UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JULIANA GAIBA OLIVEIRA

Aproximações Ótimas por Splines sobre o Toro

Campinas

2020

Juliana Gaiba Oliveira

Aproximações Ótimas por Splines sobre o Toro

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pela aluna Juliana Gaiba Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni.

Campinas

2020

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4a Oliveira, Juliana Gaiba, 1983-
Aproximações ótimas por splines sobre o toro / Juliana Gaiba Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2020.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria do spline. 2. Teoria da aproximação. 3. Multiplicadores (Análise matemática). 4. Funções analíticas. 5. Toro (Geometria). I. Tozoni, Sergio Antonio, 1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Optimal approximation by splines on the torus
Palavras-chave em inglês:
Spline theory
Approximation theory
Multipliers (Mathematical analysis)
Analytic functions
Torus (Geometry)
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutora em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Sergio Antonio Tozoni [Orientador]
Roberto Andreani
Eduardo Brandani da Silva
Dimitar Kolev Dimitrov
Claudemir Pinheiro de Oliveira
Data de defesa: 19-11-2020
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0001-9327-9378
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/7364274419263361

Tese de Doutorado defendida em 19 de novembro de 2020 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI

Prof(a). Dr(a). EDUARDO BRANDANI DA SILVA

Prof(a). Dr(a). DIMITAR KOLEV DIMITROV

Prof(a). Dr(a). CLAUDEMIR PINHEIRO DE OLIVEIRA

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que me apoiaram durante a realização desta tese.

Agradeço a Deus por sempre guiar meus passos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Sergio Tozoni, pela imensa paciência e pela dedicação que teve para que este trabalho fosse concluído, bem como aos membros da banca, pelas sugestões que apresentaram.

Agradeço aos meus pais e irmãos pela torcida.

Agradeço ao Ricardo pelo apoio e incentivo na tese e na vida, mas principalmente por ter sido muito eficiente como meu suporte técnico particular de LaTeX.

Agradeço ao Pedro e à Giovanna, meus filhos queridos, por me ensinarem todos os dias que a vida passa muito rápido, e a eles dedico esta tese.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Os sk-splines tiveram sua teoria básica desenvolvida por Alexander Kushpel nos anos de 1983-1985. Os sk-splines são importantes em várias aplicações e seu espaço é gerado por translações discretas de uma única função núcleo.

Neste trabalho desenvolvemos a teoria geral dos sk-splines sobre o toro, apresentamos duas aplicações dos principais resultados obtidos e comparamos nossos resultados com outros já publicados, mostrando que as taxas de convergência são ótimas em termos de ordem.

Palavras-chave: splines; interpolação no toro; aproximações; multiplicadores; funções analíticas.

Abstract

The sk-splines had their basic theory developed by Alexander Kushpel in the years 1983-1985. The sk-splines are important in many applications and their space is generated by discrete translations of a single core function.

In this work we develop a general theory of sk-splines on the torus, present two applications of the main results obtained and compare our results with others already obtained, showing that the convergence that we obtained is sharp in terms of order.

Keywords: Spline; Torus Interpolation; Approximation; Multiplier; Analytic functions.

Lista de símbolos

$\mathbb{T}^d$	Toro d-dimensional, p. 14.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números inteiros positivos, ver Notação 1.1.1, p. 14.
$\mathbf{x}$	Elementos de $\mathbb{R}^d$, ver Notação 1.1.2, p. 15.
$\mathbf{l} \equiv \mathbf{k}$	Ver Notação 1.1.2, p. 15.
$\mathbf{0}$	Ver Notação 1.1.2, p. 15.
$\hat{\mathbf{l}}$	Ver Notação 1.1.2, p. 15.
$\lvert\mathbf{x}\rvert_p$	Ver Notação 1.1.2, p. 15.
$\lvert\mathbf{x}\rvert$	Norma genérica, ver Notação 1.1.2, p. 15.
$L^p(\mathbb{T}^d)$	Ver Definição 1.1.3 e Definição 1.1.4, p. 15.
$\lvert\lvert f\rvert\rvert_p$	Ver Definição 1.1.3 e Definição 1.1.4, p. 15.
$\widehat{f}(\mathbf{m})$	Coeficiente de Fourier, ver Definição 1.1.6, p. 15.
$f * g$	Produto de convolução, ver Definição 1.1.7, p. 16.
$\langle f, g\rangle$	Produto interno de $L^2(\mathbb{T}^d)$, ver Observação 1.1.13, p. 17.
U_p	Ver Notação 1.2.6, p. 19.
$K * U_p$	Ver Notação 1.2.6, p. 19.
$\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(\lvert\mathbf{k}\rvert_2)$,	Ver Definição 1.3.6, p. 24.
$\lambda_{\mathbf{k}}^* = \lambda(\lvert\mathbf{k}\rvert_\infty)$	Ver Definição 1.3.6, p. 24.
Λ e Λ_*	Operadores multiplicadores, ver Definição 1.3.6, p. 24.
$\mathbf{x}_{\mathbf{k}}$	Nós do sk-spline, ver Definição 2.1.1, p. 28.
$\Omega_{\mathbf{n}}$	Ver Definição 2.1.1, p. 28.
$\Lambda_{\mathbf{n}}$	Ver Definição 2.1.1, p. 28.
N	Cardinalidade de $\Omega_{\mathbf{n}}$ e $\Lambda_{\mathbf{n}}$, ver Definição 2.1.1, p. 28.
$C(\mathbb{T}^d)$	Ver Definição 2.1.2, p. 28.
$sk_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$	sk-Spline, ver Definição 2.1.2, p. 28.
$\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$	Ver Definição 2.1.7, p. 31.
$\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}$	sk-Spline fundamental, ver Definição 2.2.1, p. 35.
$\Omega_{\mathbf{n}}^*$	Ver Definição 2.2.1, p. 35.
$sk_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$	sk-Spline interpolante de f, ver Definição 2.2.5, p. 37.
$a_n \ll b_n$	Ver Notação 3.1.2, p. 69.
$a_n \asymp b_n$	Ver Notação 3.1.2, p. 69.
$d_n(K_1 * U_p, L^q)$	n-Largura de Kolmogorov, ver Observação 3.1.3, p. 69.

Sumário

Introdução

No sentido clássico, um spline é uma função formada por pedaços de polinômios. Os sk-splines são uma generalização dos splines polinomiais (ver Observação 1.3.13 em (LOPES, 2013) e (GOLOMB, 1968; ZHENSYKBAEV, 1973)) e dos $\mathcal{L}$-splines de Micchelli (MICCHELLI, 1976). A teoria dos sk-splines foi introduzida e sua teoria básica desenvolvida por A. Kushpel em (KUSHPEL, 1984; KUSHPEL, 1985; KUSHPEL, 1987a; KUSHPEL, 1989b; KUSHPEL, 1989a; KUSHPEL, 1987b). Os sk-splines são importantes em várias aplicações e seu espaço é gerado por translações discretas de uma única função núcleo. A principal vantagem em usar sk-splines ao invés de splines polinomiais é que se o núcleo do sk-spline tem suavidade infinita, então a taxa de convergência dos sk-splines interpolantes é governada pela suavidade do núcleo. Em (KUSHPEL; LEVESLEY; LIGHT, 1996) podemos encontrar mais informações sobre o desenvolvimento histórico dos sk-splines, suas aplicações e suas generalizações. Resultados mais recentes sobre convergência de sk-splines em L^q foram obtidos em (KUSHPEL, 2008a; KUSHPEL, 2008b).

Considere um núcleo contínuo K sobre $\mathbb{T}^d$. Dado $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ seja $\mathbf{x_k} = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}),\ x_{k_l} = \pi k_l / n_l$, $\Omega_\mathbf{n} = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leqslant k_l \leqslant 2n_l - 1,\ 1 \leqslant l \leqslant d\}$ e $\Lambda_\mathbf{n} = \{\mathbf{x_k} : \mathbf{k} \in \Omega_\mathbf{n}\}$. Um sk-spline sobre $\Lambda_\mathbf{n}$ é uma função representada na forma

$$sk_\mathbf{n}(\mathbf{x}) = c + \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_\mathbf{n}} c_\mathbf{k} K(\mathbf{x} - \mathbf{x_k}), \tag{1}$$

onde os coeficientes $c_\mathbf{k} \in \mathbb{R},\ \mathbf{k} \in \Omega_\mathbf{n}$, satisfazem a condição $\sum\limits_{\mathbf{k} \in \Omega_\mathbf{n}} c_\mathbf{k} = 0$.

Splines definidos por (1) têm sido considerados, no caso 1-dimensional, por diferentes autores, sob condições bastante restritivas sobre o núcleo K, tais como sinal de regularidade (ver (KARLIN, 1968)), ou usando o Teorema de Taylor para obter alguma estimativa de erro ou a existência de interpolantes (MICCHELLI; PINKUS, 1976; MICCHELLI; PINKUS, 1977b; MICCHELLI; PINKUS, 1977a; MICCHELLI; PINKUS, 1978). Condições deste tipo usualmente nos permite aplicar métodos desenvolvidos para splines polinomiais e obter resultados análagos em situações mais gerais. Nós não impomos nenhuma condição de regularidade ou usamos qualquer propriedade especial de polinômios para demonstrar nossos resultados. Isto nos permite dar um tratamento unificado para uma ampla variedade de funções splines, isto é, com suavidade finita, infinita ou analítica.

No Capítulo 1, apresentamos alguns resultados básicos sobre Análise de Fourier no toro e fixamos as notações que serão utilizadas nos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 desenvolvemos a teoria geral dos sk-splines sobre o toro e demonstramos os teoremas principais. Na Seção 2.1 introduzimos o conceito de sk-spline sobre o toro $\mathbb{T}^d$ e demonstramos alguns resultados básicos, que serão muito utilizados nas seções posteriores. Na Seção 2.2 definimos sk-spline fundamental, sk-spline interpolante de uma função definida sobre o toro e encontramos condições para a existência e unicidade de sk-splines interpolantes. Mostramos que o sk-spline interpolante pode ser escrito em função do sk-spline fundamental. A demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de sk-splines interpolantes, no caso do círculo, faz uso de matrizes circulantes e suas propriedades como ferramenta fundamental. Os resultados desta seção são apresentados de forma bastante diferentes dos resultados análogos para o círculo. Em particular, não usamos matrizes circulantes e suas propriedades na demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de sk-splines interpolantes para o toro.

Denotamos por $f * g$ o produto de convolução de duas funções integráveis f e g sobre $\mathbb{T}^d$ e denotamos $U_p = \{f \in L^p(\mathbb{T}^d) : ||f||_p \leqslant 1\}$, $K * U_p = \{K * f : f \in U_p\}$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e um núcleo contínuo K sobre $\mathbb{T}^d$. Para $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ escrevemos $|\mathbf{x}|_2 = \left(x_1^2 + \cdots + x_d^2\right)^{1/2}$, $|\mathbf{x}|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant d} |x_j|$. Denotamos por $sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)$ o único sk-spline interpolante da função f com nós e pontos de interpolação $\Lambda_{\mathbf{n}}$ (ver Definição 2.2.5 e Teorema 2.2.6).

Nas Seções 2.3 e 2.4 demonstramos os Teoremas 2.3.7 e 2.4.6 que nos fornecem taxas de convergência para uma função do tipo $f = K * \varphi$ onde $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ e K é um núcleo fixo, pelos sk-splines $sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)$, na norma de $L^q(\mathbb{T}^d)$. No Teorema 2.3.7 a taxa de convergência é obtida quando $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$, com $p^{-1} - q^{-1} \geqslant 2^{-1}$ e no Teorema 2.4.6 quando $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$. Os resultados mais interessantes para as nossas aplicações são os Corolários 2.3.9 e 2.4.7, uma vez que, suas hipóteses são mais fracas e assim, mais fáceis de serem verificadas. No Corolário 2.4.8 obtemos por interpolação novas taxas de convergência quando $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$.

No Capítulo 3, apresentamos duas aplicações dos principais resultados do Capítulo 2. Na primeira aplicação (Teorema 3.1.1) demonstramos, em particular, que se

$$K_1(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} |\mathbf{l}|^{-\gamma} e^{i \mathbf{l} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d, \ \gamma \in \mathbb{R}, \ \gamma > d, \tag{2}$$

onde $|\cdot| = |\cdot|_2$ ou $|\cdot| = |\cdot|_\infty$, e $\mathbf{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, então

$$\sup_{f \in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_2 \leqslant \overline{C} n^{-\gamma + d(1/p - 1/2)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2 \tag{3}$$

e

$$\sup_{f \in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant \overline{C} n^{-\gamma}, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{4}$$

Na segunda aplicação (Teorema 3.2.3) demonstramos, em particular, que se

$$K_2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}} e^{-\alpha |\mathbf{l}|_\infty^r} e^{i \mathbf{l} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d, \ r, \alpha \in \mathbb{R}, \ r, \alpha > 0, \tag{5}$$

e $\mathbf{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, então,

$$\sup_{f \in K_2 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_2 \leqslant \overline{C} e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(1/p-1/2)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \ \ r \geqslant 1 \tag{6}$$

e

$$\sup_{f \in K_2 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant \overline{C} e^{-\alpha n^r}, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty, \ \ r > 0. \tag{7}$$

A constante $\overline{C}$ é positiva e independente de n, p e q. Observamos que os conjuntos $K_1 * U_p$ são classes de funções finitamente diferenciáveis e $K_2 * U_p$ classes de funções infinitamente diferenciáveis se $0 < r < 1$ e analíticas se $r \geqslant 1$, sobre o toro.

A n-largura de Kolmogorov do conjunto $K * U_p$, para um núcleo contínuo K, em $L^q(\mathbb{T}^d)$ com $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, é definida por

$$d_n(K * U_p, L^q) = \inf_{T_n} \sup_{f \in K * U_p} \inf_{g \in T_n} ||f - g||_q,$$

onde T_n varia na família dos subespaços de dimensão n de $L^q(\mathbb{T}^d)$. Seja $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$ o espaço vetorial dos sk-splines sobre $\Lambda_{\mathbf{n}}$. Uma questão fundamental para uma teoria de splines sobre $\mathbb{T}^d$ é saber se o subespaço $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$ é tão bom quanto os subespaços de polinômios trigonométricos de mesma dimensão, no sentido de n-larguras. Como $\dim SK(\Lambda_{\mathbf{n}}) = (2n)^d$ para todos os núcleos considerados neste trabalho (ver Observação 2.2.7), então queremos saber se

$$\sup_{f \in K * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \ll d_{(2n)^d}(K * U_p, L^q), \tag{8}$$

o que implica

$$\sup_{f \in K * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \asymp d_{(2n)^d}(K * U_p, L^q).$$

Lembramos que para duas sequências (a_n) e (b_n), $a_n \ll b_n$ se $a_n \leqslant C_1 b_n$ e $a_n \asymp b_n$ se $C_2 b_n \leqslant a_n \leqslant C_1 b_n$, para todo n, onde as constantes C_1 e C_2 independem de n. Se tivermos (8) então podemos construir splines interpolantes ótimos, em termos de ordem.

No Capítulo 3, fazendo uma comparação dos resultados deste capítulo com resultados sobre n-larguras de Kolmogorov publicados em (KUSHPEL; STABILE; TOZONI, 2014) (ver Observações 3.1.3 e 3.2.4) obtemos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{f \in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_2 \asymp d_{(2n)^d}(K_1 * U_p, L^2) \asymp n^{-\gamma + d(1/p-1/2)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant 2, \ \gamma > d,$$

$$\sup_{f \in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \asymp d_{(2n)^d}(K_1 * U_p, L^q) \asymp n^{-\gamma}, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty, \ \gamma > d,$$

e

$$\sup_{f \in K_2 * U_2} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_2 \asymp d_{(2n)^d}(K_2 * U_2, L^2) \asymp e^{-\alpha n^r}, \quad \alpha > 0, \ 0 < r \leqslant 1.$$

Podemos então afirmar que a taxa de convergência dos sk-splines é ótima, em termos de ordem, para funções nas classes de tipo Sobolev $K_1 * U_p$ quando $1 \leqslant p \leqslant 2 = q$, $\gamma > d$ e quando $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$, $\gamma > d$. Para funções nas classes de funções infinitamente diferenciáveis $K_2 * U_p$ (analíticas se $r = 1$) temos também taxa de convergência ótima, em termos de ordem, dos sk-splines quando $p = q = 2$, $\alpha > 0$, $0 < r \leqslant 1$.

Classes de Sobolev sobre o toro $\mathbb{T}^d$ são classes de convolução com um núcleo que é um produto de núcleos 1-dimensionais de Weyl. Mais precisamente, seja $r_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant j \leqslant d$ e

$$K_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r_j} \cos\left(kx - r_j \frac{\pi}{2}\right),$$

e considere o núcleo sobre $\mathbb{T}^d$ definido por $K(x_1, \ldots, x_d) = K_1(x_1) \cdots K(x_d)$. O conjunto $K * U_p$ é a classe de Sobolev anisotrópica de funções cuja $r = (r_1, r_2, ..., r_d)$-ésima derivada está em U_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Os conjuntos de funções $K_1 * U_p$ no Teorema 3.2.3 não são classes de Sobolev, mas conjuntos de funções finitamente diferenciáveis sobre o toro, similar às classes de Sobolev, os quais denominaremos classes do tipo Sobolev.

Em (LEVESLEY; KUSHPEL, 1999; LEVESLEY; KUSHPEL, 1996) foi estudada a convergência de sk-splines para funções em classe de Sobolev sobre o toro. Estes estudos foram avançados em (GOMES et al., 1999; GOMES et al., 1997). O melhor resultado foi obtido em (GOMES et al., 1999). Em (GOMES et al., 1999) foi obtida uma taxa de convergência quase ótima, no sentido de melhor aproximação por polinômios trigonométricos, para funções em classes de Sobolev, por sk-splines, ótima, a menos de um fator logarítmico. Em (KUSHPEL; GRANDISON; DZUNG, 2006), um resultado semelhante foi obtido para o caso $p = q = 1$. Nestes artigos os núcleos considerados sobre o toro $\mathbb{T}^d$ são do tipo $K(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^{d} K_m(x_m)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, onde K_m são funções contínuas sobre o círculo unitário. Em nenhum destes artigos foi obtida uma taxa de convergência ótima, em termos de ordem, no sentido de n-larguras, para funções em classes de funções finitamente ou infinitamente diferenciáves, ou em classes de funções analíticas sobre o toro, em particular para as classes Sobolev. Veja Observação 3.2.5.

Em (LEVESLEY; KUSHPEL, 1999; LEVESLEY; KUSHPEL, 1996; GOMES et al., 1999; GOMES et al., 1997; KUSHPEL; GRANDISON; DZUNG, 2006) foram consideradas somente aproximações por sk-splines para funções em classes de Sobolev. Não conhecemos resultados semelhantes aos obtidos na Seção 3.2, de aproximação por splines para funções em classes de funções infinitamente diferenciáveis ou analíticas sobre o toro.

Os resultados das Seções 2.2 e 2.3 e as aplicações destes resultados no Capítulo 3, mais precisamente, a estimativa (3.1) do Teorema 3.1.1 e a estimativa (3.11) do Teorema 3.2.3, estão publicados em (OLIVEIRA; TOZONI, 2021).

1 Análise de Fourier no Toro

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados sobre análise de Fourier no toro. Esses resultados serão aplicados nos capítulos seguintes. As demonstrações serão omitidas em sua maioria. As referências para este capítulo são (CHAMIZO; IWANIEC, 1995), (FOLLAND, 1984), (GRAFAKOS, 2008), (HEATH-BROWN, 1999), (HUXLEY, 2003) e (STEIN, 1970).

1.1 Preliminares sobre Análise no Toro

Nesta seção apresentamos definições e resultados básicos sobre análise de Fourier no toro. As referências para esta seção são (GRAFAKOS, 2008) e (STEIN, 1970).

Notação 1.1.1. O toro $d-$dimensional $\mathbb{T}^d$, $d \in \mathbb{N}= \{1, 2, 3, \ldots\}$, é definido como sendo o produto cartesiano de d vezes do grupo quociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, isto é,

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Podemos identificar $\mathbb{T}^d$ com o cubo $d-$dimensional

$$[-\pi, \pi]^d = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : -\pi \leqslant x_i \leqslant \pi,\ i = 1, 2, \ldots, d\}.$$

Para que $[-\pi, \pi]^d$, de fato, represente o toro $\mathbb{T}^d$, devemos identificar as suas faces opostas. Assim, o ponto

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, -\pi, x_{i+1}, \ldots, x_d)$$

é identificado com o ponto

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, \pi, x_{i+1}, \ldots, x_d)$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, d$, fixo, uma vez que ambos representam o mesmo elemento no grupo quociente.

A correspondência $[-\pi, \pi]^d \ni (x_1, x_2, \ldots, x_d) \mapsto (e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_d})$ estabelece um isomorfismo de grupos entre $[-\pi, \pi]^d$ e o produto cartesiano $S^1 \times \cdots \times S^1$, de d vezes o círculo unitário $S^1 = \{e^{it} : t \in [-\pi, \pi]\}$. Assim podemos identificar também $\mathbb{T}^d$ com $S^1 \times \cdots \times S^1$.

Funções definidas no toro $\mathbb{T}^d$ são funções f definidas em $\mathbb{R}^d$ que satisfazem $f(\mathbf{x} + 2\pi\mathbf{m}) = f(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ e $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. Tais funções são ditas periódicas de período 2π em cada coordenada.

Consideremos o círculo unitário S^1 munido da medida de Lebesgue normalizada $\frac{1}{2\pi}dt$. Vamos sempre considerar $\mathbb{T}^d$ com a medida produto, d vezes, dessa medida sobre S^1, a qual denotaremos por $d\nu(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{(2\pi)^d} dx_1 dx_2 \cdots dx_d$. A medida $d\nu(\mathbf{x})$ é a única medida de Haar normalizada sobre $\mathbb{T}^d$.

Notação 1.1.2. Para $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_d)$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ e $\mathbf{x}= (x_1, \ldots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, denotamos

(a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$,

(b) $\mathbf{lk} = (l_1 k_1, \ldots, l_d k_d)$,

(c) $\mathbf{l} \equiv \mathbf{k} \text{mod}(\mathbf{j})$ se existe $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\mathbf{l} - \mathbf{k} = \mathbf{pj}$,

(d) $\mathbf{l} \leqslant \mathbf{k}$ se $l_j \leqslant k_j$ para $1 \leqslant j \leqslant d$,

(e) $\mathbf{0}= (0, 0, \ldots, 0)$,

(f) $\hat{\mathbf{1}}= (1, 1, \ldots, 1)$,

(g) $|\mathbf{x}|_p= (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_d|^p)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$,

(h) $|\mathbf{x}|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant d} |x_j|$.

Neste trabalho consideraremos uma norma genérica $\mathbf{x} \to |\mathbf{x}|$ sobre $\mathbb{R}^d$ e denotaremos por $|\mathbf{l}|$ a norma do elemento $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$.

Definição 1.1.3. Dizemos que uma função Lebesgue mensurável $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence ao espaço $L^p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, se

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\nu(\mathbf{x}) < \infty.$$

Se $f, g \in L^p(\mathbb{T}^d)$ e f=g q.t.p, consideramos f e g como sendo o mesmo elemento em $L^p(\mathbb{T}^d)$. Além disso, se $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$,

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\nu(\mathbf{x}) \right)^{1/p}$$

define uma norma em $L^p(\mathbb{T}^d)$ quando $1 \leqslant p < \infty$.

