DISTRIBUIÇÃO EXATA DO DETERMINANTE
DA MATRIZ DE WISHART

PAULO ROBERTO MENDES GUIMARÃES

Orientador:
Prof. Dr. PUSHPA NARAYAN RATHIE

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

Outubro/1980

Aos meus pais e à Selene,

com carinho.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Rathie, pela dedicada orientação e pela grata satisfação durante este trabalho.

- Ao CNPq, pela bolsa de estudos concedida para a conclusão dessa pesquisa.

- Ao Abílio, à Lúcia e às crianças, pelo incentivo e afetuosa acolhida em Campinas.

- Aos amigos Dino, Ezaíra, Ronaldo e Eduardo, pelo carinho que sempre me tiveram.

- Ao Camões, à Vera e à Carolina, pela sempre alegre e inesquecível convivência.

- Aos meus amigos.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Uma das intenções que tivemos neste trabalho foi a de apresentar e desenvolver a utilização das transformadas de Mellin, juntamente com a teoria dos resíduos, como uma técnica para a obtenção da distribuição exata do determinante da matriz de Wishart, $|D|$, a partir de seus momentos.

Um problema que surgiu, de imediato, foi quanto à unicidade da função densidade determinada através da transformada inversa de Mellin da função geradora de momentos do determinante de D.

Stieltjes, já em (1920-1921), desenvolveu condições de regularidade para que a função geradora de momentos seja um-a-um com a função densidade, ao que ele chamou de "problema dos momentos". Também nesse sentido temos o critério de Carlemann.

A utilização desses critérios não permitiu que pudéssemos confirmar que os momentos de $|D|$ definiriam uma única função de densidade. Mas J.A. Cordeiro (1980), em "Distribuições Exatas de Testes de Hipóteses Multivariados" (a ser publicada), prova que a transformada de Mellin define uma relação um-a-um com as distribuições que a definem.

Assim, como temos a existência da transformada inversa de Mellin de $E|D|^h$, podemos afirmar que ela determina uma única função de densidade e então buscamos determinar a expressão - dessa função em termos de função G e em séries.

Apresentaremos neste trabalho, dividido em quatro capítulos, a distribuição exata do determinante da matriz de Wishart, $|D|$.

No capítulo I, discorremos sobre a distribuição de Wishart, citando alguns teoremas importantes ligados a essa distribuição. Dentre esses teoremas temos aquele que é o motivo do nosso trabalho e que pode ser visto em [14, pág. 83]. Ainda neste capítulo damos a expressão sobre o h-ésimo momento natural da variável aleatória $|D|$.

No capítulo II falamos sobre o método utilizado para obtermos a distribuição exata de $|D|$. Esse método é a transformada de Mellin (bem como a transformada inversa de Mellin) em analogia com o h-ésimo momento, que atualmente está sendo bastante utilizado para obtenção de algumas distribuições exatas. Temos ainda neste capítulo, as expressões da função densidade de probabilidade e da função de distribuição acumulada, exatas, de $|D|$, em termos de função G-hipergeométrica generalizada de Meijer. Também achamos alguns casos particulares para a função densidade que podem ser obtidos em termos de funções de Bessel.

No capítulo III expressamos essas mesmas funções, em séries razoavelmente computáveis. Para isso, usamos o método da transformada inversa de Mellin com a ajuda da teoria dos resíduos. Também neste capítulo, achamos alguns casos particulares para a função densidade e comparamos com as obtidas no capítulo II.

No capítulo IV damos uma relação de resultados que, direta ou indiretamente, foram utilizados por nós na obtenção das expressões da função densidade e função acumulada, exatas, da variável $|D|$. Entre esses resultados temos as funções especiais Gama, Psi e Zeta, bem como algumas propriedades de cada uma delas. Temos também algumas funções modificadas de Bessel e, ainda, a função G-hipergeométrica generalizada de Meijer.

CAPÍTULO I

DISTRIBUIÇÃO WISHART

Neste capítulo, vamos mostrar a função densidade de probabilidade da matriz de Wishart, D, e também veremos alguns teoremas importantes ligados a essa distribuição.

1.1) FUNÇÃO DENSIDADE DA MATRIZ DE WISHART

Seja $D : pxp$ uma matriz simétrica definida positiva. Dizemos que D tem distribuição Wishart p-dimensional com matriz escala $\Sigma : pxp$ e n graus de liberdade, $n \geq p$, se a densidade conjunta dos elementos de D é dada por

$$(1.1.1) \quad f(D) = \begin{cases} \dfrac{C(p,n)}{|\Sigma|^{n/2}} \, |D|^{(n-1-p)/2} \, e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Sigma^{-1} D}, & D > 0, \ \Sigma > 0 \\ 0 \ , & \text{outros} \end{cases}$$

onde

$$(1.1.2) \quad \frac{1}{C(p,n)} = 2^{np/2} \, \pi^{p(p-1)/4} \prod_{k=1}^{p} \Gamma\{(n+1-k)/2\}$$

e, cuja notação é $D \sim W_p(\Sigma, n)$.

Se $n < p$ a distribuição é singular e a função densidade não existe.

1.2) ALGUNS TEOREMAS SOBRE DISTRIBUIÇÃO WISHART

Vejamos os seguintes teoremas, cujas provas podem ser encontradas na bibliografia indicada ao final de nosso trabalho, para podermos sentir como aparece a distribuição Wishart, em vários casos. Por eles também se pode notar como é grande a utilização desta distribuição na estatística.

TEOREMA 1: Seja $X : p\text{x}n$, $n \geq p$, uma amostra aleatória de tamanho n onde

$$X_i \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma), \quad i = 1,2,\ldots,n, \text{ independentes.}$$

Então a função densidade da matriz simétrica

$$D = (X-\underline{\mu}E_{1n})\ (X-\underline{\mu}E_{1n})'$$

é dada por (1.1.1) e E_{1n} é um vetor 1xn com todos os elementos iguais a 1.

Para a distribuição da covariância amostral nós temos o seguinte

TEOREMA 2: Seja $X : p\text{x}N$, $N \geq p+1$, uma amostra aleatória de tamanho N, com

$$X_i \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma), \quad i = 1,2,\ldots,N, \quad \text{independentes.}$$

Seja

$$D = \sum_{i=1}^{N} (X_i-\bar{X})\ (X_i-\bar{X})' = XX'-N\bar{X}\bar{X}'$$

onde

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Então

$$D \sim W_p(\Sigma, n) \quad \text{onde} \quad n = N-1.$$

Vejamos agora um teorema bastante importante para nós, pois foi a partir dele que desenvolvemos este trabalho. Ele também nos permite chegar a expressão dos momentos naturais de $|D|$.

TEOREMA 3: Seja $D \sim W_p(\Sigma, n)$. Então

$$|D| = |\Sigma| \prod_{k=1}^{p} X_k$$

onde os X_k's são independentemente distribuídos, sendo

$$X_k \sim \chi^2_{n-k+1}$$

Assim, podemos escrever diretamente

$$|W| = \frac{|D|}{|\Sigma|} = \prod_{k=1}^{p} X_k$$

e, como citam Srivastava e Khatri em [14, pág. 83], a expressão para a função densidade de probabilidade de $|W|$ só é conhecida para alguns casos muito particulares de p sendo que eles, inclusive pela dificuldade do cálculo, só calculam essa expressão para p=2. Citam ainda a expressão geral para o h-ésimo momento de $|W|$ que é dada por

TEOREMA 4:

$$(1.2.1) \qquad E(|W|^h) = \int_{W>0} \frac{|W|^{\frac{1}{2}(n-1-p)+h} \; e^{-\frac{1}{2}\text{tr } W}}{2^{np/2} \; \Gamma_p(n/2)} \, dW$$

ou ainda

$$(1.2.2) \qquad E(|W|^h) = 2^{hp} \frac{\Gamma_p(h+n/2)}{\Gamma_p(n/2)}$$

onde

$$(1.2.3) \qquad \Gamma_p(\alpha) = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{k=1}^{p} \Gamma\{\alpha-(k-1)/2\}$$

Este resultado (1.2.2) pode ser estendido para h-complexo desde que $R(h) > -(n-p+1)/2$.

Assim, a expressão geral do h-ésimo momento natural de $|D|$ pode ser obtida diretamente de (1.2.2) e será

$$(1.2.4) \qquad E(|D|^h) = 2^{hp} \frac{|\Sigma|^h \prod_{k=1}^{p} \Gamma\{h+(n+1-k)/2\}}{\prod_{k=1}^{p} \Gamma\{(n+1-k)/2\}}$$

onde $R(h) > -(n+1-p)/2$.

