yH \\ \frac{dz}{dt} &= z(\lambda + x^2 + y^2 - z^2) .\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde

$$\begin{aligned}H &= 5\lambda - 1 + 2(x^2 + y^2) - 3z^2 - \epsilon(x^2 + y^2)^2 \\ Q &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } y > 0 \text{ ou } H > 0, \\ \frac{qHx^2y^2(x+y)}{3} & \text{em caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

O diagrama de bifurcação para (3.4) é dado na figura (3.6), obtenção das soluções de (3.4) são obtidas numericamente. Observando a figura (3.6) notamos que surgem:

1. uma singularidade estável,
2. uma singularidade estável e uma órbita periódica instável,
3. uma singularidade estável e duas órbitas periódicas instáveis,

4. uma singularidade estável, uma instável e duas órbitas periódicas instáveis,
5. uma singularidade estável e duas órbitas periódicas instáveis,
6. uma singularidade instável, uma singularidade estável e uma órbita periódica instável,
7. uma órbita periódica estável, uma singularidade instável e uma órbita periódica instável,
8. uma órbita periódica estável, duas singularidades instáveis e uma órbita periódica instável,
9. ramos de toro, duas singularidades instáveis e uma órbita periódica instável,
10. ramos de toro, duas singularidades instáveis e duas órbitas periódicas instáveis.

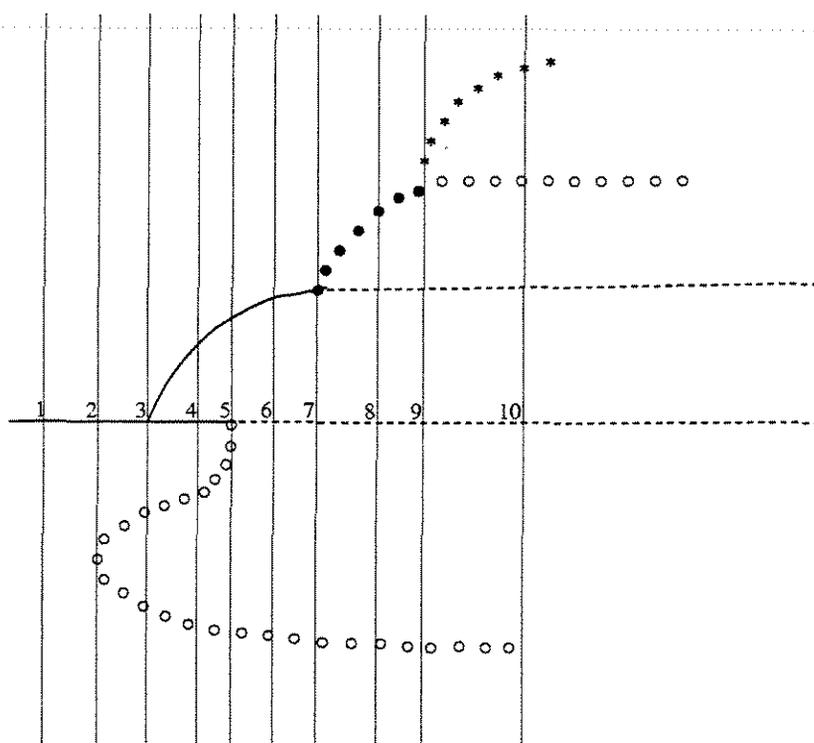


Figura 3.6: Diagrama da Bifurcação do tipo Pitchfork-Hopf

3.3 Sela-nó - Hopf

Considere a forma normal

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \lambda + az^2 + br^2 + O(|(z, r)|^3) \\ \frac{dr}{dt} &= r(\alpha + cz) + O(|(z, r)|^3) \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1 + O(|(z, r)|^2).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Aproximando, encontramos a bifurcação sela-nó

$$(\lambda = -az^2, r = 0)$$

e a bifurcação de Hopf

$$\left(z = \frac{-\alpha}{c}, \lambda = -br^2 - \left(\frac{a\alpha^2}{c^2}\right)\right)$$

e não uma bifurcação secundária da nova solução periódica estacionária. O estado estacionário básico e os ramos Hopf estendem-se para algum lado de $\lambda = 0$ no caso $ab > 0$, e vai para direções opostas se $ab < 0$. A bifurcação no toro Naimark-Sacker é possível somente se $bc < 0$, e então existe uma conexão de sela somente se $ab > 0$. Novamente os termos $O(|(z, r)|^3)$ são requeridos para a bifurcação em \mathbb{R}^3 são não-degeneradas. Todas as características deste exemplo, estão contidas no próximo. Para maiores detalhes ver Guckenheimer ([15],[26]).

