

KISNNEY EMILIANO DE ALMEIDA

**SOBRE OS SIGMA-INVARIANTES UNIDIMENSIONAIS
DE GRUPOS DE ARTIN**

**CAMPINAS
2012**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA**

KISNNEY EMILIANO DE ALMEIDA

**SOBRE OS SIGMA-INVARIANTES UNIDIMENSIONAIS
DE GRUPOS DE ARTIN**

**TESE de DOUTORADO
APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA**

**ORIENTADORA: DESSISLAVA HRISTOVA
KOCHLOUKOVA**

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE/DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO KISNNEY EMILIANO DE ALMEIDA, E ORIENTADA PELA PROFA.DRA.
DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA**



Assinatura do Orientador

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Almeida, Kísnney Emiliano de, 1984-
AL64s Sobre os sigma-invariantes unidimensionais de grupos de Artin
/ Kísnney Emiliano de Almeida. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Invariantes geométricos. 2. Teoria de grupos. 3. Artin,
Grupos de. I. Kochloukova, Dessislava Hristova, 1970-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: On one-dimensional sigma-invariants of Artin groups

Palavras-chave em inglês:

Geometric invariants

Group theory

Artin groups

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Dessislava Hristova Kochloukova [Orientador]

Antonio José Engler

Pavel Zalesski

Vitor de Oliveira Ferreira

Lucia Satie Ikemoto Murakami

Data de defesa: 21-06-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 21 de junho de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA



Prof(a). Dr(a). ANTÔNIO JOSÉ ENGLER



Prof(a). Dr(a). PAVEL ZALESSKI



Prof(a). Dr(a). VITOR DE OLIVEIRA FERREIRA



Prof(a). Dr(a). LUCIA SATIE IKEMOTO MURAKAMI

Agradeço

à minha companheira Amanda, por construir, dividir e multiplicar a vida comigo. Por estar sempre me mostrando maneiras diferentes de entender o mundo. Por me ensinar tanto e aprender junto. Por ser tudo e mais um pouco.

à nossa cachorrinha Guiça, por me ensinar como a vida pode ser simples.

aos meus pais, Adim e Katia, pelos incontáveis incentivos, oportunidades, risos e ensinamentos que me deram durante toda a minha vida.

ao meu irmão Kelvin, pelos momentos divertidos e pela inspiradora convicção.

à Júlia, por ser uma divertidíssima cunhada.

à França, pelos sorrisos e palavras carinhosas.

à minha futura sogra Magali e a José, por sempre me receberem tão bem em suas acolhedoras casas.

ao meu futuro sogro Anderson e a Inês, pelos bons papos ao redor de bons vinhos.

a meus amigos de Campinas (e arredores), em especial Edicarlos, Jake, Marco, Letícia, Ísis, Victor, Deborah, Ito, Sandra, Alan, Thiago Bolívar, Artur, Thalita, Kooki, por todo o carinho, apoio e companhia. Por fazer dessa cidade meu lar.

ao Eduardo, pela hospitalidade e telefonemas divertidos.

aos amigos Bruno e Elaine, pelas excelentes lembranças.

aos colegas de doutorado, Igor, Renato e Tiago, pelas ajudas nos momentos de dúvida.

ao pessoal da república geek (e arredores), em especial Vanessa, Lucas, Léo, Xande, Marina, pelos momentos inesquecíveis.

aos amigos “da física”, Thiago, Gustavo, Reinaldo, Léo, por toda a ajuda que me deram durante o mestrado e além, pelas complexas conversas sobre qualquer coisa.

aos meus amigos de longa data, Bruno, Kalina, Warny, Bernardo, Estevão, Eduardo, por sempre me receberem de braços abertos quando apareço.

à Claudina, pela fonte inesgotável de boas idéias e soluções.

à minha orientadora Dessislava, pela imensa quantidade de conhecimento e dedicação.

ao meu orientador de mestrado Amilcar, por ter me proporcionado um ótimo começo.

aos órgãos de fomento CNPq e CAPES.

Agradeço o quanto posso com palavras, na esperança de agradecer melhor com atitudes. Se soubesse escrever como penso e sinto, teria uma tese de agradecimentos para cada um de vocês.

Resumo

A teoria de Σ -invariantes surgiu do trabalho de Bieri e Strebel, que definiram o primeiro Σ -invariante, apenas para grupos metabelianos, e o usaram para descrever os grupos metabelianos finitamente gerados [BiSt]. Posteriormente, foram definidos os Σ^m -invariantes homotópicos e homológicos de grupos finitamente gerados arbitrários [BiNSt]. Estes são certos subconjuntos da esfera de caracteres profundamente relacionados às propriedades de finitude F_m e FP_m , respectivamente. Os grupos de Artin formam uma grande classe de grupos, cada um associado a um grafo rotulado, que inclui algumas subclasses importantes, como “Braid groups” e “Right-angled Artin groups”.

Em nossa pesquisa, aperfeiçoamos um teorema de Meier, Meinert e VanWyk [MeMnWy] que dá uma descrição parcial do Σ^1 -invariante de grupos de Artin: os autores estabelecem uma condição necessária e uma suficiente, ambas de verificação simples, para que um caractere esteja no invariante. Conjecturamos que a condição suficiente também é necessária. Se G é um grupo de Artin associado a um grafo conexo \mathcal{G} , considere o posto de G como sendo o número mínimo de geradores do grupo (livre) fundamental de \mathcal{G} . Meier [Me] provou que a conjectura é verdadeira para grupos de Artin associados a árvores, *i.e.*, de posto 0. Provamos que a mesma é verdadeira para grupos de Artin de posto 1, como nosso resultado principal. Temos convicção de que um método similar pode ser aplicado para provar que a conjectura vale para grupos de Artin de posto 2, o que é o próximo passo de nossa pesquisa.

Abstract

The Σ -invariants theory arose from the work of Bieri and Strebel, who defined the first Σ -invariant, for metabelian groups only, and used it to describe the finitely presented metabelian groups [BiSt]. Later on, the homotopical and homological Σ^m -invariants of arbitrary finitely generated groups were defined [BiRe]. These are certain subsets of the sphere of characters deeply related to the finiteness properties F_m and FP_m , respectively. The Artin groups form a large class of groups, each one associated to a labeled graph, that includes some important subclasses, as Braid groups and Right-angled Artin groups.

In our research we improve a theorem of Meier, Meinert and VanWyk [MeMnWy] that gives a partial description of the Σ^1 -invariant of Artin groups: they establish a necessary and a sufficient condition, both of simple testing, for a character to be in the invariant. We conjecture that the sufficient condition is also necessary. If G is an Artin group associated to a connected graph \mathcal{G} , consider the rank of G as being the minimal number of generators of the (free) fundamental group of \mathcal{G} . Meier [Me] has proven the conjecture to be true for Artin Groups associated to trees, *i.e.*, of rank 0. We prove it to be true for Artin groups of rank 1, as our main result. We strongly believe that a similar method can be applied to prove the conjecture for Artin groups of rank 2, which is the next step of our research.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Definições e Resultados Preliminares | 7 |
| 2.1 | Conceitos básicos de Teoria de Grupos | 7 |
| 2.2 | Σ -invariantes de grupos finitamente gerados | 10 |
| 2.3 | Grupos de Artin e seus Σ -invariantes | 14 |
| 3 | Grupos de Artin de posto 1 | 29 |
| 3.1 | Objetivo | 29 |
| 3.2 | Os casos especiais | 29 |
| 3.3 | Demonstração | 46 |
| 4 | Outros resultados | 52 |
| 4.1 | Grafos de quatro vértices | 52 |
| 4.2 | Uma generalização | 77 |

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese, estudamos os Σ -invariantes unidimensionais de grupos de Artin.

Σ -invariantes de grupos finitamente gerados

A teoria de Σ -invariantes surgiu com Bieri e Strebel [BiSt], que definiram o primeiro Σ -invariante e o utilizaram para descrever os grupos metabelianos finitamente apresentáveis. Mais tarde, esse invariante $\Sigma^1(G)$ foi definido em um contexto mais geral, com G sendo um grupo finitamente gerado qualquer [BiNSt]. Por definição, $\Sigma^1(G)$ contém as classes de equivalência $[\chi]$ de homomorfismos não-nulos (onde dois homomorfismos são equivalentes se são iguais a menos de um produto por um número real positivo)

$$\chi : G \rightarrow (\mathbb{R}, +)$$

tais que o subcomplexo gerado pelos vértices

$$G_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) \geq 0\}$$

de um grafo de Cayley (cf. [Ht]) associado a um conjunto gerador finito de G é conexo. Em outras palavras, dividimos o complexo de Cayley em duas metades, seguindo a divisão da reta real em duas semi-retas - reais não negativos e reais não-positivos -, e verificamos quando a propriedade que o grafo de Cayley possui de ser conexo é preservada para a metade que corresponde aos reais não-negativos.

Invariantes análogos a $\Sigma^1(G)$, de dimensão maior, foram definidos em meados da década de 80 [Re],[BiRe]. Esses invariantes, $\Sigma^m(G)$ e $\Sigma^m(G, \mathbb{Z})$, são de natureza homotópica e homológica, respectivamente, e são certos conjuntos de classes de caracteres profundamente relacionados às propriedades de finitude F_m e FP_m , respectivamente. Dessa forma, dado um grupo G de tipo F_m (ou FP_m , respectivamente), graças a um importante resultado de Bieri e Renz [BiRe] é relativamente simples de se determinar se um subgrupo de G acima dos

comutadores é de tipo F_m (ou FP_m , respectivamente), dado que conhecemos o invariante $\Sigma^m(G)$ (ou $\Sigma^m(G, \mathbb{Z})$, respectivamente).

Desde então, muitos avanços foram feitos no sentido de descrever os Σ -invariantes de diversas classes de grupos, geralmente a custo de muitos cálculos. Vale a pena observar que o invariante $\Sigma^m(G)$ (ou $\Sigma^m(G, \mathbb{Z})$, respectivamente) é completamente conhecido no caso de grupos de Artin “right angled” [MeMnWy2] e que neste caso existem exemplos onde $\Sigma^2(G) \neq \Sigma^2(G, \mathbb{Z})$. Isto pode ser visto como versão monoidal do resultado principal de Bestvina e Brady, que produziram em [BsBd] o primeiro grupo (dentro da classe de grupos de Artin “right angled”) que tem tipo FP_2 mas não tem tipo F_2 , i.e., não são finitamente apresentáveis. Para grupos abelianos finitamente gerados, temos que, para cada caractere χ , a classe de equivalência $[\chi] \in \Sigma^\infty(G, \mathbb{Z})$. Mas, no caso de grupos metabelianos G de tipo FP_m foi mostrado em [HaKoch1] and [HaKoch2] que

$$\Sigma^m(G)^c = \Sigma^m(G, \mathbb{Z})^c = \text{conv}_{\leq m} \Sigma^1(G)^c \quad (1.0.1)$$

para $m = 2$ or $m = 3$, G extensão cindida de grupos abelianos, onde o índice c representa o completamento na esfera de caracteres $S(G) = \{[\chi] \mid \chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}\}$. De novo, isto pode ser considerado como versão monoidal da classificação de grupos metabelianos G de tipo FP_m para $m = 2$ or $m = 3$, G extensão cindida de grupos abelianos [BiSt], [BiHa]. Como existe classificação de grupos metabelianos G de posto de Prüfer finito (i.e., existe d tal que cada subgrupo finitamente gerado de G pode ser gerado por no máximo d elementos) de tipo homológico FP_m [Aberg], mais tarde Meinert obteve a classificação completa de $\Sigma^m(G, \mathbb{Z})$ para grupos metabelianos G de posto de Prüfer finito e m arbitrário [Mn1].

Um resultado especialmente interessante para nossa pesquisa é o obtido por Schmitt [Sch], que, no caso de G ser um grupo que age sem inversões sobre uma árvore T , relaciona os Σ -invariantes homotópicos de G aos Σ -invariantes dos estabilizadores de vértices e arestas de T . À luz da teoria de Bass-Serre, esse teorema nos permite concluir que se um caractere de um produto livre amalgamado $G = A *_C B$ pertence ao invariante de G e sua restrição pertence ao invariante de C , então suas restrições a A e B pertencem aos invariantes de A e B , respectivamente.

Mais detalhes sobre a teoria de Σ -invariantes e os resultados mencionados, além de outros resultados preliminares que provamos, podem ser encontrados na seção 1.2.

Grupos de Artin e seus Σ -invariantes

Os grupos de Artin formam uma grande classe de grupos, com uma definição combinatorial simples: Seja \mathcal{G} um grafo simplicial finito, com arestas rotuladas por números inteiros maiores que um. Então, o **grupo de Artin associado a \mathcal{G}** , denotado por G , é dado por uma apresentação finita, com geradores correspondentes aos vértices de \mathcal{G} e relações dadas por

$$[u, v]_n = [v, u]_n,$$

para cada aresta $\{u, v\}$ de \mathcal{G} com rótulo n , onde

$$[a, b]_n := \underbrace{abab \cdots}_n, \quad \forall a, b \in V(\mathcal{G}).$$

A classe de grupos de Artin inclui várias subclasses importantes, como grupos livres finitamente gerados, grupos abelianos finitamente gerados, “braid groups” e “graph groups”. Grupos de Artin costumam ser muito úteis para a construção de exemplos com propriedades singulares, por sua definição combinatorial ampla e simples (*cf.* [BsBd]).

Até agora, não temos uma descrição detalhada geral dos Σ -invariantes de grupos de Artin, nem mesmo de dimensão 1.

Seja χ um caractere de um grupo de Artin G associado a um grafo \mathcal{G} . Uma aresta e de \mathcal{G} é dita **morta** se e tem rótulo par maior que dois e as imagens dos elementos de G associados aos extremos de e são números reais antipodais. Defina $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ como o subgrafo completo de \mathcal{G} gerado pelos vértices $v \in V(\mathcal{G})$ tais que $\chi(v) \neq 0$. Defina o **subgrafo vivo** $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\chi) \subset \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ como o subgrafo obtido de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ após remover as arestas mortas. Um subgrafo \mathcal{H} de \mathcal{G} é dito **dominante** se, para todo $v \in V(\mathcal{G}) \setminus V(\mathcal{H})$, existe uma aresta de \mathcal{G} que liga v a um vértice de \mathcal{H} .

Dado um grupo de Artin G associado a um grafo \mathcal{G} , Meier [Me] descreve completamente o $\Sigma^1(G)$ a partir de \mathcal{G} , no caso de \mathcal{G} ser uma árvore: ele demonstra que a classe de um caractere χ de G pertence a $\Sigma^1(G)$ se e somente se $\mathcal{L}(\chi)$ é conexo e dominante.

Meier, Meinert e VanWyk [MeMnWy] calculam uma descrição parcial, também a partir de \mathcal{G} , para o Σ -invariante unidimensional de grupos de Artin arbitrários: uma condição necessária e uma condição suficiente para que um caractere de G pertença ao invariante (sendo que a suficiente já havia sido demonstrada em [Me]). Mais especificamente, provam que se $\mathcal{L}(\chi)$ é conexo e dominante, então $[\chi] \in \Sigma^1(G)$. Além disso, também provam uma recíproca parcial: se $[\chi] \in \Sigma^1(G)$, então $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ é conexo e dominante. Note que a primeira condição implica a segunda, pelas definições dos subgrafos.

Mais detalhes sobre Σ -invariantes de grupos de Artin, bem como alguns resultados novos obtidos, podem ser encontrados na seção 1.3.

Os resultados novos

Nesta tese, estudamos os Σ -invariantes unidimensionais de grupos de Artin. Conjecturamos que a condição suficiente provada por Meier, Meinert e VanWyk seja também necessária. Ou seja, se G é um grupo de Artin associado ao grafo \mathcal{G} , conjecturamos que, dado um caractere χ de G , então $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ se e somente se $\mathcal{L}(\chi)$ é conexo e dominante. O objetivo da tese é provar a validade dessa conjectura para alguns tipos de grupos de Artin específicos.

Seja G um grupo de Artin, associado ao grafo \mathcal{G} . Se \mathcal{G} é desconexo, é fácil ver que a conjectura vale (corolário 2.3.19), com $\Sigma^1(G) = \emptyset$. Logo, considere \mathcal{G} como sendo um grafo conexo. Então,

$$\pi_1(\mathcal{G}) = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ cópias}},$$

para algum $n \geq 0$. Dizemos, nesse caso, que G é um grupo de Artin de *posto* n . Sob essa definição, é sabido que a conjectura vale para todos os grupos de Artin de posto 0, *i.e.*, associados a árvores.

O resultado principal

O resultado principal da tese é o seguinte:

Teorema (3.1.2). Seja G um grupo de Artin de posto 1, associado ao grafo \mathcal{G} . Então,

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ é um subgrafo conexo e dominante de } \mathcal{G}\}.$$

O teorema acima é provado no capítulo 2. Para prová-lo, precisamos de duas etapas, que explicaremos abaixo.

Casos especiais

Na seção 2.2, demonstramos que a conjectura vale para alguns casos especiais de grupos de Artin de posto 1. São grupos de Artin G associados a grafos \mathcal{G} com poucos vértices e arestas, o que facilita os cálculos. Além disso, cada grupo acompanha um caractere específico χ no enunciado tal que $\mathcal{L}(\chi)$ é desconexo, e mostramos que basta provar que $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$. Os métodos que usamos para provar esses casos especiais são análogos entre si.

Usando alguns cálculos e um famoso resultado de Bieri e Renz (teorema 2.2.10), o problema se reduz a provar que $N := \ker \chi$ não é finitamente gerado. Nas três demonstrações, supomos que N é finitamente gerado, mostramos que

$$G = N \rtimes \mathbb{Z}$$

e chegamos a uma contradição, a partir da construção de uma apresentação de N usando os geradores e relações dados pela definição de G como grupo de Artin.

São três casos especiais: o primeiro (teorema 3.2.1) é composto de três vértices, com duas arestas mortas e uma aresta de rótulo 2. O segundo também possui três vértices, com duas arestas mortas e uma aresta de rótulo ímpar (teorema 3.2.2). O terceiro e último possui duas arestas mortas e duas arestas de rótulo 2 (teorema 3.2.3). Nos três casos, as arestas mortas dão origem a geradores de N , enquanto a(s) outra(s) aresta(s) dão origem a relações de N .

A idéia da demonstração do teorema principal

Para demonstrar a validade da conjectura para grupos de Artin de posto 1 (seção 2.3), também procedemos por redução ao absurdo. Por algumas considerações da seção 1.3 (corolário 2.3.17), basta provar que, dado um caractere discreto χ de G tal que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ é conexo e $\mathcal{L}(\chi)$ é desconexo, temos que $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$. Supomos, então, que χ satisfaz as hipóteses acima e $[\chi] \in \Sigma^1(G)$.

