

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Dissertação de Mestrado**

# **A Dinâmica dos Templates e os Blocos Isolantes**

**Autor: Hernán Roberto Montúfar López**

**Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ketty Abaroa de Rezende**

Fevereiro de 2002

# A Dinâmica dos Templates e os Blocos Isolantes

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por HERNÁN ROBERTO MONTÚFAR LÓPEZ e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de fevereiro de 2002.

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ketty Abaroa de Rezende

Orientadora

Banca examinadora:

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ketty Abaroa de Rezende

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2002 e aprovada pela Banca  
Examinadora composta pelos Profs. Drs.

---

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

---

Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ketty Abaroa de Rezende

Dedico este trabalho a Sonia e minha filha  
Lesly, a meu irmão Percy e minha irmãzinha  
Patricia, a meu pai Policarpio e em especial  
a minha mãe Leonor (in memoriam).

# Agradecimentos

À Dr<sup>a</sup>. Ketty Abaroa de Rezende pela orientação deste trabalho, pela paciência e pela dedicação à tarefa árdua que é ensinar.

A meus pais pelo incentivo e apoio, a meus irmãos pelos bons momentos que passamos. Também agradeço a compreensão da minha ausência nos momentos críticos.

Ao departamento de Matemática do IMECC-UNICAMP pelo amparo e suporte.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Aos funcionários da UNICAMP em especial aos da secretaria de Pós-graduação do IMECC representados na pessoa da Sra. Cidinha.

Ao povo brasileiro.

À minha terra natal, AREQUIPA a “Cidade Branca”.

Ao Professor Walter Torres Montes pela “contribuição” na minha formação.

Aos amigos que, de diferentes maneiras, tornaram cada dia mais interessante.

Finalmente a Deus pela conclusão deste trabalho.

# Resumo

---

Nesta dissertação abordamos o estudo de fluxos hiperbólicos em particular os fluxos de Smale em  $S^3$ . Especial atenção é dado ao atrator de Lorenz.

Através do índice homológico de Conley e da utilização dos grafos de Lyapunov construímos blocos isolantes para cada conjunto invariante isolado do conjunto recorrente por cadeia, com finitas componentes, dos fluxos de Smale.

Por outro lado, consideramos *templates* para as componentes não triviais do conjunto recorrente por cadeia de fluxos hiperbólicos, via o teorema de Birman-Williams.

Concluimos que dada a matriz geométrica  $A$ , que descreve o *subshift* de tipo finito, diversos *templates* e diversos blocos isolantes estão associados a  $A$ . O mergulho dos *templates* nos blocos isolantes é um problema em aberto a menos de uns casos triviais.

# Abstract

---

In this thesis hyperbolic flows, in particular Smale flows on  $S^3$  are studied. We also give special attention to the Lorenz attractor.

Utilizing Conley homology index theory together with Lyapunov graphs we construct isolating blocks for the isolated invariant sets of the finite component chain recurrent set of Smale flows.

On the other hand we consider templates for non-trivial chain recurrent components of hyperbolic flows using the Birman-Williams theorem.

We conclude by focusing on the geometric matrix  $A$  which describes subshifts of finite type and consider the various isolating blocks and templates associated to  $A$ . The embedding of templates in the isolating blocks is an open problem except for some trivial cases.

# Sumário

<b>Lista de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Dinâmica recorrente</b>	<b>3</b>
1.1 Recorrência por cadeia. . . . .	3
1.2 Hiperbolicidade. . . . .	5
1.3 Estabilidade. . . . .	7
1.3.1 Variedade estável e instável. . . . .	7
1.3.2 Estabilidade estrutural. . . . .	8
<b>2 O índice de Conley</b>	<b>10</b>
2.1 O índice de Morse topológico. . . . .	10
2.2 O índice de Conley homotópico. . . . .	12
2.3 Desigualdades de Morse generalizadas. . . . .	14
<b>3 Turbulência em conjuntos invariantes</b>	<b>18</b>
3.1 A dimensão topológica. . . . .	18
3.2 Conjuntos caóticos. . . . .	20
3.2.1 Partições de Markov. . . . .	22
3.2.2 Subshifts de tipo finito. . . . .	24
3.3 Atratores. . . . .	28
<b>4 Fluxos em grafos de Lyapunov abstratos</b>	<b>34</b>
4.1 Grafos de Lyapunov. . . . .	34

<b>Sumário</b>	<b>ix</b>
4.2 Blocos isolantes de fluxos em $S^3$ .	38
4.2.1 Fluxos de Morse.	39
4.2.2 Fluxos de Morse-Smale.	43
4.2.3 Fluxos de Smale.	48
<b>5 Mergulho das órbitas periódicas</b>	<b>53</b>
5.1 Nós e links.	53
5.2 Templates.	57
5.3 O teorema do template.	61
<b>6 Templates e blocos isolantes</b>	<b>64</b>
6.1 Dinâmica no template.	64
6.1.1 A matriz de um template.	65
6.1.2 O Template de uma matriz.	68
6.2 Mergulho do template no bloco isolante.	72
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>76</b>

# Lista de Figuras

2.1	Singularidade de índice $k$ . . . . .	11
2.2	Conjunto invariante não trivial. . . . .	14
2.3	Bloco isolante de uma singularidade e órbita periódica de índice 1. . . . .	15
3.1	Ferradura de Smale. . . . .	20
3.2	Iteração da ferradura de Smale. . . . .	20
3.3	Retângulo. . . . .	22
3.4	Partição de Markov da ferradura de Smale. . . . .	23
3.5	Ferradura de Franks. . . . .	25
3.6	Ferraduras com a mesma dinâmica. . . . .	26
3.7	Atrator de Lorenz. . . . .	30
3.8	Bifurcação período-double e Pitchfork. . . . .	32
4.1	Grafos dangling das funções de Morse. . . . .	40
4.2	Alguns grafos de Morse. . . . .	40
4.3	Cilindro sólido com uma singularidade. . . . .	41
4.4	Um bloco isolante de uma singularidade de índice 2. . . . .	42
4.5	Outro bloco isolante de uma singularidade de índice 2 . . . . .	42
4.6	Fluxo de Morse-Smale de Franks. . . . .	43
4.7	Grafos dangling de funções Morse-Smale. . . . .	44
4.8	Alça redonda. . . . .	45
4.9	Bloco isolante com uma alça connectante invariante. . . . .	45
4.10	Bloco isolante com uma alça invariante. . . . .	46
4.11	Bloco isolante com uma alça connectante decrescente. . . . .	46

4.12	Grafo do fluxo Morse-Smale de Franks. . . . .	47
4.13	Alguns grafos de Morse-Smale. . . . .	47
4.14	Fluxos no toro e seus respectivos grafos dangling. . . . .	48
4.15	Grafos dangling da ferradura . . . . .	51
4.16	Grafos dangling da ferradura com $k$ alças. . . . .	52
4.17	Bloco isolante para uma matriz com $k = 2$ . . . . .	52
5.1	Idéia de nós: trefoil e figura-oito. . . . .	53
5.2	Diagramas dos nós: trefoil e figura-oito. . . . .	54
5.3	Nó turbulento. . . . .	54
5.4	Sinais da orientação induzida. . . . .	55
5.5	Operações de Reidemeister. . . . .	55
5.6	Diagramas equivalentes: nó figura oito. . . . .	56
5.7	Alguns nós tóricos. . . . .	56
5.8	Soma conexa. . . . .	57
5.9	O Template ferradura. . . . .	58
5.10	O template de Lorenz. . . . .	59
5.11	Template Lorenz-like $\mathcal{L}(m, n)$ . . . . .	60
5.12	Template universal $\mathcal{V}$ . . . . .	60
5.13	Vizinhança <i>flowbox</i> $N(\Lambda)$ . . . . .	62
6.1	Direções no <i>template</i> e o <i>template</i> engordado. . . . .	65
6.2	Template rotulado para obter sua matriz . . . . .	66
6.3	Partição de Markov refinada da ferradura de Smale. . . . .	70
6.4	Template da partição de Markov refinada. . . . .	70
6.5	Grafos rotulados com templates. . . . .	73
6.6	Mergulho do template de Lorenz. . . . .	73
6.7	Template Lorenz engordado unido a uma bola. . . . .	74

# Introdução

---

O estudo dos fluxos em  $S^3$  é uma área de intensa investigação que obteve consideráveis progressos nos últimos 20 anos. Aprofundou-se o estudo das possíveis dinâmicas realizáveis em fluxos de  $S^3$  [31], [27], [15], [9]. Por outro lado, desenvolveu-se o estudo da topologia das órbitas periódicas de um fluxo, isto é o tipo de nós e *links* destas órbitas [32], [1], [2], [20], [18], [30], [29]. O propósito principal deste trabalho é relacionar estas duas abordagens, dinâmica e topologia através de objetos combinatórias como os grafos de Lyapunov (blocos isolantes) e os *templates*.

Com a descoberta da ferradura de Smale abriu-se a possibilidade de definir uma nova classe de fluxos que além de singularidades e órbitas periódicas possuem conjuntos de tipo (suspensão de) ferradura.

A caracterização desses conjuntos caóticos desenvolveu-se nos anos 60 por Markov e Bowen, que estabeleceram que a dinâmica discreta do conjunto invariante de um homeomorfismo  $f$  poderia ser modelada tomando uma partição de retângulos e codificando o comportamento de  $f$  nesses retângulos em matrizes geométricas. Associadas a estas matrizes desenvolveu-se uma dinâmica simbólica utilizando-se os *subshifts* de tipo finito. Tomando a suspensão de *subshifts* obteve-se modelos para os conjuntos caóticos dos fluxos de Smale.

Muitas perguntas surgiram nos anos oitenta sobre quais suspensões de *subshifts* de tipo finito poderiam-se realizar em  $S^3$ . Franks responde, via grafos de Lyapunov, quais coleções de suspensões de *subshifts* de tipo finito poderiam ser realizados simultaneamente em fluxos não-singulares de Smale. Seguindo esta abordagem e construindo blocos isolantes, em [9] os fluxos de Smale em  $S^3$  foram classificados. Verificou-se através do índice de Conley e técnicas homológicas que estes grafos de Lyapunov poderiam ser definidos para quaisquer fluxo suave em  $S^3$  e de fato em qualquer

variedade.

Outros conjuntos caóticos, como o atrator de Lorenz, foram estudados por Williams que apresentou um modelo topológico para esse atrator. A partir deste modelo Birman e Williams desenvolveram o *knot-holder*, hoje conhecido como *template* e estudaram os tipos de nós que poderiam ocorrer em alguns desses templates, em especial o de Lorenz.

O teorema do *template*, fundamental nesta área, fez a conexão entre fluxos hiperbólicos e *templates*. Essencialmente cada componente não trivial do conjunto recorrente por cadeia poderia ser modelado por um *template*. Isto inclui componentes de dimensão três, atratores de dimensão dois e conjuntos caóticos do tipo sela de dimensão um. Daremos especial atenção a modelagem dos *templates* associados a conjuntos invariantes de dimensão um, dado pela suspensão de *subshifts* de tipo finito.

O presente trabalho propõe uma estrutura teórica num contexto geométrico-qualitativo, em variedades compactas  $M$ , que permitirá uma visão da dinâmica tanto nos blocos isolantes como nos *templates*. Descrevemos a seguir a divisão deste trabalho.

No capítulo 1 reunimos alguns resultados relacionados com dinâmica hiperbólica, que serão necessárias nos capítulos posteriores. Este capítulo nos servirá como uma breve introdução básica à teoria dos sistemas dinâmicos. No capítulo 2 apresentamos o índice de Conley como uma generalização do índice de Morse. Este índice será utilizado no grafo de Lyapunov que permitirá a construção dos blocos isolantes. A noção de dimensão topológica e a dinâmica dos conjuntos recorrentes que apresentam caos são introduzidos no capítulo 3. Para estes conjuntos estudamos as partições de Markov e seus refinamentos. Também apresentamos o processo  $DA$  de conjuntos básicos de dimensão topológica dois e três. No capítulo 4 mostramos um teorema que caracteriza os grafos de Lyapunov de um fluxo. Em particular para os fluxos de Smale apresentamos diversas construções de seus blocos isolantes correspondentes a cada vértice do grafo de Lyapunov. Já no capítulo 5 abordamos o mergulho das órbitas periódicas de fluxos hiperbólicos, neste sentido o *template* é uma ferramenta combinatorial que nos ajuda a determinar os tipos de *links*, e sua existência está dada pelo teorema de Birman e Williams. Finalmente, no capítulo 6 exploramos as relações entre os *templates* e os blocos isolantes para fluxos de Smale.

Campinas, fevereiro de 2002

Hernán Montúfar López

# Capítulo 1

## Dinâmica recorrente

Através deste capítulo e em geral no estudo da dinâmica global dos sistemas não-lineares, fazemos uso extenso da linearização local. Um dos objetivos é descrever geometricamente a ação de  $\phi_t$  sobre subconjuntos de  $M$ , obtendo uma classificação do comportamento assintótico do conjunto de soluções, em especial pontos fixos, órbitas periódicas e conjuntos recorrentes mais exóticos.

### 1.1 Recorrência por cadeia.

No estudo da estrutura das órbitas do fluxo  $\phi_t$  estudamos noções de recorrência que são mais fracas que periodicidade, mas ainda formam conjuntos invariantes compactos <sup>(i)</sup>. Apresentaremos a seguir uma definição mais fraca que periodicidade e que no entanto é trivialmente satisfeito por um ponto periódico. Sua importância apresenta-se nas “funções de Lyapunov” e no estudo das propriedades de estabilidade do fluxo.

Para um fluxo  $\phi_t$  sobre  $M$  uma *órbita* de  $p \in M$  é o conjunto  $\mathcal{O}(p) = \{\phi_t p | t \in \mathbb{R}\}$ . Se o campo vetorial induzido pelo fluxo  $\phi_t$  é nulo em  $p$ , sua órbita se reduz a  $p$  e dizemos que é uma *singularidade* de  $\phi_t$ . Caso contrário a aplicação  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ ,  $\alpha(t) = \phi_t(p)$ , é uma imersão, dando origem a uma *órbita periódica* se  $\alpha$  não é biunívoca e *órbita regular* caso contrário. Singularidades e órbitas periódicas tem recorrência simples e são conjuntos limites em  $M$  segundo o comportamento assintótico das órbitas. Denotemos por  $P$  a união das singularidades e órbitas periódicas.

---

<sup>(i)</sup>Um conjunto no espaço fase é dito *invariante* se é uma união de órbitas.

Agora apresentamos algumas noções de recorrência que são mais fracas que periodicidade. Uma generalização de tais conjuntos é o conjunto não-errante. Um ponto  $p$  é dito *não-errante* para o fluxo  $\phi_t$  se para qualquer vizinhança  $U$  de  $p$ , existe  $t$  arbitrariamente grande tal que  $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$ . Denotaremos por  $\Omega$  o *conjunto não errante*, isto é, o conjunto dos pontos não-errantes de  $\phi_t$ . Observamos que os pontos não-errantes estão sobre ou próximo a órbitas que retornam á vizinhança  $U$  em tempos específicos.

A definição de conjunto não-errante é um conceito fraco de recorrência, mas Conley define uma idéia mais fraca de recorrência [7], chamada a recorrência por cadeia e é usada em discussões de estabilidade estrutural.

**DEFINIÇÃO** Um ponto  $x \in M$  é chamado *recorrente por cadeia* para o fluxo  $\phi_t$ , se para qualquer  $T, \varepsilon > 0$  existem pontos  $x_i \in M$  e números reais  $t_i > T$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  tal que  $x = x_0 = x_n$  e  $d(\phi_{t_i}x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ , onde  $d(\cdot, \cdot)$  é uma métrica sobre  $M$ .

O *conjunto recorrentes por cadeia*, denotado por  $R$ , é o conjunto dos pontos recorrentes por cadeia de  $\phi_t$ . Este é um conjunto invariante compacto para o fluxo. Daqui temos a seguinte seqüência de conjuntos invariantes compactos.

$$\bar{P} \subset \Omega \subset R$$

Resultados de Conley [7] e Wilson [34] estabelecem que qualquer fluxo suave admite uma função suave decrescente ao longo de órbitas que não pertencem a  $R$  e constante nas componentes de  $R$ .

**TEOREMA 1.1** *Se  $\phi_t$  é um fluxo contínuo sobre  $M$  então existe uma função continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

1. *Se  $x \notin R$ ,  $f(\phi_t(x)) < f(\phi_s(x))$  quando  $t > s$ .*
2. *Se  $x, y \in R$ ,  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow$  Dado  $\varepsilon > 0$  existem pontos  $x_1 = x, x_2, \dots, x_n = y, x_{n+1}, \dots, x_{2n} = x$  em  $R$  e números reais  $t(i) > 0$ , tal que  $d(\phi_{t(i)}x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ ,  $1 \leq i < 2n$ .*

A função  $f$  do teorema acima é dita *função de Lyapunov*.

## 1.2 Hiperbolicidade.

Toda análise de comportamento caótico em muitos sistemas dinâmicos envolve a identificação de conjuntos invariantes hiperbólicos, apesar de ser difícil sua verificação. A noção de hiperbolicidade de um conjunto invariante compacto  $\Lambda$  de um fluxo sobre uma variedade  $M$  é definida em termos da restrição sobre  $\Lambda$  da derivada  $D\phi_t$ , ou seja, sobre  $TM_\Lambda = p^{-1}\Lambda$ , onde  $p : TM \rightarrow M$  é a projeção natural.

Uma singularidade  $p$  do fluxo  $\phi_t$  é *hiperbólica* se os autovalores de  $DX(p)$  tem parte real diferente de zero, onde  $X(x) = d\phi_t(x)|_{t=0}$ . Segue-se dos resultados clássicos em teoria espectral que existe uma decomposição do espaço tangente,  $T_pM = E_p^s \oplus E_p^u$ , onde os subespaços invariantes  $E_p^s$  e  $E_p^u$  correspondem ao espectro das partes reais negativas e positivas dos autovalores, respectivamente. Desta forma podemos encontrar constantes  $C, \lambda > 0$  tal que

$$\|D\phi_t(v)\| \geq Ce^{\lambda t}\|v\| \text{ para } v \in E_p^u, t \geq 0$$

$$\|D\phi_t(v)\| \leq C^{-1}e^{-\lambda t}\|v\| \text{ para } v \in E_p^s, t \geq 0$$

para alguma norma riemanniana  $\|\cdot\|$  sobre  $T_pM$ . Os subespaços  $E_p^s$  e  $E_p^u$  são ditos os *subespaços estável e instável* da singularidade  $p$ .

Estas definições podem estender-se para uma órbita periódica ou ainda para um conjunto invariante compacto.

**DEFINIÇÃO** Um conjunto invariante compacto  $\Lambda$  para um fluxo  $\phi_t$ , tem uma *estrutura hiperbólica* se o fibrado tangente de  $M$  restrito a  $\Lambda$ ,  $TM_\Lambda$ , pode ser escrito como uma soma de Whitney de três fibrados invariantes por  $D\phi_t$ ,  $TM_\Lambda = E^u \oplus E^s \oplus E^c$ , tal que

1.  $E^c$  é gerado pelo campo vetorial  $X$  tangente ao fluxo.
2. Existem constantes  $C, \lambda > 0$  tal que

$$\|D\phi_t(v)\| \geq Ce^{\lambda t}\|v\| \text{ para } v \in E^u, t \geq 0$$

$$\|D\phi_t(v)\| \leq C^{-1}e^{-\lambda t}\|v\| \text{ para } v \in E^s, t \geq 0$$

onde  $\|\cdot\|$  é alguma métrica riemanniana.

Intuitivamente temos que a condição de hiperbolicidade significa que existe uma variação contínua, das “direções ortogonais” ao fluxo, ao longo do qual o fluxo se expande e se contrai respectivamente.

Se  $\Lambda$  é um ponto de equilíbrio para o fluxo  $\phi_t$  então  $E^c$  é vazio. Temos então que para cada ponto  $x \in \Lambda' = \Lambda \setminus \{x : X(x) = 0\}$ , onde  $X(x) = d\phi_t(x)/dt|_{t=0}$ , o espaço tangente  $TM_x$  decompõe-se numa soma direta de subespaços

$$TM_x = E_x^s \oplus E_x^u \oplus E_x^c$$

onde  $E_x^c = \mathbb{R}X(x)$ , isto é,  $E_x^c$  é gerado pelo vetor velocidade  $X(x)$ . Assim o fibrado vetorial um-dimensional

$$E^c = \{\mathbb{R}X(x); x \in \Lambda'\}$$

é chamado o *fibrado centro*. Por outro lado as uniões  $E^s = \bigcup\{E_x^s : x \in \Lambda\}$ ,  $E^u = \bigcup\{E_x^u : x \in \Lambda\}$  são subfibrados de  $TM_\Lambda$  denominados *fibrado estável* e *instável* respectivamente. Logo, temos a soma de Whitney

$$TM_\Lambda = E^u \oplus E^s \oplus E^c$$

Note que as dimensões de  $E_x^s$  e  $E_x^u$  não são necessariamente constantes sobre todo  $\Lambda$ , mas é constante em cada subconjunto conexo de  $\Lambda$ .

Sendo  $R$  hiperbólico temos que as órbitas periódicas do sistema são densas em  $R$  [12] o que em geral não acontece com o conjunto não-errante  $\Omega$ . Assim uma consequência da hiperbolicidade de  $R$  é expressa no seguinte teorema.

**TEOREMA 1.2 (DESCOMPOSIÇÃO ESPECTRAL)** *Suponha que o conjunto recorrente por cadeia  $R$  de um fluxo tem uma estrutura hiperbólica. Então  $R$  pode ser escrito univocamente como a união disjunta  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_k$  onde cada  $\Lambda_i$  é compacto, invariante e cada  $\phi_t : \Lambda_i \rightarrow \Lambda_i$  é topologicamente transitivo* <sup>(ii)</sup>.

Os conjuntos  $\Lambda_i$  são chamados *conjuntos básicos* e são as componentes conexas de  $R$  <sup>(iii)</sup>.

---

<sup>(ii)</sup>Topologicamente transitivo para um fluxo significa que existe uma órbita densa.

<sup>(iii)</sup>O fato de um fluxo ter um número finito de conjuntos básicos será de muita importância em nosso trabalho posterior.

## 1.3 Estabilidade.

Em sistemas dinâmicos a palavra “estabilidade” é usado em dois sentidos diferentes. A primeira é com respeito as órbitas do sistema: uma órbita é estável(atratora) se suas órbitas próximas permanecem próximas quando o tempo cresce. A segunda é com respeito ao sistema em si: o comportamento dinâmico global não é muito afetado se as leis de evolução são ligeiramente modificadas(estabilidade estrutural).

Nesta seção abordaremos o segundo sentido, mais precisamente: Quando um fluxo é estruturalmente estável? A hiperbolicidade é uma condição muito importante bem como a transversalidade das variedades estáveis e instáveis.

### 1.3.1 Variedade estável e instável.

Para a singularidade hiperbólica temos os seguintes conjuntos estável e instável

$$W^s(p) = \{x : d(\phi_t x, p) \rightarrow 0 \text{ como } t \rightarrow \infty\}$$

$$W^u(p) = \{x : d(\phi_t x, p) \rightarrow 0 \text{ como } t \rightarrow -\infty\}$$

onde  $d(\cdot, \cdot)$  é a distancia em  $M$  dada pela norma riemanniana. Estes conjuntos são  $C^k$  subvariedades imersas injetivamente em  $M$  dos subespaços lineares correspondentes.

Para um subconjunto invariante  $\Lambda$  de  $M$  o conjunto estável e instável  $W^s(x)$ ,  $W^u(x)$  de um ponto  $x \in \Lambda$  são definidos como

$$W^s(x) = \{y : d(\phi_t y, \phi_t x) \rightarrow 0 \text{ como } t \rightarrow \infty\}$$

$$W^u(x) = \{y : d(\phi_t y, \phi_t x) \rightarrow 0 \text{ como } t \rightarrow -\infty\}$$

onde  $d(\cdot, \cdot)$  é a distancia em  $M$  no sentido de alguma métrica riemanniana. O termo “instável” as vezes é convencional no caso geral, pois significa “estabilidade no tempo negativo”. Apesar da etimologia a instabilidade não exclui estabilidade pois pode acontecer  $W^s(x) = W^u(x)$ , com  $x$  ponto de equilíbrio.

No teorema a seguir veremos que estas são cópias imersas injetivas do fibrado vetorial  $E^s$  e  $E^u$  respectivamente.

