UNICAMP

Lonardo Rabelo

Homologia e Cohomologia de Variedades Flag Reais

Campinas

2012

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Lonardo Rabelo

Homologia e cohomologia de variedades flag reais

ORIENTADOR: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de doutor em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Lonardo Rabelo, e orientada pelo prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin.

Luiz A. B. San Martin

Luiz Antonio Barrera San Martin
Orientador

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Rabelo, Lonardo, 1983-
R112h Homologia e cohomologia de variedades flag reais / Lonardo Rabelo. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Espaços homogêneos. 2. Lie, Grupos de. 3. Topologia algébrica. 4. Lie, Álgebra de. 5. Teoria de homologia. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Homology and cohomology of real flag manifolds
Palavras-chave em inglês:
Homogeneous spaces
Lie groups
Algebraic topology
Lie algebras
Homology theory
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]
Ketty Abaroa de Rezende
Lucas Conque Seco Ferreira
Claudio Gorodski
Pedro Luiz Queiroz Pergher
Data de defesa: 20-08-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 20 de agosto de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof(a). Dr(a). KETTY ABAROA DE REZENDE

Prof(a). Dr(a). LUCAS CONQUE SECO FERREIRA

Prof(a). Dr(a). CLAUDIO GORODSKI

Prof(a). Dr(a). PEDRO LUIZ QUEIROZ PERGHER

Ao Deus Trino
Pai-Espírito Santo-Jesus:

"Em quem estão escondidos todos os tesouros da sabedoria e da ciência."

Apóstolo Paulo aos Colossensses 2.3

Agradecimentos

Dedico esta tese e agradeço a Deus, o Deus-trino: o Pai que me deu a vida no Filho Jesus por meio do Seu Santo Espírito.

Agradeço à FAPESP [1] pelo financiamento durante grande parte da minha formação acadêmica desde a iniciação científica, passando pelo mestrado e terminando no doutorado.

Agradeço às pessoas que comigo percorreram esta longa jornada de um pouco mais de 10 anos de muito esforço e dedicação.

- Ao meu orientador prof. San Martin. Pela elaboração de um projeto envolvendo duas áreas que muito me interessam na Matemática: topologia algébrica e teoria de Lie. Pelas constantes conversas de fato me orientaram. Pelo incentivo à pesquisa. Pela disposição em transmitir sua experiência e conhecimento.

- Aos membros da banca: profa. Ketty, prof. Lucas, prof. Claudio e prof. Pedro. Pelo aceite do convite e pela colaboração que fizeram para o meu trabalho. Ao Lucas, agradeço especialmente pelas aulas, pelas conversas e pela parceria. Muitas das idéias desta tese são suas e/ou foram consequência de suas sugestõees. À Ketty por quem tenho uma sincera gratidão pelo incentivo para continuar trilhando este caminho.

- À Tânia, ao Ednaldo e à Lívia. Pela paciência e pelo suporte nas questões burocráticas.

- Ao Thiago Ferraiol. Pela colaboração no primeiro contato com a teoria de álgebras de Lie semissimples. Aos colegas Luciana, Ariane, Janete, Adriano, Conrado, Laércio e Lino pelo períoodo de seminários que muito ajudaram na minha formação.

- Ao Tiago Macedo. Pela amizade. Por estar sempre disposto a me ajudar. Pelas longas conversas sobre matemática e sobre a vida.

- À minha esposa Vanessa, que ainda era minha noiva no início do doutorado. Pela alegria de estar, pelo apoio fundamental com palavras de incentivo que me deram força em todos os momentos. Por me ajudar a ver a vida através de seus olhos. Amo-te!

[1] O desenvolvimento deste trabalho teve o auxílio financeiro da FAPESP - Projeto 2008/04628-6.

- Aos meus pais: Rabelo e Zezé. Pela doação para que eu pudesse chegar até aqui. Pela perseverança em meio às dificuldades enfrentadas quando o filho está longe geograficamente. Pelo incentivo incondicional.

- Às minhas irmãs Dianie e Larissa. Ao meu cunhado Evandro. À minha vó Dalila (em memória). À minha tia Darcylia. Aos meus tios Paulo e Rosali. Aos meus parentes. Pelas palavras de carinho e pelas orações.

- Aos meus sogros Merivan e Ozias. Pelo cuidado comigo como de um filho. Ao Wagner e aos casais Simone e André, Rebeca e Rodrigo, Erenice e Merivaldo pelos momentos de descontração. Aos meus "avós" Zélia e Antonio pelo carinho.

- Aos casais Gissela e Daniel, Patrícia e Reinaldo. Pelo acolhimento recebido em Juiz de Fora.

- Aos pastores Marcelo e Héber. Ao grande amigo e prof. Paulo Velho. Ao missionário Zambelli. Pelo discipulado e pelo exemplo.

Resumo

Esta tese apresenta uma abordagem para o estudo da topologia das variedades *flag* reais. A homologia é obtida pela determinação do operador fronteira da homologia celular. Isto se dá a partir de uma parametrização explícita das células de Shubert que fornecem a estrutura celular destas variedades. Para o anel de cohomologia de uma variedade flag maximal, encontram-se os seus geradores como classes de Stiefel-Whitney de um fibrado de linha sobre a variedade flag.

Palavras-chave: Variedades flag reais, Células de Schubert, Homologia celular, Cohomologia.

Abstract

This thesis presents an approach for the study of topology of real flag manifolds. The homology is obtained by the determination of the boundary operator for the cellular homology. This follows from an explicit parametrization of the Schubert cells which gives a cellular structure for these manifolds. For the cohomology ring of a maximal flag manifold, its generators are found as Stiefel-Whitney classes of a line fiber bundle over the flag manifold.

Keywords: Real flag manifolds, Schubert cells, Cellular homology, Cohomology.

Sumário

Lista de Notações

Introdução

Uma variedade *flag* real é um espaço homogêneo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ onde G é um grupo de Lie semissimples não-compacto e P é um subgrupo parabólico. Exemplos clássicos são dados pelo espaço Projetivo e pela variedade Grassmanniana. Um resultado clássico no estudo da topologia das variedades *flag* reais é a decomposição de Bruhat que apresenta a variedade *flag* $\mathbb{F}_\Theta$ como uma união disjunta de células homeomorfas a um espaço $\mathbb{R}^n$ parametrizadas pelas classes laterais do grupo de Weyl da álgebra de Lie de G. Os fechos desta células - células de Schubert - fornecem uma estrutura celular CW e formam uma base para a $\mathbb{Z}_2$-homologia destes espaços e da $\mathbb{Z}$-homologia no caso das varidades *flag* complexas.

As origens desta decomposição remetem à década de 30 quando Ehresmman [24], a partir de uma decomposição celular para as Grassmannianas obtida por Schubert (meados de 1880), a estendeu para uma variedade *flag* qualquer do grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ afim de determinar suas propriedades topólogicas. É atribuída a Bruhat [8] que, posteriomente, na década de 50, generalizou esta construção para os grupos de Lie clássicos complexos. Na mesma época, uma outra abordagem para o estudo da topologia destes espaços surgiu no contexto das variedades *flag* complexas por Borel [4, 5], que identificou o anel de cohomologia de X como um anel quociente dos polinômios sobre a álgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G pelo ideal gerado por polinômios invariantes pelo grupo de Weyl de $\mathfrak{g}$. O artigo clássico de Berstein-Gel'fand-Gel'fand [2] estabeleceu a relação entre estas duas abordagens algébrica (de Borel) e geométrica (de Bruhat) das variedades *flag* complexas.

Já no contexto das variedades *flag* reais, resultados similares só foram obtidos a partir da década de 80. Duistermaat-Kolk-Varadajan [23] provaram que as células de Schubert formam uma base para a $\mathbb{Z}_2$-homologia e, já nos anos 90, Kocherlakota [33] descreveu a $\mathbb{Z}$-homologia. Vale ressaltar que, nestes dois trabalhos, o papel central foi desempenhado pela a teoria de Morse, dando sequência ao trabalho de Bott-Samelson [6], a partir da identificação das variedades *flag* reais a órbitas adjuntas de elementos "diagonais" para as quais existe uma função Morse-Bott natural e uma métrica (de Borel) em que a decomposição de Morse coincide com a decomposição de Bruhat. Em [33], a $\mathbb{Z}$-homologia é obtida a partir da construção do complexo de Morse-Witten. Mais tarde, Wiggerman [45] exibiu uma estrutura CW para o 2-esqueleto das variedades *flag* para descrever o grupo fundamental em termos de geradores e relações. Com relação à cohomologia, Casian-Stanton [12] estabeleceram conexões entre a cohomologia de variedades *flag* reais e a teoria de representação de dimensão infinita de álgebras semissimples reais e Casian-Kodama [13, 14] com a dinâmica de sistemas integráveis. E, mais recentemente, Patrão-Santos-San Martin-Seco [37] estabeleceram um critério para a orientabilidade das variedades *flag* reais.

A **primeira contribuição** desta tese é oferecer uma nova abordagem para o cálculo da homologia por intermédio da determinação explícita das funções características das células de Schubert. Elas fornecem uma estrutura celular CW para as variedades *flag* com as quais se obtém os operadores fronteira da homologia celular. Este ponto de vista preenche uma lacuna no estudo da topologia das variedades *flag*. Tal afirmação encontra-se em Duan-Zhao [21] que, no contexto das variedades *flag* complexas, afirmam *excetuando-se os espaços projetivos, muito pouco se sabe a respeito das funções características das variedades flag*. Foram obtidos os mesmos resultados que Kocherlakota [33] em que o operador fronteira da homologia tem coeficientes 0 ou ± 2. Entretanto, a visão celular tem a vantagem de apresentar a geometria de um modo muito mais evidente. Além disto, a fórmula apresentada neste trabalho é mais transparente pois leva em conta a escolha de decomposições minimais para os elementos do grupo de Weyl. Em [33], esta escolha não é considerada e, por isto, surgem sinais que aparecem com certa ambiguidade no complexo de Morse-Witten.

A maneira como são construídas as funções características se assemelha, de certo modo, com a técnica chamada de dessingularização das células de Schubert. Embora ela tenha sido obtida inicialmente no contexto das variedades *flag* complexas (veja Demazure, [16]), encontra-se também disponível para o caso real (veja [23], Gorodski-Thorbergsson [25]). Esta técnica permitiu que se obtivesse o anel de cohomologia das variedades complexas em termos do quociente de um anel de polinômios. Por enquanto, a parametrização das células de Schubert ainda não permitiu, até agora, que se obtivesse um resultado deste tipo. Vale ressaltar que ainda não se conhece uma formulação análoga para o anel de cohomologia das variedades *flag* reais, principalmente, considerando-se coeficientes inteiros. Neste sentido, há outros dois trabalhos que tratam deste problema com diferentes abordagens. O artigo de Biss-Guillemin-Holm [3], no contexto da cohomologia equivariante, em que as variedades *flag* reais são obtidas como conjunto de pontos fixos de involuções anti-simpléticas de variedades *flag* complexas e a tese de Mare [34], em que as variedades *flag* aparecem como órbitas isotrópicas constituindo-se exemplos de variedades isoparamétricas.

A **segunda contribuição** desta tese consiste em apresentar um tratamento clássico para a cohomologia das variedades *flag* reais no mesmo estilo que é feito no caso das variedades *flag* complexas e que, segundo consta, ainda não se encontra na literatura. Neste caso, faz-se necessário trabalhar com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ de modo que as células de Schubert formem uma base para a homologia. Além disto, restringe-se às álgebras que são formas reais normais para que se utilize a teoria de representações de álgebras semissimples reais. Os geradores do anel de cohomologia são obtidos como as classes duais às células de Schubert de dimensão um definidas pelas raízes simples e são interpretados como classes de Stiefel-Whitney de certos fibrados sobre as variedades *flag* reais. Sob este ponto de vista, estuda-se a ação do grupo de Weyl nos geradores da cohomologia. A expectativa é que se obtenham invariantes por esta ação, entretanto, este objetivo ainda não foi alcançado por meio dos resultados obtidos. Apenas um primeiro avanço foi feito na direção de se explorar o produto no anel de cohomologia pela obtenção de uma expressão para o quadrado dos geradores.

Por fim, uma **característica** da tese é a apresentação de exemplos tanto para o caso do grupo especial linear $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, como já é de praxe, quanto para o grupo simplético $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$. Há três capítulos dedicados exclusivamente ao estudo de exemplos dos grupos de homologia: um capítulo é dedicado ao estudo dos grupos de homologia em casos de dimensão baixa e outros dois capítulos são dedicados ao estudo dos grupos de homologia das variedades Grassmanianas reais e simpléticas, respectivamente. Os resultados sobre o anel de cohomologia também são, sempre que possível, acompanhados de exemplos.

0.1 Principais contribuições e Expectativas

A lista abaixo contempla de maneira concisa as contribuições específicas deste trabalho.

- A descrição das funções características para as células de Schubert de uma variedade *flag*.
- O ponto de vista celular para o cálculo da homologia das variedades *flag* reais.
- Um exemplo de não-sobrejetividade da aplicação induzida pela projeção canônica da variedade *flag* maximal sobre uma variedade *flag* parcial na $\mathbb{Z}$-homologia.
- A descrição de uma nova decomposição irredutível para os representantes minimais das células de Schubert das Grassmannianas simpléticas.
- O cálculo detalhado do operador fronteira da homologia da Grassmanniana Lagrangeana.
- A determinação dos geradores da cohomologia como classes de Stiefel-Whitney de fibrados de linha sobre variedades *flag* reais.
- A expressão para o quadrado dos geradores na cohomologia (para alguns casos particulares).

Espera-se que, a partir deste trabalho, as seguintes questões possam ser parcial ou totalmente respondidas.

- Determinar o operador fronteira da homologia celular de todas as Grassmannianas simpléticas a partir da descrição da decomposição minimal para os representantes minimais dos elementos do grupo de Weyl que parametrizam as células de Schubert.

- Determinar as decomposições minimais para os representantes minimais das variedades *flag* dos outros grupos de Lie clássicos que sejam adequadas para o cálculo da homologia celular.

- Encontrar uma fórmula análoga à clássica fórmula de Chevalley (veja Pragacz [40], Teorema 2) no contexto das variedades *flag* complexas que determina qual é o produto cup de um gerador da cohomologia com uma classe que representa uma célula de Schubert. Esta questão está diretamente relacionada à questão de se encontrar uma interpretação análoga para o anel de cohomologia das variedades *flag* reais em termos de um anel quociente.

0.2 Estrutura de tese

A tese é composta por sete capítulos. O primeiro deles aborda a questão da parametrização das células de Schubert. O segundo capítulo apresenta o cálculo do operador fronteira da homologia celular e é seguido por três capítulos dedicados apenas aos exemplos. Os últimos dois capítulos se concentram no estudo da cohomologia.

Segue agora uma descrição detalhada do conteúdo de cada capítulo.

Capítulo 1

A primeira seção é dedicada aos preliminares da teoria de Lie que são utilizadas ao longo de toda a tese. Em particular, para um grupo de Lie real semissimples não-compacto com uma decomposição de Iwasawa $G = KAN$, a decomposição de Bruhat exibe a variedade *flag* real $\mathbb{F}_\Theta$ como uma união disjunta de N-órbitas

$$\mathbb{F}_\Theta = \coprod_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} N \cdot wb_\Theta$$

em que b_Θ é a origem de $\mathbb{F}_\Theta$, parametrizadas pelas classes $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$ do grupo de Weyl $\mathcal{W}$. Os fechos das células de Bruhat $N \cdot wb_\Theta$ são as células de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta$. É conhecido o fato de que estas células fornecem uma estrutura celular para as variedades *flag*.

O primeiro capítulo fornece uma parametrização para as células de Schubert $\mathcal{S}_w$ de uma variedade *flag* maximal por funções definidas em cubos $[0, \pi]^d \subset \mathbb{R}^d$. Dada uma decomposição minimal de $w = r_1 \cdots r_n \in \mathcal{W}$, a Proposição 1.2.3 descreve a célula de Schubert $\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0$ onde os subgrupos compactos $K_i \subset K$ são definidos a partir da subálgebra de posto um relativa à raiz $\alpha \in \Sigma$. Através de aplicações exponenciais, os subgrupos K_i podem ser vistos a partir de funções definidas em bolas B^{d_i} onde d_i é a multiplicidade da raiz α_i. Estas funções, por sua vez, permitem construir funções características $\Phi_w : B^d \to \mathcal{S}_w$ para as células de Schubert (Proposição 1.2.9) onde $B^d = B^{d_1} \times \cdots \times B^{d_n}$ é uma bola em $\mathbb{R}^d$, $d = d_1 + \cdots + d_n$.

Capítulo 2

Aqui se encontra um dos resultado fundamentais deste trabalho e que torna este capítulo um dos mais importantes da tese. Trata-se da fórmula para o operador fronteira da homologia celular de uma variedade *flag*. Inicialmente, obtém-se o resultado para o caso maximal. Os resultados para as variedades *flag* parciais são obtidos por projeção a partir da variedade *flag* maximal.

Dada uma célula de Schubert $\mathcal{S}_w$ em $\mathbb{F}$, o operador fronteira possui coeficientes em relação às células de Schubert que possuem dimensão um a menos que $\mathcal{S}_w$. Pela Proposição 2.1.1, se $w = r_1 \cdots r_n$ é uma decomposição minimal de $w \in \mathcal{W}$ isto significa que

$$\partial \mathcal{S}_w = \sum_{w'} c(w, w') \mathcal{S}_{w'}$$

quando $w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$ e $d_i = 1$. Neste caso, Φ_w é definida em $B^{d-1} \times [0, \pi]$ e o coeficiente $c(w, w')$ é a soma dos graus das funções de colagem, isto é, das restrições de Φ_w a $B^{d-1} \times \{0\}$ e $B^{d-1} \times \{\pi\}$ (veja o Teorema 2.1.4). Isto significa que o coeficiente $c(w, w') = 0$ ou ± 2 e, portanto, as células de Schubert formam uma base para a $\mathbb{Z}_2$-homologia. Este resultado pode ser ainda refinado para se obter a fórmula (2.4) que reflete as diferentes escolhas de decomposições minimais para os elementos w, w' recobrindo, até com mais detalhes, o resultado já conhecido ([33], Teorema A).

Para o cálculo da homologia de uma variedade *flag* parcial $\mathbb{F}_\Theta$, observa-se que deve se fazer uma escolha correta para um representante numa classe lateral de $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$ de dimensão minimal. Isto é feito na Proposição 2.2.1 em que se prova que, para uma dada célula de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta$, $w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$, existe uma única célula de Schubert $\mathcal{S}_w$, $w \in \mathcal{W}$, que possui a mesma dimensão que $\mathcal{S}_w^\Theta$. A homologia é então computada a partir dos coeficientes $c([w], [w'])$ igualmente calculados na variedade *flag* maximal em que $[w], [w']$ são os representantes minimais.

Capítulo 3

Neste capítulo são desenvolvidos exemplos de dimensão baixa que servem de ilustração para a teoria desenvolvida nos dois primeiros capítulos. A decomposição de Bruhat e os grupos da $\mathbb{Z}$-homologia de todas as variedades *flag* dos grupos $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ e $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ de posto 2, a saber, o espaço projetivo, a variedade Grassmanniana e a variedade *flag* maximal, são obtidos. Destaca-se a seção 3.2.2 que apresenta detalhadamente o cálculo dos graus das funções de colagem na determinação dos coeficientes $c(w, w')$ enquanto os outros exemplos são aplicações diretas da fórmula (2.4).

Capítulo 4

Um exemplo clássico de uma variedade *flag* real é o caso das variedades Grassmannianas reais $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ que são variedades *flag* minimais de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Neste capítulo, é feito o cálculo dos grupos da $\mathbb{Z}$-homologia destas variedades pela determinação do operador fronteira da homologia celular em uma dada célula de Schubert. Uma das dificuldades para este cálculo é ter em mãos uma boa decomposição irredutível dos representantes minimais das células de Schubert. Neste caso, este obstáculo é superado utilizando-se uma decomposição minimal obtida por Dheodar [17]. Considere $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ como um subconjunto do espaço projetivo $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ e tome os seguintes elementos

$$e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \qquad , \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n.$$

A origem é $e_0 = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ e as células de Schubert são $\mathcal{S}_I = \mathrm{fe}N \cdot e_I$ que têm dimensão $(i_1 - 1) + \cdots + (i_k - 1) = i_1 + \cdots + i_k - \frac{k(k+1)}{2}$. Para cada multi-índice $I = (i_1, \ldots, i_k)$, existe um único elemento de comprimento mínimo $w \in \mathcal{W}$ tal que $w_I e_0 = e_I$. Denote por $r_i = (i, i+1)$ a reflexão em relação a raiz α_i. Dado um multi-índice I, para cada $j = 1, \ldots, k$, considere a permutação (j, i_j) que leva o índice j em i_j e que admite decomposição minimal

$$\eta_{I,j} = (j, i_j) = r_{i_j - 1} \cdots r_{j+1} r_j.$$

Segue que

$$w_I = (1, i_1) \cdots (k, i_k) = \eta_{I,1} \cdots \eta_{I,k}.$$

é a decomposição minimal do representante minimal corresponde ao multi-índice I.

Este capítulo encerra abordando a seguinte questão: se $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ é a projeção canônica da variedade *flag* maximal sobre a variedade *flag* parcial, que é sobrejetora, então a aplicação $\pi_{\Theta *} : H_*(\mathbb{F}) \to H_*(\mathbb{F}_\Theta)$ também é sobrejetora? No caso da homologia sobre $\mathbb{Z}_2$ a resposta é positiva uma vez que os operadores fronteira são todos nulos. Entretanto, a seção 4.3 mostra, pela análise do exemplo da projeção da variedade *flag* maximal de $\mathrm{Sl}(5, \mathbb{R})$ sobre a variedade Grassmanniana $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^5\right)$, que $\pi_{\Theta *}$ nem sempre é sobrejetora com coeficientes inteiros.

Capítulo 5

Outra classe de variedades clássicas que também são variedades *flag* reais são as Grassmannianas Lagrangeanas que, na verdade, correspondem a um caso particular das Grassmannianas simpléticas definidas como variedades *flag* minimais do grupo $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$. Neste capítulo é feito o cálculo dos grupos da $\mathbb{Z}$-homologia das Grassmannianas Lagrangeanas pela determinação do operador fronteira da homologia celular em uma dada célula de Schubert. Isto foi possível a partir da obtenção de uma nova decomposição irredutível para os representantes minimais das células de Schubert. Seja $r_i = r_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \Sigma$, a reflexão em torno de uma raiz simples. Defina, para cada $1 \leq i \leq n$, os elementos

$$s_i = r_{n-i+1} \cdots r_n \in \mathcal{W}.$$

Os representantes minimais das células de Schubert $\mathcal{S}_I$ das Grassmannianas Lagrangeanas são parametrizados por todos os multi-índices da forma

$$I = (i_1, \ldots, i_k) \quad , \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \quad \text{e} \quad 0 \leq k \leq n$$

(o caso $k = 0$ corresponde à identidade) e, são dados por

$$w_I = s_{i_1} \ldots s_{i_k}.$$

Na verdade, esta decomposição é obtida como um caso particular de variedade Grassmanniana simplética. A seção 5.2 é dedicada à determinação de uma decomposição irredutível para os representantes minimais de todas as Grassmannianas simpléticas.

Capítulo 6

Além do capítulo 2, aqui também se encontra um dos capítulos mais importantes da tese ao abordar o estudo da cohomologia das variedades *flag* reais. Uma excelente ferramenta para se estudar a cohomologia no contexto de fibrados $F \hookrightarrow E \to B$ é o teorema de Leray-Hirsch (Hatcher [27], Teorema 4D) cujo conteúdo afirma que $H^*(E; R)$ é um $H^*(B; R)$-módulo livre desde que, para cada fibra F, a inclusão da fibra $F \hookrightarrow E$ induza um homomorfismo sobrejetor e $H^n(F; R)$ seja um R-módulo livre de posto finito para cada n. A primeira parte deste capítulo mostra como este resultado pode ser aplicado no contexto das variedades *flag* reduzindo-se ao caso em que as células de Schubert formam uma base para a homologia. O fibrado em questão é obtido pela projeção entre diferentes variedades *flag*. A partir disto, restringindo a fibrados definidos a partir das células de Schubert, obtém-se que o anel de cohomologia de uma variedade *flag* maximal $H^*(\mathbb{F}, \mathbb{Z}_2)$ é gerado por produtos $\sigma_{\alpha_1} \smile \cdots \smile \sigma_{\alpha_k}$ (Proposição 6.1.6) onde cada σ_α, $\alpha \in \Sigma$, é a classe de cohomologia dual à célula de Schubert $\mathcal{S}_{r_\alpha}$ ($\smile$ denota o produto cup).

Quando $\mathbb{F}_\Theta$ é a variedade *flag* de uma forma real normal $\mathfrak{g}$ e ρ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$ em V de peso máximo μ, $\mathbb{F}_\Theta$ pode ser obtida como uma G-órbita do vetor primitivo v_μ no espaço projetivo $\mathbb{P}V_\mu$ de ρ. Em particular, a variedade *flag* minimal $\mathbb{F}_{\Theta_j}$, $\Theta_j = \Sigma \setminus \{\alpha_j\}$, é uma G-órbita do vetor primitivo no espaço projetivo $\mathbb{P}V_{\mu_j}$ da representação básica μ_j associada a raiz simples $\alpha_j \in \Sigma$ (Corolário 6.2.4).

Na segunda parte deste capítulo, apresenta-se uma interpretação para os geradores da cohomologia de $\mathbb{F}$ em termos da representação de $\mathfrak{g}$. Tome ρ_j a composição da representação básica μ_j com a projeção da variedade *flag* maximal $\mathbb{F}$ sobre a minimal $\mathbb{F}_{\Theta_j}$. A partir de ρ_j, as classes σ_{α_j} são vistas como o pull-back do gerador da cohomologia z_j de $\mathbb{P}V_{\mu_j}$, isto é, $\rho_j^*(z_j) = \sigma_{\alpha_j}$. Além disto, o pull-back do fibrado de linha sobre o espaço projetivo da representação é um fibrado de linha sobre $\mathbb{F}$ em que as classes σ_{α_j} correspondem às primeiras classes de Stiefel-Whitney (Proposição 6.3.2). Isto fornece uma interpretação geométrica interessante para estes geradores.

Capítulo 7

A tese encerra explorando algumas consequências dos resultados obtidos no capítulo 6 na expectativa de que os resultados obtidos ainda não estejam em sua melhor forma. A primeira parte dedica-se ao estudo da ação do grupo de Weyl $\mathcal{W}$ nos geradores da cohomologia a partir da ação à direita de $\mathcal{W}$ sobre $\mathbb{F}$. Verifica-se que a ação, quando descrita na base dos geradores, coincide com ação de $\mathcal{W}$ sobre o reticulado de pesos da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ na base dos pesos básicos (Corolário 7.1.7).

O último resultado da tese consiste num primeiro passo dado no sentido de se entender os produtos em $H^*(\mathbb{F}, \mathbb{Z}_2)$. Determina-se, para os casos em que há ligações simples e duplas entre as raízes, o quadrado dos geradores σ_α^2 em termos das classes duais às células de Schubert de dimensão 2 (Teorema 7.2.5). Mais uma vez, a representação de $\mathfrak{g}$ é quem desempenha um papel central para a obtenção deste resultado.

Capítulo 1

Células de Schubert

O primeiro capítulo desta tese concentra-se na parametrização das células de Schubert que equipam as variedades *flag* de uma estrutura celular e servem como base para o cálculo da homologia celular assim como desempenham um papel importante na determinação de algumas propriedades cohomológicas destes espaços. Isto justifica a importância deste capítulo assim como uma dedicação exclusiva a este assunto. A primeira parte é dedicada às questões preliminares da tese enquanto a segunda parte explora a parametrização das células de Schubert em uma variedade *flag* maximal.

1.1 Preliminares

As variedades *flag* são definidas como espaços homogêneos G/P onde G é um grupo de Lie semissimples não-compacto e P é um subgrupo parabólico de G. Nesta seção, apresentamos a notação que será utilizada na tese referente ao tratamento destes grupos e variedades. Em geral, os resultados serão enunciados sem que faça menção explícita à fonte. Tratam-se de resultados clássicos e podem ser encontrados nos livros Knapp [32], Warner [44], San Martin [42], Humphreys [30], Helgason [28], Patrão-Seco [39] e nos artigos [23], Seco [43] e Patrão-San Martin-Seco [38]. Somente em alguns casos vamos fazer referências específicas.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real semissimples não-compacta. As variedades *flag* para os vários grupos G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ são os mesmos. Por causa disto vamos sempre tomar G como a componente da identidade do grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$. Deste modo, o centro de G é trivial.

Decomposição de Cartan

Uma involução de Cartan de $\mathfrak{g}$ é dada por um automorfismo θ de $\mathfrak{g}$ que satisfaz $\theta^2 = 1$ e tal que a forma bilinear de $\mathfrak{g}$ definida por

$$B_\theta(X, Y) = \langle X, \theta Y \rangle$$

é positiva-definida em $\mathfrak{g}$. Fixada um involução de Cartan θ, $\mathfrak{g}$ se decompõe como $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ onde $\mathfrak{k}$ é o autoespaço de θ correspondente ao autovalor $+1$ enquanto $\mathfrak{s}$ é o autoespaço de θ correspondente ao autovalor -1. Esta é a decomposição de Cartan da álgebra $\mathfrak{g}$ com respeito a θ. Estes autoespaços satisfazem $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ e $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}$ e, portanto, $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Seja K o subgrupo conexo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Considerando G a componente da identidade do grupo de automorfismos de $\mathfrak{g}$, tem-se que K é subgrupo compacto maximal e a aplicação

$$K \times \mathfrak{s} \to \ (k, X) \mapsto k \exp(X)$$

é um difeomorfismo e fornece a decomposição de Cartan do grupo G.

Decomposição de Iwasawa

A partir de uma decomposição de Cartan de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ correspondente a involução de Cartan θ, tome $\mathfrak{a}$ uma subálgebra abeliana maximal contida em $\mathfrak{s}$. Ela desempenha em $\mathfrak{g}$ o papel que a subálgebra de Cartan desempenha nas álgebras semissimples complexas decompondo a álgebra $\mathfrak{g}$ como soma direta de autoespaços associados a funcionais definidos em $\mathfrak{a}^*$. Os funcionais não-nulos tais que os auto-espaços são não-vazios são chamados de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ e o conjunto destas raízes será denotado por Π de modo que $\mathfrak{g}$ se decompõe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$$

O auto-espaço $\mathfrak{g}_0$ por sua vez se decompõe em $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, onde $\mathfrak{m}$ é centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$. Seja $\Sigma \subset \Pi$ um sistema simples de raízes fixado. Denote por $\Pi^{\pm}$, respectivamente, o conjunto da raízes positivas e negativas e por $\mathfrak{a}^+$ a câmara de Weyl

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) > 0 \text{ para toda } \alpha \in \Sigma\}.$$

Seja $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ a soma direta dos auto-espaços correspondentes às raízes positivas. A decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$ é dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

Sejam A e N os subgrupos conexos cujas álgebras de Lie são $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}$ respectivamente. Segue que

$$K \times A \times N \to G\,,\ (k, h, n) \mapsto khn,$$

é um difeomorfismo e fornece a chamada de decomposição de Iwasawa do grupo G.

Formas reais normais

Uma subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é dita uma subálgebra de Cartan se o seu complexificado $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ é uma subálgebra de Cartan do complexificado $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$. Em geral, para qualquer escolha de uma álgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{s}$, existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ que contém $\mathfrak{a}$. Especificamente, $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}$, onde $\mathfrak{t}$ é um subespaço abeliano maximal de $\mathfrak{m}$. Se $\mathfrak{m} = 0$ então $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Neste caso, dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma forma real normal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Subgrupos Parabólicos

Uma subálgebra parabólica minimal de $\mathfrak{g}$ é dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Seja P o subgrupo minimal parabólico com álgebra de Lie $\mathfrak{p}$ a qual é o normalizador de $\mathfrak{p}$ em G.

Seja $\Theta \subset \Sigma$ um subconjunto de raízes simples. Denotamos por $\langle\Theta\rangle$ as raízes de Π que são combinações lineares de raízes em Θ e por $\langle\Theta\rangle^{\pm} = \langle\Theta\rangle \cap \Pi^{\pm}$.

Associados a $\Theta \subset \Sigma$ existem variados grupos e álgebras. Denotamos por $\mathfrak{g}(\Theta)$ a álgebra de Lie semissimples gerada por $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, $\alpha \in \Theta$. Seja $G(\Theta)$ o grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\Theta)$. Seja $\mathfrak{n}^{-}(\Theta)$ a subálgebra gerada pelos auto-espaços $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\alpha \in \Theta$. A subálgebra parabólica de tipo Θ é dada por

$$\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{n}^{-}(\Theta) \oplus \mathfrak{p}.$$

Sejam $\mathfrak{a}_{\Theta} = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) = 0, \alpha \in \Theta\}$ e $\mathfrak{k}_{\Theta}$ o centralizador de $\mathfrak{a}_{\Theta}$ em $\mathfrak{k}$. A decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{p}_{\Theta}$ é dada por

$$\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{k}_{\Theta} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}.$$

O normalizador P_{Θ} de $\mathfrak{p}_{\Theta}$ em G é um subgrupo parabólico padrão que contém o subgrupo parabólico minimal P. Seja K_{Θ} o centralizador de $\mathfrak{a}_{\Theta}$ em K. A decomposição de Iwasawa de P_{Θ} é dada por

$$P_{\Theta} = K_{\Theta} A N.$$

Em particular, $\mathfrak{p}_{\emptyset} = \mathfrak{p}$ e $P_{\emptyset} = P$. Denote por $M = K_{\emptyset}$ o centralizador de $\mathfrak{a}$ em K. Segue que a decomposição de Iwasawa de P é dada por

$$P = MAN.$$

Variedades *Flag*

As variedades *flag* são definidas como o espaço homogêneo de G pelos subgrupos parabólicos acima definidos. Chamamos $\mathbb{F} = G/P$ a variedade *flag* maximal de G e denotamos por b_0 o ponto base $1 \cdot P$ em G/P. A variedade *flag* correspondente $\mathbb{F}_{\Theta} = G/P_{\Theta}$ é chamada de variedade *flag* parcial de G ou variedade *flag* de tipo Θ. Denotamos por b_{Θ} o ponto base $1 \cdot P_{\Theta}$ em G/P_{Θ}.

Existem maneiras equivalentes para se definir as variedades *flag* reais e que são úteis dependendo do contexto em que se encontram. Vamos listar algumas delas abaixo.

1. Órbitas em Grassmannianas.

   Seja $k = \dim \mathfrak{p}_\Theta$ e denote por $\mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g})$ o conjunto dos subespaços vetoriais de dimensão k em $\mathfrak{g}$. O grupo G age em $\mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g})$ pela representação adjunta, isto é, $G \times \mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g})$, $(g, V) \mapsto \mathrm{Ad}(g)V$. Por esta ação, G age transitivamente no conjunto $\mathcal{P}_\Theta$ das subálgebras parabólicas de tipo Θ, pois duas delas são conjugadas entre si. Segue que $\mathcal{P}_\Theta$ se identifica ao espaço homogêneo de G pelo subgrupo de isotropia desta ação em $\mathcal{P}_\Theta$. Por outro lado, a isotropia de $\mathfrak{p}_\Theta$ é o seu normalizador, isto é, o subgrupo parabólico P_Θ. Portanto, G/P_Θ se identifica à órbita de $\mathfrak{p}_\Theta$ em $\mathrm{Gr}_k(\mathfrak{g})$ por esta ação.

2. Órbitas em $\mathfrak{s}$.

   Para qualquer subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, existe um elemento (não único) $H_\Theta \in \mathrm{fe}\,\mathfrak{a}^+$ tal que

   $$\Theta = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H_\Theta) = 0\}.$$

   O subgrupo parabólico correspondente se decompõe como $P_\Theta = K_\Theta AN$ onde $K_\Theta = K_{H_\Theta}$ é igual ao centralizador de H_Θ em K.

   Inicialmente, observe que K age transitivamente em $\mathbb{F}_\Theta$ que se identifica ao quociente de K pelo subgrupo de isotropia que é $K \cap P_\Theta = K_\Theta$. Agora, considere a órbita de $H_\Theta \in \mathfrak{s}$ por K pela ação adjunta, lembrando que $\mathfrak{s}$ é invariante por K. A isotropia desta ação é exatamente K_Θ e, portanto, esta órbita se identifica ao espaço homogêneo K/K_Θ que, por sua vez, se identifica à variedade *flag* $\mathbb{F}_\Theta$. Portanto, $\mathbb{F}_\Theta$ pode ser imerso em $\mathfrak{s}$ como uma órbita por $\mathrm{Ad}K$ de H_Θ. As variedades *flag* maximais ocorrem pela escolha de elementos $H \in \mathfrak{a}$ regulares, isto é, $\alpha(H) = 0$ para toda raiz $\alpha \in \Sigma$. Em vista desta realização, a variedade *flag* pode também ser denotada por $\mathbb{F}_{H_\Theta}$.

   Associada a esta realização $\mathbb{F}_\Theta = K/K_\Theta = \mathrm{Ad}K(H)$, $H \in \mathfrak{s}$, podemos citar ainda uma outra caracterização para as variedades *flag* que está diretamente relacionada com o contexto das variedades *flag* complexas. Seja U o subgrupo de Lie compacto $G_\mathbb{C}$ cuja álgebra de Lie é dada por $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{s}$. Segue que $\mathrm{Ad}K(H)$ pode ser obtida como o conjunto dos pontos fixos de uma involução anti-simplética, que é a própria conjugaçao complexa em $G_\mathbb{C}$, da órbita adjunta $\mathrm{Ad}U(iH_\Theta)$ (veja mais detalhes em Duistermaat [22]).

3. Órbitas no espaço projetivo de uma representação de $\mathfrak{g}$.

   Seja ρ uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial V com peso máximo μ_ρ. Vamos denotar por $V_\mu = V_{\mu_\rho}$ o auto-espaço associado ao peso máximo μ_ρ e tome $v = v_{\mu_\rho}$ o vetor primitivo de μ_ρ (auto-vetor associado ao peso máximo). É possível mostrar que o subgrupo de isotropia de V_ρ é um subgrupo parabólico de G. Mais especificamente, a órbita $G \cdot [v]$ no espaço projetivo $\mathbb{P}(V_{\mu_\rho})$ é uma variedade *flag* G/P_Θ, onde $\Theta = \{\alpha \in \Sigma : \langle \alpha, \rho \rangle = 0\}$ (veja os detalhes no capítulo 6, seção 6.2.2).

Grupos de Weyl

O grupo de Weyl $\mathcal{W}$ associado à àlgebra $\mathfrak{a}$ é o grupo finito gerado pelas reflexões r_α em torno dos hiperplanos definidos por $\alpha = 0$ contidos em $\mathfrak{a}$, $\alpha \in \Sigma$. Vamos chamar estes geradores do grupo de Weyl $\mathcal{W}$ de reflexões simples. Uma maneira alternativa de se obter o grupo de Weyl é através do quociente M^*/M onde M^* é o normalizador de $\mathfrak{a}$ in K. Vamos sempre utilizar a mesma letra para denotar um representante de w em M^*.

Expressando os elementos do grupo de Weyl $\mathcal{W}$ em termos de produtos de reflexões simples, o comprimento $\ell(w)$ de $w \in \mathcal{W}$, é o número de reflexões simples em qualquer decomposição minimal de w. Seja $\Pi_w = \Pi^+ \cap w\Pi^-$, o conjunto das raízes positivas levadas em raízes negativas por w^{-1}. Segue que $\ell(w)$ é igual à cardinalidade de Π_w. Explicitamente, se $w = r_1 \cdots r_n$, onde $r_i = r_{\alpha_i}$, é uma decomposição minimal de w então

$$\Pi_w = \{\alpha_1, r_1\alpha_2, \ldots, r_1 \cdots r_{n-1}\alpha_n\} \tag{1.1}$$

Além disto, se $w \in \mathcal{W}$ e $\alpha \in \Sigma$ é uma raiz simples, vale a seguinte propriedade

$$\begin{aligned} \ell(wr_\alpha) = \ell(w) + 1 \quad &\text{se, e só se,} \quad w\alpha > 0 \text{ e} \\ \ell(wr_\alpha) = \ell(w) - 1 \quad &\text{se, e só se,} \quad w\alpha < 0. \end{aligned}$$

A ordem de Bruhat-Chevalley

Existem duas ordens equivalentes entre elementos no grupo de Weyl $\mathcal{W}$.

1. Temos que $w_1 \leq w$ se e somente se dada uma decomposição minimal de $w = r_1 \cdots r_n$ então $w_1 = r_{i_1} \cdots r_{i_k}$ para alguns índices $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

2. Dois elementos w_1 e w_2 são ditos conexos, $w_1 \to w_2$, se $\ell(w_1) < \ell(w_2)$ e existe uma raíz α (não necessariamente simples) tal que $w_1 r_\alpha = w_2$. Temos que $w_1 < w$ se existem $u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{W}$ com
$$w_1 \to u_1 \to \cdots \to u_k \to w_2.$$
Pode ocorrer que $w_1 \to w_2$ com $\ell(w_1) + 1 = \ell(w_2)$ mas não exista uma raiz simples com $w_1 r_\alpha = w_2$.

   A definição pode ser alterada tomando-se a multiplicação à esquerda $r_\alpha w_1 = w_2$ pois $r_\alpha w_1 = w_1(w_1^{-1} r_\alpha w_1) = w_1 r_\beta$ com $\beta = w^{-1}\alpha$.

O seguinte cálculo apresenta a equivalência entre estas definições. Se $w = r_1 \cdots r_n$ e $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$ então $w = r_\beta w'$, onde $\beta = r_1 \cdots r_{i-1}\alpha_i$. De fato,

$$(r_1 \cdots r_{i-1})r_i(r_1 \cdots r_{i-1})^{-1} = r_{r_1 \cdots r_{i-1}\alpha_i} = r_\beta$$

e ao multiplicar à direita por $r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$, obtemos que $w = r_\beta w'$.

Existe um único elemento $w_0 \in \mathcal{W}$ tal que $w_0 \Pi^+ = \Pi^-$ o qual é chamado de involução principal e é o elemento maximal em relação à ordem de Bruhat-Chevalley.

Representantes Minimais

Para o conjunto $\Theta \subset \Sigma$, está definido o subgrupo $\mathcal{W}_\Theta$ de $\mathcal{W}$ que age trivialmente em $\mathfrak{a}_\Theta$. Alternativamente, $\mathcal{W}_\Theta$ é dado pelo grupo de Weyl gerado pelas reflexões com respeito às raízes $\alpha \in \Theta$.

Define-se também o subconjunto $\mathcal{W}^\Theta$ de $\mathcal{W}$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\Theta &= \{w \in \mathcal{W} : \ell(wr_\alpha) = \ell(w) + 1\,,\, \alpha \in \Theta\} \\ &= \{w \in \mathcal{W} : w(\Theta) \subset \Pi^+\}. \end{aligned}$$

Segue que $\mathcal{W}^\Theta$ é chamado de o conjunto dos representantes minimais das classes laterais de $\mathcal{W}_\Theta$ em $\mathcal{W}$ pois cada classe $w\mathcal{W}_\Theta$ contém um único elemento $w^\Theta \in \mathcal{W}^\Theta$ de comprimento minimal. Tal elemento w^Θ também é caracterizado por uma das seguintes afirmações que são equivalentes

1. $\ell(w^\Theta \sigma) = \ell(w^\Theta) + \ell(\sigma)$, para todo $\sigma \in \mathcal{W}_\Theta$.
2. $\Pi^- \cap w^\Theta \langle\Theta\rangle^+ = \emptyset$, isto é,
$$\Pi^- \cap w^\Theta \Pi^+ \cap \langle\Theta\rangle = \emptyset. \tag{1.2}$$
3. $\Pi^+ \cap w^\Theta \langle\Theta\rangle^- = \emptyset$, isto é,
$$\Pi^+ \cap w^\Theta \Pi^- \cap w^\Theta \langle\Theta\rangle = \emptyset. \tag{1.3}$$

Fibrações

Uma variedade *flag* parcial é o espaço base para uma fibração natural equivariante $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ cuja fibra é P_Θ/P. Esta fibra é uma variedade *flag* de um grupo de Lie semissimples $M_\Theta \subset G$ cujo posto (dimensão da subálgebra $\mathfrak{a}$) é dado pela ordem de Θ. O grupo de Weyl de M_Θ é o subgrupo $\mathcal{W}_\Theta$. A órbita da fibra através do ponto base b_0 está contida na fibra $\pi_\Theta^{-1}\pi_\Theta(b_0)$. Em particular, o grupo M_Θ é de posto um se $\Theta = \{\alpha\}$. Por exemplo, se α é uma raiz simples, a fibra de $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}} = G/P_{\{\alpha\}}$ que é $P_{\{\alpha\}}/P$ coincide com a única variedade *flag* do grupo $G(\alpha)$ cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}(\alpha)$, gerada por $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ e $\mathfrak{g}_\alpha$. Estas variedades *flag* de posto um são esferas S^m, onde $m = \dim(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha})$.

Uma fibração mais geral é obtida tomando-se $\Theta_1 \subset \Theta_2 \subset \Sigma$. Segue que $P_{\Theta_1} \subset P_{\Theta_2}$ e existe uma aplicação natural $\pi^{\Theta_1}_{\Theta_2} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$. Esta aplicação é equivariante e possui fibra típica $P_{\Theta_2}/P_{\Theta_1}$ que também é uma variedade *flag* de um grupo de Lie semissimples M_Θ.

Decomposição de Bruhat

A decomposição de Bruhat apresenta a variedade *flag* como uma união de N-órbitas (ou de um conjugado de N). Trata-se de um resultado muito importante no que será desenvolvido nesta tese por estar diretamente relacionada com a decomposição celular das variedades *flag* reais. Ela afirma que as N-órbitas em uma variedade *flag* $\mathbb{F}_\Theta$ são finitas e coincidem com as órbitas que passam pelos pontos fixos pela ação do grupo A. De fato, se b_Θ denota a origem de $\mathbb{F}_\Theta$ então o conjunto dos pontos fixos por A concide com a órbita do grupo $M^* \cdot b_\Theta$. Este conjunto é finito e está em bijeção com o conjunto de classes laterais $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$. Deste modo, a decomposição de Bruhat é dada pela seguinte equação:

$$\mathbb{F}_\Theta = \coprod_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} N \cdot wb_\Theta \qquad w \in M^*,$$

onde $N \cdot w_1 b_\Theta = N \cdot w_2 b_\Theta$ se $w_2 \mathcal{W}_\Theta = w_1 \mathcal{W}_\Theta$. No caso da fibração equivariante $\pi^{\Theta_1}_{\Theta_2} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$, as N-órbitas projetam sobre as N-órbitas por equivariância e, portanto, a fibração respeita a decomposição de Bruhat.

Cada N-órbita através de $w \in \mathcal{W}$ é difeomorfa a um espaço euclideano. Tal órbita $N \cdot wb_\Theta$ é chamada de uma célula de Bruhat. A dimensão destas células é dada pela seguinte fórmula:

$$\dim (N \cdot wb_\Theta) = \sum_{\alpha \in \Pi_w \setminus \langle \Theta \rangle} m_\alpha$$

onde m_α é a multiplicidade de cada auto-espaço $\mathfrak{g}_\alpha$ (veja o Lema 2.1.6 para a demonstração do caso maximal e o Lema 2.2.1 para o caso parcial).

Em cada classe lateral $w\mathcal{W}_\Theta$ existe um único elemento $w^\Theta \in \mathcal{W}^\Theta$ que é minimal com relação à ordem de Bruhat-Chevalley. Se $w^\Theta = r_1 \cdots r_n$ é uma decomposição minimal então

$$\dim \left(N \cdot w^\Theta b_\Theta\right) = \sum_{j=1}^{n} m_{\alpha_j} + m_{2\alpha_j}.$$

Uma formulação equivalente é dada em termos do subgrupo $w_0(N) = N^-$, onde $w_0 \in \mathcal{W}$ é a involução principal e N^- é o subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^-} \mathfrak{g}_\alpha$:

$$\mathbb{F}_\Theta = \coprod_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} N^- \cdot wb_\Theta \qquad w \in M^*,$$

Em particular, a célula de Bruhat $N \cdot w_0 b_\Theta$ é aberta e densa em $\mathbb{F}_\Theta$.

Esta decomposição foi estabelecida inicialmente por argumentos algébricos. Entretanto, ela foi explorada posteriormente em termos da dinâmica de um elemento regular que age sobre a variedade *flag* de modo que as células de Bruhat coincidem com variedades estáveis dos pontos fixos desta ação que são os mesmos pontos fixos da ação de A (esta abordagem é apresentada na seção 2.3 e pode ser vista com detalhes em [23] e [39]).

Células de Schubert

Uma célula de Schubert numa variedade *flag* é o fecho de uma célula de Bruhat. Denotamos por $\mathcal{S}_w^\Theta$ a célula de Schubert associada a classe $w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$:

$$\mathcal{S}_w^\Theta = \mathrm{fe}(N \cdot wb_\Theta)\,, w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta.$$

Veremos a seguir que as células de Schubert fornecem uma decomposição celular para as variedades *flag*. Inicialmente, fornecemos uma descrição detalhada das células de Schubert nas variedades *flag* maximais. Esta descrição inclui uma parametrização por certos grupos compactos (subconjunto deles) que permitem explicitar expressões para as funções de colagem entre as células. O caso das variedades *flag* parciais serão obtidas projetando-se a decomposição na variedade *flag* maximal.