A demonstração consiste de várias alterações no grafo \mathcal{G} (e, portanto, no grupo G), de modo que $[\chi]$ (ou a classe de algum homomorfismo induzido por χ) permanece no invariante do novo grupo. Usamos dois lemas de mergulho (lemas 2.3.8 e 2.3.6) para descrever certos grupos de Artin como produtos livres amalgamados de grupos de Artin, com amálgamas também sendo grupos de Artin. Combinando esses lemas com o teorema de Schmitt (teorema 2.2.18), obtivemos os teoremas 2.3.11 e 2.3.10, que nos permite alterar os grafos e grupos da maneira descrita acima.

Após um número finito dessas alterações, chegamos necessariamente a um dos casos especiais, o que encerra a demonstração. Mais especificamente, após uma observação que nos permite identificar \mathcal{G} e $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$, usamos o teorema 2.3.10 para reduzir o grafo \mathcal{G} a um laço reduzido não-trivial.

Fixamos duas arestas mortas (que existem, pois $\mathcal{L}(\chi)$ é desconexo) e usamos um lema de redução (corolário 2.3.26) para colapsar as arestas ímpares. O único caso que não podemos colapsar todas as arestas ímpares é quando todas as arestas não-fixadas são ímpares, o que nos leva ao segundo caso especial (teorema 3.2.2), que já foi resolvido.

Depois de colapsar as arestas ímpares, usamos o mesmo lema de redução para mudar os rótulos das arestas não fixadas restantes (todas pares) para 2. Ainda usando o mesmo lema de redução, acrescentamos algumas arestas de rótulo 2 (se necessárias) e usamos o teorema 2.3.11 para reduzir o grafo a um dos dois outros casos especiais, que já foram resolvidos (teoremas 3.2.1 e 3.2.3). Isso encerra a demonstração.

Outros resultados

No capítulo 3, exibimos dois novos casos em que a conjectura é válida. A demonstração é semelhante às dos casos especiais da seção 2.2.

O teorema 4.1.1 é uma tentativa de provar a conjectura para um grupo de Artin associado a um grafo completo de quatro vértices, de posto 3. Para isso, tivemos que adicionar algumas hipóteses, e, mesmo assim, a demonstração ficou consideravelmente mais trabalhosa. Se retiramos uma aresta, o resultado é completo e consideravelmente mais simples (teorema 4.1.7) - nesse caso, o grupo de Artin gerado é de posto 2.

O teorema 4.2.1 é uma generalização do padrão do teorema 3.2.2. O grupo de Artin em questão tem posto arbitrário.

Objetivos futuros

A pesquisa ainda está em andamento. Temos fortes indícios de que uma adaptação do método utilizado nessa tese pode ser usado para provar a validade da conjectura para grupos de Artin de posto 2, embora nesse caso os cálculos sejam muito mais extensos, com muito mais casos especiais.

Capítulo 2

Definições e Resultados Preliminares

Nesse capítulo, apresentaremos as definições e resultados que foram utilizados como base para a tese. Vários resultados já são previamente conhecidos, dos quais omitiremos as demonstrações, enquanto outros são resultados novos que utilizaremos nos capítulos posteriores.

2.1 Conceitos básicos de Teoria de Grupos

Primeiramente, faremos uma breve revisão de alguns conceitos básicos, principalmente com o intuito de estabelecer nossa notação.

Definição 2.1.1. Sejam G_1, G_2, G_0 e G grupos, $i_1 : G_0 \rightarrow G_1$ e $i_2 : G_0 \rightarrow G_2$ monomorfismos, $j_1 : G_1 \rightarrow G$ e $j_2 : G_2 \rightarrow G$ homomorfismos. Dizemos que (G, j_1, j_2) é um *produto livre amalgamado* de G_1 e G_2 com amálgama G_0 , denotado por $G = G_1 *_{G_0} G_2$, se

1. $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$,
2. Para qualquer grupo H e homomorfismos $\phi_r : G_r \rightarrow H$, para $r = 1, 2$, com $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, existe um único homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ tal que $\phi_r = \phi j_r$, para $r = 1, 2$.

Teorema 2.1.2 (Forma normal de produtos livres amalgamados). *Seja $G = G_1 *_{G_0} G_2$, com a notação acima. Sejam S e T transversais à esquerda de G_0 em G_1 e G_2 , respectivamente, tais que $1 \in S \cap T$. Temos que*

1. j_1 e j_2 são monomorfismos
2. $j_1 G_1 \cap j_2 G_2 = j_1 G_0 = j_2 G_0$
3. Pensando em j_1 e j_2 como inclusões, qualquer elemento de G pode ser unicamente escrito como $u_1 u_2 \cdots u_n c$, onde $n \geq 0$, $c \in G_0$ e u_1, u_2, \dots, u_n vem alternadamente de $S - 1$ e $T - 1$.

Demonstração. [Coh] □

Também serão utilizados os teoremas estruturais da teoria de Bass-Serre, incluindo a construção de grafos de grupos e a relação da mesma com grupos agindo sobre árvores. Para mais detalhes, conferir [Coh].

Lema 2.1.3. *Seja $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um homomorfismo de grupos e $N := \ker \chi$. Suponha que $\mathcal{N} \leq N$ é um subgrupo normal de G , tal que*

$$\frac{G}{\mathcal{N}} \simeq \mathbb{Z} = \langle \alpha \rangle.$$

Então, $\mathcal{N} = N$. Além disso, $G \simeq N \rtimes \langle \alpha \rangle$.

Demonstração. Como χ é discreto, temos que $\frac{G}{\mathcal{N}} \simeq \mathbb{Z}$. Mas, pelo teorema dos isomorfismos,

$$\frac{G/\mathcal{N}}{N/\mathcal{N}} \simeq \frac{G}{N},$$

ou seja,

$$\frac{\mathbb{Z}}{N/\mathcal{N}} \simeq \mathbb{Z}.$$

Então, $\frac{N}{\mathcal{N}} = 0$, que implica $N = \mathcal{N}$.

Como

$$\text{Im } \chi \simeq \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$$

é livre, temos que a sequência exata

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow \langle \alpha \rangle \rightarrow 1$$

cinde e, portanto, $G = N \rtimes \langle \alpha \rangle$ □

Lema 2.1.4. *Sejam C e D dois grupos e $A := C * D$. Defina*

$$D^C := \langle \{d^c \mid c \in C, d \in D\} \rangle \leq A.$$

Então, para cada $a \in A$, existem únicos $c \in C, \delta \in D^C$ tais que

$$a = c\delta.$$

Além disso, c é a imagem de a pela projeção canônica

$$A \twoheadrightarrow \frac{A}{D^C} \simeq C.$$

Demonstração. Consequência do teorema da forma normal de produtos livres (caso particular do teorema 2.1.2). □

Lema 2.1.5. *Sejam C e D dois grupos, com $C = *_{i \in I} \langle y_i \rangle$ e $A := C * D$, onde $*$ denota o produto livre de dois grupos. Então,*

$$C^A = *_{i \in I, d \in D} \langle y_i^d \rangle \leq A.$$

Demonstração. Seja a um elemento arbitrário de $A = C * D$. Então, existem

$$c_1 \in C, \quad c_2, \dots, c_n \in C \setminus \{e_A\}, \quad d_1, \dots, d_{n-1} \in D \setminus \{e_A\}, \quad d_n \in D$$

tais que

$$\begin{aligned} a &= c_1 d_1 c_2 d_2 \cdots c_n d_n \\ &= \underbrace{(d_1 \cdots d_n)}_{\in D} \underbrace{(c_1^{d_1 \cdots d_n}) \cdots (c_{n-1}^{d_{n-1} d_n}) (c_n^{d_n})}_{\in C^A}. \end{aligned}$$

A decomposição acima é única, pois $C^A \cap D = \{e_A\}$, uma vez que $\frac{A}{C^A} \simeq D$. Portanto,

$$a \in C^A \Leftrightarrow d_1 \cdots d_n = e_A$$

Ou seja, C^A é gerado, como subgrupo de A , por $C^D := \{c^d \mid c \in C, d \in D\}$. Como C é gerado por $\{y_i \mid i \in I\}$, então temos que

$$C^A = \langle \{y_i^d\}_{i \in I, d \in D} \rangle$$

Suponha agora que exista uma palavra reduzida sobre $\{y_i^d\}_{i \in I, d \in D}$

$$(y_{i_1}^{d_1})^{\varepsilon_1} (y_{i_2}^{d_2})^{\varepsilon_2} \cdots (y_{i_n}^{d_n})^{\varepsilon_n} = e_A,$$

com

$$i_1, \dots, i_n \in I, \quad d_1, \dots, d_n \in D, \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$$

tais que $\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$ sempre que $i_j = i_{j+1}$ e $d_j = d_{j+1}$. Então, podemos reescrever a equação acima como

$$d_1^{-1} y_{i_1}^{\varepsilon_1} d_1 d_2^{-1} y_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots d_{n-1} d_n^{-1} y_{i_n}^{\varepsilon_n} d_n = e_A$$

Pela forma normal de A (como produto livre), temos que os d_i 's precisam cancelar. Mas então, temos que

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_n.$$

Logo,

$$y_{i_1}^{\varepsilon_1} y_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots y_{i_n}^{\varepsilon_n} = e_A,$$

com $\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$ sempre que $i_j = i_{j+1}$. Mas isso é uma contradição, pela forma normal de $C = *_{i \in \mathbb{Z}} \langle y_i \rangle$ como produto livre.

Portanto, não existe tal palavra, o que significa que C^A é um produto livre dos subgrupos cíclicos gerados por cada um dos elementos de

$$\{y_i^d \mid i \in I, d \in D\}.$$

□

2.2 Σ -invariantes de grupos finitamente gerados

A teoria de Σ -invariantes surgiu com Bieri e Strebel [BiSt], que definiram o primeiro Σ -invariante e o usaram para descrever os grupos metabelianos finitamente apresentáveis. Mais tarde, foram definidos Σ -invariantes homotópicos e homológicos de grupos finitamente gerados quaisquer, que são certos conjuntos de classes de caracteres profundamente relacionados às propriedades de finitude F_m e FP_m , respectivamente.

Definição 2.2.1. Seja A um módulo sobre um anel R . Dizemos que A tem **tipo (homológico) FP_m** se existe uma resolução livre de R -módulos

$$\cdots \rightarrow F_i \rightarrow F_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

tal que, para todo $i \leq m$, F_i tem posto finito.

Dizemos que um grupo G tem **tipo (homológico) FP_m** (sobre \mathbb{Z}) se o $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial \mathbb{Z} tem tipo homológico FP_m .

A propriedade FP_m está relacionada às noções de grupo finitamente gerado e finitamente apresentável:

Teorema 2.2.2. *Todo grupo é de tipo homológico FP_0 . Um grupo G é de tipo homológico FP_1 se e somente se é finitamente gerado. Se G é finitamente apresentável, então G é de tipo homológico FP_2 .*

Demonstração. Cf. [Bi], capítulo 1. □

A recíproca da última parte do teorema acima vale para grupos metabelianos (o que também foi provado por Bieri e Strebel), mas foi provado que não é verdadeira para um grupo qualquer, quando Bestvina e Brady [BsBd] exibiram um exemplo de grupo FP_∞ (*i.e.*, $FP_m \forall m$) mas não finitamente apresentável. Um grupo é finitamente apresentável se e somente se satisfaz uma outra propriedade mais forte, de natureza homotópica, que veremos a seguir.

Definição 2.2.3. Seja G um grupo. Dizemos que um complexo CW V é um complexo $K(G, 1)$ se V é conexo, $\pi_1(V) \simeq G$ e todos os grupos de homotopia superiores $\pi_i(V)$ são triviais, para $i \geq 2$.

Um grupo G é dito de **tipo (homotópico) F_m** se existe um complexo $K(G, 1)$ V com m -esqueleto finito.

Teorema 2.2.4. *Seja G um grupo. Então, G é de tipo F_1 se e somente se G é finitamente gerado. O grupo G é de tipo F_2 se e somente se G é finitamente apresentável.*

Demonstração. Cf. [Geo], capítulo 7. □

Como é previsível a partir do resultado acima, a noção de tipo homotópico é mais forte que a de tipo homológico.

Teorema 2.2.5. *Todo grupo de tipo homotópico F_m é de tipo homológico FP_m .*

Demonstração. Cf. [Geo], capítulo 7. □

Definição 2.2.6. Seja G um grupo finitamente gerado. Um **caractere** de G é um homomorfismo $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$. Dois caracteres χ_1, χ_2 são ditos equivalentes ($\chi_1 \sim \chi_2$) se existe um número real positivo r tal que $\chi_1 = r\chi_2$. A **esfera de caracteres** de G é o conjunto

$$S(G) := (\text{Hom}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}) / \sim \simeq S^{n-1},$$

onde n é o posto livre de $\frac{G}{G'}$.

Definição 2.2.7. Seja G um grupo finitamente gerado e A um $\mathbb{Z}G$ -módulo finitamente gerado. Então, o **Σ -invariante homológico m -dimensional** é dado por

$$\Sigma^m(G, A) := \{[\chi] \in S(G) \mid A \text{ é de tipo homológico } FP_m \text{ sobre } \mathbb{Z}G_\chi\},$$

onde $G_\chi := \{g \in G \mid \chi(g) \geq 0\}$.

Definição 2.2.8. Seja G um grupo de tipo homotópico F_m . Por definição, o **Σ -invariante homotópico m -dimensional**, $\Sigma^m(G)$, é o conjunto formado por todas as classes $[\chi] \in S(G)$ para as quais existe um complexo $K(G, 1) Y$, dependendo de χ , e uma função altura $h : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, χ -equivariante, tal que $\tilde{Y}_{h \geq 0}$, o subcomplexo maximal de \tilde{Y} de pontos com altura não-negativa, é $(m-1)$ -conexo.

Teorema 2.2.9 ([BiRe]). *Se G é um grupo de tipo F_m , então*

$$\begin{aligned} \Sigma^m(G) &\subseteq \Sigma^{m-1}(G) \subseteq \cdots \subseteq \Sigma^1(G); \\ \Sigma^m(G, \mathbb{Z}) &\subseteq \Sigma^{m-1}(G, \mathbb{Z}) \subseteq \cdots \subseteq \Sigma^1(G, \mathbb{Z}); \\ \Sigma^i(G) &\subseteq \Sigma^i(G, \mathbb{Z}), \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

O teorema a seguir explicita a principal aplicação dos Σ -invariantes.

Teorema 2.2.10 ([BiRe]). *Suponha que G é um grupo de tipo FP_m (tipo F_m) e H é um subgrupo de G contendo G' , o subgrupo comutador de G . Então, H é de tipo FP_m (tipo F_m) se e somente se*

$$S(G, H) := \{[\chi] \in S(G) \mid \chi(H) = 0\} \subset \Sigma^m(G, \mathbb{Z}) \quad (\text{resp. } \Sigma^m(G))$$

Nesse trabalho, focaremos nos Σ -invariantes de dimensão 1, que coincidem.

Teorema 2.2.11 ([BiRe]). *Seja G um grupo de tipo F_m . Então,*

$$\Sigma^1(G) = \Sigma^1(G, \mathbb{Z}).$$

Vários teoremas conhecidos descrevem a estrutura dos Σ -invariantes. Exibiremos alguns abaixo. Buscamos selecionar os mais relevantes para a nossa pesquisa, de modo que há ainda muitos outros resultados importantes que não constam na lista.

Teorema 2.2.12 ([BiRe]). *Seja G um grupo finitamente gerado e A um $\mathbb{Z}G$ -módulo finitamente gerado. Então $\Sigma^m(G, A)$ é aberto em $S(G)$. Além disso, se G é de tipo F_m então $\Sigma^m(G)$ é aberto em $S(G)$.*

Embora o resultado abaixo seja bem conhecido, exibiremos uma demonstração, por sua simplicidade e importância para a tese.

Primeiro, estabeleceremos uma notação: durante todo o texto,

$$\Sigma^m(G)^c = S(G) \setminus \Sigma^m(G)$$

e

$$\Sigma^m(G, A)^c = S(G) \setminus \Sigma^m(G, A),$$

onde m é um número natural e A é um $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Proposição 2.2.13. *Seja $\pi : G \rightarrow \bar{G}$ um epimorfismo de grupos e seja $\bar{\chi}$ um caractere não-nulo de \bar{G} . Então,*

$$[\bar{\chi} \circ \pi] \in \Sigma^1(G) \Rightarrow [\bar{\chi}] \in \Sigma^1(\bar{G}).$$

Equivalentemente,

$$[\bar{\chi}] \in \Sigma^1(\bar{G})^c \Rightarrow [\bar{\chi} \circ \pi] \in \Sigma^1(G)^c.$$

Demonstração. Defina

$$\chi := \bar{\chi} \circ \pi$$

e suponha que

$$[\chi] \in \Sigma^1(G).$$

Então, existem $\mathbb{Z}G\chi$ -módulos F_i , $i \in \mathbb{Z}$, tais que F_0, F_1 são finitamente gerados, de modo que

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_i \rightarrow F_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de \mathbb{Z} (como $\mathbb{Z}G\chi$ -módulo).

Defina

$$\bar{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}G\chi} \mathbb{Z}\bar{G}_{\bar{\chi}},$$

que é um complexo de $\mathbb{Z}\bar{G}_{\bar{\chi}}$ -módulos livres finitamente gerados.

Como o funtor $\otimes_{\mathbb{Z}G\chi} \mathbb{Z}\bar{G}_{\bar{\chi}}$ é exato à direita, então

$$\bar{F}_1 \rightarrow \bar{F}_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma sequência exata, e, portanto, uma resolução livre parcial de \mathbb{Z} como $\mathbb{Z}\bar{G}_{\bar{\chi}}$ -módulo. Como \bar{F}_1, \bar{F}_0 são finitamente gerados, temos que

$$[\bar{\chi}] \in \Sigma^1(\bar{G})$$

□

Em geral, é muito difícil determinar os Σ -invariantes. No entanto, eles foram plenamente calculados para algumas classes específicas de grupos.