TEOREMA 1.3 (VARIEDADE ESTÁVEL E INSTÁVEL) *Suponha que  $\Lambda$  é um conjunto invariante hiperbólico compacto para o fluxo  $\phi_t$ . Então para cada  $x \in \Lambda$  os conjuntos  $W^s(x)$  e  $W^u(x)$  são a imagem de uma imersão injetora suave de um espaço euclidiano sobre  $M$ . Além disso, o espaço tangente  $T_x(W^s(x)) = E_x^s$  e  $T_x(W^u(x)) = E_x^u$ .*

As variedades  $W^s(x)$  e  $W^u(x)$  são chamadas respectivamente a *variedade estável* e *instável* de  $x$ . Definimos também a *variedade estável fraca*  $w^s(x)$  e a *variedade instável fraca*  $w^u(x)$  por

$$w^s(x) = \bigcup_{t=-\infty}^{\infty} W^s(\phi_t(x)) \quad e \quad w^u(x) = \bigcup_{t=-\infty}^{\infty} W^u(\phi_t(x))$$

Cada um destes é uma copia imersa injetiva do fibrado  $E^s$  ou  $E^u$  restrito à órbita de  $x$ , isto é, se a dimensão de  $E_x^s$  é  $k$  então  $w^s(x)$  é:

1. um  $k$ -plano imerso, se  $x$  é um ponto de equilíbrio.
2. um  $(k+1)$ -plano imerso, se  $\phi_t x \neq x$  para  $t > 0$ , ou
3. uma imersão de um fibrado sobre  $S^1$  com fibra um  $k$ -plano, se  $x$  esta sobre uma órbita periódica.

Os resultados análogos são válidos para  $w^u(x)$ , ver [28].

### 1.3.2 Estabilidade estrutural.

Dos trabalhos de Smale sobre estabilidade dos fluxos surge a seguinte necessidade:

- Achar uma relação de equivalência razoável entre fluxos sobre uma variedade, e;
- Um subconjunto aberto e denso do espaço de todos os fluxos para o qual a classe de equivalência possa ser classificada por invariantes numéricos e algébricos.

Isto corresponde a estabelecer uma relação de equivalência entre os fluxos  $\phi_t$  que exprima a estrutura geométrica das órbitas. Dois fluxos  $\phi_t : X \rightarrow X$  e  $\psi_t : Y \rightarrow Y$  são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  que leva órbitas de  $\phi$  a órbitas de  $\psi$  preservando suas orientações. Um fluxo  $\phi_t$  é *estruturalmente estável* se qualquer fluxo suficientemente próximo é topologicamente equivalente a  $\phi_t$ .

Uma propriedade fundamental na estabilidade de um fluxo é a condição de transversalidade.

DEFINIÇÃO Um fluxo  $\phi_t : M \rightarrow M$  com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico  $R$  satisfaz a *condição de transversalidade* se para cada  $x, y \in R$ , as variedades  $w^s(x)$  e  $w^u(y)$  se interceptam transversalmente.

Condições necessárias e suficientes para estabilidade estrutural foram conjecturadas por Smale [28] e a suficiência foi provada por J. Robbin e C. Robinson. No final do século  $XX$  a conjectura foi solucionada afirmativamente por R. Mañé [23] para difeomorfismos e por S. Hayashi [19] para fluxos.

TEOREMA 1.4 *Um fluxo  $\phi_t : M \rightarrow M$  sobre uma variedade fechada é estruturalmente estável se e só se tem conjunto recorrente por cadeia hiperbólico e satisfaz a condição de transversalidade.*

A  $\Omega$ -estabilidade é a estabilidade restrita ao conjunto não-errante e portanto é mais fraca que a estabilidade estrutural, mas existe uma conjectura similar chamada a Conjectura da  $\Omega$ -Estabilidade e que também foi resolvida para fluxos em [19], mas inicialmente foi resolvida para difeomorfismos por J. Palis [25] como uma consequência dos trabalhos de Mañé.

Finalmente, o teorema 1.4 dá uma nova definição para a estabilidade de um fluxo, dizemos que  $\phi_t$  é um *fluxo estruturalmente estável* se seu conjunto recorrente por cadeia é hiperbólico e satisfaz a condição de transversalidade. Uma classe maior de fluxos são os que tem  $\Omega$  hiperbólico e  $\Omega = \bar{P}$  denominados *fluxos Axioma A*<sup>(iv)</sup>. No próximo capítulo estudaremos fluxos estruturalmente estáveis específicos como fluxos de Morse, Morse-Smale e Smale.

---

<sup>(iv)</sup>Esta classe é maior devido ao fato que conjuntos recorrentes por cadeia hiperbólicos é equivalente a Axioma A e a propriedade de não ciclos [12].

## Capítulo 2

# O índice de Conley

Nosso objetivo nesta seção é apresentar as desigualdades de Morse generalizadas o qual relaciona o fluxo e a topologia da variedade. Para isto apresentamos o índice de Conley como uma generalização do índice de Morse, obtendo assim informação acerca da estrutura dinâmica de conjuntos invariantes compactos. O índice de Conley é uma ferramenta topológica que serve para entender a existência e estrutura de objetos dinâmicos em sistemas não-lineares. Inicialmente apresentamos o índice de Morse clássico que dá uma classificação de pontos críticos não-degenerados. Em seguida, apresentamos o índice de Conley para conjuntos invariantes isolados mais gerais e finalizamos a seção com as desigualdades de Morse generalizadas.

### 2.1 O índice de Morse topológico.

Dada uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , um ponto  $p \in M$  é chamado *ponto crítico* de  $f$  se a aplicação induzida  $df_p : TM_p \rightarrow \mathbb{R}$  é zero. Um ponto crítico  $p \in M$  é *não-degenerado* quando a matriz Hessiana nesse ponto,  $d^2f(p)$ , é não singular. Assim por exemplo, se  $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$  com  $\mu \neq 0$  então  $x = \frac{1}{2}$  é um ponto crítico não-degenerado e se  $f(x) = x^3$  então  $x = 0$  é um ponto crítico degenerado.

Segue-se do teorema da função implícita que os pontos críticos não-degenerados são isolados, logo só existem um numero finito de tais pontos em  $M$ . A função  $f$  é chamada uma *função de Morse* se cada um de seus pontos críticos é não-degenerado.

DEFINIÇÃO O *índice de Morse* de um ponto crítico  $p$  de  $f$  é a dimensão maximal do subespaço de  $T_pM$  onde  $d^2f(p)$  é definida negativa.

O lema de Morse mostra que o comportamento de  $f$  em  $p$  pode ser completamente descrito pelo índice, permitindo uma classificação razoável de tais pontos críticos.

LEMA 2.1 (LEMA DE MORSE) *Seja  $p$  um ponto crítico não-degenerado de  $f$ . Então existe um sistema de coordenadas locais*

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{n-k})$$

*centrado em  $p$  tal que  $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(p) - |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$  nestas coordenadas onde  $k$  é o índice de  $f$  em  $p$ .*

Se  $p$  é um ponto crítico não-degenerado de  $f$  com índice  $k$  então  $p$  é uma singularidade do sistema gradiente  $\dot{x} = -\nabla f(x)$  e a matriz  $-d^2f(p)$ , do sistema linearizado  $\dot{y} = -d^2f(p)y$ , tem  $k$  autovalores positivos e  $(n - k)$  autovalores negativos. O teorema da variedade estável e instável assegura que podemos encontrar um conjunto aberto  $N$  contendo  $p$  no qual  $W^u(p)$  intercepta  $N$  numa  $k$ -bola  $B^k$  e  $W^s(p)$  intercepta  $N$  numa  $(n - k)$ -bola  $B^{n-k}$ .

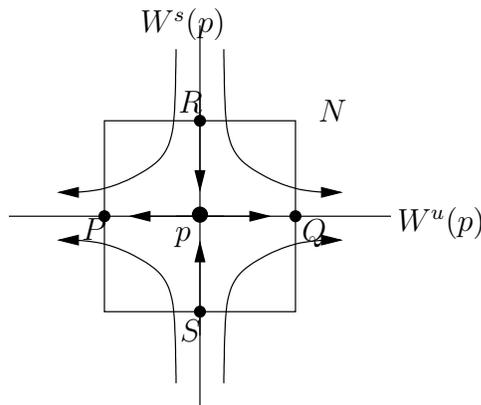


Figura 2.1: Singularidade de índice  $k$ .

Na figura 2.1,  $P$  e  $Q$  representam  $S^{k-1}$ , a fronteira da  $k$ -bola  $B^k$  representado pelo segmento  $\overline{PQ}$  e  $\overline{RS}$  representa  $B^{n-k}$ . Se denotamos o conjunto dos pontos de entrada e de saída do fluxo sobre  $\partial N$  por

$$N^+ = \{x \in \partial N; \exists \varepsilon > 0 \text{ onde } \phi_{[-\varepsilon, 0]}(x) \cap N = \emptyset\}$$

e

$$N^- = \{x \in \partial N; \exists \varepsilon > 0 \text{ onde } \phi_{[0, \varepsilon]}(x) \cap N = \emptyset\}$$

respectivamente então  $N$  pode ser representado como  $B^k \times B^{n-k}$ , enquanto  $N^-$  e  $N^+$  podem ser representados como  $\partial B^k \times B^{n-k}$  e  $B^k \times \partial B^{n-k}$  respectivamente, obtendo a equivalência homotópica

$$(N, N^-) \sim (B^k, \partial B^k) \sim (B^k, S^{k-1})$$

que mediante um colapso da fronteira obtemos  $N/N^-$ , uma  $k$ -esfera (pontuada),  $N/N^- = \Sigma^k$ . Similarmente  $N/N^+ = \Sigma^{(n-k)}$ . Desta forma dizemos que o *índice de Morse topológico* de  $p$  é uma  $k$ -esfera (pontuada).

Na próxima seção apresentaremos a extensão de Conley do índice de Morse para conjuntos invariantes mais gerais que pontos críticos não-degenerados. Neste contexto o índice de Morse topológico será um caso particular do índice de Conley.

## 2.2 O índice de Conley homotópico.

Um *par topológico* é um par ordenado  $(N, L)$  de espaços tal que  $L$  é um subespaço fechado de  $N$ . Se  $L$  consiste de um ponto, o par é dito um *espaço pontuado*. Dado qualquer par  $(N, L)$  o espaço pontuado  $(N/L, [L])$  é definido como segue:

$$(N/L, [L]) := ((N \setminus L) \cup [L], [L])$$

onde  $[L]$  denota a classe de equivalência de pontos em  $L$  na relação:  $x \sim y \Leftrightarrow x = y$  ou  $x, y \in L$ . A topologia no espaço pontuado  $(N/L, [L])$  é a topologia quociente. Se  $L = \emptyset$  então

$$(N/L, [L]) := (N \sqcup x_0, x_0)$$

onde  $x_0$  é um ponto fora de  $N$ .

Consideraremos uma classe especial de conjuntos invariantes com a propriedade que estes sejam maximais num conjunto compacto. Desta forma, um conjunto compacto  $N \subset M$  é uma *vizinhança isolante* se

$$Inv(N) := \{x \in N \mid \phi(\mathbb{R}, x) \subset N\} \subset int(N)$$

onde  $int(N)$  denota o interior de  $N$ .  $\Lambda$  é um *conjunto invariante isolado* se  $\Lambda = Inv(N)$  para alguma vizinhança isolante  $N$ .

EXEMPLO 2.1 Qualquer componente  $\Lambda$  do conjunto recorrente por cadeia  $R$  de um fluxo  $\varphi_t$  é um conjunto invariante isolado. Se  $f$  é uma função de Lyapunov associado ao fluxo e  $c = f(\Lambda)$  então para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, a componente de  $f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$  que contém  $\Lambda$  é uma vizinhança isolante para  $\Lambda$ .

Para definir o índice de Conley consideramos regiões de especial interesse no espaço de fase. Se  $\Lambda$  é um conjunto invariante isolado, um par topológico  $(N, L)$  é dito *par índice* para  $\Lambda$  se:

1.  $\Lambda = \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus L))$  e  $N \setminus L$  é uma vizinhança de  $\Lambda$ .
2.  $L$  é *positivamente invariante* em  $N$ , isto é, dado  $x \in L$  e  $\phi([0, t], x) \subset N$  então  $\phi([0, t], x) \subset L$
3.  $L$  é um *conjunto de saída* para  $N$ ; isto é, dado  $x \in N$  e  $t_1 > 0$  tal que  $\phi(t_1, x) \notin N$  então existe  $t_0 \in [0, t_1]$  tal que  $\phi([0, t_0], x) \subset N$  e  $\phi(t_0, x) \in L$

As seguintes questões são demonstradas em [7]:

- Se  $\Lambda$  é um conjunto invariante isolado então existe um par índice para  $\Lambda$ .
- Se  $(N, L)$  e  $(N', L')$  são par índices para um conjunto invariante isolado  $\Lambda$  então

$$(N/L, [L]) \sim (N'/L', [L'])$$

DEFINIÇÃO O *índice de Conley homotópico* de  $\Lambda$  é

$$h(\Lambda) = [N/L, [L]]$$

onde  $[\cdot]$  denota a classe de equivalência do espaço pontuado e  $(N, L)$  é qualquer par índice para  $\Lambda$ .

Observamos da definição que o índice de Conley homotópico é o tipo de homotopia de um espaço topológico.

EXEMPLO 2.2 Calculamos o índice de Conley homotópico de um conjunto invariante em  $\mathbb{R}^2$  contendo três singularidades  $p, q$  e  $r$ . Figura 2.2.

O conjunto  $N$  contém as singularidades. Se  $L = \partial N$  então  $(N, L)$  é um par índice para  $\Lambda = \{p, q, r, \overline{pq}, \overline{qr}\}$ . Logo  $N/L$  é do mesmo tipo de homotopia que a 2-esfera pontuada  $\Sigma^2$ . Segue-se que  $h(\Lambda) = [\Sigma^2, a]$ ,  $a \in \Sigma^2$ . Por outro lado, se  $p \in \mathbb{R}^2$  é um ponto crítico não-degenerado com

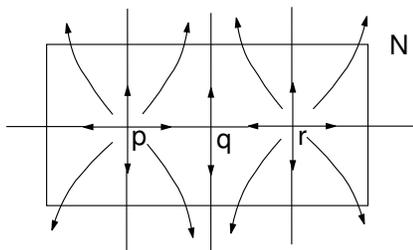


Figura 2.2: Conjunto invariante não trivial.

índice de Morse 2 então  $p$  é uma fonte(repulsor) para o fluxo gradiente  $\dot{x} = -\nabla f(x)$ . Assim o índice de Conley de  $p$  é  $\Sigma^2$ , portanto o conjunto invariante isolado  $\Lambda = \{p, q, r, \overline{pq}, \overline{qr}\}$  tem o índice de Conley de uma fonte.

Pares índice são objetos muito gerais para o cálculo do índice de Conley e para nossas construções posteriores. A seguir definimos uma noção mais estrita.

DEFINIÇÃO Um *bloco isolante* é uma vizinhança isolante  $N$  tal que

$$N^- = \{x \in N | \varphi([0, T], x) \not\subseteq N, \forall T > 0\}$$

é fechado.

A existência do bloco isolante para fluxos suaves é uma consequência imediata da existência de funções de Lyapunov. Além disso  $(N, N^-)$  é um par índice para  $inv(N)$ .

EXEMPLO 2.3 Se  $\Lambda$  é uma componente do conjunto recorrente por cadeia  $R$  com  $f(\Lambda) = c$  e  $\epsilon > 0$  tal que não existem valores críticos em  $[c - \epsilon, c + \epsilon]$  então definindo  $N$  como a componente de  $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$  que contém  $\Lambda$  e  $N^- = f^{-1}(c - \epsilon) \cap N$  temos que  $N$  é um bloco isolante para  $\Lambda$ . As seguintes figuras são exemplos de blocos isolantes que serão estudados no capítulo 4.

## 2.3 Desigualdades de Morse generalizadas.

O estudo das relações entre o fluxo e a topologia da variedade se inicia com o célebre teorema de Poincaré que relaciona a característica de Euler da variedade  $M$  com a soma global dos índices

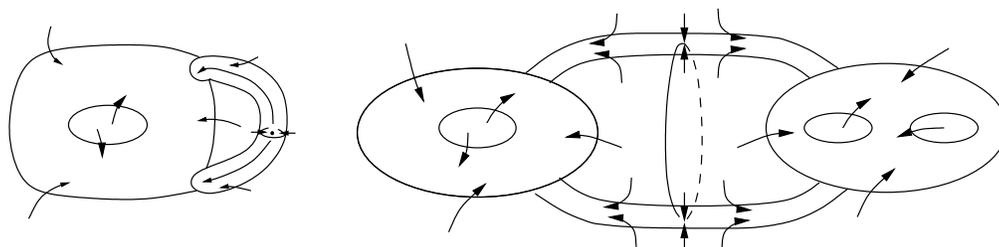


Figura 2.3: Bloco isolante de uma singularidade e órbita periódica de índice 1.

das singularidades de um fluxo gradiente sobre  $M$ ,  $\dot{x} = -\nabla f(x)$  com  $f$  uma função de valor real sobre  $M$ .

Marston Morse generalizou o resultado de Poincaré ao estabelecer uma série de desigualdades relacionando o número de pontos críticos de uma função de Morse com os números de Betti de  $M$ . Assim para cada  $i \geq 0$  as desigualdades de Morse são:

$$\beta_i - \beta_{i-1} + \dots \pm \beta_0 \leq M_i - M_{i-1} + \dots \pm M_0$$

onde  $M_i$  é o número de pontos críticos de  $f$  com índice  $i$  e  $\beta_i$  o  $i$ -ésimo número de Betti de  $M$ . A última destas desigualdades é a igualdade do teorema de Poincaré

$$\sum_{j=0}^{\dim(M)} (-1)^{\dim(M)-j} M_j = \sum_{j=0}^{\dim(M)} (-1)^{\dim(M)-j} \beta_j = \chi(M)$$

onde  $\chi(M)$  é a característica de Euler de  $M$ . Estas desigualdades são estabelecidas por um argumento geométrico que analisa as modificações que sofre a topologia do conjunto  $M^c = \{x \in M \mid f(x) \leq c\}$  quando  $c$  cresce desde o mínimo até o máximo de  $f$ .

Uma generalização destas desigualdades de Morse, foi dada por Conley ao calcular invariantes algébricos sobre seu índice homotópico, considerado então como um “índice homológico”. O *índice de Conley homológico* é definido por

$$CH_*(\Lambda) := H_*(N/L, [L])$$

onde  $H_*$  denota a homologia com coeficientes num corpo, assim  $H_*(N/L, [L]) \approx H_*(N, L)$ . Como a homologia de espaços homotópicos é a mesma, o índice homológico é bem definido.

**OBSERVAÇÃO 1** Em geral, não é verdade que  $H_*(N/L, [L]) \approx H_*(N, L)$  para um par índice  $(N, L)$ . No entanto, pode-se provar que sempre existirão pares índice onde tal isomorfismo é válido. Neste

sentido os blocos isolantes apresentados nos exemplos satisfazem esta propriedade já que  $L = f^{-1}(c - \epsilon)$  é um retrato de deformação de uma vizinhança de si mesmo em  $N = f^{-1}(c - \epsilon, c + \epsilon)$ . Segue-se então por resultados de topologia algébrica que  $H_*(N/L, [L]) \approx H_*(N, L)$  e portanto é isomorfo a  $CH_*(\Lambda)$ .

EXEMPLO 2.4 Para a singularidade  $p$  do sistema  $\dot{x} = -\nabla f(x)$  onde  $p$  é um ponto crítico não degenerado de  $f$  com índice  $k$  temos que a vizinhança isolante encontrada é:

$$(N, N^-) = (B^k \times B^{n-k}, \partial B^k \times B^{n-k}) = ([-1, 1]^k \times [-1, 1]^{n-k}, \partial([-1, 1]^k) \times [-1, 1]^{n-k})$$

O índice de Conley homológico  $CH_*(p)$  resulta do cálculo da homologia do espaço sendo:

$$CH_j(p) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

Já para as órbitas periódicas  $\gamma$  com variedade instável orientada de dimensão  $k + 1$  temos

$$CH_j(\gamma) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } j = k, k + 1 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

A seguir apresentamos um caso particular do teorema de Conley que generaliza as desigualdades de Morse.

PROPOSIÇÃO 2.2 *Seja  $M$  uma 3-variedade fechada, orientável e  $\phi_t : M \rightarrow M$  um fluxo suave com um número finito de componentes recorrentes por cadeia  $R = \cup_i R_i$ . Se  $h_j^i$  são as dimensões do índice de Conley homológico de  $R_i$ , para  $j = 0, 1, 2, 3$ . Então*

$$\sum_{i,j} (-1)^j h_j^i = \chi(M)$$

onde  $\chi(M)$  é a característica de Euler de  $M$ . Além disso, se  $\partial M \neq \emptyset$  a igualdade acima se dá para  $\chi(M, \partial M^-)$  onde  $\partial M^-$  é a parte da fronteira de  $M$  por onde o fluxo sai.

Como uma consequência destas desigualdades de Morse generalizadas temos a *igualdade de Poincaré-Hopf*. Se  $R$  é uma componente do conjunto recorrente por cadeia e  $(N, L)$  um par índice para  $R$  com  $h_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  as dimensões do índice de Conley homológico de  $R$ . Então

$$-h_3 + h_2 - h_1 + h_0 = e^+ - G^+ - e^- + G^-$$

onde  $e^+$  ( $e^-$ ) é o número de componentes fronteira de entrada (saída) de  $N$  e

$$G^+ = \sum_{k=1}^{e^+} g_k^+ \qquad G^- = \sum_{k=1}^{e^-} g_k^-$$

com  $g_k^+$  ( $g_k^-$ ) o género da  $k$ -ésima componente de fronteira da entrada (saída) de  $N$ .

## Capítulo 3

# Turbulência em conjuntos invariantes

Inicialmente definimos a dimensão topológica de um conjunto invariante  $\Lambda$ . Isto será de muita utilidade para classificar algumas classes de fluxo, como veremos posteriormente. Observe que cada singularidade ou órbita periódica para fluxos estruturalmente estáveis tem uma dinâmica do tipo atratora, repulsora ou do tipo sela. Nos parágrafos a seguir estudaremos os casos onde a dimensão de  $\Lambda$  é um e dois respectivamente.

### 3.1 A dimensão topológica.

Definiremos a dimensão de uma componente conexa do conjunto recorrente por cadeia  $R$  de um fluxo, fato que será de muita importância em nosso trabalho posterior. Singularidades e órbitas periódicas são exemplos de tais conjuntos aos quais temos associado uma dimensão, zero e um respectivamente. Existem outros conjuntos recorrentes por cadeia que não tem a estrutura de uma variedade surgindo então a necessidade de definir uma noção geral de dimensão (a dimensão topológica) que utilizaremos para nossos propósitos. Referências para dimensão topológica são [21] e [10].

Uma componente conexa  $\Lambda \subset R$  tem *dimensão topológica 0*,  $\dim(\Lambda) = 0$ , se para cada ponto  $p \in \Lambda$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$ , suficientemente pequena, tal que  $\partial U \cap \Lambda = \emptyset$ . Desta definição temos que as singularidades tem dimensão topológica zero assim como, o conjunto de Cantor triádico  $C$  [10]. Note que as órbitas periódicas não tem dimensão topológica zero.

Uma componente conexa  $\Lambda \subset R$  tem *dimensão topológica 1*,  $\dim(\Lambda) = 1$ , se  $\dim(\Lambda) \neq 0$  e

para cada ponto  $p \in \Lambda$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$ , suficientemente pequena, tal que  $\partial U \cap \Lambda$  tem dimensão topológica zero. Como uma órbita periódica  $\gamma$  tem dimensão topológica diferente de zero e cada ponto  $p \in \gamma$  tem uma vizinhança suficientemente pequena que tem fronteira um conjunto de dois pontos então  $\dim(\gamma) = 1$ . Em geral temos que se  $k$  é um inteiro não-negativo então  $\dim(\Lambda) \leq k$  se para cada ponto  $p \in \Lambda$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$ , suficientemente pequena, tal que  $\dim(\partial U \cap \Lambda) \leq k - 1$ . Agora dizemos que  $\Lambda$  tem *dimensão topológica*  $k$ ,  $\dim(\Lambda) = k$ , se  $\dim(\Lambda) \leq k$  mas  $\dim(\Lambda) \not\leq k - 1$ . Finalmente temos que a dimensão topológica é um *invariante topológico*, isto é, se  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são homeomorfos então  $\dim(\Lambda_1) = \dim(\Lambda_2)$ .

