

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Caos homoclínico no sistema buraco negro +
halo em Relatividade Geral

Autor: RAFAEL RIBEIRO DIAS VILELA DE OLIVEIRA

Orientador: PROF. DR. PATRICIO ANÍBAL LETELIER SOTOMAYOR

i

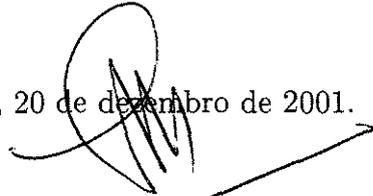
UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**Título: Caos homoclínico no sistema buraco negro +
halo em Relatividade Geral.**

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de dezembro de 2001.



Prof. Dr. Patricio Aníbal Letelier Sotomayor
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Patricio Aníbal Letelier Sotomayor (orientador) - IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa - IMECC/UNICAMP

Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez de Aguiar - IFGW/UNICAMP

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

2002/175998

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Oliveira, Rafael Ribeiro Dias Vilela de

OL4c Caos homoclínico no sistema buraco negro + halo em Relatividade Geral /
Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientador : Patricio Anibal Letelier Sotomayor

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Caos determinístico. 2. Buracos negros (Astronomia) – Modelos
matemáticos. 3. Relatividade geral (Física). 4. Gravitação. 5. Teoria dos sistemas
dinâmicos. I. Sotomayor, Patricio Anibal Letelier. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 20 de dezembro de 2001 e aprovada pela
Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). PATRÍCIO ANÍBAL LETELIER SOTOMAYOR



Prof (a). Dr (a). ALBERTO VAZQUEZ SAA



Prof (a). Dr (a). MARCUS ALOIZIO MARTINEZ DE AGUIAR

Dedico esta dissertação à minha família e à Andréia.

Agradecimentos

A Deus.

À minha família, à Andréia e a meus amigos.

Ao Prof. Dr. Patricio A. Letelier pela confiança e orientação e aos professores Werner Vieira, Filipe Bonjour e André Ribeiro pelas discussões elucidativas.

Aos colegas de sala, Max e Akiles e, de modo especial, ao Adílson e ao Eduardo, pelas diversas contribuições.

Aos funcionários do Imecc, especialmente à Fátima.

Finalmente, agradeço à FAPESP o imprescindível apoio financeiro.

Sumário

Resumo	3
Abstract	4
1 Introdução	5
2 Sistemas dinâmicos e caos homoclínico	8
2.1 O Mapa da Ferradura de Smale	8
2.2 Estabilidade linear de pontos fixos	13
2.3 Variedades estável e instável e o teorema de Smale-Birkhoff	15
2.4 Mapas de Poincaré	19
2.5 Sistemas Hamiltonianos de $1\frac{1}{2}$ grau de liberdade	21
2.6 O Método de Melnikov	24
2.7 Redução Hamiltoniana	27
2.8 Versão alternativa do Método de Melnikov	28
3 Relatividade Geral	30
3.1 Métricas de Weyl	30
3.2 Multipólos em Relatividade Geral	34

4	Caos em Relatividade Geral	37
4.1	A órbita homoclínica	38
4.2	A dinâmica perturbada	43
4.3	Resultados	48
4.4	Discussão	54
5	Conclusões	56

Resumo

Estudamos a ocorrência de caos homoclínico nas órbitas (geodésicas) de partículas-teste sujeitas à ação gravitacional de um buraco-negro central e de uma casca (halo) exterior de matéria. Para isso, supomos que a casca externa tem simetria axial, de maneira que a métrica resultante é uma métrica de Weyl. Tratamos os efeitos gravitacionais dessa casca como perturbação multipolar da métrica de Schwarzschild e utilizamos o Método de Melnikov para detectar a presença do emaranhado homoclínico no espaço de fase, estrutura que implica dinâmica caótica do tipo *Ferradura de Smale*. Concluimos que caos homoclínico é geral nessa situação e discutimos algumas possíveis consequências físicas.

Abstract

We study the occurrence of homoclinic chaos in the orbits (geodesics) of test-particles under the gravitational action of a central black-hole and an exterior shell of matter. To this purpose we assume that the shell is axially symmetric, so that the corresponding metric is a Weyl one. We treat the gravitational effects of the shell as a multipolar perturbation of the Schwarzschild metric and use the Melnikov Method to show the existence of the homoclinic tangle in phase space, which implies that the dynamics is chaotic in the sense of the *Smale horseshoe*. We conclude that homoclinic chaos is general in this situation and discuss some physical consequences.

Introdução

O estudo de caos em sistemas dinâmicos teve suas origens em fins do século XIX com o matemático francês Henri Poincaré [1]. O seu interesse principal era o problema de três corpos em mecânica celeste. Ao mudar o enfoque de órbitas individuais para o comportamento de órbitas evoluindo a partir de conjuntos de pontos iniciais, Poincaré mostrou a possibilidade de comportamentos bastante complicados, que hoje conhecemos por caóticos. Seguiram-se a Poincaré vários trabalhos importantes, entre os quais se destacam os de G. Birkhoff na década de 20, de M. L. Cartwright e J. E. Littlewood nos anos 40, S. Smale nos anos 60 e também os da grande escola russa, notavelmente através de A. N. Kolmogorov e V. I. Arnold.

Contudo, foi somente com o advento dos computadores na década de 70 que essa área multidisciplinar da ciência realmente se impôs como um campo de intensa atividade. Atualmente, estudiosos de áreas tão diversas quanto o mercado financeiro e a cosmologia se ocupam de problemas de caos.

Caos homoclínico em Relatividade Geral tem sido estudado ao longo da última década. Bombelli e Calzetta [2] analisaram partículas-teste orbitando um buraco negro sob ação de ondas gravitacionais no limite de altas frequências. Letelier e Vieira [3] estudaram perturbações menos gerais, mas não se restringiram àquele limite. Moeckel [4] tratou o caso de perturbações

externas devidas a uma massa distante. Caos homoclínico também foi estudado em cosmologia [5].

Nesta dissertação, concentramo-nos num problema de caos determinístico em Relatividade Geral. Mais precisamente, tratamos o problema da dinâmica de partículas-teste movendo-se sob ação gravitacional de um buraco negro central e uma casca (halo) exterior axialmente simétrica. Esse seria um primeiro paradigma da dinâmica de estrelas próximas do núcleo galáctico. E, embora um tanto simplificado, ele nos permite vislumbrar o que pode ocorrer numa situação física real.

Dividimos nossa apresentação em cinco capítulos, o primeiro sendo esta introdução. No segundo, apresentamos os conceitos de sistemas dinâmicos envolvidos no problema estudado. Apresentamos o mapa da *Ferradura de Smale*. Introduzimos o conceito de conjugação topológica e mostramos como esse mapa é topologicamente conjugado ao “deslocamento em dois símbolos”. Apresentamos as principais propriedades da dinâmica associada. A seguir, voltamos nossa atenção à questão da estabilidade linear de pontos fixos de mapas. Definimos os conceitos de pontos fixos elíptico e hiperbólico e de variedades estável e instável. Mostramos como a estrutura conhecida como emaranhado homoclínico pode surgir no espaço de fase e como a sua presença implica a ocorrência de dinâmica de *Ferradura*. Apresentamos a situação física em que estamos interessados e estabelecemos sua conexão com o material precedente, i.e., mostramos como pode surgir uma dinâmica de *Ferradura* na situação física real, através do teorema de Smale-Birkhoff. Finalmente, apresentamos o *Método de Melnikov*, que nos possibilita inferir se de fato tal dinâmica ocorre num subconjunto invariante do espaço de fase. Deduzimos a sua versão padrão e apresentamos uma versão alternativa que se mostra mais apropriada para o nosso sistema, já que, como veremos, ele admite uma “redução hamiltoniana”.

No capítulo 3, apresentamos a parte de Relatividade Geral fundamental para a compreensão do sistema estudado. Primeiramente, apresentamos o formalismo geral das métricas com simetria axial (métricas de Weyl). Em seguida, apresentamos as métricas de Weyl com contribuições multipolares (multipólos externos) para o problema das geodésicas em um espaço-tempo com

um buraco negro central e com uma casca exterior de matéria, tal como em [6].

O capítulo 4 contém nossos resultados originais. Mostramos, via *Método de Melnikov*, que caos homoclínico é genérico para as órbitas das partículas-teste sujeitas à interação gravitacional com um buraco negro central e uma casca externa. Discutimos as consequências desse tipo de dinâmica em termos de escape e captura pelo buraco negro. As conclusões são apresentadas no capítulo 5.

Sistemas dinâmicos e caos homoclínico

Um sistema dinâmico pode ser encarado como uma “receita” matemática para evoluirmos temporalmente um certo estado. Essa evolução pode ocorrer de maneira discreta, como na situação em que ela é prescrita por um mapa, ou contínua, por exemplo no caso de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Um sistema de evolução contínua sempre pode ser transformado num sistema de evolução discreta, bastando, por exemplo, definir o mapa M_T que leva o sistema num instante t_0 em seu estado no instante $t_0 + T$. Muitas vezes é conveniente fazermos tal mudança de enfoque, o que pode nos trazer uma série de informações importantes sobre a dinâmica. O problema tratado nessa dissertação constitui um exemplo desse fato.

2.1 O Mapa da Ferradura de Smale

Nesta seção, apresentamos o mapa da *Ferradura de Smale* [7], M_h . Estabelecemos a sua conjugação topológica ao mapa do deslocamento em dois símbolos. A partir dessa conjugação, mostramos como ocorre a sensibilidade às condições iniciais e apresentamos as suas principais propriedades.

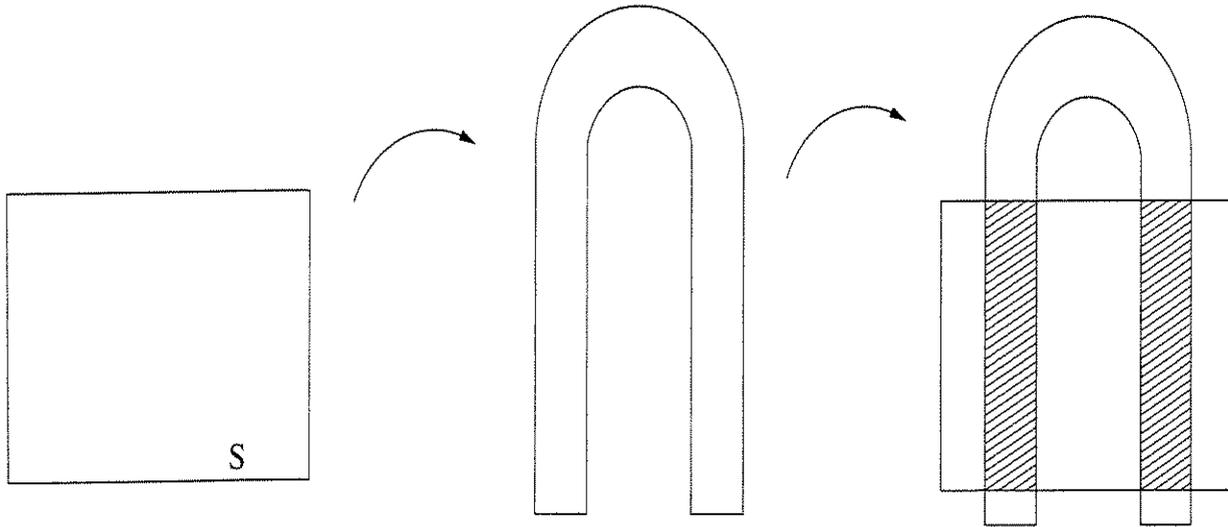


Figura 2.1: O Mapa da *Ferradura de Smale*

Parte considerável dos sistemas dinâmicos apresenta comportamentos típicos do mapa da *Ferradura de Smale*. Apresentamos esse mapa geometricamente na figura 2.1. Ele toma um quadrado S , estica-o verticalmente de um fator maior que 2, comprime-o horizontalmente de um fator menor que $\frac{1}{2}$ e o dobra em forma de ferradura, superpondo essa nova configuração ao quadrado inicial. Considera-se a imagem de S segundo o mapa como sendo a interseção da ferradura com o quadrado original.

Como em cada iteração do mapa uma certa área do quadrado é levada fora do mesmo, após infinitas iterações o conjunto que permanece tem medida de Lebesgue nula.

Buscaremos agora caracterizar a ação do mapa no conjunto invariante sob sua ação, que denotaremos por Λ . Primeiramente, é claro, devemos caracterizar o próprio conjunto invariante. Por definição, se um ponto pertence a Λ então após um número arbitrário de iterações ele deverá estar em Λ . Analisando a figura 2.2, vemos que o mapa leva o quadrado em faixas verticais cada vez mais estreitas e cujo número dobra a cada iteração. No limite de infinitas iterações, temos um conjunto de Cantor de linhas verticais. Por outro lado, analisando a figura 2.3, vemos que as pré-imagens das faixas verticais são faixas horizontais. E, novamente pela definição do

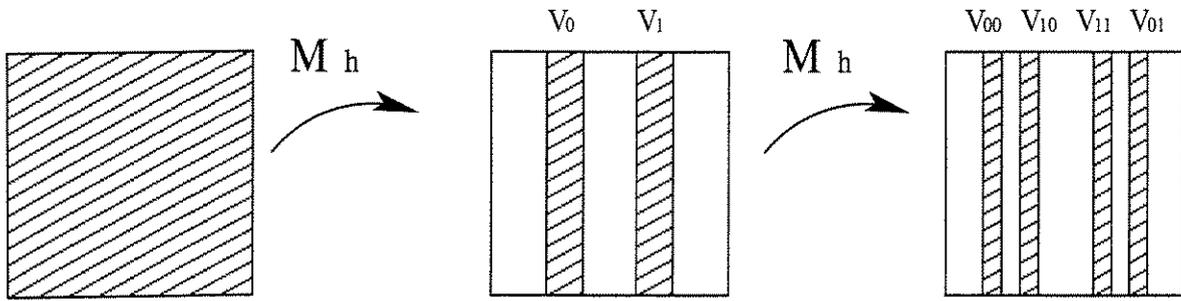


Figura 2.2: Iterações futuras do Mapa M_h

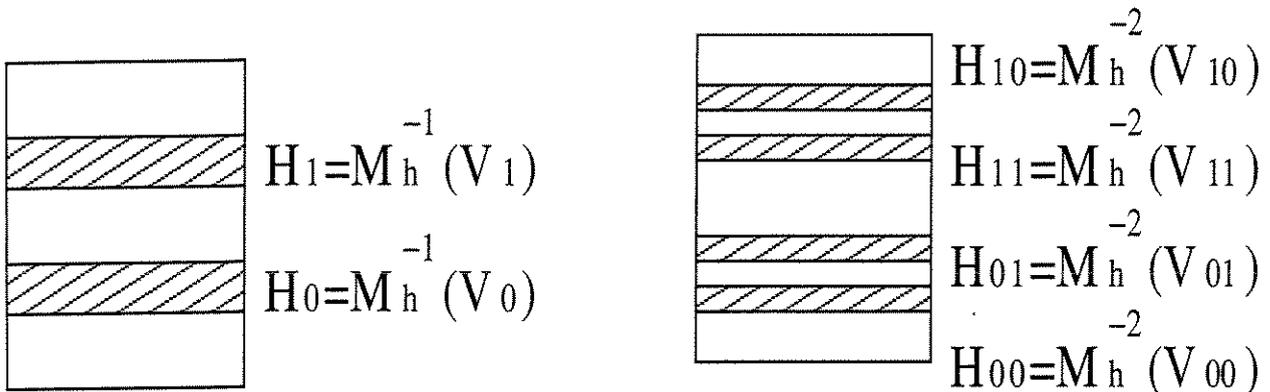


Figura 2.3: Iterações passadas do Mapa M_h

conjunto invariante, um ponto pertence a ele somente se está em todas as pré-imagens das faixas verticais. De modo análogo, no limite do processo temos um conjunto de Cantor de linhas horizontais. O conjunto invariante Λ é, então, a interseção desses dois conjuntos de Cantor.