Teorema 2.2.14. *Seja G um grupo livre não-cíclico finitamente gerado. Então,*

$$\Sigma^m(G) = \Sigma^m(G, \mathbb{Z}) = \emptyset.$$

Demonstração. Exibiremos uma demonstração desse resultado na seção 1.3 (corolário 2.3.19), como consequência de um outro teorema, embora ele possa ser provado independentemente (calculando seu quociente metabeliano maximal e usando o invariante de Bieri-Strebel, por exemplo). \square

Teorema 2.2.15 ([BiRe]). *Seja G um grupo abeliano finitamente gerado. Então,*

$$\Sigma^m(G) = \Sigma^m(G, \mathbb{Z}) = S(G).$$

Para evitar confusões com a notação, exibimos a definição combinatorial de grafo que usamos, retirada majoritariamente de [Coh].

Definição 2.2.16. Um *grafo* consiste de dois conjuntos disjuntos, o conjunto $V(\mathcal{G})$ de *vértices* de \mathcal{G} e o conjunto $E(\mathcal{G})$ de *arestas* de \mathcal{G} , juntamente com duas funções

$$\sigma : E(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{G}), \quad \bar{\cdot} : E(\mathcal{G}) \rightarrow E(\mathcal{G}),$$

tais que, para toda aresta $e \in E(\mathcal{G})$, $e \neq \bar{e}$ e $e = \bar{\bar{e}}$. Definimos outra função $\tau : E(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{G})$ por $\tau(e) = \sigma(\bar{e})$. Chamamos $\sigma(e)$ de *início* ou *começo* de e e $\tau(e)$ de *fim* ou *término* de e , nos referindo a ambos como *extremos* de e . Chamamos \bar{e} de *aresta inversa* de e . Um *caminho de comprimento* $n > 0$ é uma seqüência finita e_1, \dots, e_n de arestas tais que $\tau(e_i) = \sigma(e_{i+1})$ para todo $i < n$. Esse caminho *começa* em $\sigma(e_1)$ e *termina* em $\tau(e_n)$, sendo que os *vértices do caminho* são $\sigma(e_i)$ para todo $i \leq n$ e também $\tau(e_n)$. Um caminho é dito um *laço* se começa e termina no mesmo vértice. O *laço trivial* é um caminho de tamanho 0, formado por apenas um vértice, começando e terminando nesse vértice. Um laço é dito *reduzido* se $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ para todo $i < n$ e $e_1 \neq \bar{e}_n$. Um grafo é conexo chamado de *árvore* se todos os seus laços reduzidos são triviais.

Grafos, como definidos acima, têm uma conhecida representação topológica como complexo CW. Usaremos ambas as representações livremente, já que são completamente compatíveis. Para mais sobre a topologia de grafos e complexos CW, consultar [Ht].

Definição 2.2.17. Seja G um grupo que age sobre um grafo T (cf. [Coh]). Digamos que G age sem inversões se sempre que $g \in G$ estabiliza uma aresta e temos que g estabiliza cada um de seus extremos.

O teorema abaixo estuda os Σ -invariantes de grupos que agem (sem inversões) sobre árvores.

Teorema 2.2.18 ([Sch]). *Seja G um grupo, M um $\mathbb{Z}G$ -módulo e $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um homomorfismo não trivial. Suponha que G aja sem inversões em uma árvore T tal que T é finita modulo a ação de G . Suponha, além disso, que a restrição*

$$\chi_\sigma : G_\sigma \rightarrow \mathbb{Z}$$

de χ ao estabilizador G_σ de um vértice ou aresta σ é não-nula. Então,

1. *Se $n \geq 1$, se $[\chi_v] \in \Sigma^n(G_v, M)$ para todo vértice v de T e se $[\chi_e] \in \Sigma^{n-1}(G_e, M)$ para toda aresta e de T , então $[\chi] \in \Sigma^n(G, M)$.*
2. *Se $n \geq 0$, se $[\chi] \in \Sigma^n(G, M)$ e se $[\chi_e] \in \Sigma^n(G_e, M)$ para toda aresta e de T , então $[\chi_v] \in \Sigma^n(G_v, M)$ para todo vértice v de T .*
3. *Se $n \geq 1$, se $[\chi] \in \Sigma^n(G, M)$ e se $[\chi_v] \in \Sigma^{n-1}(G_v, M)$ para todo vértice v de T , então $[\chi_e] \in \Sigma^{n-1}(G_e, M)$ para toda aresta e de T .*

Demonstração. Um esboço da demonstração, em inglês, pode ser encontrado em [MeMnWy2]. \square

Utilizaremos o seguinte caso particular do teorema 2.2.18:

Corolário 2.2.19. *Seja G um grupo e $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um homomorfismo não trivial. Suponha que G possa ser decomposto como um produto livre amalgamado de grupos*

$$G = G_A *_{G_C} G_B$$

e sejam χ_A, χ_B, χ_C as restrições de χ a G_A, G_B, G_C , respectivamente. Suponha que χ_C é não-nulo, e, portanto, χ_A e χ_B também são não-nulos.

Se $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ e $[\chi_C] \in \Sigma^1(G_C)$, então $[\chi_A] \in \Sigma^1(G_A)$ e $[\chi_B] \in \Sigma^1(G_B)$.

Demonstração. Temos que G é grupo fundamental do grafo de grupos com grupos de vértices G_A, G_B e grupo de aresta G_C , cuja aresta associada conecta os vértices G_A e G_B . Então, pela teoria de Bass-Serre (ver mais detalhes em [Coh]), temos que G age sobre uma árvore composta de apenas uma aresta, com estabilizadores de vértices iguais a G_A, G_B e estabilizador de aresta igual a G_C . Então, temos o resultado pelo item 2 do teorema 2.2.18, com $M = \mathbb{Z}$ e $n = 1$. \square

2.3 Grupos de Artin e seus Σ -invariantes

Grupos de Artin formam uma extensa classe de grupos, definidos a partir de grafos. Nessa seção, apresentaremos algumas definições e resultados importantes relacionados a Σ -invariantes de grupos de Artin que utilizamos como base para a tese.

Definição 2.3.1. Um grafo \mathcal{G} é dito **simplicial** se:

1. Não existe aresta $e \in E(\mathcal{G})$ tal que $\sigma(e) = \tau(e)$.

2. Se $e_1, e_2 \in E(\mathcal{G})$, $\sigma(e_1) = \sigma(e_2)$ e $\tau(e_1) = \tau(e_2)$, então $e_1 = e_2$.

Definição 2.3.2. Seja \mathcal{G} um grafo simplicial finito, com arestas rotuladas por números inteiros maiores que um. Então, o **grupo de Artin associado a \mathcal{G}** , denotado por G , é dado por uma apresentação finita, com geradores correspondentes aos vértices de \mathcal{G} e relações dadas por

$$[u, v]_n = [v, u]_n,$$

para cada aresta de \mathcal{G} , ligando os vértices u e v com rótulo n , onde

$$[a, b]_n := \underbrace{abab \cdots}_n, \quad \forall a, b \in V(\mathcal{G}).$$

Observação 2.3.3. Sejam G um grupo de Artin, associado ao grafo \mathcal{G} , e $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um caractere de G . Se u, v são extremos de uma aresta com rótulo ímpar de \mathcal{G} , então $\chi(u) = \chi(v)$. De fato, temos que, para algum $l \geq 1$,

$$[u, v]_{2l+1} = (uv)^l u = (vu)^l v = [v, u]_{2l+1},$$

e, portanto,

$$l\chi(uv) + \chi(v) = l\chi(vu) + \chi(u) \Rightarrow \chi(v) = \chi(u).$$

Abaixo, explicitamos a topologia da esfera de caracteres de um grupo de Artin.

Recordamos que o grafo completo gerado por V é o grafo cujos vértices são os elementos de V tal que, para toda dupla de vértices diferentes $\{u, v\}$ existe uma aresta do grafo que os conecta.

Teorema 2.3.4. *Seja G um grupo de Artin associado ao grafo \mathcal{G} . Defina $V := V(\mathcal{G})$ e a seguinte relação de equivalência entre vértices de \mathcal{G} :*

$$\begin{aligned} v &\sim w \\ &\Updownarrow \end{aligned}$$

Existe um caminho de \mathcal{G} , ligando v a w , formado por arestas de rótulo ímpar.

Seja

$$\bar{V} := \frac{V}{\sim}.$$

Seja \mathcal{H} o grafo completo com $V(\mathcal{H}) = \bar{V}$ e tal que todas as arestas de \mathcal{H} tem rótulo 2. Seja $H \simeq \mathbb{Z}^{|\bar{V}|}$ o grupo de Artin associado a \mathcal{H} .

Então,

$$\frac{G}{G'} \simeq H,$$

e, portanto,

$$S(G) \simeq S(H) \simeq S^{|\bar{V}|-1},$$

onde os isomorfismos são induzidos por

$$v \mapsto v \pmod{\sim}$$

Demonstração. Seja $V := V(\mathcal{G})$ e R o conjunto de relações de G , como na definição 2.3.2. Seja

$$\pi : G \rightarrow \frac{G}{G'}$$

a projeção canônica. Então,

$$\frac{G}{G'} = \langle V \mid R, uv = vu, \forall u, v \in V \rangle.$$

Seja $r \in R$. Então, existem $u, v \in V$ tais que

$$r = ([u, v]_n) ([v, u]_n)^{-1}.$$

Se $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, então

$$r = (uv)^k (vu)^{-k}.$$

Logo, temos que, em $\frac{G}{G'}$,

$$r = u^{k-k} v^{k-k} = 1$$

é uma relação trivial.

Se $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, então

$$r = (uv)^k uv^{-1} (vu)^{-k}.$$

Logo, temos que, em $\frac{G}{G'}$,

$$r = uv^{-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u = v.$$

Portanto, temos que $u \sim v$ se e somente se existem

$$u = u_1, u_2, \dots, u_n = v \in V$$

tais que u_i e u_{i+1} são ligados por uma aresta ímpar, para $i = 1, \dots, n - 1$.

Ou seja, para quaisquer $u, v \in V$,

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad u = v \text{ em } \frac{G}{G'}.$$

Daí, temos que

$$\frac{G}{G'} \simeq \langle \bar{V} \mid uv = vu, \text{ para } u, v \in \bar{V} \rangle = H,$$

com o isomorfismo sendo claramente induzido por

$$v \mapsto v \pmod{\sim}$$

□

Há várias maneiras de decompor um grupo de Artin como um produto livre amalgamado de dois grupos de Artin, com amálgama sendo também um grupo de Artin. Faremos esse procedimento várias vezes durante a tese, de modo a aplicar o corolário 2.2.19. Para mostrarmos esse processo, primeiro precisamos de alguns lemas.

Lema 2.3.5. *Seja G um grupo de Artin, associado a um grafo \mathcal{G} . Seja \mathcal{H} um subgrafo de \mathcal{G} e H seu grupo de Artin associado. Então, existe um homomorfismo $i : H \rightarrow G$ tal que a imagem do gerador de H associado a um vértice $u \in V(\mathcal{H}) \subset V(\mathcal{G})$ é o gerador de G associado ao vértice u . Chamaremos i de homomorfismo induzido pela inclusão $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$.*

Demonstração. Seja $X = V(\mathcal{G}) \setminus V(\mathcal{H})$ e seja F o grupo livre com base X . Considere o monomorfismo canônico

$$i_1 : H \hookrightarrow H * F.$$

Seja R o conjunto de relações associadas às arestas de $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$. Considere o epimorfismo canônico

$$i_2 : H * F \twoheadrightarrow \frac{H * F}{\langle R \rangle_{H * F}} \simeq G.$$

Então,

$$i = i_2 \circ i_1$$

satisfaz as propriedades descritas no enunciado. \square

Lema 2.3.6. *Seja G um grupo de Artin associado ao grafo \mathcal{G} . Seja \mathcal{H} um grafo composto apenas por um vértice $u \in V(\mathcal{G})$ e $H = \langle u \rangle \simeq \mathbb{Z}$ seu grupo de Artin associado.*

Seja

$$i : H \rightarrow G$$

o homomorfismo induzido pela inclusão $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$, como no lema 2.3.5.

Então, i é um monomorfismo de grupos.

Demonstração. Provaremos que $i(H) \simeq \mathbb{Z}$, e, portanto, i é monomorfismo.

Defina $I \subset V(\mathcal{G})$ como sendo o conjunto de vértices v tais que $u \sim v$, como no enunciado do teorema 2.3.4. Note que $u \in I$.

Seja N o subgrupo normal de G gerado por:

- uv^{-1} ; para todo $v \in I \setminus \{u\}$;
- w ; para todo $w \in V(\mathcal{G}) \setminus I$.

Seja

$$j : G \rightarrow \frac{G}{N}$$

a projeção canônica. Afirmamos que

$$\frac{G}{N} \simeq \mathbb{Z}.$$

Para provar a afirmação acima, vamos obter uma apresentação para $\frac{G}{N}$ a partir da apresentação usual de G como grupo de Artin.

É claro pela definição de j que

$$j(V(\mathcal{G})) = \langle j(u) \rangle.$$

Portanto, $\frac{G}{N}$ é cíclico ou trivial, ou seja, é (isomorfo a) um quociente de \mathbb{Z} . Precisamos apenas analisar as imagens das relações de G por j .

Seja $e \in E(\mathcal{G})$ uma aresta de rótulo n . Temos quatro possibilidades:

1. Se $\sigma(e), \tau(e) \notin I$, a relação de G associada a e é trivial em $\frac{G}{N}$, já que $\sigma(e), \tau(e) \in N$.
2. Se $\sigma(e) = w \in I$ e $\tau(e) = v \notin I$, então e tem rótulo par, digamos $n=2k$, pela definição de I . Portanto, a relação de $\frac{G}{N}$ oriunda de e é a relação trivial:

$$j(((wv)^k(vw)^{-k})) = j(w^k)j(w^{-k}) = 1,$$

já que $v \in N$.

3. Se $\sigma(e) \notin I$ e $\tau(e) \in I$, a situação é análoga à anterior.
4. Se $\sigma(e) = w \in I$ e $\tau(e) = w' \notin I$, então a relação de $\frac{G}{N}$ oriunda de e é novamente a relação trivial:

$$j([w, w']_n [w', w]_n^{-1}) = j(u^n u^{-n}) = 1,$$

já que $uw^{-1}, uw'^{-1} \in N$.

Portanto, temos que

$$j(G) = \frac{G}{N} \simeq H.$$

Note que, se identificarmos $\frac{G}{N}$ e H , temos que

$$j \circ i = \text{Id},$$

e, portanto, i é monomorfismo. □

Definição 2.3.7. Um subgrafo \mathcal{H} de \mathcal{G} é dito *completo* se satisfaz a seguinte propriedade: Se $u, v \in V(\mathcal{H})$ são extremos de uma aresta e de \mathcal{G} , então $e \in E(\mathcal{H})$.

Lema 2.3.8. *Seja G um grupo de Artin associado ao grafo \mathcal{G} . Seja \mathcal{H} um subgrafo completo de \mathcal{G} e H seu grupo de Artin associado.*

Além disso, suponha que se $e \in E(\mathcal{G})$ tal que $\sigma(e) \in V(\mathcal{H})$ e $\tau(e) \notin V(\mathcal{H})$, então a aresta e possui rótulo par.

Seja $i : H \rightarrow G$ o homomorfismo induzido pela inclusão $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}$, como no lema 2.3.5.

Então, i é um monomorfismo de grupos.

Demonstração. Provaremos que $i(H) \simeq H$, e, portanto, i é monomorfismo.

Para tanto, seja N o subgrupo normal de G gerado por $V(\mathcal{G}) \setminus V(\mathcal{H})$ e seja

$$j : G \rightarrow \frac{G}{N}$$

a projeção canônica. Afirmamos que

$$\frac{G}{N} \simeq H.$$

Para provar a afirmação acima, vamos obter uma apresentação para $\frac{G}{N}$ a partir da apresentação usual de G como grupo de Artin.

Os geradores de G que não tem imagem trivial por j são os elementos de $V(\mathcal{H})$, então esses são os geradores de $\frac{G}{N}$ de nossa construção. As arestas de \mathcal{H} geram relações que não são alteradas por j , gerando as mesmas relações em $\frac{G}{N}$. Portanto, temos que $\frac{G}{N}$ é (isomorfo a) um quociente de H , já que tem os mesmos geradores, mesmas relações e possivelmente mais algumas, oriundas das outras relações de G .

Seja $e \in E(\mathcal{G})$ uma aresta de rótulo n que não pertença a $E(\mathcal{H})$. Como \mathcal{H} é um subgrafo completo, pelo menos um dos extremos de e , digamos $\tau(e) = v$, não pertence a \mathcal{H} . Temos duas possibilidades:

1. Se $\sigma(e) \notin V(\mathcal{H})$, a relação de G associada a e é trivial em $\frac{G}{N}$, já que $\sigma(e), \tau(e) \in N$.
2. Se $\sigma(e) = u \in V(\mathcal{H})$, então, por hipótese, $n = 2k$ é par e temos que a relação associada a e gera uma relação trivial em $\frac{G}{N}$:

$$j((uv)^k(vu)^{-k}) = j(u)^k j(u)^{-k} = 1,$$

já que $v \in N$.

Portanto, temos que

$$j(G) = \frac{G}{N} \simeq H.$$

Note que, se identificarmos $\frac{G}{N}$ e H , temos que

$$j \circ i = \text{Id},$$

e, portanto, i é monomorfismo. □

Proposição 2.3.9. *Seja G um grupo de Artin, associado a um grafo \mathcal{G} . Sejam $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_B, \mathcal{G}_C$ subgrafos de \mathcal{G} , com G_A, G_B, G_C sendo os grupos de Artin associados a $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_B, \mathcal{G}_C$, respectivamente. Além disso, suponha que:*

- 1.

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_A \cap \mathcal{G}_B.$$

2.

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_A \cup \mathcal{G}_B.$$

3. Os homomorfismos

$$i_r : G_C \rightarrow G_r, \quad r = A, B,$$

induzidos pelas inclusões

$$\mathcal{G}_C \hookrightarrow \mathcal{G}_r, \quad r = A, B,$$

respectivamente, são monomorfismos.

Então,

$$G \simeq G_A *_{G_C} G_B.$$

Demonstração. Sejam

$$j_r : G_r \rightarrow G, \quad r = A, B,$$

os homomorfismos de grupos induzidos pelas inclusões

$$\mathcal{G}_r \hookrightarrow \mathcal{G}, \quad r = A, B.$$

Claro que, pelas definições dos homomorfismos, temos que

$$j_A \circ i_A = j_B \circ i_B.$$

Seja H um grupo e

$$\phi_r : G_r \rightarrow H, \quad r = A, B,$$

homomorfismos tais que

$$\phi_A \circ i_A = \phi_B \circ i_B.$$

Defina o homomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow H$ de modo que

$$\phi(v) = \phi_r(v), \quad \forall v \in V(\mathcal{G}_r).$$

Temos que ϕ está bem-definido, já que

$$\phi_A \circ i_A = \phi_B \circ i_B$$

e

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_A \cup \mathcal{G}_B.$$

Além disso, claro que

$$\phi_r = j_r \circ \phi, \quad r = A, B,$$

pelas definições dos homomorfismos.