Componentes conexas de  $R$  de dimensão um e dois serão estudadas separadamente a fim de fazer uma melhor exposição da dinâmica dos conjuntos recorrentes por cadeia. Para o caso de uma função de Lyapunov trivial, isto é, com um único valor, temos que o conjunto recorrente por cadeia  $R$  é toda a variedade e portanto a dimensão topológica de  $R$  é 3. Como exemplo clássico temos o fluxo proveniente da suspensão standard do automorfismo de Thom (automorfismo toral hiperbólico),  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Construamos então o automorfismo toral hiperbólico. Definimos uma relação de equivalência  $\sim$  sobre  $\mathbb{R}^2$  por  $x \sim y$ , se e só se,  $x - y \in \mathbb{Z}^2$ . O quociente  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  é um toro 2-dimensional,  $T^2$ . Seja  $A \in M_2$  com coeficientes inteiros e  $\det(A) = \pm 1$  tal que seus autovalores tem norma diferente de 1. Assim  $A$  é um automorfismo da grade  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  e induz uma aplicação  $\bar{A}$  sobre  $T^2$  mediante a projeção natural  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ . Tal aplicação é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  e é chamada de *automorfismo toral hiperbólico*.

A importância do automorfismo toral hiperbólico está na densidade de seus pontos periódicos em  $T^2$ . Agora consideremos o fluxo suspensão  $\phi_t$  associado com  $\bar{A}$  que está definido sobre

$$M = T^2 \times \mathbb{R}/[(x, s + 1) \sim (\bar{A}(x), s)]$$

e esta dado por  $\phi_t(x, s) = (x, s + t)$ .

Finalizamos esta seção deixando claro que a dimensão topológica não está relacionado com a natureza complicada (caos) do sistema. Existem outras dimensões como a dimensão de Hausdorff<sup>(i)</sup> que medem esta natureza complicada e que ao contrário da dimensão topológica estas são normalmente números reais não-negativos e não-inteiros.

---

<sup>(i)</sup>Geralmente este tipo de dimensões são chamadas dimensões fractais.

### 3.2 Conjuntos caóticos.

Inicialmente construímos a aplicação ferradura introduzida por Smale[28]. O fluxo obtido desta aplicação mediante uma suspensão, é fundamental no estudo de dinâmicas mais complicadas (caótica) pois é o exemplo mais simples de um conjunto básico não-trivial admitindo uma descrição via “dinâmica simbólica”.

Começamos com o quadrado unitário  $D = I \times I$  no plano e definimos a aplicação  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f(D) \cap D$  consiste de duas componentes que são aplicadas de forma rectilínea por  $f$ .

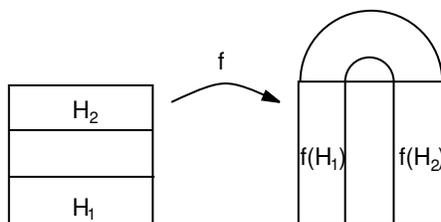


Figura 3.1: Ferradura de Smale.

Assim,  $f|_{D \cap f^{-1}D}$  é uma aplicação linear e sobre cada  $H_i$  a aplicação  $f$  comprime segmentos horizontais e estira segmentos verticais. Agora mediante uma iteração de  $f$  obtemos que  $D \cap fD \cap \dots \cap f^n D$  é a união de  $2^n$  faixas verticais e  $f^{-n}(D \cap fD \cap \dots \cap f^n D)$  é a união de  $2^n$  faixas horizontais.

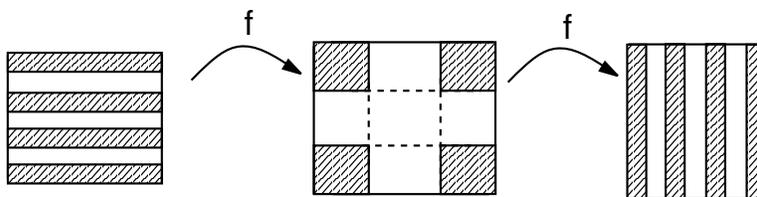


Figura 3.2: Iteração da ferradura de Smale.

A interseção destes conjuntos sobre todo  $n \in \mathbb{Z}$  é o produto cartesiano de dois conjuntos de Cantor e portanto tem dimensão zero. Desta forma muitos pontos  $x \in D$  abandonam  $D$  e aqueles

que permanecem formam o conjunto  $\Lambda = \{x | f^i x \in D, -\infty < i < \infty\}$  o qual tem uma estrutura topológica complicada.

Devido ao fato que  $f$  é linear nas faixas (horizontais e verticais) temos que para  $x \in \Lambda$  sua variedade estável local é um segmento de linha horizontal passando através de  $x$  e sua variedade instável local é um segmento de linha vertical passando através de  $x$ . Segue-se que  $\Lambda$  é um conjunto invariante hiperbólico para  $f$ .

Para cada  $x \in \Lambda$  associemos uma seqüência bi-infinita de dois símbolos, 0 e 1, no espaço de símbolos  $\Sigma_2 = \Pi_{-\infty}^{\infty} \{0, 1\}$  dado por

$$\Psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2 \text{ com } x \rightarrow \Psi(x) = (a_n(x)) \quad (3.1)$$

onde

$$a_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f^n(x) \in H_1 \\ 1 & \text{se } f^n(x) \in H_2 \end{cases}$$

Considerando  $\Sigma_2$  com a topologia produto, este é compacto, perfeito e totalmente desconexo, isto é, um conjunto de Cantor. Existe também um automorfismo natural de  $\Sigma_2$  o shift  $\sigma$  dado por  $\sigma(a) = b$  onde  $b_i = a_{i-1}$ . Bowen, mostrou que  $\Psi$  é um homeomorfismo, isto é,  $f|_{\Lambda}$  é topologicamente conjugado a  $\sigma$ .

O espaço  $\Sigma_2$  junto com a aplicação  $\sigma$ ,  $(\Sigma_2, \sigma)$ , é dito *full-shift* devido ao fato que todas as seqüências possíveis são permitidas. Definimos também a “matriz geométrica”  $A$ , a partir de  $H_1$  e  $H_2$  por

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(H_i) \cap H_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f(H_i) \cap H_j = \emptyset \end{cases}$$

então  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 3.2.1 Partições de Markov.

Dentro da teoria de partição de Markov podemos generalizar as faixas do exemplo acima. Nas definições a seguir consideremos  $\Lambda$  um conjunto básico de dimensão zero para um difeomorfismo  $f$ , também para cada  $x \in R$  adotamos a seguinte notação.

$$W^s(x, R) \equiv W_{loc}^s(x) \cap R \quad W^u(x, R) \equiv W_{loc}^u(x) \cap R$$

DEFINIÇÃO Um conjunto fechado  $R \subset \Lambda$  é um *retângulo* se  $W_{loc}^s(x) \cap W_{loc}^u(y) \in R$  e é exatamente um ponto, para todo  $x, y \in R$ .

OBSERVAÇÃO 2 Um retângulo  $R$  pode ser identificado pelo produto cartesiano  $W^s(x, R) \times W^u(x, R)$  pois se  $x \in \Lambda$ , existem  $\delta, \varepsilon > 0$  tal que  $R = \{y \mid \text{existem } w, z \text{ com } y = W_\varepsilon^u(w) \cap W_\varepsilon^s(z), w \in W_\delta^s(x), z \in W_\delta^u(x)\}$  é um retângulo.

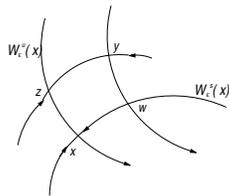


Figura 3.3: Retângulo.

DEFINIÇÃO Uma *partição de Markov* para  $\Lambda$  é uma coleção finita de retângulos  $\Omega = \{R_i\}_{i=1}^N$  tal que:

1.  $\Lambda = \bigcup_{i=1}^m R_i$ .
2.  $R_i \cap R_j = \emptyset$ .
3. Para  $x \in R_i$  e  $f(x) \in R_j$

$$f(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f(x), R_j) \quad \text{e} \quad W^u(f(x), R_j) \subset f(W^u(x, R_i))$$

4. Para  $x \in R_i \cap f^{-1}(R_j)$

$$R_j \cap f(W^u(x, R_i)) = W^u(f(x), R_j) \quad R_i \cap f(W^s(f(x), R_j)) = W^s(x, R_i)$$

Uma partição de Markov para a ferradura de Smale são os dois retângulos  $R_1 = H_1 \cap \Lambda$  e  $R_2 = H_2 \cap \Lambda$  que são tipicamente conjuntos de Cantor, mas os consideraremos como retângulos usuais.

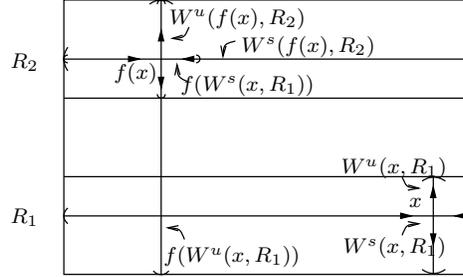


Figura 3.4: Partição de Markov da ferradura de Smale.

Bowen [4] mostrou que todo conjunto básico tem uma partição de Markov.

Diremos que uma partição de Markov  $\Omega = \{R_i\}_{i=1}^N$  esta associada a uma coleção de *handles*<sup>(ii)</sup>  $H = \{H_i\}_{i=1}^N$  se para cada retângulo  $R_i$  existe uma “grade retangular”<sup>(iii)</sup> limitando um handle e tal que seus pontos de interseção são elementos do retângulo. Desta forma os retângulos da partição de Markov são da forma  $\Lambda \cap H_j$ .

**PROPOSIÇÃO 3.1** *Uma partição de Markov para  $\Lambda$  pode ser refinado a uma partição de Markov associada a uma coleção de handles disjuntos.*

*Demonstração.* Refinamos a partição  $\Omega$  a outra partição cujos retângulos  $R'_k \subset R_j$  para algum  $j$ , tem diâmetro arbitrariamente pequeno com folhas estáveis e instáveis *conectados ordenadamente*. Uma folha estável é conectada ordenadamente se qualquer ponto  $c \in W^s(x, R_j)$  entre 2 pontos  $a, b \in W^s(x, R_j) \cap R'_k$  pertence também a  $W^s(x, R_j) \cap R'_k$ , para qualquer  $x$ . Similarmente para as folhas instáveis. Um suposto retângulo  $R'_k$  cujas folhas estáveis e instáveis são conectadas ordenadamente é dito *celular*. Seja  $\{R'_k\}$  a coleção de todos os retângulos celulares maximais, isto é,  $W^s(x, R'_k)$  ( resp.  $W^u(x, R'_k)$ ) é um conjunto maximal conectado ordenadamente em  $W^s_\varepsilon(x) \cap R_j$  (resp.  $W^u_\varepsilon(x) \cap R_j$ ) onde  $R'_k \subset R_j$ .

<sup>(ii)</sup>Um *handle* é uma copia mergulhada de  $I \times I$ .

<sup>(iii)</sup>Uma “grade retangular” é uma grade cujas linhas são “paralelas” e tem uma correspondência bijetiva entre seus pontos de intercessão.

Segue-se da construção que os  $R'_k$  novamente formam uma partição de Markov de  $\Lambda$ .

Seja  $R'_k$  um destes retângulos, para  $x \in R'_k$  escolhamos os segmentos maximais  $I^s(x) \subset W_{loc}^s(x)$  e  $I^u(x) \subset W_{loc}^u(x)$  tendo seus pontos fronteiras em  $R'_k$ . Como  $R'_k$  é o produto cartesiano  $W^s(x, R'_k) \times W^u(x, R'_k)$  então o conjunto

$$G_k = \bigcup_{x \in R'_k} I^s(x) \cup I^u(x)$$

é uma grade retangular limitando um disco dois dimensional, o handle  $H'_k$ . Agora os handles  $H'_k$  são disjuntos dois a dois pois os  $R'_k$  são fechados e  $R'_k \cap R'_l = \emptyset$  ■

A informação obtida pela partição de Markov de um difeomorfismo  $f$  e conjunto invariante pode ser codificado pela “matriz geométrica”.

DEFINIÇÃO A *matriz geométrica*  $A$  correspondente a  $f$  e um conjunto de handles

$$H = \{H_i : i = 1 \cdots n\}$$

é definido por  $A(i, j) =$  número de componentes conexas de  $f(H_i) \cap H_j$ .

### 3.2.2 Subshifts de tipo finito.

Da matriz geométrica podemos formar um grafo  $G$  com  $n$  vertices e  $A(i, j)$  arestas orientadas do vértice  $i$  ao vértice  $j$  para finalmente obter um “*subshift* de tipo finito”. Este procedimento será apresentado para uma matriz de inteiros não-negativos,  $A$ , em geral.

Para uma matriz  $n \times n$  de inteiros não negativos,  $A$ , podemos construir um *subshift* de tipo finito. Formamos um grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $a_{ij}$  arestas orientadas do vértice  $i$  ao vértice  $j$ . Seja  $E = \{e_i\}$  o conjunto de arestas e  $E^{\mathbb{Z}}$  o espaço de seqüências de elementos de  $E$  indexado por  $\mathbb{Z}$ , definimos  $\sum_A \subset E^{\mathbb{Z}}$  por:  $e = (\dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots) \in \sum_A$  se para cada  $i \in \mathbb{Z}$  a aresta  $e_i$  termina no vértice de  $G$  onde  $e_{i+1}$  começa. O homeomorfismo shift  $\sigma : E^{\mathbb{Z}} \rightarrow E^{\mathbb{Z}}$  é definido por  $\sigma(e) = f$  onde  $f_i = e_{i-1}$ .

DEFINIÇÕES

1. Um *subshift de tipo finito*,  $\sigma(A)$ , associado a uma matriz  $A$  de ordem  $n \times n$  é o homeomorfismo shift restrito a  $\sum_A$ ,  $\sigma(A) = \sigma|_{\sum_A} : \sum_A \rightarrow \sum_A$ .

2. O *fluxo suspensão* de um *subshift* de tipo finito é definido sobre o espaço<sup>(iv)</sup>

$$X_A = \Sigma_A \times R / [(x, s + 1) \sim (\sigma(x), s)]$$

e o fluxo  $\phi_t$  sobre  $X_A$  é definido por  $\phi_t(x, s) = (x, s + t)$ .

Denotaremos também *subshift de tipo finito irredutível* aos *subshifts* de tipo finito associados a uma “matriz irredutível”. Uma matriz inteira não negativa  $A$  de ordem  $n \times n$  é dita *irredutível* se para cada  $1 \leq i, j \leq n$  existe um  $k > 0$  com  $(A^k)_{ij} \neq 0$ . A irredutibilidade da matriz refere-se ao fato que o grafo  $G$  tem a propriedade que para qualquer dois vértices existe um caminho orientado entre eles.

Bowen [5] mostrou que os conjuntos caóticos de dimensão um são homeomorfos a suspensão de *subshift* de tipo finito irredutível. Por conjunto caótico entendemos, um conjunto invariante com dependência sensitiva sobre condições iniciais, topologicamente transitiva e com órbitas periódicas simples.

**TEOREMA 3.2** *Se  $\phi_t$  é um fluxo com conjunto recorrente por cadeia  $R$  e  $\Lambda$  é um conjunto básico uni-dimensional então  $\phi_t$  restrito a  $\Lambda$  é topologicamente equivalente a suspensão de um subshift de tipo finito irredutível.*

Apresentamos agora um exemplo de uma ferradura que não é topologicamente conjugado a um full-shift mas o é a um *subshift* de tipo finito,  $(\Sigma_A, \sigma)$ . Escolha uma região  $X$  no plano consistindo de três discos e duas faixas, conectadas como mostra a figura 3.5

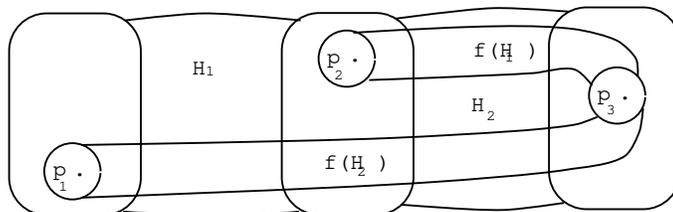


Figura 3.5: Ferradura de Franks.

<sup>(iv)</sup>Note que  $\Sigma_A$  foi identificado com um subconjunto de uma variedade, isto é uma consequência do teorema de Bowen para difeomorfismos, veja também o teorema 3.2.

Definamos uma aplicação  $f$  que aplica  $X$  dentro de si de tal forma que os pontos  $\{p_1, p_2, p_3\}$  formam um atrator periódico de período três e as faixas sejam folheadas como na ferradura de Smale construído anteriormente, para detalhes ver [15]. O conjunto  $\Lambda \subset h_1 \cup h_2$  tem uma estrutura hiperbólica e é com efeito um conjunto básico de  $f$ . Suspendendo  $f$  obtemos dois conjuntos básicos uma órbita periódica atratora e um conjunto caótico.

Da maneira em que  $f$  aplica as faixas temos que  $f|_\Lambda$  não é conjugado a um full-shift pois  $f(h_1) \cap h_1 = \emptyset$  e assim  $a_n(x) = 0$  implica  $a_{n+1}(x) = 1$  portanto o sistema  $(\Sigma_A, \sigma)$  consiste de todas as seqüências bi-infinitas em  $\{0, 1\}$  tal que se a  $n$ -ésima posição contém o símbolo 0 então a  $(n-1)$ -ésima posição contém o símbolo 1. Portanto,  $f|_\Lambda$  é topologicamente conjugado a um *subshift* de tipo finito associado com a “matriz geométrica”  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Observe que o teorema de Bowen acima caracteriza os conjuntos básicos. Mas, numa vizinhança, ainda suficientemente pequena, do conjunto unidimensional pode-se ter diferentes estruturas. Portanto, diferentes fluxos, com a mesma dinâmica num conjunto básico unidimensional, podem ser equivalentes a um único *subshift* de tipo finito irreduzível. Assim, por exemplo, considere as três aplicações associadas à matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , ver figura 3.6. Aqui  $f = g = h$  quando são restritas as duas faixas horizontais, desta maneira os fluxos suspensão correspondentes  $\phi_t, \varphi_t$  e  $\psi_t$  tem conjuntos invariantes  $\Lambda$  com a mesma dinâmica. Mas numa vizinhança de  $\Lambda$  os três fluxos são diferentes.

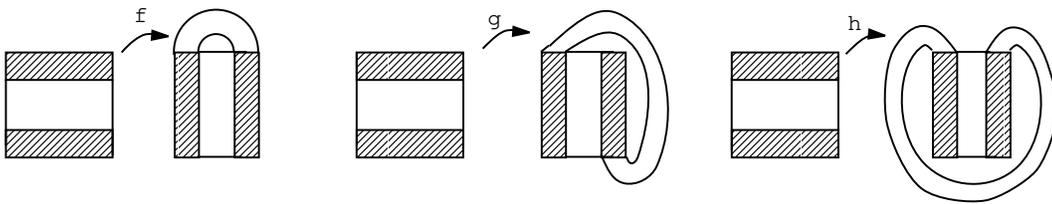


Figura 3.6: Ferraduras com a mesma dinâmica.

No afã de classificar os *subshifts* de tipo finito temos que se  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  é um *subshift* de tipo finito então é topologicamente conjugado ao shift  $\sigma(A)$  onde  $A$  é da forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & * & & A_n \end{pmatrix}$$

e cada  $A_i$  é irredutível. Aqui cada parte recorrente por cadeia  $\Delta_i$  de  $\sigma$  é topologicamente conjugado ao *subshift* associado a  $A_i$ , isto é,  $\sigma|_{\Delta_i}$  é topologicamente conjugado a  $\sigma(A_i)$ . Então o conjunto recorrente por cadeia de  $\sigma(A)$  consiste de  $\bigcup_{i=1}^n \Delta_i$  pois as demais matrizes não-nulas fora da diagonal representam órbitas não-recorrentes que vão de  $\Delta_i$  a  $\Delta_j$ ,  $i \neq j$ .

Desta forma, matrizes diferentes darão origem a *subshifts* de tipo finito topologicamente conjugados. Isto corresponde a fazer certas mudanças na escolha da partição de Markov. R. Williams [31] caracterizou a conjugação topológica para os *subshifts* de tipo finito. Mais precisamente, suponha que  $A$  e  $B$  são matrizes inteiras quadradas não-negativas e  $\sigma(A)$ ,  $\sigma(B)$  os correspondentes *subshifts* de tipo finito. Então  $\sigma(A)$  é topologicamente conjugado a  $\sigma(B)$  se, e só se,  $A$  é fortemente shift equivalente <sup>(v)</sup> a  $B$ . Assim, por exemplo, se  $A = (2)$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  então  $\sigma(A)$  é topologicamente conjugado a  $\sigma(B)$ .

Existe outra caracterização de matrizes com dinâmica equivalente, que está ligada ao teorema de Bowen. Duas matrizes quadradas inteiras não-negativas  $A$  e  $B$  são *fluxo equivalentes* se os *subshifts* de tipo finito  $\sigma(A)$  e  $\sigma(B)$  tem fluxo suspensão topologicamente equivalentes.

B. Parry e D. Sullivan [26] caracterizaram esta relação de equivalência da seguinte maneira:  $A$  e  $B$  são fluxo equivalentes se, e só se, existem matrizes  $A_1 = A$ ,  $A_2, \dots$ ,  $A_m = B$  tais que  $A_i$  é shift equivalente a  $A_{i+1}$  ou  $A_i$  tem a forma de um das duas matrizes abaixo e  $A_{i+1}$  tem a forma da outra.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

<sup>(v)</sup>Duas matrizes inteiras quadradas não-negativas  $A$  e  $B$  são *fortemente shift equivalentes* se existem matrizes inteiras não negativas (não precisamente quadradas)  $R_i$  e  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tais que  $A = R_1 S_1$ ,  $= S_n R_n$  e  $R_{i+1} S_{i+1} = S_i R_i$  para  $1 \leq i < n$ .

Como consequência deste resultado temos que se  $A$  e  $B$  são fluxo equivalentes então  $\det(I-A) = \det(I-B)$ . Por outro lado, Bowen e Franks [6] mostraram que se  $A$  e  $B$  são fluxo equivalentes então tem-se o isomorfismo de grupos  $\mathbb{Z}^n/(I-A)\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m/(I-B)\mathbb{Z}^m$ .

Finalizamos este parágrafo com o teorema de Franks [14] que resolve o problema de decidir quando duas matrizes representam a mesma dinâmica com respeito a fluxo equivalência.

**TEOREMA 3.3** *Suponha que  $A$  e  $B$  são matrizes inteiras irredutíveis não-negativas e que nenhuma das quais é uma matriz permutação<sup>(vi)</sup>. As matrizes  $A$  e  $B$  são fluxo equivalentes se, e só se,  $\det(I-A) = \det(I-B)$  e  $\mathbb{Z}^n/(I-A)\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{Z}^m/(I-B)\mathbb{Z}^m$ .*

No próximo capítulo estendemos nosso estudo nestes conjuntos caóticos e construímos uma subvariedade com fronteira onde os conjuntos caóticos mergulham naturalmente.

### 3.3 Atratores.

No estudo qualitativo dos fluxos encontramos “regiões de atração” que contém uma singularidade, uma órbita de índice zero ou algum outro conjunto invariante. Denotaremos por *atrator hiperbólico trivial* a essas singularidades ou órbitas de índice zero. E por *atrator não trivial* aos demais conjuntos invariantes que estas regiões contem, dentro os quais obteremos os “atratores estranhos”.

**DEFINIÇÃO** Um subconjunto  $\Lambda \subset M$  é um *atrator* para  $\phi_t$  se existe uma vizinhança  $U$  de  $\Lambda$  tal que:

1.  $\phi_t(U) \subset \text{int}(U)$
2.  $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(U)$
3.  $\Lambda = R(\phi_t|_U)$

Como um exemplo, consideremos o fluxo no tempo negativo do retrato de fase ilustrado na figura 2.2. Observamos que o intervalo  $\Lambda$  entre as duas singularidades  $p$  e  $r$  satisfaz as duas primeiras condições de nossa definição porém não é um atrator pois não satisfaz a terceira condição,

<sup>(vi)</sup>Uma matriz permutação é uma matriz tal que a soma de cada linha e coluna é igual a um.

isto é,  $\Lambda$  não é minimal no sentido que subconjuntos próprios de  $\Lambda$  são atratores. Desta forma as singularidades  $p$  e  $r$  são os únicos atratores do fluxo.