Uma vez conhecido o conjunto invariante, vamos agora estabelecer um homeomorfismo entre Λ e o conjunto das sequências bi-infinitas de dois símbolos, Σ . Um elemento \mathbf{a} pertence a Σ se \mathbf{a} pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{a} = \dots a_{-3} a_{-2} a_{-1} \cdot a_0 a_1 a_2 a_3 \dots, \tag{2.1}$$

onde os a_i s pertencem a um conjunto de dois símbolos (aqui convencionados 0 ou 1). O próprio processo de construção de Λ nos sugere o homeomorfismo, dado por:

$$\mathbf{a} = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Lambda, \quad (2.2)$$

com

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{se } M_h^i(\mathbf{x}) \in H_0 \\ 1, & \text{se } M_h^i(\mathbf{x}) \in H_1 \end{cases},$$

e onde H_0 e H_1 estão mostrados na figura 2.3. A prova de que ϕ e ϕ^{-1} são de fato contínuas pode ser encontrada em [8], onde se define a seguinte métrica em Σ :

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|a_j - b_j|}{2^{|j|}}. \quad (2.3)$$

Vemos que dois pontos estão próximos em Σ quando eles coincidem em sua parte central, i.e., aquela em torno do ponto decimal.

Agora, vamos introduzir o mapa do deslocamento em dois símbolos, $M_d : \Sigma \rightarrow \Sigma$. Ele se define por:

$$M_d : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}', \quad (2.4)$$

sendo $\mathbf{a}' = \dots a'_{-3} a'_{-2} a'_{-1} \cdot a'_0 a'_1 a'_2 \dots$, onde $a'_i = a_{i+1}$.

Assim, vemos que:

$$a'_i = \begin{cases} 0, & \text{se } M_h^{i+1}(\mathbf{x}) \in H_0 \\ 1, & \text{se } M_h^{i+1}(\mathbf{x}) \in H_1 \end{cases}, \quad (2.5)$$

de modo que a ação do mapa da *Ferradura* em um ponto $\mathbf{x} \in \Lambda$ equivale à aplicação do mapa do deslocamento no ponto $\mathbf{a} \in \Sigma$ associado a \mathbf{x} pelo homeomorfismo ϕ . Isso está representado esquematicamente na figura 2.4. Dizemos que M_h e M_d são topologicamente conjugados, o que significa que $\phi(M_h) = M_d(\phi)$.

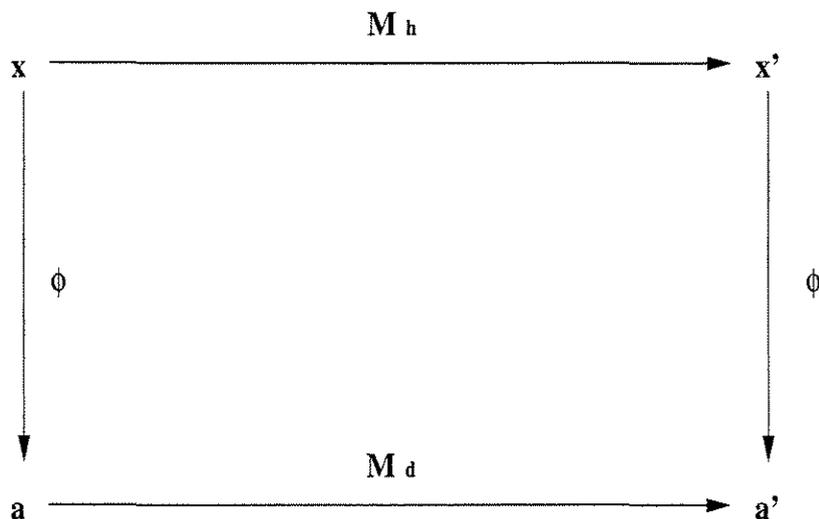


Figura 2.4: Conjugação topológica de M_h e M_d

A partir dessa relação estabelecida entre M_h e M_d , a ação do mapa da *Ferradura* torna-se bem mais clara. Com isso, inferimos pelo menos três propriedades muito importantes da dinâmica da *Ferradura*, a saber:

- 1a) Há um conjunto infinito enumerável de órbitas periódicas;
- 1b) O conjunto de pontos em órbitas periódicas é denso no conjunto invariante Λ ;
- 2) Existe um conjunto não enumerável de órbitas não periódicas em Λ ;
- 3) Há órbitas densas em Λ (transitividade).

A propriedade (1a) decorre do fato de que, para cada inteiro positivo k , existe um número finito de órbitas de período k . Como a reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, a conclusão é automática.

Um argumento bem simples prova (1b). Dado um ponto qualquer \mathbf{a} de Σ , podemos encontrar um ponto \mathbf{b} arbitrariamente próximo de \mathbf{a} , bastando que eles coincidam em sua parte central, i.e., $a_i = b_i$ para $i \in -n \leq i \leq n$. Se \mathbf{b} for definido como sendo o ponto resultante da repetição periódica desse bloco central, então \mathbf{b} obviamente está em uma órbita periódica.

Para provarmos a propriedade (2), associamos a cada sequência bi-infinita de 0's e 1's uma sequência infinita da seguinte maneira:

$$\dots s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 \dots s_n \dots \mapsto s_0 s_1 s_2 \dots$$

Como os números irracionais em $[0, 1]$ (que são não enumeráveis) podem ser representados em base binária como sequências não periódicas de 0's e 1's, inferimos a existência de um conjunto não enumerável de órbitas não periódicas.

A propriedade (3) é demonstrada com a construção de uma tal órbita, o que se dá pela justaposição de todas as possíveis sequências finitas de 0's e 1's (vide [8] para os detalhes).

Neste ponto, torna-se claro o porquê de o mapa da *Ferradura* ser caótico. Suponhamos que se conheça uma condição inicial $\mathbf{a} \in \Sigma$ a menos de um pequeno erro, o que é inerente a qualquer situação física. Isso é traduzido topologicamente da seguinte maneira: estamos tomando um ponto em uma vizinhança do ponto \mathbf{a} , i.e., $b_i = a_i$ para $|i| < N$, com N suficientemente grande. Ora, independentemente de quão pequena seja essa vizinhança, podemos nela encontrar um ponto \mathbf{b} tal que $b_{N+1} \neq a_{N+1}$. Isso nos diz que os pontos $M_h^{N+1}(\phi^{-1}(\mathbf{a}))$ e $M_h^{N+1}(\phi^{-1}(\mathbf{b}))$ em Λ estão em faixas diferentes H_0 e H_1 (vide a figura 2.3). Ou seja, esse sistema dinâmico apresenta *dependência sensível a condições iniciais*. Sistemas que exibem *dependência sensível a condições iniciais* em conjuntos invariantes fechados são frequentemente caracterizados como caóticos [8].

Como salientado por Holmes em seu artigo de revisão [9], é de extrema importância o fato de o mapa da *Ferradura* ser estruturalmente estável, i.e., pequenas perturbações de M_h possuem um conjunto invariante onde são topologicamente conjugados ao mapa do deslocamento em dois símbolos.

2.2 Estabilidade linear de pontos fixos

Nesta seção, estudamos o problema da estabilidade em primeira ordem de pontos fixos de mapas. Apresentamos os conceitos de subespaços estável, instável e central, relacionando-os

aos módulos dos autovalores da matriz de linearização. Definimos também pontos fixos elípticos e hiperbólicos.

Seja $\mathbf{M} : \mathbf{x}_n \mapsto \mathbf{x}_{n+1}$ um mapa com um ponto fixo \mathbf{x}_* . Estaremos aqui interessados no comportamento de pontos próximos de \mathbf{x}_* . Escrevendo $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_* + \eta_n$, obtemos a seguinte linearização:

$$\eta_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{x}_*) \cdot \eta_n.$$

Supondo soluções da forma $\eta_n = \lambda^n \mathbf{e}$, obtemos a equação de autovalores

$$\mathbf{DM}(\mathbf{x}_*) \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e},$$

cujas soluções não triviais λ_j são encontradas com o procedimento usual, i.e., impondo que:

$$\det[\mathbf{DM}(\mathbf{x}_*) - \lambda \mathbf{I}] = 0.$$

Os respectivos autovetores \mathbf{e}_j determinam direções no espaço de fases. Condições iniciais nessas direções aproximam-se assintoticamente de \mathbf{x}_* pela ação do mapa \mathbf{M} se $|\lambda_j| < 1$ e pela ação de \mathbf{M}^{-1} se $|\lambda_j| > 1$. Isso nos motiva a definir os subespaços estável, E^s , instável, E^u , e central, E^c , respectivamente, como sendo os subespaços gerados pelos autovetores correspondentes a autovalores de módulo menor, maior e igual a 1. A figura 2.5 ilustra um caso bidimensional e um tridimensional.

Para finalizar esta seção, apresentamos duas definições relacionadas à estabilidade linear. Dizemos que um ponto fixo de um mapa \mathbf{M} é elíptico quando a sua matriz de linearização possui autovalores de módulo igual a 1. Caso contrário, ele é denominado hiperbólico. Pontos fixos hiperbólicos em sistemas Hamiltonianos têm papel extremamente importante para a dinâmica, como ficará claro nas próximas seções.

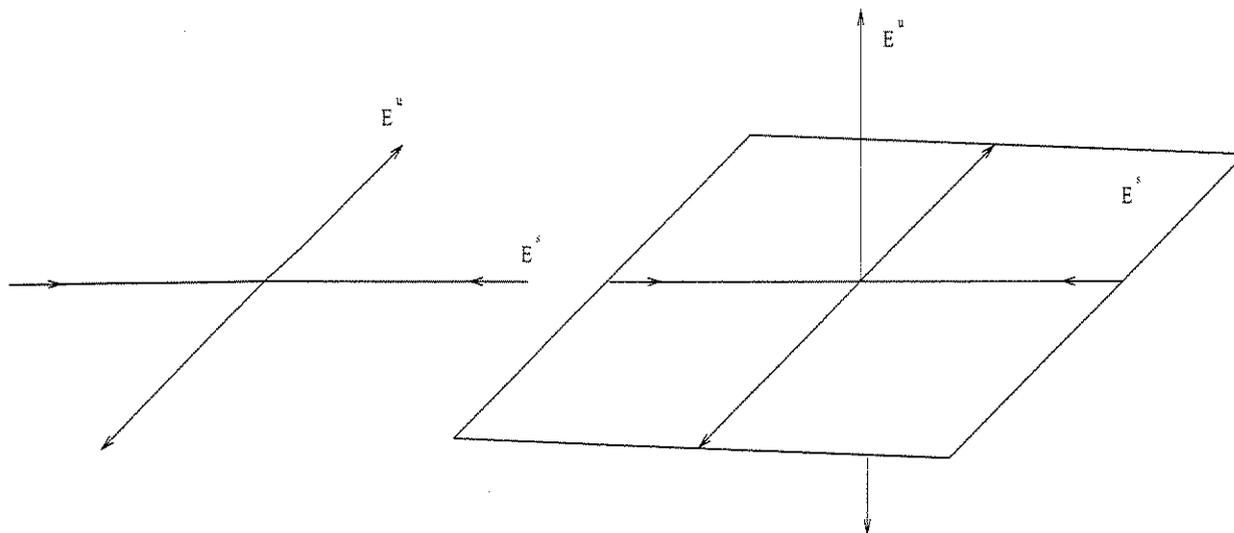


Figura 2.5: Subespaços estável e instável

2.3 Variedades estável e instável e o teorema de Smale-Birkhoff

Nesta seção, definimos variedades estável e instável de pontos fixos e mapas e apresentamos as suas possíveis configurações no espaço de fase. Definimos pontos homoclínicos e heteroclínicos. Mostramos como pode surgir o emaranhado homoclínico no espaço de fase e de que maneira a sua presença implica a ocorrência de dinâmica da *Ferradura*, o que é estabelecido pelo teorema de Smale-Birkhoff.

Na seção precedente, enfocamos o comportamento das linearizações de mapas em torno de pontos fixos. A motivação para fazê-lo foi que esperamos que, localmente, o comportamento do mapa não-linear seja qualitativamente semelhante. De fato, isso ocorre, o que nos leva às seguintes definições. A variedade estável local W_ϵ^s de um ponto fixo \mathbf{x}_* de um mapa M é o conjunto dos pontos em uma certa vizinhança U (de diâmetro ϵ) de \mathbf{x}_* que são levados assintoticamente por M em \mathbf{x}_* . E, analogamente, a variedade instável local W_ϵ^u de um ponto fixo \mathbf{x}_* de um mapa M é o conjunto dos pontos em uma certa vizinhança U de \mathbf{x}_* que são

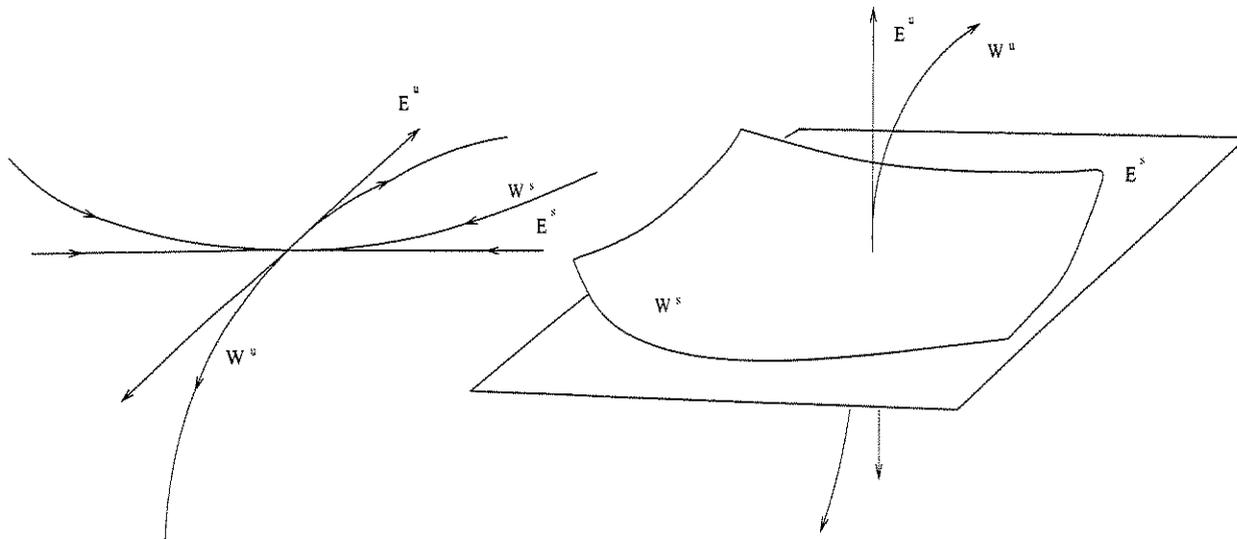


Figura 2.6: Variedades estável e instável

levados assintoticamente por M^{-1} em \mathbf{x}_* (estamos assumindo que M seja inversível). Os espaços tangentes a W_ϵ^s e W_ϵ^u em \mathbf{x}_* são os subespaços estável e instável, respectivamente. A partir desses conceitos locais, definimos as variedades estável (W^s) e instável (W^u) (globais) como sendo, respectivamente, os conjuntos formados pela união das sucessivas iterações de M^{-1} e M sobre W_ϵ^s e W_ϵ^u . A figura 2.6 ilustra uma situação bidimensional com $\dim(W^s) = 1$ e $\dim(W^u) = 1$ e uma tridimensional em que $\dim(W^s) = 2$ e $\dim(W^u) = 1$, mostrando também os subespaços estável E^s e instável E^u .