Precisamos dessa expressão uma vez que vamos achar a distribuição de $|D|$, para qualquer p, a partir de seus momentos, e utilizando as definições de transformada de Mellin e transformada da inversa de Mellin, como veremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO II

DISTRIBUIÇÃO EXATA EM TERMOS DE FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS

Neste capítulo, vamos achar as expressões exatas da função densidade de probabilidade e função distribuição acumulada de $|D|$, em termos de funções hipergeométricas. Também calcularemos alguns casos particulares para essas funções em termos de funções de Bessel.

2.1) INTRODUÇÃO

Como dissemos ao final do capítulo anterior, vamos partir da expressão do h-ésimo momento dado em (1.2.4) para podermos achar a distribuição de $|D|$.

Seja $f(x)$ a função densidade de probabilidade da variável aleatória $|D|$, $|D| > 0$. Então, o $(s-1)$-ésimo momento natural de $|D|$ é dado por

$$(2.1.1) \qquad E(|D|^{s-1}) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx, \qquad R(s) > 0$$

Assim, fazendo uma analogia com a definição de transformada de Mellin (ver [17, pág. 7]) podemos dizer que $E(|D|^{s-1})$ é a transformada de Mellin da função densidade, $f(x)$, da variável aleatória $|D|$.

Usando a definição de transformada inversa de Mellin (ver [17, pág. 46]), podemos escrever

$$(2.1.2) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L x^{-s} E(|D|^{s-1})\, ds\ , \qquad R(s) > 0$$

de modo que L seja um contorno que inclui todos os polos de $E(|D|^{s-1})$ e $i = \sqrt{-1}$.

De (1.2.4) podemos escrever diretamente

$$(2.1.3) \qquad E(|D|^{s-1}) = 2^{(s-1)p} \, |\Sigma|^{s-1} \frac{\prod_{k=1}^{p} \Gamma\{s+(n-1-k)/2\}}{\prod_{k=1}^{p} \Gamma\{(n+1-k)/2\}}$$

onde $R(s) > -(n-1-p)/2$.

Assim, por (2.1.2) temos que

$$(2.1.4) \qquad f(x) = C_p \frac{1}{2\pi i} \int_L z^{-s} \prod_{k=1}^{p} \Gamma\{s+(n-1-k)/2\} \, ds$$

onde

$$(2.1.5) \qquad 1/C_p = 2^p \, |\Sigma| \prod_{k=1}^{p} \Gamma\{(n+1-k)/2\}$$

e

$$(2.1.6) \qquad z = x \, 2^{-p} \, |\Sigma|^{-1}$$

sendo

(2.1.7) L um contorno que inclui todos os polos de

$$\prod_{k=1}^{p} \Gamma\{s+(n-1-k)/2\} .$$

2.2) FUNÇÃO DENSIDADE E FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA EM TERMOS DE FUNÇÃO G

Utilizando, agora, a definição de função G-hipergeométrica generalizada de Meijer dada em (4.2.2), podemos escrever

$$(2.2.1)\quad f(x) = C_p\, G^{p,0}_{0,p}\left[z\,\middle|\,(n-2)/2,\ (n-3)/2,\ldots,(n-p-1)/2\right],\quad z > 0$$

com C_p e z definidos anteriormente.

A função distribuição acumulada de $|D|$ é dada por

$$F(x) = C_p \int_0^x G^{p,0}_{0,p}\left[y2^{-p}\,|\Sigma|^{-1}\,\middle|\,(n-2)/2,\ (n-3)/2,\ldots,(n-p-1)/2\right]dy \qquad x > 0,\quad y > 0$$

onde, fazendo a transformação $y = xt$, temos

$$F(x) = C_p x \int_0^1 G^{p,0}_{0,p}\left[tx2^{-p}|\Sigma|^{-1}\,\middle|\,(n-2)/2,\ (n-3)/2,\ldots,(n-p-1)/2\right]dt$$

Utilizando, aqui, (4.2.8), teremos a expressão final para a função de distribuição de $|D|$ que é dada por

$$(2.2.2)\quad F(x) = C_p x\, G^{p,1}_{1,p+1}\left[z\,\middle|\,{0 \atop (n-2)/2,(n-3)/2,\ldots,(n-p-1)/2,-1}\right] \qquad z > 0$$

com C_p e z definidos anteriormente.

2.3) CASOS PARTICULARES

Estudaremos, aqui, f(x) para $p=2$ e $p=4$, pois nesses casos a expressão de f(x) pode ser dada em termos de funções de Bessel, como veremos adiante.

Para $p=2$ e utilizando (2.2.1), temos

$$(2.3.1)\quad f(x) = C_2\, G^{2,0}_{0,2}\left[z\,\middle|\,(n-2)/2,\ (n-3)/2\right]$$

onde, por (2.1.6), temos

(2.3.2) $\quad z = x\, 2^{-2}\, |\Sigma|^{-1}$

e, por (2.1.5), temos

(2.3.3) $\quad 1/C_2 = 2^{4-n}\, |\Sigma|\, \pi^{1/2}\, \Gamma(n-1)$

e, utilizando agora (4.2.5), podemos escrever

(2.3.4) $\quad G_{0,2}^{2,0}\left[z \,|\, (n-2)/2,\ (n-3)/2 \right] = 2\, z^{(2n-5)/4}\, K_{1/2}\, (2\, z^{1/2})$

onde $K_{1/2}(.)$ ê a função modificada de Bessel dada em (4.1.25).

Assim, de (2.3.1) e usando (2.3.4) teremos

(2.3.5) $\quad f(x) = C_2\, 2^{3-n}\, (x|\Sigma|^{-1})^{(n-3)/2}\, \pi^{1/2}\, e^{-(x|\Sigma|^{-1})^{1/2}}$

ou, ainda,

(2.3.6) $\quad f(x) = \{2\, |\Sigma|\, \Gamma(n-1)\}^{-1} (x|\Sigma|^{-1})^{(n-3)/2}\, e^{-(x|\Sigma|^{-1})^{1/2}}$

Para p=4, e utilizando (2.2.1), temos

(2.3.7) $\quad f(x) = C_4\, G_{0,4}^{4,0}\left[z \,|\, (n-2)/2,\ (n-3)/2,\ (n-4)/2,\ (n-5)/2 \right]$

onde, por (2.1.6), temos

(2.3.8) $\quad z = x\, 2^{-4}\, |\Sigma|^{-1}$

e, por (2.1.5), temos

(2.3.9) $\quad 1/C_4 = 2^{10-2n}\, |\Sigma|\, \pi\, \Gamma(n-1)\, \Gamma(n-3)$

e, por (4.2.6), podemos escrever

$$(2.3.10)\qquad G^{4,0}_{0,4}\left[z\,\middle|\,(n-2)/2,\ (n-3)/2,\ (n-4)/2,\ (n-5)/2\right] =$$

$$= 4\,\pi\, z^{(n-4)/2}\, K_2\,(4\, z^{1/4})$$

onde $K_2(.)$ é a função modificada de Bessel dada em (4.1.26).

Assim, de (2.3.7) a (2.3.10), podemos escrever

$$(2.3.11)\qquad f(x) = \{|\Sigma|\Gamma(n-1)\Gamma(n-3)\}^{-1}(x|\Sigma|^{-1})^{(n-4)/2} K_2\{2(x|\Sigma|^{-1})^{1/4}\}$$

onde

$$(2.3.12)\qquad K_2\{2(x|\Sigma|^{-1})^{1/4}\} = -y^{1/2}\,\{\gamma+(1/4)\,\ell n\ y\}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{k/2}}{k!\,(k+2)!}$$

$$+\ 1/(2y^{1/2}) - 1/2 + (1/2)y^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi(k+1)+\psi(k+3)+2\gamma}{k!\,(k+2)!}\,y^{k/2}$$

com

$$(2.3.13)\qquad y = x|\Sigma|^{-1}$$

CAPÍTULO III

DISTRIBUIÇÃO EXATA EM SÉRIES

Neste capítulo, vamos obter as expressões exatas para a função densidade de probabilidade e para a função distribuição acumulada, da variável aleatória $|D|$, em termos de séries que são razoavelmente computáveis. Vamos calcular também, casos particulares para a função densidade, e depois faremos a comparação com as expressões obtidas no capítulo anterior.