Como outro exemplo, consideremos o fluxo  $\phi_t$  determinado pelo *sistema Lorenz*, isto é, o sistema de equações diferenciais ordinárias que Lorenz introduz ao truncar à equação de Navier-Stokes. O sistema Lorenz é:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10(y - x) \\ \dot{y} &= r \cdot x - y - xz \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy \end{aligned}$$

onde  $r$  é um parâmetro real, o número Rayleigh. Lorenz mostrou que pode-se encontrar uma região fechada simplesmente conexa  $N \subset \mathbb{R}^3$ , contendo a origem, tal que o fluxo entra em  $N$  através de sua fronteira. Assim  $N$  contém um atrator  $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(N)$ . Com efeito:

- Se  $r < 1$  a origem é um poço hiperbólico e é o único atrator.
- Em  $r = 1$  ocorre uma *bifurcação tipo Pitchfork*.
- Se  $r > 1$  o origem é um ponto de sela com variedade estável 1-dimensional e existem dois pontos singulares não triviais,  $q^-$  e  $q^+$ , que são poços quando  $1 < r < \frac{470}{19}$ .
- Em  $r = \frac{470}{19}$  ocorre uma *bifurcação de Hopf*.
- Se  $r > \frac{470}{19}$  os pontos singulares não triviais são selas com variedade instável 2-dimensional.

Assim para  $r > \frac{470}{19}$  as três singularidades são instáveis mas o atrator  $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} \phi_t(N)$  existe. Desta forma fixando  $r = 28$  no sistema Lorenz, uma integração numérica sugere o atrator que se aproxima e se move aparentemente sobre uma superfície com duas folhas  $S$ , figura 3.7.

A fronteira de  $S$  é parte da variedade instável da origem,  $W^u(O)$ . Os pontos selas  $q^+$  e  $q^-$  estão nos dois buracos de  $S$  e tem variedade estável um-dimensional,  $W^s(q^\pm)$ .

Note que o atrator de Lorenz não tem uma estrutura hiperbólica já que contém uma singularidade na origem  $O$ . Na singularidade  $O$ ,  $E_O^s$  tem dimensão dois e  $E_O^u$  tem dimensão um, enquanto que em  $x \in \Lambda \setminus \{O\}$  a decomposição é  $E_x^u \oplus E_x^s \oplus E_x^c$  onde cada um dos subespaços tem dimensão um.

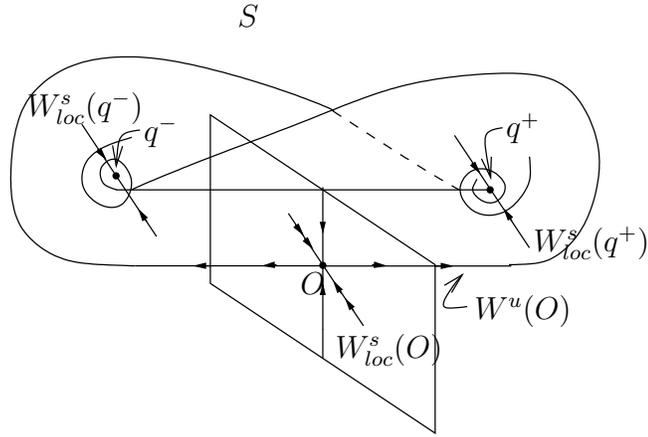


Figura 3.7: Atrator de Lorenz.

Observamos também que o atrator de Lorenz é um atrator não-trivial ao qual nos referimos como um “atrator estranho”. Reservaremos o nome de *atrator não trivial* para aqueles atratores cuja dimensão topológica é dois. Chamaremos também de *atrator hiperbólico* a um atrator com uma estrutura hiperbólica e de *atrator expanding* a um atrator hiperbólico cuja dimensão topológica é igual à dimensão de  $E^u$ , o fibrado instável.

Para um fluxo estruturalmente estável temos que os atratores hiperbólicos são:

- Singularidades.
- Órbitas periódicas.
- Atratores não triviais.

Note que um conjunto básico  $\Lambda$  de dimensão dois num fluxo estruturalmente estável só pode ser um atrator ou repulsor (atrator com fluxo tempo-revertido). Pois sendo  $\Lambda$  2-dimensional segue-se da hiperbolicidade que os fibrados estável, instável e centro são de dimensão um e como  $\Lambda$  deve conter o fibrado centro então também deve conter o fibrado estável ou instável. Portanto,  $\Lambda$  é um atrator ou um repulsor dependendo da direção que está fora de  $\Lambda$ .

Um dos atratores hiperbólicos muito conhecidos é o *DA* (derivado de Anosov) da suspensão do automorfismo de Thom de  $T^2$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Este fluxo mergulha no complemento do nó figura-oito <sup>(vii)</sup> em  $S^3$ , desta forma  $M^3 - k_o \approx S^3 - \{\text{nó figura-oito}\}$  onde  $k_o$  é uma órbita tipo fonte.

<sup>(vii)</sup> Para teoria de nós ver no capítulo 5.

Descreveremos agora o processo DA, *derivado de Anosov*, dado por Smale [28] o qual consiste em abrir um “buraco” em  $M$  e separar as variedades invariantes, criando uma ou duas novas órbitas e reduzindo a dimensão topológica de nosso conjunto básico em um.

Consideremos uma órbita fechada  $\gamma$  num conjunto básico e seja  $N_\varepsilon = N_\varepsilon(\gamma)$  sua vizinhança tubular de diâmetro  $\varepsilon$ . Para cada  $x \in \gamma$ , definimos  $[e^s, e^u, e^c](x)$  as coordenadas referentes no ponto  $x$  (as direções estável, instável e centro serão nossos eixos), a hiperbolicidade e o teorema da variedade estável garante nossa definição. Modificamos o fluxo  $\phi_t$  por considerar o campo vetorial  $X$  dado por:

$$X(x) = \begin{cases} (x_s, 0, 0) & \text{se } x = (x_s, x_u, x_c) \in N_\varepsilon \\ 0 & \text{se } x \notin N_\varepsilon \end{cases}$$

O novo fluxo denominado fluxo DA,  $\phi_t^{\text{DA}}$ , é definido como o fluxo gerado pelo campo vetorial

$$\frac{d\phi^{\text{DA}}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} + kX \quad (3.2)$$

para algum  $k > 0$ . Sendo  $k$  suficientemente pequeno não existe mudança qualitativa no fluxo, mas para  $k$  maior que o raio de contração da variedade estável de  $\gamma$  o fluxo é alterado.

Consideremos a seção transversal uni-dimensional dada por  $I = W_{loc}^s(\gamma) \cap \pi$  onde  $\pi$  é uma seção transversal local de  $\gamma$ . Para  $k = 0$  a aplicação retorno induzida  $r$  é uma contração sobre  $I$  e dependendo da orientabilidade do fibrado estável  $E^s$  de  $\gamma$ ,  $r$  pode preservar ou reverter a orientação.

Identificamos  $I$  com o intervalo  $[-1, 1]$  com o ponto fixo correspondente a  $\gamma$  na origem.

- Para  $k = 0$  a aplicação retorno é conjugada a  $x \rightarrow \pm\lambda x$ ,  $0 < \lambda < 1$ , dependendo da aplicação quando preserva (+) ou inverte (-) a orientação.
- Em  $k_* > 0$  existe uma bifurcação quando a inclinação em 0 é um, em valor absoluto. Se  $r$  preserva a orientação, ocorre uma *bifurcação Pitchfork* dando origem a duas novas órbitas periódicas do tipo sela,  $\gamma'$  e  $\gamma''$ , isotópicas a  $\gamma$ .

No caso que  $r$  inverte a orientação ocorre uma *bifurcação período-duplo* dando origem a uma órbita simples também de tipo sela  $\gamma'$ , isotópica a double twisted de  $\gamma$ .

Em ambos os casos a órbita  $\gamma$  torna-se uma fonte. A seguir consideremos  $\mathcal{B}$  um conjunto básico de dimensão três e mostraremos que mediante uma decomposição DA de  $\mathcal{B}$  obtemos dois conjuntos básicos, uma fonte de dimensão 1 e um atrator de dimensão 2.

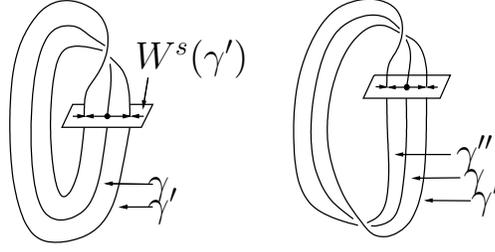


Figura 3.8: Bifurcação período-double e Pitchfork.

PROPOSIÇÃO 3.4 *Seja  $\Lambda$  o complemento de  $W^u(\gamma)$  em  $\mathcal{B}$ , onde  $\gamma$  é a órbita tipo fonte de fluxo DA,  $\phi_t^{\text{DA}}$ . Então  $\Lambda$  é um atrator expanding.*

*Demonstração.* Sendo  $\gamma$  uma órbita tipo fonte do fluxo DA,  $\phi_t^{\text{DA}}$ , temos que  $\phi_t^{\text{DA}}(W_{loc}^u(\gamma)) \supset W_{loc}^u(\gamma)$  para  $t > 0$ , segue-se que  $\mathcal{B} \setminus W_{loc}^u(\gamma)$  é uma região positivamente invariante. Logo  $\Lambda = \bigcap_{t>0} \phi_t^{\text{DA}}(M \setminus W_{loc}^u(\gamma))$  é um atrator.

Por construção de  $\phi_t^{\text{DA}}$  as variedades estável em  $\Lambda$  são preservadas, daí o fibrado estável  $E^s$  sobre  $\Lambda$  de  $\phi_t^{\text{DA}}$  é o mesmo que de  $\phi_t$ . Para produzir o fibrado instável sobre  $\Lambda$ , é suficiente construir *cones* em  $TM_x$ , para  $x \in \Lambda$ . Mediante iteração estes cones convergem para o novo fibrado instável  $E^u$  [18]. Conseqüentemente  $\Lambda$  é hiperbólico.

Afirmamos que  $W^u(\gamma)$  é denso em  $\mathcal{B}$  então  $\dim(\Lambda) \leq 2$ . Como  $\gamma' \subset \Lambda$  e  $\Lambda$  é atrator então  $W^u(\gamma') \subset \Lambda$ , logo  $\dim(\Lambda) = 2$  pois a dimensão topológica de  $W^u(\gamma')$  é dois.

Mostremos que  $W^u(\gamma)$  é denso em  $\mathcal{B}$ . Inicialmente provamos que  $W^s(\varepsilon)$  bajo  $\phi_t$ , é denso em  $\mathcal{B}$ . Agora como a perturbação DA deixa invariante o fibrado estável então  $W^s(\varepsilon)$  de  $\phi_t^{\text{DA}}$  também é densa em  $\mathcal{B}$ . Daqui para  $x \in \Lambda$  e  $N_x$  uma vizinhança arbitrariamente pequena em  $\mathcal{B}$  qualquer  $y \in N_x \cap W^s(\varepsilon)$  tem sua órbita, próximo a qualquer ponto em  $\mathcal{B}$ . Isto implica que  $\phi_{-t}^{\text{DA}}(r)$  intercepta  $W^u(\gamma)$  no fluxo DA para  $t$  suficientemente grande, pois  $W^u(\gamma)$  contém uma vizinhança tubular de  $\gamma$ . Como  $W^u(\gamma)$  é invariante pelo fluxo então  $y \in W^u(\gamma)$ . De onde  $y$  é arbitrariamente próximo a  $x \in \Lambda$ , logo  $W^u(\gamma)$  é denso em  $\mathcal{B}$ .

Finalmente  $W^s(\varepsilon)$  é denso em  $\mathcal{B}$  sob  $\phi_t$  pois sendo  $\mathcal{B}$  um conjunto básico, Bowen [4] mostra que existe uma partição de Markov para uma seção transversal de  $\mathcal{B}$  com uma sobrejeção contínua do *sufshift* de tipo finito à seção transversal de  $\mathcal{B}$ . A existência da variedade estável simbólica de  $\varepsilon$  cuja órbita é densa no espaço de símbolos implica que  $W^s(\varepsilon)$  é denso em  $\mathcal{B}$  pois a aplicação para  $\mathcal{B}$  é uma sobrejeção. ■

A partir desta proposição pode-se construir muitos exemplos de fluxos sobre uma três variedade com conjuntos básicos de dimensão um e dois. Assim, por exemplo, os fluxos de Anosov <sup>(viii)</sup> considerados em “Anomalous Anosov flows” [16].

Consideremos o fluxo DA,  $\varphi_t : M_1 \rightarrow M_1$ , da suspensão do automorfismo de Thom de  $T^2$ . Então  $\varphi_t$  tem uma órbita periódica repulsora  $\gamma$  e um atrator expanding  $\Lambda$ . Retire uma vizinhança tubular  $N(\gamma)$  de  $M_1$  e seja  $M_2$  a nova variedade com fronteira  $\partial M_2$ , homeomorfa a  $T^2$ , e o fluxo também denotado por  $\varphi_t$  é transversal à fronteira apontando para o interior. A nova variedade  $M_2$  será obtida colando ao bordo de  $M_2$  uma vizinhança com colarinho <sup>(ix)</sup>  $T^2 \times [0, 1]$ . Estenda o fluxo  $\varphi_t$  de forma natural, transversal ao colar [16].

Então, seja  $\bar{\varphi}_t : \bar{M}_2 \rightarrow \bar{M}_2$  uma cópia de  $\varphi_t : M_2 \rightarrow M_2$  com  $\bar{\varphi}_t = \varphi_{-t}$ , desta forma  $\bar{\varphi}_t$  é um fluxo transversal apontando para fora na fronteira  $\partial \bar{M}_2$  e contem um repelir 2-dimensional com estrutura hiperbólica. Agora ao colar  $M_2$  e  $\bar{M}_2$  através de qualquer difeomorfismo  $\partial M_2 \rightarrow \partial \bar{M}_2$ ,  $\varphi_t \cup \bar{\varphi}_t$  dá um fluxo suave  $\psi_t$  sobre a variedade resultante  $M$ . O fluxo  $\psi_t$  satisfaz o Axioma A <sup>(x)</sup> e tem dois conjuntos básicos ambos com variedade estável fraca dois dimensional.

Consideremos agora um exemplo com uma órbita fechada isolada no conjunto recorrente por cadeia. Inicialmente consideramos um fluxo sobre a variedade  $S^1 \times \{\text{disco com dois buracos}\}$  que entra sobre uma componente fronteira e sai sobre as outras duas e com uma órbita fechada simple, no interior da variedade, do tipo sela. Em seguida, colamos apropriadamente duas copias de  $(M_2, \varphi_t)$  e uma copia de  $(\bar{M}_2, \bar{\varphi}_t)$ , já construídos anteriormente, para obter o fluxo Anosov com quatro conjuntos básicos. Uma órbita de tipo sela 1-dimensional, um repulsor 2-dimensional e dois atratores 2-dimensionais.

---

<sup>(viii)</sup>  $\varphi_t$  é um *fluxo de Anosov* se toda a variedade  $M$  possui uma estrutura hiperbólica.

<sup>(ix)</sup> Para esta definição ver seção 4.2.1.

<sup>(x)</sup> Na verdade o fluxo  $\psi_t$  é Anosov [16].

## Capítulo 4

# Fluxos em grafos de Lyapunov abstratos

Neste capítulo estudamos os grafos de Lyapunov de alguns fluxos especiais em  $S^3$ . A dinâmica de interesse acontece no conjunto recorrente por cadeia  $R$  e portanto cada vértice do grafo está associado a invariantes das componentes de  $R$ . Um destes invariantes é o índice de Conley.

Na primeira seção observaremos que grafos de Lyapunov podem ser obtidos a partir de um fluxo suave e de uma função de Lyapunov associada. Por outro lado, a realização de um grafo de Lyapunov abstrato foi bem desenvolvida em [15] e [9] e nas últimas seções apresentamos alguns construções.

### 4.1 Grafos de Lyapunov.

A existência da função de Lyapunov é muito importante para o estudo dos fluxos suaves, pois determinam um grafo de Lyapunov, que é uma ferramenta muito útil, que fornece informações locais e globais de um fluxo. Introduziremos alguns conceitos elementares da teoria de grafos. Esta nova teoria permite expressar os problemas de maneiras diferentes. Uma referência para este material é [3].

Um *grafo*  $G$  é um par ordenado de conjuntos disjuntos  $(V, E)$  tais que  $E \subset V \times V$ . O conjunto

$V$  é o conjunto de *vertices* e  $E$  é o conjunto de *arestas*. Assim dada uma aresta  $e = \{u, v\} \in E$  dizemos que  $u$  e  $v$  são *adjacentes* e que  $e$  é *incidente* sobre  $u$  e  $v$ .

DEFINIÇÃO Dado um fluxo  $\phi_t : M \rightarrow M$  e uma função de Lyapunov  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  o *grafo de Lyapunov*  $L$  é obtido tomando o espaço quociente de  $M$ , que identifica a um ponto cada componente de um conjunto de nível de  $f$ .

Segue-se da proposição 1.4 em [15] que o espaço resultante na definição anterior é um grafo. Esta definição também pode-se expressar da seguinte forma: Defina a seguinte relação de equivalência sobre  $M$ .

$$x \sim_f y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertencem à mesma componente conexa de um conjunto nível de } f.$$

Chamamos a  $M / \sim_f$  o grafo de Lyapunov  $L$ .

Geometricamente cada componente conexa de um conjunto de nível  $f^{-1}(c)$  colapsa a um ponto, assim  $f^{-1}(c) / \sim_f$  é um conjunto finito de pontos distintos sobre  $M / \sim_f$ . O ponto sobre  $M / \sim_f$  é um vértice se mediante a relação de equivalência corresponde a uma componente de um conjunto de nível contendo uma componente recorrente por cadeia. Os demais pontos são as arestas. Cada aresta representa  $S_g \times I$  onde  $S_g$  é uma superfície de gênero  $g$  e  $I$  é um intervalo aberto limitado. Para uma aresta reter a informação topológica de  $S_g \times I$  é suficiente rotulá-la com o gênero,  $g$ , de  $S_g$ .

Se  $u$  é um vértice então o número de arestas de entrada de  $u$  é chamado o *grau positivo* de  $u$  e é denotado por  $e^+(u)$ , o número de arestas de saída de  $u$  é chamado o *grau negativo* de  $u$  e é denotado por  $e^-(u)$ , a soma dos graus positivos e negativos de  $u$  é chamado o *grau* de  $u$  e é denotado por  $e(u)$ . Agora cada vértice do grafo onde todas as arestas entram (saem) são ditos *vértices poços* (*vértices fontes*). Chamaremos também de *vértice sela* áqueles vértices que não são poços nem fontes.

Estudaremos o caso onde os grafos de Lyapunov sejam finitos e desta maneira em primeira instância nos restringimos aos conjuntos recorrentes por cadeia hiperbólicos e posteriormente o caso mais geral de um conjunto recorrente por cadeia com um numero finito de componentes.

TEOREMA 4.1 *Para um fluxo suave sobre uma 3-variedade orientável e fechada  $M$  com função de Lyapunov  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  seja  $h_j^i$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  as dimensões do índice de Conley homológico das*

componentes  $R_i$  do conjunto recorrente por cadeia  $R$  do fluxo. Se  $L$  é o grafo de Lyapunov associado com vértices  $v_i$  rotulados com  $h_j^i$ . Então

1. Cada vértice  $v_i$  deve satisfazer:

(a)  $e^+(v_i) \leq (h_1^i)^* + 1$  (\* indica o índice do fluxo no tempo negativo).

(b)  $e^-(v_i) \leq h_1^i + 1$ .

2. Os pesos  $\{g_k^+\}$  and  $\{g_k^-\}$  sobre as arestas incidentes a cada vértice  $v_i$  devem satisfazer:

(a)  $G^- - G^+ = e^-(v_i) - e^+(v_i) + \sum_{j=0}^3 (-1)^j h_j^i$ , onde  $G^- = \sum_{k=1}^{e^-(v_i)} g_k^-$  ( $G^+ = \sum_{k=1}^{e^+(v_i)} g_k^+$ ).

(b) Se  $e^+(v_i) = 0$  então  $G^- = e^-(v_i) - 1 + h_2^i - h_1^i$ .

(c) Se  $e^-(v_i) = 0$  então  $G^+ = e^+(v_i) - 1 - h_2^i + h_1^i$ .

*Demonstração.* Faremos um esboço da demonstração. Maiores detalhes encontra-se em [8]. Considere o par índice  $(N, L)$  para  $R_i$  e a seqüência exata

$$\dots \rightarrow H_1(L) \rightarrow H_1(N) \rightarrow CH_1(R_i) \xrightarrow{\partial_1} \tilde{H}(L) \xrightarrow{i_0} 0$$

onde os grupos de homologia são considerados com coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$  e  $\tilde{H}_0$  é a homologia reduzida.

Da exatidão em  $\tilde{H}_0(L)$  temos que

$$\dim(\text{Im } \partial_1) = \dim(\text{Ker } i_0)$$

logo  $\partial_1$  é sobrejetiva e por tanto

$$\dim CH_1(R_i) \geq \dim \tilde{H}_0(L)$$

Mas  $\dim CH_1(R_i) = h_1^i$  e  $\dim \tilde{H}_0(L) = e^-(v_i) - 1$  então a condição 1(a) esta provada.

Para a parte (b) considere o fluxo em tempo negativo.

A condição 2(a) é uma reformulação da igualdade de Poincaré-Hopf, devido a que  $R_i$  corresponde a um vértice no grafo de Lyapunov  $v_i$  e  $\partial N^+$  respectivamente  $\partial N^-$  correspondem as arestas de entrada e de saída de  $v_i$ .

2(b) e 2(c) são casos particulares de 2(a).

Se  $e^+ = 0$ , o índice de Conley de  $R_i$  é uma 3-variedade fechada junto com outras variedades de dimensão menor já que todas as componentes fronteiras de  $N$  colapsaram a um ponto. Aqui  $h_3 = 1$

que substituindo em 2(a) temos 2(b).

Se  $e^- = 0$ , o índice de Conley de  $R_i$  é tem duas componentes pois  $L = \emptyset$  e é identificado a um ponto fora de  $N$ . Aqui  $h_0 = 1$  que substituindo em 2(a) temos 2(c). ■

Na próxima seção apresentaremos um teorema de classificação para os fluxos de Smale<sup>(i)</sup> em  $S^3$  (teorema 4.2).

Por outro lado, para construir um fluxo que satisfaça uma dinâmica desejada é preciso definir um grafo de Lyapunov abstrato.

**DEFINIÇÃO** Um *grafo de Lyapunov abstrato* é um grafo orientado<sup>(ii)</sup> conexo<sup>(iii)</sup> finito  $L$  que não possui ciclos<sup>(iv)</sup> orientados e cada vértice rotulado com um fluxo recorrente por cadeia sobre um espaço compacto. Cada aresta será rotulado com um inteiro não negativo  $g$ , que será o peso da aresta.

A construção de um fluxo sobre  $M$  a partir de um grafo de Lyapunov abstrato pode-se ver em [9], mas no próximo capítulo apresentaremos algumas construções.

Finalmente, se  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  são dois grafos de Lyapunov abstratos com funções pesos  $w$  e  $w'$  respectivamente, associados a suas arestas, isto é,  $w : E \rightarrow \mathbb{Z}^+$  e  $w' : E' \rightarrow \mathbb{Z}^+$ . Dizemos que  $G$  e  $G'$  são *topologicamente equivalentes* se:

1. Existe um isomorfismo<sup>(v)</sup>  $\phi$  preservando pesos entre  $G$  e  $G'$ , isto é,  $w(u, v) = w'(\phi(u), \phi(v))$ .
2. O fluxo recorrente por cadeia com que  $v$  esta rotulado, é topologicamente equivalente ao fluxo com que  $\phi(v)$  esta rotulado.

---

<sup>(i)</sup> Fluxos de Smale são fluxos estruturalmente estáveis com  $\dim(R) \leq 1$ .

<sup>(ii)</sup> Se  $e$  é uma aresta e  $e = (u, v)$  dizemos que  $e$  é uma *aresta dirigida* de  $u$  para  $v$ , uma *aresta de saída* de  $u$  e uma *aresta de entrada* de  $v$ . O grafo é dito ser *orientado* se suas arestas são pares ordenados, isto é, arestas dirigidas.

<sup>(iii)</sup> Um *caminho* (entre  $v_0$  e  $v_n$ ) num grafo  $G$  é uma seqüência alternada de vértices e arestas  $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  tais que para cada  $i = 1, \dots, n$   $e_i = (v_i, v_{i-1})$  ou  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ . Um grafo é *conexo* se para qualquer par  $\{u, v\}$  de vértices distintos existe um caminho de  $u$  para  $v$ .

<sup>(iv)</sup> Um caminho é um *ciclo* se as arestas são distintas e  $v_0 = v_n$ .

<sup>(v)</sup> Dois grafos  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  são *isomorfos* se existe uma bijeção  $\phi : V \rightarrow V'$  tais que  $\forall u, v \in V$ ,  $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \in E$ .

## 4.2 Blocos isolantes de fluxos em $S^3$ .

Dado um grafo de Lyapunov abstrato  $L$  que satisfaz certas condições, construiremos um fluxo sobre  $S^3$  com uma função de Lyapunov associada que tem grafo de Lyapunov  $L'$  topologicamente equivalente a  $L$ .