Para uma célula de Schubert em $\mathbb{F}$, omitimos o sobrescrito referente ao subconjunto $\Theta = \emptyset$ e denotamos a célula de Schubert simplesmente por

$$\mathcal{S}_w = \mathrm{fe}(N \cdot wb_0)\,, w \in \mathcal{W}.$$

Vamos agora enunciar dois resultados clássicos sobre as células de Schubert. Com respeito à inclusão entre células de Schubert, temos que a ordem de Bruhat-Chevalley no grupo de Weyl determina a ordem entre diferentes células de Schubert:

$$\mathcal{S}_{w_1}^\Theta \subset \mathcal{S}_{w_2}^\Theta \Leftrightarrow w_1 \leq w_2. \tag{1.4}$$

E, alternativamente, podemos descrever a célula de Schubert como:

$$\mathcal{S}_w^\Theta = \bigcup_{u \leq w} N \cdot ub_\Theta$$

1.2 Parametrizações em $\mathbb{F}$

O principal resultado desta seção é uma parametrização apropriada para as células de Schubert em uma variedade *flag* maximal que se tornará a base para o cálculo da aplicação fronteira da homologia celular.

Vamos denotar por $\mathbb{F}_i = G/P_i$, a variedade *flag* parcial onde $P_i = P_{\{\alpha_i\}}$, $\alpha_i \in \Sigma$. A fibração canônica será denotada por $\pi_i : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_i$, onde $\mathbb{F}$ é a variedade *flag* maximal.

As células de Schubert podem ser inicialmente descritas pelas aplicações γ_i definidas por

$$\gamma_i(X) = \pi_i^{-1} \circ \pi_i(X)\,, X \subset \mathbb{F}.$$

Acontece que $\gamma_i\,(X)$ é a união das fibras de $\pi_i : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_i$ que cruzam $X \subset \mathbb{F}$. Cada aplicação γ_i é equivariante ($g\gamma_i\,(X) = \gamma_i\,(gX)$, $g \in G$, $X \subset \mathbb{F}$) pois as projeções π_i são equivariantes.

Para $w \in \mathcal{W}$, seja $N^w = wNw^{-1}$. Toda célula de Schubert é a imagem de algum $g \in G$ do $\mathrm{fe}\,(N^w w b_0)$. O resultado seguinte foi provado por San Martin [41].

Teorema 1.2.1. *Seja $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição minimal de $w \in \mathcal{W}$ como um produto de reflexões simples com respeito às raízes simples. Então, para cada $k = 1, \ldots, n$, temos que*

$$\mathrm{fe}(N^w b_0) = \gamma_1 \cdots \gamma_k\,(\mathrm{fe}\,(N^w r_1 \cdots r_k b_0))\,.$$

Em particular, para $k = n$, como $Nb_0 = b_0$ temos que

$$\mathrm{fe}(N^w b_0) = \gamma_1 \cdots \gamma_n \left(\mathrm{fe}\left(wNw^{-1}wb_0\right)\right) = \gamma_1 \cdots \gamma_n\{wb_0\} \tag{1.5}$$

Esta igualdade fornece a seguinte expressão para a célula de Schubert $\mathcal{S}_w$.

Corolário 1.2.2. *Seja $w = r_1 \ldots r_n$ uma decomposição minimal como um produto de reflexões em relações às raízes simples em Σ. Então:*

$$\mathcal{S}_w = \gamma_n \cdots \gamma_1\{b_0\}$$

(Observe que a ordem dos índices é contrária à decomposição minimal de w.)

Prova: Temos que $\mathrm{cl}(Nw \cdot b_0) = w\left(\mathrm{cl}(N^{w^{-1}} b_0)\right)$, logo por (1.5) para $w^{-1} = r_n \cdots r_1$ em vez de w, temos que

$$\mathcal{S}_w = w\gamma_n \cdots \gamma_1(w^{-1}b_0) = \gamma_n \cdots \gamma_1\{b_0\},$$

pela equivariância das aplicações γ_i, $i = 1, \ldots, n$. □

Agora, vamos alterar sutilmente a expressão acima em termos das aplicações γ para obter as células de Schubert como uniões sucessivas de órbitas de subgrupos parabólicos.

Note, em primeiro lugar, que a fibra $\gamma_i\{b_0\}$ de $\pi_i : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_i$ através da origem é a órbita $P_i \cdot b_0$. Em geral, a fibra através de $g \cdot b_0 \in \mathbb{F}$ é dada por $g \cdot \gamma_i\{b_0\}$ pela equivariância de γ_i.

Agora, dadas duas iterações $\gamma_2\gamma_1$, pela equivariância obtemos que:

$$\begin{aligned}
\gamma_2\gamma_1\{b_0\} &= \gamma_2\left(\bigcup_{g \in P_1} g \cdot b_0\right) \\
&= \left(\bigcup_{g \in P_1} g \cdot \gamma_2(b_0)\right) \\
&= \left(\bigcup_{g \in P_1} g \cdot (P_2 b_0)\right) \\
&= P_1 P_2 \cdot b_0.
\end{aligned}$$

Procedendo por indução, é possível reescrever a célula de Schubert em termos da ação dos subgrupos parabólicos

$$\mathcal{S}_w = \gamma_n \cdots \gamma_1\{b_0\} = P_1 \cdots P_n \cdot b_0,$$

onde os índices de $P_1 \cdots P_n$ aparecem na mesma ordem do que os aparecem na decomposição minimal de $w = r_i \ldots r_n \in \mathcal{W}$.

Por transitividade, a mesma expressão ainda é válida com os grupos compactos $K_i = K \cap P_i$ em vez dos subgrupos parabólicos P_i. De fato, segue que $K_i \cdot b_0 = P_i \cdot b_0$ visto que pela decomposição de Langlands (Iwasawa) $P_i = K_i AN$ e b_0 é centralizado por AN, isto é, $AN \cdot b_0 = b_0$. Portanto, os mesmos argumentos acima fornecem a seguinte descrição das células de Schubert.

Proposição 1.2.3. *Seja $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição minimal como um produto de reflexões simples com respeito às raízes simples em Σ. Então*

$$\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0.$$

(Observe que aqui, diferentemente, do Corolário 1.2.2, os índices dos r_i's e dos K_i's estão na mesma ordem.)

Observação: Em geral, existe mais de uma decomposição minimal para $w \in \mathcal{W}$ as quais fornecem diferentes subgrupos compactos K_i e parametrizações distintas para as células de Schubert.

Observação: Este processo segue o mesmo espírito da dessingularização de Bott-Samelson. A diferença básica é que as células de Schubert são obtidas como produtos a partir de aplicações definidas num fibrado iterado de esferas de acordo com a decomposição minimal de w (para mais detalhes, veja Bott-Samelson [6], Duan [20], [23] e [25]).

1.2.1 Células de Bruhat dentro da Célula de Schubert

Nesta seção, determinamos como a célula de Bruhat $N \cdot wb_0 \subset \mathcal{S}_w$ aparece dentro da igualdade $\mathcal{S}_w = \mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0$ para uma decomposição minimal de $w = r_1 \cdots r_n$.

Precisamos do seguinte resultado preliminar.

Lema 1.2.4. *Seja $w = r_1 \cdots r_{n-1} r_n$ uma decomposição minimal e defina $v = wr_n = r_1 \cdots r_{n-1}$. Denote por $P_n = P_{\{\alpha_n\}}$ o subgrupo parabólico dado pela raiz simples associada a r_n, por $\mathbb{F}_n = G/P_n$ e por b_n a origem de G/P_n.*

Se $\pi_n : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_n = G/P_n$ é a projeção canônica então temos que

$$\pi_n^{-1}(N \cdot wb_n) = (N \cdot wb_0) \,\dot{\cup}\, (N \cdot vb_0) \tag{1.6}$$

Prova: A fibra $\pi_n^{-1}(wb_n)$ é a variedade *flag* de um grupo de posto um. Sua decomposição de Bruhat é dada por

$$\pi_n^{-1}(wb_n) = \{vb_0\} \dot\cup \left(\pi_n^{-1}(wb_n) \cap (N \cdot wb_0)\right).$$

Na verdade, em $\pi_n^{-1}(wb_n)$ existem uma 0-célula que é $\{vb_0\}$ e uma célula aberta. Esta última é dada por $\pi_n^{-1}(wb_n) \cap (N \cdot wb_0)$ pois está contida na célula de Bruhat $N \cdot wb_0$ e $vb_0 \notin N \cdot wb_0$ (veja a Figura 1.1).

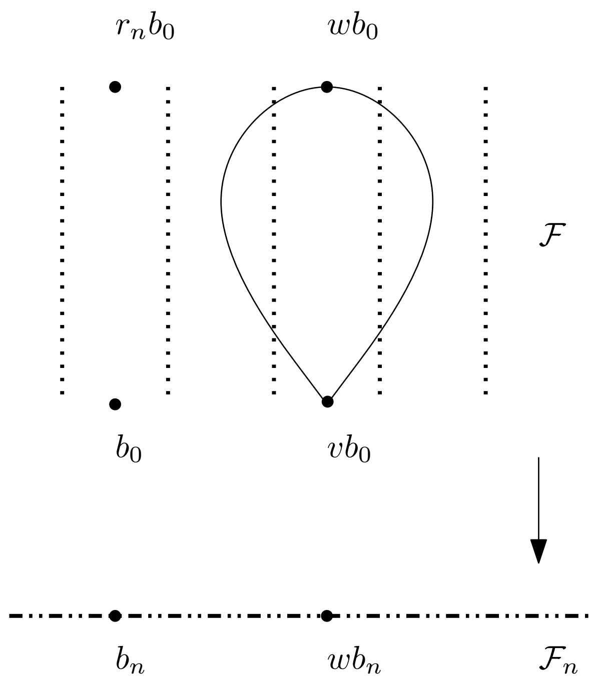

Figura 1.1: *A fibra de π_n sobre wb_n.*

Agora, o resultado segue pela ação de N. De fato, como $wb_0 \in \pi_n^{-1}(wb_n) \cap (N \cdot wb_0)$, temos que $N \cdot wb_0 = N\left(\pi_n^{-1}(wb_n) \cap (N \cdot wb_0)\right)$. Por equivariância de π_n obtemos que $N\pi_n^{-1}(wb_n) = \pi_n^{-1}(N \cdot wb_n)$. Portanto

$$\pi_n^{-1}(N \cdot wb_n) = N\left(\{vb_0\} \dot\cup (\pi_n^{-1}(wb_n) \cap (N \cdot wb_0))\right) = (N \cdot vb_0) \dot\cup (N \cdot wb_0).$$

□

Observe que a igualdade (1.6) é equivalente a

$$\pi_n^{-1}(N \cdot wb_n) \quad = \quad \mathcal{S}_v \dot\cup (N \cdot wb_0).$$

pois $\pi_n^{-1}(N \cdot wb_n) \cap \mathcal{S}_v = N \cdot vb_0$ e $\pi_n^{-1}(N \cdot wb_n) = \pi_n^{-1}(N \cdot vb_n)$ já que $wb_n = vb_n$ em $\mathbb{F}_n$.

Proposição 1.2.5. *Considere $\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0$. Tome $b = u_1 \cdots u_n \cdot b_0$, com $u_i \in K_i$.*

Então $b \in \mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0$ se e somente se $u_i \in M$ para algum $i = 1, \ldots, n$.

Em outras palavras, um elemento $b \in \mathcal{S}_w$ está na célula de Bruhat $N \cdot wb_0$ se e somente se não existe nenhum $u_i \in M$.

Prova: Suponha que $u = u_i \in M$ para algum i. Então $u \in K_j$ para todo j, pois $M \subset K_j$, de modo que $v_j = uu_ju^{-1} \in K_j$. Logo reescreve-se $b = u_1 \cdots u_{i-1}v_{i+1} \cdots v_n u \cdot b_0$. Como $ub_0 = b_0$, segue que $b \in \mathcal{S}_v$, com $v = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$, o que implica que $b \notin N \cdot wb_0$ pois $v < w$ e $\mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0 = \cup_{u<w}\mathcal{S}_u$.

A recíproca é demonstrada por indução sobre n. Se $n = 1$, segue que $w = r_1$ e a célula de Schubert $\mathcal{S}_{r_1}$ tem decomposição de Bruhat $\mathcal{S}_{r_1} = b_0 \cup (N \cdot u_1b_0)$. Logo, se $u_1 \notin M$, então $u_1b_0 \neq b_0$ e portanto $u_1 \cdot b_0 \in N \cdot u_1b_0$.

Para $n > 1$, tome $b = u_1 \cdots u_n \cdot b_0$ com $u_i \notin M$. Devemos mostrar que $b \in N \cdot wb_0$.

Defina $x = u_1 \cdots u_{n-1} \cdot b_0$. Note que $b \neq x$. Caso contrário, $u_nb_0 = b_0$ o que implica que $u_n \in M$, contradizendo a hipótese.

A hipótese indutiva afirma que $x \in N \cdot vb_0$, $v = r_1 \cdots r_{n-1}$. Mais ainda, $\pi_n(b_0) = \pi_n(u_nb_0)$ implica que $\pi_n(x) = \pi_n(b)$, isto é, x e b estão na mesma fibra de π_n. Logo $\pi_n(b) \in \pi_n(N \cdot wb_n)$, e segue pelo Lema 1.2.4 que $b \in (N \cdot vb_0) \cup (N \cdot wb_0)$.

Agora $b \notin N \cdot vb_0$ pois caso contrário $b = x$. De fato, como $\pi_n(b) = \pi_n(x) = zb_n$, temos que $b \in \pi_n^{-1}(zb_n) \cap N \cdot vb_0$. Como esta interseção se reduz ao único ponto zb_0 temos que $x = zb_0 = b$, pois $x \in N \cdot vb_0$. Logo $b \in N \cdot wb_0$, concluindo a prova. □

1.2.2 Parametrização de subconjuntos de subgrupos compactos

O próximo passo é encontrar subconjuntos dos subgrupos K_i em $\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0$ que sejam suficientes para cobrir $\mathcal{S}_w$ assim como encontrar parametrizações destes subconjuntos.

Isto será feito olhando cuidadosamente para a variedade *flag* P_i/P do grupo de Lie $G(\alpha)$, $\alpha = \alpha_i$, de posto um cuja álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\alpha)$ é gerada por $\mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Esta variedade *flag* é a fibra da projeção canônica $\pi_i : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_i$ e coincide com a esfera S^m, $m = \dim(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha})$, que contém os pontos b_0 e $r_\alpha b_0$.

O próximo lema fornece parametrizações para estas esferas por meio de funções definidas em bolas m-dimensionais $B^m \subset \mathbb{R}^m$ com valores no grupo compacto $K_\alpha = P_\alpha \cap K$. Como antes, seja $M \subset K$ o centralizador de $\mathfrak{a}$.

Lema 1.2.6. *Seja B^m a bola fechada em $\mathbb{R}^m$. Então existe uma função contínua $\psi : B^m \to K_\alpha$ tal que*

- *$\psi(S^{m-1}) \subset M$ e logo $\psi(S^{m-1}) \cdot b_0 = b_0$.*
- *Se $x \in B^m \setminus S^{m-1}$ então $\psi(x) \cdot r_\alpha b_0$ é um difeomorfismo sobre a célula de Bruhat $N \cdot r_\alpha b_0$.*

Vamos construir abaixo apenas a função ψ quando $m = \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ e a álgebra de Lie de K_α é $\mathfrak{so}(2)$. Isto porque este será o único caso que será utilizado na sequência (veja a Proposição 2.1.1). Não faremos a prova completa aqui deste lema e apenas observamos que ψ pode ser construída escrevendo-se as geodésicas de S^{m-1} que passam por $r_\alpha b_0$ como $k_t \cdot b_0$, $t \in [0,1]$ e $k_t \in K_\alpha$.

Quando $m = 1$, ψ pode ser construída seguindo-se os seguintes argumentos padrões (veja [28], [32] e [45]):

Seja θ a involução de Cartan.

Tome $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y_\alpha = \theta(X_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tais que $\langle X_\alpha, Y_\alpha \rangle = \dfrac{2}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Logo

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha^\vee = \frac{2H_\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

Denote por $A_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha \in \mathfrak{k}$. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \langle H_\alpha^\vee \rangle \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Explicitamente, defina $\rho : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}(\alpha)$, com $\rho(H) = H_\alpha^\vee$, $\rho(X) = X_\alpha$ e $\rho(Y) = Y_\alpha$ onde

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este homomorfismo se estende a um homomorfismo $\phi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\alpha)$. Observe que $\mathrm{ad} \circ \phi$ é uma representação $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ em $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Como $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$ é simplesmente conexo, esta representação se estende a uma representação Φ de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$ em $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e elas estão relacionadas por $e^{\mathrm{ad} \circ \phi(X)} = \Phi(\exp(X))$ para qualquer $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Temos que

$$e^{\mathrm{ad}(\pi A_\alpha)} = e^{\mathrm{ad} \circ \phi(A)} = \Phi(\exp(\pi A)),$$

onde $A = X + Y$. Mas em $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$ temos que

$$\exp(\pi A_\alpha) = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} i\pi & 0 \\ 0 & -i\pi \end{pmatrix} = \exp(i\pi H).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{ad}(\pi A_\alpha)} &= \Phi(\exp(i\pi H)) \\ &= e^{\mathrm{ad} \circ \phi(i\pi H)} \\ &= e^{\mathrm{ad}(i\pi H_\alpha^\vee)}. \end{aligned}$$

Considerando, sem perder generalidade, que G é o grupo dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}$, podemos tomar

$$m_\alpha = \exp(\pi i H_\alpha^\vee) = \exp(\pi A_\alpha). \tag{1.7}$$

Segue que $m_\alpha \in M = Z_K(\mathfrak{a})$ pois m_α centraliza A ($m_\alpha = \exp(\pi i H_\alpha^\vee)$) e pertence a K ($m_\alpha = \exp(\pi A_\alpha)$).

Agora, considere a curva $\gamma(t) = \exp(tA_\alpha) \cdot b_0$ na fibra de $\pi_i : \mathbb{F} \to G/P_\alpha$ pela origem. Como $m_\alpha \in M$, $\gamma(\pi) = m_\alpha b_0 = b_0$. Na verdade $\gamma(t)$ cobre a fibra no intervalo $[0, \pi]$. Vamos ver que o período é exatamente π. Isto pode ser feito calculando em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e aplicando ρ pela fórmula

$$\rho\left(\mathrm{Ad}(e^{tA})H\right) = \mathrm{Ad}(e^{tA})H_\alpha^\vee.$$

Em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(e^{tA})H &= \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Isto é, $\mathrm{Ad}(e^{tA})H = -\operatorname{sen} 2tX + \cos 2tH + \operatorname{sen} 2tY$. Aplicando ρ obtemos que

$$\mathrm{Ad}(e^{tA})H_\alpha^\vee = -\operatorname{sen} 2tX_\alpha + \cos 2tH_\alpha^\vee + \operatorname{sen} 2tY_\alpha.$$

Isto mostra que e^{tA} centraliza $H_\alpha^\vee$ se e somente se $t = n\pi$. Em particular, $e^{tA} \in M$ se e somente se $t = n\pi$. Logo, o período de γ é exatamente π. Resumindo,

Lema 1.2.7. *A versão 1-dimensional de 1.2.6 é realizada por*

$$\psi : [0, \pi] \to K_\alpha\,,\ t \mapsto \exp(tA_\alpha).$$

Em particular, $\psi(0) = 1$ *e* $\psi(\pi) = m_\alpha = \exp(\pi A_\alpha)$.

Observação: As reflexões simples r_i são dadas por $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = r_i$.

Mais ainda, se $X \in \mathfrak{g}_\beta$ então:

$$\mathrm{Ad}(m_\alpha)(X) = \mathrm{Ad}(\exp(\pi i H_\alpha^\vee))(X) = e^{\mathrm{ad}(\pi i H_\alpha^\vee)}(X) = e^{\pi i \epsilon(\alpha,\beta)}(X),$$

onde $\epsilon(\alpha, \beta) = \dfrac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$ é o número de Killing. Segue portanto que

Lema 1.2.8. *Os auto-espaços* $\mathfrak{g}_\beta$ *são invariantes pela ação de* $\mathrm{Ad}(m_\alpha)$ *e vale*

$$\mathrm{Ad}(m_\alpha)_{|\mathfrak{g}_\beta} = (-1)^{\epsilon(\alpha,\beta)}\,\mathrm{id}.$$

1.2.3 Colagem de Células

Uma célula de Schubert $\mathcal{S}_w$ é obtida das células menores $\mathcal{S}_v$, $v < w$, colando uma célula de dimensão $\dim(N \cdot wb_0)$. Uma vez que este processo é feito para cada $w \in \mathcal{W}$, obtemos uma decomposição celular para $\mathbb{F}$ a qual fornece explicitamente funções características e funções de colagem (Seguimos aqui a terminologia de [27]: uma *função característica* é definida em uma bola fechada enquanto que a *função de colagem* é a restrição da função característica à fronteira da célula).

Para definir uma função característica para $\mathcal{S}_w$, $w \in \mathcal{W}$, devemos escolher uma decomposição minimal

$$w = r_1 \cdots r_n$$

como um produto de reflexões simples $r_i = r_{\alpha_i}$. Sabemos que $\mathcal{S}_w = K_1 \cdots K_n \cdot b_0$. Pelo Lema 1.2.6, para cada i, existe uma função $\psi_i : B^{d_i} \to K_i$, onde d_i é a dimensão da fibra da projeção canônica $\pi_i : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_i$, isto é, a dimensão da variedade *flag* de $G(\alpha_i)$.

Seja $B_w = B^{d_1} \times \cdots \times B^{d_n}$ a bola de dimensão $d = d_1 + \cdots + d_n$. Então a função característica $\Phi_w : B_w \to \mathbb{F}$ é definida por

$$\Phi_w(t_1, \ldots, t_n) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0.$$

Observação: Decomposições minimais distintas de w fornecem funções características distintas . A notação Φ_w deveria incluir a decomposição minimal de w (por exemplo, $\Phi_{r_1 \cdots r_n}$). Para manter a notação mais simples, vamos fixar posteriormente uma escolha de decomposições minimais para cada $w \in \mathcal{W}$.

Proposição 1.2.9. *Seja $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição minimal. Seja $\Phi_w : B_w \to \mathbb{F}$ a função definida acima e tome $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in B_w$. Então Φ_w é uma função característica para $\mathcal{S}_w$, isto é,*

1. $\Phi_w(B_w) \subset \mathcal{S}_w$.
2. $\Phi_w(\mathbf{t}) \in \mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0$ *se e somente se* $\mathbf{t} \in \partial B_w = S^{d-1}$.
3. $\Phi_w|_{B_w^\circ} : B_w^\circ \to N \cdot wb_0$ *é um difeomorfismo, onde* B_w° *é o interior de* B_w.

Prova: A primeira condição vale por construção pois $\psi_i(t_i) \in K_i$ e logo $\Phi_w(t_1, \ldots, t_n) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0 \in K_1 \cdots K_n \cdot b_0 = \mathcal{S}_w$.

A segunda afirmação é uma consequência da Proposição 1.2.5, a qual garante que $\psi_1(t_1) \cdots \psi_n(t_n)$ não está em $N \cdot wb_0$ se e somente se algum $\psi_i(t_i) \in M$. Pelo Lema 1.2.7 isto implica que $t_i \in \{0, \pi\} = \partial S^{d_i - 1}$, isto é, $\mathbf{t} \in \partial S^{d-1}$.

Como temos que $\Phi|_{B_w^\circ}$ é uma função sobrejetiva, vamos agora provar a injetividade por indução sobre o comprimento $\ell(w)$ de w.

Se $\ell(w) = 1$, este é o Lema 1.2.7. Para $\ell(w) > 1$, suponha que $\Phi_w(\mathbf{t}) = \Phi_w(\mathbf{s})$ com $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ e $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ em B_w°. Afirmamos que $x = y$ onde

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(t_1) \cdots \psi_{n-1}(t_{n-1}) \cdot b_0 \\ y &= \psi_1(s_1) \cdots \psi_{n-1}(s_{n-1}) \cdot b_0. \end{aligned}$$

De fato, os elementos $\psi_i(t_i)$ e $\psi_i(s_i)$ não estão em M, logo pela Proposição 1.2.5 ambos $x, y \in N \cdot vb_0$, $v = r_1 \cdots r_{n-1}$. Além disso, $\pi_n(x) = \pi_n(\Phi_w(\mathbf{t})) = \pi_n(\Phi_w(\mathbf{s})) = \pi_n(x)$, isto é, x e y pertencem a mesma fibra de $\pi_n : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_n$. Segue pelo Lema 1.2.4 que $x = y$ pois $N \cdot vb_0$ encontra cada fibra de π_n em um único ponto. Pela hipótese indutiva, $(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (s_1, \ldots, s_{n-1})$, de modo que $\psi_1(t_1) \cdots \psi_{n-1}(t_{n-1}) = \psi_1(s_1) \cdots \psi_{n-1}(s_{n-1})$. Aplicando isto a igualdade $\Phi_w(\mathbf{t}) = \Phi_w(\mathbf{s})$ concluímos que $\psi_n(t_n) \cdot b_0 = \psi_n(s_n) \cdot b_0$, o qual implica que $t_n = s_n$, pois recai no caso em que $\ell(r_n) = 1$.

Portanto, Φ_w é uma função contínua fechada e bijetora, portanto, um homeomorfismo (a diferenciabilidade vem da construção das funções ψ_i). $\square$

Como uma consequência do último item da proposição acima, temos a seguinte construção. Seja $d = \dim \mathcal{S}_w = \dim N \cdot wb_0$. A esfera S^d é o quociente $B_w/\partial(B_w)$ onde a fronteira $\partial(B_w)$ é colapsada a um ponto. Podemos fazer o mesmo com a célula de Schubert $\mathcal{S}_w$. Defina

$$\sigma_w = \mathcal{S}_w/(\mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0)$$

o espaço obtido pela identificação do complementar da célula de Bruhat $\mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0$ em $\mathcal{S}_w$ a um ponto. Como $\Phi_w(\partial(B_w)) \subset S_w \setminus N \cdot wb_0$, segue que Φ_w induz uma função $S^d \to \sigma_w$ que é um homeomorfismo. A inversa deste homeomorfismo será denotada por

$$\Phi_w^{-1} : \sigma_w \to S^d \tag{1.8}$$

(embora esta não seja exatamente a inversa de Φ_w).

Capítulo 2

Homologia de *Flags* Reais

Este capítulo apresenta um dos resultados fundamentais da tese que diz respeito à determinação do operador fronteira da homologia celular das variedades *flag*. Inicialmente, isto é feito para o caso das variedades *flag* maximais a partir da parametrização feita no capítulo anterior das células de Schubert em uma variedade *flag* maximal. Em um segundo momento, derivam-se os resultados para o caso das variedades *flag* parciais onde se faz necessário escolher cuidadosamente as células de Schubert que lhe fornecem uma decomposição celular adequada para o cálculo do operador fronteira. Deste modo, a primeira parte se concentra no estudo da homologia celular das variedades *flag* maximais enquanto a segunda parte, no estudo das variedades *flag* parciais.

Uma vez que estes resultados foram estabelecidos primeiramente no contexto da teoria de Morse [33], incluímos uma seção que apresenta a relação entre estas abordagens, isto é, como podemos obter as linhas do fluxo gradiente a partir da parametrização das células de Schubert em uma variedade *flag* maximal.

2.1 Homologia Celular de Variedades *Flag* Maximais

A homologia celular de um complexo CW é definida a partir de uma decomposição celular do complexo. Ela é isomorfa à homologia singular de um espaço. Isto significa que o grupo de homologia não depende da escolha da decomposição celular, embora o operador fronteira possa mudar de acordo com a escolha da decomposição celular, isto é, da maneira como as células são coladas.

Tendo isto em vista, para calcular a homologia celular de $\mathbb{F}$ deve-se escolher qual a decomposição será usada. Por isto, vamos **fixar** de antemão, para cada $w \in \mathcal{W}$, uma decomposição minimal

$$w = r_1 \cdots r_n$$

como um produto de reflexões simples.

Feita esta escolha, ficam definidas, para cada $w \in \mathcal{W}$, as funções Φ_w que colam a bola B_w na união das células de Schubert $\mathcal{S}_u$ com $u < w$ (veja Proposição 1.2.9).

Vamos agora relembrar (neste contexto) a definição do operador fronteira que fornece os grupos de homologia com coeficientes em um anel R (veja [27]). Seja $\mathcal{C}$ o R-módulo livremente gerado por $\mathcal{S}_w$, $w \in \mathcal{W}$. O operador fronteira $\partial : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é definido por

$$\partial \mathcal{S}_w = \sum_{w'} c(w, w') \mathcal{S}_{w'}$$

onde os coeficientes $c(w, w') \in R$ satisfazem as seguintes propriedades:

1. $c(w, w') = 0$ se $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} \neq 1$.
2. Se $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} = 1$ então $c(w, w') = \deg \left(\phi_{w,w'} : S_w^{d-1} \to S_{w'}^{d-1} \right)$, onde $\phi_{w,w'}$ é a composição das seguintes aplicações:
   (a) A função de colagem: $\Phi_w|_{\partial(B_w^d)} : S_w^{d-1} = \partial(B_w^d) \to \mathcal{S}_w \setminus N \cdot wb_0 = \cup_{u<w} \mathcal{S}_u = X^{d-1}$, onde X^{d-1} denota o $(d-1)$-esqueleto de $\mathcal{S}_w$.
   (b) A aplicação quociente: $X^{d-1} \to X^{d-1}/(X^{d-1} \setminus \mathcal{S}_{w'})$, onde tomamos a célula $\mathcal{S}_{w'}$ dentro X^{d-1} e identificamos o seu complementar em $\mathcal{S}_{w'}$ a um ponto.
   (c) A identificação: $X^{d-1}/(X^{d-1} \setminus \mathcal{S}_{w'}) \cong \mathcal{S}_{w'}/(\mathcal{S}_{w'} \setminus N \cdot w'b_0)$ que estão no mesmo espaço. Este último é o espaço $\mathcal{S}_{w'}/(\mathcal{S}_{w'} \setminus N \cdot w'b_0) = \sigma_{w'}$ por definição.
   (d) A função: $\Phi_{w'}^{-1} : \sigma_{w'} \to S_{w'}^{d-1}$ (veja 1.8).

Observação: Nesta construção ocorre uma sutileza que deve ser enfatizada: $\phi_{w,w'}$ é uma função $S^{d-1} \to S^{d-1}$ cujo domínio é a fronteira de uma bola em algum $\mathbb{R}^N$ (a bola B_w) e, logo, é uma esfera canonicamente definida. Entretanto, o contradomínio, num primeiro momento, é o espaço $\sigma_{w'}$ o qual é homeomorfo a S^{d-1}. Para se obter uma função na própria esfera S^{d-1} (canônica) deve-se fixar um homeomorfismo $\sigma_{w'} \to S^{d-1}$. Diferentes homeomorfismos podem fornecer funções com graus diferentes. Aqui é onde se faz necessário escolher de antemão uma decomposição minimal de $w \in \mathcal{W}$.

2.1.1 O operador fronteira ∂

Para se obter o operador fronteira, o primeiro passo é encontrar os pares $w, w' \in \mathcal{W}$ para os quais $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} = 1$. Isto é feito na proposição abaixo.

Proposição 2.1.1. *Seja $w, w' \in \mathcal{W}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mathcal{S}_{w'} \subset \mathcal{S}_w$ *e* $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} = 1$.

2. *Se $w = r_1 \cdots r_n$ é uma decomposição minimal $w \in \mathcal{W}$ como um produto de reflexões simples, então*

(i) $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$ é uma decomposição minimal.

(ii) Se $r_i = r_{\alpha_i}$ então $\mathfrak{g}(\alpha_i) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Isto é o mesmo que dizer que a fibra de $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_i$ tem dimensão 1.

Prova: De fato, $\mathcal{S}_{w'} \subset \mathcal{S}_w$ se e somente se $w' < w$ na ordem de Bruhat-Chevalley. Neste caso, se $w = r_1 \cdots r_n$ e $w' = r_{i_1} \cdots r_{i_j}$ são decomposições minimais então $\dim \mathcal{S}_w$ é igual a $\dim \mathcal{S}_{w'}$ mais a soma das multiplicidades das raízes que não aparecem na decomposição minimal de w'. Logo $\dim \mathcal{S}_w - \dim \mathcal{S}_{w'} = 1$ se e somente $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$ e α_i tem multiplicidade 1, isto é, $\mathfrak{g}(\alpha_i) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. $\square$

Observação: Dado w' como acima, existe um único i tal que $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_r$. De fato, se $w = r_1 \cdots r_i \cdots r_j \cdots r_n$ e $w' = r_1 \cdots r_i \cdots \hat{r_j} \cdots r_n$ então

$$r_{i+1} \cdots r_j = r_i \cdots r_{j-1},$$

o que não pode ocorrer se a decomposição for minimal (veja [30] ou [42], Capítulo 9).

Para calcular o grau $c(w,w') = \deg\left(\phi_{w,w'} : S_w^{d-1} \to S_{w'}^{d-1}\right)$ quando se tem as decomposições minimais de $w = r_1 \cdots r_n$ e $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$, procedemos de acordo com os seguintes passos.

Passo 1: Esferas do domínio e do contradomínio

Primeiramente, identificamos as esferas S_w^{d-1} no domínio e a esfera $S_{w'}^{d-1}$ no contradomínio.

Relembre que $B_w = B^{d_1} \times \cdots \times B^{d_n}$ onde B^{d_i} é a bola 1-dimensional, que é o intervalo $[0,\pi]$, como na construção do Lema 1.2.7. A dimensão de B_w é $d = d_1 + \cdots + d_n$ e o domínio de $\phi_{w,w'}$ é

$$S_w^{d-1} = \partial(B_w) = \{(t_1, \dots, t_n) : \exists j, t_j \in \partial B^{d_j}\}$$

a união das "faces" de B_w.

Por outro lado, seja $B_{w'} = B^{d_1} \times \cdots \times \hat{B^{d_i}} \times \cdots \times B^{d_n}$. Então o contradomínio é a esfera $S_{w'}^{d-1}$ obtida por colapsar a fronteira de $B_{w'}$ a um ponto. Isto é visto através dos ítens (c) e (d) na definição acima de ∂.

Passo 2: $\sigma_{w'}$ na imagem $\Phi_w(S_w^{d-1})$.

O segundo passo é encontrar como $\sigma_{w'}$ está dentro da imagem $\Phi_w(S_w^{d-1})$. O seguinte lema determina como é a pré-imagem de $N \cdot w' b_0$ sob Φ_w.

Lema 2.1.2. *$\Phi_w(t_1, \ldots, t_n) \in N \cdot w'b_0$ se e somente se $t_j \in (B^{d_j})^\circ$, $j \neq i$ e $t_i \in \partial B^{d_i}$, isto é, $t_i = 0$ or π.*

Prova: Se $t_i \in \partial B^{d_i}$ então $\psi_i(t_i) \in M$ pelo Lema 1.2.7. Isto implica que

$$\Phi_w(t_1, \ldots, t_n) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0 \in K_1 \cdots \hat{K}_i \cdots K_n = \mathcal{S}_{w'}$$

pois $M \subset K_s$ para todos os subíndices s. Pela Proposição 1.2.5, $\Phi_w(t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_n) \in N \cdot w'b_0$ se e somente se $\psi_j(t_j) \notin M$ para $j \neq i$, o qual é equivalente a $t_j \in (B^{d_j})^\circ$, $i \neq j$, pelo Lema 1.2.7. □

Em outras palavras, a pré-imagem $\Phi_w^{-1}(N \cdot w'b_0) \subset B_w$ é a união do interior das duas faces correspondentes às coordenadas i, isto é, as faces em que se tem $t_i = 0$ e $t_i = \pi$, respectivamente.

No quociente $\sigma_{w'} = \mathcal{S}_{w'}/(\mathcal{S}_{w'} \setminus N \cdot w'b_0)$ as faces de ∂B_w correspondentes às coordenadas j, $j \neq i$, são colapsadas a um ponto.

Passo 3: Cálculo dos Graus

O grau de $\phi_{w,w'}$ é a soma dos graus de duas funções, a saber, as funções obtidas pela restrição a cada uma das faces

$$\mathcal{F}_0^i = \{(t_1, \ldots, 0, \ldots, t_n)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_\pi^i = \{(t_1, \ldots, \pi, \ldots, t_n)\}.$$

Os valores de $\phi_{w,w'}$ nestas faces são dados por

$$\begin{aligned} f_i^0(\mathbf{t}) &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots \psi_i(0) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0) \\ &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots 1 \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0). \\ f_i^\pi(\mathbf{t}) &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots \psi_i(\pi) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0) \\ &= \Phi_{w'}^{-1}(\psi_1(t_1) \cdots m_{\alpha_i} \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0). \end{aligned}$$

onde $\mathbf{t} = \left(t_1, \ldots, \widehat{t_i}, \ldots, t_n\right)$ e $\Phi_{w'}$ é dada pela escolha de uma decomposição minimal $w' = s_1 \cdots s_m$ (escolhida previamente) que pode ser diferente da decomposição minimal $w' = r_1 \cdots \hat{r}_i \cdots r_n$.

O grau de $\phi_{w,w'}$ é a soma dos graus de f_i^0 e f_i^π as quais podem ser consideradas como funções $S^{d-1} \to S^{d-1}$ colapsando as fronteiras das faces a pontos.

Agora, o grau de uma função φ pode ser calculada como uma soma dos graus locais ao longo da imagem inversa $\varphi^{-1}(\xi)$ que tenha um número finito de pontos.

Proposição 2.1.3. *([27], Proposição 2.30) Suponha que $f : S^n \to S^n$ tenha a propriedade de que, para algum ponto $y \in S^n$, a pré-imagem $f^{-1}(y)$ consista de uma quantidade finita de* *pontos $x_1, \ldots, x_m$. Então o grau de f é a soma dos graus locais em cada x_i, $i = 1, \ldots, m$, isto é*

$$\deg f = \sum_{i=1}^{m} \deg f|_{x_i}$$

Neste caso da função $\phi_{w,w'}$, as funções f_i^0 e f_i^π são homeomorfismos tal que a pré-imagem $\phi_{w,w'}^{-1}(\xi)$ de um ponto genérico tem dois pontos. A saber, um ponto x_1 na face $\mathcal{F}_0^i$ e um outro ponto x_2 na face $\mathcal{F}_\pi^i$. O grau local em x_1 é o grau de f_i^0 pois f_i^0 é um homeomorfismo. O mesmo vale para o grau local em x_2 que é o grau de f_i^π.

Finalmente, os graus de f_i^0 e f_i^π são ± 1 pois cada uma destas funções é um homeomorfismo.

Resumindo: Para se calcular o grau de $\phi_{w,w'}$ devemos restringir $\Phi_{w'}^{-1} \circ \Phi_w$ às (duas) faces $\mathcal{F}_0^i$ e $\mathcal{F}_\pi^i$, considerando-as como esferas (com as fronteiras colapsadas a pontos). A soma dos graus destas duas restrições é o grau de $\phi_{w,w'}$.

As restrições de $\Phi_{w'}^{-1} \circ \Phi_w$ às faces $\mathcal{F}_0^i$ e $\mathcal{F}_\pi^i$ são homeomorfismos e portanto tem grau ± 1. Segue que o grau total de $\phi_{w,w'}$ é 0 ou ± 2.

Este é um dos resultados principais em homologia de variedades *flag*.

Teorema 2.1.4. *O coeficientes $c(w, w') = \deg(f_i^0) + \deg(f_i^\pi) = 0$ ou ± 2, para quaisquer $w, w' \in \mathcal{W}$.*

Observação: Recomendamos aqui a leitura do exemplo apresentado na Seção 3.2, que ilustra o procedimento acima.

Em particular, no caso de coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, o operador fronteira se anula.

Corolário 2.1.5. *A homologia de $\mathbb{F}$ sobre $\mathbb{Z}_2$ é um espaço vetorial de dimensão $|\mathcal{W}|$.*

Observação: Os cálculos acima são particularmente interessantes quando as raízes simples α_i tem multiplicidade $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = 1$. Se todas as raízes tiverem multiplicidade ≥ 2 então o operador fronteira ∂ é identicamente zero e a homologia é livremente gerada pelas células de Schubert. Isto acontece no caso clássico das álgebras de Lie complexas, onde qualquer raiz tem multiplicidade (real) dois. Um exemplo de uma álgebra que é forma real onde as raízes simples tem multiplicidade ≥ 2 é a forma real de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ cujo diagrama de Satake é

Neste caso, as raízes simples são complexas e portanto suas multiplicidades são ≥ 2.

2.1.2 Expressões Algébricas para os graus

Aqui, vamos calcular os coeficientes $c(w, w')$ encontrando os graus das funções envolvidas em termos da raízes.

A idéia principal é que o grau de um homemorfismo $\varphi : S^d \to S^d$ é dado pelo grau local em um único ponto x (ver a Proposição 2.1.3). Mais ainda, se f for um difeomorfismo, então o grau local em x é o sinal do determinante $\det(d\varphi_x)$ calculado em relação a uma forma volume em S^d (veja Bredon [9], Proposição IV.7.2). Vamos então aplicar isto ao nosso contexto.

Relações entre decomposições minimais para w'

Sejam $w = r_1 \cdots r_n$ e $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$ duas decomposições minimais com $r_i = r_{\alpha_i}$ e assuma daqui em diante que a raiz simples α_i tem multiplicidade $d_i = d_{\alpha_i} = 1$.

Devemos calcular os graus de f_i^0 e f_i^π definidos por

1. $f_i^0(t_1, \ldots, 0, \ldots, t_n) = \Phi_{w'}^{-1}\left(\psi_1(t_1) \cdots 1 \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0\right).$
2. $f_i^\pi(t_1, \ldots, \pi, \ldots, t_n) = \Phi_{w'}^{-1}\left(\psi_1(t_1) \cdots m_{\alpha_i} \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0\right).$

Nestas expressões, $\Phi_{w'}^{-1}$ é definida a partir de uma escolha prévia de decomposições minimais $w' = s_1 \cdots s_m$ de w' a qual pode ser diferente de $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$. Por outro lado, $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$ pode ser usada para definir uma outra função característica, a qual vamos denotar por $\Psi_{w'}$. Esta nova função característica define novas funções

1. $p_i^0(t_1, \ldots, 0, \ldots, t_n) = \Psi_{w'}^{-1}\left(\psi_1(t_1) \cdots 1 \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0\right)$ e
2. $p_i^\pi(t_1, \ldots, \pi, \ldots, t_n) = \Psi_{w'}^{-1}\left(\psi_1(t_1) \cdots m_{\alpha_i} \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0\right).$

O par de funções estão relacionadas por

$$f_i^\epsilon = \left(\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}\right) \circ p_i^\epsilon \qquad \epsilon = 0, \pi.$$

A composição de $\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}$ (também entendida como uma função entre esferas em que as fronteiras são colapsadas a pontos) são homeomorfismos de esferas e, logo, tem grau ± 1. Logo, podemos concentrar no cálculo dos graus das funções p_i^ϵ, $\epsilon = 0, \pi$ pois o grau total será multiplicado por ± 1.

Orientação das faces

Antes de obter os graus, faremos uma discussão sobre a orientação das faces do cubo $[-1, 1]^d$, centrado na origem de $\mathbb{R}^d$, a qual é dada por uma base $\{e_1, \ldots, e_d\}$.

Começando com uma esfera $(d-1)$-dimensional, orientamos o espaço tangente em $x \in S^{d-1}$ por uma base $\{f_2, \ldots, f_d\}$ tal que $\{x, f_2, \ldots, f_d\}$ seja positivamente orientada. As faces de $[-1,1]^d$ são orientadas de acordo com a seguinte regra: dado um vetor básico e_j, denote por F_j^- a face perpendicular a e_j que contém $-e_j$ e por F_j^+ a face que contém e_j. Então F_j^- tem a mesma orientação que a base $e_1,\ldots,\hat{e_j},\ldots,e_d$ se j for par ($-e_j,e_1,\ldots,\hat{e_j},\ldots,e_d$ é positivamente orientada em $\mathbb{R}^d$) e orientação oposta se j for ímpar. Portanto, a orientação de F_j^- é a orientação de $e_1,\ldots,\hat{e_j},\ldots,e_d$ multiplicada por $(-1)^j$. Analogamente, a orientação de F_j^+ é a orientaçao de $e_1,\ldots,\hat{e_j},\ldots,e_d$ multiplicada por $(-1)^{j+1}$.

Ação de m_α em $\mathbb{F}$

Para uma raiz α, temos o elemento $m = m_\alpha = \exp(\pi A_\alpha) \in M$ (veja 1.7). Vamos agora determinar alguns fatos a respeito de ação de $m \in M$ em $\mathbb{F}$.

Lema 2.1.6. *Para uma raiz α considere a ação de m em $\mathbb{F}$. Então:*

1. *$mwb_0 = wb_0$ e $mNm^{-1} = N$. Portanto, m deixa qualquer célula de Bruhat invariante e, portanto, deixa qualquer célula de Schubert $\mathcal{S}_w$ invariante.*

2. *A restrição de m a $N \cdot wb_0$ é um difeomorfismo.*

3. *A diferencial dm_{wb_0} se identifica à restrição de $\mathrm{Ad}\,(m)$ ao subespaço*

$$\sum_{\beta\in\Pi_w} \mathfrak{g}_\beta.$$

Prova: A primeira e segunda afirmações seguem diretamente do fato de que $\mathrm{Ad}(m_\alpha)\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_\beta$, $\beta \in \Pi$ (veja Lema 1.2.8).

Para a terceira afirmação, utilizamos a seguinte notação: $X \cdot x = d/dt\,(\exp tX)_{t=0}$, $x \in \mathbb{F}$ e $X \in \mathfrak{g}$. Também, para $A \subset \mathfrak{g}$, escrevemos $A \cdot x = \{X \cdot x : X \in A\}$.

Agora, note que $N \cdot wb_0 = w(w^{-1}Nw)\cdot b_0$ e o espaço tangente a $(w^{-1}Nw)\cdot b_0$ em b_0 é gerada por $\mathfrak{g}_\alpha \cdot b_0$ com $\alpha < 0$ tal que $\alpha = w^{-1}\beta$ e $\beta > 0$, isto é, $w\cdot\alpha > 0$. Como $(dw)\,(\mathfrak{g}_\alpha \cdot b_0) = \mathfrak{g}_{w\cdot\alpha}\cdot b_0$, segue que $T_{wb_0}\,(N \cdot wb_0)$ é gerado por $\mathfrak{g}_\beta \cdot b_0$ com $\beta = w\cdot\alpha > 0$ tal que $w^{-1}\cdot\beta = \alpha < 0$ de onde temos o resultado. $\square$

Cálculos

Agora, podemos proceder na direção de se calcular os graus das funções p_i^ϵ, $\epsilon = 0, \pi$ em termos dos números de Killing.

Proposição 2.1.7. $\deg(p_i^0) = (-1)^I$ *e* $\deg(p_i^\pi) = (-1)^{I+1+\sigma}$, *onde*

$$\sigma = \sigma\left(w, w'\right) = \sum_{\beta\in\Pi_u} \frac{2\langle\alpha_i,\beta\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} \dim \mathfrak{g}_\beta, \qquad \Pi_u = \Pi^+ \cap u\Pi^-, \qquad u = r_{i+1}\cdots r_n, \tag{2.1}$$

e I é a soma das multiplicidades das raízes α_j com $j \leq i$.

Prova: A função p_i^0 é a projeção da face $(t_1, \ldots, 0, \ldots, t_n)$ do cubo d-dimensional sobre o cubo $(d-1)$-dimensional com coordenadas $(t_1, \ldots, \hat{t_i}, \ldots, t_n)$. Note que, com respeito à base $e_1, \ldots, e_d$, a i-ésima coordenada aparece na I-ésima posição. Logo, pela orientação do cubo, discutida acima, segue que a projeção preserva ou reverte a orientação se I é par ou ímpar, respectivamente. Portanto, $\deg(p_i^0) = (-1)^I$.

Para obter o grau de $\deg(p_i^\pi)$, escreva $m_i = m_{\alpha_i}$ para o elemento de M que aparece na expressão de p_i^π. Vimos acima que sua ação em $\mathbb{F}$ deixa invariante qualquer célula de Bruhat $N \cdot wb_0$ (pois $m_i N m_i^{-1} = N$ e $m_i w b_0 = wb_0$), e assim qualquer célula de Schubert. Mais ainda, a restrição de m_i a $N \cdot wb_0$ é um difeomorfismo (dado pela conjugação $y \in N \mapsto m_i y m_i^{-1}$).

Em particular, restingimos a ação de m_i à célula $\mathcal{S}_u$ com $u = r_{i+1} \cdots r_n$. Utilizando a parametrização desta célula pelo cubo B_u, temos que

$$m_i \psi_{i+1}(t_{i+1}) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_0 = \psi_{i+1}(s_{i+1}) \cdots \psi_n(s_n) \cdot b_0,$$

com $(s_{i+1}, \ldots, s_n) = \overline{m}_i(t_{i+1}, \ldots, t_n)$ sendo $\overline{m}_i : B_u \to B_u$ contínua, difeomorfismo no interior de B_u.