3.1) INTRODUÇÃO

Para acharmos a expressão exata da função densidade de probabilidade de $|D|$ em séries, vamos utilizar o teorema do resíduo que pode ser visto em [2, pág. 147]. Assim, para escrevermos a expressão de $f(x)$, dada em (2.1.4), em séries, temos que estudar primeiro os polos de $\Delta(s)$, onde

$$(3.1.1) \qquad \Delta(s) = z^{-s} \prod_{k=1}^{p} \Gamma\{s+(n-1-k)/2\}$$

com z definido em (2.1.6).

Posteriormente temos que calcular os resíduos de $\Delta(s)$ nesses polos para, de acordo com esse teorema, obtermos a expressão final de $f(x)$, que será dada por

$$(3.1.2) \qquad f(x) = C_p \{\text{soma dos resíduos de } \Delta(s) \text{ nos polos de } \prod_{k=1}^{p} \Gamma\{s+(n-1-k)/2\}\}$$

pois, os polos de $\Lambda(s)$ são os polos de

$$(3.1.3) \qquad \prod_{k=1}^{p} \Gamma\ \{s+(n-1-k)/2\}$$

3.2) POLOS DE $\prod_{k=1}^{p} \Gamma\ \{s+(n-1-k)/2\}$

Para se calcular os polos vamos estudar separadamente dois casos; quando p é par e quando p é ímpar.

a) Polos quando p é par:

Para melhor efeito de cálculo, vamos reescrever a expressão (3.1.3) do seguinte modo

$$(3.2.1) \qquad \prod_{k=1}^{p} \Gamma\ \{s+(n-1)/2-k/2\} \quad = \quad P_1(s)\ .\ P_2(s)$$

onde

$$(3.2.2) \qquad P_1(s) \quad = \quad \prod_{k=1}^{p/2} \Gamma\ \{s+(n-1)/2+1/2-k\}$$

e

$$(3.2.3) \qquad P_2(s) \quad = \quad \prod_{k=1}^{p/2} \Gamma\ \{s+(n-1)/2-k\}$$

Sabendo que os polos de $\Gamma(t)$ são os valores de $t=-r$, $r=0,1,2,\ldots$; temos que os polos de $P_1(s)$ são os valores de s que anulam cada termo da expressão

$$(3.2.4) \qquad \prod_{k=1}^{p/2-1} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}^{k} \prod_{k=p/2}^{\infty} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}^{p/2}$$

ou, ainda, são os valores de s que anulam cada termo de

$$(3.2.5) \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}^{\alpha_k}$$

com

$$(3.2.6) \qquad \alpha_k = \begin{cases} k, & k = 1,2,\ldots,p/2-1 \\ p/2, & k \geq p/2 \end{cases}$$

onde os expoentes α_k indicam a ordem dos polos.

Do mesmo modo, podemos dizer que os polos de $P_2(s)$ - são os valores de s que anulam a seguinte expressão

$$(3.2.7) \qquad \prod_{k=1}^{p/2-1} \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+k\}^{k} \prod_{k=p/2}^{\infty} \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+k\}^{p/2}$$

ou

$$(3.2.8) \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+k\}^{\alpha_k}$$

onde os expoentes α_k indicam a ordem dos polos e com α_k definido em (3.2.6).

Resumindo, temos para polos de $\Delta(s)$, e com p par, os valores de s que anulam cada termo da expressão P(s), onde

$$(3.2.9) \qquad P(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}^{\alpha_k}\{s+(n-1)/2-(p+2)/2+k\}^{\alpha_k}$$

com os expoentes α_k sendo definidos em (3.2.6).

Uma vez que o raciocínio será análogo, vamos calcular de imediato os polos de $\Delta(s)$ quando p é ímpar para depois procedermos ao cálculo dos resíduos em ambos os casos.

b) <u>Polos quando p é ímpar:</u>

Reescrevendo (3.1.3), como fizemos para o caso par, temos

$$\prod_{k=1}^{p} \Gamma\{s+(n-1)/2-k/2\} = I_1(s) \, . \, I_2(s) \tag{3.2.10}$$

onde

$$I_1(s) = \prod_{k=1}^{(p+1)/2} \Gamma\{s+(n-1)/2+1/2-k\} \tag{3.2.11}$$

e

$$I_2(s) = \prod_{k=1}^{(p-1)/2} \Gamma\{s+(n-1)/2-k\} \tag{3.2.12}$$

Assim, como fizemos anteriormente, podemos dizer que os polos de $I_1(s)$ são os valores de s que anulam cada termo da expressão

$$\prod_{k=1}^{(p-1)/2} \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+k\}^{k} \prod_{k=(p+1)/2}^{\infty} \{s+(n-1)/2 - (p+2)/2+k\}^{(p+1)/2} \tag{3.2.13}$$

ou ainda, são os valores de s que anulam cada termo de

$$\prod_{k=1}^{\infty} \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+k\}^{\beta_k} \tag{3.2.14}$$

com

$$\beta_k = \begin{cases} k, & k = 1,2,\ldots,(p-1)/2 \\ (p+1)/2, & k \geq (p+1)/2 \end{cases} \tag{3.2.15}$$

onde os expoentes β_k indicam a ordem dos polos.

Analogamente, podemos dizer que os polos de $I_2(s)$ são os valores de s que anulam cada termo da expressão

$$(3.2.16) \qquad \prod_{k=1}^{(p-3)/2} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}^k \prod_{k=(p-1)/2}^{\infty} \{s+(n-1)/2 - (p+1)/2+k\}^{(p-1)/2}$$

ou ainda, são os valores de s que anulam cada termo de

$$(3.2.17) \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}^{\gamma_k}$$

onde

$$(3.2.18) \qquad \gamma_k = \begin{cases} k, & k = 1,2,\ldots,(p-3)/2 \\ (p-1)/2, & k \geq (p-1)/2 \end{cases}$$

com γ_k indicando a ordem dos polos.

Assim, de (3.2.14) e (3.2.17) podemos concluir que, no caso em que p é ímpar, os polos de $\Delta(s)$ são os valores de s que anulam cada termo de $I(s)$, onde

$$(3.2.19) \qquad I(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+k\}^{\beta_k}\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}^{\gamma_k}$$

com os expoentes β_k e γ_k indicando a ordem dos polos de cada termo e como sendo definidos em (3.2.15) e (3.2.18), respectivamente.

3.3) RESÍDUOS DE $\Delta(s)$

Uma vez que já calculamos os polos de (3.1.3) para os casos em que p é ímpar ou par, vamos agora proceder ao cálculo dos resíduos de $\Delta(s)$ nesses polos para, de acordo com (3.1.2), obtermos a expressão final da função densidade de probabilidade de $|D|$, $f(x)$.

Para isso, será importante definirmos

(3.3.1) RP = Soma dos resíduos de $\Delta(s)$ nos polos de (3.2.1) quando p é par

e

(3.3.2) RI = Soma dos resíduos de $\Delta(s)$ nos polos de (3.2.10) quando p é ímpar

pois, como fizemos anteriormente para o cálculo dos polos, também vamos estudar os resíduos separadamente para os casos em que p é par ou é ímpar.

a) Resíduos quando p é par:

Como já temos os polos de (3.2.1) para p par, dados pela expressão (3.2.9), vamos então reescrever RP do seguinte modo

(3.3.3) $$RP = \sum_{j=1}^{\infty} RP_j^*(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{\infty} RP_j^{**}(\alpha_j)$$

onde

(3.3.4) $RP_j^*(\alpha_j)$ = Resíduo de $\Delta(s)$ nos polos $\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j = 0\}$ de ordem α_j

e

(3.3.5) $RP_j^{**}(\alpha_j)$ = Resíduo de $\Delta(s)$ nos polos

$\{s+(n-1)/2-(p+2)/2+j = 0\}$ de ordem α_j ,

com $\Delta(s)$ definido em (3.1.1) e α_j definido em (3.2.6), ou seja

$$\alpha_j = \begin{cases} j, & j = 1,2,\ldots,p/2-1 \\ p/2, & j \geq p/2 \end{cases}$$

Vamos calcular cada uma dessas expressões separadamente.

a.1) $RP_j^*(\alpha_j)$:

De (3.3.4) podemos escrever

$$(3.3.6) \quad RP_j^*(\alpha_j) = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+1}{2}-j} \frac{1}{(\alpha_j-1)!} \frac{d^{\alpha_j-1}}{ds^{\alpha_j-1}} \nabla(s)$$

onde

$$(3.3.7) \quad \nabla(s) = \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j\}^{\alpha_j} \Delta(s)$$

com $\Delta(s)$ dado por (3.1.1).