Definição 1.1.4. Dizemos que uma função Lebesgue mensurável $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence ao espaço $L^\infty(\mathbb{T}^d)$, se existir $0 < B < \infty$ tal que a medida de Lebesgue do conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : |f(\mathbf{x})| > B\}$ é nula. Se $f, g \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ e f=g q.t.p, consideramos f e g como sendo o mesmo elemento em $L^\infty(\mathbb{T}^d)$. Além disso, se $f \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$,

$$||f||_\infty = \inf\{B > 0 : \nu(\{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d : |f(\mathbf{x})| > B\}) = 0\}$$

define uma norma em $L^\infty(\mathbb{T}^d)$.

Definição 1.1.5. Seja $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ e $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. O $\mathbf{m}-$ésimo coeficiente de Fourier da função f, denotado por $\widehat{f}(\mathbf{m})$, é definido por

$$\widehat{f}(\mathbf{m}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}).$$

Definição 1.1.6. Dada $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, definimos a série de Fourier da função f por

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{m})e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}. \tag{1.1}$$

Definição 1.1.7. Sejam $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{T}^d$. Denotaremos por $\bar{f}, \widetilde{f}$ e $\tau^{\mathbf{y}} f$ as funções de $\mathbb{T}^d$ em $\mathbb{C}$ definidas por $\bar{f}(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$, $\widetilde{f}(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ e $\tau^{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. O produto de convolução de duas funções f e g de $L^1(\mathbb{T}^d)$, denotado por $f * g$, é definido por

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}).$$

Teorema 1.1.8 (Desigualdade de Young, (STEIN, 1970), p. 31)**.** Se $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $f \in L^q(\mathbb{T}^d)$ e $g \in L^p(\mathbb{T}^d)$, então $f * g \in L^s(\mathbb{T}^d)$, onde $1/s = 1/p + 1/q - 1$. Além disso, temos que

$$||f * g||_s \leqslant ||f||_q ||g||_p.$$

Proposição 1.1.9. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{T}^d$. Então para todo $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$, temos

(a) $\widehat{f+g}(\mathbf{m}) = \widehat{f}(\mathbf{m}) + \widehat{g}(\mathbf{m})$,

(b) $\widehat{\lambda f}(\mathbf{m}) = \lambda \widehat{f}(\mathbf{m})$,

(c) $\widehat{\bar{f}}(\mathbf{m}) = \overline{\widehat{f}(-\mathbf{m})}$,

(d) $\widehat{\widetilde{f}}(\mathbf{m}) = \widehat{f}(-\mathbf{m})$,

(e) $\widehat{\tau^{\mathbf{y}} f}(\mathbf{m}) = \widehat{f}(\mathbf{m})e^{-i\mathbf{m}\cdot\mathbf{y}}$,

(f) $\widehat{e^{i\mathbf{k}(\cdot)} f}(\mathbf{m}) = \widehat{f}(\mathbf{m}-\mathbf{k})$,

(g) $\widehat{f}(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})$,

(h) $\sup_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{m})| \leqslant ||f||_1$,

(i) $\widehat{f * g}(\mathbf{m}) = \widehat{f}(\mathbf{m})\widehat{g}(\mathbf{m})$.

Definição 1.1.10. Um polinômio trigonométrico em $\mathbb{T}^d$ é uma função da forma

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{m}} e^{i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}},$$

onde $(a_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}$, é uma sequência finitamente suportada em $\mathbb{Z}^d$, isto é, $a_{\mathbf{m}} \neq 0$ apenas para um número finito de elementos $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$. O grau de P é o maior valor de $|q_1| + \cdots + |q_d|$ tal que $a_{\mathbf{q}} \neq 0$, onde $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbb{Z}^d$. Denotamos por $\mathcal{P}$ o espaço formado por todos os polinômios trigonométricos.

Proposição 1.1.11. O conjunto dos polinômios trigonométricos é denso em $L^p(\mathbb{T}^d)$, para $1 \leqslant p < \infty$.

Proposição 1.1.12. Se $f, g \in L^1(\mathbb{T}^d)$ satisfazem $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$, para todo $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d$, então $f = g$ em quase todo ponto.

Observação 1.1.13. Consideremos o espaço de Hilbert complexo $L^2(\mathbb{T}^d)$, munido do produto interno usual

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}d\nu(\mathbf{x}), \quad f, g \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

e para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, seja $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Sabemos que $(L^2(\mathbb{T}^d), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço de Hilbert complexo e que a família $\{\phi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ é um sistema ortonormal completo de $L^2(\mathbb{T}^d)$, isto é:

(i) $\langle \phi_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{m}}\rangle = 0$, se $\mathbf{k} \neq \mathbf{m}$;

(ii) $||\phi_{\mathbf{k}}||_2 = 1, \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$;

(iii) Se $f \in L^2(\mathbb{T}^d)$ e $\langle f, \phi_{\mathbf{k}}\rangle = \widehat{f}(\mathbf{k}) = 0, \ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, então $f = 0$.

Temos também para $f, g \in L^2(\mathbb{T}^d)$:

$$||f||_2^2 = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(\mathbf{k})|^2 \quad \text{(Identidade de Plancherel)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left| f - \sum_{|\mathbf{k}|_2 \leqslant n} \widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right|\right|_2 = 0$$

e

$$\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}d\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k})\overline{\widehat{g}(\mathbf{k})} \quad \text{(Identidade de Parseval)}.$$

Definição 1.1.14. Seja R um número real não negativo. Os núcleos esférico D_R e quadrado D_R^* de Dirichlet no toro $\mathbb{T}^d$ são definidos respectivamente por

$$D_R(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d, \ |\mathbf{k}|_2\leqslant R} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad e \quad D_R^*(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d, \ |\mathbf{k}|_\infty\leqslant R} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Os núcleos esférico e quadrado de Dirichlet são polinômios trigonométricos em $\mathbb{T}^d$.

Definição 1.1.15. Para $R \in \mathbb{R}, \ R \geqslant 0$, chamamos as expressões

$$S_R(f)(\mathbf{x}) = (f * D_R)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d, \ |\mathbf{k}|_2\leqslant R} \widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

e

$$S_R^*(f)(\mathbf{x}) = (f * D_R^*)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d, \ |\mathbf{k}|_\infty\leqslant R} \widehat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

de soma parcial esférica e soma parcial quadrada de Fourier da função f, respectivamente.

1.2 Alguns Resultados sobre Análise no Toro

Nesta seção apresentamos alguns resultados de análise no toro que serão usados em capítulos posteriores. A referência para esta seção é (FOLLAND, 1984).

Teorema 1.2.1 (Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, (FOLLAND, 1984), p.193)**.** Sejam $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$ e para $0 < t < 1$ sejam p_t e q_t dados por

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Suponhamos que T seja uma aplicação linear de $L^{p_0}(\mathbb{T}^d) + L^{p_1}(\mathbb{T}^d)$ em $L^{q_0}(\mathbb{T}^d) + L^{q_1}(\mathbb{T}^d)$ tal que

$$||T(f)||_{q_0} \leqslant M_0 ||f||_{p_0}, \ f \in L^{p_0}(\mathbb{T}^d)$$

e

$$||T(f)||_{q_1} \leqslant M_1 ||f||_{p_1}, \ f \in L^{p_1}(\mathbb{T}^d).$$

Então para cada $0 < t < 1$,

$$||T(f)||_{q_t} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t ||f||_{p_t}, \ f \in L^{p_t}(\mathbb{T}^d).$$

Definição 1.2.2. Sejam $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ uma sequência de números complexos. Se a sequência $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ onde $S_m = \sum\limits_{|\mathbf{k}|_2 \leqslant m} a_{\mathbf{k}}$, converge em $\mathbb{C}$, dizemos que a série $\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}}$ é convergente. Se a série $\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}}$ é convergente, o limite da sequência $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é chamado de soma da série e será denotado também por $\sum\limits_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}}$.

Definição 1.2.3. Dizemos que uma sequência de números complexos $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ pertence ao espaço $l^p, \ 1 \leqslant p \leqslant \infty$, se

$$||(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}||_p = \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{k}}|^p \right)^{1/p} < \infty, \ 1 \leqslant p < \infty,$$

$$||(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}||_\infty = \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{k}}|.$$

Observamos que a função $||\cdot|| : l^q \to \mathbb{R}$ é uma norma em l^q e que l^q, munido dessa norma, é um espaço de Banach.

Teorema 1.2.4 (Desigualdade de Hausdorff-Young, (FOLLAND, 1984), p.240)**.** Se $f \in L^p(\mathbb{T}^d), 1 \leqslant p \leqslant 2$ e $1/p + 1/q = 1$, então $(\widehat{f}(\mathbf{k}))_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \in l^q$ e

$$\left|\left| \left(\widehat{f}(\mathbf{k}) \right)_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \right|\right|_q \leqslant ||f||_p.$$

Notação 1.2.5. Denotaremos por $C(\mathbb{T}^d)$ o espaço vetorial real formado por todas as funções contínuas $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ munido da norma da convergência uniforme.

Notação 1.2.6. Seja $K \in C(\mathbb{T}^d)$ e $p \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Denotamos

$$U_p = \{f \in L^p(\mathbb{T}^d) : ||f||_p \leqslant 1\}$$

e

$$K * U_p = \{K * f : f \in U_p\}.$$

Corolário 1.2.7. Se $f \in L^q(\mathbb{T}^d), 1 \leqslant p \leqslant 2$ e $1/p + 1/q = 1$, então

$$||f||_q \leqslant \left|\left|\left(\widehat{f}(\mathbf{k})\right)_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\right|\right|_p . \tag{1.2}$$

Demonstração: Usando argumentos de dualidade (ver (FOLLAND, 1984), p. 180) obtemos

$$||f||_q = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})\right| : g \in U_p\right\}. \tag{1.3}$$

No supremo acima podemos trocar $g \in U_p$ por $g \in U_p \cap L^2(\mathbb{T}^d)$ pois $U_p \cap L^2(\mathbb{T}^d)$ é denso em U_p. Como $f \in L^q(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ e $g \in U_p \cap L^2(\mathbb{T}^d)$, segue pela Identidade de Parseval e pela desigualdade de Hölder para os espaços l^p que

$$\left|\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})\right| = \left|\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(\mathbf{k})\widehat{g}(\mathbf{k})\right| \leqslant \left|\left|\left(\widehat{f}(\mathbf{k})\right)_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\right|\right|_p \ ||(\widehat{g}(\mathbf{k}))_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}||_q .$$

Agora, pela desigualdade de Hausdorff-Young,

$$||(\widehat{g}(\mathbf{k}))_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}||_q \leqslant ||g||_p \leqslant 1$$

e assim

$$\left|\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})\right| \leqslant \left|\left|\left(\widehat{f}(\mathbf{k})\right)_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\right|\right|_p .$$

Portanto (1.2) segue de (1.3). □

Observação 1.2.8. Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e seja p' tal que $1/p + 1/p' = 1$. Então, para $g \in L^{p'}(\mathbb{T}^d)$ temos

$$||g||_{p'} = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})\right| : f \in U_p\right\}.$$

Consideremos uma aplicação linear $T : L^p(\mathbb{T}^d) \to L^q(\mathbb{T}^d)$ limitada, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, isto é, existe uma constante positiva C, tal que, para toda $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$,

$$||T(f)||_q \leqslant C||f||_p.$$

Denotemos

$$||T||_{p,q} = \sup\{||T(f)||_q : f \in U_p\} < \infty.$$

Sejam p', q' tais que $1/p + 1/p' = 1$ e $1/q + 1/q' = 1$ e suponhamos que

$$\int_{\mathbb{T}^d} T(g)(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} g(\mathbf{x})T(f)(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})$$

para toda $g \in L^p(\mathbb{T}^d)$ e $f \in L^{q'}(\mathbb{T}^d)$. Então

$$\begin{aligned}
||T||_{q',p'} &= \sup\{||T(f)||_{p'} : f \in U_{q'}\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}^d} T(f)(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})\right| : g \in U_p,\ f \in U_{q'}\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})T(g)(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})\right| : f \in U_{q'},\ g \in U_p\right\} \\
&= \sup\{||T(g)||_q : g \in U_p\} \\
&= ||T||_{p,q}.
\end{aligned}$$

Portanto, T está bem definido como um operador de $L^{q'}(\mathbb{T}^d)$ em $L^{p'}(\mathbb{T}^d)$ e temos que $||T||_{q',p'} = ||T||_{p,q}$.

Observação 1.2.9. Seja $(a_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d}$ uma sequência de números reais tal que $a_{\mathbf{l}} = a_{-\mathbf{l}}$ para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ e

$$\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{d}}} |a_{\mathbf{l}}| < \infty.$$

Consideremos o núcleo $K(\mathbf{x})$ dado por

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}.$$

Pelo Teorema 2.1.9 temos que K é uma função real, contínua e par. Consideremos o operador de convolução definido para $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ por

$$Tf(x) = K * f(x),\ x \in \mathbb{T}^d. \tag{1.4}$$

Como K é uma função contínua sobre $\mathbb{T}^d$, K é limitada, assim pela Desigualdade de Young, para toda $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $Tf \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ e

$$||Tf||_\infty = ||K * f||_\infty \leqslant ||K||_\infty ||f||_1. \tag{1.5}$$

Se $p, q \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$, então

$$||Tf||_q \leqslant ||Tf||_\infty \leqslant ||K||_\infty ||f||_1 \leqslant ||K||_\infty ||f||_p$$

e assim T é um operador linear limitado de $L^p(\mathbb{T}^d)$ em $L^q(\mathbb{T}^d)$.

Seja $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Como a série

$$\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \hat{f}(\mathbf{l}) e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}$$

converge absolutamente pois

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{l}} \hat{f}(\mathbf{l}) e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}| &= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{l}}||\hat{f}(\mathbf{l})| \\
&\leqslant ||f||_1 \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{l}}| = C||f||_1,
\end{aligned}$$

então podemos definir $\tilde{T}f$ por

$$\tilde{T}f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}\hat{f}(\mathbf{l})e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}.$$

Temos que $\tilde{T}$ é um operador linear e

$$||\tilde{T}f||_\infty \leqslant C||f||_1, \ \ f \in L^1(\mathbb{T}^d).$$

Para $f \in \mathcal{H}$ (ver Proposição 1.3.2) usando (2.20), obtemos

$$\begin{aligned}
Tf(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x}-\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}e^{i\mathbf{l}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right)\left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\right) d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}\hat{f}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{y}}\, d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}\hat{f}(\mathbf{l})e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \tilde{T}f(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Como T e $\tilde{T}$ são limitados de $L^1(\mathbb{T}^d)$ em $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ e $\mathcal{H}$ é denso em $L^1(\mathbb{T}^d)$, podemos concluir que $Tf = \tilde{T}f$ para toda $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, isto é, para $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ temos

$$Tf(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}\hat{f}(\mathbf{l})e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}. \tag{1.6}$$

Para $f, g \in L^2(\mathbb{T}^d)$, usando a identidade de Parseval, a Proposição 1.1.9(c) e o fato que $a_{\mathbf{l}} = a_{-\mathbf{l}}$ para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} Tf(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{Tf}(\mathbf{l})\overline{\hat{\overline{g}}(\mathbf{l})} \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}\hat{f}(\mathbf{l})\hat{g}(-\mathbf{l}) \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}\hat{f}(-\mathbf{l})\hat{g}(\mathbf{l}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x})Tg(\mathbf{x})\, d\nu(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Então pela Observação 1.2.8 temos

$$||T||_{p,q} = ||T||_{q',p'},$$

para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, onde p' e q' satisfazem $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1$.

1.3 Operadores Multiplicadores sobre o Toro

Nesta seção definimos operadores multiplicadores sobre o toro e apresentamos resultados que serão usados no capítulo sobre aplicações desta tese. As referências para esta seção são (CHAMIZO; IWANIEC, 1995), (HEATH-BROWN, 1999) e (HUXLEY, 2003).

Definição 1.3.1. Para $l, k \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_l = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_2 \leqslant l\}, \quad A_l^* = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : |\mathbf{k}|_\infty \leqslant l\},$$

$$\mathcal{H}_l = [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in A_l \backslash A_{l-1}], \ \mathcal{H}_l^* = [e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in A_l^* \backslash A_{l-1}^*],$$

$$d_l = \dim \mathcal{H}_l, \quad d_l^* = \dim \mathcal{H}_l^*,$$

onde $A_{-1} = \varnothing$ e $[f_j : j \in \Gamma]$ denota o espaço vetorial gerado pelas funções $f_j : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, com j pertencente ao conjunto de índices Γ.

Proposição 1.3.2. O espaço vetorial $\mathcal{H}$ gerado pela família $\{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d\}$ é denso em $L^p(\mathbb{T}^d)$, para $1 \leqslant p < \infty$.

Observação 1.3.3. O problema do círculo de Gauss tem mais de um século, é uma questão simples de contagem com consequências muito complexas. Consiste em contar os pontos de coordenadas inteiras contidos num círculo de raio R e de centro na origem de $\mathbb{R}^2$. Este número pode ser escrito na forma

$$N(R) = \pi R^2 + E(R),$$

onde $E(R)$ é um termo de erro. Gauss demonstrou de uma forma bastante elementar, que existe uma constante $C > 0$ e um número $0 < \theta \leqslant 1$ tal que $E(R) \leqslant CR^\theta$ para todo $R > 0$.

Uma grande quantidade de conteúdo matemático tem sido construido em torno desse problema. Os trabalhos mais recentes nesta direção têm se concentrado em encontrar valores cada vez menores para o expoente θ. Em (HUXLEY, 2003) foi demonstrado que a estimativa $E(R) \leqslant CR^\theta$ é verdadeira para qualquer $\theta > 131/208$.

Para $d \in \mathbb{N}$ e $R > 0$ seja $B_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}|_2 \leqslant R\}$. A quantidade de pontos de coordenadas inteiras contidos na bola fechada B_R de raio R é dada por

$$N_d(R) = Vol(B_R) + E_d(R),$$

onde $E_d(R)$ denota o termo do erro. Como

$$Vol(B_R) = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} R^d,$$

segue que

$$N_d(R) = \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)}\right) R^d + E_d(R).$$

Denotemos

$$\theta_d = \inf\{\alpha : E_d(R) = \mathcal{O}(R^\alpha)\}.$$

Para $d = 1$ temos $\theta_1 = 0$ e é conhecido que para $d \geqslant 4$ temos $\theta_d = d - 2$. O valor de θ_d continua em aberto nos casos $d = 2$ e $d = 3$. É conhecido que $1/2 \leqslant \theta_2 \leqslant 1$ e pelo que vimos acima $\theta_2 \leqslant 131/208$. Para o caso $d = 3$ é conhecido que $1 \leqslant \theta_3 \leqslant 2$. Foi demonstrado em (CHAMIZO; IWANIEC, 1995) que a estimativa $E_3(R) \leqslant CR^\theta$ é válida para $\theta = 29/22$ e em (HEATH-BROWN, 1999) que é válida para $\theta = 21/16$ e desta forma $\theta_3 \leqslant 21/16 < 29/22$.

Proposição 1.3.4. Dado $d \geqslant 2$, seja $\theta = 0,63$ se $d = 2$, $\theta = 21/16 = 1,3125$ se $d = 3$ e $\theta = d - 2$ se $d \geqslant 4$. Então existem constantes positivas C_1 e C_2, tal que, para todo $l \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} - C_2 l^\theta \leqslant d_l \leqslant \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + C_1 l^\theta.$$

Em particular $d_l \asymp l^{d-1}$.

Demonstração: Segue da definição de $\mathcal{H}_l$ que

$$\begin{aligned} d_l &= \#A_l - \#A_{l-1} = N_d(l) - N_d(l-1) \\ &= \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} l^d + E_d(l)\right) - \left(\frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} (l-1)^d + E_d(l-1)\right) \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(d/2)} (l^d - (l-1)^d) + (E_d(l) - E_d(l-1)). \end{aligned}$$

Temos

$$l^d - (l-1)^d = dl^{d-1} - \frac{d(d-1)}{2} l^{d-2} + \frac{d(d-1)(d-2)}{3} l^{d-3} - \cdots \pm 1,$$

assim

$$dl^{d-1} - \frac{d(d-1)}{2} l^{d-2} \leqslant l^d - (l-1)^d \leqslant dl^{d-1}$$

e portanto

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} - \frac{\pi^{d/2}(d-1)}{\Gamma(d/2)} l^{d-2} + E_d(l) - E_d(l-1) \leqslant d_l \leqslant \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + E_d(l) - E_d(l-1).$$

Por hipótese

$$|E_d(l) - E_d(l-1)| \leqslant |E_d(l)| + |E_d(l-1)| \leqslant C_1 l^\theta$$

e logo

$$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} - C_2 l^\theta \leqslant d_l \leqslant \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} l^{d-1} + C_1 l^\theta, \tag{1.7}$$

pois $d - 2 \leqslant \theta < d - 1$. Como consequência das desigualdades em (1.7) segue que $d_l \asymp l^{d-1}$.
□

Observação 1.3.5. Verificamos facilmente que para todo $l \in \mathbb{N}$

$$d_l^* = (2l+1)^d - (2(l-1)+1)^d \asymp l^{d-1}.$$

Definição 1.3.6. Seja $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, definimos

$$\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|_2), \qquad e \qquad \lambda^*_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|_\infty).$$

Denotaremos por Λ e Λ_* os operadores lineares definidos para $\varphi \in \mathcal{H}$ (ver Proposição 1.3.2) por

$$\Lambda\varphi = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

e

$$\Lambda_*\varphi = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \lambda^*_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Denominaremos Λ (respectivamente Λ_*) como sendo a sequência de multiplicadores $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ (respectivamente $\Lambda_* = \{\lambda^*_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$).

Observamos que se $1 \leqslant p < \infty$, temos $\mathcal{H}$ denso em $L^p(\mathbb{T}^d)$. Assim, se $\sup\{||\Lambda\varphi||_p : \varphi \in \mathcal{H}, ||\varphi||_p \leqslant 1\} < \infty$, então o operador Λ pode ser extendido a toda função $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ e é limitado sobre $L^p(\mathbb{T}^d)$. O mesmo vale para Λ_*.

Definição 1.3.7. Sejam $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ e $\Lambda_* = \{\lambda^*_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ como na Definição 1.3.6 e sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Se para todo $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ existirem funções $f = \Lambda\varphi \in L^q(\mathbb{T}^d)$ e $f^* = \Lambda_*\varphi \in L^q(\mathbb{T}^d)$ com expansões formais em série de Fourier dadas por

$$f \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \lambda_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

e

$$f^* \sim \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \lambda^*_{\mathbf{k}} \widehat{\varphi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

respectivamente, tal que $||\Lambda||_{p,q} = \sup\{||\Lambda\varphi||_q : \varphi \in U_p\} < \infty$ e $||\Lambda_*||_{p,q} = \sup\{||\Lambda_*\varphi||_q : \varphi \in U_p\} < \infty$, dizemos que Λ e Λ_* são operadores multiplicadores limitados de $L^p(\mathbb{T}^d)$ em $L^q(\mathbb{T}^d)$, com normas $||\Lambda||_{p,q}$ e $||\Lambda_*||_{p,q}$ respectivamente, onde U_p denota a bola unitária fechada do espaço $L^p(\mathbb{T}^d)$.