3.4 Histerese - Hopf

Considere a forma normal

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \lambda + \alpha z + az^3 + br^2 + O(|(z, r)|^3) \\ \frac{dr}{dt} &= r(-\beta + cz) + O(|(z, r)|^3) \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1 + O(|(z, r)|^2).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Da aproximação da equação, imediatamente recuperamos o estado estacionário histereses

$$(\lambda = -\alpha z - az^3, r = 0)$$

e ramos de bifurcação de Hopf

$$\left(z = \frac{\beta}{c}, br^2 = -\lambda - \left(\frac{\alpha\beta}{c} \right) - \left(\frac{\alpha\beta^3}{c^3} \right) \right).$$

Não existem novas bifurcações estacionárias de soluções periódicas. A classificação de diagramas de bifurcação genéricas serão apresentadas a seguir. Três tipos distintos de bifurcação envolvendo toros podem ocorrer. Existem bifurcações do tipo Naimark-Sacker e bifurcações de conexão de selas, na qual podem ser vistas nos exemplos anteriores, e um novo tipo: um 'grande' toro pode desaparecer simultaneamente com a bifurcação sela-nó do estado estacionário. As seguintes equações (obtidas de (3.6) e (3.4)) exibem todos os três tipos.

$$\frac{dx}{dt} = x(z - \beta) - \omega y$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x - y(z - \beta) \tag{3.7}$$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda + \alpha z - \frac{z^3}{3} - r^2(1 + qx + \epsilon z).$$

Um diagrama típico da bifurcação para (3.7) é como mostra na figura (3.7). A obtenção do diagrama é feita numericamente, caso o leitor esteja interessado nesta abordagem veja [1].

Observando a figura (3.7) notamos que surgem:

1. uma singularidade estável,
2. uma singularidade estável e uma órbita periódica estável,
3. uma singularidade estável e duas singularidades instáveis,
4. uma singularidade estável, uma instável e uma órbitas periódicas instáveis,
5. uma singularidade estável, duas singularidades instáveis e uma órbita periódica instável,
6. uma órbita periódica estável, uma órbita periódica instável e uma singularidade instável,
7. dois ramos de toros e uma órbita periódica instável,
8. uma órbita periódica estável e uma singularidade instáveis,

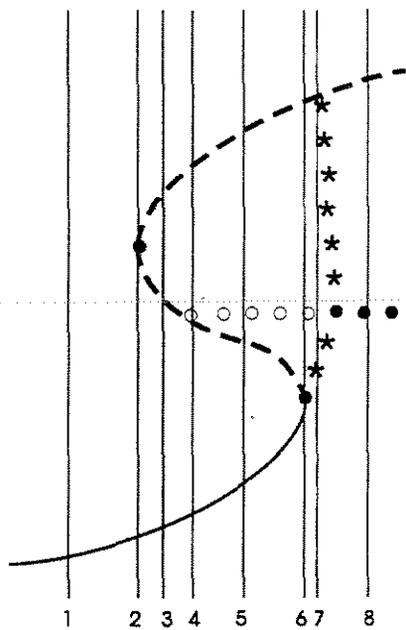


Figura 3.7: Diagrama da Bifurcação Histerese-Hopf

Apêndice A

Bifurcações de codimensão 2

Nosso objetivo neste apêndice será de formalizar algumas ferramentas necessária para o capítulo 3, no qual são abordados sistemas de equações na sua forma normal em coordenadas cilíndricas.

A.1 Um par de autovalores imaginários puros e um nulo

A forma normal associada com esta bifurcação está em \mathbb{R}^3 . Portanto, a simetria na parte linear associada com os autovalores imaginários puros permite-nos desacoplar uma das coordenadas das duas restantes de forma que possamos começar a nossa análise usando técnicas de espaço de fase. Em alguns destes, a dinâmica nestes planos de fase pode ser visto como uma aproximação para a aplicação de Poincaré da forma normal completa tridimensional. Este é então um resultado da simetria da parte linear. Nossas análise sequiremos os seguintes passos:

1. Análise da bifurcação global da aproximação associada a forma normal bidimensional.
2. Interpretar em termos da aproximação a forma normal tridimensional.
3. Discussão dos efeitos dos termos de ordem superior na forma normal.