Realizaremos a dinâmica de cada vértice numa subvariedade com fronteira  $X$  de  $S^3$ . A subvariedade  $X$  possui um único conjunto básico. O fluxo entra em (resp. sai de)  $X$  através de  $e^+$  (resp.  $e^-$ ) componentes da fronteira de  $X$ , onde  $e^+$  (resp.  $e^-$ ) é o número de arestas entrando (resp. saindo) ao vértice  $v$ . Além disso, cada componente da fronteira é uma 2-variedade com género  $g^+(g^-)$  onde  $g^+(g^-)$  são os pesos das arestas que entram a (resp. saem de)  $v$ . Finalmente colamos as componentes das fronteiras segundo as orientações do grafo, de maneira que obtemos  $S^3$  e um fluxo  $\phi_t$ . As subvariedades  $X$  serão nossos blocos isolantes.

As construções obedecerão ao seguinte teorema de classificação dado por Franks [15] e de Rezende [9] o qual mostra que as singularidades e a suspensão de qualquer *subshift* de tipo finito irredutível pode ser realizado como um conjunto básico em algum fluxo de Smale em  $S^3$ . As definições e as construções serão desenvolvidas gradualmente nos seguintes parágrafos ordenados de acordo com a dimensão e complexidade dos conjuntos básicos.

**TEOREMA 4.2** *Dado um grafo de Lyapunov abstrato  $L$  com vértices poços(fontes) rotulados por uma órbita periódica atratora (repulsora) ou uma singularidade de índice 0 (índice 3), então a  $L$  é associado um fluxo de Smale se e só se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *O grafo  $L$  é uma árvore <sup>(vi)</sup> com exatamente uma aresta incidente a cada vértice poço ou fonte.*
2. *Se um vértice é rotulado com uma singularidade de índice 2 (índice 1) então  $1 \leq e^+ \leq 2$  e  $e^- = 1$  ( $e^+ = 1$  e  $1 \leq e^- \leq 2$ ), e se o vértice é rotulado com uma órbita periódica de índice 1 então  $1 \leq e^+ \leq 2$  e  $1 \leq e^- \leq 2$ , onde  $e^+(e^-)$  é o número de arestas entrando(saindo) do vértice. Se um vértice é rotulado com a suspensão de um *subshift* de tipo finito e  $A$  é a matriz inteira não negativa irredutível de ordem  $n \times n$ , representando o *subshift*, então:*

$$e^+ > 0, e^- > 0$$

---

<sup>(vi)</sup>Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclos.

$$k + 1 - G^- \leq e^+ \leq k + 1 \text{ com } G^- = \sum_{i=1}^{e^-} g_i^-$$

$$k + 1 - G^+ \leq e^- \leq k + 1 \text{ com } G^+ = \sum_{i=1}^{e^+} g_i^+$$

onde  $k = \dim \text{Ker}((I - B) : Z_2^n \rightarrow Z_2^n)$ ,  $b_{ij} = a_{ij} \text{ mod } 2$  e  $g_j^+(g_i^-)$  é o peso sobre a aresta de entrada(saída) do vértice.

3. Todo vértice deve satisfazer a condição de Poincaré-Hopf, isto é, para um vértice rotulado com uma singularidade de índice  $r$ , a condição é:

$$(-1)^r = e^+ - e^- - \sum g_j^+ + \sum g_i^-$$

e para um vértice rotulado com uma suspensão de um subshift de tipo finito ou uma órbita periódica, a condição é:

$$0 = e^+ - e^- - \sum g_j^+ + \sum g_i^-$$

### 4.2.1 Fluxos de Morse.

Nesta parágrafo estudaremos os fluxos mais simples, com uma estrutura hiperbólica sobre seu conjunto recorrente por cadeia. Um tal fluxo é gerado por integração do gradiente de uma função de Morse. O conjunto recorrente por cadeia de tais fluxos é um conjunto finito de singularidades correspondente aos pontos críticos da função de Morse associada.

**DEFINIÇÃO** Um *fluxo de Morse* é o fluxo do campo gradiente de uma função de Morse.

Como já foi dito, os pontos críticos da função de Morse são os conjuntos básicos do conjunto recorrente por cadeia e este são máximos, mínimos ou selas.

Um grafo de Lyapunov satisfazendo as condições 1, 2 e 3 do teorema indica que seus vértices são da forma<sup>(vii)</sup>: figura 4.1, ditos também *grafos dangling*<sup>(viii)</sup>.

Assim, exemplos de grafos de Lyapunov abstratos que satisfaçam as condições 1, 2 e 3 são: figura 4.2.

<sup>(vii)</sup>Estamos adotando a convenção que vértices em negrito representam singularidades.

<sup>(viii)</sup>Denotaremos por *grafo dangling*  $\dot{G} = (\dot{V}, \dot{E})$  onde  $\dot{V} = (V \cup \{\infty\})$ ,  $V$  um conjunto de vértices e  $\dot{E} \subset (\dot{V} \times \dot{V})$ . Definiremos por arestas direcionadas do tipo dangling os pares  $(\infty, V)$  ou  $(V, \infty)$ .

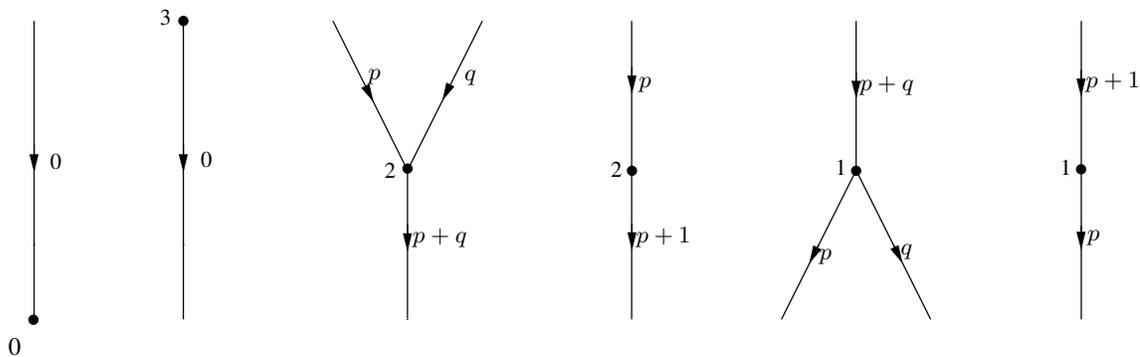


Figura 4.1: Grafos dangling das funções de Morse.

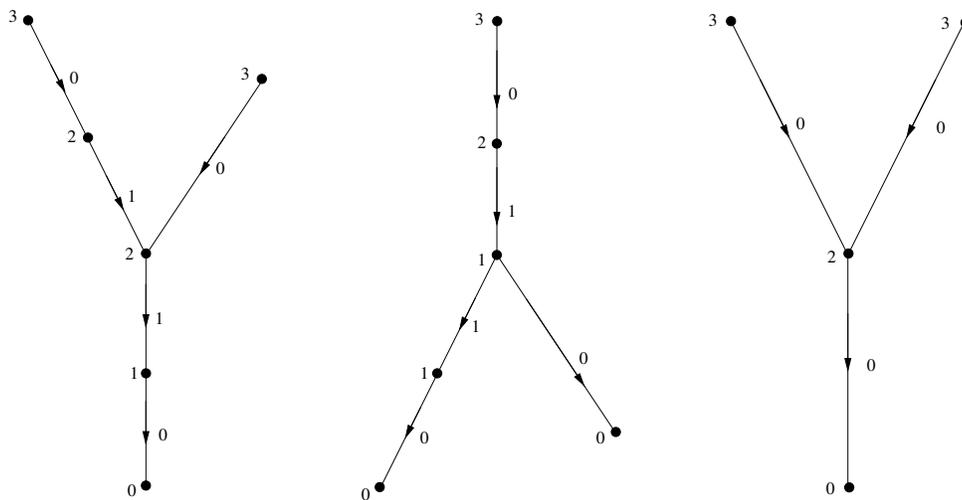


Figura 4.2: Alguns grafos de Morse.

DEFINIÇÕES

1. Um *handlebody de género  $g$*  é um espaço obtido da 3-bola  $D^3$  e de  $g$  cópias distintas de  $D^2 \times [-1, 1]$ , levando homeomorficamente os  $2g$  discos  $D^2 \times \pm 1$  sobre  $2g$  2-discos disjuntos em  $\partial D^3$  (tudo é feito de tal maneira que a 3-variedade resultante seja orientável).
2. Um subconjunto  $X \subset Y$  é dito ser *colarinho* (em  $Y$ ) se existe um mergulho  $b : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $b(x, 0) = x, \forall x \in X$ . A imagem de  $b$  é o *colar*.
3. Um *handlebody com colarinho  $\mathbf{M}$*  é um handlebody  $M$  união um colar de  $\partial M$ .

Dadas estas definições prossigamos à construção das subvariedades  $X$  de  $S^3$ .

Observe que um bloco isolante para uma singularidade sera uma subvariedade com fronteira em  $S^3$  que não contém outra singularidade. Além disso, o fluxo será transversal à fronteira.

**Índice 0:** Se um vértice  $v$  de um grafo de Lyapunov abstrato é uma singularidade de índice 0 (um poço) então  $e^+ = 1$  e  $g^+ = 0$ . Assim o bloco isolante  $X$  tem componente fronteira de género zero, logo  $X$  é homeomorfo a 3-bola  $D^3$  de  $\mathbb{R}^3$ . O poço é colocado no centro geométrico de  $D^3$  e o fluxo será transversal na fronteira e apontará para o interior do bloco. A construção do bloco isolante para uma fonte (índice 3) é análoga.

**Índice 2:** Se o vértice  $v$  é rotulado com uma singularidade de índice 2, temos as seguintes possibilidades.

(a)  $e^+ = 2$  e  $e^- = 1$ .

(b)  $e^+ = e^- = 1$ .

Para construir os dois tipos possíveis de blocos isolantes precisamos considerar um fluxo sobre um cilindro  $C = D^2 \times [0, 1]$  como segue: Colocamos a singularidade de índice 2 no centro geométrico de  $C$  de tal forma que o fluxo entra em  $C$  pelas duas componentes da fronteira homeomorfos a  $D^2$  e saia pelo anel, figura 4.3

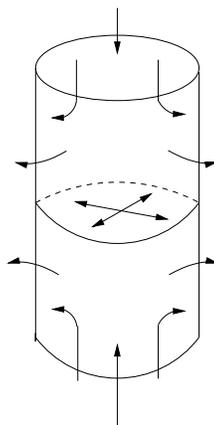


Figura 4.3: Cilindro sólido com uma singularidade.

(a) Neste caso temos que se as arestas de entrada tem pesos  $p$  e  $q$  então a aresta de saída tem peso  $p + q$ . Consideremos dois handlebodies  $M_1$  e  $M_2$  de género  $p$  e  $q$  respectivamente. Sejam  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$  os handlebodies com colarinho de  $M_1$  e  $M_2$ . Como  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$  são disjuntos, colamos

o cilindro sólido  $C$  a  $\partial M_1$  e  $\partial M_2$  mediante suas fronteiras homeomorfos a  $D^2$  conforme a figura 4.4.

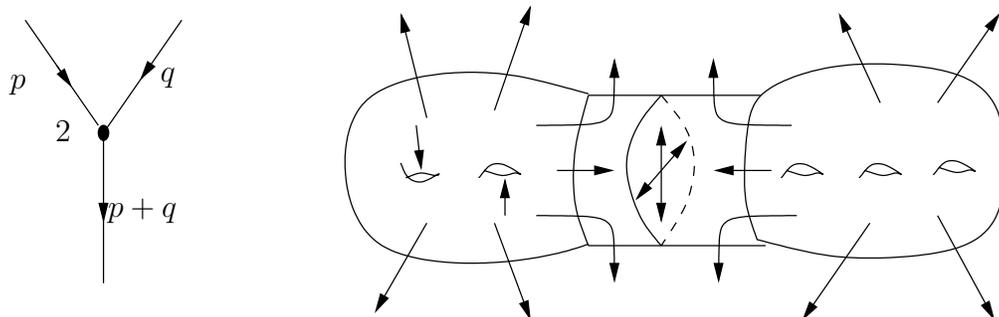


Figura 4.4: Um bloco isolante de uma singularidade de índice 2.

O bloco isolante será  $X = (M_2 - M_2) \cup C \cup (M_1 - M_1)$ . As duas componentes da fronteira de  $X$  onde o fluxo entra são 2-variedades de gênero  $p$  e  $q$  ( $\partial M_1$  e  $\partial M_2$  respectivamente). A componente da fronteira de  $X$  onde o fluxo sai é uma 2-variedade de gênero  $p + q$ ,  $\partial(M_1 \cup C \cup M_2)$

(b) Neste caso temos que se a aresta de entrada tem peso  $p$  a aresta de saída deve ter peso  $p + 1$ . Consideremos um handlebody  $M$  de gênero  $p + 1$  e seu handlebody com colar  $M$ . Seja  $\alpha$  uma curva não separadora sobre  $\partial M$  e  $A$  um anel sobre  $\partial M$  contendo  $\alpha$ . Colamos sobre  $A$  a componente fronteira do cilindro  $C$  por onde o fluxo sai, figura 4.5.

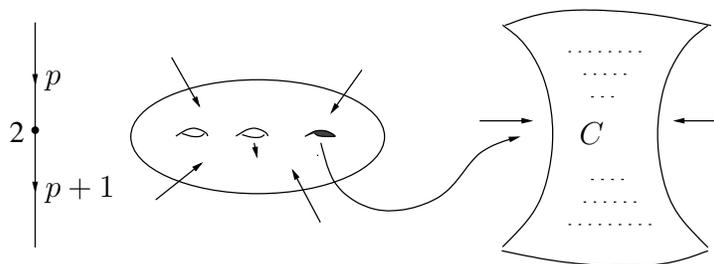


Figura 4.5: Outro bloco isolante de uma singularidade de índice 2

O bloco isolante será  $X = (M - M) \cup C$ . O fluxo entra em  $X$  pela 2-variedade de gênero  $p$ ,  $\partial(M \cup C)$ , e vai sair pela 2-variedade de gênero  $p + 1$ ,  $\partial M$ .

Para construir os dois tipos possíveis de blocos isolante para singularidades de índice 1 revertemos o fluxo sobre os blocos isolantes já construídos.

## 4.2.2 Fluxos de Morse-Smale.

Estudaremos agora uma classe mais geral que os fluxos de Morse. O conjunto recorrente por cadeia  $R$  destes fluxos será um conjunto finito de singularidades e órbitas periódicas que compõem os conjuntos básicos de  $R$ .

DEFINIÇÃO Um fluxo suave  $\phi_t$  sobre uma variedade  $M$  é chamado *fluxo Morse-Smale* se:

1. O conjunto recorrente por cadeia é hiperbólico.
2. Cada conjunto básico é uma órbita periódica ou uma singularidade.
3.  $\phi_t$  satisfaz a condição de transversalidade.

O comportamento local de uma órbita periódica hiperbólica é determinado pela dimensão e orientabilidade de sua variedade instável. Desta forma uma órbita periódica hiperbólica  $\gamma$  é dita *twisted* (*untwisted*) se seu fibrado instável  $E^u(\gamma)$  é não-orientável (orientável).

Construamos um fluxo de Morse-Smale em  $S^3$  com 5 órbitas periódicas untwisted, dois de índice 0, um de índice 1 e dois de índice 2. Sejam os toros sólidos  $R_0$  e  $R'_0$  com um campo vetorial transversal apontando para dentro na fronteira e com uma órbita periódica de índice 0 em  $R_0$  e  $R'_0$ . Agora unimos  $R_0$  e  $R'_0$  mediante  $R_1 = S^1 \times D^1 \times D^1$ , figura 4.6.

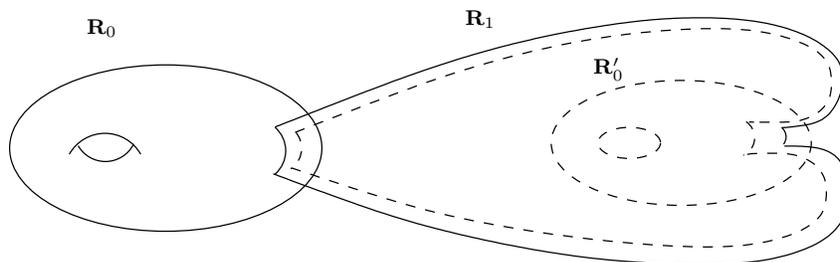


Figura 4.6: Fluxo de Morse-Smale de Franks.

A união é feita identificando  $S^1 \times D^1 \times S^0$  com copias mergulhadas de  $S^1 \times D^1$  na fronteira de  $R_0$  e  $R'_0$ . Em  $R_1$  construímos um campo vetorial com uma órbita periódica untwisted de índice 1 de tal forma que o campo vetorial seja o mesmo nas identificações feitas.

O complemento de  $R_0 \cup R'_0 \cup R_1$  em  $S^3$  são dois toros sólidos disjuntos. Assim para completar o fluxo Morse-Smale em  $S^3$  acrescentamos estes dois toros sólidos e definimos um campo vetorial com

uma órbita periódica de índice 2 em cada um deles de forma que tenha o mesmo campo vetorial de  $R_0 \cup R'_0 \cup R_1$  na fronteira destes toros sólidos.

Do teorema 2.6 temos que um grafo de Lyapunov satisfazendo as condições 1, 2 e 3 indica que seus vértices<sup>(ix)</sup> são da seguinte maneira.

- No caso das singularidades: é o mesmo que em fluxos de Morse.
- No caso das órbitas periódicas.

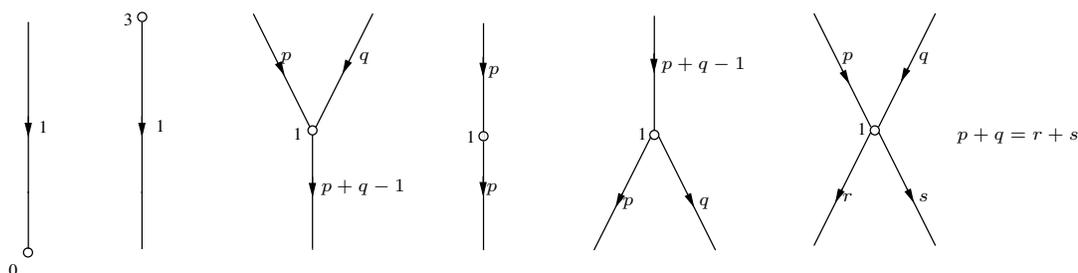


Figura 4.7: Grafos dangling de funções Morse-Smale.

Para a realização de um grafo de Lyapunov abstrato a um fluxo de Morse-Smale precisamos de algumas definições.

**DEFINIÇÃO** Sejam  $C_1$  e  $C_2$  cilindros sólidos concêntricos com  $C_2 \subset C_1$ . Um *alça redonda*  $R$  é uma 3-variedade homeomorfa a  $C_1 - C_2$  contendo uma órbita periódica tipo sela de período igual a um e com fluxo definido sobre  $R$  como segue: O fluxo entra por duas componentes de fronteiras disjuntas de  $R$  homeomorfos a anéis e sai sobre outras duas componentes de fronteira disjuntas também homeomorfos a anéis.

A construção de blocos isolantes para algumas órbitas periódicas só dependem do tipo de colagem das alças redondas  $R$ , figura 4.8, com os handlebodies. Sejam  $A$  e  $B$  os anéis de  $R$  por onde o fluxo sai, sejam também  $M_1$  e  $M_2$  handlebodies, de gênero  $p$  e  $q$  respectivamente, com suas respectivas handlebodies com colar  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$ . O fluxo entra por  $\partial\mathbf{M}_i$  e sai por  $\partial M_i$  cruzando transversalmente todo o colar.

**Índice 0:** Se um vértice é rotulado com uma órbita periódica de índice 0 a órbita é atratora e o bloco isolante deve ter uma componente de fronteira de gênero igual a um. Logo, o bloco isolante

<sup>(ix)</sup>Estamos adotando a convenção que vértices em branco representam órbitas periódicas.

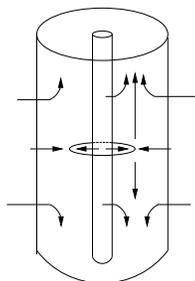


Figura 4.8: Alça redonda.

será um toro sólido  $D^2 \times S^1$  contendo a órbita no seu interior. O bloco isolante para uma órbita periódica de índice 2 é obtido invertendo o fluxo.

**Índice 1:** Se um vértice é rotulado com uma órbita periódica de índice 1 a órbita é tipo sela e temos seguintes quatro possibilidades.

- (a)  $e^+ = e^- = 2$ .
- (b)  $e^+ = e^- = 1$ .
- (c)  $e^+ = 1$  e  $e^- = 2$ .
- (d)  $e^+ = 2$  e  $e^- = 1$ .

Construamos os blocos isolantes para cada caso.

(a) Neste caso fazemos uso de um *alça connectante invariante* que é um alça redonda  $R$  com os anéis  $A$  e  $B$  colados aos anéis  $A'$  e  $B'$  de  $\partial M_1$  e  $\partial M_2$  respectivamente, ambas contendo uma curva separatriz.

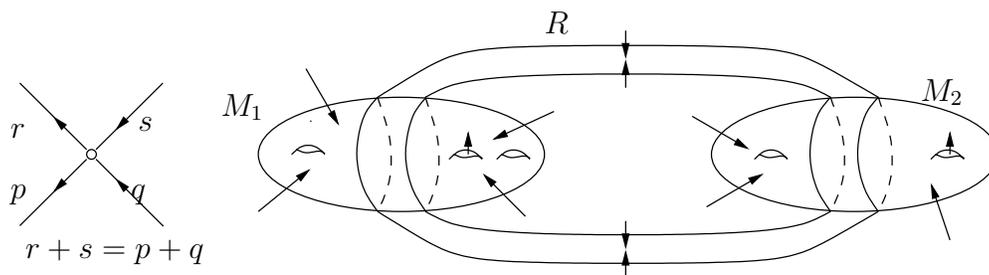


Figura 4.9: Bloco isolante com uma alça connectante invariante.

Note que a união da alça  $R$  deve ser feita de modo que  $\partial(M_1 \cup R \cup M_2)$  tenha duas componentes correspondentes a fronteiras de entrada do fluxo e tal que elas sejam 2-variedades de gênero  $r$  e  $s$ . Logo o bloco isolante é definido como  $X = (M_2 - M_2) \cup R \cup (M_1 - M_1)$ .

(b) Neste caso a alça redonda  $R$  é colado só a um handlebody com colar de gênero  $p$  e é dito *alça invariante* se o anel  $A$  é colado ao anel  $A' \subset \partial \mathbf{M}$  contendo uma curva não separatriz e o anel  $B$  é colado ao anel  $B' \subset \partial \mathbf{M}$  contendo uma curva homotopicamente trivial.

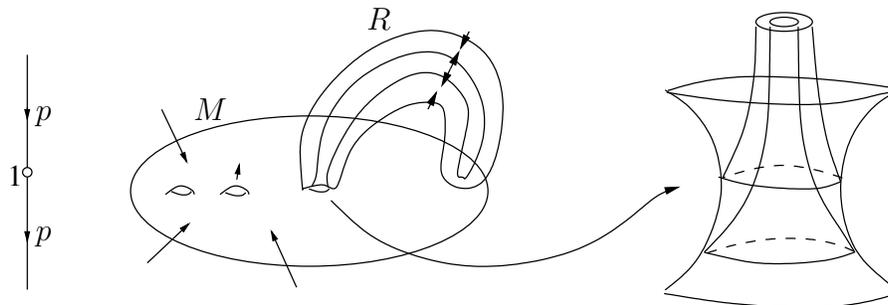


Figura 4.10: Bloco isolante com uma alça invariante.

Seja  $X = R \cup (\mathbf{M} - M)$ , a fronteira de entrada de  $X$ ,  $\partial(\mathbf{M} \cup R)$ , permanece com o mesmo gênero que a fronteira de saída de  $X$ ,  $\partial M$ . Logo  $X$  é bloco isolante neste caso.

(c) Colamos a alça redonda  $R$  a dois handlebodies com colar e dizemos que é um *alça connectante decrescente* se o anel  $A$  é colado ao anel  $A' \subset \partial \mathbf{M}_1$  o qual contém uma curva não separatriz e o anel  $B$  é colado ao anel  $B' \subset \partial \mathbf{M}_2$  o qual contém uma curva homotopicamente trivial.