Observação 1.3.8. Seja $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$ e $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{C}^d$. Escrevemos $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_d$, $\mathbf{m}^\beta = {m_1}^{\beta_1} {m_2}^{\beta_2} \cdots {m_d}^{\beta_d}$. Denotamos também o módulo de um número complexo z por $|z|$. Verificamos facilmente que $|(i\mathbf{m})^\beta| = |i^{|\beta|}\mathbf{m}^\beta| \leqslant |\mathbf{m}|_2^{|\beta|}$. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > |\beta| + d$ e considere o núcleo

$$K_1(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|_2^{-\gamma}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Dada $\varphi \in U_1$,

$$K_1 * \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|_2^{-\gamma}\ \hat{\varphi}(\mathbf{k})\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |(i\mathbf{k})^\beta|\ |\mathbf{k}|_2^{-\gamma}\ |\hat{\varphi}(\mathbf{k})|\ |e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}| &\leqslant \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\mathbf{k}|_2^{|\beta|}\ |\mathbf{k}|_2^{-\gamma}\ ||\varphi||_1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}\in A_n\setminus A_{n-1}} |\mathbf{k}|_2^{|\beta|-\gamma} \\
&\leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1}(n-1)^{|\beta|-\gamma} \\
&\leqslant C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(\gamma-|\beta|-d+1)}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma - |\beta| - d + 1 > 1$, então a série

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} (i\mathbf{k})^\beta\ |\mathbf{k}|_2^{-\gamma}\ \hat{\varphi}(\mathbf{k})\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

converge uniformemente em $\mathbb{T}^d$. Podemos então concluir que a derivada $\partial^\beta(K_1 * \varphi)$ está bem definida e que

$$\partial^\beta(K_1 * \varphi)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} (i\mathbf{k})^\beta\ |\mathbf{k}|_2^{-\gamma}\ \hat{\varphi}(\mathbf{k})\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Portanto as deridadas parciais $\partial^\beta(K_1 * \varphi)$ existem e estão bem definidas para todo $\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$, com $|\beta| < \gamma - d$. Assim $K_1 * U_p$ é um conjunto de funções finitamente diferenciáveis pois $K_1 * U_p \subset K_1 * U_1$, para qualquer $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Observação 1.3.9. Sejam $\alpha,\ r$ dois números reais positivos e consideremos o núcleo

$$K_2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|\mathbf{k}|_2^r}\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Dada $\varphi \in U_1$,

$$K_2(\mathbf{x}) * \varphi = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|\mathbf{k}|_2^r}\ \hat{\varphi}(\mathbf{k})\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Se $\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|\mathbf{k}|_2^r}\ |\hat{\varphi}(\mathbf{k})|\ |(i\mathbf{k})^\beta|\ |e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}| &\leqslant \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|\mathbf{k}|_2^r}\ ||\varphi||_1\ |\mathbf{k}|_2^{|\beta|} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}\in A_n\setminus A_{n-1}} e^{-\alpha|\mathbf{k}|_2^r}\ |\mathbf{k}|_2^{|\beta|} \\
&\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{d+|\beta|-1}\ e^{-\alpha(n-1)^r} < \infty
\end{aligned}$$

e portanto a série

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|\mathbf{k}|_2^r}\ \hat{\varphi}(\mathbf{k})\ (i\mathbf{k})^\beta\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

converge uniformemente em $\mathbb{T}^d$. Podemos então concluir que a derivada $\partial^\beta(K_2 * \varphi)$ esta bem definida e que

$$\partial^\beta(K_2 * \varphi)(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{-\alpha|\mathbf{k}|_2^r}\ \hat{\varphi}(\mathbf{k})\ (i\mathbf{k})^\beta\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Desta forma a função $K_2 * \varphi$ é infinitamente diferenciável e $K_2 * U_p$ é um conjunto de funções infinitamente diferenciáveis pois $K_2 * U_p \subset K_2 * U_1$, para qualquer $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Observação 1.3.10. Sejam K_2 o núcleo da Observação 1.3.9 com $r \geqslant 1$ e $\varphi \in U_1$. Vamos mostrar que $K_2 * \varphi$ é uma função analítica. Se $p \in \mathbb{N}$ então

$$\int t^p e^{-\alpha t} dt = -e^{-\alpha t}\left(\frac{1}{\alpha}t^p + \frac{p}{\alpha^2}t^{p-1} + \frac{p(p-1)}{\alpha^3}t^{p-2} + \cdots + \frac{p!}{\alpha^{p+1}}\right)$$

e assim

$$\int_0^\infty t^p e^{-\alpha t} dt = \frac{p!}{\alpha^{p+1}}.$$

Se $\beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^d$, pelas contas da Observação 1.3.9 temos que

$$\begin{aligned}
||\partial^\beta(K_2 * \varphi)||_\infty &\leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty} n^{d+|\beta|-1}\ e^{-\alpha(n-1)^r}\\
&\leqslant C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{d+|\beta|-1}\ e^{-\alpha n^r}\\
&\leqslant C_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{d+|\beta|-1}\ e^{-\alpha n}\\
&\leqslant C_3 \int_0^\infty t^{d+|\beta|-1}\ e^{-\alpha t} dt\\
&= C_3 \frac{(d+|\beta|-1)!}{\alpha^{d+|\beta|}}.
\end{aligned}$$

O n-ésimo resto de Taylor de $K_2 * \varphi$ em $\mathbf{x}_0$ é dado por

$$E_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{|\beta|=n+1} \partial^\beta(K_2 * \varphi)(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^\beta, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d,$$

onde $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}^d$. Logo se $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|_2 < s$, $s > 0$, temos

$$\begin{aligned}
|E_n(\mathbf{x})| &\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sum_{|\beta|=n+1} ||\partial^\beta(K_2 * \varphi)||_\infty\ s^{n+1}\\
&\leqslant C_3 \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{|\beta|=n+1} \frac{(d+|\beta|-1)!}{\alpha^{d+|\beta|}}\\
&\leqslant C_4 \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(d+n)!}{\alpha^{d+n+1}} n^{d-1}\\
&\leqslant C_5 \frac{s^{n+1}}{\alpha^{d+n+1}} n^{2d-2}.
\end{aligned}$$

Tomando $s = \alpha/e$ obtemos

$$|E_n(\mathbf{x})| \leqslant C_6 \frac{n^{2d-2}}{e^{n+1}},$$

e assim

$$\lim_{n\to\infty} E_n(\mathbf{x}) = 0,$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_2 < s$. Podemos então concluir que a série de Taylor de $K_2 * \varphi$ em torno de $\mathbf{x}_0$ converge para $K_2 * \varphi(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ tal que $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_2 < s$, isto é,

$$K_2 * \varphi(\mathbf{x}) = K_2 * \varphi(\mathbf{x}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{|\beta|=n} \partial^\beta (K_2 * \varphi)(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\beta, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|_2 < s.$$

Portanto a função $K_2 * \varphi$ é analítica em $\mathbb{T}^d$. Assim o conjunto $K_2 * U_p$, é um conjunto de funções analíticas para qualquer $r \geqslant 1$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

2 sk-Splines

Neste capítulo desenvolvemos a teoria geral dos sk-splines sobre o toro e demonstramos os dois resultados mais importantes que fornecem estimativas para aproximação de uma dada função por sk-splines interpolantes.

2.1 Definições e Resultados Básicos

Nesta seção damos a definição de sk-spline e demonstramos alguns resultados básicos que serão usados nas seções seguintes deste capítulo.

Notação 2.1.1. Seja $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Para $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ denotamos $x_{k_l} = \pi k_l / n_l$, $1 \leqslant l \leqslant d$, $l \in \mathbb{Z}$ e $\mathbf{x_k} = (x_{k_1}, \ldots, x_{k_d})$. Também denotamos

$$\Omega_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}^d : \ 0 \leqslant j_l \leqslant 2n_l - 1, \ 1 \leqslant l \leqslant d\},$$

$$\Lambda_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{x_k} : \mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}\}, \qquad N = \#\Omega_{\mathbf{n}} = \#\Lambda_{\mathbf{n}} = 2^d n_1 n_2 \cdots n_d.$$

Definição 2.1.2. Para um núcleo fixado $K \in C(\mathbb{T}^d)$, um sk-spline sobre $\Lambda_{\mathbf{n}}$ é uma função representada na forma

$$sk_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = c + \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{k}} K(\mathbf{x} - \mathbf{x_k}),$$

onde os coeficientes c, $c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}$, satisfazem a condição

$$\sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{k}} = 0.$$

Os pontos $\mathbf{x_k}$ são chamados de nós do sk-spline $sk(\mathbf{x})$.

Observação 2.1.3. O espaço vetorial real formado por todos os sk-splines sobre $\Lambda_{\mathbf{n}}$, associados ao núcleo K será denotado por $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$. Como o espaço vetorial V gerado pelo conjunto de funções $\{1, K(\mathbf{x} - \mathbf{x_k}), \ \mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}\}$ tem dimensão no máximo $N + 1$ e $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$ é o subespaço de V formado pelas funções cujos coeficientes satisfazem a condição $\sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{k}} = 0$, então $\dim SK(\Lambda_{\mathbf{n}}) \leqslant N$.

A partir do Teorema 2.1.9, vamos sempre considerar o núcleo K uma função real, par e contínua sobre $\mathbb{T}^d$.

Lema 2.1.4. Seja $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$. Então

$$\sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k}} = \begin{cases} N, & \mathbf{l} \equiv \mathbf{0} \ \mathrm{mod}(2\mathbf{n}), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração: Suponhamos $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$ com $\mathbf{l} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})$, isto é, $l_j \equiv 0 \bmod(2n_j)$ para $1 \leqslant j \leqslant d$. Então para cada $1 \leqslant j \leqslant d$ existe $p_j \in \mathbb{Z}$ tal que $l_j = 2n_j p_j$. Temos

$$l_j x_{k_j} = 2n_j p_j \frac{\pi k_j}{n_j} = 2\pi p_j k_j,$$

assim $e^{il_j x_{k_j}} = e^{i2\pi p_j k_j} = 1$ e logo

$$e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}} = e^{\sum_{j=1}^{d} i l_j k_j} = \prod_{j=1}^{d} e^{i l_j k_j} = 1.$$

Portanto segue que

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}} = 1 + \cdots + 1 = N.$$

Suponhamos agora que $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$ com $\mathbf{l} \not\equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})$. Então existe $1 \leqslant j \leqslant d$ tal que $l_j \not\equiv 0 \bmod(2n_j)$ e assim existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $l_j = 2n_j a + b$, $1 \leqslant b \leqslant 2n_j - 1$. Como

$$\{l_j x_{k_j} : 0 \leqslant k_j \leqslant 2n_j - 1\} = \{2\pi a k_j + \frac{\pi b k_j}{n_j} : 0 \leqslant k_j \leqslant 2n_j - 1\},$$

temos

$$\begin{aligned} \{e^{il_j x_{k_j}} : 0 \leqslant k_j \leqslant 2n_j - 1\} &= \{e^{i2\pi a k_j} e^{i\pi b k_j/n_j} : 0 \leqslant k_j \leqslant 2n_j - 1\} \\ &= \{e^{i\pi b k_j/n_j} : 0 \leqslant k_j \leqslant 2n_j - 1\} \\ &= \{e^{i\pi k_j/n_j} : 0 \leqslant k_j \leqslant 2n_j - 1\} \\ &= \{e^{i x_{k_j}} : 0 \leqslant k_j \leqslant 2n_j - 1\}, \end{aligned}$$

que é o conjunto formado por todas as $2n_j$ raízes da unidade. Portanto

$$\sum_{k_j=0}^{2n_j-1} e^{il_j x_{k_j}} = \sum_{k_j=0}^{2n_j-1} e^{i x_{k_j}} = 0$$

e assim

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}} &= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} \prod_{r=1}^{d} e^{il_r x_{k_r}} \\ &= \sum_{k_1=0}^{2n_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{2n_d-1} \prod_{r=1}^{d} e^{il_r x_{k_r}} \\ &= \sum_{k_1=0}^{2n_1-1} \cdots \sum_{k_{j-1}=0}^{2n_{j-1}-1} \sum_{k_{j+1}=0}^{2n_{j+1}-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{2n_d-1} \prod_{r=1, r\neq j}^{d} e^{il_r x_{k_r}} \sum_{k_j=0}^{2n_j-1} e^{il_j x_{k_j}} = 0. \end{aligned}$$

Completamos assim a demonstração do lema. □

Lema 2.1.5. Temos para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}) = \begin{cases} N, & \mathbf{l} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} \operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}) = 0.$$

Demonstração: Seja $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{l} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})$. Pelo Lema 2.1.4 temos

$$N = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} (\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}) + i \operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}))$$

e assim

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}) = N \quad \text{e} \quad \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} \operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}) = 0.$$

Se $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ e $\mathbf{l} \not\equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})$, então pelo Lema 2.1.4

$$0 = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} (\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}) + i \operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}))$$

e assim

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} \operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}) = 0,$$

o que completa a demonstração. □

Lema 2.1.6. Para $\mathbf{l}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ temos

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} (\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}))(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k})) = \begin{cases} N, & \mathbf{l}+\mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}) \text{ e} \\ & \mathbf{l}-\mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}), \\ N/2, & \mathbf{l}+\mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}) \text{ ou} \\ & \mathbf{l}-\mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} (\operatorname{sen}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k})) = \begin{cases} N/2, & \mathbf{l}+\mathbf{j} \not\equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}) \text{ e} \\ & \mathbf{l}-\mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}), \\ -N/2, & \mathbf{l}+\mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}) \text{ e} \\ & \mathbf{l}-\mathbf{j} \not\equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n}), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} (\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k})) = 0.$$

Demonstração: Para $\mathbf{l}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} (\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}))(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k})) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}} (\cos((\mathbf{l}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k}) + \cos((\mathbf{l}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}_\mathbf{k})),$$

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}(\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))(\,\mathrm{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}))=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}(\,\mathrm{sen}\,((\mathbf{l}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x_k})+\,\mathrm{sen}\,((\mathbf{l}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x_k}))$$

e

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}(\,\mathrm{sen}\,(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))(\,\mathrm{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}))=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}(\cos((\mathbf{l}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x_k})-\cos((\mathbf{l}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x_k})).$$

O resultado segue pelo Lema 2.1.5. □

Definição 2.1.7. Para $K\in C(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d$ e $\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d$, definimos

$$\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}}K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k}),$$

$$\rho_\mathbf{j}(\mathbf{x})=\frac{2}{N}\mathrm{Re}(\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x}))=\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}(\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})$$

e

$$\sigma_\mathbf{j}(\mathbf{x})=\frac{2}{N}\mathrm{Im}(\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x}))=\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}(\,\mathrm{sen}\,(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k}).$$

Lema 2.1.8. Sejam $\mathbf{p},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d$. Então para qualquer $\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d$,

(a) $\rho_{\mathbf{2np+j}}(\mathbf{x})=\rho_\mathbf{j}(\mathbf{x})$,
(b) $\rho_{\mathbf{2np-j}}(\mathbf{x})=\rho_\mathbf{j}(\mathbf{x})$,
(c) $\sigma_{\mathbf{2np+j}}(\mathbf{x})=\sigma_\mathbf{j}(\mathbf{x})$,
(d) $\sigma_{\mathbf{2np-j}}(\mathbf{x})=-\sigma_\mathbf{j}(\mathbf{x})$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbf{2np+j}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}e^{i(\mathbf{2np+j})\cdot\mathbf{x_k}}K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})\\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}e^{i2(\mathbf{np})\cdot\mathbf{x_k}}e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}}K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})=\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathbf{2np-j}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}e^{i(\mathbf{2np-j})\cdot\mathbf{x_k}}K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})\\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}e^{i2(\mathbf{np})\cdot\mathbf{x_k}}e^{-i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}}K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})\\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}}\overline{e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}}K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})}=\overline{\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x})}.\end{aligned}$$

Como $\rho_\mathbf{j}(\mathbf{x})=\frac{2}{N}\mathrm{Re}(\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x}))=\frac{2}{N}\mathrm{Re}(\overline{\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x})})$ e $\sigma_\mathbf{j}(\mathbf{x})=\frac{2}{N}\mathrm{Im}(\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x}))=-\frac{2}{N}\mathrm{Im}(\overline{\lambda_\mathbf{j}(\mathbf{x})})$, seguem os resultados. □

Teorema 2.1.9. Considere um núcleo K dado por

$$K(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d}a_\mathbf{l}e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}$$

onde $(a_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d}$ é uma sequência de números reais tal que

$$\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{l}}| < \infty$$

e $a_{\mathbf{l}} = a_{-\mathbf{l}}$ para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$. Então K é uma função real, contínua, par e para cada $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$,

$$\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} (a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}}\cos\left((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}\right) + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}))$$

e

$$\sigma_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} (a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}} \operatorname{sen}\left((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}\right) - a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}} \operatorname{sen}\left((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}\right)).$$

Demonstração: Para cada $m \in \mathbb{N}$ seja

$$K_m(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{l}|_2\leqslant m} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}.$$

Então para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ e $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|K_{m+r}(\mathbf{x}) - K_m(\mathbf{x})| &= \left|\sum_{m<|\mathbf{l}|_2\leqslant m+r} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}\right| \\
&\leqslant \sum_{m<|\mathbf{l}|_2\leqslant m+r} |a_{\mathbf{l}}| \\
&\leqslant \sum_{|\mathbf{l}|_2\geqslant m} |a_{\mathbf{l}}|
\end{aligned}$$

Como $\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\mathbf{l}}| < \infty$, então para qualquer $r \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d} |K_{m+r}(\mathbf{x}) - K_m(\mathbf{x})| \leqslant \lim_{m\to+\infty} \sum_{|\mathbf{l}|_2\geqslant m} |a_{\mathbf{l}}| = 0.$$

Assim $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy na norma de $C(\mathbb{T}^d)$(norma da convergência uniforme). Mas $C(\mathbb{T}^d)$ é completo e portanto existe uma função $K \in C(\mathbb{T}^d)$ tal que $K_m \to K$ uniformemente. Logo para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$,

$$K(\mathbf{x}) = \lim_{m\to+\infty} K_m(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} (a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} + a_{-\mathbf{l}} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} ((a_{\mathbf{l}} + a_{-\mathbf{l}})\cos\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}\right) + i(a_{\mathbf{l}} - a_{-\mathbf{l}}) \operatorname{sen}\left(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}\right)) \\
&= \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

e assim K é uma função real e par.

Fixemos $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ e sejam

$$A_{\mathbf{j}} = \{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{l} + \mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})\} = \{2\mathbf{np} - \mathbf{j} : \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d\},$$

$$B_{\mathbf{j}} = \{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{l} - \mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})\} = \{2\mathbf{np} + \mathbf{j} : \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Denotamos $A_{\mathbf{j}} \triangle B_{\mathbf{j}} = (A_{\mathbf{j}} \backslash B_{\mathbf{j}}) \cup (B_{\mathbf{j}} \backslash A_{\mathbf{j}})$. Segue pelo Lema 2.1.6 que

$$\sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k})) = \begin{cases} N, & \mathbf{l} \in A_{\mathbf{j}} \cap B_{\mathbf{j}}, \\ N/2, & \mathbf{l} \in A_{\mathbf{j}} \triangle B_{\mathbf{j}}, \\ 0, & \mathbf{l} \in (A_{\mathbf{j}} \cup B_{\mathbf{j}})^c \end{cases} \tag{2.2}$$

e

$$\sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k})) = \begin{cases} N/2, & \mathbf{l} \in B_{\mathbf{j}} \backslash A_{\mathbf{j}}, \\ -N/2, & \mathbf{l} \in A_{\mathbf{j}} \backslash B_{\mathbf{j}}, \\ 0, & \mathbf{l} \in (A_{\mathbf{j}} \triangle B_{\mathbf{j}})^c. \end{cases} \tag{2.3}$$

Agora usando (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} e^{i\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}} K(\mathbf{x} - \mathbf{x_k}) \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}) + i \operatorname{sen}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k})) \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \cos(\mathbf{l} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_k})) \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))(\cos(\mathbf{l} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_k}))) \\ &+ i \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))(\cos(\mathbf{l} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_k}))). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Portanto por (2.4) e pelo Lema 2.1.6

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k})) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))[(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k})) + (\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k}))] \\ &= \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} (\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x})) \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k})) \\ &+ \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} (\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x})) \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k})) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} (\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x})) \sum_{\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{j} \cdot \mathbf{x_k}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_k})). \end{aligned}$$

Então usando (2.2) obtemos

$$
\begin{aligned}
\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{l}\in A_{\mathbf{j}}\cap B_{\mathbf{j}}} N a_{\mathbf{l}}\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) + \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{l}\in A_{\mathbf{j}}\triangle B_{\mathbf{j}}} \frac{N}{2} a_{\mathbf{l}}\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) \\
&= \sum_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\cap B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&+ \sum_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\cap B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&+ \sum_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\triangle B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&+ \sum_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\triangle B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&= \sum_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\cup B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&+ \sum_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\cup B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}}\cos((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

Por (2.4) e pelo Lema 2.1.6

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}-\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k})) \\
&= \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))[(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}))(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k})) + (\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}))] \\
&= \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x})) \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k})) \\
&+ \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}(\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x})) \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k})) \\
&= \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}(\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x})) \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k})).
\end{aligned}
$$

Então usando (2.3) obtemos

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{l}\in B_{\mathbf{j}}\setminus A_{\mathbf{j}}} a_{\mathbf{l}} \operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{l}\in A_{\mathbf{j}}\setminus B_{\mathbf{j}}} a_{\mathbf{l}} \operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) \\
&= \sum_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}\in B_{\mathbf{j}}\setminus A_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&- \sum_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\setminus B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&+ \sum_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\cap B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&- \sum_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}}\cap B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&= \sum_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}\in B_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&- \sum_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}\in A_{\mathbf{j}},\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) \\
&= \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração. □

De agora em diante o núcleo K considerado irá sempre satisfazer as condições descritas no Teorema 2.1.9. Em particular, K será uma função real, contínua e par.

2.2 sk-Spline Fundamental

Nesta seção damos a definição de sk-spline fundamental e demonstramos a existência e unicidade de sk-splines interpolantes.

Definição 2.2.1. Suponhamos $\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0}) \neq 0$ para todo $\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Definimos $\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}$ por

$$\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*} \frac{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})}$$

onde $\Omega_{\mathbf{n}}^* = \Omega_{\mathbf{n}}\setminus\{(0,\ldots,0)\}$.

Lema 2.2.2. A função $\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}$ é um sk-spline.

Demonstração: Temos pela definição de $\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$ que

$$\begin{aligned}
\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*}\frac{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})}\\
&= \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*}\frac{1}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})}\left(\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}}(\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})\right)\\
&= \frac{1}{N} + \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}}\left(\frac{2}{N^2}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*}\frac{1}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})}(\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))\right)K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})\\
&= \frac{1}{N} + \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}}c_{\mathbf{k}}K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})
\end{aligned}$$

e pelo Lema2.1.5

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}}c_{\mathbf{k}} = \frac{2}{N^2}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*}\frac{1}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}}\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}) = 0.$$

Portanto $\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}$ é um $sk-$spline pela definição . □

Observação 2.2.3. O sk-spline $\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}$ será chamado de sk-spline fundamental.