Para calcularmos a expressão (3.3.6) precisamos desfazer a indeterminação criada quando s tende ao seu valor limite. Para isso, vamos desenvolver (3.3.7) do seguinte modo

$$(3.3.8) \quad \nabla(s) = z^{-s}\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j\}^{\alpha_j} \prod_{k=1}^{p} \Gamma\{s+(n-1)/2-k/2\}$$

$$= z^{-s}\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j\}^{\alpha_j} \prod_{k=1}^{\alpha_j} \Gamma\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}$$

$$\cdot \prod_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \Gamma\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\} \prod_{k=1}^{p/2} \Gamma\{s+(n-1)/2-k\}$$

Então $\nabla(s)$ pode ser escrito da forma

$$(3.3.9) \quad \nabla(s) = z^{-s}\, G(s)$$

onde z é dado por (2.1.6) e

$$(3.3.10) \quad G(s) = \frac{\Gamma^{\alpha_j}\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j+1\}}{\prod_{k=1}^{\alpha_j} \prod_{m=k}^{j-1} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+m\}}$$

$$\cdot \prod_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \Gamma\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\} \prod_{k=1}^{p/2} \Gamma\{s+(n-1)/2-k\}$$

Para calcularmos a (α_j-1)-ésima derivada de $\nabla(s)$ vamos utilizar que

$$(3.3.11) \quad \frac{d^{\alpha_j-1}}{ds^{\alpha_j-1}} \nabla(s) = \frac{d^{\alpha_j-1}}{ds^{\alpha_j-1}} \{z^{-s}\, G(s)\}$$

$$= z^{-s} \sum_{r=0}^{\alpha_j-1} \binom{\alpha_j-1}{r} (-\ln z)^{\alpha_j-1-r} \frac{d^r}{ds^r} G(s)$$

e, ainda sabemos

$$(3.3.12) \quad \frac{d}{ds} G(s) = G(s) \frac{d}{ds} \ln G(s) = G(s)\, H(s)$$

onde

$$(3.3.13) \quad H(s) = \frac{d}{ds} \ln G(s)$$

Podemos dizer então

$$(3.3.14)\quad G^{(r)}(s) = \frac{d^r}{ds^r} G(s) = \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \{G(s)\ H(s)\}$$

que pode ser escrita da forma

$$(3.3.15)\quad G^{(r)}(s) = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{r-1}{\ell} G^{(r-1-\ell)}(s)\quad H^{(\ell)}(s)$$

Essa expressão pode ser calculada de modo iterativo desde que $(d^\ell/ds^\ell)H(s)$ seja conhecido. Para isso vamos primeiro desenvolver (3.3.13), substituindo G(s) pelo seu valor dado em (3.3.10), e escrever

$$(3.3.16)\quad H(s) = \frac{d}{ds}\{\alpha_j\ \ell n\ \Gamma\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j+1\}$$

$$+ \sum_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \ell n\ \Gamma\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p/2} \ell n\ \Gamma\{s+(n-1)/2-k\}$$

$$- \sum_{k=1}^{\alpha_j} \sum_{m=k}^{j-1} \ell n\ \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+m\}$$

Utilizando agora a definição de função Psi, dada em (4.1.11), podemos escrever

$$(3.3.17)\quad H(s) = \alpha_j\ \psi\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j+1\}$$

$$+ \sum_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \psi\{s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p/2} \psi\{s+(n-1)/2-k\}$$

$$- \sum_{k=1}^{\alpha_j} \sum_{m=k}^{j-1} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+m\}^{-1}$$

Aplicando a relação entre as funções Psi e Zeta, dada em (4.1.22), para obtermos a expressão da ℓ-ésima derivada de H(s), teremos

$$(3.3.18)\quad H^{(\ell)}(s) = \ell!(-1)^{\ell+1}\{\alpha_j\ \zeta\{\ell+1,\ s+(n-1)/2-(p+1)/2+j+1\}$$

$$+ \sum_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \zeta\{\ell+1,\ s+(n-1)/2-(p+1)/2+k\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p/2} \zeta\{\ell+1,\ s+(n-1)/2-k\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\alpha_j} \sum_{m=k}^{j-1} \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+m\}^{-(\ell+1)}\}$$

Bem, uma vez que já calculamos todas as expressões - que compõem (3.3.6), vamos passar o limite quando $s \to -(n-1)/2 + (p+1)/2 - j$ nessas expressões e, de acordo com (3.3.6), obtermos a expressão de $RP_j^*(\alpha_j)$ que é dada por

$$(3.3.19)\quad RP_j^*(\alpha_j) = \frac{1}{(\alpha_j-1)!} z^{(n-1)/2-(p+1)/2+j} \sum_{r=0}^{\alpha_j-1} \binom{\alpha_j-1}{r} (-\ell n z)^{\alpha_j-1-r}\ G_0^{(r)}$$

onde

$$(3.3.20)\quad G_0^{(r)} = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{r-1}{\ell} G_0^{(r-1-\ell)}\ H_0^{(\ell)}$$

com

$$(3.3.21)\quad G_0^{(0)} = \frac{\prod_{k=1}^{p/2} \Gamma\{(p+1)/2-k-j\}}{\prod_{k=1}^{\alpha_j} \prod_{m=k}^{j-1} (m-j)} \prod_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \Gamma(k-j)$$

e

$$(3.3.22)\quad H_0^{(\ell)} = \ell!(-1)^{\ell+1} \{\alpha_j\ \zeta(\ell+1,1) + \sum_{k=1}^{p/2} \zeta\{\ell+1,(p+1)/2-k-j\}$$

$$+ \sum_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \zeta(\ell+1,k-j) + \sum_{k=1}^{\alpha_j} \sum_{m=k}^{j-1} (m-j)^{-(\ell+1)}\}$$

com

$$(3.3.23)\quad H_0^{(0)} = \alpha_j\ \psi(1) + \sum_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \psi(k-j) + \sum_{k=1}^{p/2} \psi\{(p+1)/2-k-j\}$$

$$- \sum_{k=1}^{\alpha_j} \sum_{m=k}^{j-1} (m-j)^{-1}$$

onde

$$(3.3.24)\quad G_0^{(r)} = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+1}{2}-j} G^{(r)}(s) \quad , \quad r = 0,1,\ldots,\alpha_j-1$$

e

$$(3.3.25)\quad H_0^{(\ell)} = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+1}{2}-j} H^{(\ell)}(s) \quad , \quad \ell = 0,1,\ldots,r-1$$

e α_j definido em (3.2.6).

<u>a.2) $RP_j^{**}(\alpha_j)$:</u>

De acordo com (3.3.5), podemos escrever

$$(3.3.26)\quad RP_j^{**}(\alpha_j) = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+2}{2}-j} \frac{1}{(\alpha_j-1)!} \frac{d^{\alpha_j-1}}{ds^{\alpha_j-1}} \nabla(s)$$

onde, neste caso, temos

$$(3.3.27)\quad \nabla(s) = \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+j\}^{\alpha_j} \Delta(s)$$

com $\Delta(s)$ dado em (3.1.1) e α_j definido em (3.2.6).

Realizando raciocínio análogo ao utilizado para obtermos $RP_j^*(\alpha_j)$ e desenvolvendo a expressão

$$(3.3.28)\quad \frac{1}{(\alpha_j-1)!} \frac{d^{\alpha_j-1}}{ds^{\alpha_j-1}} \nabla(s)$$

como foi feito no caso anterior, teremos

$$(3.3.29)\quad RP_j^{**}(\alpha_j) = \frac{1}{(\alpha_j-1)!} z^{(n-1)/2-(p+2)/2+j} \sum_{r=0}^{\alpha_j-1} \binom{\alpha_j-1}{r} (-\ell n\ z)^{\alpha_j-1-r} G_0^{(r)}$$

onde

$$(3.3.30)\quad G_0^{(r)} = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{r-1}{\ell} G_0^{(r-1-\ell)} H_0^{(\ell)}$$

com

$$(3.3.31)\quad G_0^{(0)} = \frac{\prod_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \Gamma(k-j)}{\prod_{k=1}^{\alpha_j} \prod_{m=k}^{j-1} (m-j)} \prod_{k=1}^{p/2} \Gamma\{(p+3)/2-k-j\}$$

e

$$(3.3.32)\quad H_0^{(\ell)} = \ell!(-1)^{\ell+1} \{\alpha_j\ \zeta(\ell+1,1) + \sum_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \zeta(\ell+1,k-j)$$

$$+ \sum_{k=1}^{p/2} \zeta\{\ell+1,(p+3)/2-k-j\} + \sum_{k=1}^{\alpha_j} \sum_{m=k}^{j-1} (m-j)^{-(\ell+1)}\}$$

com

$$(3.3.33) \quad H_0^{(0)} = \alpha_j \; \psi(1) + \sum_{k=\alpha_j+1}^{p/2} \psi(k-j) + \sum_{k=1}^{p/2} \psi\{(p+3)/2-k-j\}$$

$$- \sum_{k=1}^{\alpha_j} \sum_{m=k}^{j-1} (m-j)^{-1}$$

onde

$$(3.3.34) \quad G_0^{(r)} = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+2}{2}-j} G^{(r)}(s) \qquad , \quad r = 0,1,\ldots,\alpha_j-1$$

e

$$(3.3.35) \quad H_0^{(\ell)} = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+2}{2}-j} H^{(\ell)}(s) \qquad , \quad \ell = 0,1,\ldots,r-1$$

sendo α_j definido em (3.2.6).