Logo, em termos de coordenadas, $p_i^\pi(t_1, \ldots, \pi, \ldots, t_n)$ torna-se a composição da projeção das $(i-1)$ primeiras coordenadas com a projeção $\overline{m}_i$ das últimas j coordenadas, $j = i + 1, \ldots, n$.

Pela escolha da orientação de $B_w = [0, \pi]^d$, a face $(t_1, \ldots, \pi, \ldots, t_n)$ de B_w tem orientação $(-1)^{I+1}$ com respeito à orientação das coordenadas $(t_1, \ldots, \widehat{t_i}, \ldots, t_n)$. Logo, depois de colapsar a froteira a um ponto, obtemos o grau

$$\deg p_i^\pi = (-1)^{I+1} \deg \overline{m}_i.$$

O grau de $\overline{m}_i$ é igual ao grau local em um ponto. Pelo que dissemos, este corresponde ao sinal do determinante da diferencial $d(m_i)_{ub_0}$ restrita ao espaço tangente da célula de Bruhat $N \cdot ub_0$ em ub_0:

$$\deg(p_i^\pi) = (-1)^{I+1} \mathrm{sgn}[\det\left(d(m_i)_{ub_0} | T_{ub_0}(N \cdot ub_0)\right)].$$

Pela terceira afirmação do Lema 2.1.6, o espaço tangente $T_{ub_0}(N \cdot ub_0)$ se identifica a $\sum_{\beta \in \Pi_w} \mathfrak{g}_\beta$.

Uma vez que temos os geradores $\mathfrak{g}_\beta \cdot ub_0$, $\beta \in \Pi_w$ para $T_{ub_0}(N \cdot ub_0)$ juntamente com a ação de $\mathrm{Ad}(m_i)$ sobre $\mathfrak{g}_\beta$ dada pelo Lema 1.2.8, $\mathrm{Ad}(m_\alpha)_{|\mathfrak{g}_\beta} = (-1)^{\epsilon(\alpha,\beta)}\mathrm{id}$, cncluímos que o sinal do $\det\left(d(m_i)_{ub_0} | T_{ub_0}(N \cdot ub_0)\right) = (-1)^\sigma$ onde

$$\sigma = \sum_{\beta \in \Pi_u} \frac{2\langle \alpha_i, \beta \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \dim \mathfrak{g}_\beta.$$

□

Resumindo, temos as seguintes expressões algébricas para o coeficiente $c\,(w, w')$.

Teorema 2.1.8. *Seja $\sigma(w,w')$ definido como em (2.1). Então*

$$c(w,w') = \deg\left(\Phi_{w'}^{-1}\circ\Psi_{w'}\right)(-1)^I(1-(-1)^{\sigma(w,w')}).$$

Agora, vamos derivar ainda uma outra fórmula para $\sigma(w,w')$ que não depende da escolha de decomposições minimais de w e w'. Esta fórmula se assemelha a encontrada no Teorema A do artigo de [33].

Para $w\in\mathcal{W}$, seja

$$\phi(w) = \sum_{\beta\in\Pi_w}\dim\mathfrak{g}_\beta\cdot\beta$$

a soma das raízes em $\Pi_w = \Pi^+\cap w\Pi^-$ contando-se as multiplicidades de cada raiz.

Como antes, seja $w = r_1\cdots r_n$ e $w' = r_1\cdots\widehat{r_i}\cdots r_n$ decomposições minimais.

Proposição 2.1.9. *Seja β a única raiz (não necessariamente simples) tal que $w = r_\beta w'$, isto é, $\beta = r_1\cdots r_{i-1}\alpha_i$. Então*

$$\phi(w)-\phi(w') = (1-\sigma)\beta$$

onde $\sigma = \sigma(w,w')$ é a soma (2.1).

Prova: Pelas decomposições minimais $w^{-1} = r_n\cdots r_1$ e $w'^{-1} = r_n\cdots\hat{r}_i\cdots r_1$ e $u^{-1} = r_n\cdots r_{i+1}$, temos os seguinte conjuntos:

$$\begin{aligned}
\Pi_w &= \{\alpha_1, r_1\alpha_2,\ldots,r_1\cdots r_{i-2}\alpha_{i-1}, r_1\cdots r_{i-1}\alpha_i, r_1\cdots r_i\alpha_{i+1},\ldots,r_1\cdots r_{n-1}\alpha_n\}\\
\Pi_{w'} &= \{\alpha_1, r_1\alpha_2,\ldots,r_1\cdots r_{i-2}\alpha_{i-1}, r_1\cdots r_{i-1}\alpha_{i+1},\ldots,r_1\cdots\hat{r}_i\cdots r_{n-1}\alpha_n\}\\
\Pi_u &= \{\alpha_{i+1}, r_{i+1}\alpha_{i+2},\ldots,r_{i+1}\cdots r_{n-1}\alpha_n\}
\end{aligned}$$

Observer que as primeiras $i-1$ raízes de Π_w e $\Pi_{w'}$ coincidem. As raízes restantes são relacionadas pelas igualdades

$$(r_1\cdots r_{i-1})r_i\cdots r_j\alpha_{j+1} = r_\beta(r_1\cdots r_{i-1})r_{i+1}\cdots r_j\alpha_{j+1}, \qquad j=i,\ldots,n-1,$$

pois $(r_1\cdots r_{i-1})r_i(r_1\cdots r_{i-1})^{-1} = r_{r_1\cdots r_{i-1}\alpha_i} = r_\beta$. Logo, as raízes restantes $r_1\cdots r_j\alpha_{j+1}$ e as raízes $r_1\cdots\hat{r}_i\cdots r_j\alpha_{j+1}$ tem a mesma multiplicidade d_j, $j=i,\ldots,n-1$. Escreva $\gamma_j = r_{i+1}\cdots r_j\alpha_{j+1}$, de modo que $\Pi_u = \{\gamma_i,\gamma_{i+1},\ldots,\gamma_{n-1}\}$. Então

$$\phi(w)-\phi(w') = \beta + \sum_{j=i}^{n-1} d_j(r_1\cdots r_{i-1})\left(r_i(\gamma_j)-\gamma_j\right) \tag{2.2}$$

pois $\beta = r_1\cdots r_{i-1}\alpha_i$ tem multiplicidade 1 asim como α_i.

Como $r_i(\gamma_j)-\gamma_j = -\dfrac{2\langle\alpha_i,\gamma_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\alpha_i$, reescrevemos (2.2) como

$$\begin{aligned}
\phi(w)-\phi(w') &= \left(1-\sum_{j=i}^{n-1} d_j\frac{2\langle\alpha_i,\gamma_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}\right)\beta \qquad (2.3)\\
&= (1-\sigma)\beta
\end{aligned}$$

concluindo a prova. □

Combinando a proposição acima com o Teorema 2.1.8 obtemos imediatamente a seguinte fórmula para $c\,(w, w')$ (veja [33], Teorema A).

Teorema 2.1.10.

$$c(w, w') = \deg\left(\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}\right)(-1)^{I}(1 + (-1)^{k}) \tag{2.4}$$

onde k é o inteiro definido por $\phi(w) - \phi(w') = k \cdot \beta$ e β é a única raiz tal que $w = r_\beta w'$.

Observação: Se $w = r_1 \cdots r_n$ e $w' = r_1 \cdots r_{i-1}$ então $c(w, w') = 0$ porque m_{α_n} não afeta o cálculo dos degraus (veja Proposição 2.1.7). Isto pode ser visto alternativamente do seguinte modo: $\Pi_w = \Pi_{w'} \cup \{\beta = w'\alpha_n\}$ e, portanto, $\phi(w) - \phi(w') = \beta$ a qual fornece $k = 1$ e consequentemente $c(w, w') = 0$ na fórmula (2.4).

Exemplo: Existem apenas dois grupos com diagrama de Dynkin G_2. A saber, o grupo complexo e a forma real normal. Para o grupo complexo, temos que $\partial = 0$.

Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ o conjunto das raízes simples. As outras raízes positivas são $\Pi^+ \setminus \Sigma = \{\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_6 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$. O grupo de Weyl, fixando as decomposições minimais, é dado por

$$\mathcal{W} = \{1, r_1, r_2, s_1 = r_1 r_2, s_2 = r_2 r_1, r_1 s_2, r_2 s_1, s_1^2, s_2^2 r_1 s_2^2, r_2 s_1^2, s_1^3\}.$$

onde $r_i = r_{\alpha_i}$ são as reflexões simples e $s_1^3 = s_2^3$ é o único elemento com duas decomposições minimais diferentes. Para aplicar a fórmula (2.4), é útil montar a tabela abaixo.

Homologia do *flag* maximal de G_2		
$\mathcal{W}$	Π_w	$\phi(w)$
1	$\emptyset$	0
r_1	α_1	α_1
r_2	α_2	α_2
s_1	α_1, α_3	$2\alpha_1 + \alpha_2$
s_2	α_2, α_5	$\alpha_1 + 4\alpha_2$
$r_1 s_2$	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6$	$4\alpha_1 + 4\alpha_2$
$r_2 s_1$	$\alpha_2, \alpha_5, \alpha_4$	$2\alpha_1 + 6\alpha_2$
s_1^2	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_4$	$5\alpha_1 + 6\alpha_2$
s_2^2	$\alpha_2, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_6$	$4\alpha_1 + 9\alpha_2$
$r_1 s_2^2$	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_4, \alpha_5$	$6\alpha_1 + 9\alpha_2$
$r_2 s_1^2$	$\alpha_2, \alpha_5, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_3$	$5\alpha_1 + 10\alpha_2$
s_1^3	Π^+	$6\alpha_1 + 10\alpha_2$

Pela fórmula (2.4) o operador fronteira é dado por **Nível 1:** $\partial\mathcal{S}_{r_1} = \partial\mathcal{S}_{r_2} = 0$; **Nível2:** $\partial\mathcal{S}_{s_1} = -2\mathcal{S}_{r_2}$ e $\partial\mathcal{S}_{s_2} = -2\mathcal{S}_{r_1}$; **Nível 3:** $\partial\mathcal{S}_{r_1s_2} = \partial\mathcal{S}_{r_2s_1} = 0$; **Nível 4:** $\partial\mathcal{S}_{s_1^2} = \partial\mathcal{S}_{s_2^2} = 0$; **Nível 5:** $\partial\mathcal{S}_{r_1s_2^2} = -2\mathcal{S}_{s_2^2}$ e $\partial\mathcal{S}_{r_2s_1^2} = -2\mathcal{S}_{s_1^2}$; **Nível 6:** $\partial\mathcal{S}_{s_1^3} = 0$.

Neste caso, os grupos de homologia sobre $\mathbb{Z}$ são do *flag* maximal da forma real normal de G_2 são

- $H_6(\mathbb{F}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_5(\mathbb{F}, \mathbb{Z}) = 0$.
- $H_4(\mathbb{F}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
- $H_3(\mathbb{F}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $H_2(\mathbb{F}, \mathbb{Z}) = 0$.
- $H_1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

2.2 Homologia das Variedades *Flag* Parciais

Nesta seção, projetamos sobre as variedades *flag* parciais as contruções feitas nas variedades *flag* maximais através da projeção canônica $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$, para obter resultados análogos para a homologia destes espaços.

2.2.1 Representantes minimais em $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$

As células de Schubert nas variedades *flag* parciais $\mathbb{F}_\Theta$ são

$$\mathcal{S}_w^\Theta\,, w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$$

onde $\mathcal{S}_w^\Theta = \mathcal{S}_{w_1}^\Theta$ se e somente se $w\mathcal{W}_\Theta = w_1\mathcal{W}_\Theta$ pois $\pi_\Theta\,(wb_0) = \pi\,(w_1b_0)$. Portanto, a pré-imagem de uma célula de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta$ pela projeção π_Θ são todas as células S_w, $w \in w\mathcal{W}_\Theta$. O próximo lema apresenta uma escolha de um representante especial em $w\mathcal{W}_\Theta$ para $\mathcal{S}_w^\Theta$.

Lema 2.2.1. *Existe um elemento $w^\Theta = wu$ da classe lateral $w\mathcal{W}_\Theta$ tal que*

$$\dim\mathcal{S}_w^\Theta = \dim\mathcal{S}_{w^\Theta}.$$

Este elemento é único e minimal com respeito à ordem de Bruhat-Chevalley.

Prova: Para $w \in \mathcal{W}$, $\dim\mathcal{S}_w^\Theta = \dim\mathcal{S}_w$ se e somente se o espaço tangente $T_{wb_0}\,(\mathcal{S}_w)$ da célula de Schubert $\mathcal{S}_w$ em wb_0 complementa o espaço tangente $T_{wb_0}\left(\pi_\Theta^{-1}(wb_\Theta)\right)$ à fibra de wb_Θ pela projeção canônica π_Θ em wb_0.

Pelo Lema 2.1.6, o espaço tangente $T_{wb_0}(\mathcal{S}_w)$ é dado por

$$T_{wb_0}(N \cdot wb_0) = \sum \left\{ \mathfrak{g}_\beta : \beta \in \Pi^+ \cap w\Pi^- \right\} \cdot wb_0.$$

Por outro lado, o espaço tangente a fibra $\pi_\Theta^{-1}(wb_\Theta)$ é a translação sob w do espaço tangente à fibra na origem. Logo, $T_{wb_0}(\pi_\Theta^{-1}(wb_\Theta))$ é gerado por $w(\mathfrak{g}_\alpha \cdot b_0)$, com $\alpha \in \langle\Theta\rangle$ e $\alpha < 0$. Pela fórmula de translação, temos que $w_1(\mathfrak{g}_\alpha \cdot b_0) = \mathfrak{g}_{w\alpha} \cdot wb_0$. Portanto, escrevendo $\beta = w\alpha$ concluímos que $T_{wb_\Theta}\left(\pi_\Theta^{-1}(wb_\Theta)\right)$ é gerado por $\mathfrak{g}_\beta \cdot wb_0$ com $w^{-1}\beta \in \langle\Theta\rangle$ e $w^{-1}\beta < 0$, isto é, com $w^{-1}\beta \in \Pi^- \cap \langle\Theta\rangle$. Assim, obtemos que

$$T_{wb_0}(\pi_\Theta^{-1}(wb_\Theta)) = \sum \left\{ \mathfrak{g}_\beta : \beta \in w\Pi^- \cap w\langle\Theta\rangle \right\} \cdot wb_0.$$

Portanto,

$$T_{wb_0}(N \cdot wb_0) \cap T_{wb_0}(\pi_\Theta^{-1}(wb_\Theta)) = \sum \left\{ \mathfrak{g}_\beta : \beta \in \Pi^+ \cap w\Pi^- \cap w\langle\Theta\rangle \right\} \cdot wb_0.$$

Esta interseção é nula se e somente se $\Pi^+ \cap w\Pi^- \cap w\langle\Theta\rangle = \emptyset$. Pela Equação (1.3) que caracteriza os elementos em $\mathcal{W}^\Theta$, existe um único elemento $w^\Theta \in \mathcal{W}^\Theta$, minimal em sua classe $w\mathcal{W}_\Theta$, tal que $\Pi^+ \cap w^\Theta\Pi^- \cap w^\Theta\langle\Theta\rangle = \emptyset$ e obtemos o resultado.

□

2.2.2 Decomposição Celular de $\mathbb{F}_\Theta$

Agora, vamos construir uma decomposição celular para $\mathbb{F}_\Theta$ utilizando os representantes minimais $w \in \mathcal{W}^\Theta$ nas classes laterais $w\mathcal{W}_\Theta$ fornecidos no Lema 2.2.1, para os quais $\dim \mathcal{S}_w^\Theta = \dim \mathcal{S}_w$. Uma decomposição minimal de um tal elemento w fornece uma nova função Φ_w^Θ, definida no mesmo modo que no caso das variedades *flag* maximais, nas quais substituímos a origem b_0 de $\mathbb{F}$ pela origem b_Θ de $\mathbb{F}_\Theta$, isto é,

$$\Phi_w^\Theta(t_1, \ldots, t_n) = \psi_1(t_1) \cdots \psi_n(t_n) \cdot b_\Theta.$$

Por equivariância, $\Phi_w^\Theta = \pi_\Theta \circ \Phi_w$. Esta função satisfaz as propriedades requeridas de uma função característica para a célula de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta$.

Proposição 2.2.2. *Seja $w \in \mathcal{W}^\Theta$ tal que $\dim \mathcal{S}_w^\Theta = \dim \mathcal{S}_w$ e seja $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição minimal como um produto em termos das reflexões simples. Seja $\Phi_w^\Theta : B_w \to \mathbb{F}_\Theta$ definida por $\Phi_w^\Theta = \pi_\Theta \circ \Phi_w$ e tome $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in B_w$. Então Φ_w^Θ é uma função característica para $\mathcal{S}_w^\Theta$, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\Phi_w^\Theta(B_w) = \mathcal{S}_w^\Theta$.

2. $\Phi_w^\Theta(\mathbf{t}) \in \mathcal{S}_w^\Theta \setminus N \cdot wb_\Theta$ *se e somente se* $\mathbf{t} \in \partial B_w = S^{d-1}$.

3. $\Phi^{\Theta}_{w}|_{B^{\circ}_{w}} : B^{\circ}_{w} \to N \cdot wb_{\Theta}$ *é um homeomorfismo, onde* B°_{w} *é o interior de* B_w.

Prova: Esta é a Proposição 1.2.9 neste contexto das variedades *flag* parciais. O primeiro item segue pela equivariância de Π_{Θ}. A segunda afirmativa segue pelo fato de que $\pi_{\Theta}(\mathcal{S}_w \backslash N \cdot wb_0) = \mathcal{S}^{\Theta}_{w} \setminus N \cdot wb_{\Theta}$ e $\Phi^{\Theta}_{w} = \pi_{\Theta} \circ \Phi_w$. O último item é uma consequência da igualdade das dimensões das células de Bruhat $N \cdot wb_0$ e $N \cdot wb_{\Theta}$. □

2.2.3 O operador fronteira ∂^{Θ}

Agora, podemos determinar o operador fronteira ∂^{Θ} com coeficientes $c^{\Theta}([w],[w'])$, onde $[w]$ denota a classe lateral $w\mathcal{W}_{\Theta}$. Temos que $c^{\Theta}([w],[w']) = 0$ exceto quando valem simultaneamente as seguintes condições:

1. $\dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w} = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w'} + 1$
2. $\mathcal{S}^{\Theta}_{w'} \subset \mathcal{S}^{\Theta}_{w}$.

A inclusão entre células de Schubert é dada pela ordem de Bruhat-Chevalley (veja (1.4)). Explicitamente, $\mathcal{S}^{\Theta}_{w'} \subset \mathcal{S}^{\Theta}_{w}$ se e somente se existe $u \in w'\mathcal{W}_{\Theta}$ tal que $u < w$. Na verdade, temos o seguinte complemento do Lema 2.2.1.

Lema 2.2.3. *Seja* $w \in \mathcal{W}^{\Theta}$ *minimal em sua classe lateral e suponha que exista* $u \in w'\mathcal{W}_{\Theta}$ *com* $u < w$ *e* $\dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w} = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w'} + 1$. *Então* u *é minimal em* $w'\mathcal{W}_{\Theta}$.

Prova: Temos que $\dim \mathcal{S}_w = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w} = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{u} + 1 \leq \dim \mathcal{S}_u + 1$. Agora, se $u < w$ então $\dim \mathcal{S}_u \leq \dim \mathcal{S}_w - 1$, de modo que $\dim \mathcal{S}_w \leq \dim \mathcal{S}_u + 1 \leq \dim \mathcal{S}_w$, o qual implica que

$$\dim \mathcal{S}_u = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w} - 1 = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{u}.$$

E, portanto, u é minimal em sua classe lateral. □

Exemplo: No grupo de Weyl S_4 de A_3 tome $w = (12)(23)(34)$ e $\Theta = \{\alpha_{23}\}$. Então w é minimal na classe $w\mathcal{W}_{\{\alpha_{23}\}}$. Observe que as raízes α_{12}, $(12)\alpha_{23} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$ e $(12)(23)\alpha_{34} = \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{34}$ são raízes positivas levadas em raízes negativas por w^{-1} e nenhuma destas raízes pertence a $\langle \Theta \rangle$. Entretanto, $w' = (12)(23) = (123)$ não é minimal em sua classe pois $(12) < (12)(23)$ e ambos pertencem a mesma classe. Agora, $\dim \mathcal{S}_{(12)(23)} = \dim \mathcal{S}_w - 1$ mas $\mathcal{S}^{\Theta}_{(12)(23)} = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{(12)} = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w} - 2$.

Voltando à determinação dos coeficientes $c([w],[w'])$, se w e w' pertencem a $\mathcal{W}^{\Theta}$ e $\dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w} = \dim \mathcal{S}^{\Theta}_{w'} + 1$ então existem homeomorfismos $\pi_{\Theta} : N \cdot wb_0 \to N \cdot wb_{\Theta}$ e $\pi_{\Theta} : N \cdot w'b_0 \to N \cdot w'b_{\Theta}$. Isto implica que a função de colagem entre $\mathcal{S}^{\Theta}_{w}$ e $\mathcal{S}^{\Theta}_{w'}$ definida por $\Phi^{\Theta}_{w} = \pi_{\Theta} \circ \Phi_w$ e por $\Phi^{\Theta}_{w'} \circ \Phi_{w'}$

é a mesma função de colagem entre $\mathcal{S}_w$ e $\mathcal{S}_{w'}$. Logo os coeficientes para ∂^Θ e ∂ são os mesmos, isto é:

$$c^\Theta([w],[w']) = c(w,w').$$

Segue o cálculo de $c^\Theta([w],[w'])$ se reduz ao cálculo em $\mathbb{F}$.

Teorema 2.2.4. *A homologia celular de $\mathbb{F}_\Theta$ é isomorfa à homologia de $\partial^\Theta_{\min}$ que é o operador fronteira do módulo livre $\mathcal{A}^{\min}_\Theta$ gerado por $\mathcal{S}_w$, $w \in \mathcal{W}^\Theta$, obtido por restrição de ∂ e projetando sobre $\mathcal{A}^{\min}_\Theta$.*

Corolário 2.2.5. $c^\Theta([w],[w']) = 0$ *ou* ± 2. *Em particular, tomando-se os coeficientes em $\mathbb{Z}_2$, $\partial^\Theta = 0$ e a $\mathbb{Z}_2$-homologia de $\mathbb{F}_\Theta$ é livremente gerada por $\mathcal{S}^\Theta_{[w]}$, $[w] \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$.*

Observação: Em geral, o módulo livre $\mathcal{A}^{\min}_\Theta$ gerado por $\mathcal{S}_w$, $w \in \mathcal{W}^\Theta$, não é invariante sob ∂. Os cálculos feitos para o caso do grupo $\mathrm{Sl}(5,\mathbb{R})$ na seção 4.3 mostram isto.

Concluímos esta seção com o seguinte exemplo da homologia de uma variedade *flag* parcial de G_2.

Exemplo: Vamos considerar o exemplo de G_2 com $\Theta = \{\alpha_1\}$. Temos as seguintes classes laterais

$$\mathcal{W} = \{1, r_1\}, \{r_2, s_2\}, \{s_1, r_1 s_2\}, \{r_2 s_1, s_2^2\}, \{s_1^2, r_1 s_2^2\}, \{r_2 s_1^2, s_1^3\}.$$

O operador fronteira para os elementos minimais em cada classe foram calculados anteriormente. São dados por: **Nível 1:** $\partial \mathcal{S}_{r_2} = 0$; **Nível 2:** $\partial \mathcal{S}_{s_1} = -2\mathcal{S}_{r_2}$; **Nível 3:** $\partial \mathcal{S}_{r_2 s_1} = 0$; **Nível 4:** $\partial \mathcal{S}_{s_1^2} = 0$; **Nível 5:** $\partial \mathcal{S}_{r_2 s_1^2} = -2\mathcal{S}_{s_1^2}$.

Logo, após alguns cálculos, temos que:

- $H_5(\mathbb{F}_{\alpha_1}, \mathbb{Z}) = 0$ (em particular $\mathbb{F}_{\{\alpha_1\}}$ não é orientável).
- $H_4(\mathbb{F}_{\alpha_1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.
- $H_3(\mathbb{F}_{\alpha_1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_2(\mathbb{F}_{\alpha_1}, \mathbb{Z}) = 0$.
- $H_1(\mathbb{F}_{\alpha_1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

2.3 Fluxo Gradiente

É conhecido que o campo vetorial $\widetilde{H}$, com fluxo $\exp tH$ induzido em uma variedade *flag* $\mathbb{F}$ por um elemento regular $H \in \mathfrak{a}^+$ ($\alpha(H) \neq 0$, para todas as raízes $\alpha \in \Pi^+$), é o gradiente de uma função de Morse. As singularidades deste fluxo são wb_0, $w \in \mathcal{W}$, cujas variedades instáveis e estáveis são as células de Bruhat $W^u(wb_0) = N \cdot wb_0$ e $W^s(ub_0) = N^- \cdot ub_0$ (para mais detalhes, veja [23] e [39]). As variedades instáveis e estáveis se interceptam transversalmente de modo que o campo vetorial gradiente satisfaz a condição de Morse-Smale e, portanto, define um complexo de Morse-Witten (Veja Arango [1]). Em [33] calcula-se o operador fronteira deste complexo para se obter um resultado semelhante ao apresentado aqui.

O operador fronteira do complexo de Morse-Witten é calculado pela contagem do número de órbitas (orientadas) do fluxo gradiente que conecta duas singularidades. Vamos descrever abaixo estas órbitas em termos das funções características da decomposição celular construída na seção 1.2.

Tome $w = r_1 \cdots r_n \in \mathcal{W}$ com função característica Φ_w, e seja $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n$ com $\dim \mathcal{S}_{w'} = \dim \mathcal{S}_w - 1$.

Observe que, por construção, $wb_0 = \Phi_w\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}\right)$, é a imagem do centro do cubo. Agora, considere o caminho

$$\phi_i(t) = \Phi_w\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, t, \ldots, \frac{\pi}{2}\right) \qquad t \in [0, \pi]$$

onde t esta na i-ésima posição. Então $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = w \cdot b_0$, $\phi(0) = w' \cdot b_0$ provém da 0-face e $\phi(\pi) = w' \cdot b_0$ provém da π-face. Vamos provar abaixo que as duas partes de $\phi_i(t)$, de $\pi/2$ a π e de 0 a $\pi/2$ (no sentido oposto) são as duas linhas gradientes que conectam as singularidades $w \cdot b_0$ e $w' \cdot b_0$.

Para simplificar as fórmulas, podemos assumir aqui que as decomposições minimais para w e w' coincidem com a escolha feita a priori para os elementos do grupo de Weyl $\mathcal{W}$. Isto significa que, na equação (2.4), o termo $\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'} = \mathrm{id}$.

No que se segue, escrevemos $w' = r_1 \cdots \hat{r_i} \cdots r_n = u \cdot v$, isto é, $u = r_1 \cdots r_{i-1}$ e $v = r_{i+1} \cdots r_n$. Ponha $X_\beta = \mathrm{Ad}(u) X_{\alpha_i}$, $Y_\beta = \theta(X_\beta)$ e $A_\beta = X_\beta + Y_\beta$.

Lema 2.3.1. *Com as notações acima*

$$\phi_i(t) = \exp(sA_\beta) wb_0$$

onde $s = t + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *se* $t \in [0, \pi]$.

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}
\phi_i(t) &= u \exp(tA_i) vb_0 \\
&= u \exp(tA_i) r_i r_i vb_0 \\
&= u \exp(tA_i) \cdot \exp\left(\left(\frac{\pi}{2}\right) A_i\right) r_i vb_0 \\
&= \exp\left(\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{Ad}(u) A_i\right) wb_0 \\
&= \exp(sA_\beta) wb_0
\end{aligned}$$

pois $\beta = u\alpha_i$ implica que $A_\beta = \mathrm{Ad}(u)A_i$. $\square$

Vamos considerar $\phi_i(s) = \exp(sA_\beta)wb_0$. Segue que $\phi_i(0) = wb_0$, $\phi_i(\pm\frac{\pi}{2}) = w'b_0$.

Lema 2.3.2. $\exp(tY_\beta)wb_0 = wb_0$.

Prova: A idéia principal é transladar para a origem. Isto é,

$$\exp(tX_{-\beta})wb_0 = w(w^{-1}\exp(tX_{-\beta}))wb_0 = w\exp(t\mathrm{Ad}(w^{-1}X_{-\beta}))b_0.$$

A raiz β é positiva enquanto $w^{-1}\beta$ é negativa. Como $u(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{u\alpha}$ temos que $\mathrm{Ad}(w^{-1}X_{-\beta}) \in \mathfrak{g}_{-w^{-1}\beta}$. Mas, como $w^{-1}\beta$ é uma raiz negativa, $-w^{-1}\beta$ é positiva. Portanto, este pertence a $\mathfrak{n}^+ \subset \mathfrak{p}$ e, portanto, $\exp(t\mathrm{Ad}(w^{-1}X_{-\beta}))b_0 = b_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Lema 2.3.3. *Seja* $t = \tan(s), r = -\mathrm{sen}(s)\cos(s), \lambda = \cos(s)^{-1}$. *Logo*

$$\phi_i(s) = e^{tX_\beta}e^{rY_\beta}e^{\log(\lambda)H_\beta^\vee}wb_0.$$

Prova: Veja [33], Lema 2.4.1. $\square$

Observe, entretanto, que ambas as matrizes $e^{\log(\lambda)H_\beta^\vee}$ e $e^{rY\beta}$ fixam wb_0. Isto diz que

$$\phi_i(s) = e^{\tan(s)X_\beta}wb_0\,,\ s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.5}$$

e, finalmente, temos que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \exp^{tX_\beta} wb_0 = \phi_i\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = w'b_0.$$

Pela equação (2.5) obtemos o comportamento do fluxo gradiente $h^t = \exp tH$ com $H \in \mathfrak{a}^+$.

Seja $s \neq 0$. É fácil ver que $h^t(\phi_i(s)) = \exp(\tan(s)e^{t\beta(H)}X_\beta)\cdot wb_0$. Isto pode ser escrito como $h^t(\phi_i(s)) = \phi_i(s')$ com $s' = \arctan(\tan(s)e^{t\beta(H)})$. Portanto, concluímos que o caminho ϕ_i é invariante pelo fluxo gradiente.

Observe que β é uma raiz positiva. Logo $e^{t\beta(H)}X_\beta \to 0$ quando $t \to -\infty$ e, portanto, $s' \to 0$, isto é,

$$\lim_{t\to-\infty} h^t\phi_i(s) = \phi_i(0) = wb_0.$$

Quando $t \to +\infty$, segue que $\tan(s)e^{t\beta(H)}X_\beta \to \pm\infty$, dependendo apenas do sinal de $\tan(s)$. Logo $s' \to \pm\frac{\pi}{2}$, isto é,

$$\lim_{t\to+\infty} h^t\phi_i(s) = \phi_i\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right) = w'b_0.$$

E, portanto, chegamos ao resultado esperado.

Proposição 2.3.4. $\phi_i(s)$ *fornece duas linhas do campo gradiente entre* wb_0 *e* $w'b_0$. *Um deles pertence ao intervalo* $s \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *enquanto o outro pertence ao intervalo* $s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Capítulo 3

Flags de $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ e $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$

Este capítulo tem como objetivo ilustrar a teoria dos capítulos anteriores nos casos em que $G = \mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ e $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ cujas álgebras de Lie de ambos tem posto 2. Neste caso, serão apresentadas as decomposições de Cartan, Iwasawa e Bruhat, as três variedades *flag* associadas às respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ assim como o cálculo de seus grupos de homologia. Além disto, será exibido o cálculo para a homologia da variedade *flag* maximal de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, olhando-se explicitamente para as funções de colagem, o qual serve para exemplificar o método desenvolvido na demonstração do cálculo do operador fronteira da homologia celular no capítulo anterior. Deste modo, este capítulo está dividido em duas partes de acordo com este dois exemplos. Uma primeira parte para o grupo especial linear $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ e a segunda parte para o grupo simplético $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$.

3.1 O grupo $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$

Decomposições de Cartan e Iwasawa

Seja $G = \mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ o grupo de matrizes invertíveis 3×3 de determinante 1. A sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ são as matrizes 3×3 de traço zero. A função $\theta(X) = -X^t$ é a involução de Cartan que fornece a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ onde:

1. $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \,|\, X = \theta(X) = -X^t\} = \mathfrak{so}(3)$ que é a subálgebra das matrizes anti-simétricas.

2. $\mathfrak{s} = \{Y \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \,|\, Y = -\theta(Y) = Y^t\}$ é o subespaço das matrizes simétricas.

Passando ao nível do grupo, temos a decomposição de Cartan do grupo $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R}) = \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) \cdot S$, onde S são as matrizes simétricas positivas definidas.

Fixamos a subálgebra das matrizes diagonais $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ como a subálgebra abeliana maximal. A câmara de Weyl positiva $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ é o conjunto das matrizes $H = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$ tais que

$a_1 > a_2 > a_3$. Defina $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j \in \mathfrak{a}^*$ por $\lambda_i(diag(a_1, a_2, a_3)) = a_i$. Como $[H, e_{ij}] = \alpha_{ij}(H)e_{ij}$, segue que, relativo a $\mathfrak{a}^+$, as raízes positivas são dadas por

$$\Pi^+ = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{13}\}.$$

O conjunto de raízes simples é dado por $\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\} \subset \Pi^+$ uma vez que $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$. A partir de agora, vamos denotar as raízes simples por $\alpha_1 = \alpha_{12}$ e $\alpha_2 = \alpha_{23}$. A decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$ é dada por

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

onde $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ é a subálgebra nilpotente das matrizes triangulares superiores com entradas diagonais nulas.

Passando ao nível do grupo, temos que a decomposição de Iwasawa de $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(3)AN$, onde A é o subgrupo das matrizes diagonais com entradas positivas e N é o subgrupo das matrizes triangulares superiores com entradas diagonais iguais a 1.

Grupo de Weyl

O grupo de Weyl $\mathcal{W}$ (algébrico) associado a $\mathfrak{a}$ é gerado pelas reflexões em torno do núcleo das raízes $\alpha \in \mathfrak{a}^*$. A subálgebra abeliana por ser realizada como $\mathfrak{a} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ enquanto a câmara de Weyl positiva realiza-se como

$$\mathfrak{a}^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{a} \,|\, x_1 > x_2 > x_3\}.$$

Cada $\alpha_{ij} \in \Pi$, $1 \leq i, j \leq 3$, possui 1 na i-ésima entrada e -1 na j-ésima entrada e todas as outras coordenadas nulas. Por exemplo, as raízes simples são dadas por

$$\alpha_1 = (1, -1, 0) \text{ e } \alpha_2 = (0, 1, -1)$$

As reflexões $r_{\alpha_{ij}}$ permutam as coordenadas i e j, por exemplo:

$$r_{\alpha_{13}}(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1).$$

Neste caso, o grupo de Weyl é gerado pelas reflexões $r_1 = (12)$ e $r_2 = (23)$ temos que W é o grupo S_3, grupo das permutações de três elementos. Em termos da ordem de Bruhat-Chevalley, temos a seguinte descrição:

0. $1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$.

1. $r_1 = r_{\alpha_{12}}(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$ e $r_2 = r_{\alpha_{23}}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2)$ são as reflexões simples.

2. $r_2 r_1(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$ e $r_1 r_2(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$ que são produtos de duas reflexões simples.

3. $r_1r_2r_1(x_1,x_2,x_3) = (x_3,x_2,x_1)$ que é o produto de três reflexões simples, também conhecido como involução principal e leva Π^+ em $-\Pi^+$. Note que ele corresponde à reflexão em torno da raíz α_{13} e também admite uma outra decomposição em termos das reflexões simples pois $r_1r_2r_1 = r_2r_1r_2$.

Por outro lado, o grupo de Weyl (analítico) também pode ser descrito como $\mathcal{W} = M^*/M$, onde M^* e M são o normalizador e o centralizador de $\mathfrak{a}$, respectivamente. O grupo M é discreto e é formado por 4 elementos que são as matrizes diagonais com entradas ± 1. Na tabela abaixo, é apresentada a relação entre as diferentes definições do grupo de Weyl. Como M tem quatro elementos, segue que M^* tem 24 elementos e abaixo escolhemos um representante para cada classe em M^*/M.

Grupos de Weyl $\mathcal{W} = S_3$			
Algébrico	Analítico	Algébrico	Analítico
1	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$	$r_1 = (12)$	$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$
$r_2 = (23)$	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$	$r_1r_2 = (123)$	$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$
$r_2r_1 = (132)$	$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$	$r_1r_2r_1 = (13)$	$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

Subálgebras e Subgrupos Parabólicos

Como $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, existem três subálgebras parabólicas de $\mathfrak{g}$ associadas à escolha de um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$. A subálgebra parabólica minimal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, correspondente à escolha $\Theta = \emptyset$, tem decomposição de Iwasawa $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ (pois $\mathfrak{m} = 0$ uma vez que uma matriz diagonal e anti-simétrica é a matriz nula) e corresponde às matrizes triangulares superiores em $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \right\}.$$

O subgrupo parabólico minimal tem decomposição $P = MAN$ e corresponde ao subgrupo das matrizes triangulares superiores.

As outras subálgebras parabólicas tem decomposição de Iwasawa $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, onde $\mathfrak{k}_\Theta$ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{so}(3)$, e correspondem às matrizes triangulares superiores em blocos.

$$\text{Para } \Theta = \{\alpha_1\}, \quad \mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \right\}. \tag{3.1}$$

$$\text{Para } \Theta = \{\alpha_2\}, \quad \mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \right\}. \tag{3.2}$$

Os subgrupos parabólicos tem decomposição de Iwasawa $P_\Theta = K_\Theta AN$, onde K_Θ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathrm{SO}(3)$, e correspondem ao subgrupos de matrizes triangulares superiores em bloco de acordo com a escolha para Θ, seguindo o mesmo padrão das subálgebras parabólicas. Segue abaixo uma descrição dos subgrupos $K_1 = K_{\{\alpha_1\}}$ e $K_2 = K_{\{\alpha_2\}}$ que vão desempenhar um papel importante mais adiante.

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \epsilon \begin{pmatrix} \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \epsilon = \mathrm{diag}(1,-1,-1) \right\}. \tag{3.3}$$

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) \end{pmatrix} \mid \epsilon = \mathrm{diag}(-1,-1,1) \right\}. \tag{3.4}$$

3.2 Variedades *Flag* de $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$

Vamos agora descrever cada uma das variedades *flag* de $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$ associados à escolha de um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$. Neste caso temos três escolhas possíveis.

3.2.1 O *Flag* Maximal $\mathbb{F}^3(1,2)$

Para $\Theta = \emptyset$, obtemos a variedade *flag* maximal que se realiza como a variedade de subespaços 1-dimensionais contidos em subespaços 2-dimensionais contidos no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, a qual denotamos por $\mathbb{F}^3(1,2)$, isto é:

$$\mathbb{F}^3(1,2) = \{(V_1 \subset V_2) : \dim(V_i) = i \;\; V_i \subset \mathbb{R}^3\}$$

Isto pode obtido através da ação (transitiva) de $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$ em $\mathbb{F}^3(1,2)$ definida por $(g, \langle u\rangle \subset \langle u,v\rangle) \mapsto \langle gu\rangle \subset \langle gu, gv\rangle$. Se $b_0 = \langle e_1\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle$ é a origem de $\mathbb{F}^3(1,2)$ então o estabilizador (o subgrupo de isotropia) de b_0 é o subgrupo parabólico minimal P. Portanto, temos que

$$\mathbb{F}^3(1,2) = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R}) \cdot b_0 = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})/\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})_{b_0} = G/P.$$

Decomposição de Bruhat de $\mathbb{F}^3(1,2)$

Para estabelecer a decomposição de Bruhat $\mathbb{F}^3(1,2) = \coprod_{w\in\mathcal{W}} N\cdot wb_0$, vamos inicialmente determinar os pontos fixos da A-ação que são parametrizados por $\mathcal{W} = S_3$ que podem ser obtidos aplicando-se a permutação sobre os índices da origem.

$$\begin{aligned}
1b_0 &= 1\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle \\
r_1b_0 &= (12)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_2\rangle \subset \langle e_2,e_1\rangle \\
r_2b_0 &= (23)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_3\rangle \\
r_1r_2b_0 &= (123)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_2\rangle \subset \langle e_2,e_3\rangle \\
r_2r_1b_0 &= (132)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_3\rangle \subset \langle e_3,e_1\rangle \\
r_1r_2r_1b_0 &= (13)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_3\rangle \subset \langle e_3,e_2\rangle
\end{aligned}$$

Lembremos que N é o subgrupo das matrizes triangulares superiores com entradas diagonais iguas a 1 e, portanto, podemos representar a ação de N na base canônica $\{e_1,e_2,e_3\}$ por $N(e_1) = e_1$, $N(e_2) = e_2 + *e_1$ e $N(e_3) = e_3 + *e_2 + *e_1$. Agora, podemos decompor $\mathbb{F}^3(1,2)$ nas 6 células de Bruhat que são descritas por:

0. A 0-célula $C_{(1)} = N\cdot 1b_0$ onde:

$$N\cdot 1b_0 = N(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle.$$

1. As 1-células são $C_{(12)} = N\cdot r_1b_0$ e $C_{(23)} = N\cdot r_2b_0$ onde:

$$\begin{aligned}
N\cdot r_1b_0 &= N(\langle e_2\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_2 + *e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle \\
N\cdot r_2b_0 &= N(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_3\rangle) = \langle e_1\rangle \subset \langle e_3 + *e_2, e_1\rangle
\end{aligned}$$

2. As 2-células são $C_{(123)} = N\cdot(r_1r_2)b_0$ e $C_{(132)} = N\cdot(r_2r_1)b_0$ onde:

$$\begin{aligned}
N\cdot(r_1r_2)b_0 &= N(\langle e_2\rangle \subset \langle e_2,e_3\rangle) = \langle e_2 + *e_1\rangle \subset \langle e_2 + *e_1, e_3 + *e_1\rangle \\
N\cdot(r_2r_1)b_0 &= N^-(\langle e_3\rangle \subset \langle e_1,e_3\rangle) = \langle e_3 + *e_2 + *e_1\rangle \subset \langle e_1, e_3 + *e_2\rangle
\end{aligned}$$

3. A 3-célula $C_{(13)} = N\cdot(r_1r_2r_1)b_0$ onde:

$$N\cdot(r_1r_2r_1)b_0 = N(\langle e_3\rangle \subset \langle e_2,e_3\rangle) = \langle e_3 + *e_2 + *e_1\rangle \subset \langle e_2 + *e_1, e_3 + *e_2 + *e_1\rangle$$

3.2.2 Homologia de $\mathbb{F}^3(1,2)$

Agora vamos ilustrar a descrição do operador fronteira ∂ no caso da variedade *flag* maximal $\mathbb{F}^3(1,2)$. Para isto, fixamos a seguinte decomposição minimal para os elementos de $\mathcal{W} = S_3$:

$$1, (12), (23), (123) = (12)(23), (132) = (23)(12), (13) = (12)(23)(12).$$

Sejam $A = e_{12}-e_{21}$ e $B = e_{23}-e_{32}$ as matrizes cujas exponenciais forneçam parametrizações para os grupos compactos K_1 e K_2, respectivamente (veja (3.3) e (3.4)).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com estas escolhas, as células de Schubert podem ser obtidas como:

1. $\mathcal{S}_1 = b_0$.
2. $\mathcal{S}_{(12)} = K_1 \cdot b_0$ e $\mathcal{S}_{(23)} = K_2 \cdot b_0$.
3. $\mathcal{S}_{(123)} = K_1K_2 \cdot b_0$ e $\mathcal{S}_{(132)} = K_2K_1 \cdot b_0$.
4. $\mathcal{S}_{(13)} = K_1K_2K_1 \cdot b_0$.

de modo que as respectivas funções características são dadas por:

1. $\Phi_1(0) = b_0$.
2. $\Phi_{(12)}(t) = e^{tA} \cdot b_0$ e $\Phi_{(23)}(t) = e^{tB} \cdot b_0$, $t \in [0,\pi]$.
3. $\Phi_{(123)}(t,s) = e^{tA}e^{sB} \cdot b_0$ e $\Phi_{(132)}(t,s) = e^{tB}e^{sA} \cdot b_0$, $(t,s) \in [0,\pi]^2$.
4. $\Phi_{(13)}(t,s,z) = e^{tA}e^{sB}e^{zA} \cdot b_0$, $(t,s,z) \in [0,\pi]^3$.

Então podemos obter as expressões para $c(w,w')$.

1. $c((12),1) = 0$ e $c((23),1) = 0$ pois existe uma única 0-célula.
2. $c((123),(12)) = 0$. Note que $(12) = (12)\widehat{(23)}$. Assim, precisamos calcular o grau das duas funções $f_2^0, f_2^\pi : S^1 \to S^1$ definidas por $f_2^0(t,0) = e^{tA}e^{0B} \cdot b_0 = e^{tA} \cdot b_0$ e $f_2^\pi(t,\pi) = e^{tA}e^{\pi B} \cdot b_0 = e^{tA} \cdot b_0$. Os seus graus podem ser obtidos comparando-se a orientação da face correspondente à fronteira do cubo $[0,\pi]^2$, que é S^1 orientada no sentido anti-horário, com a orientação dada pela função de colagem $e^{tA} \cdot b_0$ (ver figura ???). Logo, o grau de f_2^0 é 1 pois, à medida que t cresce, a curva $(t,0)$ e $e^{tA} \cdot b_0$ seguem na mesma direção que $\Phi_{(12)}$. Por outro lado, o grau de f_2^π é -1 pois, à medida que t cresce, a curve $(t,0)$ e a imagem de $e^{tA} \cdot b_0$ seguem em direções opostas. Logo $c((123),(12)) = +1 + (-1) = 0$.
3. $c((123),(23)) = -2$. Aqui $(23) = \widehat{(12)}(23)$. Assim, precisamos calcular o grau das duas funções $f_1^0, f_1^\pi : S^1 \to S^1$ definidas por $f_1^0(0,s) = e^{0A}e^{sB} \cdot b_0 = e^{sB} \cdot b_0$ e $f_1^\pi(\pi,s) = e^{\pi A}e^{sB} \cdot b_0 = \exp(s\mathrm{Ad}(e^{\pi A})B) \cdot b_0 = e^{-sB} \cdot b_0$ pois $\mathrm{Ad}(e^{\pi A})B = -B$. Como $e^{-sB} \cdot b_0 = e^{(\pi-s)B}e^{\pi B} \cdot b_0 = e^{(\pi-s)B} \cdot b_0$, a função f_1^π definida em $[0,\pi]$ é dada por $f_1^\pi(0,s) = e^{(\pi-s)B} \cdot b_0$ (ver figura???)). Logo o grau de f_1^0 é -1 como visto acima. O grau de f_1^π, por sua vez, é também -1 pois é o grau da função $s \mapsto \pi - s$. Logo $c((123),(12)) = (-1)+(-1) = -2$.

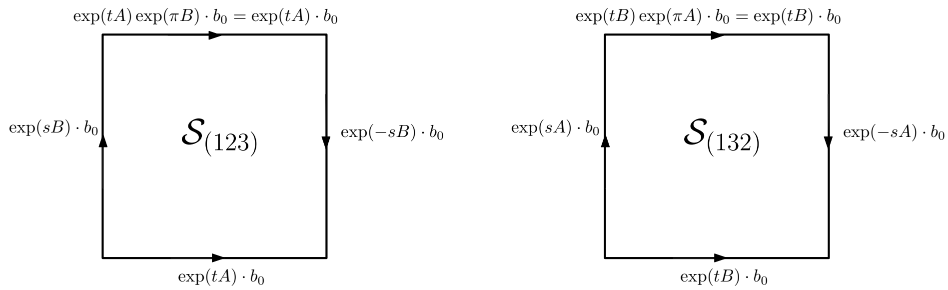

Figura 3.1: *As células de Schubert* $\mathcal{S}_{(123)}$ *e* $\mathcal{S}_{(132)}$

4. $c((132),(121)) = -2$ e $c((132),(23)) = 0$, os quais são determinados de modo semelhantes aos casos anteriores.

5. $c((13),(123)) = 0$. Note que $(123) = (12)(23)\widehat{(12)}$. Assim, devemos considerar as funções $f_3^0, f_3^\pi : S^2 \to S^2$.

   (a) $f_3^0(t,s,0) = e^{tA}e^{sB}e^{0A}\cdot b_0 = e^{tA}e^{sB}\cdot b_0$ e temos que

   $$\deg f_3^0 = -1.$$

   De fato, a fronteira do cubo $[0,\pi]^3$, que é uma esfera S^2, deve ser orientada de modo que o vetor normal aponte para fora. A face $(t,s,0)$ (nesta ordem) quando vista no domínio é negativamente orientada enquanto vista no contradomínio tem orientação compatível com a orientação positiva de S^2. Portanto o grau é -1.