Lema 2.2.4. Se $\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0}) \neq 0$ para todo $\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*$, então o sk-spline $\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}$ satisfaz

$$\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x_k}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{k}=\mathbf{0},\\ 0, & \mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*.\end{cases}$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.1.9 temos que

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x_l}) &= \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d}(a_{\mathbf{2np+j}}\cos((\mathbf{2np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x_l}) + a_{\mathbf{2np-j}}\cos((\mathbf{2np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x_l}))\\
&= \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d}[a_{\mathbf{2np+j}}[(\cos(\mathbf{2np}\cdot\mathbf{x_l}))(\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_l})) - (\operatorname{sen}(\mathbf{2np}\cdot\mathbf{x_l}))(\operatorname{sen}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_l}))]+\\
&+ a_{\mathbf{2np-j}}[(\cos(\mathbf{2np}\cdot\mathbf{x_l}))(\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_l})) + (\operatorname{sen}(\mathbf{2np}\cdot\mathbf{x_l}))(\operatorname{sen}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_l}))]]\\
&= \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d}(a_{\mathbf{2np+j}}\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_l}) + a_{\mathbf{2np-j}}\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_l}))\\
&= (\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_l}))\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d}(a_{\mathbf{2np+j}} + a_{\mathbf{2np-j}})\\
&= (\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_l}))\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})
\end{aligned}$$

pois $\cos(2\mathbf{np}\cdot\mathbf{x_l}) = 1$ e $\operatorname{sen}(2\mathbf{np}\cdot\mathbf{x_l}) = 0$ para todo $\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d$. Portanto pelo Lema 2.1.5

$$\begin{aligned}
\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x_k}) &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*}\frac{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x_k})}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})}\\
&= \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*}\frac{(\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k}))\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}}\cos(\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_k})\\
&= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j})\\
&= \begin{cases} 1, & \mathbf{k}=\mathbf{0},\\ 0, & \mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*,\end{cases}
\end{aligned}$$

e assim demonstramos o lema. □

Definição 2.2.5. Sejam f uma função definida em $\mathbb{T}^d$ e $\{\mathbf{y_j} : \mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}\}\subset\mathbb{T}^d$. Se existirem constantes $c^*, c_{\mathbf{k}}^*\in\mathbb{R}$, $\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}$ tal que

$$sk_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{y_j}) = c^* + \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{k}}^* K(\mathbf{y_j}-\mathbf{x_k}) = f(\mathbf{y_j}),\quad \mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}},$$

dizemos que o sk-spline

$$sk_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = c^* + \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{k}}^* K(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})$$

é um sk-spline interpolante de f com nós $\mathbf{x_k}$ e pontos de interpolação $\mathbf{y_k}$.

Teorema 2.2.6. Suponhamos $\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})\neq 0$ para qualquer $\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*$. Então para qualquer função f definida sobre $\mathbb{T}^d$, existe um único sk-spline interpolante de f com nós e pontos de interpolação $\mathbf{x_k}, \mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}$, que pode ser escrito na forma,

$$sk_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x_k})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_k}).$$

Demonstração: Fixemos $\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}$. Pela demonstração do Lema 2.2.2 temos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_k}) &= \frac{1}{N} + \sum_{\mathbf{l}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{l}} K(\mathbf{x}-(\mathbf{x_k}+\mathbf{x_l}))\\
&= \frac{1}{N} + \sum_{\mathbf{l}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{l}} K(\mathbf{x}-\mathbf{x_{k+l}})\\
&= \frac{1}{N} + \sum_{\mathbf{l}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{l-k}} K(\mathbf{x}-\mathbf{x_l})
\end{aligned}$$

e $\sum_{\mathbf{l}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{l-k}} = \sum_{\mathbf{l}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{l}} = 0$. Então $\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\cdot-\mathbf{x_k})$ também é um $\widetilde{sk}$-spline para todo $\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}$. Portanto a combinação linear $\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x_k})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\cdot-\mathbf{x_k})$ é um sk-spline. Aplicando o Lema 2.2.4 obtemos

$$sk_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x_l}) = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x_k})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x_l}-\mathbf{x_k}) = f(\mathbf{x_l})$$

para qualquer $\mathbf{l} \in \Omega_{\mathbf{n}}$. Podemos concluir assim que $sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)$ é um sk-spline interpolante de f com nós e pontos de interpolação $\mathbf{x_k}$.

Agora vamos demonstrar a unicidade do sk-spline interpolante associado a uma dada função. Seja $\{\mathbf{w}_j : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ uma enumeração de $\Lambda_{\mathbf{n}}$ e consideremos a aplicação linear $T : SK(\Lambda_{\mathbf{n}}) \to \mathbb{R}^N$ onde $N = \#\Omega_{\mathbf{n}} = \#\Lambda_{\mathbf{n}} = 2^d n_1 n_2 \cdots n_d$, definida por

$$T(sk_{\mathbf{n}}) = (sk_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}_1), \ldots, sk_{\mathbf{n}}(\mathbf{w}_N)).$$

Dado $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$, seja $g : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N} y_j \alpha_j \prod_{1 \leqslant l \leqslant N \quad l \neq j} |\mathbf{x} - \mathbf{w}_l|_2, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d,$$

onde

$$\alpha_j = \left(\prod_{1 \leqslant l \leqslant N, \quad l \neq j} |\mathbf{w}_j - \mathbf{w}_l|_2 \right)^{-1}, \; 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Temos que $g(\mathbf{w}_k) = y_k$ para $1 \leqslant k \leqslant N$. Se $sk_{\mathbf{n}}$ é um $sk-$spline interpolante de g então

$$T(sk_{\mathbf{n}}) = (g(\mathbf{w}_1), \ldots, g(\mathbf{w}_N)) = y.$$

Portanto segue que $I_m(T) = \mathbb{R}^N$. Como $\dim SK(\Lambda_{\mathbf{n}}) \leqslant N$ então $\dim SK(\Lambda_{\mathbf{n}}) = N$ e portanto T é um isomorfismo.

Seja f uma função definida em $\mathbb{T}^d$ e suponha que $sk_{\mathbf{n}}^1$ e $sk_{\mathbf{n}}^2$ sejam dois sk-spline interpolante de f. Então

$$T(sk_{\mathbf{n}}^1) = T(sk_{\mathbf{n}}^2) = (f(\mathbf{w}_1), \ldots, f(\mathbf{w}_N))$$

e como T é um isomorfismo, segue que $sk_{\mathbf{n}}^1 = sk_{\mathbf{n}}^2$. □

Observação 2.2.7. Seja K o núcleo dado no Teorema 2.1.9 e tal que $\rho_{\mathbf{j}}(0) \neq 0$ para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}$. Então segue do Teorema 2.2.6 que o espaço vetorial $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$ de todos sk-splines sobre $\Lambda_{\mathbf{n}}$ e associados ao núcleo K tem dimensão $N = 2^d n_1 n_2 \ldots n_d$. Em particular, se $n_1 = n_2 = \cdots = n_d = n$ temos $\dim(SK(\Lambda_{\mathbf{n}})) = (2n)^d$.

O Teorema 2.2.6 generaliza o resultado de existência e unicidade dos sk-splines interpolantes sobre o toro demonstrado em (LEVESLEY; KUSHPEL, 1999) para núcleos do tipo $K(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^{d} K_m(x_m)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$, onde K_m são funcões contínuas sobre o círculo unitário.

2.3 Aproximação por sk-Splines I

Nesta seção demonstramos um de nossos principais resultados, o Teorema 2.3.7. Este teorema nos diz como uma função da forma $f = K * \phi$, para $\phi \in L^p(\mathbb{T}^d)$, é aproximada pelos sk-splines $sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)$ no espaço $L^q(\mathbb{T}^d)$, onde $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ com $1/p - 1/q \geqslant 1/2$. Mas o resultado mais interessante para as nossas aplicações será o Corolário 2.3.9, uma vez que, a sua hipótese é mais fraca e assim, mais fácil de ser verificada.

Em todos os resultados desta seção consideramos um núcleo K como no Teorema 2.1.9 e tal que $\rho_{\mathbf{j}}(0) \neq 0$ para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{j} \in \Omega^*_{\mathbf{n}}$.

Lema 2.3.1. Para $\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ temos,

$$\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x} - \mathbf{x_j}) = \rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}) + \sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) \operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}).$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.1.9,

$$\begin{aligned}
& \rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x} - \mathbf{x_j}) \\
= & \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} (a_{2\mathbf{np}+\mathbf{l}} \cos((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_j})) + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{l}} \cos((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_j}))) \\
= & \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} \{a_{2\mathbf{np}+\mathbf{l}}[(\cos((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))(\cos((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x_j})) \\
+ & (\operatorname{sen}((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))(\operatorname{sen}((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x_j})] \\
+ & a_{2\mathbf{np}-\mathbf{l}}[(\cos((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))(\cos((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x_j})) \\
+ & (\operatorname{sen}((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))(\operatorname{sen}((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x_j}))]\} \\
= & \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} \{a_{2\mathbf{np}+\mathbf{l}}[(\cos((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))[(\cos(2\mathbf{np} \cdot \mathbf{x_j}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j})) \\
- & (\operatorname{sen}(2\mathbf{np} \cdot \mathbf{x_j}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}))] \\
+ & (\operatorname{sen}((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))[(\operatorname{sen}(2\mathbf{np} \cdot \mathbf{x_j}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j})) + (\cos(2\mathbf{np} \cdot \mathbf{x_j}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}))]] \\
+ & a_{2\mathbf{np}-\mathbf{l}}[(\cos((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))[(\cos(2\mathbf{np} \cdot \mathbf{x_j}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j})) \\
+ & (\operatorname{sen}(2\mathbf{np} \cdot \mathbf{x_j}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}))] \\
+ & (\operatorname{sen}((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))[(\operatorname{sen}(2\mathbf{np} \cdot \mathbf{x_j}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j})) - (\cos(2\mathbf{np} \cdot \mathbf{x_j}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}))]]\} \\
= & \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} \{a_{2\mathbf{np}+\mathbf{l}}[(\cos((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j})) + (\operatorname{sen}((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}))] \\
+ & a_{2\mathbf{np}-\mathbf{l}}[(\cos((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))(\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j})) - (\operatorname{sen}((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}))(\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}))]\} \\
= & \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} (\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}))[a_{2\mathbf{np}+\mathbf{l}} \cos((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}) + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{l}} \cos((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x})] \\
+ & \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} (\operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}))[a_{2\mathbf{np}+\mathbf{l}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np} + \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x}) - a_{2\mathbf{np}-\mathbf{l}} \operatorname{sen}((2\mathbf{np} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x})] \\
= & \rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}) + \sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) \operatorname{sen}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}),
\end{aligned}$$

portanto o lema está demonstrado. □

Lema 2.3.2. Para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{l} \not\equiv \mathbf{0} \mod(2\mathbf{n})$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$,

$$\sum_{\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}} e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{x_j}} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x_j}) = \frac{\lambda_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}.$$

Demonstração: Vamos demonstrar o resultado primeiramente para a parte real. Consideremos os conjuntos $A_{\mathbf{l}}$ e $B_{\mathbf{l}}$ introduzidos na demonstração do Teorema 2.1.9, isto é,

$$A_{\mathbf{l}} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{l} + \mathbf{k} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})\} = \{2\mathbf{n}\mathbf{p} - \mathbf{l} : \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d\},$$
$$B_{\mathbf{l}} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d : \mathbf{l} - \mathbf{k} \equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})\} = \{2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{l} : \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Usando o Lema 2.3.1 e os Lemas 2.1.5 e 2.1.6, usando (2.2) e o fato de $\mathbf{l} \not\equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})$ temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j}) \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\left\{\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*}\frac{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j})}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}\right\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}) \\
&+ \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*} \rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})^{-1}\left\{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}}(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))(\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j}))\right. \qquad (2.5)\\
&+ \left.\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}}(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))(\operatorname{sen}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j}))\right\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*}\frac{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}}(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))(\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j})) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*\cap(A_{\mathbf{l}}\cap B_{\mathbf{l}})}\frac{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}}(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))(\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j})) \\
&+ \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*\cap(A_{\mathbf{l}}\Delta B_{\mathbf{l}})}\frac{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}}(\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))(\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j})) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*\cap(A_{\mathbf{l}}\cap B_{\mathbf{l}})}\frac{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*\cap(A_{\mathbf{l}}\Delta B_{\mathbf{l}})}\frac{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Se $\mathbf{k} \in B_{\mathbf{l}}$ então existe $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\mathbf{k} = 2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{l}$ e assim $\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \rho_{2\mathbf{n}\mathbf{p}+\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})$ pelo Lema 2.1.8. De forma análoga, se $\mathbf{k} \in A_{\mathbf{l}}$ podemos concluir que $\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})$. Logo por (2.5) temos

$$\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j}) = \frac{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}\left(\#(\Omega_{\mathbf{n}}^*\cap(A_{\mathbf{l}}\cap B_{\mathbf{l}})) + \frac{1}{2}\#(\Omega_{\mathbf{n}}^*\cap(A_{\mathbf{l}}\Delta B_{\mathbf{l}}))\right) \quad (2.7)$$

onde $\#A$ denota a cardinalidade do conjunto A.

Seja $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$. Para cada $1 \leqslant j \leqslant d$, existe um único q_j e um único r_j satisfazendo $q_j, r_j \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant r_j \leqslant 2n_j - 1$ e $l_j = 2n_jq_j + r_j$. Então $\mathbf{l} = 2\mathbf{n}\mathbf{q} + \mathbf{r}$ onde $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathbb{Z}^d$ e $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_d) \in \Omega_{\mathbf{n}}$. Assim

$$B_{\mathbf{l}} = \{2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{l} : \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d\} = \{2\mathbf{n}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) + \mathbf{r} : \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d\} = \{2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{r} : \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d\} = B_{\mathbf{r}}.$$

De forma análoga temos
$$A_{\mathbf{l}} = \{2\mathbf{np} - \mathbf{r} : \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d\} = A_{\mathbf{r}}.$$
Como $\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \rho_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ pelo Lema 2.1.8, obtemos por (2.7)
$$\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j}) = \frac{\rho_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{r}}(\mathbf{0})}\left(\#\left(\Omega_{\mathbf{n}}^* \cap (A_{\mathbf{r}} \cap B_{\mathbf{r}})\right) + \frac{1}{2}\#(\Omega_{\mathbf{n}}^* \cap (A_{\mathbf{r}}\Delta B_{\mathbf{r}}))\right).$$
Logo basta demonstrarmos o resultado para $\mathbf{l} \in \Omega_{\mathbf{n}}^*$.

Sejam $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_d), \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \Omega_{\mathbf{n}}^*$. Então $\mathbf{l} - \mathbf{k} \equiv \mathbf{0} \mod (2\mathbf{n})$ se e somente se $\mathbf{k} = \mathbf{l}$, e $\mathbf{l} + \mathbf{k} \equiv \mathbf{0} \mod (2\mathbf{n})$ se e somente se $k_j = l_j = 0$ e $k_j = 2n_j - l_j$ se $l_j \neq 0$. Assim $\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}^* \cap (A_{\mathbf{l}} \cap B_{\mathbf{l}})$ se e somente se $\mathbf{k} = \mathbf{l}$ e $l_j \in \{0, n_j\}$ para todo $1 \leqslant j \leqslant d$; $\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}^* \cap (B_{\mathbf{l}} \backslash A_{\mathbf{l}})$ se e somente se $\mathbf{k} = \mathbf{l}$ e $l_j \notin \{0, n_j\}$ para algum $1 \leqslant j \leqslant d$; $\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}^* \cap (A_{\mathbf{l}} \backslash B_{\mathbf{l}})$ se e somente se $k_j = l_j = 0,\ k_j = 2n_j - l_j$ se $l_j \neq 0$ e $l_j \notin \{0, n_j\}$ para algum $1 \leqslant j \leqslant d$. Sejam
$$\mathcal{A} = \{\mathbf{l} \in \Omega_{\mathbf{n}}^* : l_j \in \{0, n_j\} \text{ para todo } 1 \leqslant j \leqslant d\},$$
$$\mathcal{B} = \{\mathbf{l} \in \Omega_{\mathbf{n}}^* : l_j \notin \{0, n_j\} \text{ para algum } 1 \leqslant j \leqslant d\}.$$
Então $\Omega_{\mathbf{n}}^* = \mathcal{A} \cup \mathcal{B},\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$ e
$$\#(\Omega_{\mathbf{n}}^* \cap (A_{\mathbf{l}} \cap B_{\mathbf{l}})) = \begin{cases} 1, & \mathbf{l} \in \mathcal{A}, \\ 0, & \mathbf{l} \in \mathcal{B}, \end{cases}, \qquad \#(\Omega_{\mathbf{n}}^* \cap (A_{\mathbf{l}}\Delta B_{\mathbf{l}})) = \begin{cases} 0, & \mathbf{l} \in \mathcal{A}, \\ 2, & \mathbf{l} \in \mathcal{B}. \end{cases}$$
Portanto segue por (2.7) que para qualquer $\mathbf{l} \in \Omega_{\mathbf{n}}^*$ temos
$$\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j}) = \frac{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}. \tag{2.8}$$

Passemos agora à demonstração da parte imaginária. Usando o Lema 2.3.1, (2.3) e os Lemas 2.1.5 e 2.1.6, temos
$$\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*\cap(B_{\mathbf{l}}\backslash A_{\mathbf{l}})} \frac{\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})} - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}^*\cap(A_{\mathbf{l}}\backslash B_{\mathbf{l}})} \frac{\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}.$$
Aplicando o Lema 2.1.8 obtemos
$$\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j}) = \frac{\sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})}{2\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}(\#\left(\Omega_{\mathbf{n}}^* \cap (A_{\mathbf{l}}\Delta B_{\mathbf{l}})\right)) = \begin{cases} 0, & \mathbf{l} \in \mathcal{A}, \\ \dfrac{\sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}, & \mathbf{l} \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Se $\mathbf{k} \in A_{\mathbf{l}} \cap B_{\mathbf{l}}$, então existem $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\mathbf{k} = 2\mathbf{np} + \mathbf{l} = 2\mathbf{nq} - \mathbf{l}$. Assim pelo Lema 2.1.8 temos $\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sigma_{2\mathbf{np}+\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})$ e $\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sigma_{2\mathbf{nq}-\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \sigma_{-\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = -\sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})$

e portanto $\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = 0$. Logo para $\mathbf{l} \in \mathcal{A}$ temos $\sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = 0$. Então para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ segue por (2.9) que

$$\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (\operatorname{sen}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j}) = \frac{\sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})},$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 2.3.3. Seja $|\cdot|$ uma norma em $\mathbb{R}^d$ e seja $K \in C(\mathbb{T}^d)$ um núcleo como no Teorema 2.1.9, tal que $a_{\mathbf{l}} = a_{\mathbf{k}}$ se $\mathbf{l},\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ e $|\mathbf{l}| = |\mathbf{k}|$. Dados $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d)$, $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_d)$, $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_d) \in \mathbb{Z}^d$, sejam $\overline{\mathbf{k}} = ((-1)^{i_1}k_1,\ldots,(-1)^{i_d}k_d)$ e $\overline{\mathbf{p}} = ((-1)^{i_1}p_1,\ldots,(-1)^{i_d}p_d)$. Então

$$\begin{aligned}
|2\mathbf{np}+\overline{\mathbf{k}}| &= |(2n_1p_1+(-1)^{i_1}k_1,\ldots,2n_dp_d+(-1)^{i_d}k_d)| \\
&= |(|2n_1p_1+(-1)^{i_1}k_1|,\ldots,|2n_dp_d+(-1)^{i_d}k_d|)| \\
&= |(|2n_1(-1)^{i_1}p_1+k_1|,\ldots,|2n_d(-1)^{i_d}p_d+k_d|)| \\
&= |2\mathbf{n}\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{k}|
\end{aligned}$$

e assim $a_{2\mathbf{np}+\overline{\mathbf{k}}} = a_{2\mathbf{n}\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{k}}$.

Dado $\mathbf{j} = (j_1,\ldots,j_d) \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^d = \{0,1,2,\ldots\}^d$, seja

$$D_{\mathbf{j}} = \left\{\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_d) \in \mathbb{Z}^d : |p_i| = j_i,\ i = 1,2,\ldots,d\right\}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\overline{\mathbf{k}}} &= \sum_{\mathbf{j}\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^d}\sum_{\mathbf{p}\in D_{\mathbf{j}}} a_{2\mathbf{np}+\overline{\mathbf{k}}} \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^d}\sum_{\mathbf{p}\in D_{\mathbf{j}}} a_{2\mathbf{n}\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{k}} \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^d}\sum_{\mathbf{p}\in D_{\mathbf{j}}} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} \\
&= \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

Observação 2.3.4. Consideremos um núcleo K dado por

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}},$$

tal que $a_{\mathbf{l}} \geqslant 0$, para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ e

$$\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}} \leqslant C a_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}},$$

para todo $\mathbf{n} = (n_1,n_2,\ldots,n_d) \in \mathbb{N}^d$ e todo $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{Z}^d$, com $0 \leqslant k_j \leqslant n_j$, para $j = 1,2,\ldots,d$, onde C é uma constante positiva que independe de $\mathbf{n}$ e de $\mathbf{k}$. Então

$$\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} < \infty.$$

De fato, seja $\mathbf{n} = (1, \ldots, 1)$. Dado $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, existem $p_1, \ldots, p_d, k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leqslant k_j \leqslant 1$, $0 \leqslant j \leqslant d$, e $l_j = 2p_j - k_j$. Se $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ e $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, então $\mathbf{l} = 2\mathbf{p} - \mathbf{k} = 2\mathbf{n}\mathbf{p} - \mathbf{k}$. Assim

$$\sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} \leqslant \sum_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^d} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{2np-k}} \leqslant C \sum_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^d} a_{\mathbf{2n-k}} < \infty.$$

Suponhamos que $a_{\mathbf{l}} = a_{-\mathbf{l}}$ para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$. Então pelo Lema 2.1.8, o núcleo K é uma função real, contínua e par.