a.3) <u>Função densidade (p par)</u>:

Uma vez que já calculamos os resíduos de $\Delta(s)$ em seus polos, podemos, de acordo com (3.1.2), escrever a expressão da função densidade de probabilidade da variável aleatória $|D|$, $f(x)$, que será dada por

$$(3.3.36) \quad f(x) = C_p \; \{ \sum_{j=1}^{\infty} RP_j^{*}(\alpha_j) + \sum_{j=1}^{\infty} RP_j^{**}(\alpha_j)\}$$

com C_p definido em (2.1.5), $RP_j^{*}(\alpha_j)$ dado por (3.3.19) e $RP_j^{**}(\alpha_j)$ dado por (3.3.29).

Vamos, a seguir, calcular a função de distribuição acumulada de $|D|$, que será obtida de maneira direta pois vamos utilizar um resultado sobre integração logarítmica que facilitará todo o cálculo.

a.4) <u>Função de Distribuição Acumulada (p par)</u>:

Para calcularmos a expressão da função de distribuição acumulada da variável aleatória $|D|$, $F(x)$, vamos utilizar o seguinte resultado sobre integração de uma forma logarítmica

$$(3.3.37) \quad \int_0^x u^{\alpha} \, (-\ln u)^{k-1} \, du =$$

$$= x^{\alpha+1} \sum_{r=1}^{k} \frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{k(\alpha+1)^r} \, (-\ln x)^{k-r}$$

para $\alpha > 0$, k inteiro positivo e $0 < u < 1$.

Esse resultado é demonstrado por Mathai e Saxena - (1973).

Assim, para o cálculo de $F(x)$, de (3.3.36) podemos escrever

$$(3.3.38) \quad f(x) = C_p \sum_{j=1}^{\infty} \{RP_j^{*}(\alpha_j) + RP_j^{**}(\alpha_j)\}$$

e sabendo que

$$F(x) = \int_0^x f(y) \, dy$$

temos, diretamente usando (3.3.37) em (3.3.38):

$$(3.3.39)\quad F(x) = 2^{p}|\Sigma|C_{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_j-1)!} \sum_{r=0}^{\alpha_j-1} \binom{\alpha_j-1}{r} \{G_{0,1}^{(r)}\ \Phi_1(x,r) + G_{0,2}^{(r)}\ \Phi_2(x,r)\}$$

onde

$$(3.3.40)\quad \Phi_1(x,r) = x^{(n-p)/2+j} \sum_{t=1}^{\alpha_j-r} \{\frac{(\alpha_j-r)(\alpha_j-r-1)\ldots(\alpha_j-r-t+1)}{(\alpha_j-r)\{(n-p)/2+j\}^{t}} . (-\ell n\ x)^{\alpha_j-r-t}$$

$$(3.3.41)\quad \Phi_2(x,r) = x^{(n-p-1)/2+j} \sum_{t=1}^{\alpha_j-r} \{\frac{(\alpha_j-r)(\alpha_j-r-1)\ldots(\alpha_j-r-t+1)}{(\alpha_j-r)\{(n-p-1)/2+j\}^{t}} . (-\ell n\ x)^{\alpha_j-r-t}$$

sendo que $G_{0,1}^{(r)}$ é dado por $G_0^{(r)}$ definido em (3.3.20) e $G_{0,2}^{(r)}$ é dado por $G_0^{(r)}$ definido em (3.3.30) com C_p dado por (2.1.5).

b) <u>Resíduos quando p é ímpar</u>:

Como foi feito para o caso em que p é par, (3.3.3), vamos particionar RI, definido em (3.3.2), da seguinte forma:

$$(3.3.43)\quad RI = \sum_{j=1}^{\infty} \{RI_j^{*}(\beta_j) + RI_j^{**}(\gamma_j)\}$$

onde

$$(3.3.44)\quad RI_j^{*}(\beta_j) = \text{Resíduo de } \Delta(s) \text{ nos polos } \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+j = 0\} \text{ de ordem } \beta_j$$

e

$$(3.3.45)\quad RI_j^{**}(\gamma_j) = \text{Resíduo de } \Delta(s) \text{ nos polos } \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j = 0\} \text{ de ordem } \gamma_j.$$

com $\Delta(s)$ definido em (3.1.1) e β_j e γ_j como sendo definidos em (3.2.15) e (3.2.18), respectivamente.

Vamos então proceder ao cálculo de cada uma dessas expressões separadamente.

<u>b.1) $RI_j^*(\beta_j)$:</u>

De (3.3.44) podemos escrever

$$(3.3.46)\quad RI_j^*(\beta_j) = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+2}{2}-j} \frac{1}{(\beta_j-1)!} \cdot \frac{d^{\beta_j-1}}{ds^{\beta_j-1}} \nabla(s)$$

onde

$$(3.3.47)\quad \nabla(s) = \{s+(n-1)/2-(p+2)/2+j\}^{\beta_j} \Delta(s)$$

com $\Delta(s)$ definido em (3.1.1).

Vamos calcular primeiro a expressão

$$(3.3.48)\quad \frac{1}{(\beta_j-1)!} \frac{d^{\beta_j-1}}{ds^{\beta_j-1}} \nabla(s)$$

e depois calcular o seu limite quando $s \to -(n-1)/2+(p+2)/2-j$ para obtermos a expressão final de $RI_j^*(\beta_j)$.

Substituindo $\Delta(s)$ pelo seu valor e desenvolvendo - (3.3.47) como feito anteriormente para $RP_j^*(\alpha_j)$, chega-se à seguinte expressão para o resíduo

$$(3.3.49)\quad RI_j^*(\beta_j) = \frac{1}{(\beta_j-1)!} z^{(n-1)/2-(p+2)/2+j} \cdot \sum_{r=0}^{\beta_j-1} \binom{\beta_j-1}{r} (-\ell n\ z)^{\beta_j-1-r}\ G_0^{(r)}$$

onde

$$(3.3.50)\quad G_0^{(r)} = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{r-1}{\ell} G_0^{(r-1-\ell)} H_0^{(\ell)} .$$

com

$$(3.3.51)\quad G_0^{(0)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{(p-1)/2} \Gamma\{(p+2)/2-k-j\}}{\prod\limits_{k=1}^{\beta_j} \prod\limits_{m=k}^{j-1} (m-j)} \prod_{k=\beta_j+1}^{(p+1)/2} \Gamma(k-j)$$

e

$$(3.3.52)\quad H_0^{(\ell)} = \ell!(-1)^{\ell+1} \{\beta_j\, \zeta(\ell+1,1) + \sum_{k=\beta_j+1}^{(p+1)/2} \zeta(\ell+1,\, k-j)$$

$$+ \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \zeta\{\ell+1,(p+2)/2-k-j\} + \sum_{k=1}^{\beta_j} \sum_{m=k}^{j-1} (m-j)^{-(\ell+1)}\}$$

com

$$(3.3.53)\quad H_0^{(0)} = \beta_j \psi(1) + \sum_{k=\beta_j+1}^{(p+1)/2} \psi(k-j) + \sum_{k=1}^{(p-1)/2} \psi\{(p+2)/2-k-j\}$$

$$- \sum_{k=1}^{\beta_j} \sum_{m=k}^{j-1} (m-j)^{-1}$$

onde

$$(3.3.54)\quad G_0^{(r)} = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+2}{2}-j} G^{(r)}(s) \quad , \qquad r = 0,1,\ldots,\beta_j-1$$

e

$$(3.3.55)\quad H_0^{(\ell)} = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+2}{2}-j} H^{(\ell)}(s) \quad , \qquad \ell = 0,1,\ldots,r-1$$

sendo β_j definido em (3.2.15).

b.2) $RI_j^{**}(\gamma_j)$:

De (3.3.45) podemos escrever

$$(3.3.56)\quad RI_j^{**}(\gamma_j) = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+1}{2}-j} \frac{1}{(\gamma_j-1)!} \frac{d^{\gamma_j-1}}{ds^{\gamma_j-1}} \nabla(s)$$

onde, neste caso,

$$(3.3.57)\quad \nabla(s) = \{s+(n-1)/2-(p+1)/2+j\}^{\gamma_j} \Delta(s)$$

com γ_j definido em (3.2.18) e $\Delta(s)$ definido em (3.1.1).