   (b) $f_3^\pi(t,s,\pi) = e^{tA}e^{sB}e^{\pi A}\cdot b_0 = e^{tA}e^{sB}\cdot b_0$ e temos que

   $$\deg f_3^\pi = 1.$$

   Neste caso, a face (t,s,π) tem a mesma orientação positiva que a fronteira vista como uma esfera S^2.

6. $c((13),(132)) = 0$. Note que $(132) = \widehat{(12)}(23)(12)$. Assim, consideramos as funções $f_1^0, f_1^\pi : S^2 \to S^2$.

   (a) $f_1^0(0,t,s) = e^{0A}e^{tB}e^{sA}\cdot b_0 = e^{tB}e^{sA}\cdot b_0$ com

   $$\deg f_3^0 = -1.$$

   Neste caso, a face $(0,t,s)$ (nesta ordem) no domínio tem uma orientação negativa enquanto no contradomínio tem uma orientação que coincide com a orientação positiva. Logo o grau é -1.

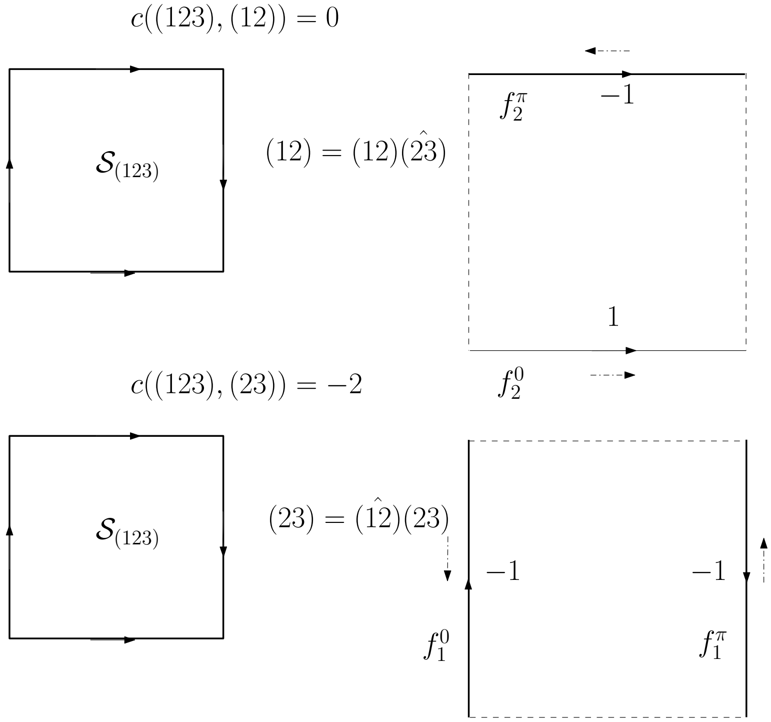

Figura 3.2: *Os coeficientes* $c((123),(12))$ *e* $c((132),(23))$ *onde as setas tracejadas representam a orientação anti-horária.*

(b) $f_1^\pi(\pi,t,s) = e^{\pi A}e^{tB}e^{sA}\cdot b_0 = \exp(-tB)e^{sA}\cdot b_0$ pois $Ad(e^{\pi A}B) = -B$ e $Ad(e^{\pi A}A) = A$. Vamos descrever esta função com um domínio em $[0,\pi]^2$. Note que $\exp(-tB)e^{sA}\cdot b_0 = \exp((\pi - t)B)e^{\pi B}e^{sA}\cdot b_0$ e, como $Ad(e^{\pi B}A) = -A$, obtemos que

$$\exp(-sB)e^{sA}\cdot b_0 = e^{(\pi-s)B}e^{(\pi-s)A}\cdot b_0.$$

Logo o grau de f_1^π é o grau da função $(t,s)\mapsto(\pi - t, \pi - s)$. Este grau é $+1$ pois preserva orientação.

Em resumo: **Nível 1:** $\partial\mathcal{S}_{(12)} = \partial\mathcal{S}_{(23)} = 0$; **Nivel 2:** $\partial\mathcal{S}_{(123)} = -2\mathcal{S}_{(23)}$ e $\partial\mathcal{S}_{(132)} = -2\mathcal{S}_{(12)}$; **Nível 3:** $\partial\mathcal{S}_{(13)} = 0$. Portanto:

- $H_3(\mathbb{F}^3(1,2),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, gerado por $\mathcal{S}_{(13)}$.
- $H_2(\mathbb{F}^3(1,2),\mathbb{Z}) = 0$ ($\ker\partial_2 = 0$).
- $H_1(\mathbb{F}^3(1,2),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ ($\ker\partial_1$ é $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ e a imagem de ∂_2 é $2\mathbb{Z}\cdot\mathcal{S}_{(12)}\oplus 2\mathbb{Z}\cdot\mathcal{S}_{(23)}$).

A escolha para o exemplo feito acima foi primariamente ilustrativo. Este cálculo também pode ser feito através da fórmula para os coeficientes $c(w,w')$ diretamente. A mesma escolha, previamente determinada, de decomposições minimais para os elementos de $\mathcal{W} = S_3$ implica que o fator $\left(\Phi_{w'}^{-1} \circ \Psi_{w'}\right)$ responsável por corrigir possíveis distinções entre decomposições minimais para o elemento w' é 1. As informações necessárias para se determinar $c(w,w')$ são reunidas na seguinte tabela.

Homologia da Variedade $\mathbb{F}^3(1,2)$		
$\mathcal{W}$	Π_w	$\phi(w)$
1	$\emptyset$	0
(12)	α_1	α_1
(23)	α_2	α_2
(123)	$\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2$	$2\alpha_1+\alpha_2$
(132)	$\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2$	$\alpha_1+2\alpha_2$
(13)	Π^+	$2\alpha_1+2\alpha_2$

Por exemplo, o coeficiente $c((123),(23)) = (-1)^1(1+(-1)^k) = -2$ visto que k é determinado por $\phi(123) - \phi(23) = k\alpha_1 = 2\alpha_1$.

3.2.3 A Grassmanniana $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$

A realização da variedade *flag* parcial de tipo $\Theta = \{\alpha_1\}$ é a variedade Grassmanniana $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$ de subespaços 2-dimensionais em $\mathbb{R}^3$.

Isto pode ser obtido pela ação (transitiva) de $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$ em $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$ definida por $(g, \langle f_1, f_2\rangle) \mapsto \langle gf_1, gf_2\rangle$. Se $b_0 = \langle e_1, e_2\rangle \in \mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$ é a origem então o estabilizador (isotropia de b_0) de b_0 é exatamente o subgrupo parabólico P_Θ, normalizador da subálgebra parabólica de tipo Θ (veja (3.1)), que é o subgrupo parabólico em blobos:

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R}) \right\}.$$

Portanto, segue que

$$\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right) = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R}) \cdot b_0 = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})/\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})_{b_0} = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})/P_\Theta = \mathbb{F}_\Theta.$$

Decomposição de Bruhat de $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$

A decomposição de Bruhat para $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$ é parametrizada pelas classes laterais $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$. Como $\mathcal{W}_\Theta = \{1, (12)\}$ segue que

$$\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta = \{1, (12)\} \,\dot\cup\, \{(23), (132)\} \,\dot\cup\, \{(123), (13)\}.$$

E, neste caso, é fácil identificar o conjunto $\mathcal{W}^\Theta = \{1, (23), (123)\}$ dos representantes minimais em cada classe. Com isto, temos os seguintes pontos fixos:

$$1 \cdot b_0 = \langle e_1, e_2\rangle \ , \ (23) \cdot b_0 = \langle e_1, e_3\rangle \ , \ (123) \cdot b_0 = \langle e_2, e_3\rangle$$

Assim, as células de Bruhat que fornecem a decomposição de Bruhat para $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$ são dadas por:

0. A 0-célula $C_{(1)} = N \cdot 1b_0 = N(\langle e_1, e_2\rangle) = \langle e_1, e_2\rangle$.
1. A 1-célula $C_{(23)} = N \cdot (23)b_0 = N(\langle e_1, e_3\rangle) = \langle e_1, e_3 + *e_2 + *e_3\rangle$.
2. A 2-célula $C_{(123)} = N \cdot (123)b_0 = N(\langle e_2, e_3\rangle) = \langle e_2 + *e_1, e_3 + *e_1\rangle$, aberta e densa.

Homologia de $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$

Feitas as escolhas acima dos representantes minimais, os coeficientes $c(w, w')$ podem ser calculados diretamente a partir da mesma tabela feita para o *flag* maximal apenas considerando estes representantes.

Homologia da Grassmanniana $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$		
$\mathcal{W}$	Π_w	$\phi(w)$
1	$\emptyset$	0
(23)	α_2	α_2
(123)	$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2$	$2\alpha_1 + \alpha_2$

Segue que $c((23), 1) = 0$ e que $c((123), (23)) = -2$ e, portanto:

- $H_2(\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^3\right), \mathbb{Z}) = 0$ $(\ker \partial_2 = 0)$.
- $H_1(\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^3\right)), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ ($\ker \partial_1$ é $\mathbb{Z}$ e a imagem de ∂_2 é $2\mathbb{Z} \cdot \mathcal{S}_{(23)}$).

3.2.4 O Espaço Projetivo $\mathbb{RP}^2$

A realização da variedade *flag* de tipo $\Theta = \{\alpha_2\}$ é a variedade projetiva em $\mathbb{R}^3$, isto é, a variedade $\mathbb{RP}^2$ de subespaços 1-dimensionais em $\mathbb{R}^3$.

Isto pode ser obtido pela ação (transitiva) de $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$ em $\mathbb{RP}^2$ definida por $(g, \langle f\rangle) \mapsto \langle gf\rangle$. Se $b_0 = \langle e_1\rangle \in \mathbb{RP}^2$ é a origem então o estabilizador (isotropia em b_0) de b_0 é exatamente com o subgrupo parabólico P_Θ, normalizador da subálgebra parabólica de tipo Θ (veja (3.2)), que é o subgrupo parabólico em blobos:

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R}) \right\}.$$

Portanto, segue que

$$\mathbb{RP}^2 = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R}) \cdot b_0 = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})/\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})_{b_0} = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})/P_\Theta = \mathbb{F}_\Theta.$$

Decomposição de Bruhat de $\mathbb{RP}^2$

A decomposição de Bruhat para $\mathbb{RP}^2$ é parametrizada pelas classes laterais $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$. Como $\mathcal{W}_\Theta = \{1,(23)\}$ segue que

$$\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta = \{1,(23)\} \,\dot\cup\, \{(12),(123)\} \,\dot\cup\, \{(132),(13)\}.$$

E, neste caso, é fácil identificar o conjunto $\mathcal{W}^\Theta = \{1,(12),(132)\}$ dos representantes minimais em cada classe. Com isto, temos os seguintes pontos fixos:

$$1 \cdot b_0 = \langle e_1 \rangle \ , \ \ (12) \cdot b_0 = \langle e_2 \rangle \ , \ \ (132) \cdot b_0 = \langle e_3 \rangle$$

Assim, as células de Bruhat que fornecem a decomposição de Bruhat para $\mathbb{RP}^2$ são dadas por:

0. A 0-célula $C_{(1)} = N \cdot 1b_0 = N(\langle e_1 \rangle) = \langle e_1 \rangle$.
1. A 1-célula $C_{(12)} = N \cdot (12)b_0 = N(\langle e_2 \rangle) = \langle e_2 + *e_1 \rangle$.
2. A 2-célula $C_{(132)} = N \cdot (132)b_0 = N(\langle e_3 \rangle) = \langle e_3 + *e_2 + *e_1 \rangle$, aberta e densa.

Esta decomposição celular coincide com a decomposição CW usual em que se tem uma célula para cada dimensão.

Homologia de $\mathbb{RP}^2$

Feitas as escolhas acima dos representantes minimais, os coeficientes $c(w,w')$ podem ser calculados diretamente a partir da mesma tabela feita para a variedade *flag* maximal apenas considerando estes representantes.

Homologia do Projetivo $\mathbb{RP}^2$		
$\mathcal{W}$	Π_w	$\phi(w)$
1	$\emptyset$	0
(12)	α_1	α_2
(132)	$\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2$	$\alpha_1 + 2\alpha_2$

Segue que $c((12),1) = 0$ e que $c((132),(123)) = -2$ e, portanto:

- $H_2(\mathbb{RP}^2,\mathbb{Z}) = 0$ $(\ker \partial_2 = 0)$.
- $H_1(\mathbb{RP}^2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ $(\ker \partial_1$ é $\mathbb{Z}$ e a imagem de ∂_2 é $2\mathbb{Z} \cdot \mathcal{S}_{(23)})$.

3.3 O grupo $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$

Seja $G = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) = \{g \in Sl(4,\mathbb{R}) : g^t J_{2,2} g = J_{2,2}\}$ o grupo real simplético de matrizes 4×4, onde $J_{2,2}$ é a matriz da forma simplética

$$J_{2,2} = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & -I_{2\times 2} \\ I_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}.$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) = \{X : XJ + JX^t = 0\}$ pode ser caracterizada da seguinte forma: uma matriz $X \in \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ é da forma

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}),$$

onde A, B e C são matrizes reais 2×2 com $B = B^t$ e $C = C^t$ (simétricas).

Decomposição de Cartan e Iwasawa

A função $\theta(X) = JXJ^{-1}$ é a involução de Cartan que fornece a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ onde:

1. $\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A = A^t\ ,\ B = B^t \right\}$ é a álgebra das matrizes anti-simétricas em $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$ e é isomorfa à álgebra das matrizes complexas anti-hermitianas $\mathfrak{u}(2)$.

2. $\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} : A = A^t\ ,\ B = B^t \right\}$ é o subespaço das matrizes simétricas em $\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$.

Passando ao nível do grupo, temos a decomposiçao de Cartan $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) = KS$ onde K é isomorfo ao grupo das matrizes unitárias complexas $\mathrm{U}(2)$ e S é o conjunto das matrizes simétricas positivas definidas em $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$.

Fixamos a subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, -a_1, -a_2) \in \mathfrak{s}$. Como $\mathfrak{a}$ tem posto 2, podemos realizar $\mathfrak{a}$ em $\mathbb{R}^2$ e tomar a Câmara de Weyl $\mathfrak{a}^+$ como o conjunto dos elementos $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 > x_2 > 0\}$. Seja $\lambda_i : \mathfrak{a} \to \mathbb{R}$ dada por $\lambda_i(H) = a_i$, com $H = \mathrm{diag}(a_1, a_2, -a_1, -a_2)$. Denote por e_{ij} às matrizes elementares. Como $[H, e_{12} - e_{43}] = (\lambda_1 - \lambda_2)(H)(e_{12} - e_{43})$, $[H, e_{14} + e_{23}] = (\lambda_1 + \lambda_2)(H)(e_{14} + e_{23})$, $[H, e_{13}] = 2\lambda_1(H)e_{13}$ e $[H, e_{24}] = 2\lambda_2(H)e_{24}$ temos que:

$$\Pi^+ = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1, 2\lambda_2\}$$

O conjunto das raízes simples é $\Sigma = \{\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = 2\lambda_2\}$ uma vez que $\alpha_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ e $\alpha_4 = 2\lambda_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$. A decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ onde

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{\lambda_1 - \lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{\lambda_1 + \lambda_2} \oplus \mathfrak{g}_{2\lambda_1} \oplus \mathfrak{g}_{2\lambda_2}$$

sendo $\mathfrak{g}_{\lambda_1 - \lambda_2} = \langle e_{12} - e_{43} \rangle, \mathfrak{g}_{\lambda_1 + \lambda_2} = \langle e_{14} + e_{23} \rangle, \mathfrak{g}_{2\lambda_1} = \langle e_{13} \rangle, \mathfrak{g}_{2\lambda_2} = \langle e_{24} \rangle$.

Grupo de Weyl

Na realização dada acima de $\mathfrak{a}=\mathbb{R}^2$, as raízes simples são dadas por $\alpha_1=(1,-1)$ e $\alpha_2=(0,2)$. Neste caso, a reflexão $r_1=r_{\alpha_1}$ permuta as coordenadas enquanto a reflexão $r_2=r_{\alpha_2}$ troca o sinal da última coordenada, isto é, $r_1(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$ e $r_2=r_{\alpha_2}(x_1,x_2)=(x_1,-x_2)$. Estas reflexões são os geradores do grupo de Weyl (algébrico) $\mathcal{W}$. De acordo com a ordem de Bruhat-Chevalley, temos a seguinte descrição:

0. $1(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$.
1. $r_1(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$ e $r_2(x_1,x_2)=(x_1,-x_2)$ que são as reflexões simples.
2. $r_1r_2(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$ e $r_2r_1(x_1,x_2)=(x_2,-x_1)$, produto de duas reflexões simples.
3. $r_1r_2r_1(x_1,x_2)=(-x_1,x_2)$ e $r_2r_1r_2(x_1,x_2)=(-x_2,-x_1)$, produto de três reflexões simples.
4. $r_1r_2r_1r_2(x_1,x_2)=(-x_1,-x_2)$ que é o produto de quatro reflexões simples, também conhecido como involução principal e leva Π^+ em $-\Pi^+$.

O grupo de Weyl (analítico) também pode ser descrito como $\mathcal{W}=M^*/M$. A tabela abaixo contém a relação entre as diferentes definições. Observe que os elementos do grupo algébrico podem ser vistos como permutações S_4.

Grupo de Weyl			
Algébrico	Analítico	Algébrico	Analítico
1	$\left[\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]$	$r_1=(12)(34)$	$\left[\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\right]$
$r_2=(24)$	$\left[\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\right]$	$r_1r_2=(1234)$	$\left[\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\right]$
$r_2r_1=(1432)$	$\left[\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right]$	$r_1r_2r_1=(13)$	$\left[\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right]$
$r_2r_1r_2=(14)(23)$	$\left[\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right]$	$(r_1r_2)^2=(13)(24)$	$\left[\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\right]$

Subgrupos e Subálgebras Parabólicas

Como $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, existem três subálgebras parabólicas de $\mathfrak{g}$ associadas à escolha de um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$. A subálgebra parabólica minimal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$, correspondente à escolha $\Theta = \emptyset$, tem decomposição de Iwasawa $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ uma vez que $\mathfrak{m} = 0$ e corresponde às matrizes triangulares superiores em blocos em $\mathfrak{g}$ da forma:

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) \right\}.$$

O subgrupo parabólico minimal tem decomposição $P = MAN$, onde M é o grupo das matrizes com entradas diagonais ± 1, e corresponde ao subgrupo das matrizes triangulares superiores no mesmo formato triangular em blocos.

As outras subálgebras parabólicas tem decomposição de Iwasawa $\mathfrak{p}(\Theta) = \mathfrak{k}_\Theta \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ onde $\mathfrak{k}_\Theta$ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{so}(3)$ e correspondem às matrizes em blocos:

$$\text{Para } \Theta = \{\alpha_1\}, \quad \mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) \right\}. \tag{3.5}$$

$$\text{Para } \Theta = \{\alpha_2\}, \quad \mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}) \right\}. \tag{3.6}$$

Os subgrupos parabólicos tem decomposição de Iwasawa $P_\Theta = K_\Theta AN$, onde K_Θ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $K = \mathrm{U}(2)$, e correspondem ao subgrupos de matrizes triangulares superiores em bloco de acordo com a escolha para Θ, seguindo o mesmo padrão das subálgebras parabólicas.

3.4 Variedades *Flag* de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$

Como $\Theta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, temos três variedades *flag* de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. Estas variedades *flag* se realizam no contexto de espaços vetoriais simpléticos. Para isto, vamos lembrar algumas definições principais. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Dizemos que um par (V, ω) é um espaço vetorial simplético se ω é uma forma bilinear anti-simétrica não-degenerada em V. Seja $S \subset V$ um subespaço vetorial de V. Dizemos que S é um subespaço simplético de V se a restrição

$\omega|_{S\times S}$ é não-degenerada. Em outras palavras, $(S,\omega|_{S\times S})$ é um espaço vetorial simplético. Um operador linear $T : V \to V$ é simplético se $\omega(Tu,Tv) = (u,v)$ para todos $u,v \in V$. Se T é também um isomorfismo, T é chamado de simplectomorfismo.

Seja ω a forma simplética canônica em $\mathbb{R}^4$ dada por

$$\omega((v_1,v_2,u_1,u_2),(w_1,w_2,z_1,z_2)) = v_1z_1 + v_2z_2 - u_1w_1 - u_2w_2.$$

O grupo $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ é o grupo dos simplectomorfismos de $\mathbb{R}^4$ e a base canônica $\{e_1,e_2,f_1,f_2\}$ de $\mathbb{R}^4$ é uma base simplética de $\mathbb{R}^4$ cuja matriz na base canônica simplética é $J_{2,2}$.

Agora, seja V espaço vetorial de dimensão $2n$. Um subespaço S é dito isotrópico se $w\,|_{S\times S} = 0$. Segue que S é isotrópico se e somente se S está contido no $S^{\perp}$. Como $\dim(S) + \dim(S^{\perp}) = 2n$, temos que a dimensão de um espaço isotrópico é no máximo n. Um subespaço L é dito Lagrangeano se $L = L^{\perp}$, o que é equivalente a L ser um subespaço isotrópico maximal, ou ainda, L isotrópico de dimensão n.

Por exemplo, em $\mathbb{R}^4$, com a forma simplética canônica, existem quatro subespaços Lagrangeanos gerados a partir da base canônica:

$$\langle e_1,e_2\rangle, \langle e_1,f_2\rangle, \langle e_2,f_1\rangle \text{ e } \langle f_1,f_2\rangle$$

pois $\omega(e_1,f_1) = 1 = \omega(e_2,f_2)$.

3.4.1 O *Flag* Maximal $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$

A variedade *flag* maximal, obtida pela escolha $\Theta = \emptyset$, realiza-se como o *flag* de subespaços isotrópicos 1-dimensionais contidos nos subespaços 2-dimensionais isotrópicos do espaço vetorial simplético $\mathbb{R}^4$, com a forma simplética canônica ω, o qual vamos denotar por $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$, isto é:

$$\mathbb{F}^{\omega}(1,2) = \left\{(V_1 \subset V_2) \,:\, V_i \subset \mathbb{R}^4\,,\, \dim(V_i) = i\,,\, \omega\,|_{V_i\times V_i} = 0\right\}$$

Isto pode ser obtido pela ação de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ em $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$ definida por $(g,\langle u\rangle \subset \langle u,v\rangle) \mapsto (\langle gu\rangle \subset \langle gu,gv\rangle)$. É possível mostrar que esta ação é transitiva (veja a tese Braga [7], Proposição 21). Se $b_0 = \langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle$ é a origem, então o subgrupo de isotropia de b_0 é o subgrupo parabólico minimal P. Portanto, temos que $\mathbb{F}^{\omega}(1,2) = G/G_{b_0} = G/P$.

Decomposição de Bruhat de $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$

Vamos apresentar agora a decomposição de Bruhat de $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$ em termos da ação do grupo N^-, isto é, $\mathbb{F}^{\omega}(1,2) = \coprod_{w\in\mathcal{W}} N^-\cdot wb_0$.

Para estabelecer a decomposição de Bruhat $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$, vamos inicialmente determinar os pontos fixos da A-ação que são parametrizados por $\mathcal{W}$ que podem ser obtidos aplicando-se a permutação sobre os índices da origem.

$$
\begin{aligned}
(r_1r_2r_1r_2)b_0 &= (13)(24)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle f_1\rangle \subset \langle f_1,f_2\rangle\\
(r_2r_1r_2)b_0 &= (14)(23)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle f_2\rangle \subset \langle f_1,f_2\rangle\\
(r_1r_2r_1)b_0 &= (13)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle f_1\rangle \subset \langle e_2,f_1\rangle\\
(r_2r_1)b_0 &= (1432)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle f_2\rangle \subset \langle e_1,f_2\rangle\\
(r_1r_2)b_0 &= (1234)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_2\rangle \subset \langle e_2,f_1\rangle\\
(r_2)b_0 &= (24)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_1\rangle \subset \langle e_1,f_2\rangle\\
(r_1)b_0 &= (12)(34)\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_2\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle\\
(1)b_0 &= 1\cdot(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle) = \langle e_1\rangle \subset \langle e_1,e_2\rangle
\end{aligned}
$$

Um elemento $g \in N^-$ pode ser escrito na forma

$$
g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ a & 1 & 0 & 0\\ b & c & 1 & -a\\ d & h & 0 & 1 \end{pmatrix} : d = c + ah \tag{3.7}
$$

de modo que, para tal $g \in N^-$, temos a seguinte ação na base canônica:

$$
\begin{aligned}
N^-(e_1) &= e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2\\
N^-(e_2) &= e_2 + cf_1 + hf_2\\
N^-(f_2) &= f_2 - af_1\\
N^-(f_1) &= f_1
\end{aligned}
$$

Abaixo, descrevemos as células de Bruhat, representando a ação do grupo N^- por meio do elemento $g \in N^-$ acima definido:

0. A 0-célula dada por $C_{(13)(24)} = N^-\cdot((13)(24))b_0$ onde:

$$N^-\cdot((13)(24))b_0 = N^-(\langle f_1\rangle \subset \langle f_1,f_2\rangle) = (\langle f_1\rangle \subset \langle f_1,f_2\rangle).$$

1. As 1-células $C_{(13)} = N^-\cdot(13)b_0$ e $C_{(14)(23)} = N^-\cdot(14)(23)b_0$ onde:

$$
\begin{aligned}
N^-\cdot(13)b_0 &= N^-(\langle f_1\rangle \subset \langle f_1,e_2\rangle) = \langle f_1\rangle \subset \langle f_1, e_2 + hf_2\rangle\\
N^-\cdot(14)(23)b_0 &= N^-(\langle f_2\rangle \subset \langle f_1,f_2\rangle) = \langle f_2 - af_1\rangle \subset \langle f_2 - af_1, f_1\rangle.
\end{aligned}
$$

2. As 2-células $C_{(1234)} = N^- \cdot (1234)b_0$ e $C_{(1432)} = N^- \cdot (1432)b_0$ onde:

$$\begin{aligned} N^- \cdot (1234)b_0 &= N^-(\langle e_2\rangle \subset \langle e_2, f_1\rangle) \\ &= \langle e_2 + cf_1 + hf_2\rangle \subset \langle e_2 + cf_1 + hf_2, f_1\rangle. \\ N^- \cdot (1432)b_0 &= N^-(\langle f_2\rangle \subset \langle f_2, e_1\rangle) \\ &= \langle f_2 - af_1\rangle \subset \langle f_2 - af_1, e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2\rangle. \end{aligned}$$

3. As 3-células $C_{(12)(34)} = N^- \cdot (12)(34)b_0$ e $C_{(24)} = N^- \cdot b_0$ onde:

$$\begin{aligned} N^- \cdot (24)b_0 &= N^-(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1, f_2\rangle) \\ &= \langle e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2\rangle \subset \langle e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2, e_2 + cf_1 + hf_2\rangle. \\ N^- \cdot (12)(34)b_0 &= N^-(\langle e_2\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle) \\ &= \langle e_2 + cf_1 + hf_2\rangle \subset \langle e_2 + cf_1 + f_2, e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2\rangle. \end{aligned}$$

4. A única 4-célula $C_{(1)} = N^- \cdot b_0$ aberta e densa em $\mathbb{F}^{\omega}_{1,2}(\mathbb{R}^4)$, dada por:

$$\begin{aligned} N^- \cdot b_0 &= N^-(\langle e_1\rangle \subset \langle e_1, e_2\rangle) \\ &= \langle e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2\rangle \subset \langle e_2 + cf_1 + hf_2, e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2\rangle. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que a relação $d = c + af$ (veja 3.7) implica que os espaços obtidos sejam de fato isotrópicos.

Homologia de $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$

Para o cálculo da homologia de $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$, fixamos a seguinte decomposição minimal dos elementos em $\mathcal{W} = \{1, r_1, r_2, r_1r_2, r_2r_1, r_1r_2r_1, r_2r_1r_2, r_1r_2r_1r_2\}$ onde o único elemento que admite mais de uma decomposição minimal é a involução principal $r_1r_2r_1r_2 = r_2r_1r_2r_1$.

Sejam $A = e_{12} - e_{43} + e_{34} - e_{21}$ e $B = e_{24} - e_{42}$ as matrizes cujas exponenciais forneçam parametrizações para os grupos compactos $K_1 = P_1 \cap K$ e $K_2 = P_2 \cap K$, respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com estas escolhas, as células de Schubert podem ser obtidas como:

1. $\mathcal{S}_1 = b_0$

2. $\mathcal{S}_{r_1} = K_1 \cdot b_0$ e $\mathcal{S}_{r_2} = K_2 \cdot b_0$.

3. $\mathcal{S}_{r_1r_2} = K_1K_2 \cdot b_0$ e $\mathcal{S}_{r_2r_1} = K_2K_1 \cdot b_0$.

4. $\mathcal{S}_{r_1r_2r_1} = K_1K_2K_1 \cdot b_0$ e $\mathcal{S}_{r_2r_1r_2} = K_2K_1K_2 \cdot b_0$.

5. $\mathcal{S}_{r_1r_2r_1r_2} = K_1K_2K_1K_2 \cdot b_0$.

de modo que as respectivas funções características são dadas por:

1. $\Phi_1(0) = b_0$.

2. $\Phi_{r_1}(t) = e^{tA} \cdot b_0$ e $\Phi_{r_2}(t) = e^{tB} \cdot b_0$, $t \in [0,\pi]$.

3. $\Phi_{r_1r_2}(t,s) = e^{tA}e^{sB} \cdot b_0$ e $\Phi_{r_2r_1}(t,s) = e^{tB}e^{sA} \cdot b_0$, $(t,s) \in [0,\pi]^2$.

4. $\Phi_{r_1r_2r_1}(t,s,z) = e^{tA}e^{sB}e^{zA} \cdot b_0$ e $\Phi_{r_2r_1r_2}(t,s,z) = e^{tB}e^{sA}e^{zB} \cdot b_0$, $(t,s,z) \in [0,\pi]^3$.

5. $\Phi_{r_1r_2r_1r_2}(t,s,z,w) = e^{tA}e^{sB}e^{zA}e^{wB} \cdot b_0$, $(t,s,z,w) \in [0,\pi]^4$.

Vamos calcular os grupos de homologia de modo direto através das informações contidas na tabela abaixo.

Homologia de $\mathbb{F}^{\omega}(1,2)$		
$\mathcal{W}$	Π_w	$\phi(w)$
1	$\emptyset$	0
r_1	α_1	α_1
r_2	α_2	α_2
r_1r_2	α_1,α_4	$3\alpha_1+\alpha_2$
r_2r_1	α_2,α_3	$\alpha_1+2\alpha_2$
$r_1r_2r_1$	$\alpha_1,\alpha_4,\alpha_3$	$4\alpha_1+2\alpha_2$
$r_2r_1r_2$	$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$	$3\alpha_1+3\alpha_2$
$r_1r_2r_1r_2$	Π^+	$4\alpha_1+3\alpha_2$

A aplicação fronteira é dada por: **Nível 1:** $\partial\mathcal{S}_{r_1} = \partial\mathcal{S}_{r_2} = 0$; **Nível 2:** $\partial\mathcal{S}_{r_1r_2} = 0$ e $\partial\mathcal{S}_{r_2r_1} = -2\mathcal{S}_{r_1}$; **Nível 3:** $\partial\mathcal{S}_{r_1r_2r_1} = 0$ e $\partial\mathcal{S}_{r_2r_1r_2} = -2\partial\mathcal{S}_{r_1r_2}$ e **Nível 4:** $\partial\mathcal{S}_{r_1r_2r_1r_2} = 0$.

Portanto, temos que:

- $H_4(\mathbb{F}^{\omega}(1,2),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ gerado por $\mathcal{S}_{r_1r_2r_1r_2}$.

- $H_3(\mathbb{F}^{\omega}(1,2),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ gerado por $\mathcal{S}_{r_1r_2r_1}$.

- $H_2(\mathbb{F}^{\omega}(1,2),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ pois $\mathcal{S}_{r_1r_2}$ é o núcleo de ∂_2 enquanto a imagem ∂_3 é $2\mathbb{Z}\cdot\mathcal{S}_{r_1r_2}$.

- $H_1(\mathbb{F}^{\omega}(1,2),\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$ pois o núcleo de ∂_1 é tudo enquanto a imagem de ∂_2 é $2\mathbb{Z}\cdot\mathcal{S}_{r_1}$.

3.4.2 A Grassmanniana Lagrangeana $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$

A realização da variedade *flag* parcial de tipo $\Theta = \{\alpha_1\}$ é a variedade Grassmanniana Lagrangeana $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ de subespaços 2-dimensionais isotrópicos em $\mathbb{R}^4$, com a forma simplética ω.

Isto pode ser obtido pela ação (transitiva) de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ em $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ definida por $(g, \langle u, v\rangle) \mapsto \langle gu, gv\rangle$. Se $b_0 = \langle e_1, e_2\rangle$ é a origem de $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ então o estabilizador (isotropia de b_0) de b_0 é exatamente o subgrupo parabólico P_Θ, normalizador da subálgebra parabólica de tipo Θ (ver (3.5)), que é o subgrupo parabólico em blocos:

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) \right\}.$$

Portanto, segue que $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right) = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})/P_\Theta = \mathbb{F}_\Theta$.

Decomposição de Bruhat de $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$

A decomposição de Bruhat para $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ é parametrizada pelas classes laterais $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$. Como $\mathcal{W}_\Theta = \{1, r_1\}$ segue que

$$\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta = \{1, r_1\} \ \dot{\cup}\ \{r_2, r_1r_2\} \ \dot{\cup}\ \{r_1r_2, r_1r_2r_1\} \ \dot{\cup}\ \{r_2r_1r_2, r_1r_2r_1r_2\}.$$

E, neste caso, é fácil identificar o conjunto $\mathcal{W}^\Theta = \{1, r_2, r_1r_2, r_2r_1r_2\}$ dos representantes minimais em cada classe. Com isto, temos os seguintes pontos fixos:

$$b_0 = \langle e_1, e_2\rangle\,,\ (24)\cdot b_0 = \langle e_1, f_2\rangle\,,\ (1234)\cdot b_0 = \langle e_2, f_1\rangle\,,\ (14)(23)\cdot b_0 = \langle f_1, f_2\rangle$$

Seja $g \in N^-$ definido anteriormente pela equação (3.7) para representar a ação do grupo N^-. As células de Bruhat de $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$ são dadas por:

0. A 0-célula $C_{(14)(23)} = N^- \cdot (\langle f_1, f_2\rangle) = \langle f_1, f_2\rangle$.
1. A 1-célula $C_{(1234)} = N^- \cdot (\langle e_2, f_1\rangle) = \langle e_2 + cf_1 + hf_2, f_1\rangle$.
2. A 2-célula $C_{(24)} = N^- \cdot (\langle e_1, f_2\rangle) = \langle e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2, f_2 - af_1\rangle$.
3. A 3-célula $C_{(1)} = N^- \cdot (\langle e_1, e_2\rangle) = \langle e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2, e_2 + cf_1 + hf_2\rangle$.

Homologia de $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$

Feitas as escolhas acima dos representantes minimais, os coeficientes $c(w, w')$ podem ser calculados diretamente a partir da mesma tabela feita para a variedade *flag* maximal apenas considerando estes representantes.

Homologia de $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right)$		
$\mathcal{W}$	Π_w	$\phi(w)$
1	$\emptyset$	0
r_2	α_2	α_2
r_1r_2	α_1, α_4	$3\alpha_1+\alpha_2$
$r_2r_1r_2$	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$	$3\alpha_1+3\alpha_2$

Segue que o operador fronteira é dado por: **Nível 1:** $\partial\mathcal{S}_{r_2}=0$; **Nível 2:** $\partial\mathcal{S}_{r_1r_2}=0$ e **Nível 3:** $\partial\mathcal{S}_{r_2r_1r_2}=-2\partial\mathcal{S}_{r_1r_2}$.

E, portanto:

- $H_3(\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right),\mathbb{Z})=0$.
- $H_2(\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_2$.
- $H_1(\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^4\right),\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.

3.4.3 O Espaço Projetivo $\mathbb{RP}^3$

A realização da variedade *flag* parcial de tipo $\Theta=\{\alpha_2\}$ é a variedade projetiva $\mathbb{RP}^3$ de subespaços 1-dimensionais em $\mathbb{R}^4$, com a forma simplética ω (note que neste caso, todo subespaço 1-dimensional é isotrópico).

Isto pode ser obtido pela ação (transitiva) de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ em $\mathbb{RP}^3$ definida por $(g,\langle u\rangle)\mapsto\langle gu\rangle$. Se $b_0=\langle e_1\rangle$ é a origem de $\mathbb{RP}^3$ então o estabilizador (isotropia de b_0) de b_0 é exatamente o subgrupo parabólico P_Θ, normalizador da subálgebra parabólica de tipo Θ (veja (3.6)), que é o subgrupo parabólico em blobos:

$$P_\Theta=\left\{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}\in\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})\right\}.$$

Portanto, segue que $\mathbb{RP}^3=\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})/P_\Theta=\mathbb{F}_\Theta$.

Decomposição de Bruhat de $\mathbb{RP}^3$

A decomposição de Bruhat para $\mathbb{RP}^3$ é parametrizada pelas classes laterais $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$. Como $\mathcal{W}_\Theta=\{1,r_2\}$ segue que

$$\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta=\{1,r_2\}\ \dot\cup\ \{r_1,r_2r_1\}\ \dot\cup\ \{r_2r_1,r_2r_1r_2\}\ \dot\cup\ \{r_1r_2r_1,r_1r_2r_1r_2\}.$$

E, neste caso, é fácil identificar o conjunto $\mathcal{W}^\Theta=\{1,r_1,r_2r_1,r_1r_2r_1\}$ dos representantes minimais em cada classe. Com isto, temos os seguintes pontos fixos:

$$b_0=\langle e_1\rangle,\ (12)(34)\cdot b_0=\langle e_2\rangle,\ (1432)\cdot b_0=\langle f_2\rangle,\ (13)\cdot b_0=\langle f_1\rangle$$

Seja $g \in N^-$ definido anteriormente pela equação (3.7) para representar a ação do grupo N^-. As células de Bruhat de $\mathbb{RP}^3$ são dadas por:

0. A 0-célula $C_{(13)} = N^- \cdot (\langle f_1 \rangle) = \langle f_1 \rangle$.

1. A 1-célula $C_{(1432)} = N^- \cdot (\langle f_2 \rangle) = \langle f_2 - af_1 \rangle$.

2. A 2-célula $C_{(12)(34)} = N^- \cdot (\langle e_2 \rangle) = \langle e_2 + cf_1 + hf_2 \rangle$.

3. A 3-célula $C_{(1)} = N^- \cdot (\langle e_1 \rangle) = \langle e_1 + ae_2 + bf_1 + df_2 \rangle$.

Homologia de $\mathbb{RP}^3$

Feitas as escolhas acima dos representantes minimais, os coeficientes $c(w, w')$ podem ser calculados diretamente a partir da mesma tabela feita para a variedade *flag* maximal apenas considerando estes representantes.

Homologia de $\mathbb{RP}^3$		
$\mathcal{W}$	Π_w	$\phi(w)$
1	$\emptyset$	0
r_1	α_1	α_1
r_2r_1	α_2, α_3	$\alpha_1 + 2\alpha_2$
$r_1r_2r_1$	$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$	$4\alpha_1 + 2\alpha_2$

Segue que o operador fronteira é dado por: **Nível 1:** $\partial\mathcal{S}_{r_1} = 0$; **Nível 2:** $\partial\mathcal{S}_{r_2r_1} = -2\mathcal{S}_{r_1}$ e **Nível 3:** $\partial\mathcal{S}_{r_1r_2r_1} = 0$.

E, portanto:

- $H_3(\mathbb{RP}^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
- $H_2(\mathbb{RP}^3, \mathbb{Z}) = 0$.
- $H_1(\mathbb{RP}^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

Capítulo 4

As Grassmannianas de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$

Este capítulo é dedicado ao estudo da homologia das Grassmannianas $\mathrm{Gr}(\mathbb{R}^n)$, que são variedades *flag* do grupo $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, determinando uma fórmula para o operador fronteira de uma dada célula de Schubert. Para isto, faz-se uso de uma decomposição irredutível (minimal) para os reprentantes minimais estabelecida por [17]. Isto corresponde a primeira parte deste capítulo.

Além disto, é também neste contexto que se encontrou um exemplo no qual a aplicação induzida pela projeção da variedade *flag* maximal sobre uma variedade *flag* parcial não é sobrejetiva, a saber, a projeção da variedade *flag* maximal de $\mathrm{Sl}(5,\mathbb{R})$ sobre a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^5)$. A segunda parte deste capítulo é dedicada a apresentar este exemplo.

4.1 O grupo $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$

Decomposições de Cartan e Iwasawa

Seja $G = \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ o grupo de matrizes invertíveis $n \times n$ de determinante 1. A sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ é formada pelas matrizes $n \times n$ de traço zero. A função $\theta(X) = -X^t$ é a involução de Cartan que fornece a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ onde $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$ é a subálgebra das matrizes anti-simétricas e $\mathfrak{s}$ é o subespaço das matrizes simétricas. Passando ao nível do grupo, temos a decomposição de Cartan do grupo $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \cdot S$, onde S são as matrizes simétricas positivas definidas.

Fixamos a subálgebra das matrizes diagonais $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ como a subálgebra abeliana maximal. A câmara de Weyl positiva $\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{a}$ é o conjunto das matrizes $H = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ tais que $a_1 > \cdots > a_n$. Defina $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j \in \mathfrak{a}^*$ por $\lambda_i(diag(a_1,\ldots,a_n)) = a_i$. As raízes positivas são dadas por $\Pi^+ = \{\alpha_{ij}, i < j\}$. O conjunto de raízes simples é dado por

$$\Sigma = \{\alpha_1 = \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{l-1} = \alpha_{l-1,l}\} \subset \Pi^+.$$

A decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{g}$ é dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ onde $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ é a subálgebra nilpotente das matrizes triangulares superiores com entradas diagonais nulas. Passando ao nível do grupo, temos que a decomposição de Iwasawa de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(n)AN$, onde A é o subgrupo das matrizes diagonais com entradas positivas e N é o subgrupo das matrizes triangulares superiores com entradas diagonais iguais a 1.

Grupo de Weyl

O grupo de Weyl $\mathcal{W}$ associado a $\mathfrak{a}$ é gerado pelas reflexões em torno do núcleo das raízes $\alpha \in \mathfrak{a}^*$. Pela realização da subálgebra abeliana como $\mathfrak{a} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ cuja câmara de Weyl positiva realiza-se como

$$\mathfrak{a}^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{a} \,|\, x_1 > \cdots > x_n\}.$$

Cada raiz positiva $\alpha_{ij} \in \Pi^+$, $1 \leq i < j \leq n$, possui 1 na i-ésima entrada e -1 na j-ésima entrada e todas as outras coordenadas nulas. As reflexões $r_{\alpha_{ij}}$ permutam as coordenadas i e j. Neste caso, o grupo de Weyl é gerado pelas reflexões $r_i = (i, i+1)$ e, por isto, segue que W é o grupo S_n, grupo das permutações em n elementos de ordem $n!$.

Por outro lado, o grupo de Weyl (analítico) também pode ser descrito como $\mathcal{W} = M^*/M$, onde M^* e M são o normalizador e o centralizador de $\mathfrak{a}$, respectivamente. Neste caso, M é o grupo de matrizes diagonais com entradas ± 1 enquanto M^* corresponde às matrizes de permutação.

Subálgebras e Subgrupos Parabólicos

Seja $\mathbf{r}$ uma sequência crescente de números inteiros $\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_s)$, com $1 \leq r_1 < \cdots < r_s < n$. A partir de $\mathbf{r}$, obtemos uma partição $(k_1, \ldots, k_{s+1})$ para n pela relação $k_i = r_i - r_{i-1}$, onde $r_0 = 0$ e $r_{s+1} = n$.

Os subgrupos e subálgebras parabólicos de tipo Θ são determinados a partir da escolha do subconjunto $\Theta \subset \Sigma = \{\alpha_j : j = 1, \cdots, l-1\}$. Neste caso, dizemos que um intervalo em Σ é um subconjunto da forma $\Sigma(i,j) = \{\alpha_r : i \leq r \leq j\}$. Qualquer subconjunto Θ pode ser descrito pela união disjunta $\Sigma(i_1, j_1) \cup \cdots \cup \Sigma(i_k, j_k)$ com $j_l < i_l + 1$, para todo $l = 1, \ldots, k-1$. Esta escolha para Θ define a seguinte sequência crescente $\mathbf{r}$ de números inteiros:

$$\mathbf{r} = (1, \ldots, i_1 - 1, \ldots, j_1 + 1, \ldots, i_k - 1, \ldots, j_k + 1, j_k + 2, \ldots, n-1). \tag{4.1}$$

Os subgrupos parabólicos associados a $\Theta = \Sigma(i_1, j_1) \cup \cdots \cup \Sigma(i_k, j_k)$ são descritos pelas matrizes triangulares superiores em blocos cujas dimensões são determinadas pela partição $\mathbf{k}$ de n definida pela sequência (4.1), isto é,

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & A_{s+1} \end{pmatrix} \right\}$$

onde A_i é uma matriz $k_i \times k_i$, $i = 1, \ldots, s+1$, $\det A_1 \cdots \det A_{s+1} = 1$ e $k_i = r_i - r_{i-1}$. Consequentemente, a subálgebra parabólica de tipo $\Theta = \Sigma(i_1, j_1) \cup \cdots \cup \Sigma(i_k, j_k)$ corresponde às matrizes triangulares superiores em blocos em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ com o mesmo formato, isto é, em blocos divididos de acordo com a partição de n determinada pela sequência (4.1).

Observação: Para este Θ, o grupo de Weyl $\mathcal{W}_\Theta$ será o produto direto dos grupos de permutação dos subconjuntos $\{i_l, \ldots, j_l + 1\}$, $l = i, \ldots, j$.

Variedades *flag*

Sejam $\Theta = \Sigma(i_1, j_1) \cup \cdots \cup \Sigma(i_k, j_k) \subset \Sigma$ e $\mathbf{r}$ a sequência (4.1) associada. A variedade *flag* G/P_Θ é a variedade *flag* de subespaços $V_{r_1} \subset \cdots \subset V_{r_s}$ onde cada V_i é um subespaço vetorial $\dim V_i = i$ em $\mathbb{R}^n$, denotada por $\mathbb{F}(\mathbf{r})$, isto é:

$$\mathbb{F}(\mathbf{r}) = \{V_{r_1} \subset \cdots V_{r_s} : \dim V_i = i\,,\ V_i \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Isto pode ser obtido diretamente considerando-se a ação transitiva de $Sl(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{F}(\mathbf{r})$ de modo que se

$$b_\Theta = \langle e_1, \ldots, e_{r_1} \rangle \subset \cdots \langle e_1, \ldots, e_{r_s} \rangle$$

for a origem de $\mathbb{F}(\mathbf{r})$ então o subgrupo de isotropia é o subgrupo parabólico P_Θ formado por blocos dado pela partição de n definida por $\mathbf{r}$.

Por exemplo, no caso em que $\Theta = \Sigma(1, k-1) \cup \Sigma(k+1, n-1)$, G/P_Θ é a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ dos subespaços de dimensão k em $\mathbb{R}^n$.

4.2 Homologia das Grassmannianas $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$

Uma vez que podemos obter as Grassmannianas $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ como um espaço homogêneo G/P_Θ para $\Theta = \Sigma(1, k-1) \cup \Sigma(k+1, n-1) = \Sigma \setminus \{\alpha_k\}$, obtemos a decomposição de Bruhat

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) = \coprod_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} N \cdot w b_\Theta. \tag{4.2}$$

A homologia de $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ é determinada pelo cálculo do operador fronteira em cada célula de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta$, fecho de uma célula de Bruhat $N \cdot w b_\Theta$, $w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$. Para isto, precisamos determinar os representantes minimais $w^\Theta \in \mathcal{W}^\Theta$ em cada classe lateral (veja o Lema 2.2.1). Como $\mathcal{W}_\Theta$ é o produto direto dos grupos de permutação dos subconjuntos $\{1, \ldots, k-1\}$ e $\{k+1, \ldots, n-1\}$, temos que a cardinalidade de $\mathcal{W}_\Theta = k!(n-k)!$. Portanto, a cardinalidade de $\mathcal{W}^\Theta$ ou, equivalentemente, a quantidade de células na decomposição (4.2) é igual a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Os elementos em $\mathcal{W}^\Theta$ foram determinados em [17], Proposição 2.1. Para entender como estes elementos são definidos, vamos considerar a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ vista como um subconjunto do espaço projetivo de $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ (veja a seção 6.4). Neste caso, uma base é formada pelos elementos

$$e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n.$$

A origem é $e_0 = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$. As células de Schubert são $\mathcal{S}_I = \mathrm{fe}N \cdot e_I$ que têm dimensão $(i_1 - 1) + \cdots + (i_k - 1) = i_1 + \cdots + i_k - \frac{k(k+1)}{2}$. Para cada multi-índice I existe um único elemento de comprimento mínimo $w \in \mathcal{W}$ tal que $w_I e_0 = e_I$. Estes são os elementos que compõe $\mathcal{W}^\Theta$.