Lema 2.3.5. Seja $|\cdot|$ uma norma em $\mathbb{R}^d$ e seja K o núcleo dado por

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}$$

onde $(a_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d}$ é uma sequência que satisfaz $a_{\mathbf{l}} = a_{\mathbf{k}}$ se $|\mathbf{l}| = |\mathbf{k}|$ e $a_{\mathbf{l}} \geqslant a_{\mathbf{k}} > 0$ se $|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{k}|$, para $\mathbf{l}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Suponhamos que existe uma constante positiva C tal que para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ e todo $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, com $0 \leqslant k_j \leqslant n_j$ para $j = 1, 2, \ldots, d$, temos

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{2np-k}} \leqslant C a_{\mathbf{2n-k}}.$$

Seja

$$\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{j}}} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{j}}) .$$

Então para $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, $\tilde{\mathbf{l}} = (|l_1|, \ldots, |l_d|)$,

$$|\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})| \quad \leqslant \quad \begin{cases} 4C\dfrac{a_{\mathbf{2n}-\tilde{\mathbf{l}}}}{a_{\mathbf{l}}}, & 0 < |\mathbf{l}| \leqslant |\mathbf{n}|, \\ |e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} - 1|, & \text{para } \ \mathbf{l} \equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \\ 4, & \text{para todo } \mathbf{l}. \end{cases}$$

Demonstração: Vamos demonstrar o resultado primeiramente para a parte real. Seja

$$\mu_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}} (\cos(\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}_{\mathbf{j}})) \widetilde{sk}_{\mathbf{n}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\mathbf{j}})$$

a parte real de $\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})$. Para $\mathbf{l} \equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n})$, pela Definição 2.2.1, Lemas 2.1.5 e 2.3.1

temos

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x}) &= \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{j}\in\Omega_\mathbf{n}} (\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_\mathbf{n}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j}) \\
&= \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{j}\in\Omega_\mathbf{n}} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}^*} \frac{\rho_\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j})}{\rho_\mathbf{k}(\mathbf{0})}\right) \\
&= \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - 1 - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_\mathbf{n}}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}^*} \frac{\rho_\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j})}{\rho_\mathbf{k}(\mathbf{0})} \\
&= \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - 1 - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}^*} \frac{1}{\rho_\mathbf{k}(\mathbf{0})}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_\mathbf{n}} (\rho_\mathbf{k}(\mathbf{x})\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j}) + \sigma_\mathbf{k}(\mathbf{x})\,\mathrm{sen}\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j})) \\
&= \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - 1 - \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_\mathbf{n}^*} \frac{\rho_\mathbf{k}(\mathbf{x})}{\rho_\mathbf{k}(\mathbf{0})}\sum_{\mathbf{j}\in\Omega_\mathbf{n}} \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_j}) \\
&= \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - 1.
\end{aligned}$$

Para $\mathbf{l} \not\equiv \mathbf{0} \mod (2\mathbf{n})$, usando o Lema 2.3.2 temos

$$\mu_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \frac{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{x})}{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})} = \frac{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \rho_\mathbf{l}(\mathbf{x})}{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})}.$$

Portanto, como pelo Teorema 2.1.9 temos $\rho_\mathbf{l}(\mathbf{x}) \leqslant \rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})$ para todo $\mathbf{x}$ e para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, então

$$\begin{aligned}
|\mu_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})| &= \left|\frac{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \rho_\mathbf{l}(\mathbf{x})}{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})}\right| \\
&\leqslant \frac{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0}) + \rho_\mathbf{l}(\mathbf{x})}{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})} \leqslant \frac{2\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})}{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})} = 2.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora $0 < |\mathbf{l}| \leqslant |\mathbf{n}|$ e seja $\tilde{\mathbf{l}} = (|l_1|, \ldots, |l_d|)$. Então usando a hipótese do teorema e a Observação 2.3.3, obtemos,

$$\begin{aligned}
|\mu_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})| &= \left|\frac{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})\cos(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \rho_\mathbf{l}(\mathbf{x})}{\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})}\right| \\
&\leqslant \frac{2\rho_\mathbf{l}(\mathbf{0})}{2a_\mathbf{l}} \\
&= \frac{\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d}(a_{2\mathbf{mn}-\mathbf{l}} + a_{2\mathbf{mn}+\mathbf{l}})}{a_\mathbf{l}} = 2\frac{\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{mn}-\tilde{\mathbf{l}}}}{a_\mathbf{l}} \\
&\leqslant 2C\frac{a_{2\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{l}}}}{a_\mathbf{l}}.
\end{aligned}$$

Passemos agora à demonstração da parte imaginária do resultado. Seja

$$\phi_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \mathrm{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{j}\in\Omega_\mathbf{n}} (\mathrm{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}))\widetilde{sk}_\mathbf{n}(\mathbf{x}-\mathbf{x_j})$$

a parte imaginária de $\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})$. Para $\mathbf{l} \equiv \mathbf{0}$ mod $(2\mathbf{n})$, como $\text{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_j}) = 0$, temos $\phi_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \text{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x})$.

Para $\mathbf{l} \not\equiv \mathbf{0}$ mod $(2\mathbf{n})$, usando o Lema 2.3.2 temos

$$\phi_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = \text{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \frac{\sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})} = \frac{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})\,\text{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}) - \sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}.$$

Portanto, como pelo Teorema 2.1.9 temos $|\sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})| \leqslant \rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})$ para todo $\mathbf{x}$ e para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, então

$$|\phi_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})| \leqslant \frac{|\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})\,\text{sen}\,(\mathbf{l}\cdot\mathbf{x})| + |\sigma_{\mathbf{l}}(\mathbf{x})|}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})} \leqslant \frac{2\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})} = 2.$$

Assim, de forma análoga ao caso real, para $0 < |\mathbf{l}| \leqslant |\mathbf{n}|$, usando a hipótese do teorema, obtemos,

$$|\phi_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})| \leqslant \frac{2\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}{\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})} \leqslant \frac{2\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}{2a_{\mathbf{l}}} \leqslant 2C\frac{a_{2\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{l}}}}{a_{\mathbf{l}}}.$$

Considerando as estimativas obtidas para $\mu_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})$ e $\phi_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})$, obtemos a estimativa desejada para $\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})$. □

Lema 2.3.6. Seja K um núcleo como no Lema 2.3.5. Então para cada $1 \leqslant p < \infty$ e $C_p = 2^{3p+1}C^p$,

$$\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}^p |\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p \leqslant C_p \sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p.$$

Demonstração: Como $a_{\mathbf{l}} \geqslant a_{\mathbf{k}} > 0$ *se* $|\mathbf{k}| \geqslant |\mathbf{l}|$, $\mathbf{k},\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$, utilizando o Lema 2.3.5 e tomando $\tilde{\mathbf{l}} = (|l_1|,\ldots,|l_d|)$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}^p |\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p &\leqslant \sum_{0\leqslant|\mathbf{l}|\leqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p |\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p + \sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p |\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p \\
&= \sum_{0<|\mathbf{l}|\leqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p |\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p + \sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p |\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p \\
&\leqslant \sum_{0<|\mathbf{l}|\leqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p 4^p C^p \left(\frac{a_{2\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{l}}}}{a_{\mathbf{l}}}\right)^p + \sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p 4^p \\
&= 4^p C^p \sum_{0<|\mathbf{l}|\leqslant|\mathbf{n}|} a_{2\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{l}}}^p + 4^p \sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p.
\end{aligned}$$

Para cada $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, seja

$$D_{\mathbf{l}} = \{\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{Z}^d : |k_j| = |l_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant d\}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}^p|\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p &\leqslant 4^pC^p\sum_{0<|\mathbf{l}|\leqslant|\mathbf{n}|} a_{2\mathbf{n}-\tilde{\mathbf{l}}}^p + 4^p\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p \\
&\leqslant 4^pC^p\sum_{0<|\mathbf{l}|\leqslant|\mathbf{n}|}\sum_{\mathbf{k}\in D_{\mathbf{l}}} a_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}}^p + 4^p\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p \\
&\leqslant 4^pC^p2^d\sum_{0<|\mathbf{l}|\leqslant|\mathbf{n}|} a_{2\mathbf{n}-\mathbf{l}}^p + 4^p\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p \\
&\leqslant C_1\left(\sum_{|\mathbf{n}|\leqslant|\mathbf{j}|\leqslant 3|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{j}}^p + \sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p\right) \leqslant 2C_1\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p,
\end{aligned}$$

completando assim a demonstração do lema. □

Teorema 2.3.7. Seja $|\cdot|$ uma norma em $\mathbb{R}^d$ e seja K o núcleo dado por

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}},$$

onde $(a_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d}$ é uma sequência que satisfaz $a_{\mathbf{l}} = a_{\mathbf{k}}$ se $|\mathbf{l}| = |\mathbf{k}|$ e $a_{\mathbf{l}} \geqslant a_{\mathbf{k}} > 0$ *se* $|\mathbf{k}| \geqslant |\mathbf{l}|$, para $\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d$. Suponhamos que

$$\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}-\mathbf{k}} \leqslant Ca_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}},$$

para todo $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$ e todo $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d)$ com $0 \leqslant k_j \leqslant n_j$ para $j = 1,2,\ldots,d$, onde C é uma constante positiva que independe de $\mathbf{n}$ e $\mathbf{k}$. Então, para $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$, com $p^{-1} - q^{-1} \geqslant 2^{-1}$, existe uma constante positiva $\overline{C}$, independente de $\mathbf{n}, p$ e q, tal que

$$\sup_{f\in K*U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \overline{C}\left(\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^{qp(q-p)^{-1}}\right)^{p^{-1}-q^{-1}}.$$

Demonstração: Seja $p\in\mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ e seja p' tal que $1/p + 1/p' = 1$. Dada $f \in K * U_p$ (ver Notação 1.2.6), $\phi \in U_p$, tal que $f = K * \phi$, pelo Teorema 2.2.6,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &- sk_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = \\
&= f(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) \\
&= f(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}}\left(\int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y})\right)\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) - \int_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}})\phi(\mathbf{y})\right)d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d}\left(K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}})\right)\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}),
\end{aligned}$$

onde

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}}).$$

Portanto pela desigualdade de Hölder temos

$$|f(\mathbf{x}) - sk_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})| \leqslant ||\phi||_p ||\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\cdot)||_{p'}. \tag{2.10}$$

Como $1 \leqslant p \leqslant 2$, segue por (1.2) que

$$||\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\cdot)||_{p'} \leqslant \left(\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} |b_{\mathbf{l}}|^p\right)^{1/p},$$

onde para $\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d$,

$$b_{\mathbf{l}} = \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{y}).$$

Por (2.20) temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y} &= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{j}} e^{i\mathbf{j}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{j}} e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(\mathbf{l}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{y}) \\
&= a_{\mathbf{l}} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

e de forma análoga

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x}_{\mathbf{k}}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{y}}\right) d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}}) a_{\mathbf{j}} e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{k}}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(\mathbf{l}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} a_{\mathbf{l}} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{k}}} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}}).
\end{aligned}$$

Portanto segue que

$$b_{\mathbf{l}} = a_{\mathbf{l}} \left(e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}_{\mathbf{k}}} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathbf{k}})\right) = a_{\mathbf{l}}\theta_{\mathbf{n},-\mathbf{l}}(\mathbf{x}) = a_{-\mathbf{l}}\theta_{\mathbf{n},-\mathbf{l}}(\mathbf{x}).$$

Usando o Lema 2.3.6 obtemos

$$\begin{aligned}
||\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\cdot)||_{p'} &\leqslant \left(\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{-\mathbf{l}}^p |\theta_{\mathbf{n},-\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}^p |\theta_{\mathbf{n},\mathbf{l}}(\mathbf{x})|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant C_1 \left(\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p\right)^{1/p},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $C_1 = 2^7 C^2$. Para $\phi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ definimos

$$T\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}).$$

Pelas desigualdades (2.10) e (2.11) podemos concluir que T é limitado de $L^p(\mathbb{T}^d)$ em $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ e que

$$||T||_{p,\infty} \leqslant C_1 \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p \right)^{1/p}. \tag{2.12}$$

Sejam $\phi, \psi \in L^1\left(\mathbb{T}^d\right)$ e

$$H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x_k} - \mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x_k}),$$

$$\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} + \sum_{\mathbf{l}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{l}} K\left(x - \mathbf{x_l}\right).$$

Temos

$$\int_{\mathbb{T}^d} H(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{x_k}) = sk_{\mathbf{n}}(K * \phi, \mathbf{x}),$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^d} sk_{\mathbf{n}}(K * \phi, \mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x}) \\
= \; & \frac{\hat{\psi}(0)}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k}) + \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{l}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{l}} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k}) \left(K * \psi\right)(\mathbf{x_{l+k}}) \\
= \; & \frac{\hat{\psi}(0)}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k}) + \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{(\mathbf{j}-\mathbf{k}) \bmod (2\mathbf{n})} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k}) \left(K * \psi\right)(\mathbf{x_j}) \\
= \; & \frac{\hat{\psi}(0)}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k}) + \sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{(\mathbf{k}-\mathbf{j}) \bmod (2\mathbf{n})} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k}) \left(K * \psi\right)(\mathbf{x_j}) \\
= \; & \frac{\hat{\psi}(0)}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k}) + \sum_{\mathbf{j}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(K * \psi\right)(\mathbf{x_j}) \sum_{\mathbf{l}\in\Omega_{\mathbf{n}}} c_{\mathbf{l}} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_{l+j}}) \\
= \; & \int_{\mathbb{T}^d} sk_{\mathbf{n}}(K * \psi, \mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x}) + \zeta_{\mathbf{n}}(K, \phi, \psi),
\end{aligned}$$

onde

$$\zeta_{\mathbf{n}}(K, \phi, \psi) = \frac{\hat{\psi}(0)}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(K * \phi\right)(\mathbf{x_k}) - \frac{\hat{\phi}(0)}{N} \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(K * \psi\right)(\mathbf{x_k}).$$

Como $\Phi_{\mathbf{n}}(x,y) = K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - H(x,y)$, então

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d} (T\phi)(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x}) \\
= &\int_{\mathbb{T}^d} \left[(K*\phi)(\mathbf{x}) - sk_{\mathbf{n}}(K*\phi,\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x}) \\
= &\int_{\mathbb{T}^d} \left((K*\psi)(\mathbf{x}) - sk_{\mathbf{n}}(K*\psi,\mathbf{x})\right)\phi(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x}) + \zeta_{\mathbf{n}}(K,\phi,\psi) \\
= &\int_{\mathbb{T}^d} (T\psi)(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x}) + \zeta_{\mathbf{n}}(K,\phi,\psi),
\end{aligned}$$

assim usando (2.12)

$$\begin{aligned}
||T||_{1,p'} &= \sup_{\phi\in U_1} ||T\phi||_{p'} \\
&= \sup_{\phi\in U_1}\sup_{\psi\in U_p} \left|\int_{\mathbb{T}^d} (T\phi)(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})\right| \\
&\leqslant \sup_{\psi\in U_p}\sup_{\phi\in U_1} \left|\int_{\mathbb{T}^d} (T\psi)(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{x})\right| + \sup_{\psi\in U_p}\sup_{\phi\in U_1} |\zeta_{\mathbf{n}}(K,\phi,\psi)| \\
&= \sup_{\psi\in U_p} ||T\psi||_{\infty} + \sup_{\psi\in U_p}\sup_{\phi\in U_1} |\zeta_{\mathbf{n}}(K,\phi,\psi)| \\
&= ||T||_{p,\infty} + \sup_{\psi\in U_p}\sup_{\phi\in U_1} |\zeta_{\mathbf{n}}(K,\phi,\psi)| \\
&\leqslant C_1 \left(\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p\right)^{1/p} + \sup_{\psi\in U_p}\sup_{\phi\in U_1} |\zeta_{\mathbf{n}}(K,\phi,\psi)|\,.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Temos que $|\hat{\phi}(\mathbf{l})| \leqslant ||\phi||_1 \leqslant 1$, $|\hat{\psi}(\mathbf{l})| \leqslant ||\psi||_1 \leqslant ||\psi||_p \leqslant 1$ e

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} (K*\psi)(\mathbf{x_k})\right| &= \left|\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}}\hat{\psi}(\mathbf{l}) \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_k}}\right| \\
&= N\left|\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{nl}}\hat{\psi}(2\mathbf{nl})\right| \\
&\leqslant N\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{nl}} \leqslant NC_2 a_{2\mathbf{n}}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\sup_{\psi\in U_p}\sup_{\phi\in U_1} |\zeta_{\mathbf{n}}(K,\phi,\psi)| \leqslant C_3 a_{2\mathbf{n}}. \tag{2.14}$$

De (2.13) and (2.14) segue que

$$||T||_{1,p'} \leqslant C_4 \left(\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p\right)^{1/p}. \tag{2.15}$$

Para $0 < t < 1$ sejam p_t e q_t dados por

$$\frac{1}{p_t} = 1 - t + \frac{t}{p} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{p'}.$$

Aplicando o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Teorema 1.2.1), concluimos que T é limitado de $L^{p_t}(\mathbb{T}^d)$ em $L^{q_t}(\mathbb{T}^d)$ e que

$$||T||_{p_t,q_t} \leqslant C_5 \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^p \right)^{1/p}.$$

Note que $p_t^{-1} - q_t^{-1} = p^{-1} \geqslant 1/2$, $1 \leqslant p_t \leqslant 2$, $2 \leqslant q_t \leqslant \infty$ e que

$$||T||_{p_t,q_t} \leqslant C_5 \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^{q_t p_t (q_t - p_t)^{-1}} \right)^{p_t^{-1} - q_t^{-1}}.$$

Fixemos $1 \leqslant r \leqslant 2$ e $2 \leqslant s \leqslant \infty$ tal que $1/r - 1/s \geqslant 1/2$. Vamos mostrar que existem $0 \leqslant t \leqslant 1$ e $1 \leqslant p \leqslant 2$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r} = 1 - t + \dfrac{t}{p}, \\ \\ \dfrac{1}{s} = \dfrac{1-t}{p'}, \end{cases} \tag{2.16}$$

isto é, $r = p_t$ e $s = q_t$. Temos que $r = 1$ se e somente se $t = 0$ e $s = \infty$ se e somente se $t = 1$. Como os casos $r = 1, 2 \leqslant s \leqslant \infty$ e $s = \infty, 1 \leqslant r \leqslant 2$ estão resolvidos nas estimativas (2.12) e (2.15) podemos considerar $t \neq 0$ e $t \neq 1$, isto é, $r > 1$ e $s < \infty$. Resolvendo o sistema (2.16) obtemos

$$p = \frac{sr}{s-r}, \qquad t = \frac{s(r-1)}{s(r-1)+r}.$$

Como $1/r - 1/s \geqslant 1/2$, temos $r \leqslant 2s/(s+2)$ e assim chegamos que $p \leqslant 2$. Mas $p = sr/(s-r) > r > 1$ e portanto $1 < p \leqslant 2$. Pela expressão de t em termos de r e s verificamos que $0 < t < 1$.

Podemos então concluir que para quaisquer $r, s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant r \leqslant 2 \leqslant s \leqslant \infty$ satisfazendo $1/r - 1/s \geqslant 1/2$, o sistema (2.16) tem solução para t e p tais que $0 \leqslant t \leqslant 1$ e $1 \leqslant p \leqslant 2$. □

Lema 2.3.8. Sejam $a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função decrescente e positiva, e $|\cdot| = |\cdot|_p$ para algum $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Para cada $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ seja $a_{\mathbf{p}} = a(|\mathbf{p}|)$. Suponhamos que exista uma constante $c_1 > 0$ tal que, para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$,

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}} \leqslant c_1 a_{2\mathbf{n}}. \tag{2.17}$$

Então existe uma constante $c_2 > 0$ tal que, para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ com $|\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{n}|$, temos

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}-\mathbf{k}} \leqslant c_2 a_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}}. \tag{2.18}$$

Demonstração: Fixemos $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Pela Observação 2.3.3 basta considerar $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ satisfazendo $|\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{n}|$ e $0 \leqslant k_j \leqslant n_j$, para todo $j = 1, 2, \dots, d$.

Seja $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$. Para cada $1 \leqslant j \leqslant d$ escrevemos

$$\psi_j(p_j) = \tilde{p}_j = \begin{cases} p_j - 1 & , \quad p_j > 0, \\ p_j & , \quad p_j \leqslant 0, \end{cases}$$

e definimos

$$\psi(\mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{p}} = (\psi_1(p_1), \dots, \psi_d(p_d)).$$

ψ está bem definida como uma função de $\mathbb{Z}^d$ em $\mathbb{Z}^d$. Se $p_j > 0$ então

$$|2n_j p_j - k_j| \;=\; |2n_j(p_j - 1) + (2n_j - k_j)| \geqslant |2n_j(p_j - 1)| = |2n_j\tilde{p}_j|$$

e se $p_j \leqslant 0$ então

$$|2n_j p_j - k_j| \;=\; |2n_j(-p_j) + k_j| = 2n_j(-p_j) + k_j \geqslant 2n_j(-p_j) = |2n_j p_j| = |2n_j\tilde{p}_j|.$$

Portanto

$$|2\mathbf{np} - \mathbf{k}|_p \geqslant \left(|2n_1\tilde{p}_1|^p + \cdots + |2n_d\tilde{p}_d|^p\right)^{1/p} = |2\mathbf{n}\tilde{\mathbf{p}}|_p, \;\; 1 \leqslant p < \infty$$

e

$$|2\mathbf{np} - \mathbf{k}|_\infty \geqslant \max\{|2n_1\tilde{p}_1|, \dots, |2n_d\tilde{p}_d|\} = |2\mathbf{n}\tilde{\mathbf{p}}|_\infty.$$

Logo

$$|2\mathbf{np} - \mathbf{k}| \geqslant |2\mathbf{n}\tilde{\mathbf{p}}|$$

e consequentemente

$$a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}} \leqslant a_{2\mathbf{n}\tilde{\mathbf{p}}}. \tag{2.19}$$

Verificamos facilmente que se $\psi_j(p_j) = 0$ então $p_j \in \{0, 1\}$ e que se $\psi_j(p_j) \neq 0$ então não existe $q_j \in \mathbb{Z}$, $q_j \neq p_j$ tal que $\psi_j(q_j) = \psi_j(p_j)$. Assim podemos concluir que para qualquer $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, a cardinalidade do conjunto $\psi^{-1}(\{\mathbf{k}\})$ é no máximo 2^d. Portanto por (2.19) e (2.17)

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}} &\leqslant \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\tilde{\mathbf{p}}} \\ &\leqslant 2^d \sum_{\tilde{\mathbf{p}}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\tilde{\mathbf{p}}} \\ &\leqslant 2^d c_1 a_{2\mathbf{n}} \\ &\leqslant 2^d c_1 a_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade acima segue pois, como $|2\mathbf{n}| \geqslant |2\mathbf{n} - \mathbf{k}|$, temos $a_{2\mathbf{n}} \leqslant a_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}}$. □

O resultado seguinte é consequência imediata do Teorema 2.3.7 e do Lema 2.3.8.

Corolário 2.3.9. Sejam $a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função decrescente e positiva, e $|\cdot| = |\cdot|_p$ para algum $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Para cada $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ seja $a_{\mathbf{p}} = a(|\mathbf{p}|)$. Consideremos um núcleo K dado por

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}},$$

tal que

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}} \leqslant C a_{2\mathbf{n}},$$

onde C é uma constante positiva que independe de $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Então para $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$, com $p^{-1} - q^{-1} \geqslant 2^{-1}$ e todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, existe uma constante positiva $\overline{C}$, independente de $\mathbf{n}, p$ e q, tal que

$$\sup_{f \in K * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^{qp(q-p)^{-1}} \right)^{p^{-1}-q^{-1}}.$$

2.4 Aproximação por sk-Splines II

Nesta seção demonstramos o nosso segundo resultado sobre aproximação de funções do tipo $f = K * \phi$, $\phi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ por sk-splines, no espaço $L^q(\mathbb{T}^d)$, neste caso para $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$. É o Teorema 2.4.6, mas em nossas aplicações usamos o Corolário 2.4.7 por ter uma hipótese mais fácil de ser verificada.

Continuamos nesta seção considerando um núcleo K como no Teorema 2.1.9 e tal que $\rho_{\mathbf{j}}(0) \neq 0$ para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ e $\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}^*$.