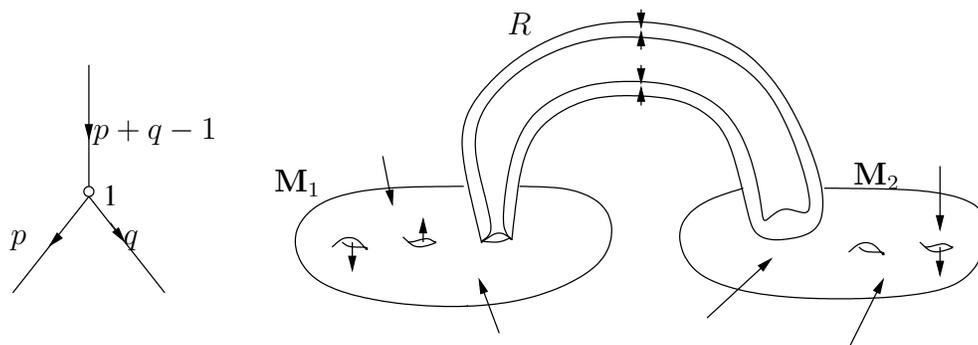


Figura 4.11: Bloco isolante com uma alça connectante decrescente.

Observe que  $\partial(\mathbf{M}_1 \cup R \cup \mathbf{M}_2)$  tem uma componente de fronteira de gênero  $p + q - 1$  que corresponde à fronteira de entrada de  $X = (\mathbf{M}_2 - M_2) \cup R \cup (\mathbf{M}_1 - M_1)$ , o bloco isolante.

(d) Simétrico ao caso (c).

Uma vez construídos os blocos isolantes associados aos vértices de um grafo de Lyapunov abstrato fazemos a colagem entre eles de maneira a se obter um fluxo em  $S^3$ .

Para o fluxo anterior, com 2 órbitas atratoras, 1 órbita sela e 2 órbitas repulsoras, seu gráfico de Lyapunov é:

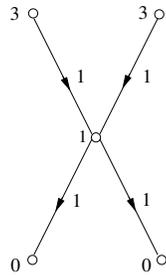


Figura 4.12: Grafo do fluxo Morse-Smale de Franks.

Também podemos considerar fluxos com órbitas periódicas e singularidades.

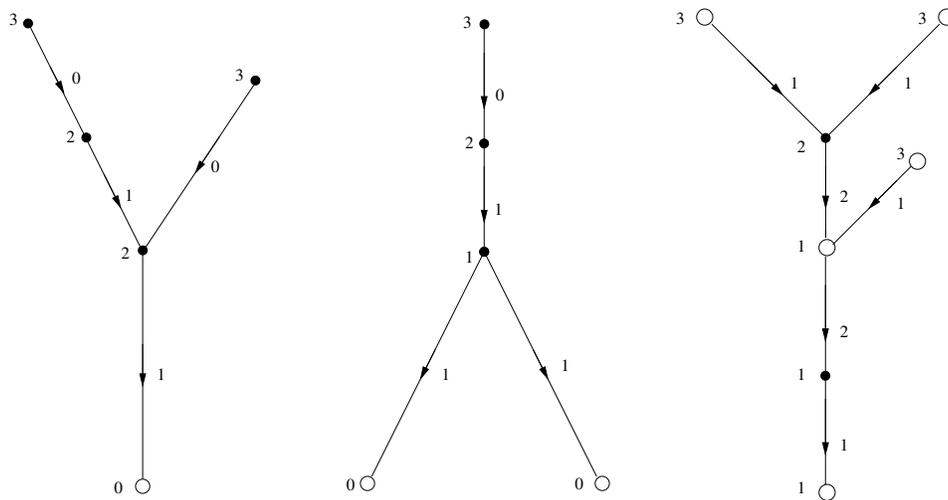


Figura 4.13: Alguns grafos de Morse-Smale.

OBSERVAÇÃO 3 A partir de um fluxo M-S em  $S^3$  com uma órbita atratora (repulsora) podemos obter novos fluxos com mais órbitas que a anterior. Consideremos o bloco isolante de uma órbita atratora (toro sólido) o qual será trocada por um toro sólido contendo mais de uma órbita periódica com diferentes índices. A seção transversal da órbita atratora no toro sólido é um disco contendo um ponto fixo da aplicação retorno.

Apresentamos alguns exemplos de novos fluxos (com seus respectivos grafos dangling) no toro

sólido mediante sua aplicação retorno na seção transversal.

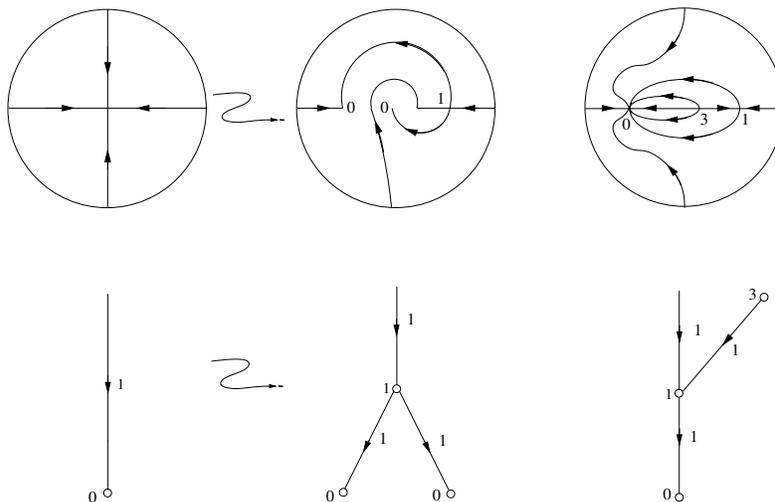


Figura 4.14: Fluxos no toro e seus respectivos grafos dangling.

Para o caso da órbita repulsora segue-se o mesmo procedimento.

### 4.2.3 Fluxos de Smale.

Nesta parágrafo damos uma classificação dos fluxos de Smale em  $S^3$ . Cada vértice de um grafo de Lyapunov associado a um fluxo de Smale será etiquetado com um conjunto básico de dimensão menor ou igual a um. Cada conjunto básico é um atrator, repulsor ou conjunto sela. Diferente do caso Morse-Smale os conjuntos selas podem conter uma infinidade de órbitas periódicas no entanto os atratores e repulsores são órbitas periódicas.

DEFINIÇÃO Um fluxo suave  $\phi_t$  sobre uma variedade compacta  $M$  é dita um *fluxo de Smale* se:

1. O conjunto recorrente por cadeia  $R$  tem estrutura hiperbólica .
2.  $\dim(R) \leq 1$
3.  $\phi_t$  satisfaz a condição de transversalidade.

Um conjunto básico de dimensão zero é uma singularidade e um conjunto básico de dimensão um é uma suspensão de um *subshift* de tipo finito, pois este consiste de uma órbita periódica ou

pode conter uma infinidade de órbitas periódicas e outras infinitas órbitas recorrentes por cadeia não periódicas. Assim qualquer seção transversal é um conjunto finito ou um conjunto de Cantor, e a aplicação de primeiro retorno é um *subshift* de tipo finito em ambos os casos, sendo trivial no primeiro caso.

Do teorema 3.2 dado por Bowen temos que cada conjunto caótico é topologicamente conjugado a um *subshift* de tipo finito. Por outro lado, a realização da suspensão de um *subshift* de tipo finito irreduzível como um conjunto básico foi estabelecido inicialmente por Williams [31] para variedades de dimensão maior que 3. Em seguida, Pugh e Shub [27] mostraram que tais suspensões podem ser realizadas em fluxos de Smale sobre  $S^3$  com talvez muitas singularidades. Resultados de Franks [15] e de Rezende [9], mais precisamente o teorema (2,3), respondem esta questão mostrando que qualquer coleção de *subshift* suspensos podem ser simultaneamente realizados como os conjuntos básicos de um fluxo de Smale sobre  $S^3$ .

Para a construção do bloco isolante da suspensão de  $\sigma(A)$ , Franks [15] mostrou que é suficiente construir um bloco isolante para a suspensão de  $\sigma(N)$  onde  $N$  tem todas as entradas não-diagonais pares e é fluxo equivalente a  $A$ . Mais precisamente, Franks mostrou que se  $A$  é uma matriz inteira irreduzível e não-negativa a qual não é uma matriz de permutação então dado  $r > 0$  existe uma matriz  $N$  que é flow equivalente a  $A$  e que tem cada entrada maior que  $r$  com entradas não-diagonais pares. O tamanho de  $N$  depende só de  $A$  e não de  $r$ . Para matrizes permutação irreduzíveis a construção já foi feita na seção anterior pois este é equivalente a conjuntos básicos com uma única órbita fechada.

O bloco isolante da suspensão de  $\sigma(N)$  é geometricamente o bloco isolante da suspensão de  $\sigma(\tilde{N})$  onde  $\tilde{N}$  denota a redução modulo 2 de  $N$ . Isto é uma consequência de [6] pois afirma que  $k = \dim \text{Ker}((I - B) : Z_2^n \rightarrow Z_2^n) = \dim \text{Ker}((I - \tilde{N}) : Z_2^n \rightarrow Z_2^n)^{(x)}$  é um invariante de fluxos equivalentes. Assim o vértice  $\tilde{v}$  é rotulado com a matriz  $\tilde{N}$  e terá o mesmo grau positivo e grau negativo que o vértice  $v$  rotulado com a matriz  $A$ . Os pesos sobre as arestas de entrada e de saída de  $\tilde{v}$  serão o mesmo que os de  $v$ . Desta forma o bloco isolante terá o número desejado de componentes de fronteira de entrada e de saída como os gêneros apropriados que correspondem aos pesos dados. Note que construiremos um bloco isolante para  $\tilde{N}$  e não para  $N$  mas  $\tilde{N}$  e  $N$  tem blocos isolantes geometricamente iguais e dinamicamente diferentes. Como estamos interessados no aspecto geométrico do bloco isolante isto concluirá nossa construção.

---

<sup>(x)</sup>Lembre que  $B$  é a redução modulo 2 de  $A$ .

Como a matriz  $\tilde{N}$  tem  $k$  uns sobre a diagonal e todas as outras entradas são zeros a suspensão de  $\sigma(\tilde{N})$  consiste de um conjunto básico com  $k$  órbitas periódicas. Realizaremos geometricamente um conjunto que tem as componentes de fronteira especificadas pelo grafo, neste propósito o lema (8,4) de [9] dado a seguir construe um bloco básico  $X'$  para um conjunto básico com  $e^- - 1$  órbitas periódicas correspondente à suspensão de um *subshift* de tipo finito dado pela matriz identidade  $(e^- - 1) \times (e^- - 1)$ . Cabe ressaltar que o bloco  $X'$  satisfaz as condições do grafo.

LEMA 4.3 *Sejam  $e^+$  e  $e^-$  inteiros positivos tais que  $e^- \geq e^+$  e sejam  $g_j^+$ ,  $j = 1 \dots e^+$ , e  $g_i^-$ ,  $i = 1 \dots e^-$ , coleções de inteiros não negativos ( não todos simultaneamente zeros ) tal que  $e^- - e^+ = \sum(g_i^-) - \sum(g_j^+)$ . Considere  $e^-$  handlebodies com colarinho disjuntos  $\mathbf{M}_i$  mergulhadas em  $S^3$  e com gêneros  $g_i^-$ . Seja  $V = (S^3 - \bigcup_{i=1}^{e^-} \mathbf{M}_i)$ . Então existem  $e^- - 1$  alças redondas que separam  $V$  sobre  $e^+$  handlebodies disjuntos de gêneros  $g_j^+$ .*

Revertendo os roles de  $e^+$  e  $e^-$  e revertendo o fluxo sobre as alças redondas o lema acima estabelece o caso  $e^+ \geq e^-$ .

Basicamente o lema (4.3) cola  $e^- - 1$  alças connectantes a  $e^-$  handlebodies com colarinho  $\mathbf{M}_i$  de gênero  $g_i^-$ . Para realizar a suspensão de  $\sigma(\tilde{N})$  colamos  $k - (e^- - 1)$  alças redondas invariantes e  $n - k$  alças nilpotentes<sup>(xi)</sup> ao bloco isolante  $X'$  construído no lema (4.3), e denotemos o novo bloco isolante por  $X$ . Observe que existem  $k$  alças redondas e  $n - k$  alças nilpotentes em  $X$  correspondentes aos uns e zeros na diagonal de  $\tilde{N}$ . Agora como ao adicionar alças invariantes ou alças nilpotentes a  $X'$  não altera o numero de componentes de fronteira de  $X'$  nem seu gênero então o novo bloco isolante  $X$  realiza a suspensão de  $\sigma(\tilde{N})$ .

Realizemos agora os blocos isolantes de algumas matrizes irredutíveis.

1. Se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  então  $k = \dim \text{Ker}(I - A) = 0$  devido a que  $I - A$  é injetiva

$$(I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Segue-se do teorema (4.2) que  $e^+ = e^- = 1$  e da condição de Poincaré-Hopf temos que  $g^+ = g^-$ , um inteiro não negativo. Apresentamos então seus grafos dangling<sup>(xii)</sup>.

<sup>(xi)</sup>Um alça nilpotente é homeomorfo a  $D^1 \times D^1 \times D^1$  e não contem pontos recorrentes.

<sup>(xii)</sup>Estamos adotando a convenção que vértices quadrados representam ferraduras.

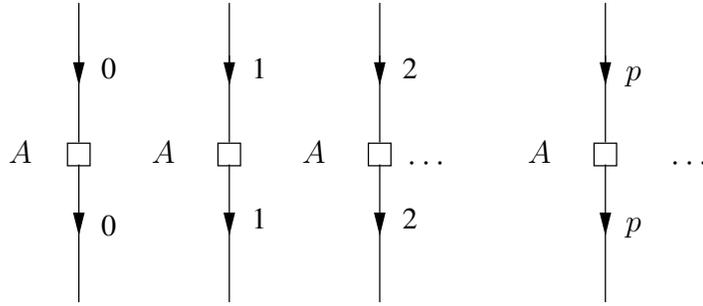


Figura 4.15: Grafos dangling da ferradura

Observamos que o bloco isolante não tem colado alças redondas pois  $k = 0$ .

2. Se  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  também temos que  $k = \dim \text{Ker}(I - B) = 0$  logo o bloco isolante é o mesmo que o anterior.

3. Consideremos a matriz  $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  então sua redução modulo 2 é:  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
logo

$$(I - B) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x + y \\ 0 \end{pmatrix}$$

e portanto  $k = \dim \text{Ker}(I - B) = 2$  de donde  $e^+ = 2$  e  $e^- = 3$  satisfazem as condições do teorema (4.2) e da condição de Poincaré-Hopf temos a seguinte relação

$$0 = -1 - g_1^+ - g_2^+ + g_1^- + g_2^- + g_3^- \text{ isto é } g_1^- + g_2^- + g_3^- = 1 + g_1^+ + g_2^+$$

Pondo  $g_1^- = 2$ ,  $g_2^- = 0$ ,  $g_3^- = 2$ ,  $g_1^+ = 2$  e  $g_2^+ = 1$  as condições do teorema são satisfeitas e assim o vértice é da forma, figura 4.16.

Como  $e^+ = 2$  e  $e^- = 3$  então do lema (4.3) temos que existem 2 alças redondas connectantes  $R_1$  e  $R_2$  colados aos 3 handlebodies com colar disjuntos  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$  e  $\mathbf{M}_3$  de gêneros 2, 0 e 2 respectivamente de tal forma que o complemento  $S^3 - (\bigcup_{i=1}^{e^-} \mathbf{M}_i \cup \bigcup_{j=1}^{e^+-1} R_j)$  são dois handlebodies disjuntos  $\tilde{\mathbf{M}}_1$  e  $\tilde{\mathbf{M}}_2$  de gêneros 2 e 1 respectivamente.

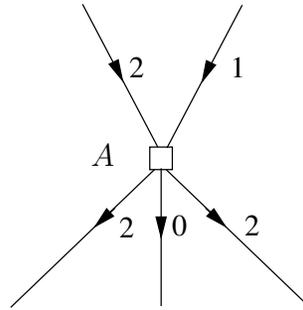


Figura 4.16: Grafos dangling da ferradura com  $k$  alças.

Observe que  $e^- - 1 = k$  portanto não precisamos acrescentar alças redondas invariantes. Logo o bloco isolante é:

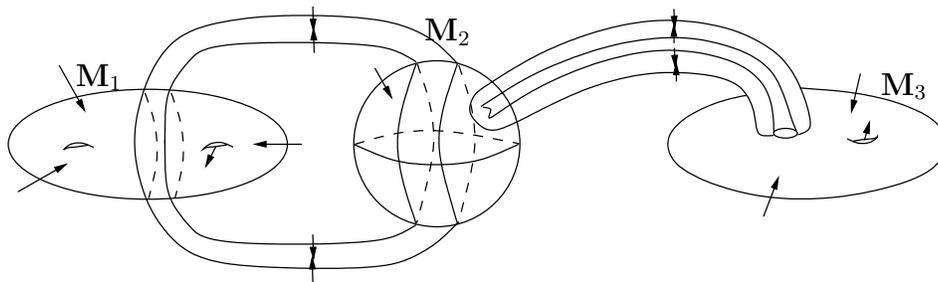


Figura 4.17: Bloco isolante para uma matriz com  $k = 2$ .

## Capítulo 5

# Mergulho das órbitas periódicas

A existência de órbitas periódicas em alguns fluxos 3-dimensionais nos leva ao estudo de nós e *links*. Isto deve-se ao fato que órbitas periódicas de um fluxo são círculos mergulhados (nós). Desta maneira, daremos uma breve introdução à teoria de nós e *links* destacando algumas de suas propriedades. Em seguida, apresentamos os *templates*, ferramenta que dá informação sobre o mergulho das órbitas periódicas. Por último analisaremos o Teorema do *template* de Birman e Williams o qual permite modelar conjuntos caóticos e atratores bidimensionais com um visível “objeto combinatorial” denominado *template* e que é analisado para entender o *links* das órbitas periódicas.

### 5.1 Nós e links.

Num primeiro instante podemos, pensar num nó como sendo um fio com alguma forma semelhante a

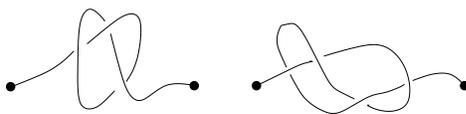


Figura 5.1: Idéia de nós: trefoil e figura-oito.

e gostaríamos de decidir quando são equivalentes. Os dois nós acima são diferentes se no processo de transformação de um no outro, não passamos um laço sobre seus extremos. Esta restrição pode ser feita na definição de equivalência de nós ou dentro da definição de nó. Consideraremos o último caso, isto é, modificaremos ligeiramente a idéia de um nó. Essencialmente nos livraremos dos extremos prolongando-os ao infinito, e o que de certa forma corresponde a identificá-los.

O objetivo da teoria de nós e *links* é classificar estes objetos, isto é, obter classes de equivalência. Para isto devemos ter uma definição formal do que é um nó e quando são equivalentes.

**DEFINIÇÃO** Um *link* é um mergulho  $L : \sqcup S^1 \rightarrow S^3$  onde  $\sqcup S^1$  é uma união finita e disjunta de 1-esferas.

Se  $\sqcup S^1$  contem só uma 1-esfera dizemos que o *link*  $L$  é um *nó* e o denotamos por  $K$ . Frequentemente identificamos o *link* com sua imagem em  $S^3$ , i.e, com seu diagrama.

Um *diagrama* de um *link* é uma projeção do *link* num plano tal que qualquer cruzamento tem exatamente duas pré-imagens (ponto duplo) e seus arcos interceptam transversalmente.



Figura 5.2: Diagramas dos nós: trefoil e figura-oito.

O nó mais simples é o *nó trivial*, isto é, o mergulho de  $S^1$  em  $S^3$  tal que sua imagem é a fronteira de um 2-disco mergulhado em  $S^3$ . Desta forma um nó trivial tem um diagrama com nenhum ponto duplo. Neste trabalho nos restringimos aos nós e *links* que tem um número finito de pontos duplos. Os *links* que não são deste tipo são ditos *turbulentos*.



Figura 5.3: Nó turbulento.

Consideraremos agora a questão de quando dois *links*  $L$  e  $\tilde{L}$  são equivalentes. Observamos que isto não é uma questão de determinar se  $L$  e  $\tilde{L}$  são homeomorfos, pois todos os *links* são homeomorfos por definição desde que  $\sqcup S^1$  tenha o mesmo numero de componentes. Assim na classificação de *links* nossa relação de equivalência será a isotopia.

DEFINIÇÃO Dois *links*  $L$  e  $\tilde{L}$  são *isotópicos* se existe uma família contínua de homeomorfismos  $h_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , de  $S^3$  tal que  $h_0 = Id_{S^3}$  e  $h_1 \circ L = \tilde{L}$ .

Daqui surge a pergunta natural: Quando dois *links* são isotópicos?

Um dos métodos para responder esta pergunta é transformar o problema de equivalência entre *links* (que é um problema de natureza global e topológica) num problema de natureza local e combinatorial.

Um *link orientado* é um *link* com uma direção dada a cada componente. Assim um *link* com  $n$  componentes tem  $2^n$  possíveis orientações. Consideremos a orientação induzida no ponto duplo do diagrama, dado pela seguinte convenção:



Figura 5.4: Sinais da orientação induzida.

No conjunto de diagramas, definimos três operações naturais chamadas as *operações de Reidemeister*.

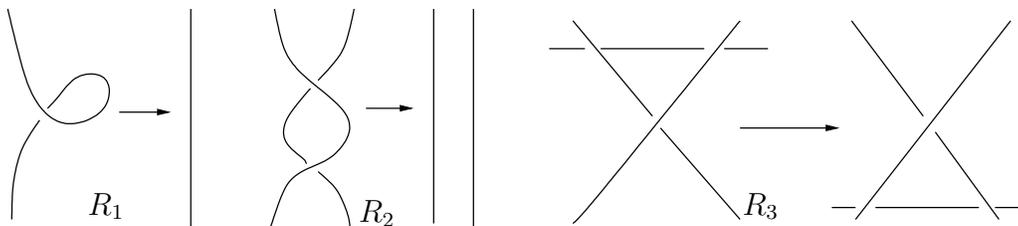


Figura 5.5: Operações de Reidemeister.

TEOREMA 5.1 *Sejam  $K$  e  $\tilde{K}$  dois nós e  $d(K)$ ,  $d(\tilde{K})$  seus diagramas correspondentes. Os nós  $K$  e  $\tilde{K}$  são isotópicos se, e só se, depois de uma seqüência finita de operações de Reidemeister (e suas*

*inversas*) os dois diagramas  $d(K)$ ,  $d(\tilde{K})$  se transformam em dois diagramas que são imagens um do outro por um homeomorfismo do plano, preservando orientação.

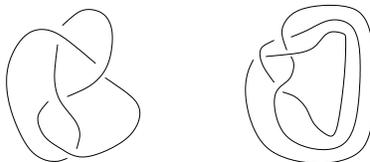


Figura 5.6: Diagramas equivalentes: nó figura oito.

O teorema de Reidemeister é limitado pois não dá um algoritmo que permita conhecer quando dois nós são isotópicos, no entanto versões restritas do problema tem solução.

Consideremos os nós que estão no toro  $T^2 = S^1 \times S^1 \subset S^3$  e que são descritos pelo número de voltas na direção meridional e longitudinal do toro, estes nós são ditos *nós tóricos*. Um nó tórico  $(m, n)$  é uma curva fechada simples sobre  $T^2$  que dá  $m$  voltas na direção longitudinal e  $n$  voltas na direção meridional.

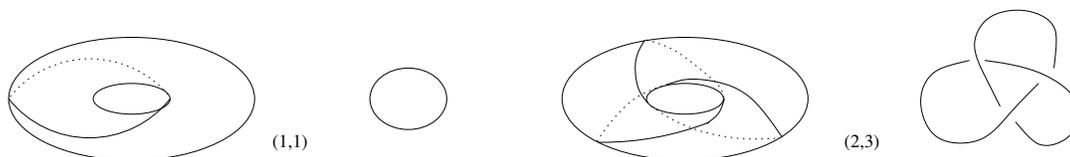


Figura 5.7: Alguns nós tóricos.

**TEOREMA 5.2** *Dois nós tóricos  $(m, n)$  e  $(m', n')$  são isotópicos se, e só se,  $m = m'$  e  $n = n'$  (ou equivalentemente  $m = n'$  e  $n = m'$ ).*

A partir dos nós tóricos construiremos muitos outros nós através de uma operação chamada soma conexa. Esta operação fornece ao espaço de nós, uma lei de semi-grupo.