Para descrevê-los, denote por $r_i = (i, i+1)$ a reflexão em relação a raiz α_i. Dado um multi-índice I, para cada $j = 1, \ldots, k$, considere a permutação (j, i_j) que leva o índice j em i_j e que admite decomposição minimal

$$\eta_{I,j} = (j, i_j) = r_{i_j - 1} \cdots r_{j+1} r_j.$$

Segue que

$$w_I = (1, i_1) \cdots (k, i_k) = \eta_{I,1} \cdots \eta_{I,k}.$$

Observe que esta permutação leva o multi-índice $I_0 = (1, 2, \ldots, k)$ em $I = (i_1, \ldots, i_k)$.

Esta decomposição de w_I é minimal ([17], Proposição 2.1) e, com esta informação, pode-se calcular o conjunto $\Pi_{w_I} = \Pi^+ \cap w_I \Pi^-$ que aparece na expressão que define $\phi(w_I)$ que, por sua vez, é fundamental no cálculo do operador fronteira da homologia celular. Da expressão geral para Π_{w_I} em termos da decomposição minimal (veja a Equação (1.1)), segue que

$$\Pi^+ \cap w_I \Pi^- = \bigcup_{j=1}^{k} \eta_{I,1} \cdots \eta_{I,j-1} \Pi^+ \cap \eta_{I,j} \Pi^- \tag{4.3}$$

enquanto $\Pi^+ \cap \eta_{I,j} \Pi^-$ é dado por

$$\alpha_{i_j - 1}, \alpha_{i_j - 1} + \alpha_{i_j - 2}, \cdots, \alpha_{i_j - 1} + \alpha_{i_j - 2} + \cdots + \alpha_j$$

onde está implicito que $\Pi^+ \cap \eta_{I,j} \Pi^- = \emptyset$ se $i_j = j$. Escrevendo $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ e $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, as raízes de $\Pi^+ \cap \eta_{I,j} \Pi^-$ são dadas por

$$\lambda_{i_j - 1} - \lambda_{i_j}, \lambda_{i_j - 2} - \lambda_{i_j}, \cdots, \lambda_j - \lambda_{i_j}.$$

Portanto,

$$\Pi^+ \cap \eta_{I,j} \Pi^- = \{\lambda_u - \lambda_{i_j} : u = j, \ldots, i_j - 1\}. \tag{4.4}$$

Agora, dados os multi-índices $I = (i_1, \ldots, i_k)$ e $J = (j_1, \ldots, j_k)$, os elementos minimais correspondentes w_I e w_J satisfazem $w_i \leq w_J$ se, e só se, $i_t \leq j_t$, $t = 1, \ldots, k$. Em particular, as células de Schubert de dimensão um a menos que $\mathcal{S}_I$ são dadas pelos multi-índices

$$I_s = (i_1, \ldots, i_s - 1, \ldots, i_k) \qquad s = 1, \ldots, k$$

tal que $i_{s-1} < i_s - 1$ se $s > 1$ e $i_1 > 1$.

Para se calcular o operador fronteira, deve-se encontrar $\phi(w_I) - \phi(w_{I_s})$, onde $\phi(w) = \sum_{\alpha\in\Pi_w} \alpha$. Esta soma se estende aos elementos da união (4.3). O cálculo será feito em três etapas: para as componentes $j < s$, $j = s$ e $j > s$. Inicialmente, observe que, para $j < s$, as componentes são as mesmas, tanto para $\Pi^+ \cap w_I \Pi^-$ quanto para $\Pi^+ \cap w_{I_s}\Pi^-$ e, portanto, estas raízes não colaboram para a soma $\phi(w_I) - \phi(w_{I_s})$. Com isto, restam apenas as componentes $j = s$ e $j > s$.

1. A contribuição da componente $j = s$ é $(i_s - s)(\lambda_{s-1} - \lambda_s)$.

   Para ver isto, separe em casos: $s > 1$ e $s = 1$.

   (a) $s > 1$. Em primeiro lugar, da expressão (4.4), segue que

   $$\begin{aligned} \phi\left(\eta_{I,s}\right) &= \lambda_s + \lambda_{s+1} + \cdots + \lambda_{i_s-1} - (i_s - s)\lambda_{i_s} && (4.5)\\ \phi\left(\eta_{I_s,s}\right) &= \lambda_s + \lambda_{s+1} + \cdots + \lambda_{i_s-2} - (i_s - 1 - s)\lambda_{i_s-1} && (4.6)\end{aligned}$$

   de modo que
   $$\phi(w_I) - \phi(w_{I_s}) = (i_s - s)(\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}).$$

   Finalmente, a contribuição da componente $j = s$ na soma (4.3) será dada por

   $$\begin{aligned} & (1, i_1)\cdots(s-1, i_{s-1})\left(\phi(w_I) - \phi(w_{I_s})\right)\\ =\ & (1, i_1)\cdots(s-1, i_{s-1})(i_s - s)(\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s})\\ =\ & (i_s - s)\left((1, i_1)\cdots(s-1, i_{s-1})\right)\left(\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}\right)\end{aligned}$$

   Como $i_{s-1} < i_s - 1 < i_s$ segue que $\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}$ é invariante por $(1, i_1)\cdots(s-1, i_{s-1})$. E daí que a contribuição se reduz a

   $$(i_s - s)(\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}),$$

   conforme enunciado.

   (b) O caso $s = 1$ é semelhante e mais simples, pois não aparece a permutação multiplicando à esquerda e a contribuição vem da soma (4.5) subtraída de (4.6) que é igual a
   $$\phi(w_I) - \phi(w_{I_1}) = (i_1 - 1)(\lambda_{i_1-1} - \lambda_{i_1}).$$

2. A contribuição de uma componente $j > s$ é $\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}$.

   Da mesma forma que em (4.5), $\phi\left(\eta_{I,j}\right)$ é a soma

   $$\Lambda_j = \lambda_j + \lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_{i_j-1} - (i_j - j)\lambda_{i_j}$$

de modo que as contribuições em $\phi(w_I)$ e $\phi(w_{I_s})$ são dadas por:

$$\sum_I^j = (1,i_1)\cdots(s,i_s)\cdots(j-1,i_{j-1})\,(\Lambda_j) \tag{4.7}$$

$$\sum_{I_s}^j = (1,i_1)\cdots(s,i_s-1)\cdots(j-1,i_{j-1})\,(\Lambda_j) \tag{4.8}$$

Para se obter a diferença, note que, em relação às decomposições minimais de (s,i_s) e (s,i_s-1), temos que $(s,i_s) = r_{i_s-1}(s,i_s-1)$. Agora, defina

$$\begin{aligned} \gamma &= (s,i_s)\cdots(j-1,i_{j-1})\,(\Lambda_j) \\ \delta &= (s,i_s-1)\cdots(j-1,i_{j-1})\,(\Lambda_j) \end{aligned}$$

e observe que $\gamma = r_{i_s-1}\delta$. Isto implica que $\gamma-\delta = r_{i_s-1}\delta-\delta$ e daí que $r_{i_s-1}(\gamma-\delta) = -(\gamma-\delta)$. Mas r_{i_s-1} é a reflexão em relação à raiz simples $\lambda_{i_s}-\lambda_{i_s-1}$. Portanto, $\gamma-\delta$ é um múltiplo de $\lambda_{i_s}-\lambda_{i_s-1}$. Mais precisamente,

$$\gamma-\delta = -\frac{2\langle\delta,\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s}\rangle}{\langle\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s},\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s}\rangle}(\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s}) \tag{4.9}$$

Com o produto interno canônico (em que $\langle\lambda_i,\lambda_j\rangle = \delta_{ij}$), temos que $\langle\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s},\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s}\rangle = 2$. Segue que o coeficiente é

$$\langle\delta,\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s}\rangle = \langle(s,i_s-1)\cdots(j-1,i_{j-1})\,(\Lambda_j)\,,\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s}\rangle.$$

Como as reflexões são isometrias, isto é o mesmo que

$$\langle\delta,\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s}\rangle = \langle\Lambda_j,(j-1,i_{j-1})^{-1}\cdots(s,i_s-1)^{-1}(\lambda_{i_s-1}-\lambda_{i_s})\rangle. \tag{4.10}$$

Observe que $(s,i_s-1)^{-1} = (s,s+1)\cdots(i_s-2,i_s-1)$ leva i_s-1 em s e fixa i_s. Logo, o segundo fator deste produto interno é

$$(j-1,i_{j-1})^{-1}\cdots(s+1,i_{s+1})^{-1}(\lambda_s-\lambda_{i_s})$$

Observe que $\tau = (j-1,i_{j-1})^{-1}\cdots(s+1,i_{s+1})^{-1}$ fixa s e, portanto, a alteração que ela causa em $\lambda_s-\lambda_{i_s}$ só depende de i_s.

Vamos agora mostrar que $j\le\tau i_s<i_j$, isto é $\tau i_s = t$, com $j\le t<i_j$ e, portanto, o produto interno em (4.10) é dado por:

$$\begin{aligned} \langle\lambda_j+\lambda_{j+1}+\cdots+\lambda_{i_j-1}-(i_j-j)\lambda_{i_j},\tau(\lambda_s-\lambda_{i_s})\rangle &= \\ \langle\lambda_j+\lambda_{j+1}+\cdots+\lambda_{i_j-1}-(i_j-j)\lambda_{i_j},(\lambda_s-\lambda_t)\rangle &= -1. \end{aligned}$$

Para verificar isto, observe inicialmente a decomposição minimal de τ e τ^{-1} são dadas por:

$$\begin{aligned} \tau = & \quad ((j-1,j)\cdots(i_{j-1}-1,i_{j-1}))\cdots((s+1,s+2)\cdots(i_{s+1}-1,i_{s+1})) \\ \tau^{-1} = & \quad ((i_{s+1},i_{s+1}-1)\cdots(s+2,s+1))\cdots((i_{j-1},i_{j-1}-1)\cdots(j,j-1)) . \end{aligned}$$

Agora, por um lado, note que vale $\tau i_s < i_j$ pois, do contrário, se $\tau i_s = n$, com $n \geq i_j$ então $i_s = \tau^{-1}n$, com $n \geq i_j$ e, como n é invariante por τ^{-1}, teríamos que $i_s = n \geq i_j$. Mas $i_s < i_j$ e, portanto, podemos concluir que $\tau i_s < i_j$. Agora, vamos mostrar que $j \leq \tau i_s$. Vamos considerar duas possibilidades:

(a) $i_s \geq j$. Suponha que $\tau i_s = n$, $n < j$, isto é, $i_s = \tau^{-1}n$, com $n < j$. Inicialmente, $n \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$. Claramente $n \notin \{1, \ldots, s\}$ pois estes elementos são invariantes por τ^{-1} e teríamos que $i_s = n \in \{1, 2, \ldots, s\}$ o que não é possível pois $i_s > s$. Portanto, $n \in \{s+1, \ldots, j-1\}$ de onde teríamos que $i_s \in \tau^{-1}\{s+1, \ldots, j-1\} = \{i_{s+1}, \ldots, i_{j-1}\}$ o que também não é possível pois $i_s < i_{s+1} < \cdots < i_{j-1}$. Portanto, concluímos que $\tau i_s \geq j$.

(b) $i_s \leq j-1$. Como $s-1 \leq i_{s-1} < i_s - 1$ segue que $i_s > s \geq s+1$. Portanto, i_s está no conjunto $\{s+1, \ldots, j-1\}$. Pela decomposição minimal de τ, é possível notar que cada fator $(s+k, i_{s+k})^{-1}$ de τ, $k = 1, \ldots, j-1$, leva cada um dos elementos de $\{s+1, \ldots, j-1\}$ para o seu sucessor de modo que $\tau(s+1) = j$, $\tau(s+2) = j+1$ e, assim por diante, $\tau(s+k) = j+k-1$, $k = 1, 2, \ldots, j-(s+1)$. Portanto, $\tau i_s \geq j$.

Assim, segue que, para ambos os casos, o coeficiente em (4.9) é igual a 1 e, portanto, $\gamma - \delta = \lambda_{i_s - 1} - \lambda_{i_s}$.

Por fim, $\sum_I^j - \sum_{I_s}^j = (1, i_1)\cdots(s-1, i_{s-1})\,(\gamma - \delta)$. Observe que $\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}$ é fixa por $(1, i_1)\cdots(s-1, i_{s-1})$ pois $i_{s-1} < i_s - 1$. Logo concluímos que $\sum_I^j - \sum_{I_s}^j = \lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}$ como enunciado.

Em resumo,

Proposição 4.2.1. *Sejam* $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ *e* $I_s = (i_1, \ldots, i_s{-}1, \ldots, i_k)$, $i_{s-1} < i_s - 1$ *se* $s > 1$, *dois multi-índices associados às células de Schubert* $\mathcal{S}_I$ *e* $\mathcal{S}_{I_s}$. *Então*

$$\phi(w_I) - \phi(w_{I_s}) = ((i_s - s) + (k - s))\,(\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}) = (i_s + k - 2s)(\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s}) .$$

Note que $(i_s - s)\,(\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s})$ é a contribuição vinda de $\eta_{I,1}\cdots\eta_{I,s-1}\,(\Pi^+ \cap \eta_{I,s}\Pi^-)$ enquanto que $(k-s)\,(\lambda_{i_s-1} - \lambda_{i_s})$ vem de $\eta_{I,1}\cdots\eta_{I,j-1}\,(\Pi^+ \cap \eta_{I,j}\Pi^-)$ para $j > s$.

Agora, podemos obter o operador fronteira da homologia celular.

Fixando as decomposições minimais dadas para os w_I, se obtém uma decomposição celular com as funções de colagem determinadas. As células de Schubert são denotadas por $\mathcal{S}_I$ e

$$\partial(\mathcal{S}_I) = \sum c(I, I_s)\mathcal{S}_{I_s}$$

tomando I_s com a condição que $i_{s-1} < i_s - 1$ se $s > 1$ e $i_1 > 1$.

Ao retirar a raiz simples correspondente na representação de w_I obtém-se a representação de w_{I_s}. Portanto, nas expressões para $c(I, I_s)$ não é necessário incluir os termos de correção, provenientes de escolhas de decomposições minimais.

É necessário apenas corrigir o sinal que corresponde à posição da reflexão simples que se retira de w_I para obter w_{I_s}. Olhando as decomposições minimais, segue que esta é a posição

$$t_s = (i_1 - 1) + \cdots + (i_{s-1} - s + 1) + 1 = i_1 + \cdots + i_{s-1} - \frac{s(s-1)}{2} + 1$$

isto é, o sinal da correção é $(-1)^{t_s}$. Portanto,

$$c(I, I_s) = (-1)^{t_s} \left(1 + (-1)^{\rho}\right)$$

onde $\rho = i_s + k - 2s$. Ou ainda,

$$c(I, I_s) = (-1)^{t_s} \left(1 + (-1)^{i_s + k}\right). \tag{4.11}$$

Corolário 4.2.2. *As Grassmannianas* $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ *são orientáveis se* n *é par.*

Prova: Tome $I = (n - k + 1, \ldots, n)$ de modo que $\mathcal{S}_I$ é a única célula de dimensão máxima. O único s possível é $s = 1$ com

$$i_1 = n - k + 1.$$

Então $i_1 + k = n + 1$. Daí que $\partial \mathcal{S}_I = 0$ se n é par, isto é, a homologia máxima é $\mathbb{Z}$ se n é par. $\square$

Exemplo $k = 2$ e $n = 5$

Vamos apresentar o cálculo dos grupos de homologia das Grassmannianas $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^5)$. De acordo com [17], os $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$ multi-índices referentes aos elementos de $\mathcal{W}^{\Theta}$ são apresentados, juntamente com as respectivas decomposições minimais e dimensões das células, na tabela abaixo.

Os representantes minimais de $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^5\right)$		
I	w_I	$\dim \mathcal{S}_I$
$(1,2)$	1	0
$(1,3)$	r_2	1
$(2,3)$	r_1r_2	2
$(1,4)$	r_3r_2	2
$(2,4)$	$r_1r_3r_2$	3
$(1,5)$	$r_4r_3r_2$	3
$(3,4)$	$r_2r_1r_3r_2$	4
$(2,5)$	$r_1r_4r_3r_2$	4
$(3,5)$	$r_2r_1r_4r_3r_2$	5
$(4,5)$	$r_3r_2r_1r_4r_3r_2$	6

Escreva $i_1 = i < i_2 = j$ com $i = 1, \ldots, 4$ e $j = 2, \ldots, 5$. Neste caso, $t_1 = 1$ e $t_2 = i$. Assim, a fórmula (4.11) se reduz a duas partes:

1. $c(I, I_1) = -1 - (-1)^i$, só para $i \geq 2$, e
2. $c(I, I_2) = (-1)^i \left(1 + (-1)^j\right) = (-1)^i + (-1)^{i+j}$ que vale quando $i < j - 1$.

As células e suas fronteiras são as seguintes:

dim 0 A célula $\mathcal{S}_{(1,2)}$ e $\partial\mathcal{S}_{(1,2)} = 0$.

dim 1 A célula $\mathcal{S}_{(1,3)}$ e $\partial\mathcal{S}_{(1,3)} = 0$.

dim 2 As células $\mathcal{S}_{(2,3)}$ e $\mathcal{S}_{(1,4)}$. Neste caso:

- $\partial\mathcal{S}_{(2,3)} = (-1 - (-1)^2)\mathcal{S}_{(1,3)} = -2\mathcal{S}_{(1,3)}$.
- $\partial\mathcal{S}_{(1,4)} = ((-1)^1 + (-1)^{1+4})\mathcal{S}_{(1,3)} = -2\mathcal{S}_{(1,3)}$.

dim 3 As células $\mathcal{S}_{(2,4)}$ e $\mathcal{S}_{(1,5)}$. Neste caso:

- $\partial\mathcal{S}_{(2,4)} = (-1 - (-1)^2)\mathcal{S}_{(1,4)} + ((-1)^2 + (-1)^{2+4})\mathcal{S}_{(2,3)} = -2\mathcal{S}_{(1,4)} + 2\mathcal{S}_{(2,3)}$.
- $\partial\mathcal{S}_{(1,5)} = ((-1)^1 + (-1)^{1+5})\mathcal{S}_{(1,4)} = 0$.

dim 4 As células $\mathcal{S}_{(3,4)}$ e $\mathcal{S}_{(2,5)}$. Neste caso:

- $\partial\mathcal{S}_{(3,4)} = (-1 - (-1)^3)\mathcal{S}_{(2,4)} = 0$.
- $\partial\mathcal{S}_{(2,5)} = (-1 - (-1)^2)\mathcal{S}_{(1,5)} + ((-1)^2 + (-1)^{2+5})\mathcal{S}_{(2,4)} = -2\mathcal{S}_{(1,5)}$.

dim 5 A célula $\mathcal{S}_{(3,5)}$ e $\partial\mathcal{S}_{(3,5)} = (-1 - (-1)^3)\mathcal{S}_{(2,5)} + ((-1)^3 + (-1)^{3+5})\mathcal{S}_{(3,4)} = 0$.

dim 6 A célula $\mathcal{S}_{(4,5)}$ e $\partial\mathcal{S}_{(4,5)} = (-1 + (-1)^4)\mathcal{S}_{(3,5)} = -2\mathcal{S}_{(3,5)}$.

Portanto, a homologia inteira de $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^5\right)$ é dada por:

$$H_0=\mathbb{Z}, H_1=\mathbb{Z}_2, H_2=0, H_3=\mathbb{Z}_2, H_4=\mathbb{Z}, H_5=\mathbb{Z}_2 \text{ e } H_6=0.$$

Observe que o conjunto dos ciclos 4-dimensionais é $\mathbb{Z}\cdot\mathcal{S}_{(3,4)}$ e, como $\partial^\Theta=0$ nos ciclos 5-dimensionais, segue que $H_4\left(\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^5\right)\right)=\mathbb{Z}\cdot\mathcal{S}_{(3,4)}$.

4.3 Sobrejetividade de $\pi_{\Theta *}: H_*(\mathbb{F})\to H_*(\mathbb{F}_\Theta)$

Vamos agora fornecer um exemplo que mostra que a projeção canônica $\pi_\Theta:\mathbb{F}\to\mathbb{F}_\Theta$ não é sobrejetiva na homologia sobre $\mathbb{Z}$ em geral. Isto mostra uma distinção ao que ocorre no caso das variedades *flag* complexas ou no caso em que o anel é $\mathbb{Z}_2$ quando a homologia é livremente gerada pelas células de Schubert.

Antes de procedermos, note que π_Θ (assim como qualquer projeção entre variedades *flag*) é uma função celular pois $\pi\left(\mathcal{S}_w\right)=\mathcal{S}_w^\Theta$ tem dimensão $\dim\mathcal{S}_w$. Portanto existe uma aplicação bem definida na homologia celular.

Esta seção se encontra neste capítulo justamente pelo fato de que o exemplo que vamos apresentar corresponde à projeção da variedade *flag* maximal de $G=\mathrm{Sl}(5,\mathbb{R})$ sobre a Grassmanniana $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^5)$.

A homologia do *flag* maximal de $\mathrm{Sl}(5,\mathbb{R})$

A tabela abaixo apresenta como as 120 células de Schubert da variedade *flag* maximal de $\mathrm{Sl}(5,\mathbb{R})$ estão distribuídas de acordo com suas dimensões.

dimensão	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
#de células	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1

Esta distrubuição pode ser facilmente obtida ao se escrever $w\in\mathcal{W}$ como $w=uv$ com $u\in\mathcal{W}^\Theta$, $v\in\mathcal{W}_\Theta$ e $l(w)=l(u)+l(v)$. Aqui

$$\mathcal{W}^\Theta=\{1,r_2,r_1r_2,r_3r_2,r_1r_3r_2,r_4r_3r_2,r_2r_1r_3r_2,r_1r_4r_3r_2,r_2r_1r_4r_3r_2,r_3r_2r_1r_4r_3r_2\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\Theta &= \langle r_1\rangle\times\langle r_3,r_4\rangle\\ &= \{1,r_1,r_3,r_4,r_1r_3,r_1r_4,r_3r_4,r_4r_3,r_1r_3r_4,r_1r_4r_3,r_3r_4r_3,r_1r_3r_4r_3\}.\end{aligned}$$

Nosso objetivo nesta seção é apresentar um exemplo de quando a aplicação $\pi_{\Theta *}:H_*(\mathbb{F})\to H_*(\mathbb{F}_\Theta)$ não é sobrejetora. Para isto, vamos agora nos concentrar no nível quatro. Para apresentar a tabela com a informação requerida, simplificaremos a notação de acordo com as seguintes convenções.

- Escrevemos $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ para expressar que $\phi(w)=\sum_{j=1}^4\lambda_j\alpha_j$.

- O índice $i_1 \cdots i_k$ denota $w = r_{i_1} \cdots r_{i_k}$.

Tabela das 3-células

w	$\phi(w)$	w	$\phi(w)$	w	$\phi(w)$
134	$(1,0,2,1)$	143	$(1,0,1,2)$	343	$(0,0,2,2)$
213	$(1,3,1,0)$	214	$(1,2,0,1)$	234	$(0,3,2,1)$
243	$(0,2,1,2)$	321	$(1,2,3,0)$	323	$(0,2,2,0)$
324	$(0,1,3,1)$	121	$(2,2,0,0)$	123	$(3,2,1,0)$
124	$(2,1,0,1)$	132	$(2,1,2,0)$	432	$(0,1,2,3)$

Tabela das 4-células

w	$\phi(w)$	w	$\phi(w)$
1343	$(1,0,2,2)$	2134	$(1,4,2,1)$
2143	$(1,3,1,2)$	2343	$(0,3,2,2)$
1213	$(3,3,1,0)$	1214	$(2,2,0,1)$
1234	$(4,3,2,1)$	1243	$(3,2,1,2)$
3213	$(1,3,3,0)$	3214	$(1,2,4,1)$
3234	$(0,3,3,1)$	3243	$(0,2,4,2)$
1321	$(2,2,3,0)$	1323	$(3,2,2,0)$
1324	$(2,1,3,1)$	4321	$(1,2,3,4)$
4323	$(0,2,2,3)$	4324	$(0,1,3,3)$
2132	$(2,4,2,0)$	1432	$(2,1,2,3)$

Desta tabela e do Teorema 2.1.10 obtemos o operador fronteira sobre as 4-células:

- $\partial(\mathcal{S}_{1343}) = \partial(\mathcal{S}_{2343}) = \partial(\mathcal{S}_{1214}) = \partial(\mathcal{S}_{1321}) = \partial(\mathcal{S}_{1323}) = \partial(\mathcal{S}_{4323}) = 0$.
- $\partial(\mathcal{S}_{2143}) = \partial(\mathcal{S}_{1213}) = \partial(\mathcal{S}_{3213}) = \pm 2\mathcal{S}_{213}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{3234}) = \partial(\mathcal{S}_{1324}) = \partial(\mathcal{S}_{4324}) = \pm 2\mathcal{S}_{324}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{2134}) = \partial(\mathcal{S}_{3214}) = \pm 2\mathcal{S}_{134} \pm 2\mathcal{S}_{214}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{1234}) = \pm 2\mathcal{S}_{234} \pm 2\mathcal{S}_{124}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{1243}) = \pm 2\mathcal{S}_{143} \pm 2\mathcal{S}_{123}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{3243}) = \pm 2\mathcal{S}_{343} \pm 2\mathcal{S}_{323}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{4321}) = \pm 2\mathcal{S}_{321} \pm 2\mathcal{S}_{143}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{2132}) = \pm 2\mathcal{S}_{323} \pm 2\mathcal{S}_{121}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{1432}) = \pm 2\mathcal{S}_{432} \pm 2\mathcal{S}_{124}$.

Agora, considere a célula $\mathcal{S}_{2132} = \mathcal{S}_{r_2r_1r_3r_2}$ com $\partial(\mathcal{S}_{2132}) = \pm 2\mathcal{S}_{323} \pm 2\mathcal{S}_{121}$. Logo $\mathcal{S}_{2132}$ não é um ciclo. A célula projetada $\mathcal{S}^{\Theta}_{2132} = \mathcal{S}^{\Theta}_{r_2r_1r_3r_2} = \mathcal{S}_{(3,4)}$ é um gerador de $H_4\left(\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^5\right)\right) = \mathbb{Z}\cdot\mathcal{S}_{(3,4)}$. Por outro lado, em $\mathbb{F}$ não existe um ciclo da forma $\mathcal{S}_{2132}+\sigma$, com σ uma combinação de 4-células diferentes de $\mathcal{S}_{2132}$. Isto pode ser visto por inspeção na lista acima. De fato, $c\,(w,121) = 0$ para qualquer célula $\mathcal{S}_w \neq \mathcal{S}_{2132}$, portanto $\partial\left(\mathcal{S}_{2132}+\sigma\right) = \pm 2\mathcal{S}_{121} + (\pm 2\mathcal{S}_{323} + \partial\sigma) \neq 0$, pois $\partial\sigma$ não tem componente na direção de $\mathcal{S}_{121}$.

Mas $\pi_\Theta\left(\mathcal{S}\right) = \mathcal{S}_{(3,4)}$ se e somente se $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2132}+\sigma$ com σ uma combinação de 4-células diferentes de $\mathcal{S}_{2132}$. Portanto π_Θ não é sobrejetiva sobre os 4-ciclos e portanto não é sobre $H_4\left(\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{R}^5\right)\right) = \mathbb{Z}\cdot\mathcal{S}_{(3,4)}$.

Observação: Esta não-sobrejetividade de $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^5)$ na $\mathbb{Z}$-homologia mostra, em particular, que este fibrado não admite uma seção contínua.

Capítulo 5

As Grassmannianas de $\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R})$

Este capítulo apresenta o estudo da homologia das Grassmannianas Lagrangeanas $\mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ que são variedades *flag* do grupo simplético $\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R})$ encontrando a fórmula para o operador fronteira em uma célula de Schubert. Acontece que, neste caso, diferentemente do caso das Grassmannianas $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$, é necessário apresentar uma decomposição irredutível (minimal) para os representantes minimais que fornecem uma decomposição celular para estes espaços. Por isto, a primeira parte deste capítulo é dedicada à determinação de uma decomposição minimal para as células de Schubert das Grassmannianas Isotrópicas $\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$. Depois disto, em particular, utiliza-se esta decomposição minimal no caso das Grassmannianas Lagrangeanas para encontrar a fórmula do operador fronteira da homologia celular.

5.1 O grupo $\mathrm{Sp}(l, \mathbb{R})$

Seja $G = \mathrm{Sp}(l, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Sl}(2l, \mathbb{R}) : g^t J g = J\}$ o grupo real simplético de matrizes $2l \times 2l$, onde J é a matriz $2l \times 2l$ escrita em blocos $l \times l$ como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathbb{R}^{2l}$ em espaço euclideano de dimensão par. Uma forma bilinear anti-simétrica não-degenerada $\omega(u, v)$ em $\mathbb{R}^{2l}$ é chamada de forma simplética. Dada uma forma simplética qualquer, existe uma base

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_l, f_1, \ldots, f_l\}$$

de $\mathbb{R}^{2l}$ tal que a matriz da forma $\omega(u, v)$ é a matriz J, definida acima.

A sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(l, \mathbb{R}) = \{X : XJ + JX^t = 0\}$ pode ser caracterizada da seguinte forma: uma matriz $X \in \mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$ é da forma

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2l, \mathbb{R}),$$

onde A, B e C são matrizes reais $l \times l$ com $B = B^t$ e $C = C^t$ (simétricas).

Decomposição de Cartan

A função $\theta(X) = JXJ^{-1}$ é a involução de Cartan que fornece a decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ onde:

1. $\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A = A^t \; , \; B = B^t \right\}$ é a álgebra das matrizes anti-simétricas em $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$ e é isomorfa à álgebra das matrizes complexas anti-hermitianas $\mathfrak{u}(l)$.
2. $\mathfrak{s} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} : A = A^t \; , \; B = B^t \right\}$ é o subespaço das matrizes simétricas em $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$.

Passando ao nível do grupo, temos a decomposiçao de Cartan $\mathrm{Sp}(l,\mathbb{R}) = KS$ onde K é isomorfo ao grupo das matrizes unitárias complexas $\mathrm{U}(l)$ e S é o conjunto das matrizes simétricas positivas definidas em $\mathrm{Sp}(l,\mathbb{R})$.

Grupo de Weyl

As subálgebras abelianas maximais de $\mathfrak{s}$ são subálgebras de Cartan pois $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$ é forma real normal de $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{C})$. Uma dessas é a subálgebras das matrizes diagonais em $\mathfrak{sp}(l,\mathbb{R})$, isto é, as matrizes da forma $\mathrm{diag}(H,-H) \in \mathfrak{s}$, com H uma matriz diagonal $l \times l$. Seja $\mathfrak{a}^+ = \{\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l,-a_1,\ldots,-a_l) : a_1 > \cdots > a_l > 0\}$ uma câmara de Weyl de $\mathfrak{a}$.

Para $H = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l,-a_1,\ldots,-a_l) \in \mathfrak{a}$, definimos um funcional $\lambda_i \in \mathfrak{a}^*$ por $\lambda_i(H) = a_i$. Um sistema de raízes positivas será $\Pi^+ = \{\lambda_i - \lambda_j : 1 \le i < j \le l\} \cup \{\lambda_i + \lambda_j : 1 \le i, j \le l\}$. Um sistema de raízes simples associado é

$$\Sigma = \{\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \ldots, \alpha_{l-1} = \lambda_{l-1} - \lambda_l, \alpha_l = 2\lambda_l\}.$$

ao qual corresponde o diagrama de Dynkin C_l.

As reflexões em relação às raízes α_j, $1 \le j \le l-1$, são dadas pelas permutações das coordenadas j e $j+1$ em um elemento H enquanto a reflexão em relação à raíz α_l troca o sinal da última coordenada, isto é, se $H = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_l,-a_1,\ldots,-a_l) \in \mathfrak{a}$ então:

$$\begin{aligned} (\ldots,a_j,a_{j+1},\ldots,-a_j,-a_{j+1},\ldots) &\overset{r_{\alpha_j}}{\mapsto} (\ldots,a_{j+1},a_j,\ldots,-a_{j+1},-a_j,\ldots) \\ (a_1,\ldots,a_l,-a_1,\ldots,-a_l) &\overset{r_{\alpha_l}}{\mapsto} (a_1,\ldots,-a_l,-a_1,\ldots,a_l) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como as reflexões simples geram o grupo de Weyl, o grupo de Weyl $\mathcal{W} = S_l \wr C_2$ é o produto wreath do grupo de permutações S_l em l variáveis e o grupo C_2 cíclico de ordem 2 correspondente à troca de sinal e tem ordem $2^l l!$.

A partir das equações (5.1), em termos de elementos em S_{2l}, os geradores do grupo de Weyl podem ser descritos como $r_{\alpha_j} = (j\,,\,j+1)(l+j\,,\,l+j+1)$ e $r_{\alpha_l} = (l\,,\,2l)$.

Subálgebras Parabólicas

Os subespaços de raízes são dados por:

- Associados a $\lambda_i - \lambda_j$, $i < j$, temos o subespaço gerado por $e_{i,j} - e_{l+i,l+j}$ em $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$ cujas únicas entradas não-nulas são i, j e $l+i, l+j$ que aparecem nos blocos diagonais (A e $-A^t$.)

- Associados a $\lambda_i + \lambda_j$, temos o subespaço gerado por $e_{i,l+j} + e_{j,l+i}$, se $i < j$, e por $e_{i,l+i}$, se $i = j$, em $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$ cujas únicas entradas não-nulas são $i, j+l$ e $j, l+i$ que aparecem no bloco superior direito (B).

Segue que $\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \right\}$ com A triangular superior com diagonal nula e B simétrica. A subálgebra parabólica minimal se decompõe como $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, onde $\mathfrak{m} = 0$ pois $\mathfrak{a}$ é a subálgebra de Cartan. Segue também que $\mathfrak{n}^- = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & -A^t \end{pmatrix} \right\}$ com A triangular inferior com diagonal nula e C simétrica.

O nosso interesse agora é determinar as subálgebras parabólicas maximais, isto é, aquelas que são provenientes da escolha de $\Theta \subset \Sigma$ tal que o seu complementar seja um conjunto unitário e que estão associadas às variedades *flag* minimais.

i. $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_j\}$, $1 \leq j \leq l-1$.

   A subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta$ é a subálgebra da forma $\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \right\}$ com B simétrica,

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} : \alpha \text{ é uma matriz } j \times j \text{ arbitrária} \right\} \\ C &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} : \delta \text{ é uma matriz } (l-j) \times (l-j) \text{ arbitrária} \right\} \end{aligned}$$

ii. $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_l\}$.

   Meste caso, $\mathfrak{p}_\Theta$ é a subálgebra da forma $\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \right\}$ com A qualquer e B simétrica.

5.2 As Variedades *Flag* Minimais

Seja $\omega(u, v)$ uma forma simplética num espaço euclideano $\mathbb{R}^{2l}$. Um subespaço V de $\mathbb{R}^{2l}$ é dito isotrópico (com relação a ω) se $\omega(u, v) = 0$ para todo $u, v \in V$ ou, equivalentemente, se $\omega|_{V \times V} = 0$. Segue que V é isotrópico se e somente se v está contido em $V^\perp$. Como

$\dim V + \dim V^{\perp} = 2l$, temos que a dimensão de um subespaço isotrópico é no máximo l. Existem subespaços isotrópicos de dimensão exatamente l os quais são chamados de subespaços Lagrangeanos. Por exemplo, se J é a matriz de ω na base canônica $\mathcal{B}$ então o subespaço gerado pelos l primeiros vetores $e_1, \ldots, e_l$ é isotrópico e, portanto, Lagrangeano.

Usaremos a notação $\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ para denotar a Grassmanniana dos subespaços isotrópicos de dimensão p em $\mathbb{R}^{2l}$, para $p \leq l$.

Na tese [7] é feita a demonstração detalhada do seguinte fato: $\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ é a variedade *flag* minimal de $\mathrm{Sp}(l,\mathbb{R})$ associada a $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$, se $1 \leq p \leq l-1$ e $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_l\}$ se $p = l$. Em particular, a variedade $\mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ é chamada de Grassmanianna Lagrangeana.

Considere o seguinte conjunto formado pelos elementos básicos

$$\mathcal{B}_p = \left\{\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}, f_{j_1}, \ldots, f_{j_r}\} : p = q + r \text{ e } i_s \neq j_t, \forall 1 \leq s, t \leq l\right\}$$

formado pelas partições de p de tal modo que não apareça o mesmo subíndice simultaneamente para um elemento e_i e f_j. Segue que, se J é a matriz da forma simplética ω na base $\mathcal{B}$, então $\mathcal{B}_p$ gera um subespaço isotrópico de dimensão p e, portanto, serve como uma base para $\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$.

Observação: As variedades *flag* maximais $\mathbb{F}$ de $\mathrm{Sp}(l,\mathbb{R})$ se projetam via $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$. Portanto:

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}(1, 2, \cdots, l-1, l) = \left\{\mathrm{L}_1\left(\mathbb{R}^{2l}\right) \subset \cdots \subset \mathrm{L}_i\left(\mathbb{R}^{2l}\right) \subset \cdots \subset \mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)\right\}$$

é a variedade dos subespaços isotrópicos encaixantes em $\mathbb{R}^{2l}$.

Observação: $\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ pode ser vista como um subespaço do espaço projetivo $\mathbb{P}\left(\bigwedge^p(\mathbb{R}^{2l})\right)$ pela aplicação definida por

$$\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}, f_{j_1}, \ldots, f_{j_r}\rangle \mapsto [e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \wedge f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_r}].$$

Decomposição Celular de $\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$

Como as Grassmannianas $\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ correspondem às variedades *flag* minimais de $\mathrm{Sp}(l,\mathbb{R})$, para a escolha de $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$, $1 \leq p \leq l$, podemos obter uma decomposição celular a partir das células de Schubert.

As células de Schubert são, por definição, o fecho das células de Bruhat dadas pela decomposição de Bruhat:

$$\mathrm{L}_p\left(\mathbb{R}^{2l}\right) = \coprod_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta} N \cdot w b_\Theta$$

onde N é o grupo conexo com álgebra de Lie dada por $\mathfrak{n}$ e $\mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$ é o conjunto das classes laterais de $\mathcal{W}_\Theta$ em $\mathcal{W}$. A proposição 2.2.1 afirma que existe um único representante minimal w^Θ em cada classe $w\mathcal{W}_\Theta$. Portanto, precisamos determinar uma decomposição irredutível (minimal) para estes representantes minimais para que se possa encontrar as células de Schubert.

O conjunto $\mathcal{W}^\Theta$

Denotamos por $\mathcal{W}^\Theta$ o conjunto dos representantes minimais w^Θ. Em primeiro lugar, note que a cardinalidade de $\mathcal{W}^\Theta$ é dada por

$$\mid \mathcal{W}^\Theta \mid = 2^p \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

De fato, denote por $\mathcal{W}_{A_l}$ o grupo de Weyl associado ao diagrama A_l e por $\mathcal{W}_{C_l}$ o grupo de Weyl associado ao diagrama C_l.

Observe que $\mathcal{W}_\Theta \cong \mathcal{W}_{A_{p-1}} \times \mathcal{W}_{C_{l-p}}$. Como o grupo de Weyl de C_l tem cardinalidade $2^l l!$, o grupo de Weyl de A_l é o grupo simétrico S_{l+1} e tem cardinalidade $(l+1)!$, segue que a cardinalidade de $\mathcal{W}_\Theta = p!2^{l-p}(l-p)!$. Portanto,

$$\mid \mathcal{W}^\Theta \mid = \frac{\mid \mathcal{W} \mid}{\mid \mathcal{W}_\Theta \mid} = \frac{2^l l!}{p!2^{l-p}(l-p)!} = 2^p \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}.$$

Vamos agora determinar explicitamente os elementos de $\mathcal{W}^\Theta$.

O conjunto A

Os elementos de $\mathcal{W}^\Theta$ para Θ maximal ($\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$), são parametrizados por l-uplas da forma $(\underline{i}, \underline{a}) \in \mathbb{Z}^l$. Neste sentido, definimos o conjunto A dos elementos $(\underline{i}, \underline{a}) \in \mathbb{Z}^l$ onde:

$$\underline{i} = (i_1, \ldots, i_p)\ ,\ \underline{a} = (a_{p+1}, \ldots, a_l)$$

satisfazem:

- Em relação a $\underline{a} = (a_{p+1}, \ldots, a_l)$: $0 \leq a_{p+1} \leq a_{p+2} \leq \cdots \leq a_l \leq p$. Ou:

  P1 a_l assume todos os valores entre 0 e p: $a_l = 0, 1, \ldots, p$.

  P2 Para cada a_l, a_{l-1} assume todos os valores entre 0 e a_l; para cada a_{l-1}, a_{l-2} assume todos os valores entre 0 e a_{l-1}, etc. Para cada t, $p+1 \leq t < l$ tem-se que $0 \leq a_t \leq a_{t+1}$.

- Em relação a $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_p)$, há dois tipos:

  T1 Não tem contribuição de $\underline{i}$: $i_1 = i_2 = \cdots = i_p = 0$ (tipo 1).

  T2 Tem contribuição de $\underline{i}$ e ocorre quando $a_{p+1} \neq 0$ para os quais os últimos a_{p+1} elementos de $\underline{i}$ podem ser não-nulos e aparecem em ordem estritamente crescente com valores entre 0 e l (tipo 2). Ou:

  (i) $i_j = 0$ se $j \leq p - a_{p+1}$.

  (ii) Para k, $p - a_{p+1} \leq k \leq p$, o menor inteiro tal que $i_k \neq 0$ então $1 \leq i_k < \cdots < i_p \leq l$.

(Se $a_{p+1} = 0$ então $i_1 = i_2 = \cdots = i_p = 0$ pois $i_p \leq a_{p+1}$ e estes já foram inclusos nos de tipo 1)

Antes de estabelecer a relação destes elementos com os elementos no grupo de Weyl, vamos considerar alguns exemplos no caso em que $l = 4$.

- Para $p = 1$ teremos as seguinte 4-uplas (i_1, a_2, a_3, a_4):

Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$
1	$(0,0,0,0)$	2	$(1,1,1,1)$
1	$(0,0,0,1)$	2	$(2,1,1,1)$
1	$(0,0,1,1)$	2	$(3,1,1,1)$
1	$(0,1,1,1)$	2	$(4,1,1,1)$

- Para $p = 2$ teremos as seguinte 4-uplas (i_1, i_2, a_3, a_4):

Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$
1	$(0,0,0,0)$	2	$(0,1,1,1)$	2	$(0,3,1,2)$	2	$(1,2,2,2)$
1	$(0,0,0,1)$	2	$(0,2,1,1)$	2	$(0,4,1,2)$	2	$(1,3,2,2)$
1	$(0,0,0,2)$	2	$(0,3,1,1)$	2	$(0,1,2,2)$	2	$(1,4,2,2)$
1	$(0,0,1,1)$	2	$(0,4,1,1)$	2	$(0,2,2,2)$	2	$(2,3,2,2)$
1	$(0,0,1,2)$	2	$(0,1,1,2)$	2	$(0,3,2,2)$	2	$(2,4,2,2)$
1	$(0,0,2,2)$	2	$(0,2,1,2)$	2	$(0,4,2,2)$	2	$(3,4,2,2)$

- Para $p = 3$ teremos as seguinte 4-uplas (i_1, i_2, i_3, a_4):

Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$	Tipo	$(\underline{i}, \underline{a})$
1	$(0,0,0,0)$	2	$(0,0,1,2)$	2	$(0,2,4,2)$	2	$(0,1,4,3)$
1	$(0,0,0,1)$	2	$(0,0,2,2)$	2	$(0,3,4,2)$	2	$(0,2,3,3)$
1	$(0,0,0,2)$	2	$(0,0,3,2)$	2	$(0,0,1,3)$	2	$(0,2,4,3)$
1	$(0,0,0,3)$	2	$(0,0,4,2)$	2	$(0,0,2,3)$	2	$(0,3,4,3)$
2	$(0,0,1,1)$	2	$(0,1,2,2)$	2	$(0,0,3,3)$	2	$(1,2,3,3)$
2	$(0,0,2,1)$	2	$(0,1,3,2)$	2	$(0,0,4,3)$	2	$(1,2,4,3)$
2	$(0,0,3,1)$	2	$(0,1,4,2)$	2	$(0,1,2,3)$	2	$(1,3,4,3)$
2	$(0,0,4,1)$	2	$(0,2,3,2)$	2	$(0,1,3,3)$	2	$(2,3,4,3)$

A função $\eta : A \to \mathcal{W}$

Vamos agora estabelecer a relação dos elementos em A com os elementos no grupo de Weyl. Vamos denotar por $r_i = r_{\alpha_i}$ a reflexão associada a raiz simples $\alpha_i \in \Sigma$. Para quaisquer $1 \leq k \leq n \leq l$ definimos

$$\pi(n, k) = r_{n-k+1} r_{n-k+2} \cdots r_{n-1} r_n$$

sendo que $\pi(n,0)=1$. Observe que $\ell(\pi(n,k))=k$.

Agora, definimos η_1 a função que associa a cada $\underline{i}$ um elemento no grupo de Weyl da seguinte forma:

$$\eta_1(i_1,\ldots,i_p)=\pi(l,i_1)\pi(l,i_2)\cdots\pi(l,i_p).$$

Definimos também uma aplicação η_2 que associa a cada $\underline{a}$ um elemento no grupo de Weyl da seguinte forma:

$$\eta_2(a_{p+1},\ldots,a_l)=\pi(l-1,a_{p+1})\pi(l-2,a_{p+2})\cdots\pi(p,a_l).$$

Finalmente, definimos η a aplicação que associa a cada $(\underline{i},\underline{a})$ um elemento no grupo de Weyl a partir de η_1 e η_2:

$$\eta(\underline{i},\underline{a})=\eta_1(\underline{i})\eta_2(\underline{a}). \tag{5.3}$$

Vamos nos dedicar a estabelecer o seguinte resultado: a imagem pela aplicação $\eta: A\to\mathcal{W}$ é o conjunto $\mathcal{W}^{\Theta}$, com $\Theta=\Sigma\setminus\{\alpha_p\}$.

Claramente, a $\eta(A)\in\mathcal{W}$. Entretanto, há dois aspectos a serem provados aqui: em primeiro lugar, precisamos verificar que as decomposições para os elementos de $\mathcal{W}$ como imagem de η são decomposições irredutíveis (minimais). Em segundo lugar, temos que mostrar que tais decomposições além de irredutíveis (minimais), fornecem o conjunto $\mathcal{W}^{\Theta}$ dos representantes minimais em cada classe lateral de $\mathcal{W}/\mathcal{W}_{\Theta}$.

Observação: Sabemos que um elemento $w\in\mathcal{W}$ pode admitir mais de uma decomposição minimal. No Apêndice de [17], apresenta-se brevemente uma outra decomposição minimal para os elementos de $\mathcal{W}^{\Theta}$. O exemplo abaixo ilustra esta diferença a partir do mesmo exemplo feito neste artigo.

Exemplo: Considere o exemplo em que $l=3$ e $p=2$. A tabela abaixo compara duas decomposições minimais diferentes: a que foi aqui apresentada com a que se encontra no artigo [17]. Além desta comparação, na última coluna da tabela, considerando a variedade *flag* $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^6\right)$ associada, inserimos uma base que é obtida pela ação do grupo de Weyl na origem $b_{\Theta}=\langle e_1,e_2\rangle$ de $\mathrm{L}_2\left(\mathbb{R}^6\right)$.

Tipo	$(\underline{i},\underline{a})$	$\eta(\underline{i},\underline{a})$	Deodhar	$\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^6)$
1	$(0,0,0)$	1	1	$\langle e_1,e_2\rangle$
1	$(0,0,1)$	r_2	r_2	$\langle e_1,e_3\rangle$
1	$(0,0,2)$	r_1r_2	r_1r_2	$\langle e_2,e_3\rangle$
2	$(0,1,1)$	r_3r_2	r_3r_2	$\langle e_1,f_3\rangle$
2	$(0,1,2)$	$r_3r_1r_2$	$r_1r_3r_2$	$\langle e_2,f_3\rangle$
2	$(0,2,1)$	$r_2r_3r_2$	$r_2r_3r_2$	$\langle e_1,f_2\rangle$
2	$(0,2,2)$	$r_2r_3r_1r_2$	$r_2r_1r_3r_2$	$\langle e_3,f_2\rangle$
2	$(0,3,1)$	$r_1r_2r_3r_2$	$r_1r_2r_3r_2$	$\langle e_2,f_1\rangle$
2	$(0,3,2)$	$r_1r_2r_3r_1r_2$	$r_2r_1r_2r_3r_2$	$\langle e_3,f_1\rangle$
2	$(1,2,2)$	$r_3r_2r_3r_1r_2$	$r_3r_2r_1r_3r_2$	$\langle f_3,f_2\rangle$
2	$(1,3,2)$	$r_3r_1r_2r_3r_1r_2$	$r_3r_2r_1r_2r_3r_2$	$\langle f_3,f_1\rangle$
2	$(2,3,2)$	$r_2r_3r_1r_2r_3r_1r_2$	$r_2r_3r_2r_1r_2r_3r_2$	$\langle f_2,f_1\rangle$

Usando as relações existentes em $\mathcal{W}$ é fácil ver que as diferentes decomposições são equivalentes. A saber, valem as seguintes relações neste caso: $r_1r_2r_1 = r_2r_1r_2$, $r_2r_3r_2r_3 = r_3r_2r_3r_2$ e $r_1r_3 = r_3r_1$. Por exemplo, observe como é possível obter a equivalência entre os dois elementos da última tabela:

$$r_2r_3r_1r_2(r_3r_1)r_2 = r_2r_3(r_1r_2r_1)r_3r_2 = r_2r_3r_2r_1r_2r_3r_2.$$

5.2.1 Contagem dos elementos

Vamos agora mostrar que a cardinalidade do conjunto A é a mesma do conjunto dos elementos minimais.