Assim, desenvolvendo a expressão

$$(3.3.58)\quad \frac{1}{(\gamma_j-1)!} \frac{d^{\gamma_j-1}}{ds^{\gamma_j-1}} \nabla(s)$$

como foi feito em (3.3.48) e achando o seu limite quando s tende ao polo $\{-(n-1)/2+(p+1)/2-j\}$ teremos a expressão de $RI_j^{**}(\gamma_j)$ que é dada por

$$(3.3.59)\quad RI_j^{**}(\gamma_j) = \frac{1}{(\gamma_j-1)!} z^{(n-1)/2-(p+1)/2+j} \cdot \sum_{r=0}^{\gamma_j-1} \binom{\gamma_j-1}{r} (-\ell n\ z)^{\gamma_j-1-r} G_0^{(r)}$$

onde

$$(3.3.60)\quad G_0^{(r)} = \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{r-1}{\ell} G_0^{(r-1-\ell)} H_0^{(\ell)}$$

com

$$(3.3.61)\quad G_0^{(0)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{(p+1)/2} \Gamma\{(p+2)/2-k-j\}}{\prod\limits_{k=1}^{\gamma_j} \prod\limits_{m=k}^{j-1} (m-j)} \prod_{k=\gamma_j+1}^{(p-1)/2} \Gamma(k-j)$$

e

$$(3.3.62)\quad H_0^{(\ell)} = \ell!(-1)^{\ell+1} \{\gamma_j\, \zeta(\ell+1,1) + \sum_{k=\gamma_j+1}^{(p-1)/2} \zeta(\ell+1,\, k-j)$$

$$+ \sum_{k=1}^{(p+1)/2} \zeta\{\ell+1,(p+2)/2-k-j\} + \sum_{k=1}^{\gamma_j} \sum_{m=k}^{j-1} (m-j)^{-(\ell+1)}\}$$

com

$$(3.3.63)\quad H_0^{(0)} = \gamma_j \psi(1) + \sum_{k=\gamma_j+1}^{(p-1)/2} \psi(k-j) + \sum_{k=1}^{(p+1)/2} \psi\{(p+2)/2-k-j\}$$

$$- \sum_{k=1}^{\gamma_j} \sum_{m=k}^{j-1} (m-j)^{-1}$$

onde

$$(3.3.64)\quad G_0^{(r)} = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+1}{2}-j} G^{(r)}(s)\;, \qquad r = 0,1,\ldots,\gamma_j-1$$

e

$$(3.3.65)\quad H_0^{(\ell)} = \lim_{s \to -\frac{n-1}{2}+\frac{p+1}{2}-j} H^{(\ell)}(s)\;, \qquad \ell = 0,1,\ldots,r-1$$

sendo γ_j definido como em (3.2.18).

b.3) Função densidade (p ímpar):

Bem, de posse do cálculo dos resíduos, já podemos escrever a expressão da função densidade de probabilidade de $|D|$, $f(x)$, que, de acordo com (3.1.2) pode ser escrita da forma

$$(3.3.66)\quad f(x) = C_p \{ \sum_{j=1}^{\infty} RI_j^{*}(\beta_j) + \sum_{j=1}^{\infty} RI_j^{**}(\gamma_j) \}$$

com $RI_j^{*}(\beta_j)$ dado por (3.3.49), $RI_j^{**}(\gamma_j)$ dado por (3.3.59) e C_p definido em (2.1.5).

Agora vamos determinar a função de distribuição acumulada de $|D|$ também de maneira direta como fizemos para p par.

b.4) Função de Distribuição Acumulada (p ímpar):

De (3.3.66) podemos escrever

$$(3.3.67)\quad f(x) = C_p \sum_{j=1}^{\infty} \{ RI_j^{*}(\beta_j) + RI_j^{**}(\gamma_j) \} .$$

Logo, a função de distribuição acumulada de $|D|$, $F(x)$, onde

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

será obtida se utilizarmos o resultado da integral dado em (3.3.37) na expressão (3.3.67).

Feito isso, vamos ter

$$(3.3.68)\quad F(x) = 2^p |\Sigma| C_p \sum_{j=1}^{\infty} \{ \frac{1}{(\beta_j - 1)!} \sum_{r=0}^{\beta_j - 1} \binom{\beta_j - 1}{r} G_{0,1}^{(r)} \Phi_1 \ (x,r) +$$

$$+ \frac{1}{(\gamma_j-1)!} \sum_{r=0}^{\gamma_j-1} \binom{\gamma_j-1}{r} G_{0,2}^{(r)} \Phi_2(x,r)\}$$

onde

$$(3.3.69) \quad \Phi_1(x,1) = x^{(n-p-1)/2} \sum_{t=1}^{\beta_j-r} \{\frac{(\beta_j-r)(\beta_j-r-1)\ldots(\beta_j-r-t+1)}{(\beta_j-r)\{(n-p-1)/2+j\}^t} . (-\ell n\ x)^{\beta_j-r-t}\}$$

e

$$(3.3.70) \quad \Phi_2(x,1) = x^{(n-p)/2+j} \sum_{t=1}^{\gamma_j-r} \{\frac{(\gamma_j-r)(\gamma_j-r-1)\ldots(\gamma_j-r-t+1)}{(\gamma_j-r)\{(n-p)/2+j\}^t} . (-\ell n\ x)^{\gamma_j-r-t}\}$$

sendo que $G_{0,1}^{(r)}$ é dado por $G_0^{(r)}$ definido em (3.3.50) e $G_{0,2}^{(r)}$ é dado por $G_0^{(r)}$ definido em (3.3.60) com C_p dado por (2.1.5).

3.4) CASOS PARTICULARES

Nesta secção vamos calcular alguns casos particulares para a função densidade de probabilidade de $|D|$, $f(x)$. Vamos achar as expressões dessa função para p=2, p=3 e p=4.

a) $\underline{p = 2}$:

Fazendo p=2 em (3.3.36) temos

$$(3.4.1) \quad f(x) = C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \{RP_j^*(\alpha_j) + RP_j^{**}(\alpha_j)\}$$

onde, por (2.1.5), temos

(3.4.2) $1/C_2 = 2^2 \; |\Sigma| \; \Gamma\{n/2\} \; \Gamma\{(n-1)/2\}$

Por (3.2.6) sabemos que

(3.4.3) $\alpha_j \; = \; 1 \, , \qquad j \geq 1$

então podemos escrever (3.4.1) do seguinte modo

(3.4.4) $f(x) = C_2 \sum_{j=1}^{\infty} \{RP_j^*(1) + RP_j^{**}(1)\}$

onde, por (3.3.19) e por (3.3.29), temos

(3.4.5) $RP_j^*(1) = z^{(n-4)/2+j} \dfrac{\Gamma\,(1/2-j)}{\prod_{m=1}^{j-1} (m-j)}$

(3.4.6) $RP_j^{**}(1) = z^{(n-5)/2} \dfrac{\Gamma\,(3/2-j)}{\prod_{m=1}^{j-1} (m-j)}$

Assim, sabendo que

(3.4.7) $\prod_{m=1}^{j-1} (m-j) \; = \; (-1)^{j-1} \, (j-1)!$

(3.4.8) $\Gamma(1/2-j) \; = \; \dfrac{(-1)^j \, \pi^{1/2} \, 2^{2j-1} \, \Gamma(j)}{\Gamma(2j)}$