Um fato importante que concerne a essas variedades é que elas não podem apresentar auto-intersecções. De fato, para ϵ suficientemente pequenos, W_ϵ^s e W_ϵ^u são muito próximas de E^s e E^u e, portanto, não apresentam auto-intersecções. Como as variedades globais são obtidas das locais a partir de iterações do mapa, auto-intersecções de W^s e W^u indicariam, respectivamente, que M^{-1} e M não são injetivos, o que contradiz a hipótese feita de que M é inversível.

Nada impede, contudo, que W^s e W^u tenham interseção não vazia. Chamamos tais intersecções de cruzamentos homoclínicos se W^s e W^u são variedades de um mesmo ponto fixo e de cruzamentos heteroclínicos se W^s e W^u são variedades de pontos fixos distintos. A figura 2.7

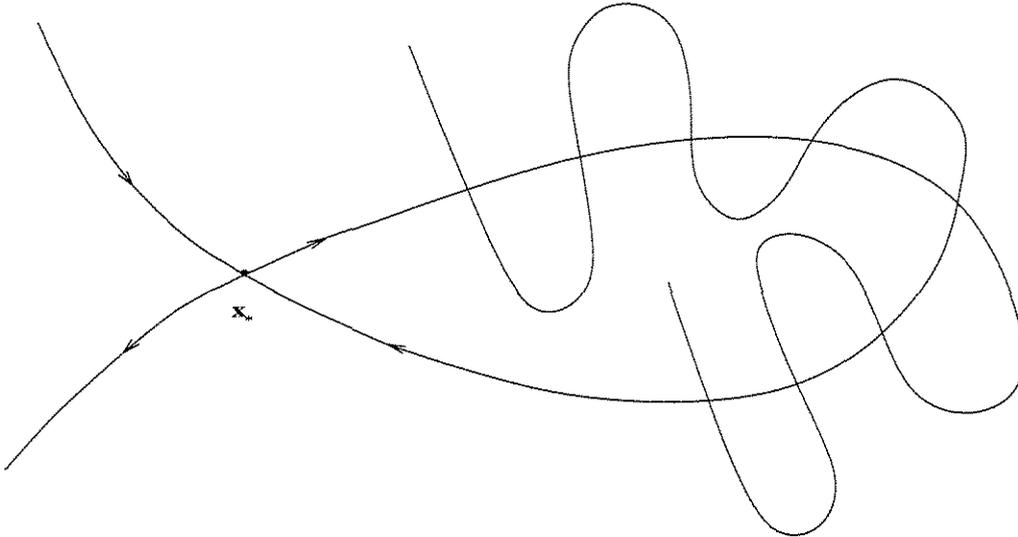


Figura 2.7: Interseções homoclínicas

ilustra a primeira situação e a figura 2.8 ilustra a segunda. Nesta dissertação, concentraremos no caso homoclínico em duas dimensões associado a um ponto fixo hiperbólico de sela, i.e., um ponto fixo hiperbólico com um autovalor de módulo maior que 1 e outro de módulo menor que 1. Ou seja, estamos interessados em sistemas de 2 graus de liberdade em que as variedades estável e instável são unidimensionais.

É crucial para a dinâmica que a existência de um cruzamento homoclínico implica a existência de um número infinito de tais cruzamentos. Isso porque um ponto na interseção de W^s e W^u deve ser mapeado por M e M^{-1} em pontos que também estejam na interseção dessas variedades, já que elas são, por definição, conjuntos invariantes. Com isso, no caso de haver cruzamentos homoclínicos, as variedades se dispõem em uma configuração bastante complexa, formando a estrutura conhecida como emaranhado homoclínico no espaço de fases. É exatamente essa estrutura que vemos na figura 2.7.

A complexidade geométrica do emaranhado reflete-se na complexidade das órbitas da dinâmica resultante. Realmente, a presença de cruzamentos homoclínicos transversos (i.e., não tangentes) implica a ocorrência da dinâmica da *Ferradura* em um subconjunto invariante do

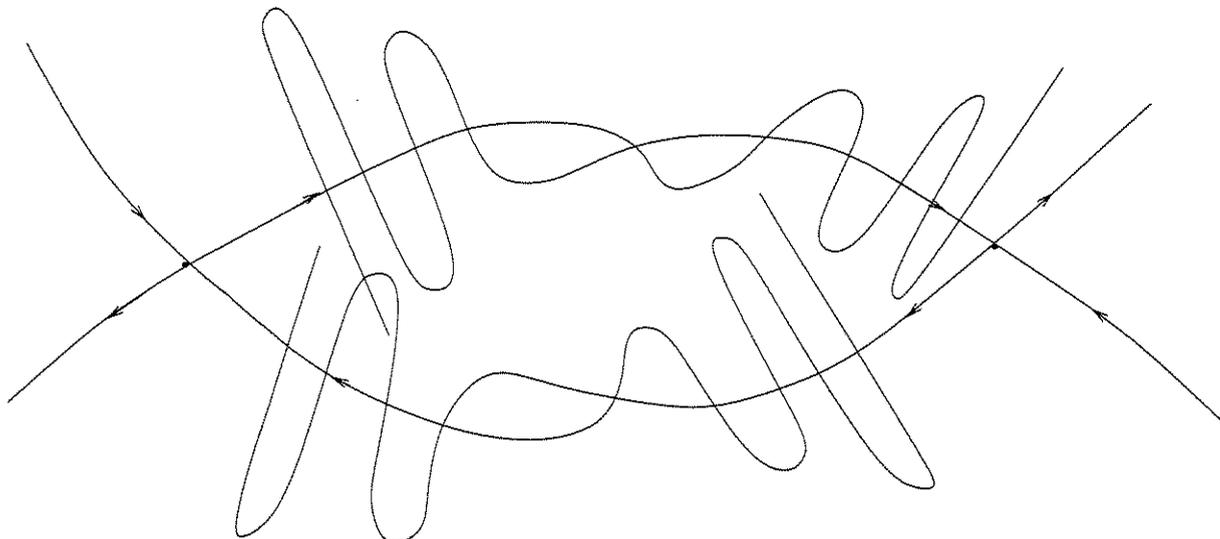


Figura 2.8: Interseções heteroclínicas

espaço de fases. A figura 2.9 ilustra o processo. Tomando um quadrado inicial J em torno do ponto fixo, a aplicação de q_1 iterações do mapa M estica J ao longo de W^u e o contrai ao longo de W^s . E a aplicação de q_2 iterações de M^{-1} estica J ao longo de W^s e o contrai ao longo de W^u . Assim, o mapa $M^{q_1+q_2}$ age como uma *Ferradura* em $M^{-q_2}(J)$. Esse resultado aparentemente um tanto quanto forçado pelo modo como desenhamos as duas variedades na figura é estabelecido rigorosamente pelo teorema de Smale-Birkhoff, que enunciaremos agora.

Teorema de Smale-Birkhoff: Seja $M : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo que possui um ponto fixo hiperbólico de sela x_* e um ponto homoclínico transverso y . Então, para algum k finito, M^k tem um conjunto de Cantor invariante em que é topologicamente conjugado a um deslocamento em dois símbolos.

Na realidade, pode-se mostrar [8] o resultado bem mais geral da conjugação topológica de M^k a um deslocamento em N símbolos, com N inteiro.

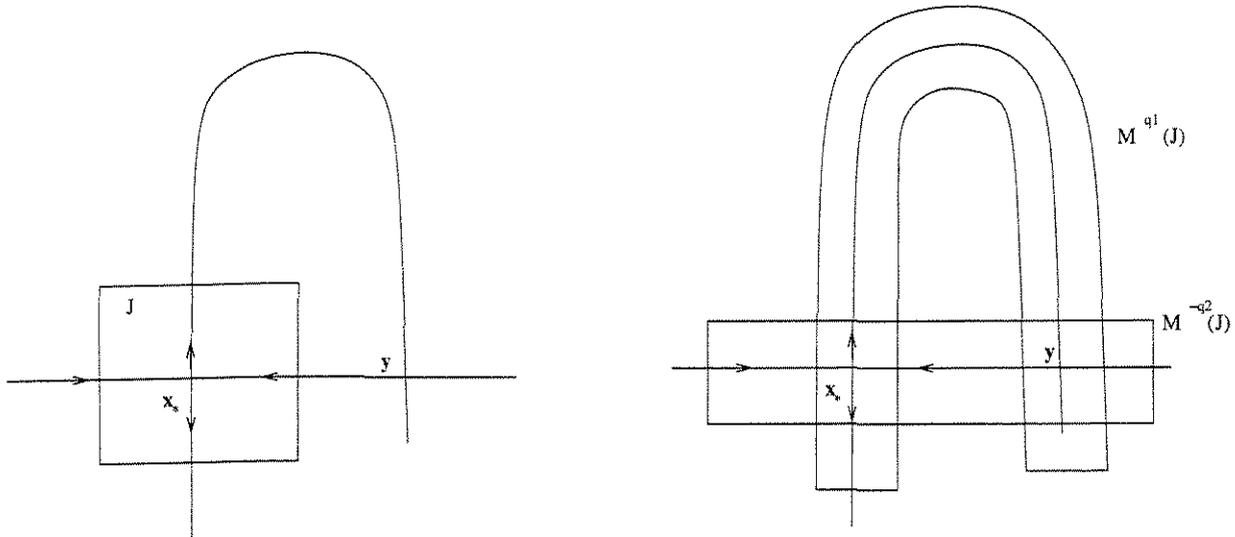


Figura 2.9: A Ferradura no espaço de fases

2.4 Mapas de Poincaré

Nesta seção, mostramos como definir de maneira natural um sistema de evolução discreta a partir de certas classes de sistemas de evolução contínua. Os mapas de Poincaré, como são chamados, trazem grande simplificação para o tratamento de muitos problemas, revelando, ainda assim, suas propriedades qualitativas mais importantes.

Um mapa de Poincaré é qualquer mapa definido a partir de um fluxo. Uma simplificação imediata é ganha pela redução de uma dimensão no problema. Em casos em que a dimensão do fluxo é menor que 4, esse recurso é de grande valor para a maior compreensão geométrica e intuitiva do sistema. Ademais, muitos conceitos de clara definição para mapas são ofuscados pela dinâmica contínua dos fluxos, o que também torna desejável a utilização desse recurso. Por exemplo, uma órbita periódica de um fluxo equivale a um simples ponto fixo de um mapa de Poincaré.

Não há regra sistemática para a construção desses mapas. Ela irá depender fundamentalmente do fluxo estudado e de que aspecto da dinâmica será focado. Contudo, dois tipos de mapas de Poincaré são, em particular, bastante úteis, de maneira que cabe aqui apresentá-los.

Como primeiro caso, consideremos o fluxo gerado pelo campo vetorial \mathbf{f} . Em outras palavras, consideremos o fluxo dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.6)$$

Então, supondo que esse fluxo $\phi(t, \cdot)$ admita uma órbita periódica $\phi(t, \mathbf{x}_0)$, i.e., assumindo que $\phi(t+T, \mathbf{x}_0) = \phi(t, \mathbf{x}_0)$, onde \mathbf{x}_0 é uma condição inicial e onde T é o período, uma maneira natural de se construir o mapa de Poincaré é a seguinte: seja Σ uma superfície $(n-1)$ -dimensional transversa ao campo vetorial em \mathbf{x}_0 , i.e., $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, sendo $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ a normal a Σ em \mathbf{x}_0 . Então o mapa de Poincaré \mathbf{P} é definido como sendo a aplicação que leva pontos de uma certa vizinhança $V \subset \Sigma$ de \mathbf{x}_0 nos seus primeiros pontos de retorno a Σ através do fluxo ϕ . Ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : V &\rightarrow \Sigma \\ \mathbf{x} &\mapsto \phi(\tau(\mathbf{x}), \mathbf{x}), \end{aligned}$$

onde $\tau(\mathbf{x})$ é o tempo que \mathbf{x} leva para voltar a Σ . A figura 2.10 ilustra a situação.

O segundo caso frequente é aquele em que o campo vetorial é periódico no tempo, i.e., quando o fluxo é da forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \text{com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t+T). \quad (2.7)$$

Torna-se conveniente transformar esse sistema não autônomo (i.e, dependente explicitamente do tempo) n -dimensional em um sistema autônomo $(n+1)$ -dimensional, o que fazemos da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta), \quad \dot{\theta} = 1, \quad (2.8)$$

onde $(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1$, de modo que $\theta = (t \bmod 2\pi)$. Definimos agora a seção Σ_{θ_0} como sendo

$$\Sigma_{\theta_0} = \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 / \theta = \theta_0 \in [0, 2\pi)\}.$$

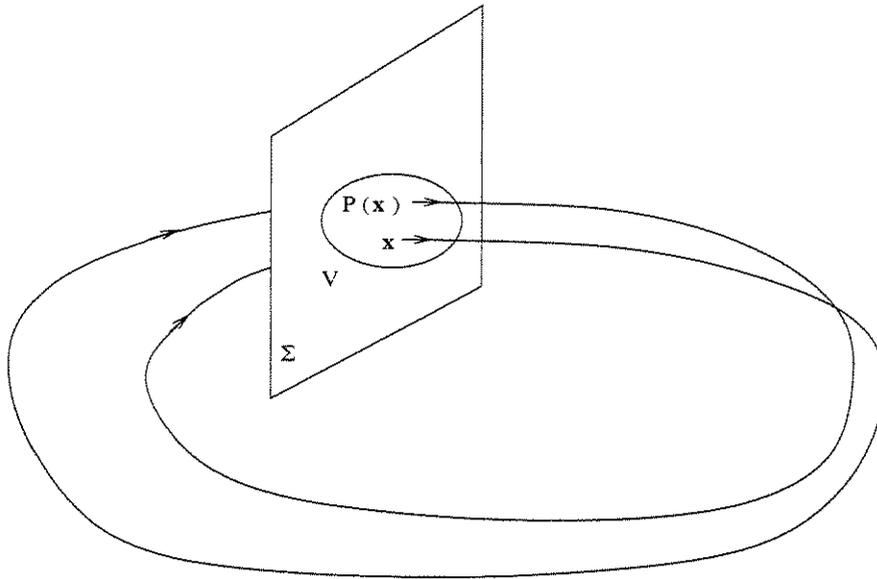


Figura 2.10: Mapa de Poincaré associado a uma órbita periódica

O mapa de Poincaré $M_{P\theta_0}$, então, é definido mais convenientemente como sendo a aplicação

$$M_{P\theta_0} : \Sigma_{\theta_0} \rightarrow \Sigma_{\theta_0} \quad (2.9)$$

$$x(\theta_0) \mapsto x(\theta_0 + 2\pi).$$

Nesta dissertação, será esse tipo de mapa de Poincaré que utilizaremos.

2.5 Sistemas Hamiltonianos de $1\frac{1}{2}$ grau de liberdade

Nesta seção, apresentamos uma situação física que, como mostraremos mais tarde (seção 2.7), é análoga à do problema em que estamos interessados. Trata-se de um fluxo hamiltoniano contínuo constituído por uma parte autônoma integrável e por uma perturbação não autônoma periódica no tempo. Definimos um mapa de Poincaré a partir desse fluxo e mostramos, através do teorema de Smale-Birkhoff, que ocorre dinâmica de *Ferradura* neste mapa (caos homoclínico).