Para fazer contagem de elementos em A vamos aplicar em várias situações a seguinte propriedade de combinatória: num conjunto com n elementos, a quantidade de k-uplas não-ordenadas com repetição é dada pelo número

$$\bar{C}(n,k) = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Além disso, vale a seguinte igualdade

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k+1 \\ k \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Lema 5.2.1. *Existem* $\begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix}$ *elementos de tipo* 1.

Prova: Os elementos de tipo 1 são caracterizados pelas $l-p$-uplas $(a_{p+1},\ldots,a_l)$ que satisfazem P1 e P2. Estas regras implicam que os elementos de tipo 1 são construídos da direita para a esquerda. A identidade corresponde ao único $\bar{C}(p,0) = 1$ elemento com todas as coordenadas nulas. Os primeiros elementos não-nulos são os $\bar{C}(p,1)$ elementos que admitem uma entrada não-nula na última coordenada. Seguindo este procedimento, observamos que, em geral, para cada $1 \leq j \leq l-p$, existem $\bar{C}(p,j)$ elementos com entradas não-nulas nas últimas j posições. Portanto, a quantidade de elementos do tipo 1 é dado pela soma (5.5) com $n = p-1$ e $k = l-p$, isto é,

$$\sum_{j=0}^{l-p} \bar{C}(p,j) = \sum_{j=0}^{l-p} \binom{p-1+j}{j} = \binom{l}{l-p} = \binom{l}{p}.$$

□

Para cada $0 \leq j \leq p$, defina o subconjunto $A_j \subset A$ por

$$A_j = \{(\underline{i}, \underline{a}) \in A : i_1 = \cdots = i_{p-j} = 0 \text{ and } 0 < i_{p-j+1} < \cdots < i_p\}.$$

Assim A_j é o subconjunto de A que contém todos os elementos nos quais a parte $\underline{i}$ admite exatamente j entradas não-nulas.

Lema 5.2.2. *Para cada* $0 \leq j \leq p$, *a cardinalidade de* A_j *é*

$$\binom{l}{j}\binom{l-j}{p-j}.$$

Prova: Temos duas possibildades.

1. O caso $j = 0$ que corresponde aos elementos de tipo 1. Pelo Lema 5.2.1, a quantidade de tais elementos é $\binom{l}{p}$ e observe que $\binom{l}{0} = 1$.
2. O caso $j \neq 0$ que corresponde aos elementos de tipo 2. Se existem j entradas não-nulas em $\underline{i}$ então há $\binom{l}{j}$ escolhas para $\underline{i}$. Além disso, pela construção dos elementos em A, isto implica que $a_{p+1} \geq j$. Como $j \leq a_{p+1} \leq a_{p+2} \leq \cdots \leq a_l \leq p$, existem $\bar{C}(p-j+1, l-p)$ escolhas para $\underline{a}$. Portanto, o número de elementos da forma $(\underline{i}, a_{p+1}, \ldots, a_l)$ no quais $\underline{i}$ admite exatamente j entradas não-nulas é o produto das escolhas para $\underline{i}$ e $\underline{a}$, isto é,

$$\binom{l}{j} \cdot \bar{C}(p-j+1, l-p) = \binom{l}{j}\binom{l-j}{l-p}.$$

□

Observe que o resultado acima pode ser reescrito da seguinte forma

$$\binom{l}{j}\binom{l-j}{l-p} = \binom{l}{p}\binom{p}{j}. \tag{5.6}$$

Corolário 5.2.3. *Os conjuntos A e $\mathcal{W}^{\Theta}$ possuem a mesma cardinalidade.*

Prova: Como $A = \bigcup_{j=0}^{p} A_j$, o total de elementos em A é a soma

$$\sum_{j=0}^{p} \begin{pmatrix} l-j \\ l-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ j \end{pmatrix}$$

pelo Lema 5.2.2. Aplicando a fórmula (5.6), temos que esta soma é igual a

$$\sum_{j=0}^{p} \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix} \left[\sum_{j=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ j \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix} \cdot 2^p,$$

conforme foi obtido em 5.2. □

5.2.2 Decomposição Minimal

Já vimos que os conjuntos A e $\mathcal{W}^{\Theta}$ possuem a mesma cardinalidade. Vamos agora mostrar que a decomposição determinada por η para o elemento com maior número de reflexões é de fato uma decomposição minimal. Isto será feito comparando-se a dimensão da célula de Schubert associada a ele com a dimensão da variedade *flag* minimal $\mathbb{F}_{\Theta}$.

Seja

$$\widetilde{(\underline{i}, \underline{a})} = ((l-p+1, \ldots, l-1, l), (p, p, \cdots, p))$$

o elemento em A cujos indíces são os maiores possíveis em cada coordenada. Segue que $\widetilde{w} = \eta\left(\widetilde{(\underline{i}, \underline{a})}\right) \in \mathcal{W}$ é o elemento que possui o maior número de reflexões simples dentre todos em $\eta(A)$ (a priori, sem nenhum cancelamento). Para calcular a quantidade de reflexões simples que formam $\widetilde{w}$ basta somar os índices que aparecem em $\widetilde{(\underline{i}, \underline{a})}$. Os p primeiros termos relativos a $\underline{i}$ formam uma PA de razão 1 e a soma de seus índices é $\frac{p}{2}(l-p+1+l) = \frac{p}{2}(2l-p+1)$. Os últimos $(l-p)$ termos relativos a $\underline{a}$ tem todos igualmente tamanho p somando $p(l-p)$. Portanto, a quantidade de reflexões simples em $\widetilde{w}$ é igual a:

$$p(l-p) + \frac{p}{2}\left(2l-p+1\right) = \frac{p}{2}\left(4l-3p+1\right). \tag{5.7}$$

Dimensão de $\mathbb{F}_{\Theta}$

Seja $\mathbb{F}_{\Theta} = G/P_{\Theta}$ a variedade *flag* associada a $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$ (forma real normal).

Vamos verificar agora que a dimensão de $\mathbb{F}_{\Theta}$ é igual a (5.7), isto é,

$$\dim \mathbb{F}_{\Theta} = \frac{p}{2}\left(4l-3p+1\right)$$

De fato, vimos acima que a subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta$ é da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}$$

com A triangular superior em blocos $p \times p$ e $(l-p) \times (l-p)$ enquanto C é da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

onde α é uma matriz $(l-p) \times (l-p)$ simétrica. A dimensão de $\mathbb{F}_\Theta$ corresponde à dimensão da subálgebra complementar à subálgebra parabólica $\mathfrak{p}_\Theta$. Da parte complementar a A temos uma matriz $(l-p) \times p$ que tem dimensão $p(l-p)$. Da parte complementar a C, observe que C tem dimensão $\dfrac{(l-p)(l-p+1)}{2}$ enquanto a parte tringular inferior de uma matriz em $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$ é formada por matrizes simétricas e tem dimensão $\dfrac{l(l+1)}{2}$. Portanto, a dimensão do complementar de C é a subtração da dimensão total do bloco triangular inferior da dimensão de C:

$$\frac{l(l+1)}{2} - \frac{(l-p)(l-p+1)}{2} = \frac{p}{2}(2l-p+1).$$

Logo, a dimensão da variedade *flag* $\mathbb{F}_\Theta$ é igual a (5.7).

Portanto, a quantidade de reflexões simples em $\widetilde{w}$ é exatamente a dimensão da variedade *flag* $\mathbb{F}_\Theta$ e concluímos que esta é uma *decomposição minimal* para $\widetilde{w}$ pois, visto que a dimensão de $\mathbb{F}_\Theta$ é igual a dimensão da célula de Schubert $\mathcal{S}_{\widetilde{w}}$, não se pode ter uma decomposição de $\widetilde{w}$ com uma quantidade menor de reflexões simples.

5.2.3 Representante Minimal

Agora que temos uma decomposição minimal para $\widetilde{w}$, o elemento de dimensão maior entre os elementos em $\eta(A)$, vamos mostrar que ele é minimal em sua classe lateral e que, portanto, pertence a $\mathcal{W}^\Theta$.

Critério

Vamos utilizar aqui o critério determinado pela equação (1.2) que caracteriza os elementos minimais em $\mathcal{W}^\Theta$. Vamos introduzir a seguinte notação. Sejam $\Phi_w = \Pi_{w^{-1}} = \{\alpha \in \Pi^+ \mid w\alpha \in \Pi^-\} = w\Pi^+ \cap \Pi^- = \Pi^+ \cap w^{-1}\Pi^-$ e $\Pi_\Theta^{\mathrm{rad}}$ o complementar de $\langle\Theta\rangle^+$ em Π^+.

Proposição 5.2.4 ([36], Proposição 2.2)**.** *Cada classe $w\mathcal{W}_\Theta$ contém um único elemento w^Θ de comprimento minimal. Ele é caracterizado por uma das condições:*

1 $\Phi_{w^\Theta} \cap \langle\Theta\rangle^+ = \emptyset$ *(veja a Equação (1.2)).*

2 $\Phi_{w^\Theta} \subset \Pi_\Theta^{rad}$.

O segundo item desta proposição nos leva ao conjunto Φ_w. Vamos relembrar (veja a Equação (1.1)) que é possível determinar o conjunto $\Phi_w = w\Pi^+ \cup \Pi^-$ a partir de uma decomposição minimal de $w \in \mathcal{W}$. Seja $w = r_1 \cdots r_n$ uma decomposição minimal de $w \in \mathcal{W}$. Então

$$\Phi_w = \{\alpha_n, r_n\alpha_{n-1}, \ldots, r_n \cdots r_2\alpha_1\}. \tag{5.8}$$

Ou seja, dada uma decomposição minimal de $w = r_1 \cdots r_n$, os elementos de Φ_w aparecem na mesma ordem que a decomposição minimal de $w^{-1} = r_n \cdots r_1$.

Vamos aplicar o segundo item da Proposição 5.2.4 para provar que $\widetilde{w}$ é um representante minimal ao mostrar que $\Phi_{\widetilde{w}} \subset \Pi_\Theta^{\mathrm{rad}}$ onde $\Phi_{\widetilde{w}}$ será determinado de acordo com a Equação (5.8).

Para $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_p\}$, $\Pi_\Theta^{\mathrm{rad}}$ é facilmente caracterizado pela seguinte propriedade

$$\gamma \in \Pi_\Theta^{\mathrm{rad}} \qquad \text{se e somente se} \qquad \gamma = \lambda\alpha_p + \beta, \lambda \neq 0 \tag{5.9}$$

onde $\lambda \in \mathbb{Z}_+$ e β é uma combinação linear com coeficientes positivos inteiros de raízes simples distintas de α_p. Isto é, $\Pi_\Theta^{\mathrm{rad}}$ é formado por todas as raízes nas quais α_p aparece com um coeficiente não-nulo quando escrita como uma combinação em relação às raízes simples.

Vamos agora mostrar que todas as raízes de $\Phi_{\widetilde{w}}$ tem a propriedade (5.9).

Vamos denotar por $\bar{\pi}(n,k) = \pi(n,k)^{-1}$. Logo $\widetilde{w}$ e seu inverso $\widetilde{w}^{-1}$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \widetilde{w} &= \pi(l, l-p+1) \cdots \pi(l,l) \cdot \pi(l-1,p) \cdots \pi(p,p) && (5.10) \\ \widetilde{w}^{-1} &= \bar{\pi}(p,p) \cdots \bar{\pi}(l-1,p) \cdot \bar{\pi}(l,l) \cdots \bar{\pi}(l, l-p+1). && (5.11) \end{aligned}$$

Pela Equação (5.8), podemos escrever $\Phi_{\widetilde{w}} = A \cup \tau B$, onde

$$\begin{aligned} A &= \Phi_{\pi(p,p)} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{l-p-1} \bar{\pi}(p,p) \cdots \bar{\pi}(p+j-1,p) \Phi_{\pi(p+j,p)} \right) && (5.12) \\ B &= \Phi_{\pi(l,l)} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{p-1} \bar{\pi}(l,l) \cdots \bar{\pi}(l-j+1,l) \Phi_{\pi(l-j,l)} \right) && (5.13) \end{aligned}$$

e $\tau = \bar{\pi}(p,p) \cdots \bar{\pi}(l-1,p)$. De agora em diante, vamos aplicar, sem fazer menção, a Equação (5.8) para descrever os conjuntos A e B.

O conjunto $\Phi_{\pi(p,p)}$ é dado pelas p raízes $\{\alpha_p, \alpha_{p-1} + \alpha_p, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_p\}$. Para $1 \leq j \leq l-p-1$, o conjunto $\bar{\pi}(p,p) \cdots \bar{\pi}(p+j-1,p)\Phi_{\pi(p+j,p)}$ é dado pela soma de $\alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_{p+j}$ com as p raízes de $\Phi_{\pi(p,p)}$. A tabela abaixo reúne todas as raízes de A.

$\Phi_{\pi(p,p)}$	$\bar{\pi}(p,p)\Phi_{\pi(p+1,p)}$	$\cdots$	$\bar{\pi}(p,p)\cdots\bar{\pi}(l-2,p)\Phi_{\pi(l-1,p)}$
α_p	$\alpha_p+\alpha_{p+1}$	$\cdots$	$\alpha_p+\cdots+\alpha_{l-1}$
$\alpha_{p-1}+\alpha_p$	$\alpha_{p-1}+\alpha_p+\alpha_{p+1}$	$\cdots$	$\alpha_{p-1}+\alpha_p+\cdots+\alpha_{l-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\alpha_1+\cdots+\alpha_p$	$\alpha_1+\cdots+\alpha_p+\alpha_{p+1}$	$\cdots$	$\alpha_1+\cdots+\alpha_p+\cdots+\alpha_{l-1}$

Claramente, todas as raízes de A satisfazem a propriedade (5.9).

O conjunto $\Phi_{\pi(l,l)}$ é dado pelas l raízes $\{\alpha_l, \alpha_l+\alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_l+\cdots+\alpha_1\}$. Para $1 \leq j \leq p-1$, em primeiro lugar, observe que $\Phi_{\pi(l-j,l)}$ é dado pelas $l-j$ raízes $\{\alpha_l, \alpha_l+\alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_l+\alpha_{l-1}+\cdots+\alpha_{j+1}\}$. A ação de $\bar{\pi}(l,l)\cdots\bar{\pi}(l-j+1,l)$ na raiz α_l é $\alpha_l+2\alpha_{l-1}+\cdots+2\alpha_{l-j}$ enquanto α_k, para $j+1 \leq k < l$, é levada para α_{k-j}. Portanto, se denotarmos $\delta = \alpha_l+2\alpha_{l-1}+\cdots+2\alpha_{l-j}$, então

$$\bar{\pi}(l,l)\cdots\bar{\pi}(l-j+1,l)\Phi_{\pi(l-j,l)} = \{\delta, \delta+\alpha_{l-j-1}, \ldots, \delta+\alpha_{l-j-1}+\cdots+\alpha_1\}. \tag{5.14}$$

Para concluir é necessário ver como τ age nas raízes de B. A começar pelas raízes simples, a ação de τ é dada por

$$\begin{aligned}
\alpha_j &\mapsto \alpha_{p+j}\,,\ 1 \leq j < l-p \\
\alpha_{l-p} &\mapsto -(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{l-1}) && (5.15) \\
\alpha_{l-j} &\mapsto \alpha_{p-j}\,,\ 1 \leq j < p \\
\alpha_l &\mapsto \alpha_l+2\alpha_{l-1}+\cdots+2\alpha_p. && (5.16)
\end{aligned}$$

Queremos provar que as raízes em τB satisfazem a propriedade (5.9). Isto significa que a raiz α_p deve aparecer sempre com um coeficiente não-nulo em cada raíz de τB. Observe primeiramente que todas as raízes de B são da forma $\alpha_l+\beta$, onde $\beta \in \Pi^+$. Note também que existem somente duas raízes simples cujas imagens pela ação de τ contém a raiz α_p, a saber, α_l e α_{l-p} (veja as Equações (5.15) e (5.16)). Portanto, a raiz α_p deixaria de aparecer em uma raiz de τB caso tivesse uma contribuição de $2\alpha_{l-p}$ em alguma parte de β de modo que pudesse cancelar com a contribuição $2\alpha_p$ de $\tau(\alpha_l)$ que ocorre para todas as raízes de B. Entretanto, pela Equação (5.14), sempre que a raiz α_{l-p} aparece como parte de β, isto ocorre com o coeficiente $+1$. Logo, concluímos que todos os elementos em τB satisfazem a propriedade (5.9).

Proposição 5.2.5. *Seja $\widetilde{w} = \pi(l,l-p+1)\cdots\pi(l,l)\cdot\pi(l-1,p)\cdots\pi(p,p)$ uma decomposição minimal (irredutível) do elemento com maior quantidade de reflexões simples na imagem de η. Tem-se que $\Phi_{\widetilde{w}} \subset \Pi_\Theta^{\mathrm{rad}}$, isto é, $\widetilde{w} \in \mathcal{W}^\Theta$.*

Corolário 5.2.6. *A imagem de η é o conjunto dos representantes minimais $\mathcal{W}^\Theta$.*

Prova: Seja $w \in \eta(A)$. Se $w < \widetilde{w}$ e $\dim \mathcal{S}_{\widetilde{w}} = \dim \mathcal{S}_w + 1$ então, pela Proposição 2.2.3, w é também um representante minimal em sua classe uma vez que $\widetilde{w}$ é minimal em sua classe pela Proposição 5.2.5. Tais elementos w são obtidos retirando-se raízes simples a partir de $\widetilde{w}$. Por construção, todos os elementos em $\eta(A)$ são obtidos deste modo. Aplicando este argumento indutivamente, temos que $\eta(A) \subset \mathcal{W}^{\Theta}$. O resultado segue pelo fato de que, pelo Corolário 5.2.3, a cardinalidade dos conjuntos A e $\mathcal{W}^{\Theta}$ é a mesma. □

Observação: Também é possível mostrar que os outros elementos em $\eta(A)$ são minimais. Para isto, seguimos o mesmo procedimento de mostrar que os elementos de Π_w satisfazem (5.9) verificando que $\Pi_w \subset \Pi_{\widetilde{w}}$ para qualquer $w \in \eta(A)$.

Observação: Uma das vantagens desta abordagem é a facilidade em se descrever a ordem de Bruhat-Chevalley que se dá basicamente pela comparação dos elementos em cada coordenada respeitando-se as regras que definem os elementos.

Por exemplo, no cálculo dos grupos de homologia, precisamos estabelecer quando dois elementos tem dimensões que diferem por um. Neste caso, dado o elemento com índice

$$I = (\underline{i}, \underline{a}) = (i_1, \ldots, i_t, \ldots, i_p; a_{p+1}, \ldots, a_s, \ldots, a_l), \tag{5.17}$$

os elementos que possuem dimensão um a menos são dados por uma das duas possibilidades:

1. $I_s = (\underline{i}; a_{p+1}, \ldots, a_s - 1, \ldots, a_l)$ onde $a_s - 1 \geq a_{s-1}$, se $p+1 < s \leq l$, $a_{p+1} \geq 1$ quando $s = p+1$ e $i_p = 0$ ou $a_{p+1} \geq 2$ quando $s = p+1$ e $i_p \neq 0$.

2. $I_t = (i_1, \ldots, i_t - 1, \ldots, i_p; \underline{a})$ onde $i_t - 1 > i_{t-1}$, se $i_{t-1} > 0$ ou $i_t = 1$ se $i_{t-1} = 0$ (neste caso, $i_1 = \cdots = i_{t-1} = 0$).

5.3 Homologia das Grassmannianas Lagrangeanas

Nesta seção, concentramos nossa atenção para a variedade *flag* obtida pela escolha de $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_l\}$ cuja realização fornece a variedade dos subespaços isotrópicos Lagrangeanos (de dimensão máxima) em $\mathbb{R}^{2n}$, isto é, a Grassmanniana Lagrangeana $\mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$. Vamos aqui apresentar o cálculo do operador fronteira da homologia celular de $\mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ pelos métodos desenvolvidos no capítulo 2 com a ajuda da decomposição minimal para os representantes minimais que fornecem a decomposição celular de $\mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ em termos das células de Schubert.

De acordo com a notação da seção anterior, temos que $p = l$ e, portanto, os elementos $(\underline{i}, \underline{a}) = ((i_1, \ldots, i_p); (a_{p+1}, \ldots, a_l)) \in A$ que parametrizam o conjunto $\mathcal{W}^{\Theta}$ neste caso são determinados apenas pela parte $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_l)$.

Como não há nenhuma contribuição da parte em $\underline{a}$, não precisaremos levar em conta todos os l índices. A partir de agora, vamos apenas considerar os indices não-nulos que aparecem em $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_l)$. Por conta disto, um elemento $w_I \in \mathcal{W}^\Theta$ qualquer será dado por um índice $I = (i_1, \ldots, i_k)$, com $1 \leq k \leq l$ (desprezamos os índices nulos).

Para facilitar a notação, definimos:

$$s_i = \pi(l, i) = r_{l-i+1} \cdots r_l \in \mathcal{W}$$

Portanto, um elemento $w_I \in \mathcal{W}^\Theta$ associado a um índice $I = (i_1, \ldots, i_k)$ é dado por:

$$\begin{aligned} w_I &= \eta((i_1, \ldots, i_k)) = \pi(l, i_1) \cdots \pi(l, i_k) \\ &= (r_{l-i_1+1} \cdots r_l) \cdots (r_{l-i_k+1} \cdots r_l) \\ &= s_{i_1} \cdots s_{i_k} \end{aligned}$$

e vamos dizer que w_I tem multi-índice I.

Pela observação ao final da seção anterior, dada uma célula de Schubert $\mathcal{S}_{w_I}$, as células de dimensão um a menos que $\mathcal{S}_{w_I}$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$ são dadas pelos múlti-índices

$$I_t = (i_1, \ldots, i_t - 1, \ldots, i_k)$$

tal que $i_{t-1} < i_t - 1$ se $t > 1$ e se $t = 1$, $i_1 - 1 = 0$ de modo que $s_{i_1 - 1} = 1$.

Deste modo, pela definição da homologia celular, são estas células que importam na determinação do coeficiente $c(w_I, w_{I_t})$ do operador fronteira $\partial(\mathcal{S}_{w_I}) = \sum_{I_t} c(w_I, w_{I_t}) \mathcal{S}_{w_{I_t}}$. Para isto, deve-se encontrar $\phi(w_I) - \phi(w_{I_t})$, onde $\phi(w) = \sum_{\alpha \in \Pi_w} \alpha$. Essa soma se estende aos elementos da união

$$\Pi_{w_I} = \bigcup_{j=1}^{k} s_{i_1} \cdots s_{i_{j-1}} \Pi_{s_{i_j}}. \tag{5.18}$$

Em primeiro lugar, note que

$$\Pi_{s_{i_j}} = \{\alpha_{l-i_j+1}, \alpha_{l-i_j+1} + \alpha_{l-i_j+2}, \cdots, \alpha_{l-i_j+1} + \cdots + \alpha_l, 2\alpha_{l-i_j+1} + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l\}.$$

Escrevendo $\alpha_i = \alpha_{i,i+1} = \lambda_i - \lambda_{i+1}$, $1 \leq i \leq l-1$ e $\alpha_l = 2\lambda_l$, temos que:

$$\Pi_{s_{i_j}} = \{\lambda_{l-i_j+1} - \lambda_u : u = l - i_j + 2, \ldots, l\} \cup \{2\lambda_{l-i_j+1}\}. \tag{5.19}$$

O cálculo de $\phi(w_I) - \phi(w_{I_t})$ será feito em três etapas: para as componentes $j < t$, $j = t$ e $j > t$. Note que as raízes das componentes $j < t$ são as mesmas tanto para Π_{w_I} quanto para $\Pi_{w_{I_t}}$ e, portanto, não colaboram para a soma $\phi(w_I) - \phi(w_{I_t})$. As outras duas condições devem ser observadas caso a caso.

1. A contribuição da componente $j = t$ é:

- $(i_t+1)(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}) = (i_t+1)\alpha_{l-i_t+1}$, se $i_t > 1$.

  Da expressão (5.19) segue que

$$\begin{aligned} \phi(s_{i_t}) &= (i_t+1)\lambda_{l-i_t+1} - (\lambda_{l-i_t+2} + \lambda_{l-i_t+3} + \cdots + \lambda_l) \\ \phi(s_{i_t-1}) &= i_t\lambda_{l-i_t+2} - (\lambda_{l-i_t+3} + \lambda_{l-i_t+3} + \cdots + \lambda_l). \end{aligned}$$

  Com isto, obtemos que $\phi(s_{i_t}) - \phi(s_{i_t-1}) = (i_t+1)(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2})$.

  Logo, a contribuição de $j = t$ é dada por

$$\begin{aligned} \phi(w_I) - \phi(w_{I_t}) &= s_{i_1} \ldots s_{i_{t-1}}(i_t+1)(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}) \\ &= (i_t+1)\alpha_{l-i_t+1}. \end{aligned}$$

  se provarmos que $\alpha_{l-i_t+1} = \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}$ é invariante por $s_{i_1} \ldots s_{i_{t-1}}$. De fato, para qualquer k, $1 \leq k \leq t-1$, temos que $i_k \leq i_{t-1} < i_t - 1$ o qual implica que $l - i_k + 1 > l - i_t + 2$. Logo $\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}$ é invariante por s_{i_k} para todo $k = 1, \ldots, t-1$.

- $2\lambda_l = \alpha_l$, se $i_t = 1$ (e neste caso, $t = 1$).

  Para $i_t = 1$ segue da expressão (5.18) que $\Pi_{s_1} = 2\lambda_l$. Neste caso, a contribuição de w_I para $\phi(w_I)$ é de $2\lambda_l$ enquanto w_{I_t} não contribui em $\phi(w_{I_t})$ de modo que a contribuição é a apenas a contribuição de w_I igual a $2\lambda_l = (i_1+1)\lambda_l$.

2. A contribuição da componente $j > t$.

   A partir da igualdade (5.19), vamos denotar

$$\Lambda_j = (i_j+1)\lambda_{l-i_j+1} - \big(\lambda_{l-i_j+2} + \cdots + \lambda_l\big) \tag{5.20}$$

   que representa a soma dos elementos em $\pi_{s_{i_j}}$.

   A contribuição em $\phi(w_i)$ é:

$$\Sigma_I^j = s_{i_1} \cdots s_{i_t} \cdots s_{i_{j-1}}(\Lambda_j) \tag{5.21}$$

   Enquanto a contribuição em $\phi(w_{I_t})$ é:

$$\Sigma_{I_t}^j = s_{i_1} \cdots s_{i_t-1} \cdots s_{i_{j-1}}(\Lambda_j) \tag{5.22}$$

   Para se obter a diferença $\phi(w_I) - \phi(w_{I_t})$, deve-se usar as decomposições minimais

$$s_{i_t} = r_{l-i_t+1} \cdots r_{l-1} r_l \text{ e } s_{i_t-1} = r_{l-i_t+2} \cdots r_{l-1} r_l.$$

   Para facilitar, vamos denotar por

$$\gamma = s_{i_t} \cdots s_{i_{j-1}}(\Lambda_j) \tag{5.23}$$

$$\delta = s_{i_t-1} \cdots s_{i_{j-1}}(\Lambda_j) \tag{5.24}$$

Em primeiro lugar, observemos a diferença $\gamma-\delta$. Note que pelas decomposições minimais $\gamma = r_{l-i_t+1}\delta$ de modo que $\gamma-\delta = r_{l-i_t+1}\delta-\delta$. Isto implica que $r_{l-i_t+1}(\gamma-\delta) = -(\gamma-\delta)$. Mas, r_{l-i_t+1} é a reflexão em relação à raíz simples $\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}$ se $i_t \neq 1$ e é a reflexão em relação à raíz simples $2\lambda_l$ se $i_t = 1$. Vamos estudar cada um dos casos separadamente.

- Se $i_t \neq 1$. Neste caso, $\gamma - \delta$ é um múltiplo de $\alpha_{l-i_t+1} = \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}$. Mais precisamente,

$$\gamma - \delta = -\frac{2\langle \delta, \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}\rangle}{\langle \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}, \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}\rangle}(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2})$$

Como $\langle \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}, \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}\rangle = 2$, o coeficiente se resume a

$$-\langle \delta, \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}\rangle = -\langle s_{i_t-1}\cdots s_{i_{j-1}}(\Lambda_j), \lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}\rangle.$$

Como as reflexões são isometrias, isso é o mesmo que

$$-\langle \Lambda_j, s_{i_{j-1}}^{-1}\cdots s_{i_t-1}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2})\rangle. \tag{5.25}$$

Agora vamos descrever cuidadosamente o termo

$$s_{i_{j-1}}^{-1}\cdots s_{i_t-1}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}) \tag{5.26}$$

à direita dentro do produto interno. Primeiramente, note que, pela decomposição minimal de $s_{i_t-1}^{-1} = r_l r_{l-1}\cdots r_{l-i_t+2}$, obtém-se que $s_{i_t-1}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1}) = \lambda_{l-i_t+1}$ and $s_{i_t-1}^{-1}(\lambda_{l-i_t+2}) = \lambda_l$, i.e.,

$$s_{i_t-1}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}) = \lambda_{l-i_t+1} + \lambda_l.$$

Note que este termo sempre ocorre independentemente de $j > t$. Neste caso, o termo (5.26) torna-se igual a $s_{i_{j-1}}^{-1}\cdots s_{i_{t+1}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1} + \lambda_l)$. Afirmamos que

$$s_{i_{j-1}}^{-1}\cdots s_{i_{t+1}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1} + \lambda_l) = \lambda_{l-i_t+1-[(j-1)-t]} + \lambda_{l-[(j-1)-t]}. \tag{5.27}$$

De fato, isto é consequência de uma outra fórmula. Observe que os outros termos restantes são do tipo $s_{i_k}^{-1}$ onde $t+1 \leq k \leq j-1$. Se escrevermos $k = t+u$, $u = 1, \ldots, j-t-1$, então vale o seguinte resultado

$$s_{i_{t+u}}^{-1}\cdots s_{i_{t+1}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1} + \lambda_l) = \lambda_{l-i_t+1-u} + \lambda_{l-u}. \tag{5.28}$$

Observe o caso $u = 1$. Como $s_{i_{t+1}}^{-1} = r_l\cdots r_{l-i_t+1}\cdots r_{l-i_{t+1}+1}$ é uma decomposição minimal e $l - i_{t+1} + 1 < l - i_t + 1$ então $s_{i_{t+1}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1}) = \lambda_{(l-i_t+1)-1} = \lambda_{l-i_t}$ e também $s_{i_{t+1}}^{-1}(\lambda_l) = \lambda_{l-1}$, i.e., $s_{i_{t+1}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_l) = \lambda_{l-i_t+1-1} - \lambda_{l-1}$.

Os outros casos seguem por um argumento indutivo. Suponha que valha para $u-1$. Então

$$\begin{aligned} s_{i_{t+u}}^{-1}\cdots s_{i_{t+1}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1}+\lambda_l) &= s_{i_{t+u}}^{-1}\left(s_{i_{t+(u-1)}}^{-1}\cdots s_{i_{t+1}}^{-1}\right)(\lambda_{l-i_t+1}+\lambda_l)\\ &= s_{i_{t+u}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1-(u-1)}+\lambda_{l-(u-1)})\\ &= s_{i_{t+u}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+2-u}+\lambda_{l+1-u}). \end{aligned}$$

Como $i_t+u\leq i_{t+u}$ segue que $i_t+u<i_{t+u}+1$ e, portanto, $l-i_{t+u}+1<l-i_t+2+u$. Como $u>1$ temos que $l+1-u<l$. Assim, pela decomposição minimal de $s_{i_{t+u}}^{-1}$, vê-se que $s_{i_{t+u}}^{-1}(\lambda_{l-i_t+2-u}+\lambda_{l+1-u})=\lambda_{l-i_t+1-u}+\lambda_{l-u}$. Isto prova a fórmula (5.28). Voltando à expressão (5.25), pela Equação (5.27), temos que

$$\begin{aligned} -\langle\Lambda_j \quad &, \quad s_{i_{j-1}}^{-1}\cdots s_{i_t-1}^{-1}(\lambda_{l-i_t+1}-\lambda_{l-i_t+2})\rangle = \\ -\langle\Lambda_j \quad &, \quad \lambda_{l-i_t+1-[(j-1)-t]}+\lambda_{l-[(j-1)-t]}\rangle. \end{aligned}$$

Agora, observe que $j=t+v$ e $i_j=i_t+\tilde{v}$ para alguns $\tilde{v}\geq v$. Segue que $0<j-t\leq i_j-i_t$ e $l-i_t-[(j-1)-t]\geq l-i_j+1$. Portanto $l-i_t+1-[(j-1)-t]>l-i_j+1$. Juntando estas informações temos que

$$l-i_j+1<l-i_t+1-[(j-1)-t]<l-[(j-1)-t]\leq l.$$

Pela Expressão (5.20) para Λ_j, temos que

$$-\langle\Lambda_j,\lambda_{l-i_t+1-[(j-1)-t]}+\lambda_{l-[(j-1)-t]}\rangle=2.$$

Isto fornece $\gamma-\delta=2(\lambda_{l-i_t+1}-\lambda_{l-i_t+2})$. Como $\lambda_{l-i_t+1}-\lambda_{l-i_t+2}$ é invariante por $s_{i_1}\cdots s_{i_{t-1}}$, a contribuição da componente j em $\phi(w_I)-\phi(w_{I_t})$ é $2(\lambda_{l-i_t+1}-\lambda_{l-i_t+2})$ se $i_t\neq 1$.

- Se $i_t=1$.

  Neste caso, $\gamma-\delta$ é um múltiplo de $\alpha_l=2\lambda_l$. Mais precisamente,

$$\gamma-\delta=-\frac{2\langle\delta,2\lambda_l\rangle}{\langle 2\lambda_l,2\lambda_l\rangle}(2\lambda_l).$$

  Como $s_{i_1-1}=1$, $\delta=s_{i_2}\cdots s_{i_j-1}$ e o coeficiente de $\gamma-\delta$ é

$$-\langle\delta,2\lambda_l\rangle=-\langle s_{i_2}\cdots s_{i_{j-1}}(\Lambda_j),2\lambda_l\rangle.$$

  Como as reflexões são isometrias, isto é o mesmo que

$$-\langle\Lambda_j,s_{i_{j-1}}^{-1}\cdots s_{i_2}^{-1}(2\lambda_l)\rangle. \tag{5.29}$$

  Agora, o termo no lado direito do produto interno

$$s_{i_{j-1}}^{-1}\cdots s_{i_2}^{-1}(2\lambda_l) \tag{5.30}$$

pode ser descrito no mesmo modo que o do caso $i_t \neq 1$ para encontrar uma fórmula análoga à Equação (5.27) para (5.30), isto é,

$$s_{i_{j-1}}^{-1} \cdots s_{i_2}^{-1}(2\lambda_l) = 2\lambda_{l-(j-2)} = 2\lambda_{l-j+2}. \tag{5.31}$$

De fato, isto segue como consequência de uma outra fórmula análoga a (5.28). Observe que os termos restantes são da forma $s_{i_k}^{-1}$ onde $2 = t+1 \leq k \leq j-1$. Se escrevermos $k = 1+u$, $u = 1, \ldots, j-2$, pode ser verificado de modo similar que

$$s_{i_{1+u}}^{-1} \cdots s_{i_2}^{-1}(\lambda_l) = \lambda_{l-u}. \tag{5.32}$$

Voltando à expressão (5.29), pela Equação (5.31), temos que

$$-\langle \Lambda_j, s_{i_{j-1}}^{-1} \cdots s_{i_2}^{-1}(2\lambda_l)\rangle \quad = \quad -\langle \Lambda_j, 2\lambda_{l-j+2}\rangle.$$

Agora, como $j \leq i_j$ segue que $l-j+2 > l-j+1 \geq l-i_j+1$. Isto implica que, na expressão 5.20 de Λ_j,

$$-\langle \Lambda_j, 2\lambda_{l-j+2}\rangle = 2.$$

Isto fornece $\gamma - \delta = 2\lambda_l$ como a contribuição da componente de $j > t$ para $t = 1$.

Portanto, podemos resumir a contribuição de uma componente $j > t$ é:

- $2(\lambda_{l-i_t+1} - \lambda_{l-i_t+2}) = 2\alpha_{l-i_t+1}$, se $i_1 > 1$.
- $2\lambda_l = \alpha_l$, se $i_1 = 1$.

Juntando todos os casos analisados:

Proposição 5.3.1.

$$\phi(w_I) - \phi(w_{I_t}) = \begin{cases} ((i_t+1) + 2(k-t))\ \alpha_{l-i_t+1}, & se\ i_t \neq 1 \\ (1+(k-t))\ \alpha_l = k\alpha_l, & se\ i_t = 1 \end{cases}$$

Agora, podemos obter os operadores fronteira.

Fixando-se as decomposições minimais dadas para os w_I, se obtém uma decomposição celular com funções de colagem determinadas. As células de Schubert são denotadas por $\mathcal{S}_I$ e

$$\partial(\mathcal{S}_I) = \sum c(I, I_t)\mathcal{S}_{I_t}$$

tomando I_t com a condição de que $i_t - 1 < i_t - 1$, se $t > 1$ e $s_{i_1-1} = 1$ se $i_1 = 1$.

Retirando a raiz correspondente na decomposição minimal de w_I se obtém a decomposição minimal de w_{I_t}. Portanto, nas expressões para $c(I, I_t)$ não é necessário incluir os termos de correção, provenientes de diferentes escolhas de decomposições minimais.

Temos apenas que corrigir o sinal que corresponde à posição da reflexão simples que se retira de w_I para obter w_{I_t}. Pelas decomposições minimais, vê-se que esta é a posição

$$p_t = i_1 + \cdots + i_{t+1} + 1$$

Portanto,

$$c(I, I_t) \quad = \quad (-1)^{p_t}(1 + (-1)^{\rho}) \tag{5.33}$$

onde $\rho = i_t + 2(k-t) + 1$ se $i_t > 1$ ou $\rho = k$ se $i_t = 1$. Assim:

$$c(I, I_t) = (-1)^{p_t} \cdot \begin{cases} (1 - (-1)^{i_t}), & \text{se } i_t \neq 1 \\ (1 + (-1)^{k}), & \text{se } i_t = 1 \end{cases}$$

Corolário 5.3.2. *As Grassmannianas Lagrangeanas* $\mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ *são orientáveis se e somente se* l *é ímpar.*

Prova: Tome $I = (1, 2, \ldots, l)$ de tal forma que $\mathcal{S}_I$ é a única célula de dimensão máxima. O único t possível é $t = 1$ com $I_1 = (0, 2, \ldots, l)$. Então,

$$\partial(\mathcal{S}_I) = (-1)(1 + (-1)^{l})\mathcal{S}_{I_1}.$$

Daí que $\partial(\mathcal{S}_I) = 0$ se l for ímpar. Nesse caso, a homologia máxima é $\mathbb{Z}$, confirmando o fato de que as Grassmannianas Lagrangeanas são orientáveis se l é ímpar. □

Observação: No artigo [37], estuda-se a orientabilidade das variedades *flag*. Pela Proposição 3.5 do mesmo, segue que $\mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ é orientável se e somente se

$$\sum_{\beta} n_\beta \langle \alpha_l^\vee, \beta \rangle = 0 \mod 2 \tag{5.34}$$

onde a soma é extendida a $\beta \in \langle\Theta\rangle^+$ ($n_\beta = 1$ pois estamos trabalhando com formas reais normais). Neste caso, a única raíz simples $\alpha \in \Sigma$ tal que $\langle \alpha_l^\vee, \alpha \rangle \neq 0$ é a raíz α_{l-1} e vale

$$\langle \alpha_l^\vee, \alpha_{l-1} \rangle = -1$$

Portanto, para encontrar quais as raízes $\beta \in \langle\Theta\rangle^+$ contribuem na soma 5.34, temos que considerar quais raízes são combinações lineares nas quais aparece a raíz α_{l-1}. Concluímos que temos estas são as $l-1$ raízes

$$\beta \in \{\alpha_{l-1}, \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1}, \cdots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{l-1}\}$$

e temos que $\langle \alpha_l^\vee, \beta \rangle = -1$. Logo, $\mathrm{L}_l\left(\mathbb{R}^{2l}\right)$ é orientável se e somente se $l-1$ é par, isto é, se e somente se l é ímpar.

5.3.1 Exemplo $l = 3$

Neste caso, são 8 células de Schubert parametrizadas pelo conjunto

$$\mathcal{W}^{\Theta} = \{1, s_1, s_2, s_1s_2, s_3, s_1s_3, s_2s_3, s_1s_2s_3\}.$$

dim 0 Temos a célula $\mathcal{S}_1$ e $\partial(\mathcal{S}_1) = 0$.

dim 1 Temos a célula $\mathcal{S}_{s_1}$ e $\partial(\mathcal{S}_{s_1}) = 0$.

dim 2 Temos a célula $\mathcal{S}_{s_2}$ e $\partial(\mathcal{S}_{s_2}) = (-1)(1 - (-1)^2) = 0$.

dim 3 Temos as duas células $\mathcal{S}_{s_3}$ e $\mathcal{S}_{s_1s_2}$. Neste caso:

- $\partial(\mathcal{S}_{s_3}) = (-1)(1 - (-1)^3)\mathcal{S}_{s_2} = -2\mathcal{S}_{s_2}$.
- $\partial(\mathcal{S}_{s_1s_2}) = (-1)(1 + (-1)^{(2)})\mathcal{S}_{s_2} = -2\mathcal{S}_{s_2}$.

dim 4 Temos a célula $\mathcal{S}_{s_1s_3}$ e $\partial(\mathcal{S}_{s_1s_3}) = (-1)^1(1 + (-1)^{(2)})\mathcal{S}_{s_3} + (-1)^2(1 - (-1)^3)\mathcal{S}_{s_1s_2} = -2\mathcal{S}_{s_3} + 2\mathcal{S}_{s_1s_2}$.

dim 5 Temos a célula $\mathcal{S}_{s_2s_3}$ e $\partial(\mathcal{S}_{s_2s_3}) = (-1)^1(1 - (-1)^2)\mathcal{S}_{s_1s_2} = 0$.

dim 6 Temos a célula $\mathcal{S}_{s_1s_2s_3}$ e $\partial(\mathcal{S}_{s_1s_2s_3}) = (-1)^1(1 + (-1)^3)\mathcal{S}_{s_2s_3} = 0$.

A homologia integral de $L_3(\mathbb{R}^6)$ é $H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = \mathbb{Z}, H_2 = \mathbb{Z}_2, H_3 = \mathbb{Z}_2($ gerado por $(\mathcal{S}_{s_3} - \mathcal{S}_{s_1s_2})), H_4 = 0, H_5 = \mathbb{Z}, H_6 = \mathbb{Z}$.

Capítulo 6

Cohomologia de *Flags* Reais I

Este capítulo apresenta uma introdução ao estudo da cohomologia das variedades *flag* reais, no contexto chamado de caso livre, em que a homologia é livremente gerada pelas células de Schubert, focalizando a questão dos geradores do anel de cohomologia. Inicialmente, aplicamos o teorema de Leray-Hirsch para concluir que o anel de cohomologia é gerado pelas classes duais às células de Schubert definidas pelas raízes simples. Acontece que estas classes têm uma rica interpretação geométrica como classes de Stiefel-Whitney de um fibrado sobre a variedade *flag*. Isto é obtido por meio da teoria de representação das álgebras de Lie semissimples pela qual a variedade *flag* pode ser obtida como uma determinada órbita no espaço projetivo da representação. Deste modo, faz-se necessário introduzimos alguns conceitos relacionados à teoria de representação para aplicarmos neste contexto. Por fim, apresentamos um exemplo para o caso clássico do grupo $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$.

6.1 Geradores de $H^*(\mathbb{F}, R)$

Esta primeira seção se propõe a encontrar as condições sobre o anel R de modo que se obtenha uma base para o anel de cohomologia $H^*(\mathbb{F}, R)$ pela aplicação do teorema de Leray-Hirsch a determinados fibrados *flag*.

6.1.1 Teorema de Leray-Hirsch

Se $F \to E \to B$ é um fibrado então é possível usar o produto cup para tornar $H^*(E;R)$ em um módulo sobre o anel $H^*(B;R)$, para R qualquer anel comutativo com identidade, definindo a multiplicação por escalar como $\alpha\beta = p^*(\alpha) \smile \beta$ para $\alpha \in H^*(B;R)$ e $\beta \in H^*(E;R)$. Isto é consequência do teorema de Leray-Hirsch cujo conteúdo afirma que $H^*(E;R)$ é um $H^*(B;R)$-módulo livre desde que, para cada fibra F, a inclusão da fibra $F \hookrightarrow E$ induza um homomorfismo sobrejetor em $H^*(-;R)$ e $H^n(F;R)$ seja um R-módulo livre de posto finito para cada n. Mais ainda, uma base para o $H^*(B;R)$-módulo $H^*(E;R)$ pode ser obtida escolhendo-se qualquer conjunto de elementos de $H^*(E;R)$ que sejam levados a uma base para $H^*(F;R)$ via a aplicação induzida pela inclusão.

Teorema 6.1.1 ([27], Teorema 4D)**.** *Seja $F \to E \to B$ um fibrado tal que para algum anel comutativo R de coeficientes:*

- *$H^*(F;R)$ seja um R-módulo finitamente gerado.*
- *Existam classes $c_j \in H^{k_j}(E;R)$ cujas restrições $i^*(c_j)$ formem uma base para $H^*(F;R)$ em **cada fibra**, onde $i : E \hookrightarrow F$ é a inclusão.*

Então, a função $\Phi : H^*(B;R) \otimes H^*(F;R) \to H^*(E;R)$ dada por

$$\sum_{ij} b_i \otimes i^*(c_j) \mapsto \sum_{ij} p^*(b_i) \smile c_j$$

é um isomorfismo.

O isomorfismo acima é de módulos e não de anéis.

O teorema de Leray-Hirsch para ***Flags***

Veremos a seguir que existe uma versão do teorema de Leray-Hisrch para variedades *flag* reais. Para tanto, vamos nos restringir ao contexto em que o operador fronteira da homologia é nulo.

Casos de Tipo livre

Seja X um complexo CW. É possível mostrar que se uma célula σ da decomposição celular de X é um ciclo da homologia celular $(\partial^{cel}_{n+1}(\sigma) = 0)$ então σ também é um ciclo da homologia singular $(\partial^{sing}_{n+1}(\sigma) = 0)$ visto como uma aplicação $B^{n+1} \to X$.

Em particular, para uma variedade *flag* $\mathbb{F}_\Theta$ existem dois casos em que o operador fronteira ∂ é identicamente nulo.

1. Se o anel de coeficientes for $R = \mathbb{Z}_2$.
2. Se a multiplicidades das raízes forem todas maiores ou iguais a dois.

A estes casos vamos nos referir ao caso de *tipo livre*. Este nomenclatura é consequência do fato de que, nestes casos, a homologia é gerada livremente pelas células. Como cada uma destas células é um ciclo na homologia singular e, como a homologia singular é a mesma que a homologia celular, segue que nos casos de tipo livre, a homologia singular é gerada pelas células de Schubert, vistas como aplicações de $B^n \to \mathbb{F}_\Theta$, isto é, como ciclos da homologia singular.

Queremos verificar quando as hipóteses para a aplicaçao do teorema de Leray-Hirsch são satisfeitas para uma fibração entre variedades *flag* $\mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$. Como o anel de cohomologia da fibra (que é uma variedade *flag*) é de posto finito, precisamos verificar a existência de classes de cohomologia $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_N$ de $\mathbb{F}_{\Theta_1}$ tal que para **cada fibra** $\mathcal{F}$ de $\mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$, $i_{\mathcal{F}}(\bar{c}_i)$ forme uma base de $H^*(\mathcal{F})$ onde $i_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathbb{F}_{\Theta_1}$ é a inclusão da fibra no espaço total.

Vamos ver que, no caso de tipo livre, o teorema de Leray-Hirsch é aplicável.

Como $\mathbb{Z}_2$ é corpo, a cohomologia singular $H^*(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{Z}_2)$ é dual da homologia singular $H_*(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{Z}_2)$. As células de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta$, $w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$, formam uma base da homologia. A base dual será denotada por σ_w^Θ, $w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_\Theta$, isto é,

$$\sigma_u^\Theta \left(\mathcal{S}_w^\Theta\right) = \delta_{uw}.$$

Da mesma forma, no caso em que as multiplicidades das raízes são ≥ 2, a homologia singular $H_*(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{Z})$ é livremente gerada pelas células de Schubert. Assim, pelo Teorema dos coeficientes universais ([27], Teorema 3.2), o fator Ext é nulo de modo que a cohomologia $H^*(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{Z})$ também é o dual da homologia.

Observação: Assim como acontece com as células de Schubert, vamos omitir o conjunto Θ quando se tratar das classes duais às células de Schubert em uma variedade *flag* maximal.