Lema 2.4.1. Para $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ temos

$$\widehat{sk_{\mathbf{n}}}(\mathbf{l}) = \begin{cases} 1/N, & \mathbf{l} = \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{l} \equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \mathbf{l} \neq \mathbf{0}, \\ \dfrac{2a_{\mathbf{l}}}{N\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}, & \mathbf{l} \not\equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}). \end{cases}$$

Demonstração: Podemos verificar que

$$\int_{\mathbb{T}^d} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{l} \neq \mathbf{0}, \\ 1, & \mathbf{l} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{2.20}$$

De fato, se $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}^d$, então

$$\int_{\mathbb{T}^d} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{il_k \cdot t} dt \right)$$

e $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{il_k\cdot t}dt = 0$ para $l_k \neq 0$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}}(\mathbf{l}) &= \int_{\mathbb{T}^d} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{j}\in\Omega^*_{\mathbf{n}}} \frac{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})} \right) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&+ \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{j}\in\Omega^*_{\mathbf{n}}} \frac{1}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})} \int_{\mathbb{T}^d} \rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}). \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Como para $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$

$$
(\cos(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}))e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\left(e^{i(\mathbf{a}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}} + e^{-i(\mathbf{a}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}}\right),
$$

então usando o Teorema 2.1.9,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} \rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}} \int_{\mathbb{T}^d} (\cos((2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}))e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&+ \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}} \int_{\mathbb{T}^d} (\cos((2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}))e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}} \int_{\mathbb{T}^d} (e^{i(2\mathbf{np}+\mathbf{j}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}} + e^{-i(2\mathbf{np}+\mathbf{j}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}}) d\nu(\mathbf{x}) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}} \int_{\mathbb{T}^d} (e^{i(2\mathbf{np}-\mathbf{j}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}} + e^{-i(2\mathbf{np}-\mathbf{j}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}}) d\nu(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

Portanto por (2.21)

$$
\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}}(\mathbf{l}) &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&+ \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{j}\in\Omega^*_{\mathbf{n}}} \frac{a_{2\mathbf{np}+\mathbf{j}}}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})} \int_{\mathbb{T}^d} (e^{i(2\mathbf{np}+\mathbf{j}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}} + e^{-i(2\mathbf{np}+\mathbf{j}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}}) d\nu(\mathbf{x}) \\
&+ \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{j}\in\Omega^*_{\mathbf{n}}} \frac{a_{2\mathbf{np}-\mathbf{j}}}{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0})} \int_{\mathbb{T}^d} (e^{i(2\mathbf{np}-\mathbf{j}-\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}} + e^{-i(2\mathbf{np}-\mathbf{j}+\mathbf{l})\cdot\mathbf{x}}) d\nu(\mathbf{x}). \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Caso 1: Suponhamos $\mathbf{l} = \mathbf{0}$. Então para $\mathbf{j} \in \Omega^*_{\mathbf{n}}$ temos $2\mathbf{np}+\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ e $2\mathbf{np}-\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, para qualquer $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$. Assim por (2.20)

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(2\mathbf{np}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i(2\mathbf{np}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

e logo por (2.22)

$$
\widehat{\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}}(\mathbf{l}) = \widehat{\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}}(\mathbf{0}) = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}^d} d\nu(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}.
$$

Caso 2: Suponhamos $\mathbf{l} \equiv \mathbf{0} \operatorname{mod}(2\mathbf{n})$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, isto é, $\mathbf{l} = 2\mathbf{n}\mathbf{q}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$. Para todo $\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}^*$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ temos

$$2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{j} - \mathbf{l} = 2\mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

$$2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{j} + \mathbf{l} = 2\mathbf{n}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

$$2\mathbf{n}\mathbf{p} - \mathbf{j} - \mathbf{l} = 2\mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - \mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

$$2\mathbf{n}\mathbf{p} - \mathbf{j} + \mathbf{l} = 2\mathbf{n}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) - \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$$

e como também temos $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ segue por (2.20) e (2.22) que $\widehat{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{l}) = 0$.

Caso 3: Suponhamos $\mathbf{l} \not\equiv \mathbf{0} \operatorname{mod}(2\mathbf{n})$, isto é, $\mathbf{l} = 2\mathbf{n}\mathbf{q} + \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \in \Omega_{\mathbf{n}}^*$, $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d$. Portanto

$$\mathbf{0} = 2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{j} - \mathbf{l} \;=\; 2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{j} - 2\mathbf{n}\mathbf{q} - \mathbf{k} \;=\; 2\mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + (\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

implica

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} \;\text{ e }\; \mathbf{j} = \mathbf{k};$$

$$\mathbf{0} = 2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{j} + \mathbf{l} \;=\; 2\mathbf{n}\mathbf{p} + \mathbf{j} + 2\mathbf{n}\mathbf{q} + \mathbf{k} \;=\; 2\mathbf{n}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + (\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

implica

$$\mathbf{p} = -\hat{\mathbf{1}} - \mathbf{q} \;\text{ e }\; \mathbf{j} = 2\mathbf{n} - \mathbf{k},\; \hat{\mathbf{1}} = (1, 1, \ldots, 1);$$

$$\mathbf{0} = 2\mathbf{n}\mathbf{p} - \mathbf{j} - \mathbf{l} \;=\; 2\mathbf{n}\mathbf{p} - \mathbf{j} - 2\mathbf{n}\mathbf{q} - \mathbf{k} \;=\; 2\mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) - (\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

implica

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{1}} + \mathbf{q} \;\text{ e }\; \mathbf{j} = 2\mathbf{n} - \mathbf{k};$$

e

$$\mathbf{0} = 2\mathbf{n}\mathbf{p} - \mathbf{j} + \mathbf{l} \;=\; 2\mathbf{n}\mathbf{p} - \mathbf{j} + 2\mathbf{n}\mathbf{q} + \mathbf{k} \;=\; 2\mathbf{n}(\mathbf{p} + \mathbf{q}) + (\mathbf{k} - \mathbf{j})$$

implica

$$\mathbf{p} = -\mathbf{q} \;\text{ e }\; \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

Assim usando (2.20) e (2.22) obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{l}) \;&=\; \frac{1}{2N}\frac{a_{2\mathbf{n}\mathbf{q}+\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})} + \frac{1}{2N}\frac{a_{2\mathbf{n}(-\hat{\mathbf{1}}-\mathbf{q})+2\mathbf{n}-\mathbf{k}}}{\rho_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}}(\mathbf{0})} \\
&+\; \frac{1}{2N}\frac{a_{2\mathbf{n}(\hat{\mathbf{1}}+\mathbf{q})-2\mathbf{n}+\mathbf{k}}}{\rho_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}}(\mathbf{0})} + \frac{1}{2N}\frac{a_{-2\mathbf{n}\mathbf{q}-\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.8 temos que $\rho_{2\mathbf{n}\mathbf{q}-\mathbf{k}}(\mathbf{0}) = \rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0}) = \rho_{2\mathbf{n}\mathbf{q}+\mathbf{k}}(\mathbf{0}) = \rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})$ e como $a_{2\mathbf{n}\mathbf{q}+\mathbf{k}} = a_{\mathbf{l}} = a_{-\mathbf{l}} = a_{-2\mathbf{n}\mathbf{q}-\mathbf{k}}$ segue que

$$\widehat{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{l}) = \frac{2a_{\mathbf{l}}}{N\rho_{\mathbf{l}}(\mathbf{0})}.$$

Portanto o lema está demonstrado. $\square$

Lema 2.4.2. Seja $\phi \in L^1(\mathbb{T}^d)$ tal que $||\phi||_1 \leqslant 1$ e seja

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) = K * \phi(\mathbf{x}).$$

Para todo $\mathbf{j} \in \Omega_{\mathbf{n}}$, temos

$$f(\mathbf{x}) - sk_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y})$$

onde

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x_k}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_k}).$$

Além disso, considerando a série de Fourier de $\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ dada por

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \sim \sum_{\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2})e^{i\mathbf{k_1}\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{k_2}\cdot\mathbf{y}}$$

e coeficientes de Fourier

$$\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}) = \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})e^{-i\mathbf{k_1}\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k_2}\cdot\mathbf{y}}d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}),$$

temos para $\mathbf{k},\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$,

$$\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k}) = a_{-\mathbf{k}}\left\{\begin{array}{ll} 1, & \mathbf{j}=\mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{j}\neq\mathbf{0}, \end{array}\right\} - a_{-\mathbf{k}}\,\widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j})\left\{\begin{array}{ll} N, & \mathbf{j}\equiv\mathbf{0} \text{ mod } (2\mathbf{n}), \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{array}\right\}$$

onde $\widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{l})$ é dado no Lema 2.4.1.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.6 temos

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) \quad - \quad & sk_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x}) = \\
= \quad & f(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x_k})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_k}) \\
= \quad & f(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \left(\int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x_k}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y})\right)\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_k}) \\
= \quad & f(\mathbf{x}) - \int_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x_k}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})\right)d\nu(\mathbf{y}) \\
= \quad & \int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) - \int_{\mathbb{T}^d}\left(\sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x_k}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})\right)\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) \\
= \quad & \int_{\mathbb{T}^d}\left(K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \sum_{\mathbf{k}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x_k}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_k})\right)\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) \\
= \quad & \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Sejam $\mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$. Observe agora que

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k}) = \\
=\;& \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) \\
=\;& \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \left(K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x_m}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) \right) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) \\
=\;& \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) \\
-\;& \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x_m}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \right) d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Vamos analisar separadamente cada uma das últimas integrais acima. Denotaremos a primeira parcela por I e a segunda por II. Assim por (2.20) temos

$$\begin{aligned}
I \;&=\; \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) \\
&=\; \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{s}} e^{i\mathbf{s}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) \\
&=\; \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{s}} \left(\int_{\mathbb{T}^d} e^{i(\mathbf{s}+\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \right) \left(\int_{\mathbb{T}^d} e^{i(-\mathbf{s}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{y}) \right) \\
&=\; \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{s}} \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \mathbf{s}+\mathbf{k}+\mathbf{j}=\mathbf{0}, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \mathbf{s}+\mathbf{k}=\mathbf{0}, \\ 0, & \text{caso contrário}, \end{array} \right\} \\
&=\; \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{s}} \delta_{\mathbf{s},-(\mathbf{k}+\mathbf{j})} \delta_{\mathbf{s},-\mathbf{k}} \\
&=\; \left\{ \begin{array}{ll} a_{-\mathbf{k}}, & \mathbf{j}=\mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{j}\neq\mathbf{0}, \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
II \;&=\; \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} K(\mathbf{x_m}-\mathbf{y})\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \right) d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) \\
&=\; \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{s}} e^{i\mathbf{s}\cdot(\mathbf{x_m}-\mathbf{y})}\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \right) d\nu(\mathbf{x})d\nu(\mathbf{y}) \\
&=\; \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{x_m}} a_{\mathbf{s}} \left(\int_{\mathbb{T}^d} e^{i(-\mathbf{s}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{y}} d\nu(\mathbf{y}) \right) \left(\int_{\mathbb{T}^d} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) d\nu(\mathbf{x}) \right) \\
&=\; \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} e^{i\mathbf{s}\cdot\mathbf{x_m}} a_{\mathbf{s}} \delta_{\mathbf{s},-\mathbf{k}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) d\nu(\mathbf{x}) \\
&=\; \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_m}} a_{-\mathbf{k}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) d\nu(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Como

$$\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}}(\mathbf{l}) e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}},$$

então

$$\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}-\mathbf{x_m}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}}(\mathbf{l}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_m}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}.$$

Portanto pelo Lema 2.1.4 e (2.20) temos

$$
\begin{aligned}
II &= a_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_m}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{l}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_m}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&= a_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_m}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{l}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_m}} \int_{\mathbb{T}^d} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} d\nu(\mathbf{x}) \\
&= a_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_m}} \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(\mathbf{l}) e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x_m}} \delta_{\mathbf{l},-(\mathbf{k}+\mathbf{j})} \\
&= a_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x_m}} \widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{j})\cdot\mathbf{x_m}} \\
&= a_{-\mathbf{k}} \widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j}) \sum_{\mathbf{m}\in\Omega_{\mathbf{n}}} e^{-i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x_m}} \\
&= a_{-\mathbf{k}} \widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j}) \begin{cases} N, & \mathbf{j} \equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Assim obtemos a expressão de $\widehat{\Phi}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k})$ como consequência das integrais I e II. □

Lema 2.4.3. Seja $\Phi_{\mathbf{n}}$ como no Lema 2.4.2. Suponhamos $a_{\mathbf{k}} > 0$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Então

$$\sum_{\mathbf{l},\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(\mathbf{l},\mathbf{m})| < \infty.$$

Demonstração: Vamos mostrar que

$$\sum_{\mathbf{k},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k})| < \infty.$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k})| &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k})| \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k},\mathbf{k})| + \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k})| \\
&= S_1 + S_2. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Aplicando o Lema 2.4.1, Lema 2.4.2 e o Lema 2.1.8, podemos limitar S_2 da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left|a_{-\mathbf{k}}\left\{\begin{array}{ccl} 1 & , & \mathbf{j}=\mathbf{0}, \\ 0 & , & \mathbf{j}\neq\mathbf{0}, \end{array}\right\} - a_{-\mathbf{k}}\widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j})\left\{\begin{array}{ccl} N & , & \mathbf{j}\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \\ 0 & , & \mathbf{j}\not\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \end{array}\right\}\right| \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} \widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j})\left\{\begin{array}{ccl} N & , & \mathbf{j}\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \\ 0 & , & \mathbf{j}\not\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \end{array}\right\} \\
&= N\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} \widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-(\mathbf{k}+2\mathbf{n}\mathbf{s})) \\
&= N\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{-\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} \left\{\begin{array}{cl} 1/N, & \mathbf{k}=-2\mathbf{n}\mathbf{s}, \\ 0, & \mathbf{k}\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}),\ \mathbf{k}\neq -2\mathbf{n}\mathbf{s}, \\ \dfrac{2a_{-(\mathbf{k}+2\mathbf{n}\mathbf{s})}}{N\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}, & \mathbf{k}\not\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \end{array}\right\} \\
&\leqslant \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{s}} + 2\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\frac{a_{-\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} a_{-(\mathbf{k}+2\mathbf{n}\mathbf{s})}.
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Pelo Teorema 2.1.9

$$
\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0}) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d}(a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}+\mathbf{k}}+a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}-\mathbf{k}}) > \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}+\mathbf{k}},
$$

assim usando (2.24) obtemos

$$
\begin{aligned}
S_2 &\leqslant \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{s}} + 2\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{-\mathbf{k}}\frac{1}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}+\mathbf{k}} \\
&< \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{s}} + 2\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} \\
&\leqslant 3\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} a_k < \infty.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 2.4.1 e Lema 2.4.2, podemos limitar S_1 da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\left|a_{-\mathbf{k}}\left(1-N\widehat{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k})\right)\right| \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{-\mathbf{k}}\left|1-N\left\{\begin{array}{cl} 1/N, & \mathbf{k}=\mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{k}\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}),\ \mathbf{k}\neq\mathbf{0}, \\ \dfrac{2a_{-\mathbf{k}}}{N\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}, & \mathbf{k}\not\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \end{array}\right\}\right| \\
&= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} a_{-2\mathbf{n}\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}\not\equiv\mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n})} a_{-\mathbf{k}}\left|1-\frac{2a_{-\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}\right|.
\end{aligned}
$$

Como $0 < 2a_{\mathbf{k}}/\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0}) = 2a_{-\mathbf{k}}/\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0}) < 1$, temos

$$
0 < 1 - \frac{2a_{-\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})} < 1
$$

e portanto

$$
S_1 < \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} < \infty.
$$

Como S_1 e S_2 são limitados, o resultado segue por (2.23). □

Lema 2.4.4. Seja $\Phi_{\mathbf{n}}$ como no Lema 2.4.2. Considere o operador T, definido sobre $L^p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, por

$$T\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y})\, d\nu(\mathbf{y}).$$

Então

$$||T||_{p,p} \leqslant \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} ||\Lambda_{\mathbf{j}}||_{p,p},$$

onde $\Lambda_{\mathbf{j}}$ é o operador multiplicador gerado pela sequência $\Lambda_j = \{\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j}, \mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$.

Demonstração: Aplicando o Lema 2.4.3 temos

$$\begin{aligned}
T\phi(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y})\, d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{k}_1\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{k}_2\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{y}} \right) \phi(\mathbf{y})\, d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}+\mathbf{j}, \mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{j})\cdot\mathbf{x}+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \right) \phi(\mathbf{y})\, d\nu(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}+\mathbf{j}, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \phi(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\, d\nu(\mathbf{y}) \right) \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}+\mathbf{j}, \mathbf{k}) \widehat{\phi}(-\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} \left(\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(\mathbf{k}+\mathbf{j}, -\mathbf{k}) \widehat{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} e^{i\mathbf{j}\cdot\mathbf{x}} (\Lambda_{\mathbf{j}}^* \phi)(x),
\end{aligned}$$

onde $\Lambda_{\mathbf{j}}^* = \{\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(\mathbf{k}+\mathbf{j}, -\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$. Usando o Lema 2.1.8 temos que $\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{0}) = \rho_{-\mathbf{j}}(\mathbf{0})$ e assim pelo Lema 2.4.1 $\widetilde{\widehat{sk_{\mathbf{n}}}}(\mathbf{l}) = \widetilde{\widehat{sk_{\mathbf{n}}}}(-\mathbf{l})$, para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$. Em particular $\widetilde{\widehat{sk_{\mathbf{n}}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j}) = \widetilde{\widehat{sk_{\mathbf{n}}}}(\mathbf{k}+\mathbf{j})$ para todos $\mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$. Portanto como $\mathbf{a_k} = \mathbf{a_{-k}}$, pelo Lema 2.4.2 temos $\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j}, \mathbf{k}) = \widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(\mathbf{k}+\mathbf{j}, -\mathbf{k})$. Então

$$||T\phi||_p \leqslant \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} ||\Lambda_{\mathbf{j}}^*\phi||_p = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} ||\Lambda_{\mathbf{j}}\phi||_p$$

e logo

$$||T||_{p,p} \leqslant \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} ||\Lambda_{\mathbf{j}}||_{p,p},$$

o que demonstra o lema. □

Lema 2.4.5. Seja $\Lambda_{\mathbf{j}}$ como no Lema 2.4.4. Então para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$, temos

$$\sup_{f\in K*U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_p \leqslant \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} ||\Lambda_{2\mathbf{ns}}||_{p,p}.$$

Demonstração: Aplicando o Lema 2.4.2 temos que $\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k}) = 0$ para todo $\mathbf{j} \not\equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n})$, para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Pelo Lema 2.4.2 e Lema 2.4.4 obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in K*U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_p &= \sup_{\phi\in U_p} \left|\left| \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\cdot,\mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y}) \right|\right|_p \\
&\leqslant \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} ||\Lambda_{\mathbf{j}}||_{p,p} \\
&= \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} ||\Lambda_{2\mathbf{n}\mathbf{s}}||_{p,p},
\end{aligned}$$

concluindo assim a demonstração. □

Teorema 2.4.6. Seja $|\cdot|$ uma norma em $\mathbb{R}^d$ e seja K o núcleo dado por

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}},$$

onde $(a_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d}$ é uma sequência de números reais tal que $a_{\mathbf{l}} = a_{-\mathbf{l}}$ para todo $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ e $a_{\mathbf{l}} \geqslant a_{\mathbf{k}} > \mathbf{0}$ se $|\mathbf{k}| \geqslant |\mathbf{l}|$, $\mathbf{k},\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d\backslash\{\mathbf{0}\}$. Suponhamos que existe uma constante positiva C tal que, para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ e todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, com $|\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{n}|$,

$$\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}-\mathbf{k}} \leqslant C a_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}}.$$

Então para $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$, existe uma constante positiva $\overline{C}$, independente de $\mathbf{n}, p$ e q, tal que

$$\sup_{f\in K*U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \overline{C} a_{\mathbf{n}}.$$

Demonstração: Segue pela Observação 2.3.4, que o núcleo K satisfaz as condições no Lema 2.1.8. Vamos aplicar o Lema 2.4.5 para $p = 2$ e assim precisamos limitar $||\Lambda_{\mathbf{j}}||_{2,2}$ para $\mathbf{j} = 2\mathbf{n}\mathbf{s}$, onde $\Lambda_{\mathbf{j}} = \{\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}-\mathbf{j},\mathbf{k})\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$. Seja $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.2, e como $a_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}$ e $\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k}) = \widetilde{sk}_{\mathbf{n}}(\mathbf{k})$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k},\mathbf{k}) &= a_{\mathbf{k}}(1 - N\widehat{\widetilde{sk}_{\mathbf{n}}}(\mathbf{k})) \\
&= a_{\mathbf{k}} \left(1 - \left\{ \begin{array}{cc} 1, & \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{k} \equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}), \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \\ \dfrac{2a_{\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})}, & \mathbf{k} \not\equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n}). \end{array} \right\} \right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Para $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ temos $\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k},\mathbf{k}) = 0$. Para $\mathbf{k} \equiv \mathbf{0} \bmod (2\mathbf{n})$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, seja $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{k} = 2\mathbf{n}\mathbf{q}$. Aplicando a hipótese obtemos

$$\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k},\mathbf{k}) = a_{\mathbf{k}} = a_{2\mathbf{n}\mathbf{q}} \leqslant \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}} \leqslant C a_{2\mathbf{n}} \leqslant C a_{\mathbf{n}}.$$

Pelo Teorema 2.1.9

$$\begin{aligned}
\frac{2a_{\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})} &= \frac{2a_{\mathbf{k}}}{\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)} \\
&= \frac{2a_{\mathbf{k}}}{2a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)} \\
&= 1 - \frac{\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)}{2a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Suponhamos agora $\mathbf{k} \not\equiv \mathbf{0} \bmod(2\mathbf{n})$. Para $|\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{n}|$, temos $2|\mathbf{n}| = |2\mathbf{n} - \mathbf{k} + \mathbf{k}| \leqslant |2\mathbf{n} - \mathbf{k}| + |\mathbf{k}| \leqslant |2\mathbf{n} - \mathbf{k}| + |\mathbf{n}|$ e portanto $|\mathbf{n}| \leqslant |2\mathbf{n} - \mathbf{k}|$. Da mesma forma obtemos $|\mathbf{n}| \leqslant |2\mathbf{n} + \mathbf{k}|$. Logo por hipótese, por (2.25) e (2.26)

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k},\mathbf{k}) &= \frac{a_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)}{2a_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)} \qquad (2.27) \\
&\leqslant \frac{a_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)}{2a_{\mathbf{k}}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right) \\
&\leqslant \frac{C}{2}\left(a_{2\mathbf{n}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{n}-\mathbf{k}}\right) \\
&\leqslant Ca_{\mathbf{n}}.
\end{aligned}$$

Para $|\mathbf{k}| > |\mathbf{n}|$, usando (2.27) temos

$$\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k},\mathbf{k}) \leqslant \frac{a_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)}{\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}}\left(a_{2\mathbf{np}+\mathbf{k}} + a_{2\mathbf{np}-\mathbf{k}}\right)} = a_{\mathbf{k}} \leqslant a_{\mathbf{n}}.$$

Portanto mostramos que para qualquer $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ temos

$$|\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k},\mathbf{k})| \leqslant Ca_{\mathbf{n}}. \qquad (2.28)$$

Seja $\mathbf{j} = 2\mathbf{ns},\ \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}$. Para $|\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{ns}|$ temos que, $2|\mathbf{ns}| = |2\mathbf{ns} - \mathbf{k} + \mathbf{k}| \leqslant |2\mathbf{ns} + \mathbf{k}| + |\mathbf{k}| \leqslant |2\mathbf{ns} + \mathbf{k}| + |\mathbf{ns}|$ e portanto $|\mathbf{ns}| \leqslant |2\mathbf{ns} + \mathbf{k}|$. Logo pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 temos

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k} - 2\mathbf{ns},\mathbf{k})\right| &= a_{-\mathbf{k}}N\widetilde{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-2\mathbf{ns} - \mathbf{k}) \\
&\leqslant 2a_{2\mathbf{ns}+\mathbf{k}}\frac{a_{\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})} \\
&\leqslant 2a_{2\mathbf{ns}+\mathbf{k}} \leqslant 2a_{\mathbf{ns}}
\end{aligned}$$

pois $a_{\mathbf{k}}/\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0}) < 1$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Para $|\mathbf{k}| \geqslant |\mathbf{ns}|$, pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 temos

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k} - 2\mathbf{ns},\mathbf{k})\right| &= a_{-\mathbf{k}}N\widetilde{\widetilde{sk}}_{\mathbf{n}}(-\mathbf{k} - 2\mathbf{ns}) \\
&= 2a_{\mathbf{k}}\frac{a_{2\mathbf{ns}+\mathbf{k}}}{\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})} \\
&\leqslant 2a_{\mathbf{k}} \leqslant 2a_{\mathbf{ns}}
\end{aligned}$$

pois $a_{\mathbf{2ns+k}}/\rho_{\mathbf{k}}(\mathbf{0}) < 1$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$. Portanto mostramos que para quaisquer $\mathbf{s}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ temos que

$$|\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k} - 2\mathbf{ns}, \mathbf{k})| \leqslant 2a_{\mathbf{ns}}. \tag{2.29}$$

Como para qualquer sequência limitada de multiplicadores $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ temos

$$||\Lambda_{\mathbf{j}}||_{2,2} = \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\lambda_{\mathbf{k}}|,$$

então pela hipótese, Lema 2.4.5, (2.28) e (2.29), temos que

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in K*U_2} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_2 &\leqslant \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} ||\Lambda_{\mathbf{2ns}}||_{2,2} \\
&= \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k} - 2\mathbf{ns}, \mathbf{k})| \\
&= \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k}, \mathbf{k})| + \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} \sup_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\Phi_{\mathbf{n}}}(-\mathbf{k} - 2\mathbf{ns}, \mathbf{k})| \\
&\leqslant Ca_{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} 2a_{\mathbf{ns}}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Dado $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$, existe $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\mathbf{np} = 2\mathbf{nq} + \mathbf{k}$, onde $k_j = 0$ ou $k_j = n_j$. Seja $A = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) : k_j = 0 \ ou \ k_j = n_j, \ 1 \leqslant j \leqslant d\}$. Se $\mathbf{k} \in A$ temos $|\mathbf{k}| \leqslant |\mathbf{n}|$. Assim usando a hipótese obtemos

$$\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{np}} \leqslant \sum_{\mathbf{k}\in A} \sum_{\mathbf{q}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{2nq+k}} \leqslant C \sum_{\mathbf{k}\in A} a_{\mathbf{2n+k}}.$$

Mas $|2\mathbf{n} + \mathbf{k}| \geqslant |2\mathbf{n}| \geqslant |\mathbf{n}|$, logo $a_{\mathbf{2n+k}} \leqslant a_{\mathbf{n}}$ e portanto

$$\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{np}} \leqslant C \sum_{\mathbf{k}\in A} a_{\mathbf{n}} \leqslant 2^d C a_{\mathbf{n}}. \tag{2.31}$$

Assim por (2.30) e (2.31) concluímos que

$$\sup_{f\in K*U_2} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_2 \leqslant Ca_{\mathbf{n}} + 2^{d+1}Ca_{\mathbf{n}} = \bar{C}a_{\mathbf{n}}.$$

Portanto demonstramos o resultado para $p = q = 2$.