(3.4.9) $\Gamma(3/2-j) \; = \; \dfrac{(-1)^{j+1} \, \pi^{1/2} \, 2^{2j-2} \, \Gamma(j)}{\Gamma(2j-1)}$

e, por (2.1.6), que

(3.4.10) $z \; = \; x \, 2^{-2} \, |\Sigma|^{-1}$

Substituindo essas expressões em (3.4.4) teremos:

$$(3.4.11)\quad f(x) = C_2\ 2^{3-n}\ \pi^{1/2}\ (x|\Sigma|^{-1})^{(n-3)/2}\ e^{-(x|\Sigma|^{-1})^{1/2}}$$

Podemos notar que a expressão encontrada em (3.4.11) é a mesma que foi obtida em (2.3.5) como, naturalmente, era de se esperar.

b) p = 3:

De (3.3.66) podemos escrever

$$(3.4.12)\quad f(x) = C_3 \sum_{j=1}^{\infty} \{RI_j^{*}(\beta_j)+RI_j^{**}(\gamma_j)\}$$

onde, por (3.2.15) e (3.2.18) temos respectivamente

$$(3.4.13)\quad \beta_j = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 2, & j \geq 2 \end{cases}$$

$$(3.4.14)\quad \gamma_j = 1\ , \qquad j \geq 1$$

Então a expressão de f(x), dada em (3.4.12), pode ser escrita da forma

$$(3.4.15)\quad f(x) = C_3\ \{RI_1^{*}(1) + \sum_{j=2}^{\infty} RI_j^{*}(2) + \sum_{j=1}^{\infty} RI_j^{**}(1)\}$$

onde, por (2.1.5), temos

$$(3.4.16)\quad 1/C_3 = 2^3\ |\Sigma|\ \Gamma\ \{n/2\}\ \Gamma\ \{(n-1)/2\}\ \Gamma\ \{(n-2)/2\}$$

e, por (3.3.49) e (3.3.59), temos que

$$(3.4.17)\quad RI_1^{*}(1) = z^{(n-4)/2}\,\pi^{1/2}$$

$$(3.4.18)\quad RI_j^{*}(2) = z^{(n-6)/2+j}\,\frac{(-1)^j\,\pi^{1/2}\,2^{2j-2}}{(j-2)!\,(2j-2)}\,\{2\psi(2j-1)+\psi(j-1) - \ell n\, 4z\}$$

$$(3.4.19)\quad RI_j^{**}(1) = z^{(n-5)/2+j}\,\frac{(-1)^j\,\pi(j-1)!\,2^{4j-3}}{(2j-1)!\,(2j-2)!}$$

e, por (2.1.6), temos

$$(3.4.20)\quad z = x\,2^{-3}\,|\Sigma|^{-1}.$$

c) $\underline{p = 4}$:

De (3.3.36) podemos escrever

$$(3.4.21)\quad f(x) = C_4 \sum_{j=1}^{\infty} \{RP_j^{*}(\alpha_j) + RP_j^{**}(\alpha_j)\}$$

onde, por (2.1.5) e utilizando a fórmula de duplicação de gamas, dada em (4.1.10), temos

$$(3.4.22)\quad 1/C_4 = 2^{10-2n}\,|\Sigma|\,\pi\,\Gamma(n-1)\,\Gamma(n-3)$$

e, de acordo com (3.2.6), temos

$$(3.4.23)\quad \alpha_j = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 2, & j \geq 2 \end{cases}$$

Então, podemos escrever a expressão (3.4.21) do seguinte modo:

$$(3.4.24)\quad f(x) = C_4\,\{RP_1^{*}(1) + RP_1^{**}(1) + \sum_{j=2}^{\infty}\{RP_j^{*}(2) + RP_j^{**}(2)\}\}$$

onde, por (3.3.19), temos

$$(3.4.25)\quad RP_1^*(1) = z^{(n-4)/2}\,(-2\,\pi)$$

e, para $j \geq 2$,

$$(3.4.26)\quad RP_j^*(2) = z^{(n-6)/2+j}\,\frac{(j-1)\,\pi\,2^{4j-3}}{(2j-1)!\,(2j-2)!}\,\{2\,\psi(2j) + 2\,\psi(2j-2) - 4\,\ell n\,2 - \ell n\,z\}$$

e, por (3.3.29), temos ainda

$$(3.4.27)\quad RP_1^{**}(1) = z^{(n-5)/2}\,\pi/2$$

e, para $j \geq 2$,

$$(3.4.28)\quad RP_j^{**}(2) = z^{(n-7)/2+j}\,\frac{\pi\,2^{4j-6}}{(2j-2)!\,(2j-4)!}\,\{2\,\psi(2j-1) + 2\,\psi(2j-3) - 4\,\ell n\,2 - \ell n\,z\}$$

onde o valor de z é dado em (2.1.6), ou seja

$$(3.4.29)\quad z = x\,2^{-4}\,|\Sigma|^{-1}$$

Desenvolvendo a expressão (3.4.24), fazendo as respectivas substituições e também $\{2j-3 = k+1\}$; com algum trabalho de cálculo chegaremos à expressão (2.3.11).

CAPÍTULO IV

RESULTADOS UTILIZADOS

Apresentaremos neste capítulo uma relação de resultados sobre funções especiais e funções hipergeométricas que utilizamos, direta ou indiretamente, no nosso trabalho. Entre as funções especiais temos as funções Gama, Psi e Zeta, bem como algumas propriedades de cada uma delas. Temos a função hipergeométrica simples, a função G-hipergeométrica generalizada de Meijer e ainda alguns casos particulares da função G que nos foram importantes. Esses resultados também podem ser encontrados na bibliografia indicada no final deste trabalho.

4.1) FUNÇÕES ESPECIAIS

a) Função Gama (Integral de Euler):

(4.1.1) $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt, \quad R(\alpha) > 0$

onde $R(\alpha)$ indica a parte real de α.

Algumas propriedades da função gama utilizadas por nós neste trabalho foram

(4.1.2) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

(4.1.3) $\Gamma(n) = (n-1)!$, n inteiro positivo

(4.1.4) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

(4.1.5) $\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -(\pi/z)/\text{sen}(\pi z)$

(4.1.6) $\Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \pi/\text{sen}(\pi z)$

(4.1.7) $\Gamma(1/2+z)\ \Gamma(1/2-z) = \pi/\cos(\pi z)$

(4.1.8) $(\alpha)_n = \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha) = (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\ldots(\alpha),\quad (\alpha)_0 = 1$

A fórmula de multiplicação de gamas é dada por

(4.1.9) $$\Gamma(mz) = (2\pi)^{(1-m)/2}\, m^{mz-1/2} \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma(z+r/m)$$

onde m é inteiro positivo.

No caso em que m=2, temos a fórmula para a duplicação de gamas dada por

(4.1.10) $\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\, \pi^{-1/2}\, \Gamma(z+1/2)\ \Gamma(z)$

b) <u>Função Psi</u>:

Temos, por definição, que

(4.1.11) $$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad \Gamma'(z) = \frac{d}{dz}\Gamma(z)$$

e, ainda

(4.1.12) $$\psi(z) = -\gamma+(z-1)\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+1)(k+z)\}^{-1}, \quad z \neq 0,-1,-2,\ldots$$

Vejamos algumas propriedades da função Psi:

(4.1.13) $\psi(1) = -\gamma$

(4.1.14) $\psi(z+n) = z^{-1}+(z+1)^{-1}+(z+2)^{-1}+\ldots+(z+n-1)^{-1}+\psi(z)$,

$n = 1,2,3,\ldots$

(4.1.15) $\psi(1+n) = 1+1/2+1/3+\ldots+1/n - \gamma$

(4.1.16) $\psi(z)-\psi(-z) = -\pi \cot(\pi z)-1/z$

(4.1.17) $\psi(z)-\psi(1-z) = -\pi \cot(\pi z)$

(4.1.18) $\psi(1/2+z)-\psi(1/2-z) = \pi \operatorname{tg}(\pi z)$

A fórmula de multiplicação de Psi's é dada por

(4.1.19) $$\psi(mz) = m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \psi(z+k/m) + \ell n\ m$$

onde m é inteiro positivo.

No caso particular em que m=2 e z=1/2, temos

(4.1.20) $\psi(1/2) = -\gamma-2\ \ell n\ 2$

c) <u>Função Zeta Generalizada</u> (de Riemann):

(4.1.21) $$\zeta(s,v) = \sum_{r=0}^{\infty} (v+r)^{-s}, \quad v \neq 0,-1,-2,...$$

e, com $R(s) > 1$.