Denote por $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$ a fibra de $\mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$ que passa pela origem. Essa fibra é uma variedade *flag* de um grupo de Lie semissimples M_Θ. As células de Schubert em $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$ são parametrizadas por $\mathcal{W}_{\Theta_2}/\mathcal{W}_{\Theta_1}$. Desta forma, no caso de tipo livre, a homologia de $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$ é livremente gerada por $\mid \mathcal{W}_{\Theta_2}/\mathcal{W}_{\Theta_1} \mid$ células de Schubert (no caso em que as multiplicidades em $\mathfrak{g}$ são ≥ 2, segue que as multiplicidades das raízes de $\mathfrak{m}_\Theta$, álgebra de Lie de M_Θ, também são ≥ 2).

Mais precisamente, as células de Schubert de $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$ são as células de Schubert de $\mathbb{F}_{\Theta_1}$ que estão contidas em $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$, isto é, as que se projetam sobre a origem b_{Θ_2}. Isso porque células de Schubert se projetam em células de Schubert e todas as que são parametrizadas por $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$ são projetadas na origem de $\mathbb{F}_{\Theta_2}$ e por isso ficam dentro da fibra $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$.

Vamos agora mostrar que, no caso de tipo livre, valem as hipóteses do teorema de Leray Hirsch. No que segue, Z denota o anel que pode ser $\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}$ dependendo do caso.

1. Na fibra $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$, as restrições $i^*_{\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}}\left(\sigma_w^{\Theta_1}\right)$, $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$ geram $H^*(\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}, Z)$.

   Esta condição se verifica diretamente pois a fibra $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$ é uma variedade *flag* cuja homologia é gerada por $\mathcal{S}_w^{\Theta_1}$, $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}/\mathcal{W}_{\Theta_1}$ e, portanto, os duais $\sigma_w^{\Theta_1}$, com $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}/\mathcal{W}_{\Theta_1}$, que pertencem a $H^*(\mathbb{F}_{\Theta_1}, Z)$, geram a cohomologia $H^*(\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}, Z)$, isto é, $i^*_{\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}}(\sigma_w^{\Theta_1})$, $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}/\mathcal{W}_{\Theta_1}$, forma uma base de $H^*(\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}, Z)$. Mais claramente, denote por $\tilde{\mathcal{S}}_w^{\Theta_1}$, $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$, a mesma célula $\mathcal{S}_w^{\Theta_1}$ vista como uma célula de $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$. Então $\{\tilde{\mathcal{S}}_w^{\Theta_1} : w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}\}$ é uma base da homologia de $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$. O valor $i^*_{\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}}\left(\sigma_w^{\Theta_1}\right)$ em

$\tilde{\mathcal{S}}_w^{\Theta_1}$ é o mesmo que o valor de $\sigma_w^{\Theta_1}$ em $\mathcal{S}_w^{\Theta_1}$. Portanto $\{i^*_{\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}}(\sigma_w^{\Theta_1}) : w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}\}$ forma uma base de $H^*(\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}, Z)$.

2. Para uma fibra qualquer $\mathcal{F}$, existe $g \in G$ tal que $\mathcal{F} = g \cdot \mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$ e $g : \mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2} \to \mathcal{F}$ é um homeomorfismo.

   Os ciclos singulares $g \circ \mathcal{S}_w^{\Theta_1}$, $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$, podem ser vistos tanto como ciclos na homologia singular de $\mathcal{F}$ quanto como ciclos na homologia singular de $\mathbb{F}_{\Theta_1}$. No caso da homologia de $\mathcal{F}$, os ciclos $g \circ \mathcal{S}_w^{\Theta_1}$, $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$, são representantes de um conjunto de geradores da homologia de $\mathcal{F}$ pois g é um homeomorfismo entre as fibras.

   Vistos como ciclos na homologia de $\mathbb{F}_{\Theta_1}$, cada $g \circ \mathcal{S}_w^{\Theta_1}$, $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$, é homólogo a $\mathcal{S}_w^{\Theta_1}$ (veja a observação abaixo). Portanto, se $\sigma_w^{\Theta_1}$ é um dos geradores da cohomologia, então $\sigma_w^{\Theta_1}$ assume os mesmos valores nas classes de homologia $[\mathcal{S}_w^{\Theta_1}]$ e $[g \circ \mathcal{S}_w^{\Theta_1}]$. Portanto, $i^*_{\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}}(\sigma_w^{\Theta_1})$, $w \in \mathcal{W}_{\Theta_2}$ gera $H^*(\mathcal{F}, Z)$ da mesma forma que em $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$.

   Observação: Seja G um grupo topológico conexo por caminhos e $G \times X \to X$ uma ação contínua. Um elemento $g \in G$ induz um homomorfismo $g_* : H_*(X, \cdot) \to H_*(X, \cdot)$ compondo g com ciclos $s : B^n \to X$. Como G é conexo por caminhos, $g \simeq \mathrm{id}_X$, pois se $\alpha : [0,1] \to G$ é uma curva com $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(1) = g$ então $[0,1] \times X \to X$, $(t,x) \mapsto \alpha(t) \cdot x$ é uma homotopia entre id_X e g. Portanto, $g_* \simeq \mathrm{id}_X$ e o mesmo ocorre no nível da cohomologia e o homomorfismo g^* é identidade. Em particular, se $s : B^n \to X$ é um ciclo da homologia singular então $g \circ s$ é um ciclo homólogo a s pois ambos pertencem a mesma classe de homologia.

Portanto, o teorema de Leray-Hirsch se aplica nos casos de tipo livre.

Teorema 6.1.2. *Nos casos de tipo livre, se $p = \pi_{\Theta_2}^{\Theta_1} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$ é uma fibração entre variedades flag então o homomorfismo $H^*(\mathbb{F}_{\Theta_2}, Z) \otimes_Z H^*(\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}, Z) \to H^*(\mathbb{F}_{\Theta_1}, Z)$ dado por*

$$\sum_{w,u} \sigma_w^{\Theta_2} \otimes i^*_{\mathcal{F}}(\sigma_u^{\Theta_1}) \mapsto \sum_{w,u} p^*(\sigma_w^{\Theta_2}) \smile \sigma_u^{\Theta_1} \qquad , \qquad \begin{cases} w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_{\Theta_2} \\ u \in \mathcal{W}_{\Theta_2}/\mathcal{W}_{\Theta_1} \end{cases} \tag{6.1}$$

é um isomorfismo de módulos. ($Z = \mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}$ dependendo do caso.)

A projeção $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$

Considere o caso em que $\Theta_1 = \emptyset$ e $\Theta_2 = \{\alpha\}$, $\alpha \in \Sigma$ é uma raiz simples no qual se obtém a projeção da variedade *flag* maximal $\mathbb{F}$ na variedade *flag* parcial $\mathbb{F}_{\{\alpha\}}$ denotada também por $p = \pi_{\{\alpha\}} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$. Neste caso, $\mathcal{F}_{\Theta_1,\Theta_2}$ é a esfera S^{m_α} onde $m_\alpha = \dim(\mathfrak{g}_\alpha) + \dim(\mathfrak{g}_{2\alpha})$ é a multiplicidade de α. Ainda, $\mathcal{W}_{\Theta_1} = \{1\}$ e $\mathcal{W}_{\Theta_2} = \{1, r_\alpha\}$. Portanto, a soma no segundo membro de (6.1) se reduz a

$$p^*\left(H^*(\mathbb{F}_{\{\alpha\}})\right) \oplus \sigma_\alpha \smile p^*\left(H^*(\mathbb{F}_{\{\alpha\}})\right) \tag{6.2}$$

onde $\sigma_\alpha = \sigma_{r_\alpha}$. Esta expressão pode ser ainda melhorada descrevendo explicitamente p^*.

Lema 6.1.3. *Se $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$, então*

$$p^*\left(\sigma_w^{\{\alpha\}}\right) = \begin{cases} \sigma_w & , \ se\ w\alpha > 0 \qquad (\ \ell(wr_\alpha) = \ell(w) + 1\ ) \\ \sigma_{wr_\alpha} & , \ se\ w\alpha < 0 \qquad (\ \ell(wr_\alpha) = \ell(w) - 1\ ) \end{cases}$$

onde $\ell(w)$ é o comprimento de w como produto de raízes simples.

Prova: Se $\mathcal{S}_w$ é uma célula de Schubert em $\mathbb{F}$, como conjuntos temos que:

$$p\left(\mathcal{S}_w\right) = \mathcal{S}_w^{\{\alpha\}} = p\left(\mathcal{S}_{wr_\alpha}\right)$$

onde $\mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}$ é uma célula de Schubert em $\mathbb{F}_{\{\alpha\}}$.

No nível da homologia, p induz um homomorfismo $p_* : H_n(\mathbb{F}) \to H_n(\mathbb{F}_{\{\alpha\}})$, para cada n, definido por $p_*([s]) = [p \circ s]$, se $s : B^n \to \mathbb{F}$ é um ciclo da homologia singular. Portanto, como classes de homologia, $p_*(\mathcal{S}_w) = \mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}$ se $\dim \mathcal{S}_w = \dim \mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}$ ou $p_*(\mathcal{S}_w) = 0$ caso contrário.

A igualdade $\dim \mathcal{S}_w = \dim \mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}$ ocorre quando $\dim \mathcal{S}_w < \dim \mathcal{S}_{wr_\alpha}$ que, por sua vez, ocorre se, e só se, $\ell(wr_\alpha) = \ell(w) + 1$, isto é, $w\alpha > 0$. Portanto,

$$p^*(\sigma_w^{\{\alpha\}})(\mathcal{S}_w) = \sigma_w^{\{\alpha\}}\left(p_*(\mathcal{S}_w)\right) = \sigma_w^{\{\alpha\}}\left(\mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}\right) = 1.$$

e, como $p_*(\mathcal{S}_{wr_\alpha}) = 0$, temos que

$$p^*(\sigma_w^{\{\alpha\}})(\mathcal{S}_{wr_\alpha}) = \sigma_w^{\{\alpha\}}\left(p_*(\mathcal{S}_{wr_\alpha})\right) = 0.$$

Por outro lado, se $w\alpha < 0$ então $p_*(\mathcal{S}_{wr_\alpha}) = \mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}$ e temos que

$$p^*(\sigma_w^{\{\alpha\}})(\mathcal{S}_{wr_\alpha}) = \sigma_w^{\{\alpha\}}\left(p_*(\mathcal{S}_{wr_\alpha})\right) = \sigma_w^{\{\alpha\}}\left(\mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}\right) = 1.$$

enquanto, como $p_*(\mathcal{S}_w) = 0$, temos que

$$p^*(\sigma_w^{\{\alpha\}})(\mathcal{S}_w) = \sigma_w^{\{\alpha\}}\left(p_*(\mathcal{S}_w)\right) = 0.$$

Como $p^*\left(\sigma_w^{\{\alpha\}}\right)(\mathcal{S}_u) = 0$ se $u \neq w$ ou $u \neq wr_\alpha$, segue que $p^*\left(\sigma_w^{\{\alpha\}}\right)$ é elemento da base dual que corresponde a $\mathcal{S}_w$ ou a $\mathcal{S}_{wr_\alpha}$ dependendo do caso. □

Observação: Em outras palavras, o lema 6.1.3 afirma que, se $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$ então

$$p^*\left(\sigma_w^{\{\alpha\}}\right) = \sigma_{w^{\{\alpha\}}} \qquad , \qquad w^{\{\alpha\}} \in \mathcal{W}^{\{\alpha\}}$$

onde $\mathcal{W}^{\{\alpha\}}$ é o conjunto dos representantes minimais de $\mathcal{W}_{\{\alpha\}}$ em $\mathcal{W}$.

Com isso, pode obter explicitamente a decomposição (6.2) escolhendo-se os representantes minimais em $\mathbb{F}$ sobre cada célula de Schubert $\mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}$ em $\mathbb{F}_{\{\alpha\}}$, isto é, as células $\mathcal{S}_w$ tais que $w\alpha > 0$, que correspondem ao primeiro caso acima.

Proposição 6.1.4. *Nos casos de tipo livre, se $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$ então*

$$H^*(\mathbb{F}, Z) = \sum_{w\alpha>0} \sigma_w \oplus \sigma_\alpha \smile \sum_{w\alpha>0} \sigma_w.$$

($Z = \mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}$ dependendo do caso.)

6.1.2 Cohomologia das Células de Schubert em $\mathbb{F}$

A idéia é aplicar o mesmo procedimento aplicado para as projeções $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$ às células de Schubert que podem ser igualmente descritas a partir certas fibrações.

Antes de mais nada, a (co)homologia das células de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta$, no caso livre em que $\partial \equiv 0$, são descritas da mesma forma que as variedades *flag* (que são casos particulares de células de Schubert). Na verdade, cada $\mathcal{S}_w^\Theta$ *é também um complexo celular* cujas células são $\mathcal{S}_u^\Theta$, $u \leq w$. Como o operador fronteira $\partial \equiv 0$, essas células são geradoras tanto da homologia celular quanto na homologia singular de $\mathcal{S}_w^\Theta$. Portanto, $H_*(\mathcal{S}_w^\Theta, Z)$ é gerado por $\mathcal{S}_u^\Theta$, $u \leq w$. O módulo de cohomologia $H^*(\mathcal{S}_w^\Theta, Z)$ é gerado pela base dual de $\mathcal{S}_u^\Theta$, $u \leq w$. Esta base dual é nada mais do que *a restrição da base dual da cohomologia de toda a variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$ à célula de Schubert $\mathcal{S}_w^\Theta$*. Estas restrições serão denotadas por $\bar{\sigma}_w^\Theta$ de tal modo que $H^*(\mathcal{S}_w^\Theta, Z)$ é gerado por $\bar{\sigma}_w^\Theta$, $u \leq w$. Posteriormente, será vista a necessidade de fazer tal distinção (veja

O primeiro exemplo corresponde à célula de Schubert $\mathcal{S}_{r_\alpha}$, que é uma esfera de dimensão m_α. A cohomologia é

$$H^0(\mathcal{S}_{r_\alpha}, Z) \oplus H^{m_\alpha}(\mathcal{S}_{r_\alpha}, Z) = Z \cdot 1 \oplus Z \cdot \bar{\sigma}_\alpha, \bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_{r_\alpha}$$

com $Z = \mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Z}$ dependendo do caso.

Considere agora $w = r_\beta r_\alpha$, isto é, $\ell(w) = 2$. Neste caso, temos que (veja o Corolário 1.2.2)

$$\mathcal{S}_w = \gamma_\alpha \gamma_\beta \cdot \{b_0\}$$

onde $\gamma_i(X) = \pi_i^{-1}\pi_i(X)$ é o mapa que exaure as fibras que passam por $X \in \mathbb{F}$ via $\pi_i = \pi_{\{\alpha_i\}} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha_i\}}$. Com isto, obtemos $\mathcal{S}_w = \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{S}_{r_\beta}^{\{\alpha\}})$. Isto é, temos o fibrado $p : \mathcal{S}_w \to \mathcal{S}_{r_\beta}^{\{\alpha\}}$ restrição de $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$ a $\mathcal{S}_w$ com fibra $\mathcal{S}_{r_\alpha}$.

O teorema de Leray-Hirsch também se aplica a este fibrado, pois as mesmas classes de cohomologia 1 e σ_{r_α}, usadas para o fibrado $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$, podem ser restritas a $\mathcal{S}_w \to \mathcal{S}_{r_\beta}^{\{\alpha\}}$ garantindo as hipóteses de aplicação do teorema. Como resultado, se obtém

$$H^*(\mathcal{S}_w) = p^*\left(H^*(\mathcal{S}_{r_\beta}^{\{\alpha\}})\right) \oplus \bar{\sigma}_\alpha \smile p^*\left(H^*(\mathcal{S}_{r_\beta}^{\{\alpha\}})\right) \tag{6.3}$$

Pelo Lema 6.1.3, $p^*\left(H^*(\mathcal{S}_{r_\beta}^{\{\alpha\}})\right)$ é gerado por 1 e $\bar{\sigma}_\beta$. Portanto,

$$H^*(\mathcal{S}_{r_\beta r_\alpha}) = Z \cdot 1 \oplus Z \cdot \bar{\sigma}_\alpha \oplus Z \cdot \bar{\sigma}_\beta \oplus Z \cdot \bar{\sigma}_\alpha \bar{\sigma}_\beta$$

onde $\smile$ foi substituído por justaposição. Logo, os elementos de dimensão máxima de $H^*(\mathcal{S}_{r_\beta r_\alpha})$ são gerados por $\bar{\sigma}_\alpha \bar{\sigma}_\beta$. Como $\bar{\sigma}_w$ é de dimensão máxima, segue que $\bar{\sigma}_w = x \cdot \bar{\sigma}_\alpha \bar{\sigma}_\beta$. Se $Z = \mathbb{Z}_2$, $x = 1$. Se $Z = \mathbb{Z}$ então $x = \pm 1$.

Passando ao caso geral, considere $w = w' r_\alpha$ com $\ell(w) = \ell(w') + 1$ $(w'\alpha > 0)$. Da mesma forma, $\mathcal{S}_w = \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{S}_{w'}^{\{\alpha\}})$ e os mesmos argumentos se aplicam a restrição $\mathcal{S}_w \to \mathcal{S}_{w'}^{\{\alpha\}}$ do fibrado $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$ para se obter

$$H^*\left(\mathcal{S}_w\right) = p^*\left(H^*(\mathcal{S}_{w'}^{\{\alpha\}})\right) \oplus \bar{\sigma}_\alpha \smile p^*\left(H^*(\mathcal{S}_{w'}^{\{\alpha\}})\right) \tag{6.4}$$

Foi comentado acima que $H^*(\mathcal{S}_{w'}^{\{\alpha\}})$ é gerado por $\bar{\sigma}_u^{\{\alpha\}}$, $u \leq w'$. Por outro lado, pelo Lema 6.1.3, $p^*\left(\sigma_u^{\{\alpha\}}\right) = \sigma_{u^{\{\alpha\}}}$, onde $u^{\{\alpha\}} \in \mathcal{W}^{\{\alpha\}}$ é minimal em sua classe. Portanto, $p^*(H^*(\mathcal{S}_{w'}^{\{\alpha\}}))$ é gerado pelo conjunto

$$\mathrm{Ger} = \{\bar{\sigma}_{u^{\{\alpha\}}} : u \leq w', u^{\{\alpha\}} \in \mathcal{W}^{\{\alpha\}}\}.$$

Pelo teorema de Leray-Hirsch, $H^*(\mathcal{S}_w)$ é gerado por $\mathrm{Ger} \cup (\bar{\sigma}_\alpha \smile \mathrm{Ger})$.

Proposição 6.1.5. $\bar{\sigma}_w = \pm \bar{\sigma}_\alpha \smile \bar{\sigma}_{w'}$. *(Sem sinal quando $R = \mathbb{Z}_2$).*

Prova: $\bar{\sigma}_\alpha \smile \bar{\sigma}_{w'}$ é o único dos geradores em $\mathrm{Ger} \cup (\bar{\sigma}_\alpha \smile \mathrm{Ger})$ cuja dimensão coincide com a dimensão máxima $\dim \mathcal{S}_w$.

De fato, se $u \leq w'$ então $\dim p^*\left(\sigma_u^{\{\alpha\}}\right) = \dim \sigma_u^{\{\alpha\}} \leq \dim \sigma_{w'}^{\{\alpha\}} = \dim \mathcal{S}_w - m_\alpha$, sendo que a igualdade só ocorre se $u = w'$. Portanto, $\sigma_\alpha \smile \sigma_u$, $u \leq w'$ tem dimensão menor ou igual a dimensão de $\mathcal{S}_w$ com igualdade para $u = w'$. $\square$

Observação: A igualdade da proposição vale somente para a classe $\bar{\sigma}_\alpha$ dentro de $\mathcal{S}_w$. O problema é que $\sigma_\alpha \smile \sigma_{w'}$ pode ter componentes na direção de σ_u, $u \in \mathcal{W}$, cuja restrição à célula $\mathcal{S}_w$ se anula (veja Seção 7.2.3).

Vamos ver que pode ser demonstrado por indução que as classes σ_α de dimensão mínima, associadas às reflexões simples, geram a cohomologia $H^*(\mathbb{F})$.

Proposição 6.1.6. *$H^*(\mathbb{F})$ é gerado por produtos da forma*

$$\sigma_{\alpha_1}^{n_1} \cdots \sigma_{\alpha_l}^{n_l}$$

onde $\Sigma = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ são as raízes simples. (O símbolo $\smile$ foi suprimido.)

Prova: É suficiente provar que para todo $w \in \mathcal{W}$, $H^*(\mathcal{S}_w)$ é gerado por produtos da forma $\bar{\sigma}_{\alpha_1}^{n_1} \cdots \bar{\sigma}_{\alpha_l}^{n_l}$ pois aplicando-se o resultado à involução principal w_0 obtém-se o resultado desejado.

Será demonstrado por indução sobre $\ell(w)$ que $H^*(\mathcal{S}_w)$ é gerado por produtos da forma $\bar{\sigma}_{\alpha_1}^{n_1} \cdots \bar{\sigma}_{\alpha_l}^{n_l}$ em que todas as raízes simples α são tais que $r_\alpha \leq w$.

Se $\ell(w) = 1$ então não há nada que se provar. Para o passo indutivo, suponha que $w = w' r_\alpha$ com r_α uma reflexão simples e $\ell(w) = \ell(w') + 1$. Então, o resultado vale para w' de modo que $H^*(\mathcal{S}_{w'})$ é gerado por produto de classes associadas às reflexões simples r_β com $\beta \leq w'$.

Considere a projeção $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\{\alpha\}}$. As células $\mathcal{S}_w$ e $\mathcal{S}_{w'}$ se projetam na mesma célula $\mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}$ de $\mathbb{F}_\alpha$ e como w' é o elemento de menor comprimento em $w\mathcal{W}_{\{\alpha\}}$, segue que $\dim \mathcal{S}_w^{\{\alpha\}} = \dim \mathcal{S}_{w'}$. Além do mais, $p^*\left(H^*(\mathcal{S}_w^{\{\alpha\}})\right)$ é gerado pelas classes $\sigma_{u^{\{\alpha\}}}$, $u^{\{\alpha\}} \in \mathcal{W}^{\{\alpha\}}$.

Por hipótese de indução, $H^*\left(\mathcal{S}_{w'}\right)$ é gerado por produtos do tipo $\bar{\sigma}_{\alpha_1}^{n_1} \cdots \bar{\sigma}_{\alpha_l}^{n_l}$ com $r_{\alpha_i} \leq w'$. Como $\dim \mathcal{S}_w^{\{\alpha\}} = \dim \mathcal{S}_{w'}$ então $\sigma_{u^{\{\alpha\}}} \in H^*\left(\mathcal{S}_{w'}\right)$, para cada $u^{\{\alpha\}} \in \mathcal{W}^{\{\alpha\}}$. Logo, segue que $p^*\left(H^*(\mathcal{S}_w^{\{\alpha\}})\right)$ é gerado por produtos do tipo $\bar{\sigma}_{\alpha_1}^{n_1} \cdots \bar{\sigma}_{\alpha_l}^{n_l}$ com $r_{\alpha_i} \leq w'$.

Pelo teorema de Leray-Hisrch aplicado à fibração $\mathcal{S}_w \to \mathcal{S}_w^{\{\alpha\}}$, temos que

$$H^*\left(\mathcal{S}_w\right) = p^*\left(H^*(\mathcal{S}_{w'}^{\{\alpha\}})\right) \oplus \bar{\sigma}_\alpha \smile p^*\left(H^*(\mathcal{S}_{w'}^{\{\alpha\}})\right)$$

resultando-se que $H^*\left(\mathcal{S}_w\right)$ é gerado por produtos entre $\bar{\sigma}_{\alpha_i}$ e $\bar{\sigma}_\alpha$. Todas as raízes simples β que aparecem são tais que $r_\beta \leq w$: as primeiras são $\leq w'$ e $r_\alpha < w$ pois $w\alpha < 0$. Isto completa o passo de indução. $\square$

6.2 $\mathbb{F}$ via representação

Inicialmente, vamos estabelecer algumas propriedades básicas da teoria de representações de álgebras de Lie semissimples.

6.2.1 Aspectos Básicos das Representações

Seja τ uma representação de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ em um espaço vetorial complexo V. Dizemos que $\mu \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}^*$ é um peso da representação τ se existe um vetor $v \in V$ não-nulo tal que $\tau(H)v = \mu(H)v$ para todo $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$, isto é, o espaço de pesos $V_\mu = \{v \in V \mid \tau(H)v = \mu(H)v\,, \forall H \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}\}$ é não-nulo. Dizemos que μ é peso máximo de ρ se μ é um peso de τ e $\tau(X)v = 0$ para todo $X \in \mathfrak{n}_\mathbb{C}$ e todo $v \in V_\mu$. Vamos denotá-lo por μ_τ.

No caso das álgebras semissimples complexas $\mathfrak{g}$, toda representação τ irredutível admite um único peso máximo μ_τ. Mais ainda

- $\dim V_{\mu_\tau} = 1$;
- todos demais pesos são da forma

$$\mu = \mu_\tau - \sum_{\beta \in \Sigma} c_\beta \beta \tag{6.5}$$

  onde cada c_β é um inteiro não-negativo e a multiplicidade de cada peso é finita;

- o espaço V se decompõe em soma direta como $V = \sum_\mu V_\mu$.

A coleção de pesos, para todas as representações τ formam um reticulado $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}$ chamado reticulado de pesos. Os pesos dominantes são os pesos $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ tais que $\langle \mu, \beta \rangle \geq 0$ para todo $\beta \in \Sigma$. Em geral, todo peso dominante é o peso máximo de uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$.

Uma representação (projetiva) de um grupo de Lie G semissimples conexo cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$ é um homomorfismo diferenciável ρ de G em $\mathrm{Sl}(V)$ ($\mathrm{PSl}(V)$ que é o quociente de $\mathrm{Sl}(V)$ pelas matrizes escalares múltiplas da identidade) e a representação associada a $\mathfrak{g}$ é obtida por diferenciação. Vamos denotar ambas por ρ. Existe uma correspondência 1-1 entre as representações projetivas irredutíveis de G e as representações irredutíveis de $\mathfrak{g}$ dadas por diferenciação.

6.2.2 G-órbitas

No que se segue, vamos considerar $\mathfrak{g}$ uma forma real normal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de tal forma que se $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é uma decomposição de Iwasawa então $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ e as raízes de $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{h}$ são as mesmas. Além disto, $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é subálgebra parabólica minimal de $\mathfrak{g}$ (neste caso, $\mathfrak{m} = 0$) enquanto $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ é subálgebra parabólica minimal de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Se ρ uma representação irredutível de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial V então sua extensão τ para $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é uma representação irredutível de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de modo que ρ admite as mesmas propriedades de τ.

Vamos agora descrever as variedades *flag* a partir de G-órbitas do vetor primitivo v_ρ associado a uma representação ρ irredutível de $\mathfrak{g}$.

Inicialmente, considere a seguinte proposição que se encontra em Guivarc'h-Ji-Taylor [26] (inclusive a demonstração).

Proposição 6.2.1. *[[26], Proposição 4.18] Seja ρ uma representação irredutível de G em um espaço vetorial V. Denote por $V_\rho = V_{\mu_\rho}$ o subespaço de peso correspondente ao peso máximo μ_ρ e denote por P_ρ o estabilizador de V_ρ. Então P_ρ é um subgrupo parabólico de G.*

Prova: Se $\alpha \in \Sigma$ então temos que $\rho(\mathfrak{g}_\alpha) V_\rho \subset V_{\mu_\rho + \alpha}$. Mas, pela fórmula (6.5), se $\alpha \in \Pi^+$ então $\mu_\rho + \alpha$ não é um peso. Logo $\rho(\mathfrak{n})(V_\rho) = \{0\}$. Segue, portanto, que $\rho(AN)$ deixa V_ρ invariante e age em V_ρ por homotetias de raio e^{μ_ρ}, isto é, $\rho(an)v = e^{\mu_\rho} v$, onde $e^{\mu_\rho}(a) = e^{\mu_\rho(\log a)}$, $a \in A$. Como M centraliza A, M age trivialmente em $\mathfrak{a}^*$ e então $\rho(M)V_\rho = V_\rho$. Segue que $\rho(MAN)V_\rho = V_\rho$. Isto implica que $P = MAN \subset P_\rho$ e, portanto, P_ρ é um subgrupo parabólico de G. □

Mais especificamente, é possível determinar de modo exato o subgrupo de isotropia (a prova será omitida mas pode ser encontrada na mesma referência [26]).

Proposição 6.2.2. *[[26], Proposição 4.19] Seja* $I_\rho^\perp = \{\gamma \in \Sigma : \langle \mu_\rho, \gamma \rangle = 0\}$. *Então o estabilizador* P_ρ *de* V_ρ *em* G *é o subgrupo parabólico* $P_{I_\rho^\perp}$.

Como consequência da Proposição 6.2.2, obtém-se a variedade *flag* no espaço da representação.

Corolário 6.2.3. *Considere a órbita projetiva* $G \cdot [v]$ *no espaço projetivo real* $\mathbb{P}_\mu$ *de* V_μ *visto como espaço vetorial real, com* v_ρ *vetor primitivo de peso máximo* μ_ρ. *Então* $G \cdot [v_\rho]$ *é uma variedade flag de* $\mathfrak{g}$. *Mais especificamente,* $G \cdot [v_\rho]$ *é a variedade flag* $\mathbb{F}_\Theta$ *onde* $\Theta = I_\rho^\perp$, *isto é:*

$$G/P_{I_\rho^\perp} = G \cdot [v_\rho]$$

Representações Básicas

Seja $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ um sistema simples de raízes e $\Lambda = \{\mu_1, \ldots, \mu_l\}$ o **sistema fundamental de pesos** correspondente que é definido por

$$\langle \alpha_i^\vee, \mu_j \rangle = \frac{2\langle \alpha_i, \mu_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \delta_{ij}.$$

Cada μ_j definido assim é um peso dominante e o sistema fundamental de pesos é uma base para o reticulado de pesos. Uma representação básica de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ é uma representação ρ_j no espaço V_{μ_j} com peso máximo $\mu_j \in \Lambda$ (os pesos básicos também são pesos máximos de representações de dimensão finita visto que $\mu_j(H_\alpha) \geq 0$ para todo $H_\alpha \in \Sigma$).

Observe que, para toda raiz $\alpha \in \Sigma \setminus \{\alpha_j\}$, $\langle \alpha, \mu_j \rangle = \langle \alpha^\vee, \mu_j \rangle = 0$ e, portanto, como consequência do Corolário 6.2.3, a isotropia da ação em G é o subgrupo parabólico maximal P_Θ com $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_j\}$. Com isso, tem se que:

Corolário 6.2.4. *Para uma representação básica* ρ_j, *a órbita projetiva* $G \cdot [v_j]$ *do vetor de peso máximo é a variedade flag minimal* $\mathbb{F}_\Theta$ *com* $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_j\}$.

6.3 Classes características

Em primeiro lugar, vamos apenas relembrar a definição e estabelecer algumas propriedades relacionadas às classes características.

6.3.1 Classes de Stiefel-Whitney

As classes características são classes de cohomologia associadas a fibrados vetoriais. Em termos geométricos, elas fornecem informações sobre orientabilidade e torção, não-trivialidade e, mais geralmente, obstrução à existência de seções ortonormais destes fibrados. Aqui, vamos nos restringir à abordagem axiomática.

As classes características que ocorrem no contexto de fibrados vetoriais reais em que os coefiecientes do anel de cohomologia estão em $\mathbb{Z}_2$ são as classes de Stiefel-Whitney. Segue abaixo o resultado básico que fornece suas propriedades (para mais detalhes, veja Husemoller [31], Capítulo 17, Seção 3).

Teorema 6.3.1. *Para cada fibrado vetorial real $E \to B$, existe uma sequência única de funções $\mathrm{sw}_i \in H^i(B, \mathbb{Z}_2)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mathrm{sw}_i(f^*(E)) = f^*(\mathrm{sw}_i(E))$ *para um pull-back* $f^*(E)$.
2. $\mathrm{sw}(E_1 \oplus E_2) = \mathrm{sw}(E_1) \smile \mathrm{sw}(E_2)$, *onde* $\mathrm{sw} = 1 + \mathrm{sw}_1 + \mathrm{sw}_2 + \cdots \in H^*(B; \mathbb{Z}_2))$ *e* $E_i \to B$, $i = 1, 2$, *são fibrados vetoriais reais.*
3. $\mathrm{sw}_i = 0$ *se* $i > \dim(E)$.
4. *Para o fibrado canônico de retas* $\gamma\mathbb{R}^2 \to \mathbb{PR}^2$, $\mathrm{sw}_1(E)$ *é um gerador de* $H^1(\mathbb{PR}^2, \mathbb{Z}_2)$.

6.3.2 Geradores de $H^1(\mathbb{F}, \mathbb{Z}_2)$ como classes de Stiefel-Whitney

Vamos continuar com a mesma notação da seção anterior. Seja $\mathfrak{g}$ uma forma real normal de uma álgebra semissimples complexa, $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ denota o sistema simples de raízes e $\Lambda = \{\mu_1, \ldots, \mu_l\}$ os pesos fundamentais correspondentes.

A partir da representação básica ρ_j, que define uma aplicação da variedade *flag* $\mathbb{F}_\Theta$, $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_j\}$, no espaço projetivo $\mathbb{P}V_j$ de V_j, compondo-se com a projeção canônica $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ obtém-se uma aplicação

$$\widetilde{\rho}_j : \mathbb{F} \to \mathbb{P}V_j.$$

Além disto, a representação básica ρ_j permite obter uma ação do subgrupo parabólico P em $\mathbb{R}$. De fato, seja $v_j \in V_j$ um vetor de peso máximo. Então, v_j é auto-vetor de $\rho_j(h)$ para todo $h \in P$, isto é, existe um homomorfismo $\nu_j : P \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (grupo multiplicativo) tal que

$$\rho_j(h)\, v_j = \nu_j(h) \cdot v_j \qquad , \qquad h \in P.$$

O homomorfismo ν_j define uma representação de P em $\mathbb{R}$. Segue que se $G \to \mathbb{F}$ é um fibrado principal com grupo estrutural $P = MAN$ então podemos construir, a partir de ν_j, o fibrado vetorial associado $G \times_{\nu_j} \mathbb{R}$. Aqui G deve ser o grupo conexo e simplesmente conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, para que uma representação de $\mathfrak{g}$ se estenda a uma representação de G (se for fixada uma única representação pode-se tomar o grupo como sendo $\langle \exp \widetilde{\rho}_j(\mathfrak{g}) \rangle$).

A seguinte proposição apresenta uma interpretação geométrica para os geradores σ_{α_j}, $\alpha_j \in \Sigma$, do anel de cohomologia $H^*(\mathbb{F})$ em termos das primeiras classes de Stiefel-Whitney de um fibrado de linha sobre $\mathbb{F}$.

Proposição 6.3.2. *Seja $\widetilde{\rho}_j : \mathbb{F} \to \mathbb{P}V_j$ a aplicação definida a partir da composição da projeção canônica π_Θ com uma representação básica com peso máximo μ_j. Então*

1. $\sigma_{\alpha_j} = \widetilde{\rho}_j^*(z_j)$ *onde z_j é o gerador da cohomologia de $\mathbb{P}V_j$.*
2. $\sigma_{\alpha_j} = \mathrm{sw}_1\left(\widetilde{\rho}_j^*\left(\gamma V_j\right)\right)$ *onde $\gamma V_j \to \mathbb{P}V_j$ é o fibrado de retas canônico.*
3. $\sigma_{\alpha_j} = \mathrm{sw}_1\left(G \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)$ *onde $G \times_{\nu_j} \mathbb{R}$ é o fibrado vetorial associado definido por ν_j.*

Prova: Vamos provar cada uma das afirmações separadamente.

1. Como $\widetilde{\rho}_j^*(z_j)$ é uma classe de dimensão 1, ela é combinação linear de σ_{α_i}, $i = 0, \ldots, l$, isto é, $\widetilde{\rho}_j^*(z_j) = \lambda_1\sigma_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_l\sigma_{\alpha_l}$. Por dualidade, os coeficientes λ_i são os valores nos ciclos $\mathcal{S}_{r_i}$, $r_i = r_{\alpha_i}$, de modo que:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}_j^*(z_j) &= \left(\widetilde{\rho}_j^*(z_j)(\mathcal{S}_{r_1})\right)\sigma_{\alpha_1} + \cdots + \left(\widetilde{\rho}_j^*(z_j)(\mathcal{S}_{r_l})\right)\sigma_{\alpha_l} \\ &= z_j\left((\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_1})\right)\sigma_{\alpha_1} + \cdots + z_j\left((\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_l})\right)\sigma_{\alpha_l}. \end{aligned}$$

   Observe que $\mathcal{S}_{r_i} = G(\alpha_i) \cdot b_0$ e, portanto, $\rho_j\left(\mathcal{S}_{r_i}\right) = \rho\left(G(\alpha_i)\right)[v_j]$ que é o subespaço projetivo gerado por v_j e $\rho(\mathfrak{g}_{-\alpha_i})v_j$.

   Assim, se $\alpha \neq \alpha_j$, $\rho(\mathcal{S}_{r_\alpha})$ é um ponto pois $\mathfrak{g}_{-\alpha} \in \ker\rho_j$ e a célula de Schubert $\mathcal{S}_{r_\alpha}$ está contida na fibra sobre a origem de $\mathbb{F} \to G \cdot [v_j]$. Portanto, $(\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_\alpha}) = 0$ se $\alpha \neq \alpha_j$.

   Por outro lado, $\mathcal{S}_{r_j}$ é a órbita a partir da origem do grupo $G(\alpha_j)$ e assim $\rho(\mathcal{S}_{r_j}) = \rho(G(\alpha_j)) \cdot [v_j]$ que é o conjunto de $\mathbb{P}V_j$ definido pelo subespaço gerado por v_j e por $\rho(\mathfrak{g}_{-\alpha_j})v_j \neq 0$. Portanto, $z_j\left((\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_j})\right) = 1$.

2. Se $\gamma V_j \to \mathbb{P}V_j$ é o fibrado de retas canônico então $z_j = \mathrm{sw}_1\left(\gamma V_j\right)$. Por outro lado, como as classes características comutam com pull-backs (veja o Teorema 6.3.1), temos que

$$\mathrm{sw}_1\left(\widetilde{\rho}_j^*\left(\gamma V_j\right)\right) = \widetilde{\rho}_j^*\left(\mathrm{sw}_1\left(\gamma V_j\right)\right) = \widetilde{\rho}_j^*\left(z_j\right) = \sigma_{\alpha_j}$$

   e a última igualdade segue do item anterior.

3. Vamos provar que o pull-back $\widetilde{\rho}_j^*\left(\gamma V_j\right)$ é isomorfo ao fibrado vetorial associado $G \times_{\nu_j} \mathbb{R}$. O resultado segue a partir do item anterior.

   Os elementos de $G \times_{\nu_j} \mathbb{R}$ são da forma $g \cdot a$, $g \in G$ e $a \in \mathbb{R}$, sendo que $gh \cdot \nu_j\left(h^{-1}\right)a = g \cdot a$. Já os elementos de γV_j são dados pelos pares $(x, u) \in \mathbb{P}V_j \times V_j$ com $u \in x$.

   Por outro lado a aplicação $\widetilde{\rho}_j : \mathbb{F} \to \mathbb{P}V_j$ é obtida passando ao quociente a aplicação $g \in G \to g \cdot [v_j] \in \mathbb{P}V_j$, onde $[v_j]$ é o espaço gerado pelo vetor de peso máximo v_j. Com isso os elementos de $\widetilde{\rho}_j^*\left(\gamma V_j\right)$ são os pares $(\xi, u) \subset \mathbb{F} \times V_j$ em que $u \in \widetilde{\rho}_j\left(\xi\right)$.

   O isomorfismo então é dado por

$$g \cdot a \mapsto \left(gP, a\rho_j(g)\left(v_j\right)\right).$$

Essa aplicação está bem definida pois se $h \in P$ então

$$\left((gh)\,P, \nu_j\left(h^{-1}\right) a\rho_j\,(gh)\,(v_j)\right) = (gP, a\rho_j(g)\,(v_j))\,.$$

Essa aplicação é um isomorfismo de fibrados vetoriais.

$\square$

Observação: A $\mathbb{Z}_2$-homologia de $\mathbb{R}P^n$ é dada por $H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ sendo possível escolher como representante dos ciclos de dimensão $k = 0, 1, \ldots, n$ os ciclos definidos por subespaços de dimensão $k+1$ (célula de Schubert em $\mathbb{R}P^n$). O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ é um anel polinomial truncado $\mathbb{Z}_2[z]/z^{n+1}$ gerado pelo elemento z da base dual que corresponde ao elemento de dimensão 1 (reta projetiva contida no subespaço de dimensão 2).

Seja $K \to \mathbb{F}$ o fibrado principal com grupo estrutural M. Segue que o fibrado associado $K \times_{\nu_j} \mathbb{R}$ é o mesmo que $G \times_{\nu_j} \mathbb{R}$, com a restrição de ν_j a M. O homomorfismo ν_j é dado explicitamente da seguinte forma:

1. Restrição de ν_j a A ([26], Lema 4.21): se $h \in A$ então $h = \exp H$, $H \in \mathfrak{a}$, e $\rho_j\,(h) = \rho_j\,(\exp H) = \exp \rho_j\,(H)$. Como $\rho_j\,(H)\, v_j = \mu_j\,(H)\, v_j$, se conclui que

$$\nu_j\,(h) = e^{\mu_j(\log h)} \qquad h \in A.$$

2. Restrição de ν_j a M no caso do grupo $G_j = \langle \exp \rho_j\,(\mathfrak{g}) \rangle$: seja $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ a complexificada de $\mathfrak{g}$ e $G_{j\mathbb{C}} = \langle \exp \rho_j\,(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \rangle$ o grupo complexificado de G_j, via a representação. Como por hipótese $\mathfrak{g}$ é forma real normal, $\mathfrak{m} = 0$ e M é um grupo discreto que é gerado por (veja Equação (1.7))

$$m_\alpha = \exp \pi i H_\alpha^\vee$$

com α raiz. O valor de ν_j em m_α é

$$\nu_j\,(m_\alpha) = e^{\pi i \mu_j (H_\alpha^\vee)}.$$

Como o número de Killing $\mu_j\,(H_\alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$, segue que

$$\nu_j\,(m_\alpha) = (-1)^{\mu_j(H_\alpha^\vee)}\,.$$

Observação: Esta mesma idéia pode ser encontrada no estudo das variedades *flag* complexas (veja [2] e [40]).

6.4 Exemplo de $G = \mathrm{Sl}(n+1, \mathbb{R})$

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ a álgebra de Lie associada ao diagrama de Dynkin A_n. Tome $\mathfrak{a}$ a subálgebra maximal abeliana formada pelas matrizes diagonais de traço zero. As raízes são dadas por $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, $i \neq j$, onde

$$\lambda_i(\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_{n+1})\} = a_i.$$

Um sistema simples é

$$\Sigma = \{\alpha_1 = \alpha_{12}, \ldots, \alpha_n = \alpha_{n,n+1}\}$$

e, como o dual de uma raiz é dado por

$$H_{\alpha_{ij}} = \frac{1}{2(l+1)}(e_{ii} - e_{jj}),$$

os duais normalizados $H_i = \dfrac{2}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} H_{\alpha_i}$ das raízes simples formam a base

$$\{e_{11} - e_{22}, \cdots, e_{nn} - e_{n+1,n+1}\}$$

de $\mathfrak{a}$ uma vez que $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = \dfrac{1}{l+1}$.

O sistema fundamental de pesos é a base dual desta base. Um cálculo direto mostra que, em termos dos funcionais λ_i:

$$\Phi = \{\mu_1 = \lambda_1, \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \cdots, \mu_{n+1} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1}\}.$$

Em termos das raízes simples, cada peso fundamental μ_j, $j = 1, \ldots, n+1$, possui como coeficiente a j-ésima coluna da inversa da matriz de Cartan.

Sejam $V = \mathbb{R}^{n+1}$ e $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ a base canônica em V. A representação de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ em V é irredutível e e_1 é um elemento primitivo de peso máximo μ_1, sendo esta a representação fundamental associada ao peso μ_1.

As demais representações fundamentais são obtidas nos produtos exteriores

$$\bigwedge^k V \qquad , \qquad k = 2, \ldots, n+1$$

nos quais $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ se representa por

$$X(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) = Xu_1 \wedge \cdots \wedge u_k + \cdots + u_1 \wedge \cdots \wedge Xu_k$$

O conjunto formado por

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \qquad , \qquad i_1 < \cdots < i_k$$

é uma base de $\bigwedge^k V$ e os subespaços gerados pelos elementos desta base são subespaços de pesos associados aos pesos

$$\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k} \qquad , \qquad i_1 < \cdots < i_k$$

O primeiro elemento da base $v_{\mu_k} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ é um elemento primitivo de peso

$$\mu_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k.$$

É possível mostrar que tais representações são irredutíveis ([42], Capítulo 11). Note que estas representações correspondem à diferenciação da representação de $G = \mathrm{Sl}(n+1,\mathbb{R})$ em $\bigwedge^k V$ dada por

$$g(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) = gu_1 \wedge \cdots \wedge gu_k.$$

O espaço de pesos $V_{\mu_k} \subset \bigwedge^k V$ é a reta gerada por $v_{\mu_k} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ e o subgrupo de isotropia P_{μ_k} da representação de G é o sugbrupo das matrizes triangulares superiores em blocos da forma

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

com A, C matrizes quadradas arbitrárias de ordem k e $n+1-k$, respectivamente. Podemos assim obter as variedades *flag* a partir destas representações.

A variedade *flag* G/P_{μ_1}, que é o espaço projetivo $\mathbb{PR}^{n+1}$, é vista pela representação como a órbita projetiva do vetor primitivo associado $v_{\mu_1} = e_1$, isto é:

$$\mathbb{PR}^{n+1} \cong \mathrm{Sl}(n+1,\mathbb{R}) \cdot [e_1].$$

Mais geralmente, a variedade *flag* G/P_{μ_k}, que é a variedade Grassmanniana $\mathrm{Gr}_k\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, identifica-se pela representação como a órbita do vetor primitivo associado $v_{\mu_k} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ isto é:

$$\mathrm{Gr}_k\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) \cong \mathrm{Sl}(n+1,\mathbb{R}) \cdot [e_1 \wedge \cdots \wedge e_k].$$

Esta representação fornece a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_k\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) & \overset{p_k}{\to} & \mathbb{P}\left(\bigwedge^k \mathbb{R}^{n+1}\right) \\ \langle u_1, \ldots, u_k \rangle & \mapsto & [u_1 \wedge \cdots \wedge u_k] \end{array}$$

que é conhecida como o mergulho de Plücker.

Seja $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathrm{Gr}_k\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ a projeção canônica e denote por $P_k = p_k \circ \pi_\Theta$ a composição da projeção com o mergulho de Plücker. O fibrado de linha sobre a variedade *flag* maximal $\mathbb{F}$ é dado por

$$\{(x,v) : x \in \mathbb{F}\,,\ [v] \in P_k(x)\} \subset \mathbb{F} \times \bigwedge^k \left(\mathbb{R}^{n+1}\right).$$

Este fibrado é isomorfo ao fibrado associado $\mathrm{Sl}(n+1,\mathbb{R}) \times_{\nu_k} \mathbb{R}$ onde a ação $\nu_k : P \to \mathbb{R}^*$ pode ser descrita da seguinte forma. Um elemento $p \in P$ é da forma

$$p = \begin{pmatrix} p_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & p_{22} & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Seja $v_{\mu_k} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \in V_{\mu_k}$ um vetor primitivo de peso máximo $\mu_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$. Em termos da ação de p em $\bigwedge^k V_{\mu_k}$, temos que

$$\begin{array}{rcl} pv_{\mu_j} & = & \nu_k(p)v_{\mu_j} \\ p(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) & = & p(e_1) \wedge \cdots \wedge p(e_k) \\ p(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) & = & (p_{11} \cdots p_{kk})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \\ pv_{\mu_j} & = & \det[p(k)]v_{\mu_j} \end{array}$$

isto é, $\nu_k : P \to \mathbb{R}^*$ é dada por $\nu_k(p) = \det[p(k)]$, onde $\det[p(k)]$ denota o determinante menor $k \times k$ de p. Observe ainda que, no caso da restrição de $\overline{\mu_k} = \mu_k|_M$ a M temos que $\overline{\mu_k} : M \to \mathbb{Z}_2$ pois os elementos em M são matrizes diagonais com entradas ± 1.

Capítulo 7

Cohomologia de *Flags* Reais II

Neste capítulo vamos introduzir algumas propriedades do anel de cohomologia da variedade *flag* maximal $H^*(\mathbb{F}, \mathbb{Z}_2)$ a partir dos resultados obtidos no capítulo anterior sobre os geradores σ_α, $\alpha \in \Sigma$ e o fato de serem classes características de um fibrado de linha sobre $\mathbb{F}$. Em primeiro lugar, concentramos esforços no estudo da ação do grupo de Weyl na cohomologia, uma vez que os resultados conhecidos para as variedades *flag* complexas apresentam o anel de cohomologia como um quociente do anel de polinômios simétricos sobre a álgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ pelo ideal dos polinômios invariantes pelo grupo de Weyl. Por outro lado, é importante se determinar o produto entre quaisquer duas classes de cohomologia. Aqui, vamos nos contentar em estabelecer fórmulas para o quadrado dos geradores para alguns casos particulares. De um modo geral, a expectativa é que os resultados aqui apresentados ainda não estejam em sua melhor forma mas, mesmo assim, no estágio em que estão, já merecem ser aqui apresentados.