1. A forma normal* associada é dada por

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu_1 r + arz, \\ \dot{z} &= \mu_2 + br^2 - z^2,\end{aligned}\tag{A.1}$$

onde $a \neq 0$ e $b = \pm 1$. Existem essencialmente somente quatro casos distintos para serem estudados, e somente dois admitem a possibilidade da bifurcação global (para r, z pequenos). Eles são denotados por

$$\begin{aligned}\text{Caso(a)} & \quad a < 0, b = +1, \\ \text{Caso(b)} & \quad a < 0, b = -1.\end{aligned}$$

No Caso(a) estamos interessados na dinâmica próxima do eixo μ_2 para $\mu_2 < 0$. E no Caso(b) estamos interessados na dinâmica próxima do eixo μ_2 para $\mu_2 > 0$. Em ambos os casos a forma normal será integrável no eixo μ_2 (com o sinal de μ_2 apropriado); desta forma, esperamos que os termos de ordem superior na forma normal tenham efeitos drásticos na dinâmica do regime dos parâmetros. Nossa estratégia será incluir os termos cúbicos na forma normal e introduzir uma escalada de variáveis então obtemos uma perturbação do sistema Hamiltoniano. Então uma análise do tipo Melnikov pode ser usada para determinar o número de órbitas periódicas e possíveis bifurcações homoclínicas.

Da matriz

$$\begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix},$$

colocando dos termos cúbicos em (A.1) temos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu_1 r + arz + (cr^3 + dr^2z), \\ \dot{z} &= \mu_2 + br^2 - z^2 + (er^2z + fz^3).\end{aligned}\tag{A.2}$$

Em Guckenheimer e Holmes [1983] é mostrado que mudanças de coordenadas podem ser introduzidas de forma que os termos cúbicos exceto z^3 em (A.2) podem ser eliminados (ver Exercício 4.63 Wiggins). Conseqüentemente, sem perda de generalidade, podemos analisar a seguinte forma normal

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \mu_1 r + arz, \\ \dot{z} &= \mu_2 + br^2 - z^2 + fz^3.\end{aligned}\tag{A.3}$$

*Veja [2], pág. 331.

Agora vejamos as variáveis dependentes e parâmetros como segue

$$r = \epsilon u, \quad z = \epsilon v, \quad \mu_1 = \epsilon^2 \nu_1, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \nu_2, \quad (\text{A.4})$$

e

$$t \longmapsto \epsilon t,$$

então (A.2) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{u} &= auv + \epsilon \nu_1 u \\ \dot{v} &= \nu_2 + bu^2 - v^2 + \epsilon f v^3. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Quando $\epsilon = 0$, o campo de vetores tem integral primeira (para $a \neq -1$)

$$F(u, v) = \frac{a}{2} u^{\frac{2}{a}} \left[\nu_2 + \frac{b}{1+a} u^2 - v^2 \right]. \quad (\text{A.6})$$

Infelizmente (A.6), não é Hamiltoniano, mas podemos produzir um Hamiltoniano (Guckenheimer e Holmes [1983]) multiplicando o lado direito de (A.5) pelo fator $u^{\frac{2}{a}-1}$ temos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= au^{\frac{2}{a}}v + \epsilon \nu_1 u^{\frac{2}{a}} \\ \dot{v} &= -bu^{\frac{2}{a}-1} + bu^{\frac{2}{a}+1} - u^{\frac{2}{a}-1}v^2 + \epsilon f u^{\frac{2}{a}-1}v^3, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde $\nu_2 = \mp 1$ quando $b = \pm 1$ desde que, para o Caso(a), em $\mu_2 < 0$ e, para Caso(b), $\mu_2 > 0$. Para $\epsilon = 0$, (A.7) é Hamiltoniano com função Hamiltoniana

$$H(u, v) = \frac{1}{2} u^{\frac{2}{a}} v^2 - \frac{ab}{2} u^{\frac{2}{a}} - \frac{ab}{2(a+1)} u^{\frac{2}{a}+2}, \quad a+1 \neq 0$$

ou

$$H(u, v) = \frac{1}{2} u^{-2} v^2 - \frac{b}{2} u^{-2} - b \log u, \quad a+1 \neq 0. \quad (\text{A.8})$$

Nas figuras acima mostram-se os conjuntos de nível do Hamiltoniano (isto é, órbitas de (A.7) para $\epsilon = 0$). Vimos desta figura que para o Caso(a), o sistema Hamiltoniano integrável tem uma família a 1-parâmetro de órbitas periódicas ao redor de um ponto fixo elíptico com órbitas tornando a amplitude ilimitada. No Caso(b) o sistema Hamiltoniano integrável tem uma família a 1-parâmetro de soluções periódicas envolvendo um ponto fixo elíptico que limita-se na órbita heteroclínica. Em ambos os casos denotamos a família de órbitas a 1-parâmetro por

$$(u^\alpha(t), v^\alpha(t)), \quad \alpha \in [-1, 0),$$

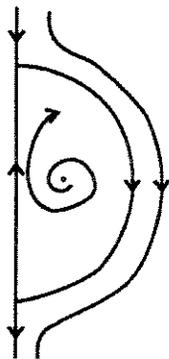
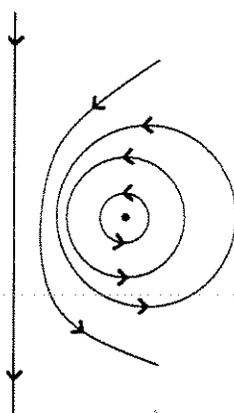
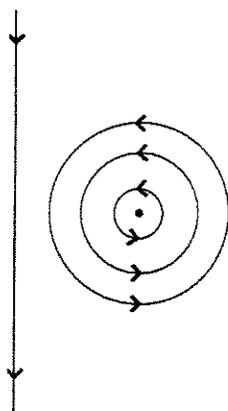