Seja $\psi : G \rightarrow H$ um homomorfismo tal que

$$\phi_r = j_r \circ \psi, \quad r = A, B.$$

Então,

$$\phi(v) = \phi_r(v) = j_r(\psi(v)) = \psi(v), \quad r = A, B,$$

e, portanto, $\psi = \phi$, pelo item 2 do enunciado.

Portanto, pela definição de produto livre amalgamado, temos o resultado. \square

Teorema 2.3.10. *Seja G um grupo de Artin, associado a um grafo \mathcal{G} . Sejam $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_B, \mathcal{G}_C$ subgrafos de \mathcal{G} tais que:*

1.

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_A \cap \mathcal{G}_B.$$

2.

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_A \cup \mathcal{G}_B.$$

3. \mathcal{G}_C é um subgrafo de \mathcal{G} composto apenas por um vértice.

Sejam G_A, G_B, G_C os grupos de Artin associados a $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_B, \mathcal{G}_C$, respectivamente. seja $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um caractere de G e sejam χ_A, χ_B, χ_C as restrições de χ a G_A, G_B, G_C , respectivamente. Suponha que χ_C é não-nulo, e, portanto, χ_A e χ_B também são não-nulos. Além disso, suponha que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$.

Então,

$$[\chi_A] \in \Sigma^1(G_A) \quad e \quad [\chi_B] \in \Sigma^1(G_B).$$

Demonstração. Sejam

$$i_r : G_C \rightarrow G_r, \quad r = A, B$$

os homomorfismos induzidos pelas inclusões

$$\mathcal{G}_C \hookrightarrow \mathcal{G}_r, \quad r = A, B,$$

respectivamente.

Pelo lema 2.3.6, temos que cada i_r , para $r = A, B$, é um monomorfismo.

Então, pela proposição 2.3.9, temos que

$$G \simeq G_A *_{G_C} G_B.$$

Como $G_C \simeq \mathbb{Z}$ é abeliano, pelo teorema 2.2.15 temos que

$$[\chi_C] \in \Sigma^1(G_C) = S(G_C).$$

Logo, pelo corolário 2.2.19, temos o resultado. \square

Teorema 2.3.11. *Seja G um grupo de Artin, associado a um grafo \mathcal{G} . Sejam $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_B, \mathcal{G}_C$ subgrafos de \mathcal{G} tais que:*

1.

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{G}_A \cap \mathcal{G}_B.$$

2.

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_A \cup \mathcal{G}_B.$$

3. \mathcal{G}_C é um subgrafo completo de \mathcal{G} .

4. Dada uma aresta $e \in E(\mathcal{G})$ tal que $\sigma(e) \in \mathcal{G}_C$ e $\tau(e) \notin \mathcal{G}_C$, então a aresta e possui rótulo par.

Sejam G_A, G_B, G_C os grupos de Artin associados a $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_B, \mathcal{G}_C$, respectivamente. seja $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um caractere de G e sejam χ_A, χ_B, χ_C as restrições de χ a G_A, G_B, G_C , respectivamente. Suponha que χ_C é não-nulo, e, portanto, χ_A e χ_B também são não-nulos. Além disso, suponha que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ e $[\chi_C] \in \Sigma^1(G_C)$.

Então,

$$[\chi_A] \in \Sigma^1(G_A) \quad e \quad [\chi_B] \in \Sigma^1(G_B).$$

Demonstração. Sejam

$$i_r : G_C \rightarrow G_r, \quad r = A, B,$$

os homomorfismos induzidos pelas inclusões

$$\mathcal{G}_C \hookrightarrow \mathcal{G}_r, \quad r = A, B,$$

respectivamente.

Pelo lema 2.3.8, temos que cada um dos i_r , para $r = A, B$, é um monomorfismo. Então, pela proposição 2.3.9, temos que

$$G \simeq G_A *_{G_C} G_B.$$

Portanto, temos o resultado, pelo corolário 2.2.19. □

Definição 2.3.12. Seja \mathcal{G} um grafo. Um subgrafo \mathcal{H} de \mathcal{G} é dito **dominante** se, para todo $v \in V(\mathcal{G}) \setminus V(\mathcal{H})$, existe $e \in E(\mathcal{G})$ tal que $\sigma(e) = v$, $\tau(e) \in V(\mathcal{H})$.

Definição 2.3.13. Seja χ um caractere de um grupo de Artin G associado a um grafo \mathcal{G} . Uma aresta e de \mathcal{G} é dita **morta** se e tem rótulo par maior que dois e $\chi(\sigma(e)) = -\chi(\tau(e))$.

Definição 2.3.14. Seja G um grupo de Artin, associado ao grafo \mathcal{G} e seja $\chi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um caractere de G . Defina $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ como o subgrafo completo de \mathcal{G} gerado pelos vértices $v \in V(\mathcal{G})$ tais que $\chi(v) \neq 0$. Defina o **subgrafo vivo** $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\chi) \subset \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ como o subgrafo obtido de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ após remover as arestas mortas.

Teorema 2.3.15 ([MeMnWy]). *Seja G um grupo de Artin, \mathcal{G} seu grafo associado e χ um caractere de G .*

1. *Se $\mathcal{L}(\chi)$ é um subgrafo conexo e dominante de \mathcal{G} , então $[\chi] \in \Sigma^1(G)$.*
2. *Se $[\chi] \in \Sigma^1(G)$, então $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ é conexo e dominante.*

O teorema 2.3.15 descreve parcialmente o Σ -invariante unidimensional de grupos de Artin. Acreditamos ainda que a recíproca do item 1 seja verdadeira, o que dá origem à conjectura abaixo.

Conjectura 2.3.16. *Seja G um grupo de Artin, associado ao grafo \mathcal{G} . Então,*

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ é um subgrafo conexo e dominante de } \mathcal{G}\}$$

O objetivo de nossa pesquisa é provar que a conjectura acima vale para alguns casos particulares. Usando o teorema 2.3.15, podemos reduzir a conjectura 2.3.16 para um caso mais simples.

Corolário 2.3.17. *Seja G um grupo de Artin e \mathcal{G} seu grafo associado. Suponha que, para todo caractere discreto χ de G , temos que*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi) \text{ é conexo, } \mathcal{L}(\chi) \text{ é desconexo} \quad \Rightarrow \quad [\chi] \in \Sigma^1(G)^c.$$

Então,

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ é um subgrafo conexo e dominante de } \mathcal{G}\}$$

Demonstração. Seja χ um caractere de G .

Se $\mathcal{L}(\chi)$ é conexo e dominante, temos que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$, pelo teorema 2.3.15.

Se $[\chi] \in \Sigma^1(G)$, então, pelo teorema 2.3.15, temos que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ é conexo e dominante. Portanto, $\mathcal{L}(\chi)$ também é um subgrafo dominante de \mathcal{G} , pois ele é obtido retirando apenas algumas arestas de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$. Suponha que $\mathcal{L}(\chi)$ é desconexo. Chegaremos a uma contradição.

Usando a notação do teorema 2.3.4, temos que a abelianização $H := \frac{G}{G'}$ de G é isomorfa a $\mathbb{Z}^{|\bar{V}|}$. Portanto, se

$$\bar{V} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\},$$

podemos considerar χ como um vetor

$$(\chi(v_1), \dots, \chi(v_n)) \in \mathbb{R}^n,$$

onde v_i é um representante qualquer de \bar{v}_i modulo \sim , para cada i . Se $\mathcal{L}(\chi)$ é desconexo, então existem dois vértices de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$, digamos v_1, v_2 , tais que cada caminho ligando v_1 e v_2 em $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ passa por uma aresta morta, uma vez que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ é conexo. Note que isso não depende da escolha dos representantes das

clases de v_1, v_2 , pela definição de \sim . Sejam e_1, \dots, e_m essas arestas mortas (escolhendo uma para cada caminho), de modo que

$$e_j = \{u_j, u_j^*\} \subset \{v_1, \dots, v_n\}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Pela densidade de \mathbb{Q} em \mathbb{R} , para cada $v \in \{v_1, \dots, v_n\}$ existem seqüências

$$\phi_v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_v(n) = \chi(v).$$

Além disso, é fácil ver que podemos escolher ϕ_v de modo que

$$\phi_v = 0 \quad \text{se} \quad \chi(v) = 0,$$

$$\phi_v(n) \neq 0 \quad \forall n \quad \text{se} \quad \chi(v) \neq 0$$

e

$$\phi_{u_i} = -\phi_{u_i^*}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Seja

$$\chi_j := (\phi_{v_1}(j), \dots, \phi_{v_n}(j)) \in \mathbb{R}^n.$$

Então, claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \chi,$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\chi_n] = [\chi], \quad \text{em } S^{n-1} = S(G).$$

Pela construção acima, χ_j é discreto, $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi_j)$ é conexo e $\mathcal{L}(\chi_j)$ é desconexo para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto, $[\chi_j] \in \Sigma^1(G)^c$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como, pelo teorema 2.2.12, $\Sigma^1(G)^c$ é fechado em $S(G)$, temos que $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$, o que nos dá a contradição desejada. \square

Durante toda a tese, utilizaremos várias vezes o corolário 2.3.17 para provarmos a validade da conjectura 2.3.16 nos casos em questão.

Primeiramente, consideraremos o caso de um grupo de Artin associado a um grafo desconexo.

Teorema 2.3.18 ([MeMnWy]). *Seja $G = A *_C B$ um produto livre amalgamado. Se $[\chi] \in \Sigma^1(G)$, então χ_C é não-nulo. Em particular, se $G = A * B$ então $\Sigma^1(G)$ é vazio.*

Corolário 2.3.19. *Seja G um grupo de Artin associado a um grafo desconexo \mathcal{G} . Então,*

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ é conexo e dominante}\} = \emptyset.$$

Em particular, se G é um grupo livre não-cíclico então $\Sigma^1(G) = \emptyset$.

Demonstração. Claro que G se escreve como produto livre de dois grupos de Artin, pela definição de grupo de Artin. Portanto,

$$\Sigma^1(G) = \emptyset.$$

O restante do resultado segue do corolário 2.3.17. □

Em vista do corolário 2.3.19, daqui para frente consideraremos apenas grupos de Artin associados a grafos conexos.

É sabido que a conjectura 2.3.16 é verdadeira para grupos de Artin associados a uma aresta.

Teorema 2.3.20 ([Me]). *Seja G o grupo de Artin associado ao grafo*

$$u_1 \overset{n}{\text{---}} u_2.$$

1. *Se $n = 2$, então $\Sigma^1(G) = S(G) = S^1$.*
2. *Se $n = 2k$, $k > 1$, então $S(G) = S^1$ e $\Sigma^1(G) = S^1 \setminus \{(1, -1), (-1, 1)\}$.*
3. *Se $n = 2k + 1$, então $\Sigma^1(G) = S(G) = S^0 = \{\pm 1\}$.*

Corolário 2.3.21. *Seja G um grupo de Artin associado a um grafo \mathcal{G} que possui apenas dois vértices. Então,*

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ é conexo e dominante}\}$$

Além disso, sabemos também que a conjectura 2.3.16 vale para árvores.

Teorema 2.3.22 ([Me]). *Seja G um grupo de Artin, associado a uma árvore \mathcal{G} . Então,*

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ é um subgrafo conexo e dominante de } \mathcal{G}\}.$$

O objetivo de nossa pesquisa é mostrar, nos capítulos a seguir, que a conjectura 2.3.16 vale para o maior número de casos possíveis. Para isso precisaremos de alguns lemas gerais, que demonstramos a seguir. O primeiro nos diz que o primeiro Σ -invariante de um grupo de Artin é simétrico com relação à origem.

Lema 2.3.23. *Seja G um grupo de Artin. Então, $\Sigma^1(G) = -\Sigma^1(G)$.*

Demonstração. É fácil ver, pela simetria das relações da definição de grupo de Artin, que a função

$$\begin{aligned} \phi : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

é um automorfismo de G , de modo que

$$\chi \circ \phi = -\chi.$$

Como $\Sigma^1(G)$ é invariante via automorfismos, temos o resultado. □

Lema 2.3.24. *Sejam G um grupo, $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ um caractere discreto e $H := \ker \chi$. Então,*

$$S(G, H) := \{[\psi] \in S(G) \mid \psi(H) = 0\} = \{[\chi], -[\chi]\}.$$

Demonstração. Obviamente, basta provar que $S(G, H) \subset \{[\chi], -[\chi]\}$. Sem perda de generalidade, suponha que $\text{Im } \chi = \mathbb{Z}$ e que $[\mu] \in S(G, H)$. Então, $H \triangleleft \ker \mu$. Além disso,

$$\text{Im } \mu \simeq \frac{G}{\ker \mu} \simeq \frac{G/H}{\ker \mu/H} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\ker \mu/H}.$$

Mas $\text{Im } \mu$ é um subgrupo não nulo de \mathbb{R} , logo é livre de torção. Sendo também um quociente de \mathbb{Z} , temos que $\text{Im } \mu \simeq \mathbb{Z}$, ou seja, $\frac{\ker \mu}{H}$ é o grupo trivial, o que implica $\ker \mu = H$. \square

Corolário 2.3.25. *Seja G um grupo de Artin e χ um caractere discreto de G . Então,*

$$[\chi] \in \Sigma^1(G) \Leftrightarrow \ker \chi \text{ é finitamente gerado}$$

Demonstração. Pelo lema 2.3.24, temos que $S(G, N) = \{[\chi], -[\chi]\}$. Aplicando o teorema 2.2.10, para $m = 1$, e o lema 2.3.23, vemos que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ se e somente se $\ker \chi$ é finitamente gerado. \square

O corolário 2.3.25 nos dá uma maneira eficiente de utilizar o corolário 2.3.17.

O resultado abaixo é um corolário da proposição 2.2.13, que nos dá um maneira algorítmica de reduzir grafos, para que possamos aplicar o corolário 2.3.17 com mais facilidade.

Corolário 2.3.26. *Seja G um grupo de Artin, com grafo associado \mathcal{G} , cujo conjunto de vértices é $V(\mathcal{G}) = \{u_i\}_{i \in I}$. Considere I como sendo totalmente ordenado. Caso exista uma aresta conectando u_i e u_j , com $i < j$, denotamos o rótulo dessa aresta como α_{ij} . Para cada $v \in V(\mathcal{G})$, seja I_v o conjunto de vértices de \mathcal{G} que estão ligados a v por caminhos compostos apenas de arestas com rótulos ímpares. Seja χ um caractere de G e \bar{G} o grupo de Artin associado ao grafo $\bar{\mathcal{G}}$, obtido de \mathcal{G} através de um número finito de passos dos seguintes tipos:*

1. apagar os vértices de I_v , onde v é um vértice tal que $\chi(v) = 0$, bem como todas as arestas às quais eles pertençam.
2. adicionar uma aresta, de rótulo $n \geq 2$, ligando dois vértices de \mathcal{G} que não possuem uma aresta que os conecte.
3. trocar um rótulo α_{ij} de uma aresta $\{u_i, u_j\}$ de \mathcal{G} por $\beta_{ij} > 1$ tal que $\beta_{ij} \mid \alpha_{ij}$, a não ser que $\chi(u_i) \neq \chi(u_j)$ e β_{ij} seja ímpar.

4. identificar dois vértices u_i, u_j tais que $\chi(u_i) = \chi(u_j)$. Depois, reduzir duas arestas que eventualmente tenham mesmas extremidades, de rótulos m, n , a apenas uma, de rótulo $\text{mdc}(m, n)$. Caso $\text{mdc}(m, n) = 1$, identificar os vértices, repetindo o processo. Depois, apagar arestas que tenham fim e começo iguais.

Então, existe um epimorfismo natural

$$\pi : G \twoheadrightarrow \bar{G}.$$

Além disso, χ induz um caractere $\bar{\chi}$ de \bar{G} (de modo que $\chi = \bar{\chi} \circ \pi$) e temos que

$$[\bar{\chi}] \in \Sigma^1(\bar{G})^c \Rightarrow [\chi] \in \Sigma^1(G)^c$$

Demonstração. Precisamos apenas provar que \bar{G} é um grafo adequado para a definição de um grupo de Artin, uma vez que, assumindo isso, os passos acima consistem apenas em acrescentar relações a G , e, portanto, o resultado é consequência da proposição 2.2.13. Note que χ induz $\bar{\chi} : G \rightarrow \mathbb{R}$, por causa das condições nos passos 1, 2, 3 e 4.

Para o passo 1, primeiramente note que, pela observação 2.3.3, os vértices de I_v tem χ -valor nulo. Seja

$$I := \bigcup_{\chi(v)=0} I_v.$$

Então, aplicar o passo 1 significa fazer o quociente do grupo original pelo subgrupo

$$N := \langle I \rangle^G \triangleleft G.$$

É suficiente mostrar que as relações oriundas das arestas “apagadas” não geram novas relações no quociente. De fato, seja e uma aresta tal que $\tau(e) = v' \in I$. Temos duas possibilidades:

1. $\sigma(e) = u \in I$. Nesse caso, a relação gerada no quociente a partir de e é trivial, pois $u, v \in N$.
2. $\sigma(e) = u \notin I$. Nesse caso, e tem rótulo par, digamos $2k$. Então, e dá origem, no quociente $\frac{G}{N}$, à relação

$$\overline{(uw)^k (vu)^{-k}} = \bar{u}^k \bar{u}^{-k} = 1,$$

que é trivial.

Não há o que provar para os passos 2 e 3, basta observar as relações na definição de grupos de Artin.