A relação entre as funções Psi e Zeta é dada por

(4.1.22) $$\frac{d^{\ell}}{ds^{\ell}} \psi(a+s) = (-1)^{\ell+1}\ \ell!\ \zeta(\ell+1,\ a+s)$$

d) <u>Funções modificadas de Bessel</u>:

(4.1.23) $K_{\nu}(z) = (\pi/2)(\csc\nu\pi)\ \{I_{-\nu}(z)-I_{\nu}(z)\}$

(4.1.24) $$I\nu(z) = \frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\ {}_0F_1\ (;\ 1+\nu;\ z^2/4),\ -\pi < \arg z \leq \pi/2$$

onde ${}_0F_1\ (;\ 1+\nu;\ z^2/4)$ é a função hipergeométrica que será definida em (4.2.1).

(4.1.25) $K_{1/2}(z) = e^{-z}\,(\pi/2z)^{1/2}$

No caso em que n é inteiro positivo, temos

(4.1.26)
$$K_n(z) = (-1)^{n+1}\{\gamma + \ell n(z/2)\}\, I_n(z)$$
$$+ (1/2)(z/2)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2}(z/2)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{\psi(k+1)+\psi(n+k+1)-2\psi(1)\}}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k$$

4.2) FUNÇÕES HIPERGEOMÉTRICAS

a) Função hipergeométrica simples:

(4.2.1) $${}_0F_1\,(;\ \alpha;\ z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(\alpha)_k\,k!}\quad,\ (\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$$

b) Função G-hipergeométrica generalizada de Meijer:

(4.2.2) $$G^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n, & a_{n+1},\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_m, & b_{m+1},\ldots,b_q\end{matrix}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\ \prod_{k=1}^{n}\Gamma(1-a_k-s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)\ \prod_{k=n+1}^{p}\Gamma(a_k+s)}\,z^{-s}\,ds$$

onde L é um contorno adequadamente escolhido, $i = \sqrt{-1}$ e

(i) $z \neq 0$

(ii) m, n, p e q são inteiros não negativos com $0 \leq m \leq q$; $0 \leq n \leq p$.

(iii) Produto vazio é igual a 1.

(iv) Os números complexos a_k e b_j são tais que nenhum polo de $\Gamma(b_j+s)$, $j=1,2,\ldots,m$, coincide com algum polo de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,2,\ldots,n$. Isso equivale a dizer: $a_k-b_j \neq$ inteiro positivo.

(v) Temos três contornos diferentes de integração:

L pode ser um contorno $(c-i\infty, c+i\infty)$ que separa todos os polos de $\Gamma(b_j+s)$, $j=1,2,\ldots,m$, de todos os polos de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,2,\ldots,n$. Para a integral convergir é necessário que $\delta = m+n-\frac{1}{2}(p+q) > 0$, $|\arg z| < \delta\pi$. Se $|\arg z| = \delta\pi$, $\delta \geq 0$, a integral converge absolutamente quando $p=q$ se $R(\nu) < -1$; e quando $p \neq q$, se temos $-s = \sigma+ir$, σ e r reais, σ é tal que para $r \to \pm\infty$,

$$(q-p)\sigma > R(\nu)+1-\frac{1}{2}(q-p)$$

onde

$$\nu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{k=1}^{p} a_k .$$

L também pode ser do tipo $(-\infty, -\infty)$, direção positiva, incluindo todos os polos de $\Gamma(b_j+s)$, $j = 1,2,\ldots,m$, mas nenhum polo de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k = 1,2,\ldots,n$. A integral converge se $q \geq 1$ ou $p < q$ ou $p = q$ e $|z| < 1$.

L pode ser também um contorno do tipo $(+\infty, +\infty)$, direção negativa, incluindo todos os polos de $\Gamma(1-a_k-s)$, $k=1,2,\ldots,n$, mas nenhum polo de $\Gamma(b_j+s)$, $j = 1,2,\ldots,m$. A integral con verge se $p \geq 1$ ou $p > q$ ou $p = q$ e $|z| > 1$.

Alguns casos particulares da função G que utilizamos neste trabalho foram:

(4.2.3) $m = q = 2$ e $n = p = 0$

e

(4.2.4) $m = q = 4$ e $n = p = 0$.

A expressão (4.2.2) particularizada para (4.2.3) é dada em [6 , pág. 231, (8)] como sendo

$$(4.2.5) \qquad G^{2,0}_{0,2}\left[z\,|a,b\right] = 2\,z^{(a+b)/2}\,K_{a-b}\,(2\,z^{1/2})$$

e, a mesma expressão (4.2.2) para (4.2.4) é dada em [6, pág. 233, (22)] por

$$(4.2.6) \qquad G^{4,0}_{0,4}\left[z\,|a,\ a+1/2,\ b,\ b+1/2\right] = 4\pi z^{(a+b)/2}K_{2(a-b)}\,(4z^{1/4})$$

onde $K_n(.)$ é a função de modificada de Bessel, dada em { 4.1) - Item d)} para ambos os casos.

c) Integral de função G:

$$(4.2.7) \qquad \int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-\beta-1}\,G^{m,n}_{p,q}\left[zy\left|\begin{matrix} a_1,\dots,a_n,\ a_{n+1},\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_m,\ b_{m+1},\dots,b_q\end{matrix}\right.\right] dy =$$

$$= \Gamma(\alpha-\beta)\;G^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[z\left|\begin{matrix} \alpha,\ a_1,\dots,a_n,\ a_{n+1},\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_m,\ b_{m+1},\dots,b_q,\ \beta\end{matrix}\right.\right]$$

para $0 \leq n \leq p < q$; $1 \leq m \leq q$; $R(\beta) < R(\alpha) < R(b_j)+1$; $j=1,2,\ldots,m$. {ver [6 , pág. 141, (10)]}.

Então, particularizando para $m=q=r$, $r \geq 1$, $p=n=0$, $\alpha=0$ e $\beta=-1$, temos

$$(4.2.8) \qquad \int_0^1 G^{r,0}_{0,r}\left[zy\,\middle|\,{}_{b_1,\ldots,b_r}\right] dy = G^{r,1}_{1,r+1}\left[z\,\middle|\,{}^{0}_{b_1,\ldots,b_r,\ -1}\right]$$

para $R(b_j)+1 > 0$.

Mais detalhes sobre a função G, contornos de integração, resultados de integrais de função G, etc., podem ser vistos em [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDERSON, T.W. (1958): An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, Wiley.

[2] CHURCHILL, R.V. (1975): Variâveis Complexas e suas Aplicações, McGraw-Hill.

[3] EPSTEIN, B. (1948): Some Applications of the Mellin Transform in Statistics, Ann. Math. Statist. 19, 370-379.

[4] ERDÊLYI, A.; MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F. e TRICOMI, G.F. (1953): Higher Transcendental Functions, Vol. I, McGraw-Hill.

[5] ERDÊLYI, A.; MAGNUS, W.; OBERHETTINGER, F. e TRICOMI, G.F. (1954): Tables of Integral Transforms, Vol. I, McGraw-Hill.

[6] LUKE, Y.L. (1969): The Special Functions and Their Approximations, Vol. I, Academic Press.

[7] MATHAI, A.M.; RATHIE, P.N. (1970): The Exact Distribution of Votaw's Criteria, Ann. Inst. Statist. Math., 22, 89-116.

[8] MATHAI, A.M.; RATHIE, P.N. (1971): The Exact Distribution of Wilks' Criterion, Ann. Math. Statist., 42, 1010-1019.

[9] MEIJER, C.S. (1946): On the G-Function, I-VIII. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49, 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175.

[10] NAIR, U.S. (1938): The Application of the Moment Function in the Study of Distribution Laws in Statistics, Biometrica, 30, 274-294.

[11] RAO, C.R. (1972): Recent Trends of Research Work in Multivariate Analysis, Biometrics, 28, 3-22.

[12] RAO, C.R. (1973): Linear Statistical Inference and its Applications, 2nd Edition, Wiley.

[13] SPRINGER, M.D.; THOMPSON, W.E. (1970): The Distribution of Products of Beta, Gamma and Gaussian Random Variables, SIAM J. Appl. Math., 18, 721-737.

[14] SRIVASTAVA, M.S.; KHATRI, C.G. (1979): An Introduction to Multivariate Statistics, North-Holland.

[15] SUBRAHMANIAM, K.; SUBRAHMANIAM, K. (1973): Multivariate Analysis, A Selected and Abstracted Bibliography, 1957-1972, Marcel Dekker.

[16] TITCHMARSH, E.C. (1951): The Theory of the Riemann Zeta Function, Oxford Univ. Press.

[17] TITCHMARSH, E.C. (1967): Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2nd Ed., Oxford Clarendon Press.