Figura A.1: Caso(b)

Figura A.2: Caso(a) $-1 < a < 0$ Figura A.3: Caso(a) $a \leq -1$

com período T^α , onde $(u^{-1}(t), v^{-1}(t))$ é um ponto fixo elíptico em ambos os casos, e $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (u^\alpha(t), v^\alpha(t))$ é limitada pela órbita periódica no Caso(a) e um círculo heteroclínico

no Caso(b).

A função de Melnikov é dada por

$$M(\alpha; \nu_1) = af \int_0^{T^\alpha} (u^\alpha(t))^{\frac{4}{a}-1} (v^\alpha(t))^4 dt \quad (\text{A.9})$$

$$- \nu_1 \int_0^{T^\alpha} \left[b(u^\alpha(t))^{\frac{4}{a}+1} - b(u^\alpha(t))^{\frac{4}{a}-1} + (u^\alpha(t))^{\frac{4}{a}-1} (v^\alpha(t))^2 \right] dt.$$

Portanto, $M(\alpha; \nu_1) = 0$ é equivalente a

$$\nu_1 = \frac{af \int_0^{T^\alpha} (u^\alpha(t))^{\frac{4}{a}-1} (v^\alpha(t))^4 dt}{\int_0^{T^\alpha} \left[b(u^\alpha(t))^{\frac{4}{a}+1} - b(u^\alpha(t))^{\frac{4}{a}-1} + (u^\alpha(t))^{\frac{4}{a}-1} (v^\alpha(t))^2 \right] dt} \quad (\text{A.10})$$

$$\equiv f(\alpha).$$

Nos interessaremos por

$$\text{Caso(a)} \quad a < 0, b = +1, f \neq 0, \nu_1 < 0,$$

$$\text{Caso(b)} \quad a < 0, b = -1, f \neq 0, \nu_1 > 0.$$

Desta forma, se $f(\alpha)$ é uma função monótona de α (para a , b e f fixado), então (A.9) tem uma única órbita periódica na qual nasce na bifurcação Hopf e cresce monotonicamente na amplitude no Caso(a) e desaparece na bifurcação heteroclínica no Caso(b). Portanto, provar que (A.10) é monotônica em α é um **problema difícil**, visto que as integrais não podem ser avaliadas explicitamente em termos de integrais elementares. Felizmente, foi provado recentemente por [44], que (A.10) é realmente monótona em α . As técnicas nestes artigos para provar a monotonicidade envolve estimativas complicadas que não serão abordadas aqui. Na figura(A.4) mostramos um exemplo de uma possível bifurcação para o Caso(b) com $a = 2$, $f < 0$.

2. Interpretando a dinâmica do campo de vetores bidimensional em termos da dinâmica tridimensional. A forma normal tridimensional é dada por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu_1 r + arz, \\ \dot{z} &= \mu_2 + br^2 - z^2 + fz^3, \\ \dot{\theta} &= \omega + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Deste modo, as componentes r e z de (A.11) são independentes de θ , e a discussão da seção (1.2). Isto é, o caso que as órbitas periódicas tornam-se invariantes em dois