Para o passo 4, note que todas as relações de G , em sua apresentação canônica como grupo de Artin, são da seguinte forma:

$$[u_i, u_j]_n := \underbrace{u_i u_j u_i \cdots}_n = \underbrace{u_j u_i u_j \cdots}_n =: [u_j, u_i]_n.$$

Ao identificarmos dois vértices, poderia ocorrer de obtermos um grafo não-simplicial, *i.e.*, com duas ou mais arestas ligando dois vértices. Para resolver esse problema, observamos que

$$\begin{aligned} [u_i, u_j]_m = [u_j, u_i]_m \quad \text{e} \quad [u_i, u_j]_n = [u_j, u_i]_n \\ \Downarrow \\ [u_i, u_j]_{\text{mdc}(m,n)} = [u_j, u_i]_{\text{mdc}(m,n)}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

De fato, com i, j, m arbitrários, é claro que

$$[u_i, u_j]_m = [u_j, u_i]_m \Rightarrow [u_i, u_j]_{\alpha m} = [u_j, u_i]_{\alpha m}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z},$$

onde α pode ser negativo, se definirmos

$$[u_i, u_j]_{-m} := [u_j^{-1}, u_i^{-1}]_m.$$

Logo, é evidente que

$$\begin{aligned} [u_i, u_j]_{\text{mdc}(m,n)} = [u_j, u_i]_{\text{mdc}(m,n)} \\ \Downarrow \\ [u_i, u_j]_m = [u_j, u_i]_m \quad \text{e} \quad [u_i, u_j]_n = [u_j, u_i]_n. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $d := \text{mdc}(n, m)$, temos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\alpha m + \beta n = d.$$

Logo, supondo que

$$[u_i, u_j]_m = [u_j, u_i]_m \quad \text{e} \quad [u_i, u_j]_n = [u_j, u_i]_n,$$

temos que

$$[u_i, u_j]_{\alpha m} = [u_j, u_i]_{\alpha m} \quad \text{e} \quad [u_i, u_j]_{\beta n} = [u_j, u_i]_{\beta n}.$$

Daí, apenas justapondo as relações, temos que

$$[u_i, u_j]_{\alpha m + \beta n} = [u_j, u_i]_{\alpha m + \beta n} \Rightarrow [u_i, u_j]_d = [u_j, u_i]_d,$$

como queríamos demonstrar.

Usando (2.3.1), podemos reduzir duas arestas de mesmas extremidades - com rótulos m, n - a uma única aresta - de rótulo $\text{mdc}(m, n)$ -, repetindo o processo até que haja apenas uma aresta. Caso $\text{mdc}(m, n) = 1$, basta identificar os vértices e repetir o processo. Note que só podemos identificar dois vértices u_i, u_j (usando o passo 4) se $\chi(u_i) = \chi(u_j)$, mas é exatamente o caso, pois, se $\text{mdc}(m, n) = 1$, então pelo menos uma das arestas é ímpar, o que força $\chi(u_i) = \chi(u_j)$, pela observação 2.3.3.

Dessa forma, o grafo $\bar{\mathcal{G}}$ é um grafo que se adequa à definição de grupo de Artin. \square

Capítulo 3

Grupos de Artin de posto 1

3.1 Objetivo

A definição a seguir será utilizada por uma questão de praticidade.

Definição 3.1.1. Seja G um grupo de Artin, associado a um grafo conexo \mathcal{G} . Então,

$$\pi_1(\mathcal{G}) = \underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ cópias}},$$

para algum $n \geq 0$. Dizemos então que G é um grupo de Artin de *posto* n .

Vimos que a conjectura 2.3.16 já foi provada como verdadeira para grupos de Artin de posto 0 (teorema 2.3.22). Nosso objetivo nesse capítulo é provar o mesmo para grupos de Artin de posto 1, ou seja, o teorema a seguir.

Teorema 3.1.2. *Seja G um grupo de Artin de posto 1, associado ao grafo \mathcal{G} . Então,*

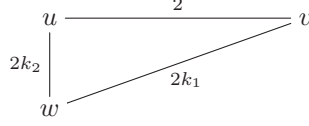
$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ é um subgrafo conexo e dominante de } \mathcal{G}\}.$$

Para isso, reduziremos o problema para grupos de Artin associados a grafos pequenos, utilizando o corolário 2.2.19 e o corolário 2.3.26. Primeiramente, vamos resolver esses casos especiais, na próxima seção.

3.2 Os casos especiais

Nessa seção, provaremos a conjectura 2.3.16 para três modelos de grupos de Artin de posto 1. Esses resultados serão importantes para provar o teorema 3.1.2.

Teorema 3.2.1. *Seja $G = G(k_1, k_2)$ o grupo de Artin associado ao grafo*



tal que k_1, k_2 são inteiros positivos maiores que 1 e $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ tal que

$$\chi(u) = \chi(v) = -\chi(w) = 1.$$

Então, $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$

Demonstração. Pelo corolário 2.3.26, podemos considerar que k_1, k_2 são primos.

Seja $N := \ker \chi$. Pela imagem dos geradores de G por χ , vemos que χ é discreto. Pelo corolário 2.3.25, temos que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ se e somente se N é finitamente gerado (como grupo).

Suponha, então, que N é finitamente gerado. Chegaremos a uma contradição.

Por definição, G tem uma apresentação

$$G = \langle u, v, w \mid uv = vu, (vw)^{k_1} = (wv)^{k_2}, (uw)^{k_2} = (wu)^{k_2} \rangle$$

Defina

$$x_0 := vw, \quad y_0 := uw,$$

ou seja,

$$v = x_0 w^{-1}, \quad u = y_0 w^{-1}.$$

Então,

$$N = \langle x_0, y_0 \rangle^G.$$

De fato, seja

$$\mathcal{N} := \langle x_0, y_0 \rangle^G \leq N.$$

Temos que

$$\frac{G}{\mathcal{N}} = \langle u, v, w \mid \text{relações de } G, vw = 1, uw = 1 \rangle.$$

Ou seja, em $\frac{G}{\mathcal{N}}$, $v \equiv u \equiv w^{-1}$, o que já torna as relações de G irrelevantes. Assim,

$$\frac{G}{\mathcal{N}} \simeq \mathbb{Z} = \langle w \rangle.$$

Então, pelo lema 2.1.3, $N = \mathcal{N}$ e

$$G = N \rtimes \langle w \rangle.$$

Portanto,

$$x_i := x_0^{w^i}, \quad y_i := y_0^{w^i}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

formam um conjunto de geradores de N .

Traduzindo as relações de G para a apresentação de N com os geradores acima, temos que:

$$(vw)^{k_1} = (wv)^{k_1} \Leftrightarrow x_0^{k_1} = x_{-1}^{k_1} \Leftrightarrow x_0^{k_1} = x_i^{k_1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.1)$$

$$(uw)^{k_2} = (wu)^{k_2} \Leftrightarrow y_0^{k_2} = y_{-1}^{k_2} \Leftrightarrow y_0^{k_2} = y_i^{k_2} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} uv = vu &\Leftrightarrow y_0 w^{-1} x_0 w^{-1} = x_0 w^{-1} y_0 w^{-1} \Leftrightarrow y_{-2} x_{-1} = x_{-2} y_{-1} \\ &\Leftrightarrow x_i = y_{i-1}^{-1} x_{i-1} y_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Portanto, temos a seguinte apresentação para N :

$$N = \langle \{x_i, y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i^{k_1} = x_0^{k_1}, y_i^{k_2} = y_0^{k_2}, x_i = y_{i-1}^{-1} x_{i-1} y_i, i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Por hipótese, N é finitamente gerado, logo

$$\bar{N} := \frac{N}{\langle x_0^{k_1}, y_0^{k_2} \rangle^N}$$

também o é. Note que, por (3.2.1) e (3.2.2),

$$\bar{N} = \langle \{x_i, y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i^{k_1} = 1, y_i^{k_2} = 1, x_i = y_{i-1}^{-1} x_{i-1} y_i, i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Defina os grupos

$$K := \langle \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid y_i^{k_2} = 1, i \in \mathbb{Z} \rangle = *_{i \in \mathbb{Z}} \langle y_i \mid y_i^{k_2} = 1 \rangle \simeq *_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{k_2},$$

$$K_1 = \langle x \mid x^{k_1} = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{k_1},$$

$$A := K * K_1.$$

Note que, identificando $x = x_0$, podemos escrever $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ como subconjunto de A . De fato, basta usarmos que, por (3.2.3),

$$x_i = y_{i-1}^{-1} x_{i-1} y_i, \quad \text{se } i > 0 \quad \text{e} \quad x_i = y_i x_{i+1} y_{i+1}^{-1}, \quad \text{se } i < 0.$$

Levando isso em conta, podemos descrever \bar{N} como o seguinte quociente de A :

$$\pi : A \twoheadrightarrow \frac{A}{\langle \{x_i^{k_1}\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle^A} \simeq \bar{N}.$$

Pelo lema 2.1.4, temos que, para cada $i \in \mathbb{Z}$, existe único $\gamma_i \in K^{K_1}$ tal que

$$x_i = x\gamma_i,$$

já que, por (3.2.3) a imagem de cada x_i pela projeção canônica $A \twoheadrightarrow K^A$ é igual a x .

Então,

$$x_i^{k_1} = (x\gamma_i)^{k_1} = x^{k_1}\gamma_i^{x^{k_1-1}}\gamma_i^{x^{k_1-2}}\cdots\gamma_i^x\gamma_i^1. \quad (3.2.4)$$

Observe que K^A é um subgrupo de índice finito de A , já que

$$\frac{A}{K^A} \simeq \mathbb{Z}_{k_1}.$$

Então,

$$B := \pi(K^A)$$

é um subgrupo de índice finito de \bar{N} . Ou seja, B é finitamente gerado. Veremos que isso gera uma contradição.

Note que como x é gerador de \mathbb{Z}_{k_1} como grupo, então $\mathbb{Z}_{k_2}[K_1] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[x]$, como álgebras de grupos (com coeficientes em \mathbb{Z}_{k_2}), onde $x^{k_1} = 1$.

Considere B^{ab} como sendo a abelianização de B . O \mathbb{Z} -módulo B^{ab} é finitamente gerado, pois B é finitamente gerado. Veremos B^{ab} como sendo um $\mathbb{Z}_{k_2}[K_1]$ -módulo, gerado pelas classes de y_i , onde a ação de K_1 é dada por conjugação à direita.

Por (3.2.4), com a notação acima, temos que

$$B^{ab} \simeq \frac{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} y_i (\mathbb{Z}_{k_2}[x])}{I},$$

de modo que $y_i \mathbb{Z}_{k_2}[K_1] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[K_1]$ e I é o $\mathbb{Z}_{k_2}[K_1]$ -submódulo gerado por

$$\gamma_i(1 + x + \cdots + x^{k_1-1}), \quad \forall i.$$

Defina

$$R := \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x]}{(1 + x + \cdots + x^{k_1-1})},$$

que é um anel que também é um \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial (já que k_2 é primo) de dimensão $k_1 - 1 \geq 1$. Então,

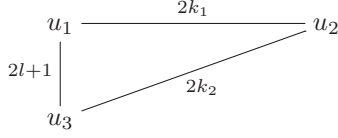
$$\overline{B^{ab}} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} y_i R,$$

é um quociente de B^{ab} (como \mathbb{Z} -módulo), sendo, portanto, finitamente gerado (como \mathbb{Z} -módulo).

Mas isso é uma contradição, pois $R \neq 0$. □

O teorema a seguir é um caso particular de um teorema que demonstraremos no último capítulo, mas optamos por demonstrá-lo independentemente, já que a demonstração desse caso é bem mais simples e importante para o capítulo.

Teorema 3.2.2. *Seja $G = G(k_1, k_2, l)$ o grupo de Artin associado ao grafo*



tal que k_1, k_2, l são inteiros positivos, com $k_1, k_2 > 1$ e $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ tal que

$$-1 = \chi(u_1) = \chi(u_3) = -\chi(u_2).$$

Então, $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$

Demonstração. Seja $N := \ker \chi$. Pela imagem dos geradores de G por χ , vemos que χ é discreto. Pelo corolário 2.3.25, temos que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ se e somente se N é finitamente gerado (como grupo).

Suponha, então, que N é finitamente gerado. Chegaremos a uma contradição.

Por definição, G tem uma apresentação

$$G = \langle u_1, u_2, u_3 \mid (u_1 u_2)^{k_1} = (u_2 u_1)^{k_1}, (u_2 u_3)^{k_2} = (u_3 u_2)^{k_2}, \\ (u_1 u_3)^l u_1 = (u_3 u_1)^l u_3 \rangle.$$

Podemos supor que os k_i são primos, pelo corolário 2.3.26.

Defina

$$x_0 := u_1 u_2, \quad y_0 := u_2 u_3,$$

ou seja,

$$u_1 = x_0 u_2^{-1}, \quad u_3 = u_2^{-1} y_0.$$

Então,

$$N = \langle x_0, y_0 \rangle^G.$$

De fato, seja

$$\mathcal{N} := \langle x_0, y_0 \rangle^G \triangleleft N$$

Temos que

$$\frac{G}{\mathcal{N}} = \langle u_1, u_2, u_3 \mid \text{relações de } G, u_1 u_2 = u_2 u_3 = 1 \rangle.$$

Ou seja, $\frac{G}{\mathcal{N}} \simeq \mathbb{Z}$, gerado por u_2 . Como χ é discreto, pelo lema 2.1.3, temos que $N = \mathcal{N}$ e

$$G = N \rtimes \langle u_2 \rangle.$$

Isso mostra que

$$x_i := x_0^{u_2^i}, \quad y_i := y_0^{u_2^i}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

são geradores de N como subgrupo de G .

Precisamos agora traduzir as relações de G para a apresentação de N que usaremos. As duas primeiras relações são simples:

$$(u_1u_2)^{k_1} = (u_2u_1)^{k_1} \Leftrightarrow x_0^{k_1} = x_{-1}^{k_1} \Leftrightarrow x_0^{k_1} = x_i^{k_1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.5)$$

$$(u_2u_3)^{k_2} = (u_3u_2)^{k_2} \Leftrightarrow y_0^{k_2} = y_1^{k_2} \Leftrightarrow y_0^{k_2} = y_i^{k_2} \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.6)$$

Para a terceira relação, desenvolveremos cada lado da equação separadamente:

$$(u_1u_3)^l u_1 = \overbrace{(x_0u_2^{-2}y_0) \cdots (x_0u_2^{-2}y_0)}^{l \text{ fatores}} x_0u_2^{-1} = x_0y_2x_2y_4 \cdots x_{2l-2}y_{2l}x_{2l}u_2^{-2l-1},$$

$$(u_3u_1)^l u_3 = \overbrace{(u_2^{-1}y_0x_0u_2^{-1}) \cdots (u_2^{-1}y_0x_0u_2^{-1})}^{l \text{ fatores}} u_2^{-1}y_0 = y_1x_1y_3x_3 \cdots y_{2l-1}x_{2l-1}y_{2l+1}u_2^{-2l-1}.$$

Igualando os dois termos resultantes acima, cancelando os fatores u_2^{-2l-1} à direita de cada termo e conjugando a equação por u_2^i temos que

$$(u_1u_3)^l u_1 = (u_3u_1)^l u_3 \Leftrightarrow x_i y_{i+2} x_{i+2} y_{i+4} \cdots y_{i+2l} x_{i+2l} = y_{i+1} x_{i+1} y_{i+3} x_{i+3} \cdots x_{i+2l-1} y_{i+2l+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (3.2.7)$$

Temos, portanto, a seguinte apresentação para N :

$$N = \langle \{x_i, y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid (3.2.5), (3.2.6), (3.2.7), i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Por hipótese, N é finitamente gerado, logo

$$\bar{N} := \frac{N}{\langle x_0^{k_1}, y_0^{k_2} \rangle^N}$$

também o é. Note que, por (3.2.5) e (3.2.6),

$$\bar{N} = \langle \{x_i, y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i^{k_1} = 1, y_i^{k_2} = 1, (3.2.7), i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Defina os grupos

$$K_1 := \langle \{x_i\}_{0 \leq i \leq 2l-1} \mid x_i^{k_1} = 1, 0 \leq i \leq 2l-1 \rangle = {}_{*0 \leq i \leq 2l-1} \langle x_i \mid x_i^{k_1} = 1 \rangle \simeq {}_{*0 \leq i \leq 2l-1} \mathbb{Z}_{k_1},$$

$$K := \langle \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid y_i^{k_2} = 1, i \in \mathbb{Z} \rangle = *_{i \in \mathbb{Z}} \langle y_i \mid y_i^{k_2} = 1 \rangle \simeq *_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{k_2},$$

$$M := K_1 * K,$$

$$D := \mathbb{Z}_{k_1},$$

$$A := K * D.$$

Note que podemos escrever $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ como subconjunto de M . De fato, temos que, por (3.2.7),

$$\begin{aligned} x_{i+2l} &= y_{i+2l}^{-1} x_{i+2l-2}^{-1} y_{i+2l-2}^{-1} x_{i+2l-4}^{-1} \cdots y_{i+2}^{-1} x_i^{-1} \\ &\quad \cdot y_{i+1} x_{i+1} y_{i+3} x_{i+3} \cdots x_{i+2l-1} y_{i+2l+1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned} x_i &= y_{i+1} x_{i+1} y_{i+3} x_{i+3} \cdots x_{i+2l-1} y_{i+2l+1} \\ &\quad \cdot x_{i+2l}^{-1} y_{i+2l}^{-1} x_{i+2l-2}^{-1} y_{i+2l-2}^{-1} \cdots x_{i+2}^{-1} y_{i+2}^{-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Levando isso em conta, podemos descrever \bar{N} como o seguinte quociente de M :

$$\pi : M \twoheadrightarrow \frac{M}{\langle \{x_i^{k_1}\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle_M} \simeq \bar{N}.$$

Pelo lema 2.1.4, temos que, para cada $i \in \mathbb{Z}$, existem únicos $\tilde{x}_i \in K_1$, $v_i \in K^{K_1}$ tais que

$$x_i = \tilde{x}_i v_i.$$

Note que, se $0 \leq i \leq 2l - 1$, então $x_i = \tilde{x}_i$ e $v_i = e_M$.