Se $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$, usando que $||f||_q \leqslant ||f||_2 \leqslant ||f||_p$, segue que

$$\sup_{f\in K*U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \sup_{f\in K*U_2} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_2 \leqslant \overline{C}\mathbf{a_n},$$

concluindo assim a demonstração do teorema. □

O resultado seguinte é consequência imediata do Teorema 2.4.6 e do Lema 2.3.8.

Corolário 2.4.7. Sejam $a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função decrescente e positiva, e $|\cdot| = |\cdot|_p$ para algum $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Para $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ seja $a_{\mathbf{p}} = a(|\mathbf{p}|)$ e seja $a_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. Consideremos um núcleo K dado por

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{x}},$$

tal que

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}} \leqslant C a_{2\mathbf{n}},$$

onde C é uma constante positiva que independe de $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Então para $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$ e todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, existe uma constante positiva $\overline{C}$, independente de $\mathbf{n}, p$ e q, tal que

$$\sup_{f \in K * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant \overline{C} a_{\mathbf{n}}.$$

Corolário 2.4.8. Seja K um núcleo como no Corolário 2.4.7 e sejam $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$. Então existe uma constante positiva $\overline{C}$, independente de $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, p e q, tal que

$$\sup_{f \in K * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_2 \leqslant \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^2 \right)^{(2-p)/2p} a_{\mathbf{n}}^{2-2/p}, \tag{2.32}$$

$$\sup_{f \in K * U_2} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^2 \right)^{(q-2)/2q} a_{\mathbf{n}}^{2/q}, \tag{2.33}$$

$$\sup_{f \in K * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_{p'} \leqslant \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}} \right)^{2/p-1} a_{\mathbf{n}}^{2-2/p}. \tag{2.34}$$

Demonstração: Fixemos $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$. Seja $\Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ como na demonstração dos Teoremas 2.3.7 e 2.4.6 e como no enunciado do Lema 2.4.2, e seja T o operador linear definido na demonstração do Teorema 2.3.7 e no enunciado do Lema 2.4.4, para $\phi \in L^1(\mathbb{T}^d)$ por

$$T\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{T}^d} \Phi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\nu(\mathbf{y}).$$

Segue dos Corolários 2.3.9 e 2.4.7 que existe uma constante positiva $\overline{C}$ independente de $\mathbf{n}$, tal que

$$||T||_{1,2} \leqslant \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^2 \right)^{1/2} = M_0$$

e

$$||T||_{2,2} \leqslant \overline{C} a_{\mathbf{n}} = M_1.$$

Sejam $p_0 = 1, q_0 = p_1 = q_1 = 2$, e para $0 \leqslant t \leqslant 1$ sejam $1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1 = (2-t)/2$ e $1/q_t = (1-t)/q_0 + t/q_1 = 1/2$. Assim temos $q_t = 2$ e $t = 2 - 2/p_t$. Então pelo Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin (Teorema 1.2.1) segue que

$$||T||_{p_t,2} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t = \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^2 \right)^{(2-p)/2p} a_{\mathbf{n}}^{2-2/p}.$$

Quando t varia entre 0 e 1, p_t varia entre 1 e 2, portanto obtemos (2.32).

Novamente, como consequência dos Corolários 2.3.9 e 2.4.7,

$$||T||_{2,\infty} \leqslant \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^2 \right)^{1/2} = M_0$$

e

$$||T||_{2,2} \leqslant \overline{C} a_{\mathbf{n}} = M_1.$$

Sejam $p_0 = 2 = p_1 = q_1$ e $q_0 = \infty$, e para $0 \leqslant t \leqslant 1$ sejam $1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1 = 1/2$ e $1/q_t = (1-t)/q_0 + t/q_1 = t/2$. Assim temos $p_t = 2$ e $t = 2/q_t$. Então pelo Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin segue que

$$||T||_{2,q_t} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t = \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^2 \right)^{(q-2)/2q} a_{\mathbf{n}}^{2/q}.$$

Quando t varia entre 0 e 1, q_t varia entre 2 e ∞, portanto obtemos (2.33).

Finalmente, como consequência dos Corolários 2.3.9 e 2.4.7

$$||T||_{1,\infty} \leqslant \overline{C} \sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}} = M_2$$

e

$$||T||_{2,2} \leqslant \overline{C} a_{\mathbf{n}} = M_1.$$

Sejam $p_0 = 1$, $q_0 = \infty$, $p_1 = q_1 = 2$, e para $0 \leqslant t \leqslant 1$ sejam $1/p_t = (1-t)/p_0 + t/p_1 = (2-t)/2$ e $1/q_t = (1-t)/q_0 + t/q_1 = t/2$. Temos $t = 2(1-1/p_t)$ e $1/q_t = 1 - 1/p_t$, logo $1/p_t + 1/q_t = 1$, isto é, $q_t = p_t$ é o conjugado de p_t. Então pelo Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, temos

$$||T||_{p_t,p_t'} \leqslant M_2^{1-t} M_1^t = \overline{C} \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}} \right)^{2/p_t - 1} a_{\mathbf{n}}^{2-2/p_t}.$$

Quando t varia entre 0 e 1, p_t varia entre 1 e 2 e p_t' de 2 até ∞. Logo obtemos (2.34). $\square$

3 Aplicações

Neste capítulo apresentamos duas aplicações dos principais resultados do capítulo anterior. Na Seção 3.1 estudamos aproximação de funções finitamente diferenciáveis (ver Observação 1.3.8) e na Seção 3.2 aproximação de funções infinitamente diferenciáveis e analíticas (ver Observações 1.3.9 e 1.3.10), definidas sobre o toro $\mathbb{T}^d$, por sk-splines interpolantes.

3.1 Aproximação de Funções Finitamente Diferenciáveis

Nesta seção estudamos aproximação de funções em classes de tipo Sobolev sobre o toro, por sk-splines. Usamos como ferramental principal para obter nossas estimativas os Corolários 2.3.9, 2.4.7 e 2.4.8. No final da seção mostramos que a taxa de convergência dos sk-splines interpolantes para funções nas classes de tipo Sobolev coincide com a taxa de convergência por subespaços de polinômios trigonométricos e que é ótima, em termos de ordem, no sentido de n-larguras, em vários casos.

Teorema 3.1.1. Para $\gamma \in \mathbb{R},\ \gamma > d$, seja

$$K_1(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} |\mathbf{l}|^{-\gamma} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d,$$

onde $|\cdot| = |\cdot|_2$ ou $|\cdot| = |\cdot|_\infty$. Para $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathbf{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$. Então, para $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$, com $1/p - 1/q \geqslant 1/2$ temos que

$$\sup_{f\in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \overline{C} n^{-\gamma + d(1/p-1/q)}, \tag{3.1}$$

e para $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$ temos que

$$\sup_{f\in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \overline{C} n^{-\gamma}. \tag{3.2}$$

Dados $p, q \in \mathbb{R}$ satisfazendo $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$

$$\sup_{f\in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_2 \leqslant \overline{C} n^{-\gamma + d(1/p-1/2)}, \tag{3.3}$$

$$\sup_{f\in K_1 * U_2} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \overline{C} n^{-\gamma + d(1/2-1/q)} \tag{3.4}$$

e

$$\sup_{f\in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_{p'} \leqslant \overline{C} n^{-\gamma + d(2/p-1)}. \tag{3.5}$$

A constante $\overline{C}$ é positiva e independe de $\mathbf{n}, p$ e q.

Demonstração: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $f(x) = (x-1)^\alpha / x^\alpha$, $x \geqslant 2$. Como

$$f'(x) = \alpha \left(1 - \frac{1}{x}\right)^\alpha \frac{1}{x(x-1)} \geqslant 0,\ \ x \geqslant 2,$$

segue que $f(x)$ é crescente e assim que $f(x) \geqslant f(2) = 1/2^\alpha,\ \ x \geqslant 2$. Portanto

$$(j-1)^{-\alpha} \leqslant 2^\alpha j^{-\alpha},\ \ j \geqslant 2. \tag{3.6}$$

Fixemos $\mathbf{n} = (n, n, \ldots, n)$ e para cada $j \in \mathbb{N}$ seja $B_j = \{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d : j-1 \leqslant |\mathbf{l}| < j\}$. Temos assim $\mathbb{Z}^d = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Se $\mathbf{p} \in B_j$, então $j-1 \leqslant |\mathbf{p}| < j$ e portanto $j^{-\gamma} < |\mathbf{p}|^{-\gamma} \leqslant (j-1)^{-\gamma}$. Seja $a_{\mathbf{l}} = |\mathbf{l}|^{-\gamma}$ para $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ e $a_{\mathbf{0}} = 0$. Pela Proposição 1.3.4 e pela Observação 1.3.5 segue que a cardinalidade $\#B_j$ do conjunto B_j satisfaz

$$\#B_j \leqslant C j^{d-1},\ \ j \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

onde C é uma constante positiva que independe de j. Como

$$2\mathbf{np} = 2(n, \ldots, n)(p_1, \ldots, p_d) = 2n(1, \ldots, 1)(p_1, \ldots, p_d) = 2n(p_1, \ldots, p_d) = 2n\mathbf{p},$$

então por (3.6) e (3.7)

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}} &= a_0 + \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}} a_{2\mathbf{np}} \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_j} a_{2n\mathbf{p}} \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_j} |2n\mathbf{p}|^{-\gamma} \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_j} (2n)^{-\gamma} |\mathbf{p}|^{-\gamma} \\
&\leqslant \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_j} (2n)^{-\gamma} (j-1)^{-\gamma} \\
&\leqslant C \sum_{j=2}^{\infty} (2n)^{-\gamma} j^{d-1} (j-1)^{-\gamma} \\
&\leqslant 2^\gamma C \sum_{j=2}^{\infty} (2n)^{-\gamma} j^{d-1} j^{-\gamma} \\
&= 2^\gamma C (2n)^{-\gamma} \sum_{j=2}^{\infty} j^{d-1-\gamma}.
\end{aligned}$$

Como $\gamma > d$, então $d-1-\gamma < 0$ e assim $j^{d-1-\gamma} \leqslant \displaystyle\int_{j-1}^{j} t^{d-1-\gamma}dt$. Logo

$$\sum_{j=2}^{\infty} j^{d-1-\gamma} \leqslant \int_{1}^{\infty} t^{d-1-\gamma}dt$$

e portanto como $d-\gamma < 0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}} &\leqslant 2^{\gamma}C(2n)^{-\gamma}\sum_{j=2}^{\infty} j^{d-1-\gamma} \\
&\leqslant 2^{\gamma}C(2n)^{-\gamma}\lim_{m\to\infty}\int_{1}^{m} t^{d-1-\gamma}dt \\
&= 2^{\gamma}C(2n)^{-\gamma}\lim_{m\to\infty}\left[\frac{t^{d-\gamma}}{d-\gamma}\right]_1^m \\
&= 2^{\gamma}C(2n)^{-\gamma}\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m^{d-\gamma}}{d-\gamma}-\frac{1}{d-\gamma}\right) \\
&= -2^{\gamma}C(2n)^{-\gamma}\frac{1}{d-\gamma} \\
&= \frac{2^{\gamma}C|\mathbf{1}|^{\gamma}}{\gamma-d}a_{2\mathbf{n}} = C_1 a_{2\mathbf{n}}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto demonstramos que as hipóteses dos Corolários 2.3.9 e 2.4.7 são satisfeitas.

Seja $r = p^{-1} - q^{-1}$ e $s = r^{-1}$. Então usando (3.6) e (3.7)

$$\begin{aligned}
\sum_{|\mathbf{l}|\geqslant|\mathbf{n}|} (a_{\mathbf{l}})^s &= \sum_{j=|\mathbf{n}|+1}^{\infty}\sum_{\mathbf{l}\in B_j} a_{\mathbf{l}}^s \\
&= \sum_{j=|\mathbf{n}|+1}^{\infty}\sum_{\mathbf{l}\in B_j} |\mathbf{l}|^{-s\gamma} \\
&\leqslant \sum_{j=|\mathbf{n}|+1}^{\infty}\sum_{\mathbf{l}\in B_j} (j-1)^{-s\gamma} \\
&\leqslant C\sum_{j=|\mathbf{n}|+1}^{\infty} j^{d-1}(j-1)^{-s\gamma} \\
&= C\sum_{j=|\mathbf{n}|}^{\infty} (j+1)^{d-1}j^{-s\gamma} \\
&\leqslant 2^{d-1}C\sum_{j=|\mathbf{n}|}^{\infty} j^{d-1-s\gamma}.
\end{aligned}$$

Temos que $1 \leqslant p \leqslant 2$, assim $r = 1/p - 1/q \leqslant 1$ e $s \geqslant 1$. Logo $d-1-s\gamma < d-1-sd \leqslant -1 < 0$.

Assim $j^{d-1-s\gamma} \leqslant \displaystyle\int_{j-1}^{j} t^{d-1-s\gamma} dt$ e portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} (a_{\mathbf{l}})^s &\leqslant 2^{d-1} C \sum_{j=|\mathbf{n}|}^{\infty} j^{d-1-s\gamma} \\
&\leqslant 2^{d-1} C \sum_{j=|\mathbf{n}|}^{\infty} \int_{j-1}^{j} t^{d-1-s\gamma} dt \\
&= 2^{d-1} C \int_{|\mathbf{n}|-1}^{\infty} t^{d-1-s\gamma} dt \\
&= 2^{d-1} C \lim_{m \to \infty} \int_{|\mathbf{n}|-1}^{m} t^{d-1-s\gamma} dt \\
&= 2^{d-1} C \lim_{m \to \infty} \left[\frac{t^{d-s\gamma}}{d - s\gamma} \right]_{|\mathbf{n}|-1}^{m} \\
&= 2^{d-1} C \lim_{m \to \infty} \left(\frac{m^{d-s\gamma}}{d - s\gamma} - \frac{(|\mathbf{n}| - 1)^{d-s\gamma}}{d - s\gamma} \right) \\
&= -2^{d-1} C \frac{(|\mathbf{n}| - 1)^{d-s\gamma}}{d - s\gamma} \\
&\leqslant \frac{2^{d-1} C}{s\gamma - d} |\mathbf{n}|^{d-s\gamma} \\
&= C_2 |\mathbf{n}|^{d-s\gamma}.
\end{aligned}$$

Então aplicando o Corolário 2.3.9 obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q &\leqslant C_3 \left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} (a_{\mathbf{l}})^s \right)^r \\
&\leqslant C_3 C_2^r |\mathbf{n}|^{(d-s\gamma)r} \\
&= C_4 |\mathbf{n}|^{-\gamma + d(p^{-1} - q^{-1})},
\end{aligned}$$

para $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$, com $p^{-1} - q^{-1} \geqslant 2^{-1}$. Agora aplicando o Corolário 2.4.7 obtemos

$$\sup_{f \in K_1 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant C_5 |\mathbf{n}|^{-\gamma},$$

para $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$. Como para $\mathbf{n} = (n, \ldots, n)$ temos $|\mathbf{n}|_2 = \sqrt{d} n$ e $|\mathbf{n}|_\infty = n$, as equações (3.1) e (3.2) ficam demonstradas.

De (3.1) e (3.2) temos

$$\left(\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}}^2 \right)^{1/2} \leqslant C n^{-\gamma + d/2},$$

$$\sum_{|\mathbf{l}| \geqslant |\mathbf{n}|} a_{\mathbf{l}} \leqslant C n^{-\gamma + d}$$

e $a_{\mathbf{n}} = n^{-\gamma}$. Assim as estimativas (3.3), (3.4) e (3.5) seguem pelo Corolário 2.4.8. □

Notação 3.1.2. Se (a_n) e (b_n) são sequências, escrevemos $a_n \gg b_n$ para indicar que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que $a_n \geqslant C_1 b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e escrevemos $a_n \ll b_n$ para indicar que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que $a_n \leqslant C_2 b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevemos $a_n \asymp b_n$ para indicar que $a_n \ll b_n$ e $a_n \gg b_n$.

Observação 3.1.3. Consideremos um núcleo K_1 como no Teorema 3.1.1 e sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q \in \mathbb{R}$ com $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Observamos que o conjunto $K_1 * U_p$ é uma classe de tipo Sobolev em $\mathbb{T}^d$. A n-largura de Kolmogorov de $K_1 * U_p$ em $L^q(\mathbb{T}^d)$ é o número $d_n(K_1 * U_p, L^q)$ dado por

$$d_n(K_1 * U_p, L^q) = \inf_{T_n} \sup_{f \in K_1 * U_p} \inf_{g \in T_n} ||f - g||_q,$$

onde T_n varia na família dos subespaços de dimensão n de $L^q(\mathbb{T}^d)$. Segue como consequência de resultados em (KUSHPEL; STABILE; TOZONI, 2014) e (PESENSON, 2016) que

$$d_{(2n)^d}(K_1 * U_p, L^q) \asymp n^{-\gamma + d(1/p - 1/2)}, 1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty \tag{3.9}$$

e

$$d_{(2n)^d}(K_1 * U_p, L^q) \asymp n^{-\gamma}, 1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty \tag{3.10}$$

onde os subespaços $T_{(2n)^d}$ na definição de $(2n)^d$-largura de Kolmogorov podem ser considerados variando somente na família dos subespaços de polinômios trigonométricos de dimensão $(2n)^d$.

Uma questão fundamental para uma teoria de splines multidimensionais é saber se o subespaço de splines multidimensionais interpolantes será tão bom como o subespaço de polinômios trigonométricos de mesma dimensão, no sentido de que eles tenham a mesma ordem de convergência (velocidade de convergência) sobre as classes de Sobolev. Se sim, então podemos construir splines interpolantes ótimos (ver introdução do artigo (GOMES et al., 1999)).

Vimos na Observação 2.2.7 que para $\mathbf{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, a dimensão do espaço $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$ dos sk-splines interpolantes sobre $\Lambda_{\mathbf{n}}$ é $(2n)^d$. Assim, devemos comparar os resultados do Teorema 3.1.1 com as estimativas (3.9) e (3.10).

Fazendo a comparação, verificamos que a taxa de convergência dos sk-splines interpolantes, é da mesma ordem que a taxa de convergência por subespaços de polinômios trigonométricos da dimensão de $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$, para classes do tipo Sobolev,quando $1 \leqslant p \leqslant 2 = q$ e quando $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$, isto é, a taxa de convergência é ótima, nesses casos, em termos de ordem, no sentido de n-larguras. A construção dos sk-splines ótimos é dada no Teorema 2.2.6 . O subespaço $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$ é ótimo para a $(2n)^d$-largura de Kolmogorov da classe do tipo Sobolev $K_1 * U_p$ em $L^q(\mathbb{T}^d)$, no caso $1 \leqslant p \leqslant 2 = q$ e também no caso $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$, em termos de ordem.

3.2 Aproximação de Funções Infinitamente Diferenciáveis e Analíticas

Nesta seção estudamos aproximação de funções em classes de funções infinitamente diferênciáveis e analíticas sobre o toro, por sk-splines. Usamos como ferramenta principal para obter nossas estimativas os Corolários 2.3.9, 2.4.7 e 2.4.8. Mostramos que a taxa de convergência dos sk-splines interpolantes para funções nessas classes coincide com a taxa de convergência por subespaços de polinômios trigonométricos e que é ótima, em termos de ordem, no sentido de n-larguras em vários casos. No final comparamos os resultados deste capítulo com resultados relacionados publicados em artigos de A. Kushpel.

Observação 3.2.1. Sejam $a, b, r \in \mathbb{R}$, $a \geqslant b > 0$ e $r \geqslant 1$. Então

$$(a-b)^r \leqslant a^r - b^r.$$

Observação 3.2.2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$. Então existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $e^{-at} \leqslant t^{-b}$ para $t \geqslant c$. De fato

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-at}}{t^{-b}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^b}{e^{at}} = 0$$

e assim existe $c > 0$ tal que se $t \geqslant c$, $t^b/e^{at} \leqslant 1$ e portanto $e^{-at} \leqslant t^{-b}$.

Teorema 3.2.3. Sejam r, α dois números reais positivos, e seja

$$K_2(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\}} e^{-\alpha|\mathbf{l}|_\infty^r} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d.$$

Para $n \in \mathbb{N}$ seja $\mathbf{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$. Então, para $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ e $r \geqslant 1$, com $1/p - 1/q \geqslant 1/2$, temos que

$$\sup_{f\in K_2 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \overline{C} e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(1/p-1/q)}, \tag{3.11}$$

e para $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$ e $r > 0$ temos

$$\sup_{f\in K_2 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \overline{C} e^{-\alpha n^r}. \tag{3.12}$$

Dados $p, q \in \mathbb{R}$ satisfazendo $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ e $r \geqslant 1$, temos

$$\sup_{f\in K_2 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_2 \leqslant \overline{C} e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(1/p-1/2)}, \tag{3.13}$$

$$\sup_{f\in K_2 * U_2} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_q \leqslant \overline{C} e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(1/2-1/q)}, \tag{3.14}$$

$$\sup_{f\in K_2 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f,\cdot)||_{p'} \leqslant \overline{C} e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(2/p-1)}. \tag{3.15}$$

a constante $\overline{C}$ é positiva e independe de de $\mathbf{n}$, p e q.