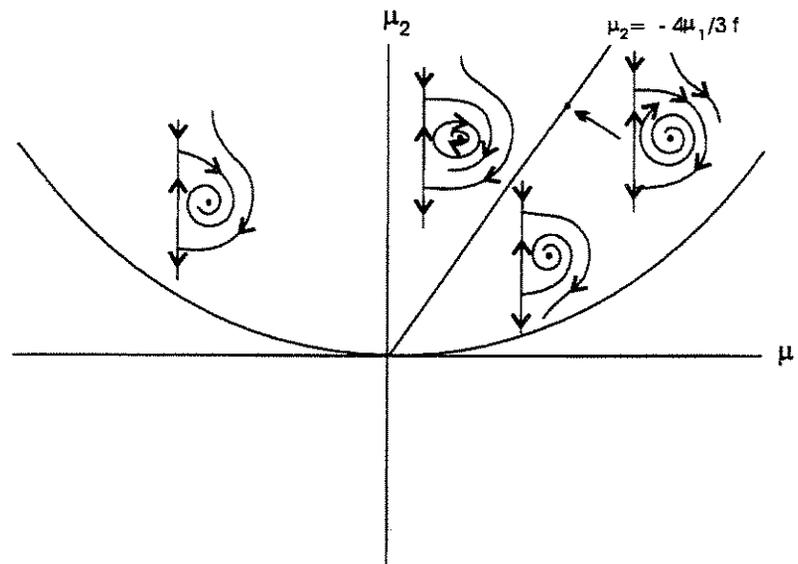


Figura A.4: Bifurcação Homoclínica

toros no espaço de fase em \mathbb{R}^3 e, no Caso(b), o círculo heteroclínico torna-se tal que a variedade estável bidimensional e uma variedade instável unidimensional do ponto fixo hiperbólico com $z < 0$ coincide com a esfera invariante (com eixo invariante, como mostra a figura (A.5)). Ambas as situações são alteradas com a adição de termos de ordem superior na forma normal.

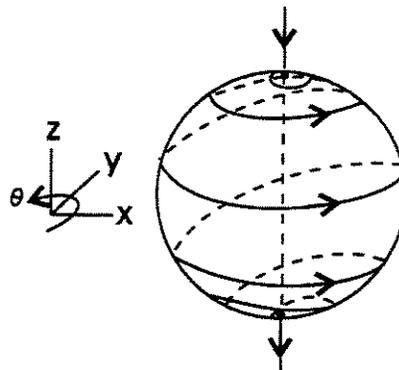


Figura A.5: Esfera invariante

3. O problema forma normal truncada no bi-toro invariante nos casos IIa,b, III e o círculo heteroclínico em III serem afetados por termos de ordem superior na forma normal não são conhecidos. (Para o leitor encontrar mais algumas informações, veja [2].)

Apêndice B

Usando o Mathematica

Nesta seção iremos apresentar um algoritmo para o cálculo de formas normais usando o método de representação matricial para campos de vetores. Primeiro, temos um exemplo do algoritmo para campos em \mathbb{R}^2 e logo após um exemplo para campos em \mathbb{R}^4 .

A versão do software Mathematica foi a 4.0, mas o algoritmo* pode ser escrito também na versão 3.0 sem alterações.

- **Caso dos campos de vetores em \mathbb{R}^2 .**

(* Definição da Matriz A(Parte Linear) na forma de Jordan.*)

```
A := {{0, 1},{ -1,0};
```

(* Inclusão do pacote de manipulação de matrizes.*)

```
<<LinearAlgebra`MatrixManipulation`
```

k = 2; (*k indica a partir de que ordem dos monomios iremos procurar termos ressonantes

*)

```
c = 0; (* c é um contador que utilizamos para montar a base de matrizes*)
```

```
dim = 2; (* dim indica a dimensão da matriz*)
```

```
jato = 5; (* jato indica até que ordem iremos procurar os termos ressonantes*)
```

```
Clear[FF, HH, LL, Linhas, Colunas, OO, B, MatCoef];
```

*Em cada um dos casos abaixo, deve-se escrever o algoritmo numa única célula

```

(* Início do Algoritmo *) Label[passo1]; {
(* Esta rotina calcula quantos termos de ordem k existem para a matriz A. *)
  For[q = k, q >= 0, For[g = k, g >= 0,
    If[(k == q + g), c = c + 1]; g = g - 1]; q = q - 1];
(* Aqui definimos os monomios. *)
r = dim c;
FF = Array[f, c]; t = 1;
For[q = k, q >= 0,
  For[g = k, g >= 0,
    If[(k == q + g), {f[t] = x^q y^g; t = t + 1}]; g = g - 1];
    q = q - 1];
(* FF é a base dos monomios. *)
HH := Array[h, r];      (*Define as matrizes da base. *)
LL := Array[l, r];      (*Diferenciais de HH. *)
Linhas := Array[lin, r]; (*Linhas da matriz da imagem do operador homológico. *)
Colunas := Array[col, r]; (*Colunas da matriz da imagem do operador homológico. *)
OO := Array[oh, r];      (*Imagens do operador homológico *)
B := Array[b, {r, r}];   (*Matriz da imagem do operador homológico. *)

(*Cálculo do Jacobiano dos elementos da base HH. *)
For[i = 1, i <= r,
  If[i <= c, {h[i] = {f[i], 0}};
    ln[i] = {{∂xf[i], ∂yf[i]}, {0, 0}}},
    If[(c + 1) <= i <= 2 c, {h[i] = {0, f[i - c]}};
      ln[i] = {{0, 0}, {∂x f[i - c], ∂y f[i - c]}}},
    i++];

(*Cálculo das imagens do operador homológico. *)
For[n = 1, n <= r, {
oh[n] = A.h[n] - ln[n].A.{{x}, {y}}}; n++]

(*Rotina que explicita a matriz das imagens do operados homológico ("MatCoef"). *)
For[j = 1, j <= r,
  For[i = 1, i <= r,
    { If[j <= c,