**DEFINIÇÃO** Dados dois nós orientados  $K$  e  $\tilde{K}$  sua *soma conexa*,  $K \# \tilde{K}$ , é formado assim: considere dois 3-discos disjuntos  $B$  e  $\tilde{B}$  mergulhados em  $S^3$  tal que algum arco fechado de  $K$  e  $(\tilde{K})$  respectivamente esta na fronteira de  $B$  e  $(\tilde{B})$  respectivamente. Tiramos o interior de cada arco e identificamos a fronteira dos arcos por um homeomorfismo que preserva orientação.

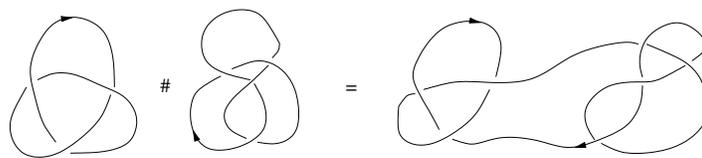


Figura 5.8: Soma conexa.

Observe que a soma de dois *links* orientados com mais de uma componente não está bem definida.

Um nó que não pode ser escrito como soma de dois nós não-triviais é dito *nó primo*. É claro que cada nó pode ser escrito como soma de nós primos. Um teorema de classificação de Schubert estabelece que cada nó tem uma única factorização prima como a soma conexa de nós primos. Exemplos de nós primos são os nós tóricos.

## 5.2 Templates.

Para um fluxo 3-dimensional suficientemente complicado, como por exemplo fluxos estruturalmente estáveis não triviais, existe um número enumerável de órbitas periódicas. O *template* é uma ferramenta que investiga o *link* destas órbitas periódicas, isto é, preserva o mergulho das órbitas além de reduzir a dimensão. Sua origem está no estudo dos atratores estranhos aparentemente associados com as equações de Lorenz[32, 33]. Williams desenvolve um modelo destes atratores muito semelhante ao *template* de Lorenz para um estudo matemático rigoroso.

O *template* pode ser formado a partir de um fluxo de Smale identificando as órbitas que compartilham o mesmo destino positivamente assintótico, isto é, colapsamos ao longo da direção estável do fluxo original, transformando o fluxo da variedade 3-dimensional num semifluxo sobre uma variedade 2-dimensional com muitas folhas.

Para um fluxo em geral, ocasionalmente modificamos o fluxo antes de colapsá-lo, dando origem no máximo a duas órbitas fictícias. Isto se verá na próxima seção.

**DEFINIÇÃO** Um *template* é uma 2-variedade ramificada<sup>(i)</sup> compacta com fronteira construído lo-

---

<sup>(i)</sup>Ver definição em [32].

calmente de um número finito de cartas ramificadas ao longo de linhas<sup>(ii)</sup>, como ilustra a figura abaixo, e dotado com um semifluxo expansivo suave.

Para cada linha de ramificação do *template* existe um número maior ou igual a 2, de faixas que chegam na linha de ramificação e que a cobrem completamente. E um número maior ou igual que 1, de faixas que saem da linha de ramificação. As faixas que chegam e saem de todas as linhas de ramificação são conectadas bijectivamente. O termo semifluxo denota uma ação de  $R^+$  pois o fluxo não é inversível na linha de ramificação. Por expansivo entendemos que a aplicação retorno, sobre a linha de ramificação, induzida pelo semifluxo é uma *aplicação expansiva*, isto é, qualquer subintervalo suficientemente pequeno é expandido. Por tanto, um *template* consiste de um conjunto finito de linhas de ramificação conectadas por suas faixas no sentido do semifluxo.

Da definição do *template* podemos construir muitos *templates* abstratos, mas a seguir construámos templates a partir de alguns fluxos clássicos.

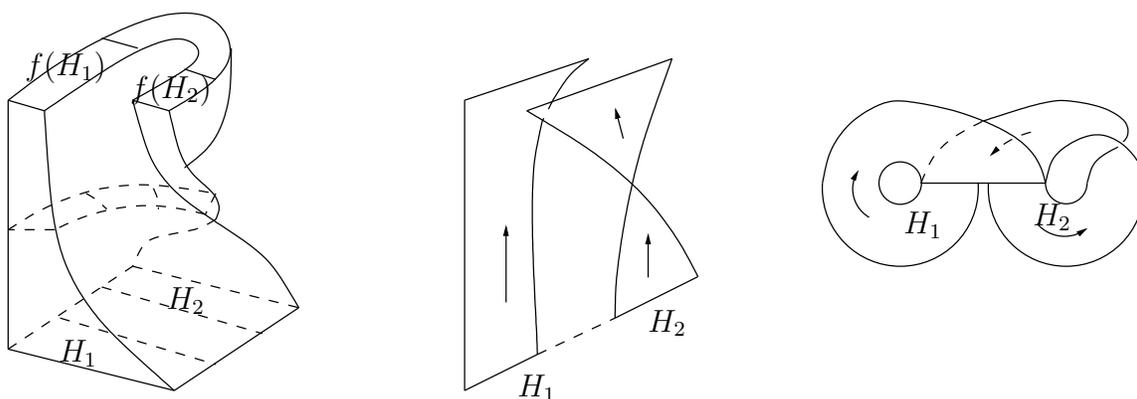


Figura 5.9: O Template ferradura.

<sup>(ii)</sup>Que denotaremos a seguir apenas por cartas ramificadas.

EXEMPLO 5.1 (O TEMPLATE FERRADURA) Consideremos a aplicação ferradura estudada no começo da seção 3.2 e sua suspensão a fim de obter o *template* ferradura.

Colapsando a direção estável do fluxo obtemos o *template* ferradura  $\mathcal{F}$ . A diferença do *template* de Lorenz  $\mathcal{L}$  e do *template* ferradura é que este não contém todos os nós tóricos [20].

EXEMPLO 5.2 (O TEMPLATE DE LORENZ) Consideremos o atrator de Lorenz estudado no capítulo anterior e substituamos o fluxo 3-dimensional por um semifluxo 2-dimensional, onde as soluções estão definidas num tempo positivo pois num tempo negativo toda solução eventualmente atinge a linha de ramificação e conseqüentemente contradiz a unicidade das soluções. Desta maneira obtemos o *template* não trivial mais simple, o *template* de Lorenz  $\mathcal{L}$ .

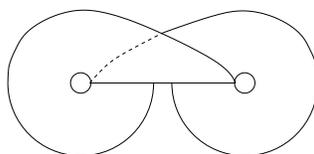


Figura 5.10: O template de Lorenz.

A existência de órbitas periódicas em  $\mathcal{L}$  e o tipo de *link* que formam esta dado em [1]. Cada *link* em  $\mathcal{L}$  é dito *link de Lorenz* e a totalidade de *links* em  $\mathcal{L}$  é dito *link de Lorenz master*,  $L^*$ , que é uma classe muito importante por conter todos os nós tóricos.

EXEMPLO 5.3 (TEMPLATES LORENZ-LIKE) Observamos que o *template* ferradura  $\mathcal{F}$  é similar ao *template* Lorenz  $\mathcal{L}$  exceto por uma semi-torção ao longo da faixa direita. Assim estes dois *templates* apresentados até agora são exemplos simples de *templates*. Na verdade temos uma classe de *templates* simples denominados *Templates Lorenz-like*. Estes são formados apenas por uma carta ramificada com duas faixas.

O *template* Lorenz-like  $\mathcal{L}(m, n)$  com  $m, n \in \mathbb{Z}$  tem  $m$  e  $n$  semi-torções na faixa esquerda e direita respectivamente. Desta forma o *template* de Lorenz  $\mathcal{L}$  é isotópico ao *template* Lorenz-like  $\mathcal{L}(0, 0)$  e o *template* ferradura  $\mathcal{F}$  é isotópico ao *template* Lorenz-like  $\mathcal{L}(0, 1)$ .

EXEMPLO 5.4 (TEMPLATES UNIVERSAIS) A existência de nós não triviais em qualquer *template*

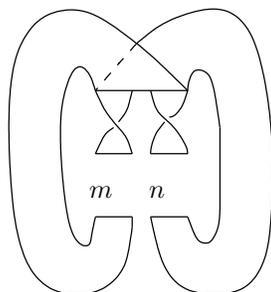


Figura 5.11: Template Lorenz-like  $\mathcal{L}(m, n)$ .

está garantida em [18] no qual se afirma que cada *template*  $\mathcal{T}$  contém infinitos tipos de nós distintos. Mas, isto não quer dizer que todos os tipos de nós e *links* estejam num *template* arbitrário. Assim por exemplo o *template* ferradura  $\mathcal{F}$  não contém todos os nós tóricos e o *template* de Lorenz  $\mathcal{L}$  não contém o nó figura-oito. Mas, existem *templates* que entre suas órbitas periódicas tem todos os tipos de nós e *links* e são ditos *templates universais* [17]. A existência dos *templates* universais surgiu em [2] e foi resolvido examinando *subtemplates*, isto é, subconjuntos do *template* que também são *templates*.

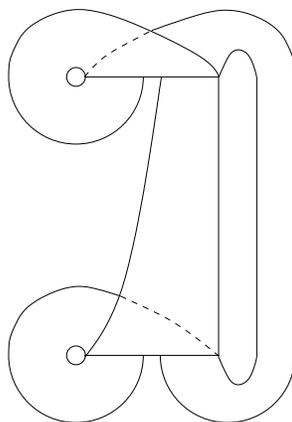


Figura 5.12: *Template* universal  $\mathcal{V}$ .

A partir daqui surgem fluxos em  $S^3$  com *link* de órbitas periódicas densas e gerando todo tipo de nós e *links*.

Outros exemplos de *templates* são aqueles que tem mais de uma linha de ramificação e podem ser construídos abstratamente.

### 5.3 O teorema do template.

Uma vez introduzido os *templates* nosso objetivo é associar um *template*  $\mathcal{T}$  a cada fluxo hiperbólico numa 3-variedade. Assim, heurísticamente reduzimos a dimensão de nosso problema por um, pois só necessitamos considerar as órbitas sobre o *template*  $\mathcal{T}$  o qual suporta as órbitas periódicas do fluxo.

O teorema do *template* de Birman e Williams garante que tal associação pode ser feita positivamente. A partir daqui consideramos os *templates* como “objetos dinâmicos”.

**TEOREMA 5.3 (O TEOREMA DO TEMPLATE)** *Dado um fluxo  $\phi_t$  sobre uma 3-variedade  $M$  com conjunto recorrente por cadeia hiperbólico, o link das órbitas periódicas  $L_\phi$  esta em correspondência bijetiva com o link das órbitas periódicas  $L_{\mathcal{T}}$  sobre um template particular mergulhado  $\mathcal{T} \subset M$  (com  $L_{\mathcal{T}}$  contendo no máximo 2 órbitas fictícias). Sobre qualquer sublink finito, a correspondência é via isotopia.*

*Demonstração.* Pelo teorema da decomposição espectral  $R$  descompõe-se num número finito de conjuntos básicos  $\{\Lambda_i\}_{i=1}^K$ . Sendo  $M$  3-dimensional temos que  $0 \leq \dim(\Lambda_i) \leq 3$ . Consideremos cada um dos quatro casos referente as dimensões de um conjunto básico  $\Lambda$ , para construir uma vizinhança especial de  $N(\Lambda)$  em  $M$  e assim obter o *template* que será o espaço quociente de  $N(\Lambda)$ .

**CASO 0:** Se  $\dim(\Lambda) = 0$  então  $\Lambda$  não contem órbitas periódicas e o teorema é trivialmente satisfeito.

**CASO 1:** Se  $\dim(\Lambda) = 1$  pelo teorema 2.13 temos que  $\phi_t$  restrito a  $\Lambda$  é topologicamente equivalente à suspensão de um *subshift* de tipo finito. A seção transversal  $\Delta$  para o fluxo sobre  $\Lambda$  pode ser considerada como uma união finita de discos disjuntos  $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$  conseqüentemente  $\Delta \cap \Lambda$  é um conjunto de Cantor com partição de Markov  $\Omega \equiv \cup_j R_j$  onde  $R_j$  são os retângulos e  $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$  a aplicação de retorno. Pela proposição 3.1 podemos considerar a partição de Markov sendo associada a uma coleção de alças  $H \equiv \{H_j\}_{j=1}^N$ . Estendamos agora a aplicação retorno  $\tau$  ao alças  $H$ . Se  $\tau(H_i) \cap H_j \neq \emptyset$  então:

- Como  $\tau(W^u(x, R_i)) \supset W^u(\tau(x), R_j)$  então  $\tau(H_i)$  estira transversalmente  $H_j$  na direção instável.

- Revertendo a direção do fluxo obtemos que  $\tau^{-1}(H_j)$  estira transversalmente  $H_i$  na direção estável.
- $\tau(H_i) \cap H_j$  tem ao mais uma componente conexa, pois se tem duas componentes então para  $x \in H_i$   $\tau(I^u(x)) \not\subseteq I^u(\tau(x))$  contradizendo a condição 4 da definição de partição de Markov.

Fazendo fluir as alças  $H_j$  em tempo positivo e negativo construímos uma vizinhança *flowbox*  $N(\Lambda)$  para o conjunto de alças.

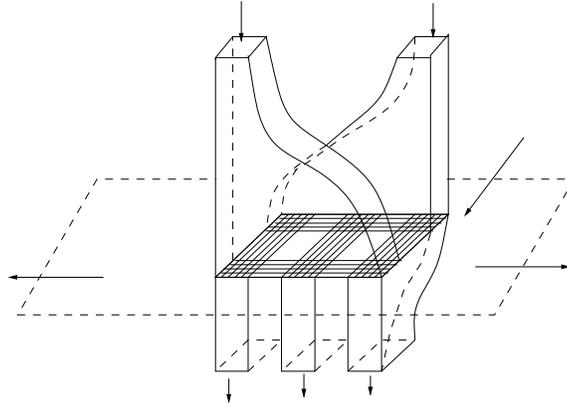


Figura 5.13: Vizinhança *flowbox*  $N(\Lambda)$ .

Consideremos a matriz geométrica  $A$ , de zeros-uns, onde  $A_{(i,j)}$  é igual ao número de interseção geométrica de  $\tau(H_j) \cap H_i$ . A  $i$ -ésima fila de  $A$  diz quais alças  $H_i$  fluem para diante. Assim existem  $\sum_j A_{(i,j)}$  componentes de  $\tau^{-1}(H) \cap H_i$  que estiram transversalmente  $H_i$  na direção estável. Logo existem  $\sum_j A_{(i,j)}$  *flowbox* de saída conectados a  $H_i$ . Revertendo a direção e aplicando o mesmo argumento mostramos que existem  $\sum_j A_{(j,i)}$  *flowbox* de entrada conectadas a  $H_i$  estiram-se na direção instável. Como  $\tau$  é um homeomorfismo sobre  $\Omega$  e  $\Omega$  intercepta a fronteira de cada alça  $H_i$  o *flowbox* é retilíneo ao longo das arestas.

Finalmente formamos o espaço quociente, identificando todos os pontos sobre  $W^s(x) \cap N(\Lambda)$  para  $x \in \Lambda$ , isto colapsa suavemente produzindo uma isotopia sobre o *links* de órbitas periódicas.

CASO 2: Se  $\dim(\Lambda) = 2$ , pela hiperbolicidade cada um dos fibrados estável, instável e centro devem ser de dimensão um. Logo  $\Lambda$  deve ser um atrator ou repulsor. Assumimos que  $\Lambda$  é um repulsor e escolhamos uma órbita fechada  $\gamma \subset \Lambda$ . Modificamos o fluxo  $\phi_t$  sobre uma pequena vizinhança de  $\gamma$ ,  $N_\varepsilon$ , ao fluxo  $\phi_t^{\text{DA}}$  o qual muda  $\gamma$  a uma órbita de tipo fonte e da origem a uma

ou duas órbitas novas de tipo sela,  $\gamma'$  e  $\gamma''$ . Semelhante à proposição 3.4 obtemos que se  $\Lambda'$  é o complemento de  $W^u(\gamma)$  em  $\Lambda$  então  $\Lambda'$  é hiperbólico e  $W^u(\gamma)$  é denso em  $\Lambda$ . Desta forma  $\dim(\Lambda') \leq 1$ , mas  $\Lambda'$  contém órbitas, em particular  $\gamma'$ , logo  $\dim(\Lambda') = 1$ . Considerando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno em  $N_\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) cada órbita periódica de  $\phi_t$  eventualmente fica fora de  $N_\varepsilon$  exceto  $\gamma$ , que é trocado no fluxo DA,  $\phi_t^{\text{DA}}$ , por  $\gamma$ ,  $\gamma'$  e ( se for necessário )  $\gamma''$ . Conseqüentemente reduzimos o caso 2 ao caso 1 pois o fluxo DA,  $\phi_t^{\text{DA}}$ , não tem conjuntos básicos de dimensão 2.

CASO 3: Se  $\dim(\Lambda) = 3$  escolhemos uma órbita periódica  $\gamma$  e formamos o fluxo DA,  $\phi_t^{\text{DA}}$ , sobre uma pequena vizinhança tubular de  $\gamma$  tornando  $\gamma$  uma órbita tipo fonte e dando origem a uma ou duas órbitas novas de tipo sela,  $\gamma'$  e  $\gamma''$ . Pelo proposição 3.4 o fluxo DA,  $\phi_t^{\text{DA}}$ , não tem conjuntos básicos de dimensão 3. Como no caso 2 as órbitas no fluxo DA são isotópicas (idênticas) a de  $\phi_t$  exceto  $\gamma'$  e  $\gamma''$ . Como o fluxo DA,  $\phi_t^{\text{DA}}$ , tem conjuntos básicos de dimensão 2 então estamos no caso 2. ■

Observe que a correspondência dos *sublinks* mencionada no teorema acima é via isotopia. Portanto, diremos que cada *sublink* finito de órbitas periódicas do conjunto básico contido em  $L_\phi$  tem um correspondente *sublink* finito de órbitas periódicas no *template* contida em  $L_{\mathcal{T}}$  com a *mesma topologia*.

## Capítulo 6

# Templates e blocos isolantes

Os grafos de Lyapunov dão uma caracterização dos fluxos. Esta caracterização é mais forte para fluxos de Smale, onde obtivemos uma classificação completa dos conjuntos básicos. No entanto a classificação é abstrata com relação ao mergulho dos conjuntos básicos.

A fim de continuar com o estudo do mergulho das órbitas no espaço de fase do fluxo necessitamos inicialmente estudar neste capítulo a dinâmica no *template* onde apresentamos algoritmos para a construção de *templates* a partir de matrizes geométricas e viceversa. Esta conexão é feita mantendo a dinâmica e em alguns casos a topologia do conjunto recorrente por cadeia em si. Na segunda parte apresentamos alguns mergulhos de *templates* em  $S^3$  que foram estudados por Sullivan[29].

### 6.1 Dinâmica no *template*.

A partir da definição do *template* temos que muitas órbitas do semi-fluxo saem do *template*, isto é devido à existência de um buraco nas cartas ramificadas. Como estamos interessados nas órbitas periódicas do semifluxo, que permanecem no *template*, estas últimas serão desconsideradas. Logo da mesma forma que os fluxos, o *conjunto recorrente por cadeia do template* serão estas órbitas que nunca saem do *template*.

Segue-se do teorema do *template* que toda dinâmica não-trivial pode ser modelada sobre um *template*. A dinâmica sobre o *template* esta em correspondência com a dinâmica da suspensão dos *subshifts* de tipo finito. Também temos que para cada nó  $k$ , no *template*  $\mathcal{T}$  existe uma órbita

periódica  $\gamma_k$  na suspensão de um *subshift* de tipo finito. Isto é expressado na proposição a seguir que resulta como um corolário do teorema do *template*.

PROPOSIÇÃO 6.1 *Dado um conjunto básico unidimensional  $\Lambda$  de um fluxo  $\varphi_t$  existe um template e uma suspensão de subshift de tipo finito tais que suas órbitas periódicas estão em correspondência bijetiva.*

*Demonstração.* Pelo teorema do *template* temos que para  $\varphi_t|_\Lambda$  existe um *template*  $\mathcal{T}$  tal que os *links* de órbitas periódicas  $L_\varphi$  estão em correspondência bijetiva com os *links* de órbitas periódicas  $L_{\mathcal{T}}$ . Por outro lado o teorema de Bowen implica que  $\varphi_t|_\Lambda$  é topologicamente equivalente à suspensão de um *subshift* de tipo finito. Logo a afirmação está provada. ■

Note que não afirmamos que a correspondência bijetiva é via isotopia, mas podemos garantir que as dinâmicas serão topologicamente equivalentes.

Gostaríamos de estabelecer conexões mais explícitas entre *templates* e matrizes. Exploraremos isto a seguir.

### 6.1.1 A matriz de um template.

Primeiramente definimos a direção estável e instável no *template*. Estas direções são naturais em *templates* provenientes de fluxos de Smale e as generalizamos para qualquer *template* abstrato. A direção “paralela” à linha de ramificação será a *direção instável* e a direção “ortogonal” ao *template* é a direção estável. Denominamos também *template engordado* à expansão do *template* na direção estável diferenciando as faixas que chegam na linha de ramificação, veja figura. O *template engordado* será a suspensão de uma aplicação retorno sobre o conjunto de alças.

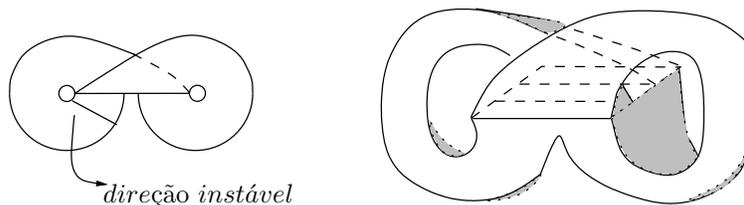


Figura 6.1: Direções no *template* e o *template engordado*.

TEOREMA 6.2 *A cada template está associado uma matriz geométrica.*

*Demonstração.* Dado o *template*  $\mathcal{T}$  forme o *template* engordado e rotule os *flowboxes* originados pelas faixas do *template*  $\mathcal{T}$  com  $\{\tilde{H}_i : i = 1 \cdots N\}$ . Note que no *template* engordado temos um fluxo  $\varphi_t$  e que  $\{H_i = \partial\tilde{H}_i^+ : i = 1 \cdots N\}$  representa uma partição de Markov associada à aplicação de primeiro retorno  $f$  do fluxo  $\varphi_t$ . Defina então  $A_{\mathcal{T}}$ , a matriz  $N \times N$  com entradas dadas por:

$$A_{\mathcal{T}}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(H_i) \cap H_j = \emptyset \\ 1 & \text{se } f(H_i) \cap H_j \neq \emptyset \end{cases}$$

Logo  $A_{\mathcal{T}}$  é a matriz geométrica que representa um *subshift* de tipo finito que está associado ao *template*  $\mathcal{T}$ . ■

Para encontrar a matriz associada ao *template* não é necessário considerar o *template* engordado pois a informação relevante permanece no *template*, como vemos na demonstração.

EXEMPLO 6.1 Encontremos a matriz geométrica para o *template* de Lorenz  $\mathcal{L}$ .

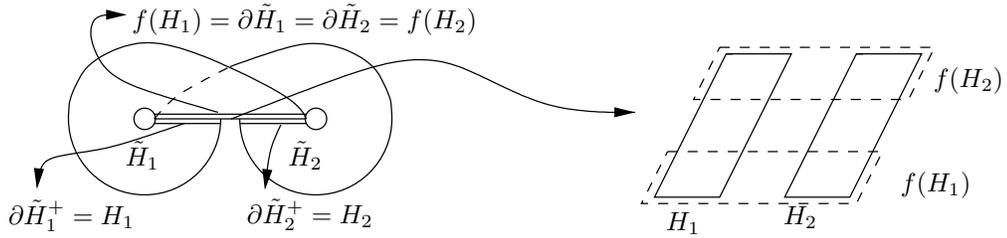


Figura 6.2: Template rotulado para obter sua matriz

$$\begin{aligned} f(H_1) \cap H_1 \neq \emptyset &\Rightarrow A_{\mathcal{T}}(1, 1) = 1 \\ f(H_1) \cap H_2 \neq \emptyset &\Rightarrow A_{\mathcal{T}}(1, 2) = 1 \\ f(H_2) \cap H_1 \neq \emptyset &\Rightarrow A_{\mathcal{T}}(2, 1) = 1 \\ f(H_2) \cap H_2 \neq \emptyset &\Rightarrow A_{\mathcal{T}}(2, 2) = 1 \end{aligned} \quad A_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

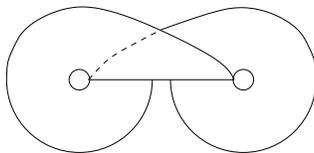
Como o *template* ferradura  $\mathcal{H}$  difere do *template* de Lorenz  $\mathcal{L}$  só por uma semi-torção então  $A_{\mathcal{H}} = A_{\mathcal{L}}$  já que em nossa definição de matriz geométrica não consideramos a trajetória do fluxo e sim a aplicação retorno nas alças. Em outras palavras, as semi-torções nas faixas não são captadas pela matriz.