Além disso, por (3.2.8), temos que

$$x_i y_{i+1}^{-1} \in \langle x_{i-2l}, x_{i-2l-1}, \dots, x_{i-1}, y_{i-2l+1}, y_{i-2l+2}, \dots, y_i \rangle \quad \forall i \geq 2l.$$

Substituindo $x_i = \tilde{x}_i v_i$ na equação acima, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i v_i y_{i+1}^{-1} &\in \langle \tilde{x}_{i-2l} v_{i-2l}, \tilde{x}_{i-2l-1} v_{i-2l-1}, \dots, \tilde{x}_{i-1} v_{i-1}, y_{i-2l+1}, y_{i-2l+2}, \dots, y_i \rangle \\ &\quad \forall i \geq 2l. \end{aligned}$$

Temos, então que o elemento à esquerda é equivalente a uma palavra formada a partir dos elementos geradores à direita. Nessa palavra, conjugamos os

elementos de modo a isolar os fatores \tilde{x}_j à esquerda da palavra, obtendo uma nova palavra

$$\tilde{x}_i v_i y_{i+1}^{-1} = c_i \delta_i \in M_1,$$

onde

$$c_i \in K_1 \quad \text{e} \quad \delta_i \in \langle v_{i-2l}, v_{i-2l-1}, \dots, v_{i-1}, y_{i-2l+1}, y_{i-2l+2}, \dots, y_i \rangle^{K_1} \leq K^{K_1}.$$

Como

$$\tilde{x}_i \in K_1, \quad v_i y_{i+1}^{-1} \in K^{K_1},$$

e, pelo lema 2.1.4, essa decomposição é única, temos que $\tilde{x}_i = c_i$ e

$$v_i y_{i+1}^{-1} = \delta_i \in \langle v_{i-2l}, v_{i-2l-1}, \dots, v_{i-1}, y_{i-2l+1}, y_{i-2l+2}, \dots, y_i \rangle^{K_1}, \quad \forall i \geq 2l.$$

Como $v_j = 1$, para $0 \leq j \leq 2l - 1$ temos, por indução, que

$$v_i y_{i+1}^{-1} \in \langle \{y_j\}_{0 \leq j \leq i} \rangle^{K_1} \quad \forall i \geq 2l. \quad (3.2.10)$$

Analogamente, por (3.2.9) e pelo lema 2.1.4, temos que

$$y_{i+1}^{-1} x_i \in \langle x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+2l}, y_{i+2}, y_{i+3}, \dots, y_{i+2l+1} \rangle, \quad \forall i < 0.$$

Substituindo $x_j = \tilde{x}_j v_j$ na equação acima, temos que

$$y_{i+1}^{-1} x_i = y_{i+1}^{-1} \tilde{x}_i v_i = \tilde{x}_i (y_{i+1}^{\tilde{x}_i})^{-1} v_i$$

e, por argumento análogo ao do caso anterior,

$$(y_{i+1}^{\tilde{x}_i})^{-1} v_i \in \langle v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+2l}, y_{i+2}, y_{i+3}, \dots, y_{i+2l+1} \rangle^{K_1}, \quad \forall i < 0.$$

Logo, por indução,

$$(y_{i+1}^{\tilde{x}_i})^{-1} v_i \in \langle \{y_j\}_{i+2 \leq j \leq 2l} \rangle^{K_1}, \quad \forall i < 0. \quad (3.2.11)$$

Queremos agora construir um epimorfismo

$$\theta : M \rightarrow A$$

de modo que $\theta|_K = \text{Id}_K$ e θ projete K_1 em \mathbb{Z}_{k_1} .

Levando isso em consideração e considerando \mathbb{Z}_{k_1} como subgrupo de A , definimos θ em K_1 da seguinte maneira:

$$\theta(x_0) = \theta(x_1) = \cdots = \theta(x_{2l-2}) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{k_1}, \quad \theta(x_{2l-1}) = \bar{2} \in \mathbb{Z}_{k_1}.$$

Pelo lema 2.1.4 e por (3.2.8), temos que

$$\tilde{x}_{i+2l} = \tilde{x}_{i+2l-2}^{-1} \tilde{x}_{i+2l-4}^{-1} \cdots \tilde{x}_i^{-1} \tilde{x}_{i+1} \tilde{x}_{i+3} \cdots \tilde{x}_{i+2l-1}, \quad \forall i. \quad (3.2.12)$$

Aplicando θ , temos que

$$\theta(\tilde{x}_{i+2l}) = -\theta(\tilde{x}_i) + \theta(\tilde{x}_{i+1}) - \theta(\tilde{x}_{i+2}) + \cdots - \theta(\tilde{x}_{i+2l-2}) + \theta(\tilde{x}_{i+2l-1}), \quad \forall i.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cdots, \theta(\tilde{x}_{2l}) = \bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{2l+1}) = \theta(\tilde{x}_{2l+2}) = \cdots = \theta(\tilde{x}_{4l-1}) = -\bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{4l}) = -\bar{2}, \\ \theta(\tilde{x}_{4l+1}) = -\bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{4l+2}) = \theta(\tilde{x}_{4l+3}) = \cdots = \theta(\tilde{x}_{6l}) = \bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{6l+1}) = \bar{2}, \cdots \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

e assim por diante, de modo que

$$\theta(\tilde{x}_{i+4l+2}) = \theta(\tilde{x}_i) \quad \forall i.$$

Usando a decomposição $x_i = \tilde{x}_i v_i$, temos que

$$\begin{aligned} \theta(x_i)^{k_1} &= \underbrace{(\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i)) (\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i)) \cdots (\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i))}_{k_1 \text{ termos}} \\ &= \theta(\tilde{x}_i)^{k_1} \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^{k_1-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^2} \right) \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)} \right) (\theta(v_i)^1) \\ &= \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^{k_1-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^2} \right) \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)} \right) (\theta(v_i)^1). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Defina

$$x := \bar{1} = \theta(x_0) = \theta(\tilde{x}_0) \in \mathbb{Z}_{k_1},$$

Suponha que $k_1 \neq 2$. Então, por (3.2.13), temos que $\theta(\tilde{x}_i)$ é um gerador de \mathbb{Z}_{k_1} , qualquer que seja $i \in \mathbb{Z}$.

Então, a menos de uma permutação dos expoentes $\{x^{k_1-1}, x^{k_1-2}, \dots, x, 1\}$, temos que

$$\theta(x_i)^{k_1} = \left(\theta(v_i)^{x^{k_1-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_i)^{x^2} \right) (\theta(v_i)^x) (\theta(v_i)^1). \quad (3.2.15)$$

Se $k_1 = 2$, temos que

$$\theta(\tilde{x}_i) = \begin{cases} e_A, & \text{se } i \equiv -2 \pmod{2l+1} \\ x, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Assim, se $i \equiv -2 \pmod{2l+1}$, temos que

$$\theta(x_i)^2 = \theta(v_i)^2. \quad (3.2.17)$$

Note que esse é o único caso em que $\theta(\tilde{x}_i) = e_A$.
Caso contrário,

$$\theta(x_i)^2 = (\theta(v_i)^x) \theta(v_i).$$

Considere agora a projeção canônica

$$\delta : A \twoheadrightarrow \frac{A}{\langle \{\theta(x_i)^{k_1}\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle^A} =: \bar{A}$$

O epimorfismo $\theta : M \twoheadrightarrow A$ induz um epimorfismo $\bar{\theta} : \bar{N} \twoheadrightarrow \bar{A}$, conforme o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & A \\ \pi \downarrow & & \downarrow \delta \\ \bar{N} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & \bar{A} \end{array}$$

Portanto, \bar{A} é finitamente gerado.

Observe que K^A é um subgrupo de índice finito de A , já que

$$\frac{A}{K^A} \simeq \mathbb{Z}_{k_1}.$$

Então,

$$B := \delta(K^A)$$

é um subgrupo de índice finito de \bar{A} . Ou seja, B é finitamente gerado. Veremos que isso gera uma contradição.

Pelo lema 2.1.5, temos que

$$K^A = *_{i \in \mathbb{Z}, d \in D} \langle y_i^d \rangle \leq A$$

Note que como x é gerador de \mathbb{Z}_{k_1} como grupo, então $\mathbb{Z}_{k_2}[D] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[x]$, como álgebras de grupos (com coeficientes em \mathbb{Z}_{k_2}), onde $x^{k_1} = 1$.

Considere B^{ab} como sendo a abelianização de B . O \mathbb{Z} -módulo B^{ab} é finitamente gerado, pois B é finitamente gerado. Veremos B^{ab} como sendo um $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -módulo, gerado pelas classes de

$$e_i := \delta \theta y_i,$$

onde a ação de D é dada por conjugação à direita.

Defina $\hat{v}_j = \delta \theta v_j$.

Por (3.2.15) e (3.2.16), temos que, como $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -módulos,

$$B^{ab} \simeq \frac{\oplus_{i \in \mathbb{Z}} e_i (\mathbb{Z}_{k_2}[x])}{I + I'},$$

de modo que $e_i \mathbb{Z}_{k_2}[\mathbb{Z}_{k_1}] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[\mathbb{Z}_{k_1}]$, I é o $\mathbb{Z}_{k_2}[\mathbb{Z}_{k_1}]$ -submódulo gerado por

$$\hat{v}_i(x^{k_1-1} + \cdots + x + 1), \forall i \text{ tal que } \theta(\tilde{x}_i) \neq e_A$$

e I' é o $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -submódulo gerado por:

$$k_1 \hat{v}_i, \forall i \text{ tal que } \theta(\tilde{x}_i) = e_A.$$

Suponha que $k_1 \neq 2$

Defina

$$R := \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x]}{(1 + x + \cdots + x^{k_1-1})},$$

que é um anel que também é um \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial de dimensão $k_1 - 1 \geq 1$. Então, temos, por (3.2.13), que $I' = 0$. Então,

$$\overline{B^{ab}} := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} e_i R$$

é um quociente de B^{ab} (como \mathbb{Z} -módulo), sendo, portanto, finitamente gerado (como z -módulo).

Mas isso é uma contradição, pois $R \neq 0$.

Suponha que $k_1 = 2$.

Nesse caso, $\overline{B^{ab}}$ não é necessariamente um quociente de B^{ab} , pois não temos que $I' = 0$. Considere B^{ab} como um \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial. Então, seja

$$L := \{i \in \mathbb{Z} \mid i \equiv -2 \pmod{2l+1}\}$$

e defina o \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial

$$V := \frac{\overline{B^{ab}}}{\langle \{\hat{v}_i\}_{i \in L} \rangle}.$$

Como

$$I' \subset \langle \{\hat{v}_i\}_{i \in L} \rangle,$$

por (3.2.16), então V é um quociente de B^{ab} (como \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial), e, portanto, tem dimensão finita.

Note que, como $k_1 = 2$, temos que

$$R = \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}]}{(1+x)} \simeq \mathbb{Z}_{k_2},$$

onde $x = -1$ em R . Logo,

$$V \simeq \frac{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} e_i \mathbb{Z}_{k_2}}{\langle \{\hat{v}_i\}_{i \in L} \rangle}.$$

Seja

$$\Lambda := \mathbb{Z} \setminus \{i \in \mathbb{Z} \mid i \equiv -1 \pmod{2l+1}\}.$$

Temos que, por (3.2.10) e (3.2.11),

$$V \simeq \bigoplus_{i \in \Lambda} e_i \mathbb{Z}_{k_2}.$$

Como Λ é infinito, temos que V tem dimensão infinita, o que é uma contradição. □

Teorema 3.2.3. *Seja $G = G(k_1, k_2)$ o grupo de Artin associado ao grafo*

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{2} & w \\ \left. \vphantom{u} \right|_{2k_1} & & \left. \vphantom{w} \right|_{2k_2} \\ v & \xrightarrow{2} & t \end{array}$$

tal que k_1, k_2 são inteiros positivos, com $k_1, k_2 > 1$ e $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ tal que

$$\chi(u) = 1 = -\chi(v), \quad \chi(w) = \frac{p}{q} = -\chi(t),$$

onde p, q são inteiros coprimos.

Então, $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$

Demonstração. Seja $N := \ker \chi$. Pela imagem dos geradores de G por χ , vemos que χ é discreto. Pelo corolário 2.3.25, temos que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ se e somente se N é finitamente gerado (como grupo).

Suponha, então, que N é finitamente gerado. Chegaremos a uma contradição.

Por definição, G tem uma apresentação

$$G = \langle u, v, w, t \mid (uv)^{k_1} = (vu)^{k_1}, (wt)^{k_2} = (tw)^{k_2}, vt = tv, uw = wu \rangle$$

Podemos supor que os k_i são primos, pelo corolário 2.3.26.

Defina

$$x_0 := uv, \quad y_0 := wt, \quad z_0 = u^p w^{-q}$$

Veremos que $N = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle^G$.

Seja $\mathcal{N} := \langle x_0, y_0, z_0 \rangle^G \triangleleft N$. Temos que

$$\frac{G}{\mathcal{N}} = \langle u, v, w, t \mid \text{relações de } G, uv = wt = u^p w^{-q} = 1 \rangle.$$

Logo,

$$\frac{G}{\mathcal{N}} = \langle u, w \mid uw = wu, u^p = w^q \rangle.$$

Sabemos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\alpha p + \beta q = 1 \Leftrightarrow \alpha \frac{p}{q} + \beta = \frac{1}{q}.$$

Assim, se definimos

$$\gamma = u^\beta w^\alpha \in \frac{G}{\mathcal{N}},$$

temos que, em $\frac{G}{\mathcal{N}}$,

$$\gamma^p = u^{p\beta} w^{p\alpha} = w^{q\beta} w^{p\alpha} = w, \quad \gamma^q = u^{q\beta} w^{q\alpha} = u^{q\beta} w^{p\alpha} = u,$$

e, portanto,

$$\frac{G}{\mathcal{N}} = \langle \gamma \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

Como χ é discreto, temos, pelo lema 2.1.3, que $N = \mathcal{N} e$

$$G = N \rtimes \langle \gamma \rangle.$$

Isso mostra que

$$x_i := x_0^{\gamma^i}, \quad y_i := y_0^{\gamma^i}, \quad z_i := z_0^{\gamma^i}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

são geradores de N como subgrupo de G .

Precisamos agora traduzir as relações de G para a apresentação de N que usaremos.

Primeiramente, note que $uw = wu$ implica:

1.

$$\gamma^p = u^{p\beta} w^{p\alpha} = u^{p\beta} w^{1-q\beta} = w u^{p\beta} w^{-q\beta} = w z_0^\beta$$

2.

$$\gamma^q = u^{q\beta} w^{q\alpha} = u^{1-p\alpha} w^{q\alpha} = u z_0^{-\alpha}$$

3.

$$z_0 \gamma = \gamma z_0.$$

Além disso, vale a recíproca; os itens 1,2,3 acima implicam $uw = wu$:

$$uw = (\gamma^q z_0^\alpha)(\gamma^p z_0^{-\beta}) = (\gamma^p z_0^{-\beta})(\gamma^q z_0^\alpha) = wu.$$

Note que a terceira equação acima também implica

$$z_i = z_0 =: z, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (3.2.18)$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} u &= \gamma^q z^\alpha, & w &= \gamma^p z^{-\beta} \\ v &= u^{-1} x_0 = z^{-\alpha} \gamma^{-q} x_0, & t &= w^{-1} y_0 = z^\beta \gamma^{-p} y_0. \end{aligned}$$

Usando as equações acima, é fácil traduzir as outras relações de G :

$$\begin{aligned} (uv)^{k_1} = (vu)^{k_1} &\Leftrightarrow (\gamma^q z^\alpha z^{-\alpha} \gamma^{-q} x_0)^{k_1} = (z^{-\alpha} \gamma^{-q} x_0 \gamma^q z^\alpha)^{k_1} \\ &\Leftrightarrow x_0^{k_1} = z^{-\alpha} x_q^{k_1} z^\alpha \Leftrightarrow x_i^{k_1} = z^{-\alpha} x_{i+q}^{k_1} z^\alpha \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned} (wt)^{k_2} = (tw)^{k_2} &\Leftrightarrow (\gamma^p z^{-\beta} z^\beta \gamma^{-p} y_0)^{k_2} = (z^\beta \gamma^{-p} y_0 \gamma^p z^{-\beta})^{k_2} \\ &\Leftrightarrow y_0^{k_2} = z^\beta y_p^{k_2} z^{-\beta} \Leftrightarrow y_i^{k_2} = z^\beta y_{i+p}^{k_2} z^{-\beta} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} vt = tv &\Leftrightarrow z^{-\alpha} \gamma^{-q} x_0 z^\beta \gamma^{-p} y_0 = z^\beta \gamma^{-p} y_0 z^{-\alpha} \gamma^{-q} x_0 \\ &\Leftrightarrow z^{-\alpha} x_q z^\beta y_{p+q} \gamma^{-p-q} = z^\beta y_p z^{-\alpha} x_{p+q} \gamma^{-p-q} \\ &\Leftrightarrow z^{-\alpha} x_q z^\beta y_{p+q} = z^\beta y_p z^{-\alpha} x_{p+q} \\ &\Leftrightarrow x_{p+q} = z^\alpha y_p^{-1} z^{-\alpha-\beta} x_q z^\beta y_{p+q} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \\ &\Leftrightarrow x_{i+p} = z^\alpha y_{i+p-q}^{-1} z^{-\alpha-\beta} x_i z^\beta y_{i+p} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

onde a segunda equivalência da última equação foi obtida conjugando as potências de γ , deslocando-as para a direita; e a última equivalência de cada uma das três equações foi obtida conjugando os dois lados de cada equação por $\gamma^i, \gamma^i, \gamma^{i-q}$, respectivamente.

Usando as equações (3.2.18), (3.2.19), (3.2.20), (3.2.21), temos a seguinte apresentação para N :

$$\begin{aligned} N = \langle \{x_i, y_i, z\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid &x_i^{k_1} = z^{-\alpha} x_{i+q}^{k_1} z^\alpha, y_i^{k_2} = z^\beta y_{i+p}^{k_2} z^{-\beta}, \\ &x_{i+p} = z^\alpha y_{i+p-q}^{-1} z^{-\alpha-\beta} x_i z^\beta y_{i+p}, i \in \mathbb{Z} \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Por hipótese, N é finitamente gerado, logo

$$\bar{N} := \frac{N}{\langle \{x_i^{k_1}, y_i^{k_2}\}_{i \in \mathbb{Z}} \cup \{z\} \rangle^N}$$

também o é. Note que, por (3.2.22),

$$\bar{N} = \langle \{x_i, y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_i^{k_1} = 1, y_i^{k_2} = 1, x_{i+p} = y_{i+p-q}^{-1} x_i y_{i+p}, i \in \mathbb{Z} \rangle. \quad (3.2.23)$$

Defina os grupos

$$K_1 := \langle \{x_i\}_{0 \leq i \leq p-1} \mid x_i^{k_1} = 1, 0 \leq i \leq p-1 \rangle = \\ *_{0 \leq i \leq p-1} \langle x_i \mid x_i^{k_1} = 1 \rangle \simeq *_{0 \leq i \leq p-1} \mathbb{Z}_{k_1},$$

$$K := \langle \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid y_i^{k_2} = 1, i \in \mathbb{Z} \rangle = *_{i \in \mathbb{Z}} \langle y_i \mid y_i^{k_2} = 1 \rangle \simeq *_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{k_2},$$

$$M := K * K_1,$$

$$D := \mathbb{Z}_{k_1},$$

$$A := K * D.$$

Note que podemos escrever $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ como subconjunto de M , usando (3.2.21).

Levando isso em conta, podemos descrever \bar{N} como o seguinte quociente de M :

$$\pi : M \twoheadrightarrow \frac{M}{\langle \{x_i^{k_1}\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle^M} \simeq \bar{N}.$$

Pelo lema 2.1.4, temos que, para cada $i \in \mathbb{Z}$, existem únicos $\tilde{x}_i \in K_1$, $v_i \in K^{K_1}$ tais que

$$x_i = \tilde{x}_i v_i.$$

Note que, se $0 \leq i \leq p-1$, então $x_i = \tilde{x}_i$ e $v_i = e_M$.