```

```

b[j, i] = Coefficient[TakeMatrix[oh[i], {1, 1}, {1, 1}], f[j]],
  If[(c + 1) <= j <= 2c,
    b[j, i] = Coefficient[TakeMatrix[oh[i], {2, 1}, {2, 1}], f[j - c]],
; i++]
; j++];

For[n = 1, n <= r,
  lin[n] = Flatten[Table[b[n, i], {i, r}]];
  col[n] = Flatten[Table[b[i, n], {i, r}]]; n++];

MatCoef := AppendRows[Table[lin[q], {q, r}]]; (*MatCoef - matriz dos coeficientes de OO.*)
λ = 0; (*λ parâmetro de A.*)
θ = Det[MatCoef]; (*θ determinante de MatCoef*)
}
(*Esta condição abaixo explicita a forma normal procurada dependendo de A . Caso não seja
possível encontrar a forma normal até o Jato de ordem " jato", então apresenta a mensagem a
seguir.*)
If[θ == 0, {KernelOHom = NullSpace[Table[col[w], {w, r}]];
  prod = KernelOHom . Table[a_s h[s], {s, r}];
  termres = Plus @@ prod;
  FN[x_, y_] = A . {x, y} + termres;
If[ k <= jato, {(k++)}; Goto[passo1]},
  Print[" O Sistema não tem termos ressonantes até o jato de order ", jato, "."];}]

```

- **Caso dos campos de vetores em \mathbb{R}^4 .**

(* Definição da Matriz A(Parte Linear) na forma de Jordan.*)

```
A := {{0, 1, -1, 0},{ 0, 0, 0, -1},{ 1, 0, 0, 1},{ 0, 1, 0, 0}};
```

(* Inclusão do pacote de manipulação de matrizes.*)

```
<<LinearAlgebra`MatrixManipulation`
```

k = 2; (* k indica a partir de que ordem dos monomios iremos procurar termos ressonantes

*)

c = 0; (* c é um contador que utilizamos para montar a base de matrizes*)

dim = 4; (* dim indica a dimensão da matriz*)

```

jato = 5; (* jato indica até que ordem iremos procurar os termos ressonantes*)
Clear[FF, HH, LL, Linhas, Colunas, OO, B, MatCoef];

(* Inicio do Algoritmo *) Label[passo1]; {
(* Esta rotina calcula quantos termos de ordem k existem para a matriz A. *)
For[l = k, l >= 0, For[p = k, p >= 0,
  For[q = k, q >= 0, For[g = k, g >= 0,
    If[(k == l + p + q + g), c = c + 1]; g = g - 1]; q = q - 1];
    p = p - 1]; l = l - 1];
(* Aqui definimos os monomios. *)
r = dim c;
FF = Array[f, c]; t = 1;
For[l = k, >= 0,
  For[p = k, p >= 0,
    For[q = k, q >= 0,
      For[g = k, g >= 0,
        If[(k == l + p + q + g), {f[t] = x^l y^p z^q w^g; t = t + 1}]; g = g - 1];
        q = q - 1]; p = p - 1]; l = l - 1];
(* FF é a base dos monomios. *)
HH := Array[h, r];      (*Define as matrizes da base. *)
LL := Array[ln, r];    (*Diferenciais de HH. *)
Linhas := Array[lin, r]; (*Linhas da matriz da imagem do operador homológico. *)
Colunas := Array[col, r] (*Colunas da matriz da imagem do operador homológico. *)
OO := Array[oh, r];    (*Imagens do operador homológico *)
B := Array[b, {r, r}]; (*Matriz da imagem do operador homológico. *)

(*Cálculo do Jacobiano dos elementos da base HH. *)
For[i = 1, i <= r,
  If[i <= c, {h[i] = {f[i], 0, 0, 0};
    ln[i] = {{∂xf[i], ∂yf[i], ∂zf[i], ∂wf[i]}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}},
    If[(c + 1) <= i <= 2 c, {h[i] = {0, f[i - c], 0, 0};
      ln[i] = {{0, 0, 0, 0}, {∂x f[i - c], ∂y f[i - c], ∂z f[i - c], ∂w f[i - c]}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}},
      0}}},
    If[(2 c + 1) <= i <= 3 c, {h[i] = {0, 0, f[i - 2 c], 0};

```

```

ln[i] = {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {∂x f[i - 2 c], ∂y f[i - 2 c], ∂z f[i - 2 c], ∂w f[i - 2 c]}, {0, 0, 0, 0}}};

```

```

{h[i] = {0, 0, 0, f[i - 3 c]};