EXEMPLO 6.2 Para o *template* universal  $\mathcal{V}$ , figura 5.12, temos a seguinte matriz.

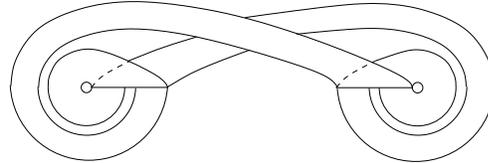
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cabe ressaltar que fluxos cujos *templates* tem uma só linha de ramificação<sup>(i)</sup>, possuem uma seção transversal global que corresponde à linha de ramificação engordado. Esta seção transversal se preserva ao fazer cortes no *template* ao longo de suas órbitas, desta forma temos que não exclui as órbitas do conjunto recorrente por cadeia do *template*. Assim o *template* e o *template* recortado tem dinâmica topologicamente equivalente e a mesma topologia sobre suas órbitas periódicas<sup>(ii)</sup>. Diremos de forma abreviada que ambos tem a mesma *dinâmica e topologia*. Observe que dinâmicas topologicamente equivalentes não captam o mergulho das órbitas já que os homeomorfismos não distinguem os tipos de *links*.

EXEMPLO 6.3 Consideremos os dois *templates* e suas matrizes



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pelo comentário anterior ambas tem a mesma dinâmica e topologia. Em particular são fluxo equivalentes então deverão satisfazer as condições do teorema de Franks 3.2:

$$\det(I - A) = -1 \quad \text{e} \quad \det(I - B) = -1$$

$$\ker(I - A) = 0 \Rightarrow (I - A)\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2 \quad \text{logo} \quad \mathbb{Z}^2 / (I - A)\mathbb{Z}^2 = 0$$

$$\ker(I - B) = 0 \Rightarrow (I - B)\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z}^4 \quad \text{logo} \quad \mathbb{Z}^4 / (I - B)\mathbb{Z}^4 = 0$$

<sup>(i)</sup>Os *templates* Lorenz-like.

<sup>(ii)</sup>Estes cortes nos dão a idéia de obter classes de equivalência de *templates* como veremos a posteriori.

Basicamente, o fato de fazer cortes no *template* corresponde a refinar a partição de Markov, isto é, o fato de “acrescentar” o número de linhas de ramificação corresponde a “acrescentar” retângulos na partição de Markov.

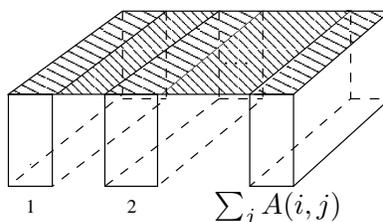
Até agora temos construído uma matriz para um *template* dado. Observe que *templates* com conjunto recorrente por cadeia com a mesma dinâmica mas topologia sobre suas órbitas periódicas diferente como o *template* de Lorenz e o *template* ferradura tem a mesma matriz. Isto mostra que uma mesma dinâmica pode ser mergulhada de formas não equivalentes. Por outro lado, os *templates* que diferem por cortes tem matrizes de diferentes tamanhos mas representarão o mesmo conjunto recorrente por cadeia. Uma consequência imediata deste fato é que cortes no *template* é uma condição necessária para obter *templates* equivalentes. Porém essa condição não é suficiente pois adiante veremos que existem *templates* geometricamente diferentes, isto é, um não pode ser obtido do outro por cortes, mas que possuem mesma dinâmica e topologia. Veja o exemplo 6.5.

### 6.1.2 O Template de uma matriz.

Continuando com nossa conexão entre *templates* e matrizes, gostaríamos de estabelecer uma relação recíproca, isto é, construir um *template* para cada matriz.

TEOREMA 6.3 *A cada matriz geométrica esta associado um template.*

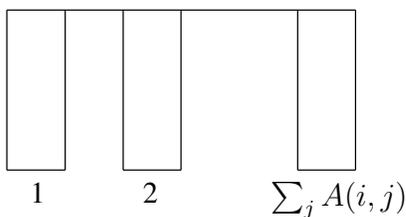
*Demonstração.* Isto é uma consequência do teorema do *template*, mas faremos uma demonstração construtiva. Consideremos um conjunto de alças com  $n$  alças onde  $n$  é o tamanho da matriz. Para cada  $i$ -ésima linha considere uma alça unida com  $\sum_j A(i, j)$  *flowbox* de saída.



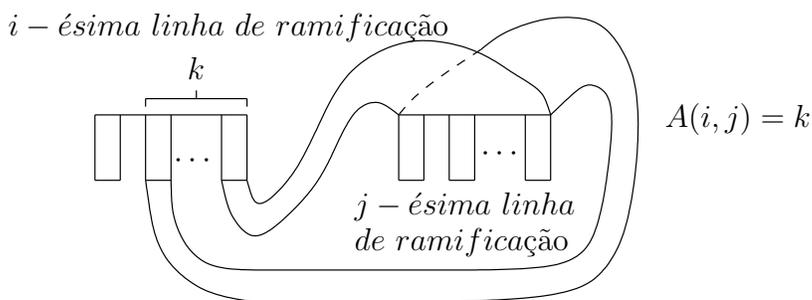
Colapsando na direção estável da alça obtemos uma semi-carta<sup>(iii)</sup>.

Neste ponto só nos falta fazer as colagens adequadas para obter o *template*. Cada  $(i, j)$ -ésima posição nos indica que da  $i$ -ésima semi-carta devemos escolher  $A(i, j)$  intervalos inferiores para

<sup>(iii)</sup>Denominaremos semi-carta à parte inferior de uma carta linha ramificada.



colá-los no intervalo superior da  $j$ -ésima semi-carta. Note que a aplicação que une os intervalos inferior e superior é escolhido de tal forma a obter um *template*  $\mathcal{T}$  de acordo com nossa definição.

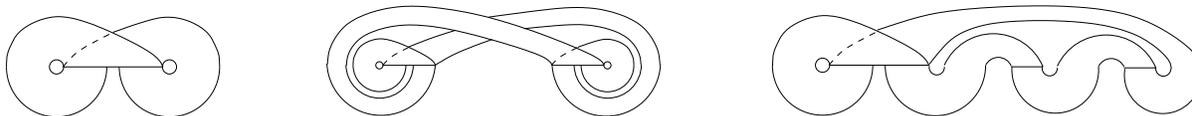


■

Observe que na demonstração do teorema do *template* se constrói *templates* específicos pois o fluxo é conhecido. Já no teorema anterior obtemos diferentes *templates* a partir de uma matriz  $A$ , mas que diferem apenas pelas torções que tem nas faixas e portanto terão a mesma dinâmica mas diferentes topologias.

EXEMPLO 6.4 Matrizes com um de seus respectivos *templates*

$$A = \begin{pmatrix} & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Todas as matrizes acima tem o mesmo *template* associado (depois de colar os cortes do *template* ou inserir linhas de ramificação).

Observe que estas matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são fluxo equivalentes:

$$\begin{aligned} \det(I - A) &= -1, & \det(I - B) &= -1 & \text{ e } & \det(I - C) &= -1 \\ \ker(I - A) &= 0 \Rightarrow (I - A)\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2 & \text{ logo } & \mathbb{Z}^2 / (I - A)\mathbb{Z}^2 &= & 0 \\ \ker(I - B) &= 0 \Rightarrow (I - B)\mathbb{Z} = \mathbb{Z} & \text{ logo } & \mathbb{Z}^4 / (I - B)\mathbb{Z} &= & 0 \\ \ker(I - C) &= 0 \Rightarrow (I - C)\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z}^3 & \text{ logo } & \mathbb{Z}^3 / (I - C)\mathbb{Z}^3 &= & 0 \end{aligned}$$

No exemplo anterior temos um caso onde matrizes fluxo equivalentes podem ter o mesmo *template* (isto é, a menos de cortes). No entanto, uma matriz geométrica estar numa classe de fluxo de equivalência não implica que exista um único *template* associado a essa classe. Veja o exemplo a seguir.

EXEMPLO 6.5 Considere agora a seguinte partição de Markov refinada da ferradura de Smale.

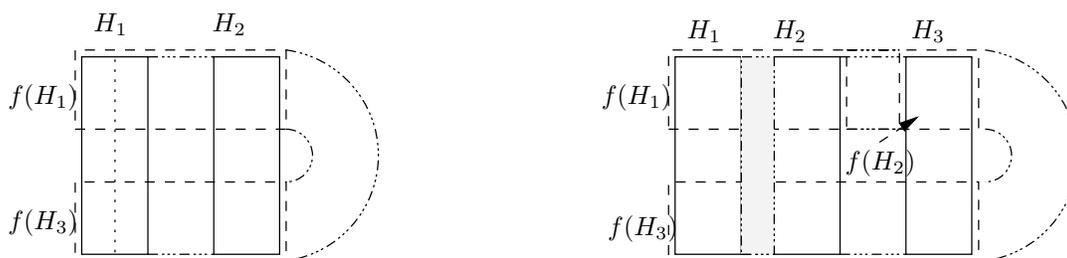


Figura 6.3: Partição de Markov refinada da ferradura de Smale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Figura 6.4: Template da partição de Markov refinada.

Temos que as matrizes  $A$  e  $B$  são fluxo equivalentes, mas observamos que seus *templates* são não equivalentes, isto é, não se consegue chegar de um ao outro por cortes.

Devemos ressaltar que em geral matrizes fluxo equivalentes não preservam tipos de nós pois esta relação é fraca com respeito a isotopia de nós. Basta considerar o *template* de Lorenz e o da ferradura associados a matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

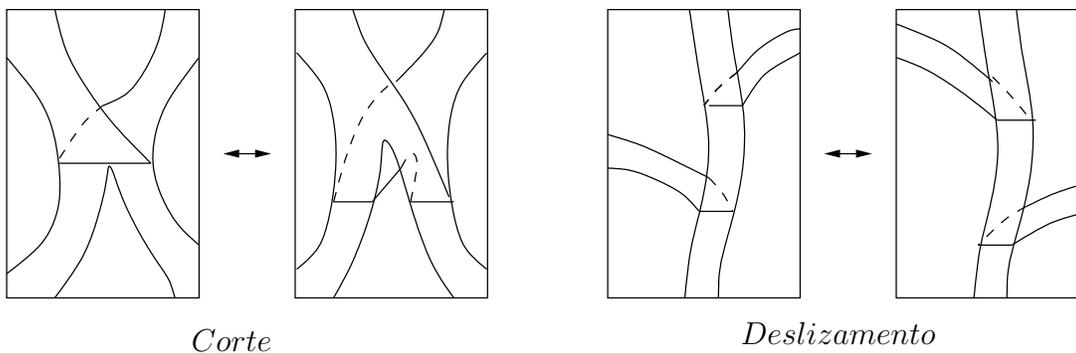
Segue-se que invariantes dos *subshifts* de tipo finito, isto é, as classes de fluxo equivalência das matrizes geométricas, são invariantes dinâmicos dos *templates*.

A partir dos exemplos anteriores e em geral pode-se ver que tanto os cortes nos *templates* como os cortes nos retângulos da partição não mudam a dinâmica e topologia das órbitas periódicas (isto é, preserva o conjunto recorrente por cadeia). Porém os cortes nos retângulos mudam a geometria do *template*, isto é, produz *templates* não equivalentes pois não se chega de um ao outro por cortes não *template*.

Porém, seria interessante que os *templates* do exemplo 6.5 fossem equivalentes, onde esta equivalência estará dada por preservar os nós e *links* que habitam no *template* e não pela forma geométrica do *template*. Observe que no decorrer desta seção já motivamos esta equivalência.

DEFINIÇÃO Dois *templates* mergulhados em  $S^3$  são *equivalentes* se são conectados por uma sequência finita de:

1. Cortes no *template*.
2. Deslizamento de faixas.
3. Isotopias sobre o *template*.



Finalizaremos este capítulo apresentando este problema desafiador da teoria dos *templates*, que é determinar invariantes que caracterizem as classes de equivalência dos *templates*.

A classificação de *templates* é um problema muito difícil. Um invariante simple seria a orientabilidade. O *template* ferradura contém uma faixa de Möbius, logo é um *template* não orientável. Neste sentido, o *template* de Lorenz é orientável. Nenhuma das seqüência finitas levam *templates* orientados em *templates* não orientáveis.

Existem invariantes que também diferenciam alguns outros *templates* mas não desenvolveremos esta teoria nesta tese.

## 6.2 Mergulho do template no bloco isolante.

No capítulo 4 apresentamos diferentes construções geométricas de blocos isolantes para os conjuntos básicos dos fluxos de Smale (via [9]). Estes blocos foram realizados em sua totalidade para singularidades e órbitas periódicas. No entanto, para os conjuntos caóticos a construção foi apenas geométrica sem levar em conta a dinâmica que carrega.

Nesta seção abordaremos este fato via *templates*, já que toda a dinâmica de interesse do bloco isolante encontra-se no seu interior. De fato, pois em [9] se modificou o fluxo no bloco isolante afim de que a dinâmica seja topologicamente equivalente à dinâmica do conjunto caótico apresentado. Esta modificação é feita em *flowboxes*  $F_j$  construídas de forma disjunta e que atravessam todas as alças redondas e alças nilpotentes.

Como fluxo equivalência não reconhece a forma como os conjuntos invariantes estão mergulhados dentro da variedade, o mergulho do *template* pode ser entendido de duas formas:

1. Mergulho da dinâmica do *template*.
2. Mergulho do *template*, com a dinâmica e topologia das órbitas.

Desta forma gostaríamos de construir fluxos de Smale onde cada conjunto caótico seja modelado por um mergulho de algum *template*  $\mathcal{T}$ . Isto é, existe uma vizinhança isolante para cada conjunto caótico foliado por variedades estáveis locais de um fluxo, tal que quando colapsarmos na direção estável, obtemos o mergulho de um *template*  $\mathcal{T}$ .

Como um *template* pode mergulhar de diferentes maneiras em  $S^3$  o caso 1 é geralmente conhecido ao contrário do caso 2. Assim, pelos resultados da seção anterior seria suficiente rotular

cada vértice do grafo de Lyapunov, que representam um conjunto caótico, por um template  $\mathcal{T}$  ao invés da matriz.

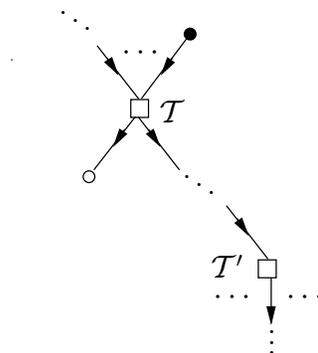


Figura 6.5: Grafos rotulados com templates.

Alguns mergulhos de templates em  $S^3$  foram estudadas por Sullivan [29] para *fluxos Smale-Lorenz*, isto é, fluxos de Smale com três conjuntos básicos: uma órbita repulsora, uma órbita atratora (podendo ser singularidades ou órbitas periódicas) e um conjunto caótico modelado pelo mergulho do template de Lorenz.



Figura 6.6: Mergulho do template de Lorenz.

No caso em que a órbita repulsora e atratora sejam singularidades  $r$  e  $a$ , Sullivan mostrou que o template de Lorenz mergulha em sua forma standard, isto é, ambas faixas são livres de torções, nós e *links*. Para cada singularidade  $r$  e  $a$  considerou seu bloco isolante, que neste caso são duas 3-bolas  $R$  e  $A$  respectivamente, e para o conjunto caótico considerou o *template* de Lorenz engordado  $L$ . Logo a vizinhança  $L$  foi unida à 3-bola  $A$  ao longo do fecho do conjunto de saída de  $L$ . Isto dá um fluxo sobre uma nova variedade (3-bola) apontando para o interior ao longo de toda sua fronteira.

Como o complemento em  $S^3$  de  $L \cup A$  também é uma 3-bola então unimos  $\partial R$  à fronteira de  $L \cup A$  assim que a união  $A \cup L \cup R$  é  $S^3$ . Os detalhes da construção como a suavidade, encontra-se em [29].

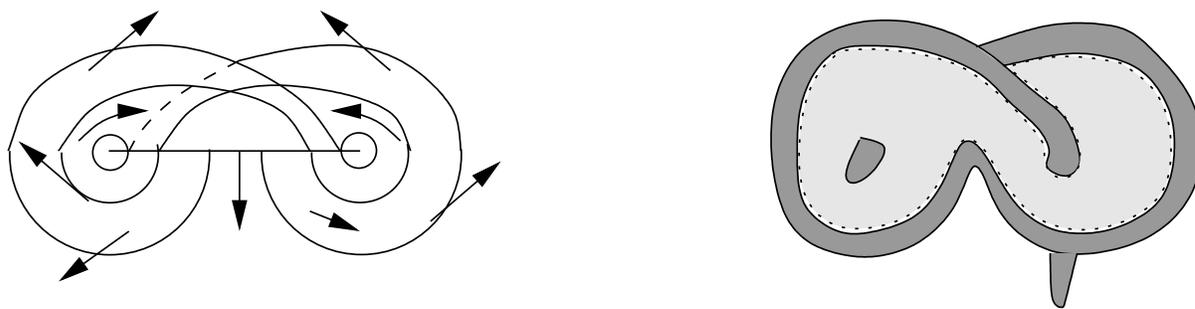


Figura 6.7: Template Lorenz engordado unido a uma bola.

Sullivan também estuda o caso onde a órbita repulsora e atratora não são singularidades. Neste caso ele classifica todos os possíveis fluxos Smale-Lorenz, isto é, classifica todos os possíveis tipos de mergulhos do template Lorenz.

**TEOREMA 6.4** *Para um fluxo de Smale-Lorenz em  $S^3$  apenas as seguintes configurações são realizáveis. O link  $a \cup r$  é um link de Hopf ou um trefoil e um meridiano. No último caso o conjunto caótico é modelado por um template de Lorenz mergulhado de forma standard. No caso anterior existem 3 possibilidades:*

1. *O conjunto caótico é mergulhado de forma standard.*
2. *Uma faixa tem  $n$ -torções, para qualquer  $n$ , mas permanece livre de nós e links da outra faixa, que também é livre de nós e torções.*
3. *Uma faixa é um  $(p, q)$  nó toroidal, para qualquer par de inteiros co-primos, com  $p + q - 1$  torções. A outra faixa é livre de nós, torções e links do primeiro nó.*

Observamos que Sullivan deu o mergulho do template de Lorenz num sentido trivial com respeito ao bloco isolante já que o template de Lorenz carrega a dinâmica da matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , cujo bloco isolante não tem nenhuma alça.

Desta forma o caso considerado por Sullivan, em termos dos blocos isolantes é um problema trivial, mas em termos da topologia das órbitas é um problema complexo.

## PROBLEMAS .

1. Um caso interessante seria considerar um template com matriz  $A$  tal que

$$k = \dim \text{Ker}(I - \bar{A}) > 0$$

*pois o bloco isolante terá pelo menos uma alça redonda. Neste caso podem existir muitas maneiras de mergulhar essa dinâmica nos blocos. Desta forma o problema de mergulho do template no bloco isolante torna-se um problema de escolha do bloco isolante para um template.*

2. *Estudar a construção de blocos isolantes para atratores em geral. Por exemplo os atratores construídos em “Anomalous Anosov flows” [16] e que os introduzimos no final do capítulo 3.*
3. *Cálculo do índice de Conley a partir dos blocos isolantes para os atratores não-triviais.*
4. *Caracterização dos grafos de Lyapunov para estes fluxos que admitem atratores não-triviais.*

# Referências Bibliográficas

---

- [1] BIRMAN, Joan S. e WILLIAMS, Robert F. *Knotted periodic orbits in dynamical systems I: Lorenz's equations*. *Topology*, 22(1). 1983. 47-82.
- [2] ———. *Knotted periodic orbits in dynamical system. II. Knot holders for fibered knots*. *Contemp. Math.*, 20. 1983. 1-60.
- [3] BOLLOBAS, Bela. *Modern Graph Theory*. Springer-Verlag, New-york, Berlin, Heidelberg. 1998.
- [4] BOWEN, Rufus. *On Axiom A diffeomorphisms*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 35. American Mathematical Society: Providence, R.I., 1978.
- [5] ———. *One-dimensional hyperbolic sets for flows*. *J. Differential Equations*, 12. 1972. 173-179.
- [6] BOWEN, Rufus e FRANKS, John M. *Homology for zero-dimensional nonwandering sets*. *Ann. Math. (2)* 106. 1977. no. 1, 73-92.
- [7] CONLEY, Charles C. *Isolated invariant sets and the Morse index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 38. American Mathematical Society: Providence, R.I., 1978.
- [8] DE REZENDE, Ketty A. *Gradient-like flows on 3-manifolds*. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 13. 1993. no. 3, 557-580.
- [9] DE REZENDE, Ketty A. *Smale flows on the three-sphere*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 303. 1987. 283-310.
- [10] EDGAR, Gerald A. *Measure, topology, and fractal Geometry*. Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg. 1990.

- [11] FRANK, George. *Templates and train tracks*. Trans. Amer. Math. Soc. 308. (1988). no. 2, 765-784.
- [12] FRANKE, John E. e SELGRADE, James F. *Hyperbolicity and chain recurrence*. J. Differential Equations, 26. 1977. no. 1, 27-36.
- [13] FRANKS, John M. *Homology and Dynamical Systems*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 49. A.M.S. Providence, Rhode Island. 1982.
- [14] FRANKS, John M. *Flow equivalence of subshifts of finite type*. Ergodic Theory Dynam. Systems, 4. 1984. no. 1, 53-66.
- [15] FRANKS, John M. *Nonsingular Smale flows on  $S^3$* . Topology, 24. 1985. no. 3, 265-282.
- [16] FRANKS, John M. e WILLIAMS, Robert F. *Anomalous Anosov flows*. Global theory of dynamical systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1979), pp. 158-174, Lecture Notes in Math., 819, Springer, Berlin, 1980.
- [17] GHRIST, Robert W. *Branched two-manifolds supporting all links*. Topology 36. 1997. no. 2, 423-448.
- [18] GHRIST, Robert W., HOLMES, Philip J. e SULLIVAN, Michael C. *Knots and links in three-dimensional flows*. Lecture Notes in Mathematics vol. 1654: Springer-Verlag, Berlin. 1997.
- [19] HAYASHI, Shuhei. *Connecting invariant manifolds and the solution of the  $C^1$  stability and  $\Omega$ -stability conjectures for flows*. Ann. of Math., (2) 145. 1997. no. 1, 81-137.
- [20] HOLMES, Philip J. e WILLIAMS, Robert F. *Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: torus knots and bifurcation sequences*. Arch. Rational Mech. Anal. 90. 1985. no. 2, 115-194.
- [21] HUREWICZ, Witold e WALLMAN, Henry. *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.
- [22] LIMA, Elon L. *A característica de Euler-Poincaré*. Matemática Universitária. 1985. no. 1, 47-62.

- [23] MAÑÉ, Ricardo. *A proof of the  $C^1$  stability conjecture*. Publ. Math. IHÉS no. 66. 1988. 161-210.
- [24] MILNOR, John W. *Morse theory*. Princeton University Press: Princeton, N.J. 1973.
- [25] PALIS, Jacob, Jr. *On the  $C^1$   $\Omega$ -stability conjecture*. Publ. Math. IHÉS no. 66. 1988. 211-215.
- [26] PARRY, Bill e SULLIVAN, Dennis. *A topological invariant of flows on 1-dimensional spaces*. Topology, 14. 1975. no. 4, 297–299.
- [27] PUGH, Charles C. e SHUB, Michael. *Suspending subshifts*. Contributions to analysis and geometry (Baltimore, Md., 1980), 265-275. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md., 1981.
- [28] SMALE, Stephen. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc., 73. 1967. 747-817.
- [29] SULLIVAN, Michael C. *Visually building Smale flows in  $S^3$* . Topology Appl., 106. 2000. no. 1, 1-19.
- [30] WADA, M. *Closed orbits of nonsingular Morse-Smale flows on  $S^3$* . J. Math. Soc. Japan, 41. 1989. no. 3, 405-413.
- [31] WILLIAMS, Robert F. *Classification of sub-shifts of finite type*. Ann. of Math., 68. 1973. 120-153. (Errata: 99[1974]. 380-381).
- [32] ———. *Expanding attractors*. Publ. Math. IHÉS no. 43. 1974. 169-203.
- [33] ———. *The structure of Lorenz attractors*. Publ. Math. IHÉS no. 50. 1979. 73-99.
- [34] WILSON, W. *Smoothing derivatives of functions and applications*. Trans. Amer. Math. Soc., 139. 1969. 413-428.