Além disso, por (3.2.23), temos que

$$x_{i+p} = y_{i+p-q}^{-1} x_i y_{i+p}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo $x_i = \tilde{x}_i v_i$ na equação acima, temos que

$$\tilde{x}_{i+p} v_{i+p} = y_{i+p-q}^{-1} \tilde{x}_i v_i y_{i+p}, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

que é equivalente a

$$\tilde{x}_{i+p}v_{i+p} = \tilde{x}_i (y_{i+p-q}^{-1})^{\tilde{x}_i^{-1}} v_i y_{i+p}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Como

$$\tilde{x}_i \in K_1, \quad (y_{i+p-q}^{-1})^{\tilde{x}_i^{-1}} v_i y_{i+p} \in K^{K_1},$$

e, pelo lema 2.1.4, essa decomposição é única, temos que

$$\tilde{x}_{i+p} = \tilde{x}_i = x_{\bar{i}}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.24)$$

onde \bar{i} é o representante de i modulo p tal que

$$0 \leq \bar{i} \leq p-1.$$

Queremos agora construir um epimorfismo

$$\theta : M \rightarrow A$$

de modo que $\theta|_K = \text{Id}_K$ e θ projete K_1 em \mathbb{Z}_{k_1} .

Levando isso em consideração e considerando \mathbb{Z}_{k_1} como subgrupo de A , definimos θ nos geradores de K_1 da seguinte maneira:

$$\theta(x_0) = \theta(x_1) = \dots = \theta(x_{p-1}) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{k_1},$$

de forma que, por (3.2.24),

$$\theta(\tilde{x}_i) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{k_1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Usando a decomposição $x_i = \tilde{x}_i v_i$, temos que

$$\begin{aligned} \theta(x_i)^{k_1} &= \underbrace{(\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i)) (\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i)) \dots (\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i))}_{k_1 \text{ termos}} \\ &= \theta(\tilde{x}_i)^{k_1} \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^{k_1-1}} \right) \dots \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^2} \right) \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)} \right) \left(\theta(v_i)^1 \right) \\ &= \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^{k_1-1}} \right) \dots \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^2} \right) \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)} \right) \left(\theta(v_i)^1 \right). \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Defina

$$x := \bar{1} \in \mathbb{Z}_{k_1}.$$

Então, temos que

$$\theta(x_i)^{k_1} = \left(\theta(v_i)^{x^{k_1-1}} \right) \dots \left(\theta(v_i)^{x^2} \right) \left(\theta(v_i)^x \right) \left(\theta(v_i)^1 \right). \quad (3.2.26)$$

Considere agora a projeção canônica

$$\delta : A \rightarrow \frac{A}{\langle \{\theta(x_i)^{k_1}\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle^A} =: \bar{A}.$$

O epimorfismo $\theta : M \twoheadrightarrow A$ induz um epimorfismo

$$\bar{\theta} : \bar{N} \twoheadrightarrow \bar{A},$$

conforme o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & A \\ \pi \downarrow & & \downarrow \delta \\ \bar{N} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & \bar{A} \end{array}$$

Portanto, \bar{A} é finitamente gerado.

Observe que K^A é um subgrupo de índice finito de A , já que

$$\frac{A}{K^A} \simeq D \simeq \mathbb{Z}_{k_1}. \quad (3.2.27)$$

Então,

$$B := \delta(K^A)$$

é um subgrupo de índice finito de \bar{A} . Ou seja, B é finitamente gerado. Veremos que isso gera uma contradição.

Pelo lema 2.1.5, temos que

$$K^A = *_{i \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}_{k_1}} \langle y_i^d \rangle \leq A$$

Note que como x é gerador de \mathbb{Z}_{k_1} como grupo, então $\mathbb{Z}_{k_2}[D] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[x]$, como álgebras de grupos (com coeficientes em \mathbb{Z}_{k_2}).

Considere B^{ab} como sendo a abelianização de B . O \mathbb{Z} -módulo B^{ab} é finitamente gerado, pois B é finitamente gerado. Veremos B^{ab} como sendo um $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -módulo, gerado pelas classes de

$$e_i := \delta \theta y_i, \quad i \in \mathbb{Z},$$

onde a ação de \mathbb{Z}_{k_1} é dada por conjugação.

Por (3.2.26), temos que, como $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -módulos,

$$B^{ab} \simeq \frac{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} e_i (\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}])}{I},$$

de modo que $e_i \mathbb{Z}_{k_2}[D] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[D]$ e I é o $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -submódulo gerado por

$$(\delta \theta v_i)(x^{k_1-1} + \cdots + x + 1), \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Defina

$$R := \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}]}{(1 + x + \cdots + x^{k_1-1})},$$

que é um anel que também é um \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial de dimensão $k_1 - 1 \geq 1$.

Como a imagem de I em $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} e_i R$ é nula, temos que

$$\overline{B^{ab}} := \oplus_{i \in \mathbb{Z}} e_i R$$

é um quociente de B^{ab} (como \mathbb{Z} -módulo), sendo, portanto, finitamente gerado (como \mathbb{Z} -módulo).

Mas isso é uma contradição, pois $R \neq 0$.

□

3.3 Demonstração

Nessa seção, provaremos o teorema 3.1.2, que é o objetivo do capítulo.

Teorema (3.1.2). Seja G um grupo de Artin de posto 1, associado ao grafo \mathcal{G} . Então,

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \mathcal{L}(\chi) \text{ é um subgrafo conexo e dominante de } \mathcal{G}\}.$$

Demonstração. Seja χ um caractere discreto de G tal que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ é conexo e $\mathcal{L}(\chi)$ é desconexo. Pelo corolário 2.3.17, basta provar que $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$.

Suponha então que $[\chi] \in \Sigma^1(G)$. Chegaremos a uma contradição.

Primeiro, apagamos todos os vértices $v \in V(\mathcal{G})$ tais que $\chi(v) = 0$ bem como todas arestas às quais eles pertençam, substituindo o grafo \mathcal{G} por esse novo grafo, o grupo G pelo grupo de Artin associado ao novo grafo e χ pelo caractere induzido no novo grupo via quociente. Nossas hipóteses ainda valem: $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$ é conexo, $\mathcal{L}(\chi)$ é desconexo (já que esses dois subgrafos são independentes dos vértices com χ -valor nulo) e $[\chi] \in \Sigma^1(G)$ (pelo corolário 2.3.26).

Além disso, o novo grafo ou é uma árvore ou $\pi_1(\mathcal{G}) \simeq \mathbb{Z}$. Se o novo grafo é uma árvore, pelo teorema 2.3.22 temos uma contradição. Portanto, ainda temos que G é um grupo de Artin de posto 1.

Equivalentemente, podemos assumir que \mathcal{G} não possui vértices v tais que $\chi(v) = 0$. Note que isso significa que agora $\mathcal{G} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\chi)$, e, portanto, estamos assumindo \mathcal{G} como conexo.

Como $\pi_1(\mathcal{G}) \simeq \mathbb{Z}$, temos que \mathcal{G} contém um laço reduzido

$$\gamma = e_1 \cdots e_n$$

tal que

$$\mathcal{G} = \gamma \cup T_1 \cup \cdots \cup T_n,$$

onde T_i , $i = 1, \dots, n$ são árvores disjuntas, de modo que

$$T_i \cap \gamma = \{\sigma e_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Note que é possível que T_i seja composta de apenas um vértice.

Seja $G_C \simeq \mathbb{Z}$ o grupo de Artin associado ao grafo formado apenas pelo vértice $v_1 = \sigma(e_1)$. Sejam G_A o grupo de Artin associado ao grafo

$$\mathcal{G}_A := \gamma \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n$$

e G_B o grupo de Artin associado à árvore T_1 . É fácil ver, pela definição de grupos de Artin, que

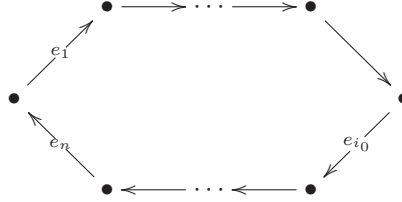
$$G \simeq G_A *_{G_C} G_B.$$

Sejam χ_A, χ_B, χ_C as restrições de χ a G_A, G_B, G_C , respectivamente. Temos que χ_C é não-nulo, já que \mathcal{G} não possui vértices de χ -valor nulo. Logo, pelo teorema 2.3.10, temos que $[\chi_A] \in \Sigma^1(G_A)$ e $[\chi_B] \in \Sigma^1(G_B)$.

Como $\mathcal{L}(\chi)$ é desconexo, temos que ou $\mathcal{L}(\chi_A)$ é desconexo ou o $\mathcal{L}(\chi_B)$ é desconexo. Mas, pelo teorema 2.3.22, temos que $\mathcal{L}(\chi_B)$ é conexo, já que $[\chi_B] \in \Sigma^1(G_B)$ e T_1 é uma árvore. Ou seja, $\mathcal{L}(\chi_A)$ é desconexo.

Seja G_0 o grupo de Artin associado ao laço reduzido $\mathcal{G}_0 := \gamma$, e $\chi_0 : G_0 \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição de χ a G_0 . Usando o mesmo raciocínio acima para T_2, \dots, T_n , obtemos que $[\chi_0] \in \Sigma^1(G_0)$ e $\mathcal{L}(\chi_0)$ é desconexo.

Como $\mathcal{L}(\chi_0)$ é desconexo, então $\mathcal{G}_0 = e_1 \cdots e_n$ tem pelo menos duas arestas mortas, digamos que sejam e_1 e e_{i_0} , sem perda de generalidade, como no diagrama abaixo.



Seja \mathcal{G}_1 o grafo obtido de \mathcal{G}_0 após trocar os rótulos de todas as outras arestas pares (exceto e_1 e e_{i_0}) por 2. Seja G_1 o grupo de Artin associado a \mathcal{G}_1 e $\chi_1 : G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ o caractere induzido por χ_0 .

Pelo corolário 2.3.26, temos que $[\chi_1] \in \Sigma^1(G_1)$.

Temos agora quatro possibilidades:

1. O grafo \mathcal{G}_1 não possui arestas de rótulo 2;
2. O grafo \mathcal{G}_1 possui uma aresta e_j de rótulo 2 com $1 < j < i_0$ e não possui nenhuma aresta e_k de rótulo 2 com $i_0 < k \leq n$;
3. O grafo \mathcal{G}_1 não possui nenhuma aresta e_j de rótulo 2 com $1 < j < i_0$ e possui uma aresta e_k de rótulo 2 com $i_0 < k \leq n$;
4. O grafo \mathcal{G}_1 possui uma aresta e_j de rótulo 2 com $1 < j < i_0$ e uma aresta e_k de rótulo 2 com $i_0 < k \leq n$.

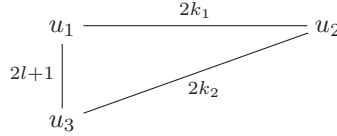
Caso 1: Nesse caso, as únicas arestas pares de \mathcal{G}_1 são e_1 e e_{i_0} . Como \mathcal{G}_1 é simplicial, ele possui pelo menos uma aresta ímpar, digamos que seja e_{i_1} , com $1 < i_1 \leq n$.

Seja \mathcal{G}_2 o grafo obtido de \mathcal{G}_1 , após identificar os extremos de todas as outras arestas ímpares de \mathcal{G}_1 (exceto e_{i_1}). Isso não fará o grafo deixar de ser simplicial, já que ele é um laço reduzido.

Seja G_2 o grupo de Artin associado a \mathcal{G}_2 . Pela observação 2.3.3, G_2 é um quociente de G_1 e χ_1 induz um caractere $\chi_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Pelo corolário 2.3.26, temos que $[\chi_2] \in \Sigma^1(G_2)$.

Note que \mathcal{G}_2 tem apenas três arestas, e_1 , e_{i_0} e e_{i_1} . Logo, \mathcal{G}_2 é da forma



com k_1, k_2, l sendo inteiros positivos, $k_1, k_2 > 1$ e

$$\chi_2(u_1) = \chi_2(u_3) = -\chi_2(u_2).$$

Portanto, pelo teorema 3.2.2 temos que $[\chi_2] \in \Sigma^1(G_2)^c$, o que é uma contradição.

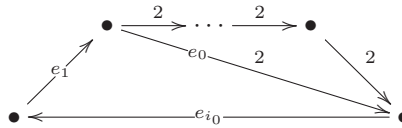
Caso 2: Para esse caso, primeiramente geramos um outro grafo \mathcal{G}_2 , obtido de \mathcal{G}_1 após identificar todos os extremos de arestas ímpares e apagar essas arestas. Seja G_2 o grupo de Artin associado a \mathcal{G}_2 (que é simplicial, pois \mathcal{G}_1 é um laço reduzido). Novamente pela observação 2.3.3, temos que G_2 é um quociente de G_1 e χ_1 induz um caractere $\chi_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pelo corolário 2.3.26, $[\chi_2] \in \Sigma^1(G_2)$.

Temos que \mathcal{G}_2 é um laço reduzido da forma

$$\mathcal{G}_2 = e_1 e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_m} e_{i_0}, \quad \text{com } 1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_m < i_0,$$

sendo $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_m}$ arestas de rótulo 2 e e_1, e_{i_0} arestas mortas, como abaixo.

Seja \mathcal{G}_3 o grafo obtido de \mathcal{G}_2 após adicionar uma aresta e_0 , com rótulo 2, tal que $\sigma(e_0) = \tau(e_1)$ e $\tau(e_0) = \sigma(e_{i_0})$, como abaixo.



Temos que G_3 , o grupo de Artin associado a \mathcal{G}_3 , é obviamente um quociente de G_2 e χ_2 induz um caractere $\chi_3 : G_3 \rightarrow \mathbb{R}$. Pelo corolário 2.3.26, temos que $[\chi_3] \in \Sigma^1(G_3)$.

Considere os laços reduzidos

$$\mathcal{G}'_A := e_1 e_0 e_{i_0}, \quad \mathcal{G}'_B := e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_m} \bar{e}_0,$$

e seja \mathcal{G}'_C a aresta e_0 , todos subgrafos de \mathcal{G}_3 . Sejam G'_A, G'_B, G'_C os grupos de Artin associados a $\mathcal{G}'_A, \mathcal{G}'_B, \mathcal{G}'_C$, respectivamente, todos (isomorfos a) subgrupos

de G_3 . Sejam $\chi'_A, \chi'_B, \chi'_C$ as restrições de χ_3 a G'_A, G'_B, G'_C , respectivamente, todos não-nulos, pelo início da demonstração. Temos que

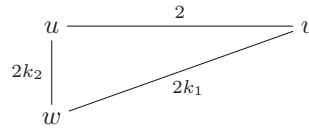
$$G'_C \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

é um grupo abeliano, e, portanto, $[\chi'_C] \in \Sigma^1(G'_C) = S(G'_C)$, pelo teorema 2.2.15.

Além disso, note que \mathcal{G}'_C é um subgrafo completo de \mathcal{G}' , que só possui arestas pares.

Logo, pelo teorema 2.3.11, temos que $[\chi'_A] \in \Sigma^1(G'_A)$.

Note que \mathcal{G}'_A é da forma



com k_1, k_2 sendo inteiros positivos maiores que 1 e

$$\chi'_A(u) = \chi'_A(v) = -\chi'_A(w).$$

Portanto, pelo teorema 3.2.1, temos que

$$[\chi'_A] \in \Sigma^1(G'_A)^c,$$

o que é uma contradição.

Caso 3:

O caso 3 é análogo ao caso 2.

Caso 4:

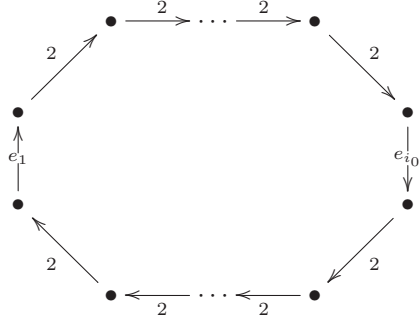
Como no caso 2, definimos \mathcal{G}_2 como sendo o grafo obtido de \mathcal{G}_1 após identificar todos os extremos de arestas ímpares e G_2 como sendo o grupo de Artin associado a \mathcal{G}_2 . Novamente temos que G_2 é quociente de G_1 e definimos $\chi_2 : G_2 \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo o caractere induzido por χ_1 . Pelo corolário 2.3.26, temos que $[\chi_2] \in \Sigma^1(G_2)$.

Temos então que \mathcal{G}_2 é um laço reduzido da forma

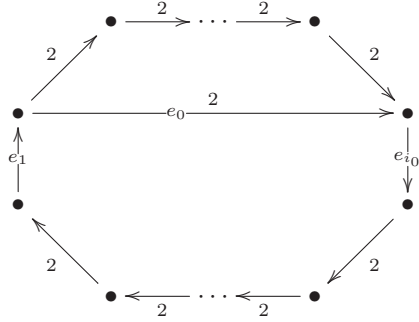
$$\mathcal{G}_2 = e_1 e_{r_1} e_{r_2} \cdots e_{r_p} e_{i_0} e_{s_1} e_{s_2} \cdots e_{s_q},$$

$$\text{com } 1 < r_1 < r_2 < \cdots < r_p < i_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_q \leq n,$$

onde as arestas $e_{r_1}, e_{r_2}, \dots, e_{r_p}, e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_q}$ têm rótulo igual a 2 e as arestas e_1, e_{i_0} são arestas mortas, como abaixo.



Analogamente ao caso 2, seja \mathcal{G}_3 o grafo \mathcal{G}_2 acrescido de uma aresta e_0 , com rótulo 2, tal que $\sigma(e_0) = \tau(e_1)$ e $\tau(e_0) = \sigma(e_{i_0})$, como abaixo.



Temos que G_3 , o grupo de Artin associado a \mathcal{G}_3 , é obviamente um quociente de G_2 e χ_2 induz um caractere $\chi_3 : G_3 \rightarrow \mathbb{R}$. Pelo corolário 2.3.26, temos que $[\chi_3] \in \Sigma^1(G_3)$.