7.1 Ação do grupo de Weyl

A vantagem de olhar as classes σ_j como classes características se dá pela facilidade de olhar a ação do grupo de Weyl $\mathcal{W}$, que age à direita em $\mathbb{F} = K/M$. A definição da ação exige a escolha do compacto maximal K. Assim, $\mathbb{F} = K/M$ e $\mathcal{W} = M^*/M$. Então existe a fibração

$$\mathbb{F} = K/M \to K/M^*$$

cuja fibra é $\mathcal{W} = M^*/M$. Como M é subgrupo normal de M^*, esse é fibrado é principal com grupo estrutural $\mathcal{W}$, que age portanto à direita em $\mathbb{F}$. Explicitamente, em termos de classes laterais, a ação é dada por:

$$(kM, w) \in K/M \times \mathcal{W} \mapsto k\overline{w}M$$

onde $\overline{w} \in M^*$ é um representante de w. Ela será denotada também por ξw, $\xi \in \mathbb{F}$, $w \in \mathcal{W}$.

Observação: Se um grupo de Lie conexo age num espaço então os elementos do grupo são todos homotópicos à identidade e neste caso os homomorfismos induzidos são triviais. Porém, será visto que a ação de $\mathcal{W}$ na cohomologia não é trivial e, portanto, esta ação não se trata de uma ação obtida como restrição da ação de um grupo conexo (K por exemplo).

Aqui será conveniente fazer uma escolha do grupo G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de tal forma que G se represente em todas as representações básicas e ao mesmo tempo G seja um grupo complexificável. Um grupo desses existe pois se $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_l$ for a soma direta das representações básicas de $\mathfrak{g}$, no espaço $V = V_1 + \cdots + V_l$, então $G = \langle \exp \rho(\mathfrak{g}) \rangle$ satisfaz essas duas condições: G é complexificável pois é grupo linear e as restrições a cada V_i dão representações de G que estendem as representações básicas.

Dado $w \in \mathcal{W}$, o pull-back do fibrado vetorial $K \times_{\nu_j} \mathbb{R}$ pela ação à direita de w é denotado por $w^* \left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)$.

Proposição 7.1.1. *$w^* \left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)$ é isomorfo a $K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R}$, onde $\nu_j \circ w^{-1} : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é o homomorfismo $\nu_j \circ w^{-1}(m) = \nu_j \left(\overline{w}^{-1} m \overline{w}\right)$ sendo que $\overline{w}$ é um representante de w em M^*.*

Prova: Por definição, os elementos do pull-back $w^* \left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)$ são pares $(\xi, u) \in \mathbb{F} \times \left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)$ tal que u se projeta em ξw.

Se $\xi = kM$, $k \in K$, então a fibra de $K \times_{\nu_j} \mathbb{R}$ sobre ξw é dada pelos elementos $kw \cdot a$ com $a \in \mathbb{R}$. Portanto, a fibra de $w^* \left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)$ sobre ξ é

$$\{\xi\} \times \{kw \cdot a : a \in \mathbb{R}\}.$$

Essa descrição da fibra depende da escolha de $k \in K$ tal que $\xi = kM$. Um outro elemento de K com a mesma propriedade é da forma km com $m \in M$. Substituíndo k por km, a fibra seria descrita por alterando $a \in \mathbb{R}$ da seguinte forma: um elemento $kmw \cdot a$ da fibra seria dado por

$$kw \left(w^{-1} m w\right) \cdot a = kw \cdot \nu_j \left(w^{-1} m w\right) a. \tag{7.1}$$

Defina a aplicação $\theta : w^* \left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right) \to K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R}$ por

$$\theta(\xi, kw \cdot a) = k \cdot_w a$$

onde $\xi = kM$ e o simbolo $k \cdot_w a$ representa um elemento do fibrado associado $K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R}$. Na definição de θ existe ambiguidade na escolha de $k \in K$ tal que $\xi = kM$. Se fosse tomado km, $m \in M$, no lugar de k, se obteria a aplicação

$$(\xi, kmw \cdot a) \mapsto km \cdot_w a$$

No entanto, por (7.1) $kmw \cdot a = kw \cdot \nu_j \left(w^{-1} m w\right) a$, que por θ é levado em

$$k \cdot_w \nu_j \left(w^{-1} m w\right) a$$

que coincide com $km \cdot_w a$ no fibrado $K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R}$. Portanto, θ está bem definida. A partir daí é imediato verificar que θ é de fato um isomorfismo. $\square$

Com este resultado, obtém-se $\sigma_j w$, que é a ação à direita de $w \in \mathcal{W}$ na classe σ_j.

Corolário 7.1.2. *Denote por* $\mathrm{sw}_1(\cdot)$ *a primeira classe de Stiefel-Whitney. Dado* $w \in \mathcal{W}$, *vale*

$$\sigma_j w = \mathrm{sw}_1\left(K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R}\right).$$

Prova: Pela proposição $K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R} = w^*\left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)$, portanto

$$\begin{aligned} \mathrm{sw}_1\left(K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R}\right) &= \mathrm{sw}_1\left(w^*\left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)\right) = \left(\mathrm{sw}_1\left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right)\right) w \\ &= \sigma_j w, \end{aligned}$$

pois $\mathrm{sw}_1\left(K \times_{\nu_j} \mathbb{R}\right) = \sigma_j$. $\square$

Em vista desse corolário deve-se descrever $\mathrm{sw}_1\left(K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R}\right)$ em termos das classes de cohomologia σ_k, $k = 1, \ldots, l$.

Para isso deve-se observar que se $w \in \mathcal{W}$ e μ_j é um peso básico então

$$w\mu_j = \mu_j \circ w^{-1} = a_1\mu_1 + \cdots + a_l\mu_l$$

com $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{Z}$. Isso porque $\{\mu_1, \ldots, \mu_l\}$ gera o reticulado dos elementos x tais que $\langle \alpha_k^\vee, x \rangle \in \mathbb{Z}$, $k = 1, \ldots, l$, e $\mathcal{W}$ deixa invariante esse reticulado.

Lema 7.1.3. $\nu_j \circ w^{-1} = \nu_1^{a_1} \cdots \nu_l^{a_l}$ *onde os expoentes* a_i *são os coeficientes da combinação linear* $w\mu_j = a_1\mu_1 + \cdots + a_l\mu_l$.

Prova: Essa relação vale mesmo quando ν_j é visto como um homomorfismo $MA \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Em primeiro lugar tome $h \in A$. Então, se $\overline{w}$ é um representante de w em M^*, tem se que $\nu_j\left(\overline{w}^{-1} h \overline{w}\right) = e^{\mu_j\left(\log \overline{w}^{-1} h \overline{w}\right)}$. Agora, $e^{\mu_j\left(\log \overline{w}^{-1} h \overline{w}\right)} = e^{\mu_j \circ \overline{w}^{-1}(\log(h))} = e^{w\mu_j(\log h)}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \nu_j\left(\overline{w}^{-1} h \overline{w}\right) &= e^{w\mu_j(\log h)} \\ &= e^{a_1\mu_1(\log h)} \cdots e^{a_l\mu_l(\log h)} \\ &= \nu_1(h)^{a_1} \cdots \nu_l(h)^{a_l}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como o grupo é complexificável, M é gerado pelo conjunto $\{\gamma_\alpha = \exp \pi i H_\alpha^\vee : \alpha \in \Sigma\}$. É suficiente então mostrar que para toda raiz simples α vale a igualdade $\nu_j\left(\overline{w}^{-1}\gamma_\alpha\overline{w}\right) = \nu_1(\gamma_\alpha)^{a_1} \cdots \nu_l(\gamma_\alpha)^{a_l}$.

Por definição, $\rho_j\left(\overline{w}^{-1}\gamma_\alpha\overline{w}\right) v_j = \nu_j\left(\overline{w}^{-1}\gamma_\alpha\overline{w}\right) v_j$, onde $v_j \in V_j$ é vetor de peso máximo para ρ_j. O primeiro membro dessa igualdade é o mesmo que $\rho_j\left(\overline{w}^{-1}\right) \rho_j(\gamma_\alpha) \rho_j(\overline{w}) v_j$. O vetor $u = \rho_j(\overline{w}) v_j \in V_j$ pertence ao espaço de pesos de V_j associado ao peso $w\mu_j$. Portanto,

$$\begin{aligned} \rho_j(\gamma_\alpha) u &= \rho_j\left(\exp \pi i H_\alpha^\vee\right) u \\ &= e^{\pi i \cdot w\mu_j(H_\alpha^\vee)} u \\ &= (-1)^{a_1\mu_1(H_\alpha^\vee)+\cdots+a_l\mu_l(H_\alpha^\vee)} u \\ &= (-1)^{a_1\mu_1(H_\alpha^\vee)} \cdots (-1)^{a_l\mu_l(H_\alpha^\vee)} u. \end{aligned}$$

Aplicando $\rho_j\left(\overline{w}^{-1}\right)$ se obtém

$$\rho_j\left(\overline{w}^{-1}\right) \rho_j(\gamma_\alpha) \rho_j(\overline{w}) v_j = (-1)^{a_1\mu_1(H_\alpha^\vee)} \cdots (-1)^{a_l\mu_l(H_\alpha^\vee)} v_j. \tag{7.2}$$

Agora se usa o fato de que G se representa em cada um dos espaços V_k, $k = 1, \ldots, l$. Então, para cada k, ν_k está bem definido em M e satisfaz $\nu_k(\gamma_\alpha) = (-1)^{\mu_k(H_\alpha^\vee)}$. Pela igualdade (7.2), tem se que

$$\begin{aligned} \nu_j\left(\overline{w}^{-1}\gamma_\alpha\overline{w}\right) v_j &= \rho_j\left(\overline{w}^{-1}\gamma_\alpha\overline{w}\right) v_j \\ &= (-1)^{a_1\mu_1(H_\alpha^\vee)} \cdots (-1)^{a_l\mu_l(H_\alpha^\vee)} v_j \\ &= \nu_1(\gamma_\alpha)^{a_1} \cdots \nu_l(\gamma_\alpha)^{a_l} v_j \end{aligned}$$

concluindo a demonstração do lema. □

O lema acima, juntamente com o seguinte fato geral permite escrever o fibrado $K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R}$ a partir dos fibrados $K \times_{\nu_k} \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, l$.

Proposição 7.1.4. *Seja $Q \to X$ um fibrado com grupo estrutural L. Sejam também $\rho_1 : L \to \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $\rho_2 : L \to \mathrm{Gl}(m, \mathbb{R})$ duas representações de L, em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Então, $(Q \times_{\rho_1} \mathbb{R}^n) \otimes (Q \times_{\rho_2} \mathbb{R}^m) = Q \times_{\rho_1 \otimes \rho_2} (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m)$, onde $\rho_1 \otimes \rho_2$ é o produto tensorial das representações.*

No caso das representações $\nu_k : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathrm{Gl}(1, \mathbb{R})$ de dimensão 1, um produto tensorial é exatamente o produto usual:

$$\nu_{k_1} \otimes \nu_{k_2}(m) = \nu_{k_1}(m)\, \nu_{k_2}(m).$$

Portanto, o Lema 7.1.3 dá a seguinte informação:

Proposição 7.1.5. *$K \times_{\nu_j \circ w^{-1}} \mathbb{R} = (K \times_{\nu_1} \mathbb{R})^{\otimes a_1} \otimes \cdots \otimes (K \times_{\nu_l} \mathbb{R})^{\otimes a_l}$ onde os expoentes a_i são os coeficientes da combinação linear $w\mu_j = a_1\mu_1 + \cdots + a_l\mu_l$.*

Observação: Na proposição acima os expoentes a_k podem ser negativos. No caso, por exemplo em que $a_1 < 0$, $(K \times_{\nu_1} \mathbb{R})^{\otimes a_1}$ deve ser interpretado como $\left((K \times_{\nu_1} \mathbb{R})^{-1}\right)^{\otimes(-a_1)}$ onde

$(K\times_{\nu_1}\mathbb{R})^{-1}$ é o fibrado inverso de $K\times_{\nu_1}\mathbb{R}$ (aquele que somado com ele dá o fibrado trivial). Assim como na proposição geral acima, vale $(K\times_{\nu_1}\mathbb{R})^{-1}=K\times_{\nu_1^{-1}}\mathbb{R}$.

Podemos agora determinar qual é a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado $K\times_{\nu_j\circ w^{-1}}\mathbb{R}$ uma vez que a primeira classe de Stiefel-Whitney é um homomorfismo, isto é, $\mathrm{sw}_1(V\otimes W)=\mathrm{sw}_1(V)+\mathrm{sw}_1(W)$ (veja [31], Teorema 3.4) e, portanto, temos o seguinte resultado imediato.

Corolário 7.1.6. $\mathrm{sw}_1\left(K\times_{\nu_j\circ w^{-1}}\mathbb{R}\right)=a_1\sigma_1+\cdots+a_l\sigma_l.$

Por fim da Proposição 7.1.1 se obtém a seguinte consequência.

Corolário 7.1.7. *$\sigma_j w=a_1\sigma_1+\cdots+a_l\sigma_l$ com os mesmos coeficientes a_i da combinação linear $w\mu_j=a_1\mu_1+\cdots+a_l\mu_l$.*

Exemplo: Para $A_2=\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ pode-se tomar $G=\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$. Os pesos fundamentais são $\mu_1=\lambda_1$, $\mu_2=\lambda_1+\lambda_2$, onde $\lambda_i(\mathrm{diag}\{a_1,a_2,a_3\})=a_i$ ($\lambda_3=-\lambda_1-\lambda_2$). O grupo de Weyl age nos λ_i's por permutação dos índices. A partir daí se obtém a seguinte tabela da ação de $\mathcal{W}$:

1. $\sigma_1(12)=-\sigma_1+\sigma_2$ e $\sigma_2(12)=\sigma_2$.
2. $\sigma_1(23)=\sigma_1$ e $\sigma_2(23)=\sigma_1-\sigma_2$.
3. $\sigma_1(123)=-\sigma_1+\sigma_2$ e $\sigma_2(123)=-\sigma_1$.
4. $\sigma_1(132)=-\sigma_2$ e $\sigma_2(132)=\sigma_1-\sigma_2$.
5. $\sigma_1(13)=-\sigma_2$ e $\sigma_2(13)=-\sigma_1$.

7.2 Fórmulas para σ_α^2

Nesta seção são obtidas fórmulas para o quadrado dos elementos geradores da cohomologia. Para isto, vamos novamente fazer uso da teoria de representações. Vamos relembrar a notação introduzida no capítulo anterior. Seja $\widetilde{\rho}_j:\mathbb{F}\to\mathbb{P}V_{\mu_j}$ a aplicação definida a partir da composição da projeção canônica π_Θ com uma representação com peso máximo μ_j de modo que $\widetilde{\rho}_j^*(z_j)=\sigma_{\alpha_j}$ onde z_j é o gerador da cohomologia de $\mathbb{P}V_{\mu_j}$ e σ_{α_j} é a classe de dimensão 1 associada à raiz simples α_j (veja a Proposição 6.3.2). Logo podemos escrever $\sigma_{\alpha_j}^2=\widetilde{\rho}_j^*(z_j^2)$. Para determinar $\widetilde{\rho}_j^*(z_j^2)$ será necessário olhar com mais cuidado para a representação com peso máximo μ_j. Mais especificamente, a representação irredutível da subálgebra $\mathfrak{g}(\alpha_j,\alpha)$, gerada por $\mathfrak{g}_{\pm\alpha_j}$ e $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$, onde α é outra raiz, com peso máximo μ_j que contém o vetor de peso máximo $v=v_{\mu_j}$.

7.2.1 Pesos da representação com peso máximo μ_j

Inicialmente, vamos recordar o seguinte lema.

Lema 7.2.1 ([41], Lema 11.10)**.** *Os pesos de uma representação irredutível μ são invariantes pelo grupo de Weyl $\mathcal{W}$.*

Observação: A ação de um elemento $r_\alpha \in \mathcal{W}$ sobre um peso $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ é dada por:

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{\langle \alpha, \lambda\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha \tag{7.3}$$

onde $\alpha \in \Sigma$ e λ é um peso de μ.

Vimos que os pesos da representação ρ são da forma $\mu_j - \sum n_i\alpha_i$ com n_i inteiros positivos (veja a Seção 6.2.1). Neste caso, os pesos obtidos do peso máximo μ_j subtraindo α_j e α são μ_j e

(i) $\mu_j - \alpha_j$. Este é o único peso da forma $\mu_j - \alpha$, $\alpha \in \Sigma$.

Lema 7.2.2 ([26], Lema 4.20)**.** *Se $\alpha \in \Sigma$ e $\mu_j - \alpha$ é um peso então $\langle \alpha, \mu_j\rangle \neq 0$.*

Prova: Se $\mu_j - \alpha$ é um peso então, pela fórmula (7.3), temos que:

$$r_\alpha(\mu_j - \alpha) = (\mu_j - \alpha) - 2\frac{\langle \mu_j - \alpha, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha.$$

Se $\langle \alpha, \mu_j\rangle = 0$ segue que $r_\alpha(\mu_j - \alpha) = \mu_j + \alpha$, que não pode ser um peso de ρ_j com peso máximo μ_j. Pelo Lema 7.2.1, segue que $\langle \alpha, \mu_j\rangle \neq 0$. □

Agora, como $\langle \alpha^\vee, \mu_j\rangle = 0$, para toda raiz $\alpha \neq \alpha_j$, a única possibilidade para que $\mu_j - \alpha$ seja peso é que $\alpha = \alpha_j$.

(ii) $\mu_j - \alpha_j - \alpha$, com $\langle \alpha, \alpha_j\rangle \neq 0$ e $\alpha \neq \alpha_j$.

Em primeiro lugar, $\alpha \neq \alpha_j$. Como $\langle \alpha_j^\vee, \mu_j\rangle = 1$, pela fórmula (7.3), temos que:

$$r_{\alpha_j}((\mu_j - \alpha_j) - \alpha_j) = (\mu_j - 2\alpha_j) - 2\frac{\langle \mu_j - 2\alpha_j, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}\alpha_j = \mu_j + \alpha_j.$$

Como $\mu_j + \alpha_j$ não pode ser peso, pelo Lema 7.2.1, segue $\mu_j - 2\alpha_j$ não pode ser peso.

Por outro lado, se $\alpha \neq \alpha_j$ então $\mu_j - \alpha_j - \alpha$ não é peso caso $\langle \mu_j - \alpha_j, \alpha\rangle = -\langle \alpha_j, \alpha\rangle = 0$. O argumento é semelhante aos anteriores. Se $\langle \mu_j - \alpha_j, \alpha\rangle = -\langle \alpha_j, \alpha\rangle = 0$, então pela equação (7.3):

$$r_{\alpha_j}((\mu_j - \alpha_j) - \alpha) = (\mu_j - \alpha_j - \alpha) - 2\frac{\langle \mu_j - \alpha_j - \alpha, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\alpha = \mu_j - \alpha_j + \alpha$$

que não é peso. Novamente pelo Lema 7.2.1, $-\langle \alpha_j, \alpha\rangle = \langle \mu_j - \alpha_j, \alpha\rangle \neq 0$.

Com isso, a única possibilidade que resta é quando $\alpha \neq \alpha_j$ e $\langle \alpha, \alpha_j\rangle \neq 0$. Neste caso, os funcionais do tipo $\mu_j - \alpha_j - i\alpha$ que são pesos são dados para $i = 0, 1, \ldots, p$ com $p = \langle \alpha^\vee, \alpha_j\rangle = 1, 2$ ou 3.

A multiplicidade m de um peso $\mu_j - \sum n_i\alpha_i$ (que corresponde à dimensão do espaço de pesos correspondente) é limitada pela quantidade de m-uplas $(m_1, \ldots, m_l)$ tais que $\mu_j - \sum n_i\alpha_i = \mu_j - \sum m_i\alpha_i$. Logo, a multiplicidade do peso $\mu_j - \alpha_j$ é 1 porque se $\mu_j - \alpha_j = \mu_j - \sum m_i\alpha_i$ então $\alpha_j = \sum m_i\alpha_i$ o que só é possível se a soma no segundo membro for α_j que é raiz simples. Do mesmo modo, a multiplicidade dos pesos $\mu_j - \alpha_j - i\alpha$, $i = 0, 1, 2, 3$ é 1.

7.2.2 Resultados

Para determinar $\sigma_{\alpha_j}^2 = \widetilde{\rho}_j^*(z_j^2)$, $\alpha_j \in \Sigma$, precisamos encontrar o seu valor em células de Schubert de dimensão 2, isto é, $\widetilde{\rho}_j^*(z_j^2)\left(\mathcal{S}_{r_\alpha r_\beta}\right) = z_j^2\left((\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_\alpha r_\beta})\right)$ para α, β raízes. Isto passa pelo cálculo de $(\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_\alpha r_\beta})$. Lembre que uma parametrização de $\mathcal{S}_{r_\alpha r_\beta}$ (veja a Proposição 1.2.9) é dada por

$$e^{sA_\alpha}e^{tA_\beta}\cdot b_0\,,\ (s,t) \in [0,\pi]^2,$$

com A_α e A_β elementos escolhidos em $\mathfrak{k}(\alpha) \subset \mathfrak{g}(\alpha)$ e $\mathfrak{k}(\beta) \subset \mathfrak{g}(\beta)$, respectivamente.

Se $\beta \neq \alpha_j$ então $\mathfrak{g}(\beta)$ está contido na isotropia da ação e, portanto, $\rho\left(e^{tA_\beta}\right)\cdot[v] = [v]$, onde v é o vetor de peso máximo μ_j. Com isto, $\rho(e^{sA_\alpha}e^{tA_\beta}\cdot b_0) = \rho(e^{sA_\alpha}\cdot b_0)$ tem dimensão no máximo um e, portanto, $(\widetilde{\rho}_j)_*\left(\mathcal{S}_{r_\alpha r_\beta}\right) = 0$. Assim, podemos tomar $\beta = \alpha_j$. Se r_α e r_{α_j} comutam então $(\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}) = (\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_{\alpha_j} r_\alpha}) = 0$ pois, sendo $\alpha \neq \alpha_j$, repete-se o caso acima.

Isso reduz ao cálculo de $(\widetilde{\rho}_j)_*\left(\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}\right)$ com $\langle \alpha, \alpha_j\rangle \neq 0$. Este cálculo será feito analisando separadamente as possíveis ligações entre as raízes simples α e α_j.

Proposição 7.2.3. *Suponha que $\langle \alpha^\vee, \alpha_j\rangle = -1$. Então sobre $\mathbb{Z}_2$ vale*

$$z_j^2\left((\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}})\right) = 1.$$

Prova: A idéia é escrever o conjunto $\widetilde{\rho}_j(e^{sA_\alpha}e^{tA_{\alpha_j}})\cdot[v]$ com v um vetor de peso máximo μ_j. Com a hipótese acima, os pesos que aparecem na representação de $\mathfrak{g}(\alpha, \alpha_j)$ são $\mu_j, \mu_j - \alpha_j, \mu_j - \alpha_j - \alpha$ sendo que $(\mu_j - \alpha_j - \alpha) - \alpha = \mu_j - \alpha_j - 2\alpha$ não é peso. Estes pesos têm multiplicidade 1. Pode-se tomar $w \neq 0$ no espaço de pesos de $\mu_j - \alpha_j$ tal que:

$$\widetilde{\rho}_j(e^{tA_{\alpha_j}})\cdot v = \cos t\cdot v + \operatorname{sen} t\cdot w.$$

Por outro lado, seja $u \neq 0$ no espaço de pesos de $\mu_j - \alpha_j - \alpha$. O espaço gerado por $\{v, w, u\}$ é invariante por $\widetilde{\rho}_j(e^{sA_\alpha})$ pois $\mu_j - \alpha_j - 2\alpha$ não é peso. Em relação a esta base (convenientemente normalizada),

$$\widetilde{\rho}_j(e^{sA_\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos s & -\operatorname{sen} s \\ & \operatorname{sen} s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\widetilde{\rho}_j(e^{sA_\alpha}e^{tA_{\alpha_j}}) \cdot [v]$ coincide com $\widetilde{\rho}_j(e^{sA_\alpha})e^{tB} \cdot [v]$ onde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

em relação à base $\{v, w, u\}$ visto que $e^{tB}(1,0,0) = \cos t \cdot v + \operatorname{sen} t \cdot w = \widetilde{\rho}_j(e^{tA_{\alpha_j}}) \cdot v$.

Segue que $\widetilde{\rho}_j(e^{sA_\alpha}e^{tA_{\alpha_j}}) \cdot [v]$ é a célula de dimensão 2 do espaço projetivo do espaço vetorial gerado por $\{v, w, u\}$. Consequentemente, $z_j^2\left((\widetilde{\rho}_j)_*\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}\right) = 1$. $\square$

Observação: Na demonstração acima, $\widetilde{\rho}_j(e^{tA_{\alpha_j}})$ pode não deixar invariante o subespaço gerado por $\{v, w, u\}$ (soma dos espaços de pesos $\mu_j, \mu_j - \alpha_j, \mu_j - \alpha_j - \alpha$). Mas, o que é necessário é a ação de $\widetilde{\rho}_j(e^{tA_{\alpha_j}})$ no espaço gerado por $\{v, w\}$ e esta ação coincide com a de e^{tB}.

Proposição 7.2.4. *Suponha que $\langle \alpha^\vee, \alpha_j \rangle = -2$. Então sobre $\mathbb{Z}_2$ vale*

$$z_j^2\left((\widetilde{\rho}_j)_*(\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}})\right) = 0.$$

Na demonstração, será utilizada a representação irredutível de dimensão 3 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ que é a própria representação adjunta.

Considere a seguinte base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nesta base, os colchetes são dados por $[H,X] = 2X$,$[X,Y] = 2H$ e $[H,Y] = -2Y$. O vetor de peso máximo para H é X e o de peso mínimo é Y.

Seja $K = \{Z : \operatorname{tr} Z^2 = 0\}$. Este conjunto apresenta as seguintes propriedades.

- É um cone formado por elementos nilpotentes.
- Os elementos interiores a K são matrizes com auto-valores imaginários puros e os elementos exteriores têm auto-valores reais.
- O seu eixo central é gerado pela matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- É invariante pela representação adjunta.

Para derivar estas propriedades, utilizamos uma outra base para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. As matrizes $\{A, H, S\}$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base para $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ e seus colchetes satisfazem

$$[H, A] = -2S\,,\ [H, S] = -2A\,,\ [S, A] = 2H.$$

Agora, seja $Z = aA + bH + cS$. Segue que

$$Z^2 = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 - a^2 & 0 \\ 0 & b^2 + c^2 - a^2 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $K = \{Z = aA + bH + cS : a^2 = b^2 + c^2\}$ é um cone formado por matrizes nilpotentes. Mais ainda, o polinômio característico é dado por $p_Z(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(Z)\lambda + \det Z = \lambda^2 - (b^2 + c^2 - a^2)$. Logo, os elementos no interior de K tem autovalores imaginários puros ($\lambda^2 < 0$) e os elementos fora de K tem autovalores reais ($\lambda^2 > 0$). O eixo central deste cone ocorre na direção do eixo de coordenadas a, ie, na direção da matriz

$$B = (-1)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, observe que, na base $\{A, H, S\}$

$$\mathrm{ad}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\,,\ \mathrm{ad}H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\ \mathrm{ad}S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Disto temos que se $Z = aA + bH + cS$ então

$$\mathrm{ad}Z = \begin{pmatrix} 0 & 2c & -2b \\ 2c & 0 & -2a \\ -2b & 2a & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}Z)^2 = 8(b^2 + c^2 - a^2)$ e K é invariante pela representação adjunta.

Note que na base $\{A, H, S\}$, os elementos $X, Y \in K$ são representados como

$$X = \frac{1}{2}(-A + S) \quad \text{e} \quad Y = \frac{1}{2}(A + S)\,.$$

Considere a órbita $\exp(t\mathrm{ad}B) \cdot X$ de B que passa pelo vetor de peso máximo X. Esta órbita é uma circunferência C com centro em $\frac{1}{2}B$ que passa por X e $-Y$. Tal circunferência

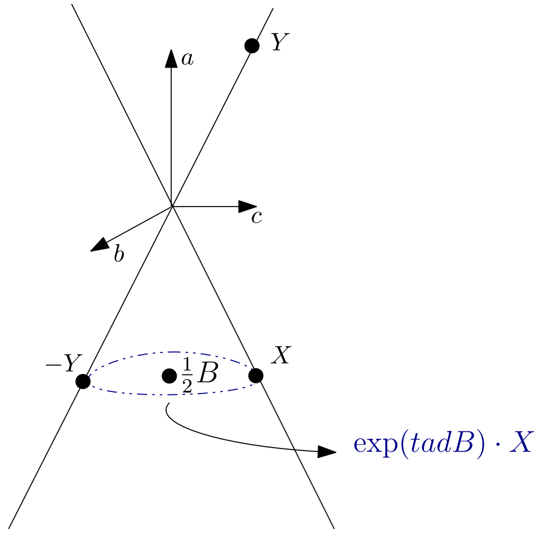

Figura 7.1: *A órbita* $\exp(tA)\cdot X$ *em* K

é igual a interseção do cone K com o plano P perpendicular a $\frac{1}{2}B$ que passa por X. Isto pode descrito também em coordenadas. Dado que $X = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ no sistema de coordenadas (a, b, c), neste mesmo sistema temos que

$$\exp(t\mathrm{ad}B)\cdot X = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\mathrm{sen}2t}{2}, \frac{\cos 2t}{2}\right).$$

Em particular, $\exp(\pi\mathrm{ad}B)\cdot X = X$.

Um ponto central da demonstração é que a imagem da circunferência no plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ é contrátil. De fato, o conjunto de circunferências

$$\exp(t\mathrm{ad}B)\cdot\left(\frac{1}{2}B + r(X - \frac{1}{2}B)\right)$$

com centro em $\frac{1}{2}B$ e raio r variando entre 0 e 1 se projetam em $\mathbb{R}P^2$ definindo uma homotopia entre a circunferência original $(r = 1)$ e um ponto $(r = 0)$.

Agora, vamos utilizar a hipótese de que $\langle\alpha_j, \alpha^\vee\rangle = -2$ para construir uma representação irredutível de dimensão 3 da subálgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{g}(\alpha)$ no espaço da representação V de peso máximo μ_j. Com isto, os elementos X, H e Y serão identificados via esta representação e a órbita construída acima poderá ser vista dentro de V a partir da representação (que é a representação adjunta). Com isto, a imagem da célula de Schubert será calculada diretamente. O ponto crucial é que a homotopia entre a órbita e um ponto no espaço projetivo permitirá obter uma outra homotopia entre a imagem da célula de Schubert no espaço projetivo da representação com uma célula de dimensão 1 a partir da qual concluiremos que o representante da 2-cohomologia do $\mathbb{R}P^3$ sobre a imagem da célula de Schubert é zero.

Considere a representação com peso máximo μ_j. Vimos que $\mu_j - \alpha_j$ é o único peso da forma $\mu_j - n\alpha$, $n \geq 1$, com $\alpha \in \Sigma$ e possui multiplicidade 1.

Subtraindo $\alpha \neq \alpha_j$, como $\langle \alpha_j, \alpha^\vee \rangle = -2$ segue que $\mu_j - \alpha_j - \alpha$ e $\mu_j - \alpha_j - 2\alpha$ são pesos da representação. Considere $\mathfrak{g}(\alpha) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{R}H_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ e tome $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ e $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ normalizados tal que $A_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha$. Se V_λ representa o espaço associado ao peso λ então $0 \neq \widetilde{\rho}_j(Y_\alpha)V_{\mu_j-\alpha_j} \subset V_{\mu_j-\alpha_j-\alpha}$ e $0 \neq \widetilde{\rho}_j(Y_\alpha)^2 V_{\mu_j-\alpha_j} \subset V_{\mu_j-\alpha_j-2\alpha}$ e o subespaço

$$W = V_{\mu_j-\alpha_j} \oplus \widetilde{\rho}_j(Y_\alpha)V_{\mu_j-\alpha_j} \oplus \widetilde{\rho}_j(Y_\alpha)^2 V_{\mu_j-\alpha_j}$$

tem dimensão 3 e é invariante por $\mathfrak{g}(\alpha)$ de tal forma que a representação de $\mathfrak{g}(\alpha) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ é irredutível (observe que $\widetilde{\rho}_j(Y_\alpha)^3 V_{\mu_j-\alpha_j} = 0$ pois $\langle \alpha^\vee, \mu_j \rangle = -2$).

Desta forma, a representação de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ em W é equivalente à representação adjunta. Para facilitar a notação é conveniente pensar $W = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ e tomar a base de W como sendo X, H e Y com $X \in V_{\mu_j-\alpha_j}$ (peso máximo para H), $H \in \widetilde{\rho}_j(Y_\alpha)V_{\mu_j-\alpha_j}$ (peso nulo) e $Y \in \widetilde{\rho}_j(Y_\alpha)^2 V_{\mu_j-\alpha_j}$ (peso mínimo).

Observe que com a notação acima, a órbita $\exp(t\mathrm{ad}B) \cdot X$ é dada por $\widetilde{\rho}_j(e^{tA_\alpha})X$.

Prova: A célula de Schubert $\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}} = e^{sA_\alpha}e^{tA_{\alpha_j}} \cdot b_0$, com $(s,t) \in [0,\pi]^2$ tem sua imagem por $\widetilde{\rho}_j$ no espaço projetivo da representação dada por

$$\widetilde{\rho}_j\left(e^{sA_\alpha}\right)\widetilde{\rho}_j\left(e^{tA_{\alpha_j}}\right) \cdot [v]$$

onde v é o vetor de peso máximo μ_j. Então, como X é um vetor no espaço de peso $V_{\mu_j-\alpha_j}$, como já foi calculado

$$\widetilde{\rho}_j\left(e^{tA_{\alpha_j}}\right) \cdot v = (\cos t)v + (\mathrm{sen} t)X.$$

Disto temos que $\widetilde{\rho}_j(\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}) = \widetilde{\rho}_j\left(e^{sA_\alpha}\right)((\cos t)v + (\mathrm{sen} t)X)$. Note que $\widetilde{\rho}_j\left(e^{sA_\alpha}\right) \cdot v = v$. De fato, como $\mu_j - \alpha$ não é peso da representação tem-se que $\widetilde{\rho}_j(Y_\alpha) \cdot v = 0$ e $\widetilde{\rho}_j(X_\alpha) \cdot v = 0$ pois v é vetor de peso máximo. Portanto, se $p : W \to \mathbb{P}W$ denota a projeção do espaço vetorial W em seu espaço projetivo então

$$\widetilde{\rho}_j\left(\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}\right) = p\left(\cos t \cdot v + \mathrm{sen} t \cdot \widetilde{\rho}_j\left(e^{sA_\alpha}\right)X\right) \quad , \quad (s,t) \in [0,\pi]^2. \tag{7.4}$$

Agora, pode-se considerar a homotopia mencionada acima, dada a ocorrência da órbita $\widetilde{\rho}_j\left(e^{sA_\alpha}\right)X$ no espaço projetivo da representação, definindo-se a aplicação $f : [0,\pi]^2 \times [0,1] \to V$ por

$$((s,t),r) \overset{f}{\mapsto} \cos t \cdot v + \mathrm{sen} t \cdot \widetilde{\rho}_j\left(e^{sA_\alpha}\right)\left(\frac{1}{2}B + r(X - \frac{1}{2}B)\right)$$

onde B é o elemento de W que corresponde ao elemento $A = X - Y \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Observe as seguintes propriedades da projeção de f por p, isto é, pf.

(1) $pf(s,t,1) = \widetilde{\rho}_j\left(\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}\right)$.

Segue facilmente pela equação (7.4).

(2) $pf(s,t,0)$ se degenera a uma circunferência.

Note que $f(s,t,0) = \cos t \cdot v + \mathrm{sen} t \cdot \widetilde{\rho}_j \left(e^{sA_\alpha}\right) \left(\frac{1}{2}B\right)$. Agora, como $\widetilde{\rho}_j \left(e^{sA_\alpha}\right) \left(\frac{1}{2}B\right) = \left(\frac{1}{2}B\right)$,

$$f(s,t,0) = \cos t \cdot v + \mathrm{sen} t \cdot \left(\frac{1}{2}B\right).$$

Portanto, segue que a semi-circunferência $\cos t \cdot v + \mathrm{sen} t \cdot \left(\frac{1}{2}B\right)$ (observe que $t \in [0,\pi]$) se degenera a uma circunferência no espaço projetivo $\mathbb{P}W$.

(3) Para cada $r \in [0,1]$ fixo, $pf(\cdot,\cdot,r)$ define uma aplicação da célula de Schubert $\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}$ no espaço projetivo também denotada por pf.

A aplicação de colagem $\psi : [0,\pi]^2 \to \mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}$, $\psi(s,t) = e^{sA_\alpha} e^{tA_{\alpha_j}} \cdot b_0$ apresenta a célula de Schubert como $\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}} = [0,\pi]^2 / \sim_\psi$, onde $\sim_\psi$ é a relação de equivalência definida por ψ, isto é, $(s_1,t_1) \sim_\psi (s_2,t_2)$ se, e só se, $\psi(s_1,t_1) \sim \psi(s_2,t_2)$.

Para cada r fixo, a aplicação $pf(s,t,r)$ está definida em princípio em $[0,\pi]^2$. No entanto, ela passa ao quociente definindo uma aplicação com domínio em $\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}} = [0,\pi]^2 / \sim_\psi$ pois, para cada r fixo, na fronteira de $[0,\pi]^2$ tem-se que:

- $f(0,t,r) = f(\pi,t,r)$.

  Segue direto do fato de que $\widetilde{\rho}_j \left(e^{\pi A_\alpha}\right) = \mathrm{id}h$ pois

$$\begin{aligned} f(\pi,t,r) &= \cos t \cdot v + \mathrm{sen} t \cdot \widetilde{\rho}_j \left(e^{\pi A_\alpha}\right) \left(\frac{1}{2}B + r(X - \frac{1}{2}B)\right) \\ &= \cos t \cdot v + \mathrm{sen} t \cdot \left(\frac{1}{2}B + r(X - \frac{1}{2}B)\right) \\ &= f(0,t,r). \end{aligned}$$

  E, portanto, são iguais no espaço projetivo.

- $pf(s,0,r) = pf(s,\pi,r) = [v]$.

Portanto, na fronteira de $[0,\pi]^2$ e para cada r, $pf(s_1,t_1,r) = pf(s_2,t_2,r)$ implica que $\psi(s_1,t_1) \sim \psi(s_2,t_2)$. Como ψ é homeomorfismo no interior, pf passa ao quociente definindo de fato uma aplicação em $\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}} = [0,\pi]^2 / \sim_\psi$.

Portanto, existe uma homotopia entre $\widetilde{\rho}_j = pf(\cdot,\cdot,1) : \mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}} \to \mathbb{P}V$ e $pf(\cdot,\cdot,0)$. Estas duas aplicações induzem a mesma aplicação na homologia e na cohomologia. Como $pf(\cdot,\cdot,0)$ é trivial na 2-cohomologia, segue $\widetilde{\rho}_j^*(z_j^2)\left(\mathcal{S}_{r_\alpha r_{\alpha_j}}\right) = 0$.

□

As duas proposições anteriores fornecem a seguinte proposição.

Teorema 7.2.5. *Se nenhuma das componentes do grupo é do tipo G_2 e o anel de coeficientes $R = \mathbb{Z}_2$ então vale que*

$$\sigma_{\alpha_j}^2 = \widetilde{\rho}_j^*(z_j^2) = \sum\{\sigma_{r_\alpha r_{\alpha_j}} : \langle \alpha^\vee, \alpha_j \rangle = -1\}.$$

7.2.3 O *Flag* Maximal de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$

As raízes simples são α e β e, portanto, a $\mathbb{Z}_2$-cohomologia é gerada por $\sigma_\alpha = \sigma_{r_\alpha}$ e $\sigma_\beta = \sigma_{r_\beta}$. Pelo Teorema 7.2.5, $\sigma_\alpha^2 = \sigma_{r_\beta r_\alpha}$ e $\sigma_\beta^2 = \sigma_{r_\alpha r_\beta}$. A involução principal é $w_0 = r_\alpha r_\beta r_\alpha = r_\beta r_\alpha r_\beta$. Neste caso, pela Proposição 6.1.5, $\sigma_{w_0} = \sigma_{r_\beta r_\alpha}\sigma_\beta = \sigma_{r_\alpha r_\beta}\sigma_\alpha$, pois $\mathbb{F} = \mathcal{S}_{w_0}$. Pelas expressões de $\sigma_{r_\beta r_\alpha}$ e $\sigma_{r_\alpha r_\beta}$, segue que $\sigma_{w_0} = \sigma_\alpha^2\sigma_\beta = \sigma_\alpha\sigma_\beta^2$.

Isto exibe todos os elementos básicos com produtos de elementos de dimensão 1.

Como complemento, a Proposição 6.1.5 nos fornece as seguintes restrições: em $\mathcal{S}_{r_\beta r_\alpha}$, $\bar\sigma_{r_\beta r_\alpha} = \bar\sigma_\beta\bar\sigma_\alpha$ enquanto em $\mathcal{S}_{r_\alpha r_\beta}$, $\bar\sigma_{r_\alpha r_\beta} = \bar\sigma_\alpha\bar\sigma_\beta$. Isto significa que $\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_\beta\sigma_\alpha$ tem componente tanto na direção de $\sigma_{r_\beta r_\alpha}$ quanto de $\sigma_{r_\alpha r_\beta}$. Logo, $\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_{r_\beta r_\alpha} + \sigma_{r_\alpha r_\beta}$ e obtemos que

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2.$$

Com as notações da seção anterior, ρ_1 é a representação canônica em $\mathbb{R}^3$. Com isso, $\rho_1^*(z_1) = \sigma_\alpha$, $\rho_1^*(z_1^2) = \sigma_\alpha^2 = \sigma_{r_\beta r_\alpha}$ e $\rho_1^*(z_1^3) = \sigma_{r_\beta r_\alpha}\sigma_\alpha = 0$ pois $z_1^3 = 0$ neste caso. Pelo mesmo motivo obtemos que $\sigma_\beta^3 = 0$.

Portanto, concluímos que se $\mathbb{F}$ é a variedade *flag* maximal de A_2 então $H^*(\mathbb{F},\mathbb{Z}_2)$ é gerado por σ_α e σ_β e vale que:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha\sigma_\beta &= \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 && (7.5)\\ \sigma_\alpha^3 &= 0 && (7.6)\\ \sigma_\beta^3 &= 0 && (7.7)\end{aligned}$$

Estas são as únicas relações em $H^*(\mathbb{F},\mathbb{Z}_2)$ as quais concidem com a encontrada na tese de Mare [34], equações (2.19) e (2.23), onde temos que

$$H^*(\mathbb{F},\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega_1,\omega_2]/\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_1\omega_2, \omega_1^3, \omega_2^3\right).$$

Referências Bibliográficas

[1] Arango, C.A.M., Homologia de Morse em Variedades Compactas, Dissertação de Mestrado, USP (2004).

[2] Berstein, I. N., Gel'fand, I.M., Gel'fand, S.I., Schubert Cells and Cohomology of Spaces G/P, Russ. Math. Surv. **28** 1-26 (1973).

[3] Biss, D., Guilemin, V.W., Holm, T.S. The mod 2 cohomology of fixed point sets of anti-simplectic involutions. Adv. Math., **185**, 370-399 (2004).

[4] Borel, A., Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math. (2) 57, 115-207; MR 14 490 (1953).

[5] Borel, A., Topics in the Homology Theory of Fibre Bundles: lectures given at the University of Chicago, 1954. Lecture notes in mathematics (36), Springer-Verlag (1967).

[6] Bott, R., Samelson, H., Applications of theory of Morse to symmetric spaces, Amer.J. Math., **LXXX** 964-1029 (1958).

[7] Braga, C., Conjuntos Controláveis e Conjuntos Controláveis por Cadeias para ações de semigrupos, Tese de Doutorado, Unicamp (1995).

[8] Bruhat, F., Sur les representations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France **84**, 97-205 (1954).

[9] Bredon, G. E., Topology and Geometry, Springer, (1991).

[10] Brion, M., Lectures on the Geometry of Flag Varieties. Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties. Trends in Mathematics, Birkhäuser, (2005).

[11] Chevalley, C., Sur certains groups simples, Tohoku Math. **7** (1955).

[12] Casian, L., Stanton, R.J., Schubert cells and Representation Theory. Invent. Math. **137** no.3, 461 - 539 (1999).

[13] Casian L., Kodama, Y., Toda Lattice, Cohomology of compact Lie groups and Finite Chevalley groups. Invent.Math. **165** no.1, 163-208. (2006)

[14] Casian L., Kodama, Y., Cohomology of real Grassmann manifold and KP Flow, arXiv:1011.2134 (2010).

[15] Chevalley, C., Sur les decompositions cellulaires des espaces G/B. Proceedings of Symposiain Pure Mathematics 56, Amer.Math.Soc., Providence, 1-25 (1994).

[16] Demazure, M., Désingularisation des variétés de Schubert génerelisées, Ann. Sci. de l'ENS, 7(1), 53-88 (1973).

[17] Deodhar, V. V., Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of relative Möbius function. Invent. Math. **39**, 187-198 (1977).

[18] Deodhar, V. V., On Bruhat ordering and weight-lattice ordering for a Weyl group. American J. Math. (1978).

[19] Duan, H., The degree of a Schubert variety, Adv. Math., **180**, 112-133 (2003)

[20] Duan, H., The multiplicative rule of Schubert classes, Invent. Math. **159**, 407-436 (2005).

[21] Duan, H., Zhao, X., A unified formula for Stenrood Operations in flag manifolds. Compos. Math. **143**, no.1, 257-270 (2007).

[22] Duistermaat, J.J., Convexity and Tightness for Restrictions of Hamiltonian Functions to Fixed Point Sets of an Antisymplectic Involution, Trans. American Math. Society, Vol. 275, No. 1, 417-429 (1983).

[23] Duistermat, J.J., Kolk, J.A.C., Varadarajan, V.S.: Functions, Flows and oscilatory integral on flag manifolds. Compositio Math. 49, 309-398 (1983).

[24] Ehresmann, C., Sur la topologie de certaines varietés algébriques réelles. J. Math. Pures Apl. **16** (9), 69-100 (1937).

[25] Gorodski, C., Thorbergsson, G., Cycles of Bott-Samelson type for taut representations. Annals of Global Analysis and Geometry, Vol.21(3), pp.287-302 (2002).

[26] Guivarc'h, Y., Ji,L., Taylor,J.C., Compactifications of Symmetric Spaces. Birkhauser, Progr.Math. 156 (1998).

[27] Hacther, A. T., Algebraic Topology. Cambridge University Press (2002).

[28] Helgason, S., Diferential geometry, Lie groups and symmetric spaces. Ac. Press (1978).

[29] Humpreys, J. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. New York: Springer-Verlag (1972).

[30] Humphreys, J.E., Reflection Groups and Coxeter Groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29, Cambridge University Press, (1990).

[31] Husemoller, D., Fibre Bundles, Graduate Texts in Mathematics **20**. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1975).

[32] Knapp, A.W., Lie Groups beyond an introduction, Second Edition, Birkhäuser (2004).

[33] Kocherlakota, R.R., Integral Homology of real flag manifolds and loop spaces of symmetric spaces. Adv. Math **110**, 1-46 (1995).

[34] Mare, A-L., Topology of Isotropy Orbits, Doctoral Dissertation, University of Augsburg (1998).

[35] Lusztig, G., Bruhat decomposition and Applications. arxiv:1006.5004v1 (2010).

[36] Mitchell, S. A., Parabolic Orbits in flag varieties, preprint.

[37] Patrão, M., San Martin, L. A. B, Santos, L., Seco, L., Orientability of vector bundles over real flag manifolds, (aceito) Topology and its applications (2012).

[38] Patrão, M., San Martin, L.A.B., Seco, L.: Stable manifolds and Conley index for flows in flag bundles, Dynamical Systems, v. 24, 249-276 (2009).

[39] Patrão, M., Seco, L., A dinâmica das translações em Variedades Flag, Livro (em preparação).

[40] Pragacz, P., Multiplying Schubert Classes. Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties - Trends in Mathematics, Birkhäuser, 163-174 (2005).

[41] San Martin, L. A. B., Order and Domains of Attraction of Control Sets in Flag Manifolds, Journal of Lie Theory, Vol. 8, No. 2, 335-350. (1998).

[42] San Martin, L.A.B., Álgebras de Lie, Ed. Unicamp (2010).

[43] Seco, L., A note on the Bruhat decomposition of semi-simple Lie Groups, J. Lie Theory Vol. 18, 725-731 (2008).

[44] Warner, G., Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups I, Springer Verlag (1972).

[45] Wiggerman, M., The fundamental group of real flag manifolds, Indag. Mathem. N.S. (1), 141-153 (1998).