Consideremos o fluxo gerado pelo campo vetorial hamiltoniano f_0 , ou seja, consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

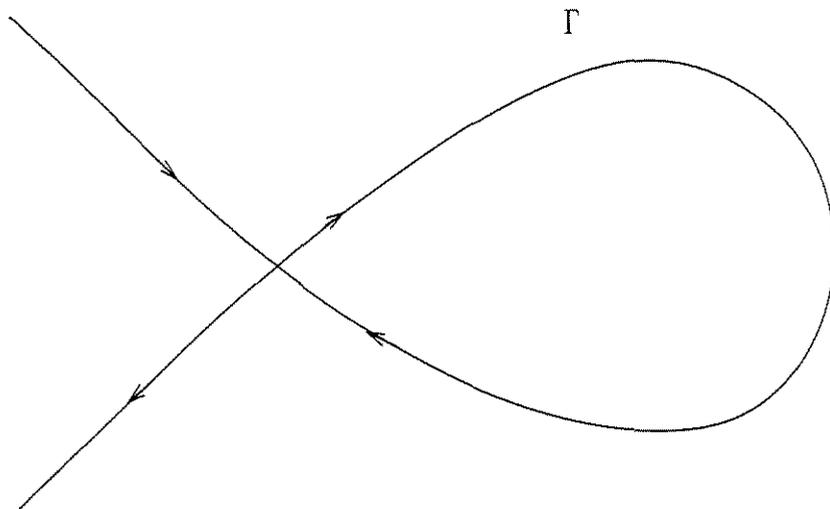


Figura 2.11: O *loop* homoclínico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.10)$$

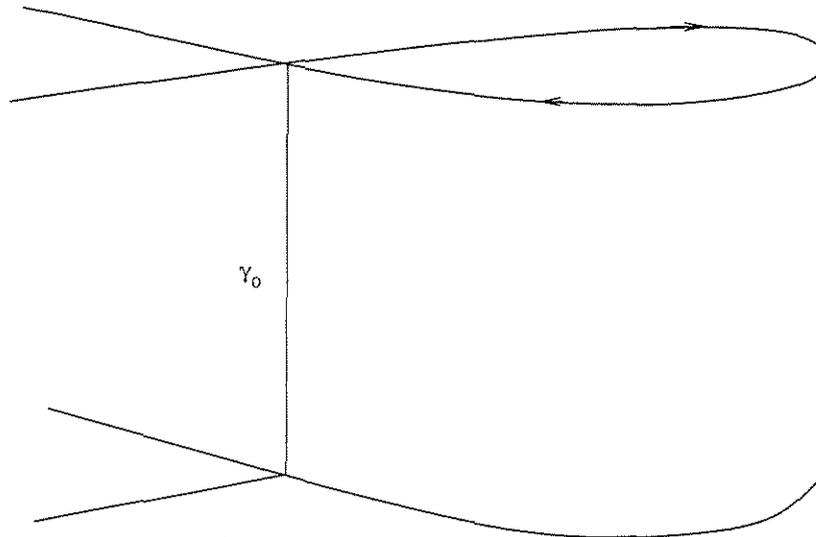
Assumimos que esse sistema tem um ponto hiperbólico de sela na origem (para fins de simplificação) e com as variedades estável e instável coincidindo em um ramo, formando o chamado *loop* homoclínico, que denotamos por Γ . Esse *loop*, que mostramos na figura 2.11, é tão somente uma superfície de energia constante.

Ao fazermos o produto $\mathbb{R}^2 \times S^1$ definido pela equação 2.10 e por $\dot{\theta} = 1$, o ponto de sela hiperbólico acima mencionado torna-se uma órbita periódica γ_0 e a interseção das variedades estável, $W^s(\gamma_0)$, e instável, $W^u(\gamma_0)$, de γ_0 é a superfície cilíndrica mostrada na figura 2.12.

Agora, perturbamos o sistema descrito por 2.10, de modo que vale:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \theta); \quad \dot{\theta} = 1, \quad (2.11)$$

com $\epsilon \in \mathbb{R}^*$ e sendo \mathbf{f}_1 uma função periódica em θ de período igual a 2π . Esse é o chamado “sistema de $1\frac{1}{2}$ grau de liberdade”, o tempo fazendo as vezes de “ $\frac{1}{2}$ grau de liberdade”. Se ϵ

Figura 2.12: $\Gamma \times S^1$

é suficientemente pequeno, pode-se mostrar que a órbita γ_0 dá lugar a uma também periódica órbita γ_ϵ . Entretanto, as variedades estável, $W^s(\gamma_\epsilon)$, e instável, $W^u(\gamma_\epsilon)$, em geral não têm mais como interseção a superfície cilíndrica. Pelos argumentos da seção 2.3, duas situações são possíveis: ou as variedades $W^s(\gamma_\epsilon)$ e $W^u(\gamma_\epsilon)$ não se interseccionam ou o fazem em infinitas “superfícies” 1-dimensionais. A figura 2.13 ilustra esse último caso.

É importante notar que as interseções de $W^s(\gamma_\epsilon)$ e $W^u(\gamma_\epsilon)$ com as seções $\Sigma_{\theta_0} = \{(\mathbf{x}, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 / \theta = \theta_0 \in [0, 2\pi)\}$ são dependentes de θ_0 . Contudo, elas são iguais para θ 's que diferem entre si de 2π , de modo que somos levados a construir um mapa de Poincaré \mathbf{M}_p do segundo tipo, dado pela equação 2.9.

Assim sendo, partimos da análise do fluxo para a análise de um mapa. Pelo que vimos nas seções anteriores, a existência de cruzamentos homoclínicos transversos implica a ocorrência de dinâmica caótica tipo *Ferradura* em \mathbf{M}_p^k para algum inteiro k (teorema de Smale-Birkhoff). A fim de verificar que esse é realmente o caso, usamos o método de Melnikov, cuja versão padrão apresentamos a seguir.

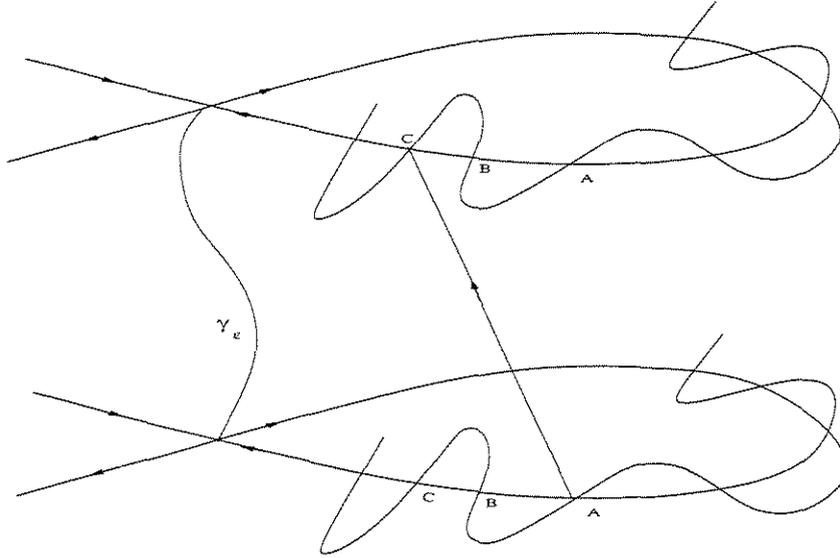


Figura 2.13: $W^s(\gamma_\epsilon)$ e $W^u(\gamma_\epsilon)$

2.6 O Método de Melnikov

Agora, apresentamos o Método de Melnikov [10], bem como a demonstração de sua validade baseada em [11].

Consideremos a situação descrita na seção anterior. Queremos saber se, no caso perturbado (eq. 2.11), as variedades estável e instável cruzam-se transversalmente. Para tal, façamos a seguinte análise: Seja $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto do *loop* homoclínico Γ do sistema não perturbado e seja L a seção perpendicular a Γ em \mathbf{x}_0 . O Método de Melnikov consiste na análise da distância entre $W^s(\gamma_\epsilon)$ e $W^u(\gamma_\epsilon)$ ao longo de L . Para isto, fixemos $\theta = \theta_0$. Nesse plano Σ_{θ_0} , seja $\mathbf{x}_{\epsilon, \theta}^*$ o ponto da órbita hiperbólica γ_ϵ e denominemos $W^{u,s}(\mathbf{x}_{\epsilon, \theta}^*)$ as interseções de $W^{u,s}(\gamma_\epsilon)$ com esse plano. Sejam $A^{u,s}$ as interseções de $W^{u,s}(\mathbf{x}_{\epsilon, \theta}^*)$ com L mais próximas de \mathbf{x}_0 (vide figura 2.14) e sejam $\mathbf{x}^{u,s}(t; \theta_0, \epsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, as trajetórias (únicas) de 2.11 passando por $A^{u,s}$.

Definimos, então, a função distância:

$$\Delta_\epsilon(t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)) \wedge [\mathbf{x}^u(t; \theta_0, \epsilon) - \mathbf{x}^s(t; \theta_0, \epsilon)], \quad (2.12)$$

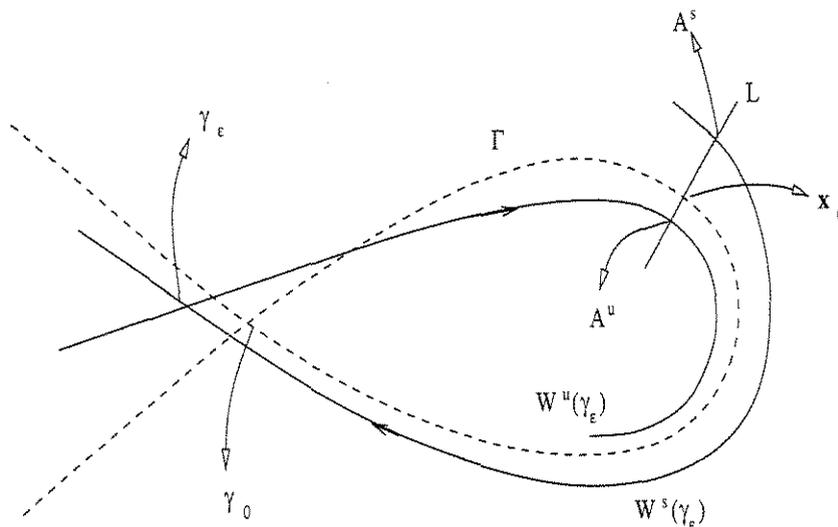


Figura 2.14: Medição da distância entre as variedades no plano Σ_{θ_0}

onde o produto \wedge é definido do seguinte modo:

$$(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (2.13)$$

Concluimos que $\Delta_\epsilon(t, \theta_0)$ é igual a $|\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t-\theta_0))|$ vezes a componente de $\mathbf{x}^u(t; \theta_0, \epsilon) - \mathbf{x}^s(t; \theta_0, \epsilon)$ perpendicular a $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t-\theta_0))$, que é tangente a Γ em $\mathbf{x}_0(t-\theta_0)$. Segue-se que $\frac{\Delta_\epsilon(\theta_0)}{|\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0)|}$ é a distância entre $W^u(\gamma_\epsilon)$ e $W^s(\gamma_\epsilon)$ ao longo de L no plano $\theta = \theta_0$.

Vamos, agora, desenvolver a expressão 2.12 de modo a facilitar a sua utilização. Para isso, façamos antes a expansão de $\mathbf{x}^{u,s}(t; \theta_0, \epsilon)$ em série de Taylor:

$$\mathbf{x}^{u,s}(t; \theta_0, \epsilon) = \mathbf{x}_0(t - \theta_0) + \epsilon \mathbf{x}_1^{u,s}(t, \theta_0) + O(\epsilon^2), \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{x}_1^{u,s}$ são as primeiras variações com relação a ϵ . Logo:

$$\dot{\mathbf{x}}_1^{u,s}(t, \theta_0) = D\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0))\mathbf{x}_1^{u,s}(t, \theta_0) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0(t - \theta_0), t) + O(\epsilon). \quad (2.15)$$

Agora, definimos:

$$\Delta_\epsilon^{u,s}(t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)) \wedge \epsilon \mathbf{x}_1^{u,s}(t, \theta_0), \quad (2.16)$$

de modo que $\Delta_\epsilon(\theta) = \Delta_\epsilon^u(\theta) - \Delta_\epsilon^s(\theta) + O(\epsilon^2)$. Então, derivando $\Delta_\epsilon^{u,s}$ com relação ao tempo e utilizando 2.15, obtemos, após algumas manipulações algébricas:

$$\dot{\Delta}_\epsilon^{u,s}(t) = \epsilon [Tr(D\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)))\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)) \wedge \mathbf{x}_1^{u,s}(t, \theta_0) + \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)) \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0(t - \theta_0), t)] + O(\epsilon^2). \quad (2.17)$$

Se o sistema não perturbado é hamiltoniano, temos que $Tr(D\mathbf{f}_0(\mathbf{x})) \equiv 0$, de modo que a equação 2.17 reduz-se a:

$$\dot{\Delta}_\epsilon^{u,s}(t) = \epsilon \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)) \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0(t - \theta_0), t). \quad (2.18)$$

Integrando, obtemos:

$$\Delta_\epsilon^u(\theta_0) = \epsilon \int_{-\infty}^{\theta_0} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)) \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0(t - \theta_0), t) dt, \quad (2.19)$$

já que $\Delta_\epsilon^u(-\infty) = 0$ devido a $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(-\infty)) = \mathbf{f}_0(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. E, por argumentos análogos,

$$\Delta_\epsilon^s(\theta_0) = -\epsilon \int_{\theta_0}^{\infty} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)) \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0(t - \theta_0), t) dt. \quad (2.20)$$

Portanto, concluímos que:

$$\Delta_\epsilon(\theta_0) = \epsilon \tilde{M}(\theta_0) + O(\epsilon^2), \quad (2.21)$$

com

$$\tilde{M}(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0(t - \theta_0)) \wedge \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0(t - \theta_0), t) dt. \quad (2.22)$$

No caso em que \mathbf{f}_1 também é um campo vetorial hamiltoniano, a função de Melnikov adquire a forma:

$$\tilde{M}(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(\mathbf{x}_0(t - \theta_0), t) dt, \quad (2.23)$$

onde H_0 e H_1 são as Hamiltonianas correspondentes a \mathbf{f}_0 e \mathbf{f}_1 , respectivamente.

Se $M(\theta_0)$ tem zeros não degenerados, então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $W^u(\mathbf{x}_{\epsilon, \theta_0}^*)$ e $W^s(\mathbf{x}_{\epsilon, \theta_0}^*)$ têm interseções transversais, caracterizando a presença do emaranhado homoclínico e, portanto, de uma dinâmica caótica do tipo ferradura de Smale.

O Método de Melnikov pode também ser usado para o estudo de sistemas abertos, como em [12]. Nesse caso, a compactificação do domínio feita através de uma mudança de coordenadas torna o método aplicável.

2.7 Redução Hamiltoniana

Nesta seção, partimos de um sistema Hamiltoniano autônomo com dois graus de liberdade e mostramos que ele equivale a um sistema de $1\frac{1}{2}$ grau de liberdade. Em particular, mostramos como o momento generalizado conjugado a uma coordenada tipo ângulo pode ser encarado como uma “nova Hamiltoniana” [9].