```

```

ln[i] = {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {∂x f[i - 3 c], ∂y f[i - 3 c], ∂z f[i - 3 c], ∂w f[i - 3 c]}}}}];

```

```

i++];

```

```

(*Cálculo das imagens do operador homológico. *)

```

```

For[n = 1, n <= r, {

```

```

oh[n] = A.h[n] - ln[n].A.{{x}, {y}, {z}, {w}}>(* , Print[oh[n]]*); n++}

```

```

(*Rotina que explicita a matriz das imagens do operados homológico ("MatCoef"). *)

```

```

For[j = 1, j <= r,

```

```

  For[i = 1, i <= r,

```

```

    { If[j <= c,

```

```

      b[j, i] = Coefficient[TakeMatrix[oh[i], {1, 1}, {1, 1}], f[j]],

```

```

      If[(c + 1) <= j <= 2c,

```

```

        b[j, i] = Coefficient[TakeMatrix[oh[i], {2, 1}, {2, 1}], f[j - c]],

```

```

        If[(2c + 1) <= j <= 3c,

```

```

          b[j, i] = Coefficient[TakeMatrix[oh[i], {3, 1}, {3, 1}], f[j - 2c]],

```

```

          b[j, i] = Coefficient[TakeMatrix[oh[i], {4, 1}, {4, 1}], f[j - 3c]]];}

```

```

    ; i++]

```

```

  ; j++];

```

```

For[n = 1, n <= r,

```

```

  lin[n] = Flatten[Table[b[n, i], {i, r}]];

```

```

  col[n] = Flatten[Table[b[i, n], {i, r}]]; n++];

```

```

MatCoef := AppendRows[Table[lin[q], {q, r}]]; (*MatCoef - matriz dos coeficientes de OO.*)

```

```

θ = Det[MatCoef]; (*θ determinante de MatCoef*)

```

```

}

```

(*Esta condição abaixo explicita a forma normal procurada dependendo de A . Caso não seja possível encontrar a forma normal até o Jato de ordem " jato", então apresenta a mensagem a seguir.*)

```

If[θ == 0, {KernelOHom = NullSpace[Table[col[w], {w, r}]];

```

```

prod = KernelOHom . Table[a_s h[s], {s, r}];
termres = Plus @@ prod;
FN[x_-, y_-, z_-, w_-] = A . {x, y, z, w} + termres;
If[ k <= jato, {(k++); Goto[passo1]},
  Print[" O Sistema não tem termos ressonantes até o jato de order ", jato, "."];}]

```

Os leitores interessados no caso $n = 3$, bastam comparar o caso $n = 2$ e $n = 4$, retirando uma variável do caso $n = 4$, o que implicará na redução de de uma variável nas seguintes partes: na rotina que calcula quantos termos de ordem k existem para a matriz A , na obtenção dos monômios, na rotina do cálculo do Jacobiano dos elementos de HH e no cálculo das imagens do operador homológico.

Referências Bibliográficas

- [1] Langford, W.F., A Review of Interactions of Hopf and Steady-state Bifurcations, *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. (1983), 215-237.
- [2] Wiggins, Stephen, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer, 1990.
- [3] Arrowsmith, D.K. and Place, C.M., *An introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press.

- [4] Ioos, G. and Joseph, D. D. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*: New York, Springer-Verlag, 1980.
- [5] Langford, W. F. and Ioos, G., Interactions of Hopf and pitchfork bifurcations, in Mittelmann, H. D. and Weber, J. (Eds), *Bifurcations Problems and their Numerical Solution*, ISNM 54: Basel, Birkhauser, 1980, 103-134.
- [6] Langford, W. F., Periodic and steady-state mode interactions lead to tori, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **37**, 22-48, 1979.
- [7] Palis Júnior, J. e Melo, W., *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Impa, Rio de Janeiro 1977.
- [8] Wagenknecht, Thomas, An analytical study of a two degrees of freedom hamiltonian system associated to the reversible hyperbolic umbilic, *preprint*.
- [9] Hoffman, Kenneth e Kunze, Ray , *Álgebra Linear*, 2. ed., Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1979.
- [10] Chow, S.-N., Li, Chengzhi and Wang, Duo , *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*, Cambridge University Press, 1994.