Demonstração: Consideremos $r > 0$ e fixemos $\mathbf{n} = (n, n, \ldots, n)$. Para cada $s \in \mathbb{N}$ seja $B_s = \{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d : s - 1 \leqslant |\mathbf{l}|_\infty < s\}$. Temos assim $\mathbb{Z}^d = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_s$. Se $\mathbf{p} \in B_s$, $s - 1 \leqslant |\mathbf{p}|_\infty < s$ e portanto $-s^r < -|\mathbf{p}|_\infty^r \leqslant -(s-1)^r$. Seja $a_{\mathbf{l}} = e^{-\alpha|\mathbf{l}|_\infty^r}$ para $\mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$ e $a_{\mathbf{0}} = 0$. Como $2\mathbf{n}\mathbf{p} = 2n\mathbf{p}$, por (3.7) temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}} &= a_0 + \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d \backslash \{\mathbf{0}\}} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}} \\
&= \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_s} a_{2n\mathbf{p}} \\
&= \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_s} e^{-\alpha|2n\mathbf{p}|_\infty^r} \\
&= \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_s} e^{-\alpha(2n)^r|\mathbf{p}|_\infty^r} \\
&\leqslant \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_s} e^{-\alpha(2n)^r(s-1)^r} \\
&\leqslant C \sum_{s=2}^{\infty} s^{d-1} e^{-\alpha(2n)^r(s-1)^r} \\
&= C \sum_{s=2}^{\infty} e^{(d-1)\ln s} e^{-\alpha(2n)^r(s-1)^r} \\
&= C \sum_{s=2}^{\infty} e^{(d-1)\ln s - \alpha(2n)^r(s-1)^r} \\
&= C e^{-\alpha(2n)^r} \sum_{s=2}^{\infty} e^{(d-1)\ln s + \alpha(2n)^r - \alpha(2n)^r(s-1)^r} \\
&= C a_{2\mathbf{n}} \sum_{s=2}^{\infty} e^{(d-1)\ln s - \alpha(2n)^r((s-1)^r - 1)}. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Seja $g(x) = \dfrac{4(d-1)}{r} x^{r/4} - (d-1)\ln x$, $x \geqslant 1$. Como $g'(x) = (d-1)x^{-1}(x^{r/4} - 1) \geqslant 0$ para $x \geqslant 1$ e $g(1) = 4(d-1)/r > 0$, então $g(x) \geqslant 0$ para todo $x \geqslant 1$. Tomando $A = 4(d-1)/r$ segue por (3.16) que

$$
\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}} \leqslant C a_{2\mathbf{n}} \sum_{s=2}^{\infty} e^{As^{r/4} - \alpha(2n)^r((s-1)^r - 1)}. \qquad (3.17)
$$

Como

$$
\lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)^r - 1}{x^{r/2}} = \infty
$$

então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$
(x-1)^r \geqslant x^{r/2}, \; x \geqslant a.
$$

Logo existe uma constante $K_1 > 0$ tal que

$$
\sum_{p \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{n}\mathbf{p}} \leqslant C a_{2\mathbf{n}} \left(K_1 + \sum_{s=a}^{\infty} e^{As^{r/4} - \alpha(2n)^r s^{r/2}} \right). \qquad (3.18)
$$

Podemos observar que existe $b \in \mathbb{N}, b \geqslant a$, tal que $Ax^{r/4} - \alpha(2n)^r x^{r/2} \leqslant -x^{r/4}, x \geqslant b$. Portanto existe uma constante $K_2 > 0$ e por (3.18) segue que

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}} \leqslant Ca_{2\mathbf{n}} \left(K_1 + K_2 + \sum_{s=b}^{\infty} e^{-s^{r/4}} \right) \leqslant Ca_{2\mathbf{n}} \left(K_1 + K_2 + \sum_{s=b}^{\infty} e^{-s^{1/4}} \right). \tag{3.19}$$

Como

$$\lim_{\mathbf{x} \to \infty} \frac{x^2}{e^{x^{1/4}}} = 0,$$

existe uma constante $c \in \mathbb{N},\ c \geqslant b$, tal que

$$e^{-x^{1/4}} \leqslant x^{-2},\ x \geqslant c.$$

Assim existem constantes positivas K_3 e K_4 e por (3.19) segue que

$$\sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d} a_{2\mathbf{np}} \leqslant Ca_{2\mathbf{n}} \left(K_1 + K_2 + K_3 + \sum_{s=c}^{\infty} s^{-2} \right) \leqslant Ca_{2\mathbf{n}} \left(K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \right) = \bar{C} a_{2\mathbf{n}}.$$

Portanto demonstramos que as hipóteses dos Corolários 2.3.9 e 2.4.7 são satisfeitas.

Consideremos agora $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ tal que $p^{-1} - q^{-1} \geqslant 1/2$ e seja $s = (p^{-1} - q^{-1})^{-1}$. Então por (3.7) e pela Observação 3.2.1

$$\begin{aligned}
\sum_{|\mathbf{p}|_\infty \geqslant |\mathbf{n}|_\infty} (a_{\mathbf{p}})^s &= \sum_{|\mathbf{p}|_\infty \geqslant |\mathbf{n}|_\infty} (e^{-\alpha |\mathbf{p}|_\infty^r})^s \\
&= \sum_{|\mathbf{p}|_\infty \geqslant |\mathbf{n}|_\infty} e^{-\alpha s |\mathbf{p}|_\infty^r} \\
&\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{\mathbf{p} \in B_j} e^{-\alpha s |\mathbf{p}|_\infty^r} \\
&\leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} C_1 j^{d-1} e^{-\alpha s (j-1)^r} \\
&= C_1 \sum_{l=n}^{\infty} (l+1)^{d-1} e^{-\alpha s l^r} \\
&= C_1 \sum_{l=n}^{\infty} (l+1)^{d-1} e^{-\alpha s |\mathbf{n}|_\infty^r} e^{-\alpha s (l^r - |\mathbf{n}|_\infty^r)} \\
&\leqslant C_1 e^{-\alpha s n^r} \sum_{l=n}^{\infty} (l+1)^{d-1} e^{-\alpha s (l-n)^r} \\
&= C_1 e^{-\alpha s n^r} \sum_{j=0}^{\infty} (j+n+1)^{d-1} e^{-\alpha s j^r}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
(j+1+n)^{d-1} &= \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} (j+1)^{d-1-i} n^i \\
&\leqslant C_2 (j+1)^{d-1} n^{d-1} \\
&\leqslant 2^{d-1} C_2 j^{d-1} n^{d-1},
\end{aligned}$$

temos

$$\sum_{|\mathbf{p}|_\infty \geqslant |\mathbf{n}|_\infty} (a_{\mathbf{p}})^s \leqslant C_3 n^{d-1} e^{-\alpha s n^r} \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} e^{-\alpha s j^r} \leqslant C_3 n^{d-1} e^{-\alpha s n^r} \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} e^{-\alpha s j}.$$

Pela Observação 3.2.2 segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $e^{-\alpha s t} \leqslant t^{-2d}, t \geqslant k$. Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{|\mathbf{p}|_\infty \geqslant |\mathbf{n}|_\infty} (a_{\mathbf{p}})^s &\leqslant C_3 n^{d-1} e^{-\alpha s n^r} \left(\sum_{j=1}^{k-1} j^{d-1} e^{-\alpha s j} + \sum_{j=k}^{\infty} j^{d-1} j^{-2d} \right) \\
&= C_3 n^{d-1} e^{-\alpha s n^r} \left(K_5 + \sum_{j=k}^{\infty} j^{-d-1} \right) \\
&\leqslant C_3 n^{d-1} e^{-\alpha s n^r} \left(K_5 + \sum_{j=k}^{\infty} j^{-2} \right) \\
&= C_4 n^{d-1} e^{-\alpha s n^r}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\sum_{|\mathbf{p}|_\infty \geqslant |\mathbf{n}|_\infty}^{\infty} (a_{\mathbf{p}})^s \right)^{s^{-1}} \leqslant C_5 e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(1/p-1/q)}.$$

Pelo Corolário 2.3.9 temos

$$\sup_{f \in K_2 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant C_6 e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(1/p-1/q)},$$

para $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ e $r \geqslant 1$, e pelo Corolário 2.4.7 temos,

$$\sup_{f \in K_2 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant C_7 e^{-\alpha n^r},$$

para $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$ e $r > 0$. Isto demonstra (3.11) e (3.12).

De (3.11) e (3.12) temos

$$\left(\sum_{|\mathbf{l}|_\infty \geqslant |\mathbf{n}|_\infty} a_{\mathbf{l}}^2 \right)^{1/2} \leqslant C_8 e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)/2},$$

$$\sum_{|\mathbf{l}|_\infty \geqslant |\mathbf{n}|_\infty} a^l \leqslant C_8 e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)},$$

e $a_{\mathbf{n}} = e^{-\alpha n^r}$. Assim as estimativas (3.13), (3.14) e (3.15) seguem pelo Corolário 2.4.8. □

Observação 3.2.4. Consideremos um núcleo K_2 como no Teorema 3.2.3 e sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q \in \mathbb{R}$ com $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Observamos que o conjunto $K_2 * U_p$ é uma classe de funções sobre $\mathbb{T}^d$, infinitamente diferenciáveis se $0 < r < 1$ e analíticas se $r \geqslant 1$. Foi demonstrado em (KUSHPEL; STABILE; TOZONI, 2014) que

$$d_{(2n+1)^d}(K_2 * U_p, L^q) \ll e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(1/p-1/q)},\ 1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty,\ r > 1, \tag{3.20}$$

e

$$d_{(2n)^d}(K_2 * U_p, L^q) \ll e^{-\alpha n^r} n^{(d-1)(1/p-1/2)},\ 1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty,\ r = 1, \tag{3.21}$$

e

$$d_{(2n)^d}(K_2 * U_p, L^q) \asymp e^{-\alpha n^r},\ 2 \leqslant p, q \leqslant \infty,\ 0 < r \leqslant 1. \tag{3.22}$$

Verificamos que para todos os casos estudados no Teorema 3.2.3, a taxa de convergência dos sk-splines interpolantes obtida neste teorema, coincide (ou é mesmo melhor pois $d_{(2n+1)^d}(K_2 * U_p, L^q) \leqslant d_{(2n)^d}(K_2 * U_p, L^q)$) com a taxa de convergência por subespaços de polinômios trigonométricos da dimensão de $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$

No caso $p = q = 2, \alpha > 0$ e $0 < r \leqslant 1$, observamos que a taxa de convergência é ótima, em termos de ordem, no sentido de n-larguras. A construção dos sk-splines ótimos é dada no Teorema 2.2.6. O subespaço $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$ é ótimo para a $(2n)^d$-largura de Kolmogorov da classe $K_2 * U_p$ em $L^q(\mathbb{T}^d)$, no caso $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < r \leqslant 1$, em termos de ordem.

Observação 3.2.5. Vamos comparar os resultados dos Teoremas 3.1.1 e 3.2.3 com outros resultados sobre aproximação por splines no toro em artigos de A. Kushpel em coautoria com outros matemáticos. Em nenhum desses artigos foi obtido um resultado com taxa de convergência ótima, em termos de ordem, no sentido de n-larguras. Nesses artigos o estudo foi feito com classes de Sobolev anisotrópicas e em nossos estudos com classes de funções que denominamos de tipo Sobolev.

Seja $\mathbb{Z}_* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Para cada $1 \leqslant j \leqslant d$, considere uma sequência de números reais $(a_{l,j})_{l\in\mathbb{Z}_*}$, tal que $a_{l,j} = a_{-l,j}$ e $a_{l,j} > a_{l+1,j} > 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant j \leqslant d$. Suponha que para cada $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ existe uma constante positiva C tal que, se $l \in \mathbb{Z}$ e $|l| \leqslant n_j$, então

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2n_jk-l,j} \leqslant C a_{2n_j-l,j},$$

onde a constante C independe de j, l e $\mathbf{n}$. Seja K o núcleo

$$K(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_*^d} a_{\mathbf{l}} e^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{T}^d,$$

onde

$$a_{\mathbf{l}} = a_{l_1,1}a_{l_2,2}\cdots a_{l_d,d}.$$

Então foi demonstrado em (LEVESLEY; KUSHPEL, 1999) que para sk-splines associados a esse núcleo temos que, se $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ e $1/p - 1/q \geqslant 1/2$, então

$$\sup_{f \in K * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant \overline{C} \max_{1 \leqslant j \leqslant d} \left(\sum_{l=n_j}^{\infty} (a_{l,j})^{qp(q-p)^{-1}} \right)^{1/p-1/q}. \tag{3.23}$$

A constante $\overline{C}$ é independente de $\mathbf{n}, p$ e q.

Seja $\gamma > 1$ e para cada $1 \leqslant j \leqslant d$ seja $a_{l,j} = |l|^{-\gamma}$, $l \in \mathbb{Z}_*$. Seja K_3 o núcleo associado a essa sequência particular. Para $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}_*^d$ temos

$$a_{\mathbf{l}} = a_{l_1,1} \cdots a_{l_d,d} = |l_1|^{-\gamma} \cdots |l_d|^{-\gamma} = |l_1 \cdots l_d|^{-\gamma}.$$

Como sabemos que as sequências $(a_{l,j})_{l \in \mathbb{Z}_*}$, $1 \leqslant j \leqslant d$, satisfazem as condições acima e também que para $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ com $1/p - 1/q \geqslant 1/2$ temos

$$\left(\sum_{l=n_j}^{\infty} (|l|^{-\gamma})^{qp(q-p)^{-1}} \right)^{1/p-1/q} \leqslant C_1 n_j^{-\gamma+1/p-1/q},$$

onde C_1 é uma constante positiva que independe de $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, para o caso particular de $\mathbf{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, $n \in \mathbb{N}$, segue por (3.23) que

$$\sup_{f \in K_3 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant C_2 n^{-\gamma+1/p-1/q}. \tag{3.24}$$

Observamos que $K_3 * U_p$ é uma classe de Sobolev em $\mathbb{T}^d$.

A ordem de aproximação neste caso, por subespaços de polinômios trigonométricos de dimensão n é $n^{-\gamma+1/p-1/q}$, para $1 < p \leqslant q < \infty$. Como $\dim(SK(\Lambda_{\mathbf{n}})) = (2n)^d$, o resultado (3.24) deve ser comparado à aproximação por subespaços de polinômios trigonométricos de dimensão $(2n)^d$, que tem ordem $n^{-d\gamma+d(1/p-1/q)}$. Isso mostra que a ordem de aproximação para uma função $f \in K_3 * U_p$ por sk-splines é muito mais lenta do que a ordem de melhor aproximação por polinômios trigonométricos.

Consideremos um número primo P e

$$G_P = \{\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_d) \in \mathbb{N}^d : \ 1 \leqslant g_i \leqslant P - 1, \ i = 1, \ldots, d\}.$$

Fixado $\mathbf{g} \in G_P$, seja

$$\Delta_P^{\mathbf{g}} = \left\{ \mathbf{w}_j = \frac{2\pi j}{P} \mathbf{g} = \left(\frac{2\pi j g_1}{P}, \ldots, \frac{2\pi j g_d}{P} \right) : \ j = 0, 1, \ldots, P-1 \right\}.$$

Seja $SK(\Delta_P^{\mathbf{g}})$ o espaço dos sk-splines sobre $\Delta_P^{\mathbf{g}}$, que tem dimensão P. Em (GOMES et al., 1999) foi demonstrado que se $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ e $1/p - 1/q \geqslant 1/2$, então existe $\mathbf{g}^* \in G_P$ tal que

$$\sup_{f \in K_3 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \Delta_P^{\mathbf{g}^*})||_q \leqslant C P^{-\gamma+1/p+1/q} (\log P)^{\gamma d - 1/p + 1/q}, \tag{3.25}$$

onde $sk(f, \Delta_P^{\mathbf{g}^*})$ é o sk-spline interpolante de f tendo como nós e pontos de interpolação os pontos de $\Delta_P^{\mathbf{g}^*}$, e a constante C não depende de P.

O resultado (3.25) dá uma estimativa quase ótima, no sentido de melhor aproximação por polinômios trigonométricos, para funções f na classe de Sobolev $K_3 * U_p$, por sk-splines, ótima, a menos de um fator logarítmico.

Em (KUSHPEL; GRANDISON; DZUNG, 2006), um resultado semelhante ao resultado (3.25) foi obtido para o caso $p = q = 1$.

Tomemos agora $\alpha, r \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ $r \geqslant 1$ e para $1 \leqslant j \leqslant d$ e $l \in \mathbb{Z}_*$ seja $b_{l,j} = e^{-\alpha|l|^r}$. Assim para $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}_*^d$,

$$b_{\mathbf{l}} = b_{l_1,1} \cdots b_{l_d,d} = e^{-\alpha|l_1|^r} \cdots e^{-\alpha|l_d|^r} = e^{-\alpha(|l_1|^r + \cdots + |l_d|^r)}.$$

Seja K_4 o núcleo associado a essa sequência particular $(b_{\mathbf{l}})_{\mathbf{l} \in \mathbb{Z}_*^d}$.

Então por (3.23) para o núcleo K_4 obtemos, para $\mathbf{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$ com $1/p - 1/q \geqslant 1/2$, que

$$\sup_{f \in K_4 * U_p} ||f - sk_{\mathbf{n}}(f, \cdot)||_q \leqslant Ce^{-\alpha n^r}.$$

Observe que a ordem de aproximação de uma função $f \in K_4 * U_p$ por sk-splines de $SK(\Delta_{\mathbf{n}})$ para $d \geqslant 2$, que tem dimensão $(2n)^d$, coincide com a ordem de aproximação para $d = 1$, neste caso a dimensão de $SK(\Delta_{\mathbf{n}})$ é $2n$. Constatamos assim que a ordem de aproximação não é boa, para $d \geqslant 2$.

Nas Observações 3.1.3 e 3.2.4, constatamos que as aproximações de funções $f \in K * U_p$, por sk-splines, para os núcleos K ali considerados, são ótimas, em termos de ordem, no sentido de melhor aproximação por subespaços de polinômios trigonométricos da dimensão de $SK(\Lambda_{\mathbf{n}})$, $\mathbf{n} = (n, \ldots, n) \in \mathbb{N}^d$, $n \in \mathbb{N}$, para vários valores de p e q.

Referências

CHAMIZO, F.; IWANIEC, H. On the sphere problem. *Rev. Mat. Iberoamericana*, v. 11, p. 417–429, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 14, 22 e 23.

FOLLAND, G. B. Real analysis. John Wiley and Sons, New York, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 14, 18 e 19.

GOLOMB, M. Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes. *J. Approx. Theory*, v. 1, p. 26–65, 1968. Citado na página 10.

GOMES, S. M.; KUSHPEL, A.; LEVESLEY, J.; RAGOZIN, D. L. *sk*-splines interpolation on the torus using number theoretic knots. In: MÉHAUTÉ, A. L.; RABUT, C.; SCHUMAKER, L. L. (Ed.). *Curves and Surfaces with Applications in CAGD*. Atlanta, GA: Vanderbilt Univ. Press, 1997. p. 143–150. Citado na página 13.

_____. Interpolation on the torus using *sk*-splines with number theoretic knots. *J. Approx. Theory*, v. 98, p. 56–71, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 13, 69 e 75.

GRAFAKOS, L. Classical fourier analysis. Springer, second edition, 2008. Citado na página 14.

HEATH-BROWN, D. R. Lattice points in the sphere. *Number theory in progress*, v. 2, p. 883–892, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 14, 22 e 23.

HUXLEY, M. N. Exponential sums and lattice points iii. *Proc. London Math. Soc*, v. 87, p. 591–609, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 22.

KARLIN, S. *Total Positivity I.* Stanford, Calif: Stanford Univ. Press, 1968. Citado na página 10.

KUSHPEL, A. Extremal properties of splines and diameters of classes of periodic functions in the space $C_{2\pi}$. *Preprint no. 84.25, Kiev, Inst. Math. Acad. Nauk Ukrain*, v. 84, n. 25, p. 1–41, 1984. Citado na página 10.

_____. SK-splines and sharp estimates for widths of functional classes in the space $C_{2\pi}$. *Preprint no. 85.51, Kiev, Inst. Math. Acad. Nauk Ukrain.*, v. 85, n. 51, p. 1–47, 1985. Citado na página 10.

_____. A family of extremal subspaces. *Ukrain. Mat.*, v. 39, p. 642–644, 1987. Citado na página 10.

_____. The rate of convergence of interpolation SK-splines on convolution classes. *In: Investigations in the theory of the approximation of functions, Inst Mat. Kiev, Acad. Nauk Ukrain*, p. 50–58, 1987. Citado na página 10.

_____. Estimates for widths of convolution classes in the spaces C and L. *Ukrain. Mat*, v. 41, p. 1070–1076, 1989. Citado na página 10.

_____. Sharp estimates for the widths of convolution classes. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat*, v. 52, p. 1305–1322, 1989. Citado na página 10.

_____. Convergence of *sk*-splines in L_q- i. *Int. J. Pure Appl. Math*, v. 45, p. 87–101, 2008. Citado na página 10.

_____. Convergence of *sk*-splines in L_q- ii. *Int. J. Pure Appl. Math*, v. 45, p. 103–119, 2008. Citado na página 10.

KUSHPEL, A.; GRANDISON, C.; DZUNG, M. H. Optimal *sk*-spline approximation and reconstruction on the torus and sphere. *Int. J. Pure Appl. Math*, v. 29, p. 469–490, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 76.

KUSHPEL, A.; LEVESLEY, J.; LIGHT, W. A. Approximation of smooth functions by *sk*-splines, in:. *Advanced topics in multivariate approximation*, v. 1995, p. 155–180, Dec 1996. Citado na página 10.

KUSHPEL, A.; STABILE, R. L. B.; TOZONI, S. A. Estimates for n-widths of sets of smooth functions on the torus T^d. *J. Approx. Theory*, v. 183, p. 45–71, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 12, 69 e 74.

LEVESLEY, J.; KUSHPEL, A. Interpolation on compact abelian groups using generalized *sk*-splines, in approximation theory, viii. In: . World Scientific, Singapore: C. K. Chui and L. L. Schumaker, 1996. p. 317–325. Citado na página 13.

_____. Generalised *sk*-spline interpolation on compact abelian groups. *J. Approx. Theory*, v. 97, p. 331–333, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 13, 38 e 75.

LOPES, R. V. *sk-Splines de Funções Periódicas, Dissertação de Mestrado,*. Dissertação (Mestrado) — IMECC, UNICAMP, Campinas, 2013. Citado na página 10.

MICCHELLI, C. A. Cardinal l-splines. In: *Studies in spline functions and approximation theory*. New York: Academic Press, 1976. p. 203–250. Citado na página 10.

MICCHELLI, C. A.; PINKUS, A. On n-widths and optimal recovery in M^r. In: *Approximation Theory II. Proc. Internat. Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex., 1976*. New York: Academic Press, 1976. p. 475–478. Citado na página 10.

_____. On n-widths in L^∞. *Trans. Amer. Math. Soc(1)*, v. 234, p. 139–174, 1977. Citado na página 10.

_____. Total positivity and the exact n-width of certain sets in L^1. *Pacific J. Math*, v. 71, p. 499–515, 1977. Citado na página 10.

_____. Some problems in the approximation of functions of two variables and n-widths of integral operators. *J. Approx. Theory*, v. 24, n. 1, p. 51–77, 1978. Citado na página 10.

OLIVEIRA, J. G.; TOZONI, S. A. Approximation of differentiable and analytic functions by splines on the torus. *J. Math. Anal. Appl*, v. 493, p. 1–21, 2021. Citado na página 13.

PESENSON, I. Z. Estimates of Kolmogorov, Gelfand and linear n-widths on compact Riemannian manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc*, v. 144, p. 2985–2998, 2016. Citado na página 69.

STEIN, E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.

ZHENSYKBAEV, A. A. *Mat. Zametki*, v. 13, p. 807–816, 1973. Citado na página 10.