Seja $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ uma hamiltoniana autônoma. H é, portanto, conservada, de modo que podemos escrever:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h, \quad (2.24)$$

onde h é a energia do sistema.

Suponhamos que q_2 e p_2 sejam variáveis de ângulo e ação e que H possa ser escrita como a soma de uma hamiltoniana H_0 com uma perturbação ϵH_1 , de modo que q_2 só apareça na perturbação. Então temos uma situação intuitivamente análoga à da seção 2.5, q_2 fazendo as vezes de coordenada temporal. Vamos mostrar que esse é realmente o caso.

Primeiramente, escrevemos p_2 como função das demais variáveis invertendo a equação 2.24:

$$p_2 = P_h(q_1, p_1; q_2). \quad (2.25)$$

Como H é conservada, temos que:

$$0 = dH = \frac{\partial H}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial H}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial H}{\partial p_2} \left(\frac{\partial P_h}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial P_h}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial P_h}{\partial q_2} dq_2 \right).$$

Logo:

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial P_h}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial P_h}{\partial p_1} = 0. \quad (2.26)$$

De modo geral nas situações de interesse, $\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} \neq 0$, de modo que 2.26 implica:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2} = \frac{\partial H / \partial p_1}{\partial H / \partial p_2} = -\frac{\partial P_h}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dq_2} = \frac{\dot{p}_1}{\dot{q}_2} = -\frac{\partial H / \partial q_1}{\partial H / \partial p_2} = \frac{\partial P_h}{\partial q_1}. \quad (2.27)$$

Assim, denotando $\frac{d}{dq_2}$ por $()'$, temos finalmente que:

$$q_1' = -\frac{\partial P_h}{\partial p_1} \quad p_1' = \frac{\partial P_h}{\partial q_1}. \quad (2.28)$$

Desse modo, $-P_h$ funciona como uma nova hamiltoniana e q_2 como a sua respectiva coordenada temporal. Esse procedimento é conhecido como *redução hamiltoniana* e é de enorme utilidade, já que sistemas autônomos de 2 graus de liberdade com uma perturbação dependente de uma coordenada angular são bastante comuns. Em particular, o sistema estudado nesta dissertação constitui um exemplo.

2.8 Versão alternativa do Método de Melnikov

Como veremos no capítulo 4, estamos interessados num sistema cuja hamiltoniana é da forma:

$$H(r, p, \theta, \Omega) = H_0(r, p, \Omega) + \epsilon H_1(r, p, \theta, \Omega).$$

Mostramos na última seção que ele pode ser reduzido a um sistema de $1\frac{1}{2}$ grau de liberdade em superfícies de H constante. Desse modo, a fim de detectarmos cruzamentos homoclínicos transversos, deveríamos verificar se a função de Melnikov, dada por $\tilde{M}(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\Omega_0, \Omega_1\}(r(\theta), p(\theta), \theta + \theta_0) d\theta$, possui zeros isolados.

No sistema que estudaremos, contudo, essa integral mostra-se de resolução impraticável. Com isso, somos levados a uma outra versão do método de Melnikov. Ela é proposta em [13] (vide [4] para um exemplo de aplicação em Relatividade Geral) e se baseia na medição da diferença, em primeira ordem, dos valores que o momento generalizado não conservado Ω assume nas variedades estável e instável. Visto que já apresentamos a demonstração do método de Melnikov padrão e que a demonstração dessa versão alternativa não é de grande interesse, além de mais trabalhosa, vamos apenas enunciá-la aqui. Ela nos diz que a diferença entre os valores de Ω nas interseções das duas variedades com um plano transversal é igual a $\epsilon M(\theta_0) + O(\epsilon^2)$, com $M(\theta_0)$ definida por 2.29. Portanto, se a função $M(\theta_0)$ abaixo tem zeros não degenerados, então há cruzamentos homoclínicos transversos e, portanto, seguem-se todas as implicações do teorema de Smale-Birkhoff. A função de Melnikov alternativa é dada por:

$$M(\theta_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[- \int_{T_j^*}^{T_j} \frac{\partial H_1}{\partial \theta}(r(\theta), p(\theta), \theta + \theta_0) |_{\gamma} dt \right], \quad (2.29)$$

onde T_j e T_j^* são, respectivamente, os instantes em que a órbita atravessa o plano $\theta = \theta_0 \pmod{2\pi}$ no futuro e no passado pela j -ésima vez (j natural) e onde γ denota o *loop* homoclínico.

Relatividade Geral

Em regiões do universo onde os campos gravitacionais são intensos, a Relatividade Geral deve substituir a teoria da gravitação de Newton. Nessas situações, a equação de Poisson para o potencial gravitacional dá lugar à seguinte equação tensorial:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

A equação de campo de Einstein (3.1) relaciona o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de curvatura R , ambos construídos a partir da métrica $g_{\mu\nu}$, ao tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, que descreve as fontes do campo gravitacional ($\kappa = -8\pi G/c^4$, onde G é a constante gravitacional newtoniana e c é a velocidade da luz). A sua solução é a métrica do espaço-tempo. O movimento das partículas-teste submetidas a tal campo corresponde, então, às geodésicas daquela geometria.

3.1 Métricas de Weyl

Nesta seção, encontramos a forma geral das métricas resultantes da deformação do espaço-tempo por uma distribuição de matéria com simetria axial, da maneira como apresentada em

[14] (vide também [15]).

Em física clássica, a simetria axial é expressa por um potencial escrito em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) independente da coordenada angular ϕ . Em relatividade geral, entendemos os efeitos gravitacionais não mais como originados por uma força (e, portanto, por um potencial), mas sim por deformações do espaço-tempo. Assim, esperamos que a simetria axial se manifeste por uma independência da métrica g_{ij} da coordenada ϕ . Entretanto, tal imposição é muito pouco restritiva, sendo que a métrica ainda permanece com os seus dez termos, agora funções somente das coordenadas t, ρ e z . A fim de encontrar resultados menos gerais, impomos a reversibilidade das coordenadas ϕ e t , de modo que a métrica fica invariante sob as transformações $\phi \rightarrow -\phi$ e $t \rightarrow -t$ (fonte de campo estática). Com isso, reduzimos para cinco o número de termos na métrica, já que os termos não diagonais de g_{ij} que contém $d\phi$ ou dt desaparecem. Ademais, se definirmos apropriadamente as outras duas coordenadas, podemos escrever a nossa métrica na seguinte forma, contendo somente três funções desconhecidas¹:

$$ds^2 = \alpha^2[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + \beta^2(dx^3)^2 - \gamma^2(dx^4)^2. \quad (3.2)$$

Na relação acima, $x^3 = \phi$, $x^4 = t$ e α, β e γ são funções de x^1 e x^2 .

Calculando o tensor de Ricci, vemos que duas de suas componentes são:

$$R_{33} = \frac{\beta}{\alpha^2} \left\{ \Delta\beta + \frac{1}{\gamma}(\beta_{,1}\gamma_{,1} + \beta_{,2}\gamma_{,2}) \right\} \quad (3.3)$$

e

$$R_{44} = -\frac{\gamma}{\alpha^2} \left\{ \Delta\gamma + \frac{1}{\beta}(\beta_{,1}\gamma_{,1} + \beta_{,2}\gamma_{,2}) \right\}, \quad (3.4)$$

onde os subscritos denotam derivação parcial e Δ denota o “laplaciano”: $\Delta f = f_{,11} + f_{,22}$.

Manipulando as expressões acima, resulta que:

$$R_3^3 + R_4^4 = \beta^{-2}R_{33} - \gamma^{-2}R_{44} = \frac{1}{\alpha^2\beta\gamma}\Delta(\beta\gamma). \quad (3.5)$$

¹convencionamos $G = c = 1$ nesta dissertação.

Impondo a condição de vácuo, a equação de Einstein torna-se:

$$R_{ij} = 0, \quad (3.6)$$

de modo que a equação anterior implica:

$$\Delta(\beta\gamma) = 0. \quad (3.7)$$

Assim, $\beta\gamma$ é uma função harmônica $\rho(x^1, x^2)$:

$$\beta\gamma = \rho(x^1, x^2). \quad (3.8)$$

Portanto, existe uma função harmônica $z(x^1, x^2)$ conjugada a ρ , de modo que a função seguinte é analítica:

$$\rho + iz = f(x^1 + ix^2). \quad (3.9)$$

Sabemos da teoria de variáveis complexas que, em cada ponto z de um domínio onde uma função F é analítica e $F'(z) \neq 0$, a transformação $w = F(z)$ é conforme. Logo, a transformação $(x^1, x^2) \rightarrow (\rho, z)$ é conforme, de modo que:

$$\alpha^2[(dx^1)^2 + (dx^2)^2] = A^2(d\rho^2 + dz^2), \quad (3.10)$$

onde A é função de ρ e z . E, como a equação 3.8 impõe uma relação entre as funções β e γ , temos que a nossa métrica fica somente com duas funções desconhecidas:

$$ds^2 = A^2(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2\gamma^{-2}d\phi^2 - \gamma^2dt^2. \quad (3.11)$$

Neste ponto, torna-se interessante a seguinte mudança de notação:

$$A = e^{\nu-\lambda}, \quad \beta = \rho e^{-\lambda}, \quad \gamma = e^{\lambda}, \quad (3.12)$$

de modo que a métrica fica:

$$ds^2 = e^{2(\nu-\lambda)}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 e^{-2\lambda} d\phi^2 - e^{2\lambda} dt^2. \quad (3.13)$$

Das componentes do tensor de Ricci² escritas agora em função dos novos parâmetros λ e ν , concluímos, após a imposição da condição de vácuo, que:

$$\Delta\lambda + \frac{\lambda_{,1}}{\rho} = 0, \quad (3.14)$$

$$\nu_{,1} = \rho(\lambda_{,1}^2 - \lambda_{,2}^2), \quad \nu_{,2} = 2\rho\lambda_{,1}\lambda_{,2}, \quad (3.15)$$

$$\Delta\nu + \lambda_{,1}^2 + \lambda_{,2}^2 = 0, \quad (3.16)$$

onde, de agora em diante, subentendem-se x^1 e x^2 , respectivamente, por ρ e z .

Mas a equação 3.14 é facilmente reconhecida como a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas. Como o potencial newtoniano também satisfaz essa equação, a analogia é imediata. Por exemplo, um caso de excepcional interesse é aquele em que a origem do potencial é uma distribuição linear da massa M no segmento que vai de $z = -L$ a $z = L$, com $\rho = 0$. O potencial newtoniano é então dado por [15]:

$$\Phi(z, \rho) = -\frac{GM}{2L} \ln \frac{R_1 + R_2 + 2L}{R_1 + R_2 - 2L}, \quad (3.17)$$

onde:

$$R_1^2 = (z - L)^2 + \rho^2 \quad (3.18)$$

e

$$R_2^2 = (z + L)^2 + \rho^2. \quad (3.19)$$

²as componentes do tensor de Ricci, que são de cálculo razoavelmente trabalhoso, podem ser encontradas em [14].

Podemos, então, identificar o potencial Φ com a nossa função λ . A outra função necessária para a determinação da métrica é ν . De acordo com a equação 3.15, essa função é dada pela integral de linha³:

$$\nu = \int \rho [(\lambda_{,1}^2 - \lambda_{,2}^2) d\rho + 2\lambda_{,1}\lambda_{,2} dz]. \quad (3.20)$$

O caso particular em que fazemos $L = m \equiv GM$ é de grande interesse⁴. Substituindo $L = m$ na equação 3.17 e resolvendo a integral de linha para ν , chegamos à métrica da forma:

$$ds^2 = \frac{R_1 + R_2 - 2m}{R_1 + R_2 + 2m} dt^2 - \frac{R_1 + R_2 + 2m}{4R_1 R_2} (d\rho^2 + dz^2) - \frac{R_1 + R_2 + 2m}{R_1 + R_2 - 2m} \rho^2 d\phi^2, \quad (3.21)$$

com $L = m$ nas equações 3.18 e 3.19.

Fazendo a transformação de coordenadas

$$z = (r - m) \cos \theta, \quad \rho = \sin \theta \sqrt{r^2 - 2mr}, \quad (3.22)$$

obtemos a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.23)$$

Isto simplesmente expressa o fato de que a simetria esférica, como no caso da métrica de Schwarzschild, é um caso particular de simetria axial.

3.2 Multipólos em Relatividade Geral

Nesta seção, mostramos como descrever, no formalismo de Relatividade Geral, a situação física em que há uma distribuição axialmente simétrica de matéria, composta de uma parte interna e outra externa.

³não fizemos uso da equação 3.16, que decorre das equações 3.14 e 3.15.

⁴Observe-se que $2m$ é o raio de Schwarzschild.

Como vimos na seção precedente, uma métrica estática e axialmente simétrica é dada por (vide eq. 3.13):

$$ds^2 = e^{2(\nu-\lambda)}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 e^{-2\lambda} d\phi^2 - e^{2\lambda} dt^2, \quad (3.24)$$

sendo as funções λ e ν dadas pela solução da equação de Laplace

$$\lambda_{,\rho\rho} + \lambda_{,zz} + \frac{\lambda_{,\rho}}{\rho} = 0, \quad (3.25)$$

e pela quadratura

$$d\nu = \rho(\lambda_{,\rho}^2 - \lambda_{,z}^2) d\rho + 2\rho\lambda_{,\rho}\lambda_{,z} dz, \quad (3.26)$$

que correspondem às equações 3.14 e 3.15.

É conveniente trabalharmos com as chamadas coordenadas esferoidais prolatas, obtidas das coordenadas de Schwarzschild (vide eq. 3.22) pela relação

$$x = \frac{r}{m} - 1, \quad x > 1, \quad (3.27)$$

$$y = \cos \theta, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Nas coordenadas esferoidais prolatas, as equações 3.25 e 3.26 tornam-se:

$$[(x^2 - 1)\lambda_{,x}]_{,x} + [(1 - y^2)\lambda_{,y}]_{,y} = 0, \quad (3.28)$$

$$\nu_{,x} = \frac{1 - y^2}{x^2 - y^2} [x(x^2 - 1)(\lambda_{,x})^2 - x(1 - y^2)(\lambda_{,y})^2 - 2y(x^2 - 1)\lambda_{,x}\lambda_{,y}], \quad (3.29)$$

$$\nu_{,y} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} [y(x^2 - 1)(\lambda_{,x})^2 - y(1 - y^2)(\lambda_{,y})^2 + 2x(1 - y^2)\lambda_{,x}\lambda_{,y}]. \quad (3.30)$$

A equação de Laplace nessas novas coordenadas, eq. 3.28, pode ser separada e resolvida em termos dos polinômios de Legendre Q_l e P_l [16], de maneira que a solução geral é:

$$\lambda(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} [a_l Q_l(x) + b_l P_l(x)][c_l Q_l(y) + d_l P_l(y)]. \quad (3.31)$$

Como $Q_l(y)$ apresenta singularidades em $y = \pm 1$, a solução geral assume a forma

$$\lambda(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} [a_l Q_l(x) P_l(y) + b_l P_l(x) P_l(y)], \quad (3.32)$$

sendo os coeficientes a_l e b_l de 3.31 diferentes dos que aparecem em 3.32. A função ν pode, então, ser obtida a partir das equações 3.29 e 3.30.

Os termos $Q_l(x)P_l(y)$ anulam-se para $x \rightarrow \infty$. São, portanto, os multipólos internos, descrevendo a distribuição de matéria central. Eles também são fonte de caos em Relatividade Geral [17]. Por outro lado, os termos $P_l(x)P_l(y)$ divergem nesse limite, sendo, pois, os multipólos externos. Eles descrevem o quanto a distribuição de matéria exterior difere de um homeóide⁵. Estaremos interessados nesses últimos nesta dissertação.