- [11] Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Science*, **20**, 130-141, 1963.
- [12] Ruelle, D. and Takens, F., On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, **20**, 167-192, 1971.
- [13] Bissett, E. J., Interaction of steady and periodic bifurcating modes with imperfection effects in reaction-diffusion system, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **40**, 224-241, 1981.
- [14] Chow, S.-N. and Hale, J.K., Bifurcation and nonlinear oscillations (preprint), Brown University, 1980.
- [15] Guckenheimer, J., On a codimension two bifurcation, in Rand, D. A. and Young, L. S. (Eds). *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, 1980*, Lecture Notes in Mathematics No. 898: Berlin and New York, Springer-Verlag. 1981, 99-142.
- [16] Holmes, P. J., Unfolding a degenerate nonlinear oscillator: a codimension two bifurcation, *Annals of the New York Academy of Science*, **357**, *Nonlinear Dynamics*, 473-488, 1980.
- [17] Ioos, G. and Langford, W. F., Conjectures on the routes to turbulence via bifurcations, *Annals of the New York Academy of Science*, **357**, *Nonlinear Dynamics*, 489-505, 1980.
- [18] Keener, J. P., Infinite period bifurcation and global bifurcation branches, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **41**, 127-144, 1981.
- [19] Bauer, L., Keller, H. B. and Reiss, E. L., Multiple eigenvalues lead to secondary bifurcation, *SIAM Review*, **17**, 101-122, 1975.
- [20] Golubitsky, M. and Schaeffer, D., Imperfect bifurcation in the presence of symmetry, *Communications in Mathematics Physics*, **67**, 205-232, 1979.
- [21] Poston, T. and Stewart, I. N., *Catastrophe Theory and its Applications*: London, Pitman, 1978.
- [22] Thom, R., *Structural Stability and Morphogenesis*: Reading, Mass., W. A. Benjamin, 1975.

- [23] Arnold, V., *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires*: Moscow, Mir., 1980.
- [24] Poénaru, V. 1976, *Singularités C^∞ en Présence de Symétries*, Lectures notes in mathematics, 510. (Berlin - New York : Springer Verlag)
- [25] Rodrigues, H. M., *Introdução ao método alternativo e aplicações*, Notas Didáticas do ICMC, **28**, São Carlos, 1997.
- [26] Guckenheimer, J., Multiple bifurcation problems of codimension two (preprint) University of California, Santa Cruz, 1981.
- [27] Takens, F., Singularities of vector fields, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques*, **43**, 47-100, 1973.
- [28] Ioos, G. and Joseph, D. D., *Elementary Stability and Bifurcation Theory*: New York, Springer-Verlag, 1980.
- [29] Crandall, M. G. and Fabinowitz, P. H., Bifurcation from simple eigenvalues, *Journal of Functional Analysis*, **8**, 321-340, 1971.
- [30] Andronov, A. A., Leotovich, E. A., Gordon, I. I. and Maier, A. G., *Theory of Bifurcation of Dynamical System on a Plane (English translation)*: New York, Wiley, 1973.
- [31] Golubitsky, M. and Langford, W. F., Classification and unfolding of degenerate Hopf bifurcation, *Journal of Differential Equations*, **41**, 375-415, 1981.
- [32] Marsden, J. and McCracken, M., *The Hopf Bifurcation and its Applications*: New York, Springer-Verlag, 1976.
- [33] Naimark, J., On some cases of periodic motions depending on parameters, *Doklady Akademii Nauk USSR*, **129**, 736-739, 1959.
- [34] Sacker, R. J., *On Invariant Surface and Bifurcation of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations*, IMM-NYU 333: New York, 1964.
- [35] Arneodo, A., Coulet, P. and Tresser, C., Possible new strange attractors with spiral structure, *Communications in Mathematical Physics*, **79**, 573-579, 1981.

- [36] Shil'nikov, L. P., A case of the existence of a denumerable set of periodic motions, *Soviet Mathematics - Doklady*, **6**, 163-166, 1965.
- [37] Keener, J. P., Secondary bifurcation in nonlinear diffusion reaction equations, *Studies in Applied Mathematics*, **55**, 187-211, 1976.
- [38] Langford, W. F., Modulation instability and weak turbulence, in Bednarek, A. R. and Cesari, L. (Eds), *Dynamical Systems II*: New York, Academic Press, 1982, 589-593.
- [39] Shearer, M., Coincident bifurcation of equilibrium and periodic solutions of evolution equations (preprint), 1979.
- [40] Fenstermacher, P. R., Swinney, H. L. and Gollub, J. P., Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **94**, 103-129, 1979.
- [41] Lin, J. and Kahn, P. B., Qualitative dynamics of three species predator-prey systems, *Journal of Mathematics Biology*, **5**, 257-268, 1978.
- [42] Colulet, P., Tresser, C. and Arneodo, A., Transition to turbulence for doubly periodic flows, *Physics Letters*, **77A**, 327-331, 1980.
- [43] Ioos, G. *Bifurcation of Maps and Applications*. North Holland: Amsterdam, 1979.
- [44] Zoladek, H., On the versality of symmetric vector fields in the plane, *Math. USSR-Sb.*, **48**, 463-492, 1984.