⁵Chamamos aqui de homeóide qualquer distribuição de matéria que mantém inalterada a métrica interna.

Caos em Relatividade Geral

O estudo dos efeitos gravitacionais de sistemas formados por um centro de atração e por uma casca externa de matéria é de grande interesse em astrofísica, já que constitui um primeiro modelo para a dinâmica de estrelas em galáxias. Essas são, em geral, concebidas como um núcleo central, um disco e um halo externo. De maneira geral, usam-se potenciais newtonianos para descrever a interação. Contudo, fortes evidências da presença de buracos negros na região central [18] sugerem a importância do tratamento via Relatividade Geral, pelo menos naquela região.

Neste capítulo, apresentamos o estudo da dinâmica de partículas-teste sujeitas à ação gravitacional de um buraco negro central e de uma casca externa de matéria (vide figura 4.1). Supõe-se para essa última uma simetria axial, de modo que temos uma métrica de Weyl com contribuições multipolares, como tratado na seção 2 do capítulo precedente.

Usamos o *Método de Melnikov* para concluir que essa dinâmica é caótica (tipo *Ferradura*) e discutimos algumas consequências.

Caos homoclínico em Relatividade Geral com perturbação externa periodicamente dependente da coordenada angular foi estudado em [4]. Naquele trabalho, a perturbação foi obtida a

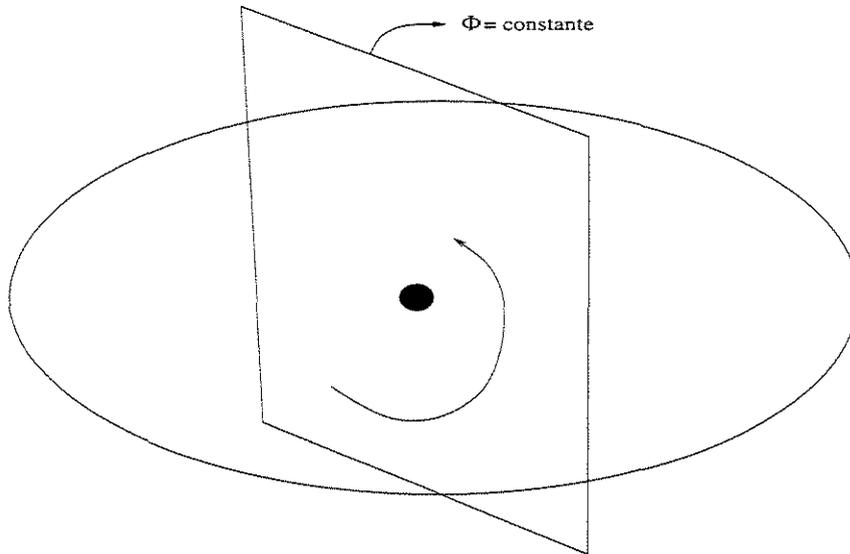


Figura 4.1: A situação física estudada

partir de uma linearização das equações de Einstein. Nesta dissertação, analisamos o caso em que a perturbação é dada por uma solução exata das mesmas.

4.1 A órbita homoclínica

Em física clássica, o problema de duas partículas interagindo gravitacionalmente é o chamado problema de Kepler [19]. Na situação em que uma das partículas é muito mais massiva que a outra, a primeira pode ser considerada fixa e se mostra que a órbita da segunda é uma hipérbole, elipse ou parábola, o que depende da energia. A Hamiltoniana para o sistema é:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Mm}{r} + \frac{\Omega^2}{2mr^2}, \quad (4.1)$$

onde p é o momento conjugado à coordenada r , Ω é o momento angular e onde consideramos $M \gg m$. É conveniente expressar as órbitas tratando $u = \frac{1}{r}$ como função da coordenada angular θ :

$$\Omega^2 u'(\theta)^2 = 2h + 2Mu(\theta) - \Omega^2 u^2(\theta), \quad (4.2)$$

onde h é a energia. Nessa equação, o termo à esquerda corresponde à energia cinética, enquanto que o termo à direita pode ser visto como a diferença entre a energia total e o potencial efetivo, que denotamos por $P(u)$. A figura 4.2 mostra esse potencial quadrático para um valor típico do momento angular. A massa M é suposta igual a $\frac{1}{2}$.

A versão relativística desse sistema é o problema de Schwarzschild. No lugar de forças gravitacionais, encaramos o movimento da partícula-teste como uma geodésica no espaço-tempo cuja métrica é:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + A^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.3)$$

onde $A(r) = 1 - \frac{2m}{r}$. Usaremos, de agora em diante, somente coordenadas adimensionais, fazendo as substituições $s \leftrightarrow \frac{s}{2m}$, $r \leftrightarrow \frac{r}{2m}$ e $t \leftrightarrow \frac{ct}{2m}$. Com isso, em particular, temos que $A(r) = 1 - \frac{1}{r}$

A Relatividade Geral também pode ser estudada a partir de um enfoque Lagrangiano. Nesse caso, as equações de Euler-Lagrange reduzem-se às equações das geodésicas. A função Lagrangiana¹ é definida como

$$L(\dot{x}^c, x^c) \equiv \frac{1}{2} g_{ab}(x^c) \dot{x}^a \dot{x}^b.$$

Com isso, temos:

$$L = \frac{1}{2} \left[-A(r)\dot{t}^2 + A^{-1}(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]. \quad (4.4)$$

Mais conveniente em nosso caso, contudo, é o formalismo hamiltoniano. Definindo os momentos generalizados como $p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}$ e a Hamiltoniana como

$$H \equiv p_a \dot{x}^a - L,$$

¹no caso de coordenadas afins.

obtemos:

$$H = \frac{1}{2} \left[-A(r)^{-1} E^2 + A(r) p^2 + \frac{\Omega_\theta^2}{r^2} + \frac{\Omega_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (4.5)$$

sendo os momentos conjugados $E = A(r)\dot{t}$, $p = A^{-1}(r)\dot{r}$, $\Omega_\theta = r^2\dot{\theta}$ e $\Omega_\phi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$.

Vamos nos restringir a movimentos nos planos $\phi = \text{constante}$, de modo que a Hamiltoniana torna-se:

$$H = \frac{1}{2} \left[-A(r)^{-1} E^2 + A(r) p^2 + \frac{\Omega^2}{r^2} \right], \quad (4.6)$$

com $\Omega \equiv \Omega_\theta$.

Nesse sistema ainda não perturbado, temos três integrais de movimento: a Hamiltoniana², o momento Ω (conjugado à coordenada θ) e a energia E , que nesse caso constitui o momento conjugado à coordenada t . A equação paramétrica para $u(\theta)$ agora é³:

$$\Omega^2 u'(\theta)^2 = (E^2 - 1) + u(\theta) - \Omega^2 u^2(\theta) + \Omega^2 u^3(\theta). \quad (4.7)$$

De maneira análoga à da equação (4.2), o termo do lado esquerdo corresponde à energia cinética e o termo do lado direito corresponde à diferença entre a energia total e um polinômio que dá conta da energia potencial e que novamente chamamos de $P(u)$. Podemos ver que a principal característica relativística é a presença de um termo cúbico no potencial, que mostramos na figura 4.3. Isso muda drasticamente as possibilidades da dinâmica. Em particular, voltaremos nossa atenção para a órbita homoclínica que existe para valores de Ω^2 entre 3 e 4. Nesse caso, há duas órbitas circulares, uma das quais estável e a outra instável. Denotaremos por u_{un} o valor de u correspondente a essa última. E chamaremos de u_{min} o outro valor de u tal que $P(u) = P(u_{un})$. A órbita homoclínica é aquela cujo termo de energia total $E^2 - 1$ é igual a $P(u_{un})$ e que tende assintoticamente a u_{un} quando $t \rightarrow \pm\infty$. Nessa situação, as variedades estável e instável associadas ao ponto fixo hiperbólico $(r, p) = (\frac{1}{u_{un}}, 0)$ coincidem, formando o

² $H = -\frac{1}{2}$ devido a $v^\mu v_\mu = -1$.

³observe-se que u agora também é adimensional.

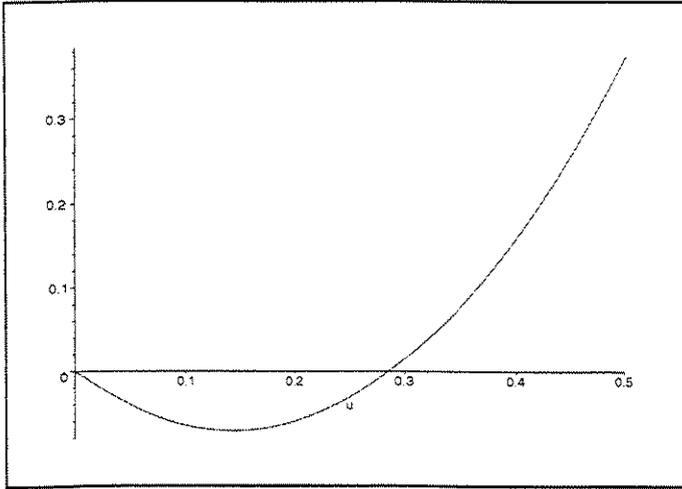


Figura 4.2: Potencial para o caso clássico

loop homoclínico no espaço de fase. Vemos da equação (4.7) que $u'(\theta)^2$ é um polinômio cúbico na variável u . Além disso, para a órbita homoclínica as suas raízes são u_{min} e u_{un} , essa última tendo multiplicidade 2. Desse modo, podemos escrever:

$$u'(\theta)^2 = (u(\theta) - u_{un})^2(u(\theta) - u_{min}). \quad (4.8)$$

Como indicado em [4], essa equação admite a quadratura

$$u(\theta) = u_{un} - \alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha\theta/2), \quad (4.9)$$

onde $\alpha = \sqrt{u_{un} - u_{min}}$.

Essa parametrização da órbita homoclínica será usada no cálculo da integral de Melnikov na próxima seção. Ela está mostrada na figura 4.4. Nessa figura, bem como em outras mais à frente neste capítulo, a variável θ no eixo horizontal está denotada por th .

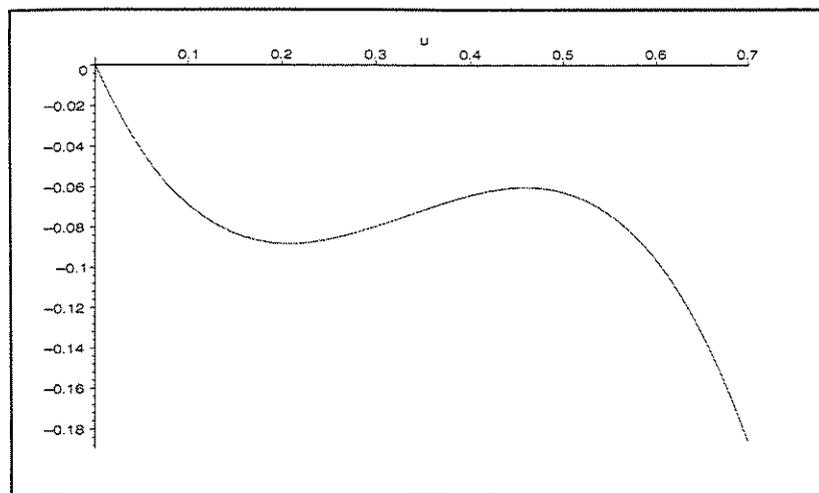


Figura 4.3: Potencial para o caso relativístico

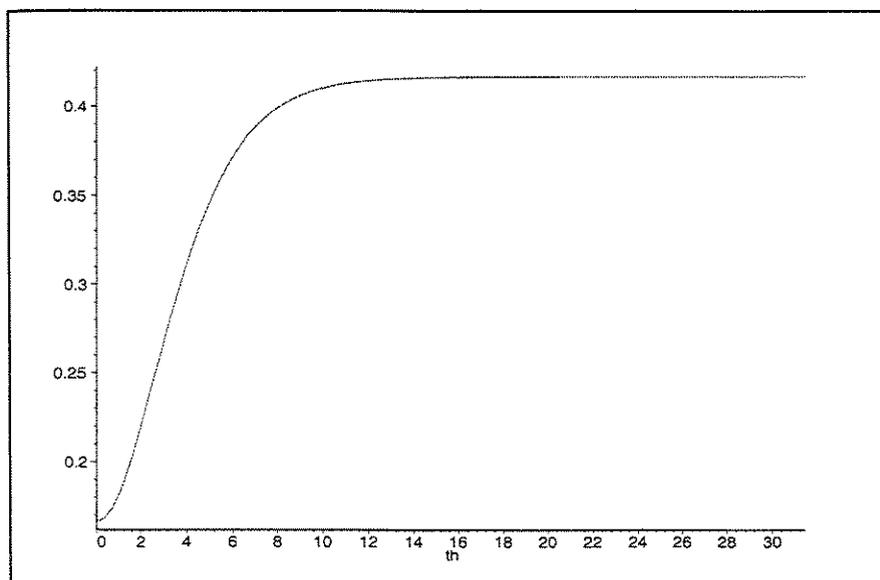


Figura 4.4: Ramo positivo da órbita homoclínica

4.2 A dinâmica perturbada

Agora, nós consideramos a perturbação do problema descrito na seção precedente constituída por multipólos externos até terceira ordem (dipólos, quadrupólos e octopólos). Como já afirmamos na seção 3.2, se a casca fosse um homeóide perfeito, ela não alteraria a métrica interna. Na análise que se segue, vamos considerar a situação em que a casca difere ligeiramente de um homeóide, fazendo aparecer essas contribuições multipolares. Como mostrado em [6], a imposição de condições de unicidade e suavidade na solução até terceira ordem (vide eq. 3.32) nos leva à métrica:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{r}\right)e^P dt^2 + e^{Q-P} \left[\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \right] + e^{-P} r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

$$P = \epsilon(3x^2 y^2 - x^2 - y^2 - 1) + \lambda xy(5x^2 y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 1),$$

$$Q = \gamma_\epsilon + \gamma_\lambda + \gamma_{\epsilon\lambda},$$

$$\gamma_\epsilon = -4\epsilon x(1 - y^2) - \frac{1}{2}\epsilon^2(x^2 - 1)(1 - y^2)[x^2(9y^2 - 1) + 1 - y^2],$$

$$\gamma_\lambda = -2\lambda y(3x^2 - 1)(1 - y^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(x^2 - 1)(1 - y^2)(75x^4 y^4 - 42x^4 y^2 - 42x^2 y^4 + 18x^2 y^2 + 3x^4 + 3y^4 + 1),$$

$$\gamma_{\epsilon\lambda} = -2\epsilon\lambda xy(x^2 - 1)(1 - y^2)(3x^2 - 1)(3y^2 - 1),$$

onde $x = 2r - 1$ e $y = \cos \theta$ são as já apresentadas coordenadas esferoidais prolatas (vide eq. 3.27). Aqui, ϵ é o parâmetro quadrupolar e λ é o parâmetro octopolar. O parâmetro dipolar aparece implicitamente, já que a exclusão das singularidades cônicas impõe que ele deve ser igual a $-\frac{2}{3}\lambda$ (vide [6]). Ou seja, os multipólos de ordem par devem aparecer juntos. Ressaltamos que as funções P e Q acima não devem ser confundidas com os polinômios de Legendre P_l e Q_l .

A partir dessa métrica, escrevemos o Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}[B\dot{t}^2 + C\dot{r}^2 + D\dot{\theta}^2 + F\dot{\phi}^2], \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} B &= -(1 - \frac{1}{r})e^P, \\ C &= e^{Q-P}(1 - \frac{1}{r})^{-1}, \\ D &= e^{Q-P}r^2, \\ F &= e^{-P}r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

E a nossa nova Hamiltoniana passa a ser:

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{E^2}{B} + \frac{P^2}{C} + \frac{\Omega_\theta^2}{D} + \frac{\Omega_\phi^2}{F} \right], \quad (4.11)$$

sendo $E = B\dot{t}$, $P = C\dot{r}$, $\Omega_\theta = D\dot{\theta}$ e $\Omega_\phi = F\dot{\phi}$ os momentos conjugados. Observemos que $\dot{\Omega}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$, de maneira que Ω_ϕ é constante. Assim, podemos restringir nossa atenção às partículas com $\Omega_\phi = 0$, i.e., as partículas confinadas ao plano $\phi = \text{constante}$. Nossa Hamiltoniana, então, de agora em diante, é:

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{E^2}{B} + \frac{P^2}{C} + \frac{\Omega^2}{D} \right], \quad (4.12)$$

onde $\Omega \equiv \Omega_\theta$.

Agora, expandimos essa Hamiltoniana numa série de potências de ϵ e λ :

$$H = H_0 + \epsilon H_1 + \lambda H_2 + O(2), \quad (4.13)$$

com H_0 dado pela equação (4.6) e com

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} [A^{-1}(3x^2y^2 - x^2 - y^2 - 1)E^2 + A(3x^2y^2 - 4xy^2 - x^2 - y^2 + 4x - 1)p^2 \\ &\quad + \frac{4\Omega^2}{(x+1)^2}(3x^2y^2 - 4xy^2 - x^2 - y^2 + 4x - 1)], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{E^2}{A} xy(5x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 1) - Ap^2[-2y(3x^2 - 1)(1 - y^2) - xy(5x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 1)] \right. \\ \left. - \frac{4\Omega^2}{(x+1)^2}[-2y(3x^2 - 1)(1 - y^2) - xy(5x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 1)] \right]. \quad (4.15)$$

Diferentemente da situação descrita na seção anterior, o momento Ω não é mais uma constante de movimento, tendo perdido a sua integrabilidade devido à perturbação dependente de θ . Nesse novo caso, Ω pode ser encarado como um novo “Hamiltoniano”, como mostramos na seção 2.7. De maneira geral, as variedades estável e instável não mais coincidem, duas situações podendo surgir: elas não se interseccionam ou elas o fazem em um número infinito de pontos. Nessa última possibilidade, se as interseções são transversas, surge o emaranhado homoclínico no espaço de fase, estrutura cuja presença garante (teorema de Smale-Birkhoff) a ocorrência de dinâmica de *Ferradura de Smale* em um conjunto invariante do espaço de fase⁴.

De modo a detectar a presença dos tais cruzamentos transversais, usamos a versão do *Método de Melnikov* apresentada na seção 2.8. Quando aplicada ao nosso sistema, ela afirma que a ocorrência de pontos homoclínicos transversos está associada à existência de zeros não degenerados para a função $M(\theta_0)$, com:

$$M(\theta_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-2\pi j}^{2\pi j} -\frac{\partial[H_1 + \kappa H_2]}{\partial \theta}(r(\theta), p(\theta), \theta + \theta_0) d\tau, \quad (4.16)$$

com j inteiro e onde $\lambda = \kappa\epsilon$, sendo κ real. Assim, κ é o parâmetro que arbitra o papel relativo dos múltiplos de ordem par (quadrupólo) e ímpar (dipólo e octopólo).

Após cálculos razoavelmente trabalhosos, em que simplificamos observando a paridade das funções envolvendo produtos de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, chegamos a:

$$M(\theta_0) = 2A \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \kappa[B \sin \theta_0 + C \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 + F \sin^3 \theta_0], \quad (4.17)$$

onde

⁴vide toda a discussão sobre as consequências da presença de cruzamentos homoclínicos transversos no capítulo 2.

$$A = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi j} G_{\Omega}[r(\theta)] \cos(2\theta) d\theta, \quad (4.18)$$

$$G_{\Omega} = \left[(3x^2 - 1) \frac{E^2}{A} + (3x^2 - 4x - 1) Ap^2 + (3x^2 - 4x - 1) \frac{\Omega^2}{r^2} \right] \frac{r^2}{\Omega},$$

$$B = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi j} G_{2\Omega}[r(\theta)] \cos \theta d\theta, \quad (4.19)$$

$$G_{2\Omega}(r) = \left[(-3x^3 + x) \frac{E^2}{A} + (-3x^3 + 6x^2 + x - 2) Ap^2 + (-3x^3 + 6x^2 + x - 2) \frac{\Omega^2}{r^2} \right] \frac{r^2}{\Omega},$$

$$C = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi j} G_{1\Omega}[r(\theta)] (\cos^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta, \quad (4.20)$$

$$G_{1\Omega}(r) = \left[(15x^3 - 9x) \frac{E^2}{A} + (15x^3 - 18x^2 - 9x + 6) Ap^2 + (15x^3 - 18x^2 - 9x + 6) \frac{\Omega^2}{r^2} \right] \frac{r^2}{\Omega},$$

e onde

$$F = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-2\pi j}^{2\pi j} G_{1\Omega}[r(\theta)] \sin^2 \theta \cos \theta d\theta.$$

Nas expressões acima, transformamos uma integral em τ numa integral em θ observando que, na dinâmica não perturbada, $\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\Omega}{r^2}$.

Neste ponto, é conveniente escrevermos $M(\theta_0)$ como uma série de Fourier, o que torna mais clara a análise das suas raízes. Usando as identidades trigonométricas $\sin x \cos^2 x = \frac{1}{4}(\sin x + \sin 3x)$ e $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$, chegamos a:

$$M(\theta_0) = A \sin 2\theta_0 + \kappa \left[\left(B + \frac{C}{4} + \frac{3F}{4} \right) \sin \theta_0 + \left(\frac{C}{4} - \frac{F}{4} \right) \sin 3\theta_0 \right]. \quad (4.21)$$

Com isso, temos que $M(\theta_0) = 0$ em $\theta_0 = 2K\pi$ para K inteiro. Nesse caso, $M'(\theta_0) = 2A + \kappa(B + C)$. Por outro lado, temos que $M(\theta_0) = 0$ em $\theta_0 = (2K + 1)\pi$, sendo K inteiro,

mas, nesse caso, $M'(\theta_0) = 2A - \kappa(B + C)$. Assim, para que $M(\theta_0)$ não tenha zeros transversos em $\theta_0 = 2K\pi$, deve ser satisfeita a condição

$$2A + \kappa(B + C) = 0. \quad (4.22)$$

E, para que $M(\theta_0)$ não tenha zeros transversos em $\theta_0 = (2K + 1)\pi$, deve ser satisfeita a condição

$$2A - \kappa(B + C) = 0. \quad (4.23)$$

Das equações 4.22 e 4.23, concluímos que uma condição necessária para que $M(\theta_0)$ não tenha zeros transversos é:

$$A = 0 \text{ e } \kappa(B + C) = 0.$$

Logo, uma condição suficiente para que $M(\theta_0)$ tenha zeros transversos é:

$$A \neq 0 \text{ ou } \kappa(B + C) \neq 0. \quad (4.24)$$

Então, basta analisarmos os termos A e $B + C$. Se eles não forem nulos, então a condição 4.24 nos garante a presença de cruzamentos transversos no espaço de fase e, portanto, a ocorrência de dinâmica caótica tipo *Ferradura*.

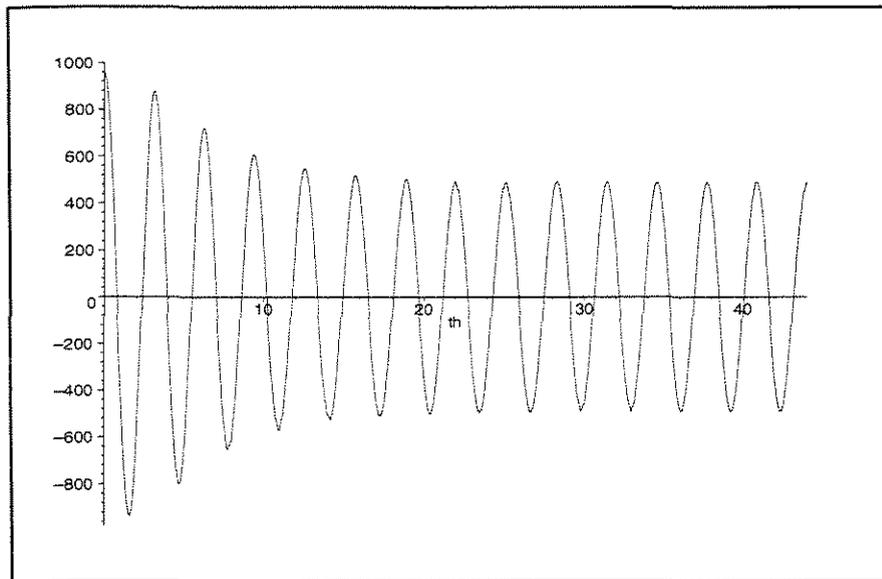


Figura 4.5: Integrando em A para $\Omega^2 = 3.01$

4.3 Resultados

Primeiramente, vamos nos ater ao caso de contribuição puramente quadrupolar, de modo que $\kappa = 0$. Nas figuras 4.5 a 4.7, apresentamos o integrando do termo A para três valores de Ω^2 entre 3 e 4 (valores para os quais a dinâmica não perturbada admite a órbita homoclínica). Vemos que esse integrando tende assintoticamente a uma função periódica em θ , de período π e com integral nula em intervalos de tamanho $2\pi j$, de modo que a integral definida por 4.18 converge. Cabe aqui ressaltar a importância de definirmos corretamente os limites de integração, já que a integral imprópria $\int_0^\infty G_\Omega[r(\theta)] \cos(2\theta) d\theta$ não converge, o mesmo acontecendo com as integrais impróprias definidas a partir dos termos B e C . Essa, aliás, é a razão de não termos transformado a integração em θ (intervalo infinito) numa integração em r (intervalo limitado) como em [20], o que nos permitiria inferir a ocorrência de caos homoclínico simplesmente pela análise dos gráficos dos integrandos, sem o cálculo explícito das integrais.

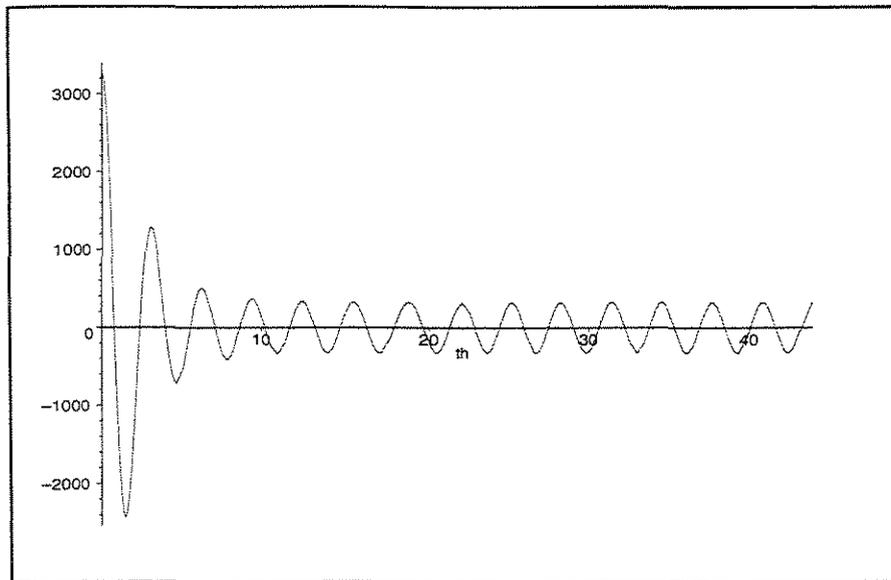


Figura 4.6: Integrando em A para $\Omega^2 = 3.1$

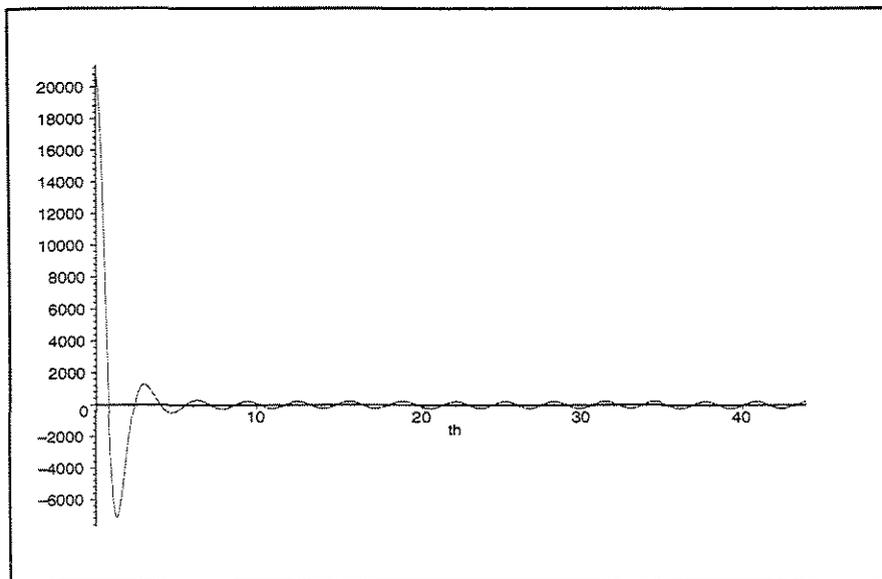


Figura 4.7: Integrando em A para $\Omega^2 = 3.3$

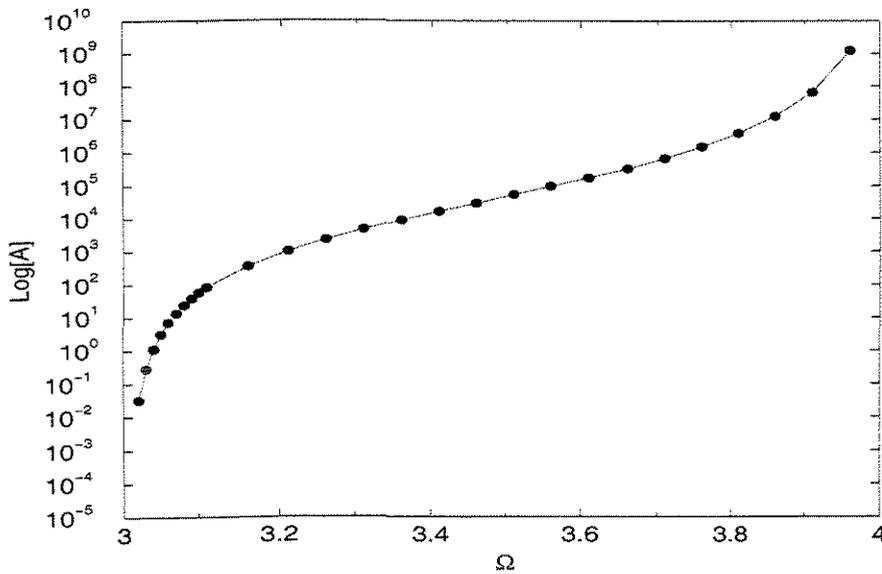


Figura 4.8: $\text{Log}(A)$ em função de Ω^2

Calculamos numericamente o valor de A como função de Ω^2 no intervalo $(3, 4)$. Os resultados estão no gráfico linear-logarítmico apresentado na figura 4.8. Vemos que A é estritamente positivo e tende a zero quando $\Omega^2 \rightarrow 3$. A tabela seguinte apresenta os valores de A e do erro estimado para o seu cálculo para valores pequenos de Ω^2 . Os erros estimados são ainda menores para $\Omega^2 > 3.05$.

Ω^2	A	ΔA
3.01	-0.001	0.002
3.02	0.0323	0.0004
3.03	0.2772	0.0001
3.04	1.12484	0.00005
3.05	3.13933	0.00003

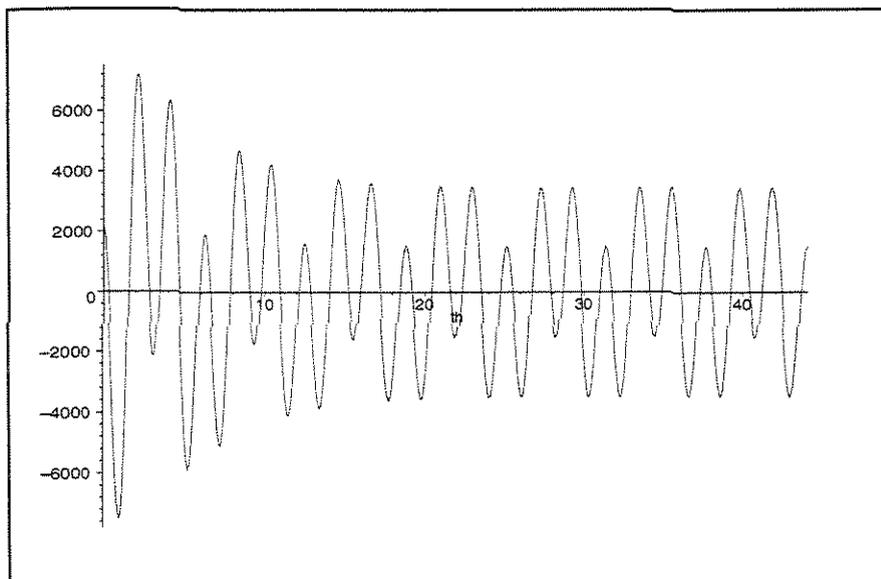


Figura 4.9: Integrandos em $B + C$ para $\Omega^2 = 3.01$

Para analisar o caso em que só estão presentes os multipólos de ordem ímpar (dipólo e octopólo), observemos o integrando de $B + C$ mostrado nas figuras 4.9 a 4.11. Mais uma vez, o integrando tende assintoticamente a uma função periódica em θ , de período 2π e com integral nula em intervalos de tamanho $2\pi j$, de modo que a integral definida pela soma dos termos B e C em 4.19 e 4.20 converge.

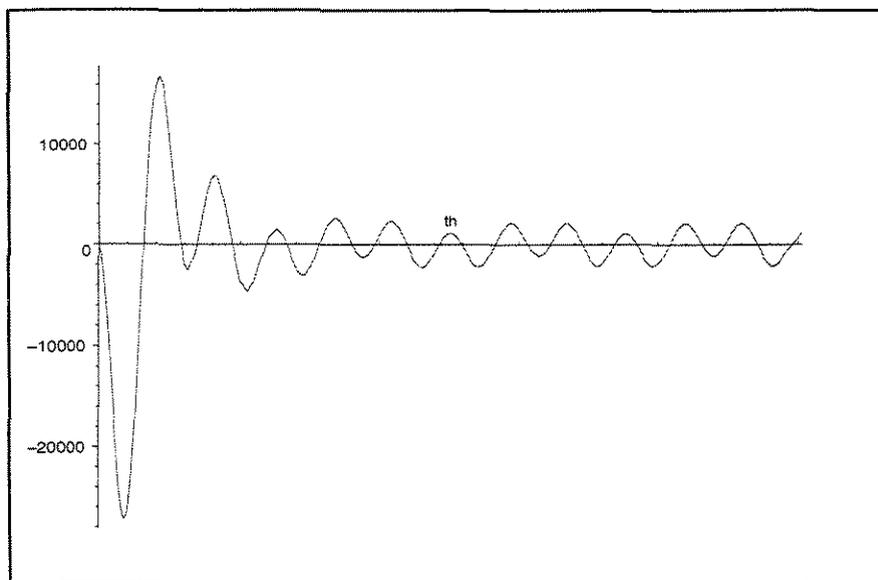


Figura 4.10: Integrando em $B + C$ para $\Omega^2 = 3.1$

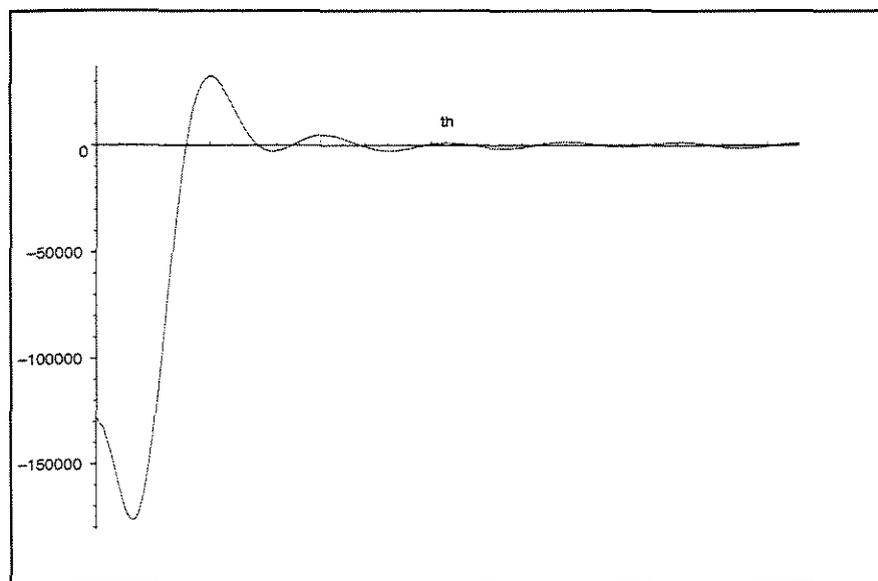


Figura 4.11: Integrando em $B + C$ para $\Omega^2 = 3.3$

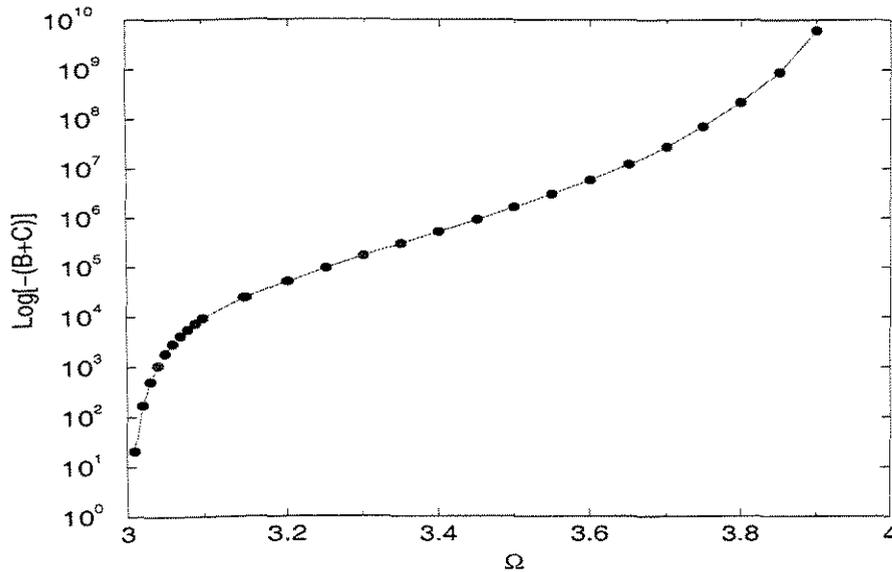


Figura 4.12: $\text{Log}[-(B+C)]$ em função de Ω^2

Calculamos numericamente o valor de $B + C$ como função de Ω^2 . Os resultados estão no gráfico linear-logarítmico na figura 4.12. Vemos que $B + C$ é estritamente negativo e também tende a zero quando $\Omega^2 \rightarrow 3$. A tabela abaixo apresenta os valores de $B + C$ e de seu erro estimado. Percebemos que o erro relativo é muito menor que no caso do termo A . Novamente, os erros são menores para $\Omega^2 > 3.05$.

Ω^2	$B+C$	$\Delta(B+C)$
3.01	-20.54	0.02
3.02	-170.668,	0.004
3.03	-511.621,	0.001
3.04	-1060.8502	0.0006
3.05	-1825.8606	0.0003

Vemos, assim, que tanto o multipólo de ordem par (quadrupólo) quanto os de ordem ímpar

(dipólo e octopólo) fazem com que a função de Melnikov tenha zeros não degenerados e, portanto, ambos são fonte de caos homoclínico.

Para finalizar esta seção, cumpre ressaltar que o cálculo numérico das integrais foi feito através do pacote *Maple*, que usa o método da quadratura de Clenshaw-Curtis.

4.4 Discussão

Como vimos na seção precedente, há a presença de pontos homoclínicos transversos nos mapas de Poincaré da dinâmica perturbada. Portanto, seguem-se todas as propriedades da dinâmica caótica extensamente discutidas no capítulo 2, especialmente na seção 2.1. Isto ocorre em todo intervalo de valores do momento angular para os quais existe a órbita homoclínica na situação não perturbada, a menos, possivelmente, de valores de Ω^2 muito próximos de 3.

Conseqüentemente, há partículas-teste movendo-se erratically na região entre r_{un} e r_{max} que irão cair no buraco negro movendo-se arbitrariamente próximas (no espaço de fase) de outras que não o farão. É, portanto, virtualmente impossível prever se uma tal partícula será ou não capturada pelo buraco negro.

Essa questão de escape e captura pelo buraco negro pode ser melhor entendida com uma análise da figura 4.13. Ela mostra a situação perturbada com cruzamentos homoclínicos. Como vemos, regiões do espaço de fase inicialmente correspondentes a partículas que cairiam no buraco negro na dinâmica integrável são mapeadas em regiões correspondentes a partículas que escapam. O efeito inverso também acontece, dele decorrendo a captura. Um estudo detalhado desse mecanismo de transporte no espaço de fase pode ser encontrado em [8].

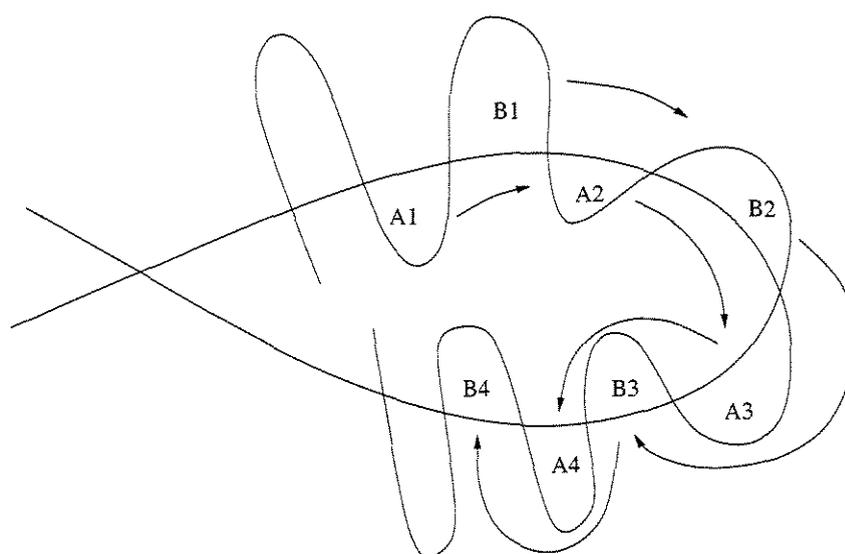


Figura 4.13: Escape e captura no espaço de fase

Conclusões

Nesta dissertação, estudamos o problema das geodésicas no espaço-tempo com um buraco negro central e com uma casca exterior de matéria cuja contribuição para a métrica supomos poder ser encarada como uma perturbação multipolar. Ademais, supomos que essa distribuição de matéria tivesse simetria axial, resultando, portanto, numa métrica de Weyl. Concentramo-nos nas geodésicas restritas a planos de ϕ constante (a dinâmica no plano equatorial, supondo-se simetria de reflexão em relação a esse plano, é integrável) e nos valemos de uma versão do *Método de Melnikov* para inferir a presença de pontos homoclínicos transversos na dinâmica resultante. Vimos que esta situação ocorre em todo o intervalo de valores do momento angular para os quais o sistema não perturbado admitia a órbita homoclínica.

Fisicamente, a restrição de nossa análise a partículas-teste movendo-se em planos de ϕ constante é, obviamente, um tanto quanto forte. Porém, é bastante razoável supor que a eliminação dessa restrição não altere a situação de caos nas geodésicas, por dois motivos: caos é a situação genérica em sistemas dinâmicos e essa situação mais geral é extremamente mais complicada.

Por fim, cabe ressaltar que, embora o caos homoclínico seja uma possibilidade puramente relativística, uma vez que o potencial efetivo newtoniano é quadrático, as conclusões a que

chegamos valem indistintamente quer o centro de atração seja um buraco negro quer não. Ou seja, o centro pode ter um raio maior que o de Schwarzschild (desde que menor que r_{un} !).

Referências Bibliográficas

- [1] Poincaré, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, (Gauthier-Villars, Paris, 1892)
- [2] Bombelli, L. & Calzetta, E., *Class. Quantum Grav.* **9** 2573 (1992)
- [3] Letelier, P. S. & Vieira, W. M., *Class. Quantum Grav.* **14** 1249 (1997)
- [4] Moeckel R., *Commun. Math. Phys.* **150**, 415 (1992)
- [5] Koiller, J., de Mello Neto, J. R. T. & Damião Soares, I. *Phys. Lett.* **110A** 260 (1985)
- [6] Vieira, W.M. & Letelier, P.S., “Relativistic and Newtonian Core-Shell Models: Analytical and Numerical Results” *Astroph. J.* **513** (1999) 383
- [7] Ott E, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge U. P., New York, 1994
- [8] Wiggins, S. 1990, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer, Berlin)
- [9] Holmes, P., “Poincaré, Celestial Mechanics, Dynamical Systems Theory and “Chaos”, Physics Reports 193, 137 (1990)
- [10] V. K. Melnikov, “Trans. Moscow Math. Soc.” 12, 1 (1963)

-
- [11] Arrowsmith D K & Place, C M, *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge U. P., New York, 1990
- [12] Letelier, P. S. & Motter, A. E., *Phys. Rev. E* **60** 3920 (1999)
- [13] Robinson C., *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **8***, 395 (1988)
- [14] Synge J, *Relativity: the General Theory*, North Holland, Amsterdam, 1960
- [15] Robertson H & Noonan T, *Relativity and Cosmology*, Saunders, London, 1968
- [16] Moon, P. & Spencer, D. (1988), *Field Theory Handbook* (Berlin: Springer)
- [17] Gueron E. & Letelier P. S., Stability and chaos around multipolar deformed bodies: A general relativistic approach, *astro-ph/0108042*
- [18] Ghez, A. M. et al., *Nature* **407** (6802) 349 (2000)
- [19] Goldstein H. 1980, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley)
- [20] Letelier, P. S. & Vieira, W. M., *Phys. Lett. A* **242** 7 (1998)