Considere os laços reduzidos

$$\mathcal{G}'_A := e_1 e_0 e_{i_0} e_{s_1} e_{s_2} \cdots e_{s_q}, \quad \mathcal{G}'_B := e_{r_1} e_{r_2} \cdots e_{r_p} \bar{e}_0,$$

e seja \mathcal{G}'_C a aresta e_0 , todos subgrafos de \mathcal{G}_3 . Sejam G'_A, G'_B, G'_C os grupos de Artin associados a $\mathcal{G}'_A, \mathcal{G}'_B, \mathcal{G}'_C$, respectivamente, todos (isomorfos a) subgrupos de G_3 . Sejam $\chi'_A, \chi'_B, \chi'_C$ as restrições de χ_3 a G'_A, G'_B, G'_C , respectivamente, todos não-nulos, pelo início da demonstração. Temos que

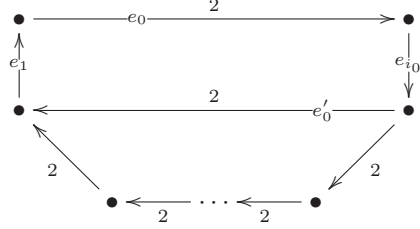
$$G'_C \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

é um grupo abeliano, e, portanto, $[\chi'_C] \in \Sigma^1(G'_C) = S(G'_C)$, pelo teorema 2.2.15.

Além disso, note que \mathcal{G}'_C é um subgrafo completo de \mathcal{G}' . Além disso, \mathcal{G}' só possui arestas pares.

Logo, pelo teorema 2.3.11, temos que $[\chi'_A] \in \Sigma^1(G'_A)$.

Agora seja \mathcal{G}_4 o grafo obtido a partir de \mathcal{G}'_A após adicionar uma aresta e'_0 , de rótulo 2, tal que $\sigma(e'_0) = \tau(e_{i_0})$ e $\tau(e'_0) = \sigma(e_1)$, como abaixo.



Seja G_4 o grupo de Artin baseado em \mathcal{G}_4 , que é claramente um quociente de G_3 . Seja também $\chi_4 : G_4 \rightarrow \mathbb{R}$ o caractere induzido por χ_3 . Pelo corolário 2.3.26, temos que $[\chi_4] \in \Sigma^1(G_4)$.

Considere os laços reduzidos

$$\mathcal{G}_A'' := e_1 e_0 e_{i_0} e_0', \quad \mathcal{G}_B'' := e_{s_1} e_{s_2} \cdots e_{s_q} \bar{e}_0'',$$

e seja \mathcal{G}_C'' a aresta e_0' , todos subgrafos de \mathcal{G}_4 . Sejam G_A'', G_B'', G_C'' os grupos de Artin associados a $\mathcal{G}_A'', \mathcal{G}_B'', \mathcal{G}_C''$, respectivamente, todos (isomorfos a) subgrupos de G_4 .

Sejam $\chi_A'', \chi_B'', \chi_C''$ as restrições de χ_4 a G_A'', G_B'', G_C'' , respectivamente, todos não-nulos, pelo início da demonstração. Temos que

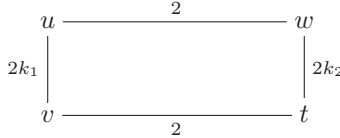
$$G_C'' \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

é um grupo abeliano, e, portanto, $[\chi_C''] \in \Sigma^1(G_C'') = S(G_C'')$, pelo teorema 2.2.15.

Note também que \mathcal{G}_C'' é um subgrafo completo de \mathcal{G}'' e que \mathcal{G}'' só possui arestas pares.

Logo, pelo teorema 2.3.11, temos que $[\chi_A''] \in \Sigma^1(G_A'')$.

Note que \mathcal{G}_A'' é da forma



com $k_1, k_2 > 1$ e

$$\chi_A''(u) = -\chi_A''(v), \quad \chi_A''(w) = -\chi_A''(t).$$

Como χ_A'' é discreto (já que, pelo início da demonstração, χ é discreto), temos, pelo teorema 3.2.3, que

$$[\chi_A''] \in \Sigma^1(G_A'')^c,$$

o que é uma contradição.

Portanto, temos que

$$[\chi] \in \Sigma^1(G)^c.$$

□

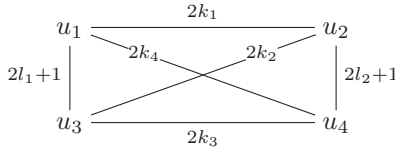
Capítulo 4

Outros resultados

4.1 Grafos de quatro vértices

Conforme o grupo fundamental do grafo de um grupo de Artin se torna mais complexo, os cálculos que o método utilizado em nosso trabalho geram se tornam muito mais difíceis. O próximo teorema mostra isso: ele surgiu de uma tentativa de provar a conjectura 2.3.16 para o caso mais geral de quatro vértices - isto é, o grafo completo. Note que, além da demonstração ser bem mais trabalhosa que os outros casos, ainda tivemos de adicionar algumas hipóteses sobre os rótulos das arestas.

Teorema 4.1.1. *Seja $G = G(k_1, k_2, k_3, k_4, l_1, l_2)$ o grupo de Artin associado ao grafo*



tal que $k_1, k_2, k_3, k_4, l_1, l_2$ são inteiros positivos, com $k_1, k_2, k_3 > 1$, $k_1|k_4$, $k_3|k_4$ e $[\chi] \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ tal que

$$-1 = \chi(u_1) = \chi(u_3) = -\chi(u_2) = -\chi(u_4).$$

Além disso, suponha que k_1, k_3 não são ambas potências de 2.

Então, $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$

Demonstração. Por definição, G tem uma apresentação

$$\begin{aligned} G = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \mid & (u_1u_2)^{k_1} = (u_2u_1)^{k_1}, (u_2u_3)^{k_2} = (u_3u_2)^{k_2}, \\ & (u_3u_4)^{k_3} = (u_4u_3)^{k_3}, (u_1u_3)^{l_1}u_1 = (u_3u_1)^{l_1}u_3, \\ & (u_2u_4)^{l_2}u_2 = (u_4u_2)^{l_2}u_4, (u_1u_4)^{k_4} = (u_4u_1)^{k_4} \rangle. \end{aligned}$$

Pelo corolário 2.3.26, podemos supor que k_1, k_2, k_3 são primos e que $k_4 = \text{mmc}(k_1, k_3)$.

Pelo corolário 2.3.25, basta provar que $N := \ker \chi$ não é finitamente gerado. Suponhamos o contrário, que N é finitamente gerado.

Defina

$$x_0 := u_1 u_2, \quad y_0 := u_2 u_3, \quad z_0 := u_3 u_4,$$

ou seja,

$$u_1 = x_0 u_2^{-1}, \quad u_3 = u_2^{-1} y_0, \quad u_4 = y_0^{-1} u_2 z_0.$$

Então, $N = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle^G$. Defina, também,

$$x_i := x_0^{u^i}, \quad y_i := y_0^{u^i}, \quad z_i := z_0^{u^i}, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

que são geradores de N como subgrupo de G .

Devido ao fato da demonstração do teorema 4.1.1 ser longa, precisaremos de vários resultados auxiliares, que serão enunciados como lemas, dentro do corpo da demonstração.

O lema abaixo traduz as relações de G para palavras compatíveis com a apresentação de N que usaremos.

Lema 4.1.2. *Com a notação acima, temos que:*

$$(u_1 u_2)^{k_1} = (u_2 u_1)^{k_1} \Leftrightarrow x_i^{k_1} = x_0^{k_1}, \quad \forall i, \quad (4.1.1)$$

$$(u_2 u_3)^{k_2} = (u_3 u_2)^{k_2} \Leftrightarrow y_i^{k_2} = y_0^{k_2}, \quad \forall i, \quad (4.1.2)$$

$$(u_3 u_4)^{k_3} = (u_4 u_3)^{k_3} \Leftrightarrow z_i^{k_3} = (z_{i-1}^{y_i})^{k_3}, \quad \forall i, \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} (u_1 u_3)^{l_1} u_1 &= (u_3 u_1)^{l_1} u_3 \Leftrightarrow \\ & x_i y_{i+2} x_{i+2} y_{i+4} x_{i+4} \cdots y_{i+2l_1} x_{i+2l_1} = \\ & y_{i+1} x_{i+1} y_{i+3} x_{i+3} \cdots y_{i+2l_1-1} x_{i+2l_1-1} y_{i+2l_1+1}, \quad \forall i, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} (u_2 u_4)^{l_2} u_2 &= (u_4 u_2)^{l_2} u_4 \Leftrightarrow \\ & y_{i+2l_2}^{-1} z_{i+2l_2-1} y_{i+2l_2-2}^{-1} \cdots y_{i+2}^{-1} z_{i+1} = \\ & y_{i+2l_2+1}^{-1} z_{i+2l_2} y_{i+2l_2-1}^{-1} \cdots y_{i+1}^{-1} z_i, \quad \forall i, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$(u_1 u_4)^{k_4} = (u_4 u_1)^{k_4} \Leftrightarrow (x_{i+1} y_{i+2}^{-1} z_{i+1})^{k_4} (x_i^{-1} z_i^{-1} y_{i+1})^{k_4} = 1, \quad \forall i. \quad (4.1.6)$$

Portanto, N tem uma apresentação

$$N = \langle \{x_i, y_i, z_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6), i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Demonstração. Provaremos cada equivalência separadamente:

(4.1.1)

$$\begin{aligned} (u_1 u_2)^{k_1} &= (u_2 u_1)^{k_1} \Leftrightarrow \\ x_0^{k_1} &= (x_0^{u_1})^{k_1} = \left(x_0^{x_0 u_2^{-1}}\right)^{k_1} = \left(x_0^{u_2^{-1}}\right)^{k_1} = x_{-1}^{k_1} \Leftrightarrow \\ & x_i^{k_1} = x_0^{k_1} \quad \forall i \end{aligned}$$

(4.1.2)

$$(u_2 u_3)^{k_2} = (u_3 u_2)^{k_2} \Leftrightarrow y_0^{k_2} = (y_0^{u_2})^{k_2} = y_1^{k_2} \Leftrightarrow y_i^{k_2} = y_0^{k_2} \quad \forall i$$

(4.1.3)

$$\begin{aligned} (u_3 u_4)^{k_3} &= (u_4 u_3)^{k_3} \Leftrightarrow \\ z_0^{k_3} &= (z_0^{u_3})^{k_3} = \left(z_0^{u_2^{-1} y_0}\right)^{k_3} \Leftrightarrow \\ z_i^{k_3} &= \left(z_0^{u_2^{-1} y_0 u_2^i}\right)^{k_3} = \left(z_0^{y_1 u_2^{i-1}}\right)^{k_3} = \left(\left(z_0^{u_2^{i-1}}\right)^{\left(y_1^{u_2^{i-1}}\right)}\right)^{k_3} = \left(z_{i-1}^{y_1}\right)^{k_3} \\ & \qquad \qquad \qquad \forall i \end{aligned}$$

Como as próximas duas relações são mais extensas, desenvolveremos cada termo das equações separadamente.

(4.1.4) Agrupando fatores u_2 no começo do produto por meio de conjugações, temos

$$(u_1 u_3)^{l_1} u_1 = \left(x_0 u_2^{-1} u_2^{-1} y_0\right)^{l_1} x_0 u_2^{-1} = x_0 y_2 x_2 y_4 \cdots x_{2l_1-2} y_{2l_1} x_{2l_1} u_2^{-2l_1-1}$$

e

$$\begin{aligned} (u_3 u_1)^{l_1} u_3 &= \left(u_2^{-1} y_0 x_0 u_2^{-1}\right)^{l_1} u_2^{-1} y_0 = \\ & y_1 x_1 y_3 x_3 \cdots y_{2l_1-1} x_{2l_1-1} y_{2l_1+1} u_2^{-2l_1-1}. \end{aligned}$$

Igualando os dois termos resultantes acima, cancelando os fatores $u_2^{-2l_1-1}$ à direita de cada termo e conjugando a equação por u_2^i temos a equação desejada.

(4.1.5) Agrupando fatores u_2^{-1} no fim do produto por meio de conjugações, temos

$$(u_2 u_4)^{l_2} u_2 = \left(u_2 y_0^{-1} u_2 z_0\right)^{l_2} u_2 = u_2^{2l_2+1} y_{2l_2}^{-1} z_{2l_2-1} y_{2l_2-2}^{-1} z_{2l_2-3} \cdots y_2^{-1} z_1$$

e

$$\begin{aligned} (u_4 u_2)^{l_2} u_4 &= \left(y_0^{-1} u_2 z_0 u_2\right)^{l_2} y_0^{-1} u_2 z_0 = \\ & u_2^{2l_2+1} y_{2l_2+1}^{-1} z_{2l_2} y_{2l_2-1}^{-1} z_{2l_2-2} \cdots y_3^{-1} z_2 y_1^{-1} z_0. \end{aligned}$$

Igualando os dois termos resultantes acima, cancelando os fatores $u_2^{2l_2+1}$ à esquerda de cada termo e conjugando a equação por u_2^i temos a equação desejada.

(4.1.6)

$$\begin{aligned} (u_1 u_4)^{k_4} &= (u_4 u_1)^{k_4} \Leftrightarrow (u_1 u_4)^{k_4} (u_1^{-1} u_4^{-1})^{k_4} \Leftrightarrow \\ (x_0 u_2^{-1} y_0^{-1} u_2 z_0)^{k_4} (u_2 x_0^{-1} z_0^{-1} u_2^{-1} y_0)^{k_4} &= (x_0 y_1^{-1} z_0)^{k_4} (x_{-1}^{-1} z_{-1}^{-1} y_0)^{k_4} = 1 \end{aligned}$$

Conjugando a equação acima por u_2^{i+1} , temos a equação desejada. □

Defina agora o quociente de N :

$$\overline{N} := \langle N \mid x_0^{k_1} = 1, y_0^{k_2} = 1, z_0^{k_3} = 1 \rangle$$

Note que, em \overline{N} ,

$$x_i^{k_1} = y_i^{k_2} = z_i^{k_3} = 1, \quad \forall i,$$

por (4.1.1), (4.1.2) e (4.1.3).

Defina os grupos

$$\begin{aligned} K_1 &:= \langle x_0, x_1, \dots, x_{2l_1-1} \mid x_i^{k_1} = 1, i = 0, 1, \dots, 2l_1 - 1 \rangle \\ &= *_{0 \leq i \leq 2l_1-1} \langle x_i \mid x_i^{k_1} = 1 \rangle \simeq *_{0 \leq i \leq 2l_1-1} \mathbb{Z}_{k_1}, \end{aligned}$$

$$K := \langle \{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mid y_i^{k_2} = 1, i \in \mathbb{Z} \rangle = *_{i \in \mathbb{Z}} \langle y_i \mid y_i^{k_2} = 1 \rangle \simeq *_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{k_2},$$

$$\begin{aligned} K_3 &:= \langle z_0, z_1, \dots, z_{2l_2-1} \mid z_i^{k_3} = 1, i = 0, 1, \dots, 2l_2 - 1 \rangle \\ &= *_{0 \leq i \leq 2l_2-1} \langle z_i \mid z_i^{k_3} = 1 \rangle \simeq *_{0 \leq i \leq 2l_2-1} \mathbb{Z}_{k_3}, \end{aligned}$$

$$M := K_1 * K * K_3, \quad M_1 := K_1 * K, \quad M_3 := K * K_3,$$

$$D := \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_3}, \quad A := K * D.$$

Note que, usando (4.1.4), podemos escrever $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ como subconjunto de M_1 . Analogamente, usando (4.1.5), podemos escrever $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ como subconjunto de M_3 . Levando isso em conta, podemos descrever \overline{N} como o seguinte quociente de M :

$$\pi : M \twoheadrightarrow \frac{M}{\langle \{x_i^{k_1}, z_i^{k_3}, r_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle^M} \simeq \overline{N},$$

onde, devido a (4.1.6),

$$r_i := (x_{i+1}y_{i+2}^{-1}z_{i+1})^{k_4}(x_i^{-1}z_i^{-1}y_{i+1})^{k_4}. \quad (4.1.7)$$

Temos que \overline{N} é finitamente gerado, por ser quociente do grupo finitamente gerado N .

Para dar continuidade à demonstração, precisaremos de outro lema.

Lema 4.1.3. *Para todo i , temos que*

1. *existem únicos $\tilde{x}_i \in K_1$ e $v_i \in K^{K_1}$ tais que*

$$x_i = \tilde{x}_i v_i \in M_1.$$

Note que $\tilde{x}_i = x_i$ se $i = 0, 1, \dots, 2l_1 - 1$. Portanto,

$$v_i = 1, \quad \text{para } 0 \leq i \leq 2l_1 - 1. \quad (4.1.8)$$

Além disso, temos que

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-2}^{-1} \tilde{x}_{i-4}^{-1} \cdots \tilde{x}_{i-2l_1}^{-1} \tilde{x}_{i-2l_1+1} \tilde{x}_{i-2l_1+3} \cdots \tilde{x}_{i-1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.9)$$

$$v_i y_{i+1}^{-1} \in \langle \{y_j^{K_1}\}_{0 \leq j < i} \rangle, \quad \text{para } i \geq 2l_1, \quad (4.1.10)$$

$$(y_{i+1}^{\tilde{x}_i})^{-1} v_i \in \langle \{y_j^{K_1}\}_{i+2 \leq j \leq 2l_1-1} \rangle \quad \text{para } i < 0. \quad (4.1.11)$$

2. *existem únicos $\tilde{z}_i \in K_3$ e $w_i \in K^{K_3}$ tais que*

$$z_i = \tilde{z}_i w_i \in M_3.$$

Note que $\tilde{z}_i = z_i$ se $i = 0, 1, \dots, 2l_2 - 1$. Portanto,

$$w_i = 1, \quad \text{para } 0 \leq i \leq 2l_2 - 1. \quad (4.1.12)$$

Além disso, temos que

$$\tilde{z}_i = \tilde{z}_{i-1} \tilde{z}_{i-3} \cdots \tilde{z}_{i-2l_2+1} \tilde{z}_{i-2l_2}^{-1} \tilde{z}_{i-2l_2+2}^{-1} \cdots \tilde{z}_{i-2}^{-1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (4.1.13)$$

$$(y_{i+1}^{\tilde{z}_i})^{-1} w_i \in \langle \{y_j^{K_3}\}_{0 \leq j < i} \rangle, \quad \text{para } i \geq 2l_2, \quad (4.1.14)$$

$$(y_{i+1}^{\tilde{z}_i})^{-1} w_i \in \langle \{y_j^{K_3}\}_{i+2 \leq j \leq 2l_2-1} \rangle \quad \text{para } i < 0. \quad (4.1.15)$$

Demonstração. 1. Como \tilde{x}_i é a imagem de x_i via projeção canônica

$$M_1 = K_1 \cdot K^{K_1} \twoheadrightarrow \left(\frac{M_1}{K^{K_1}} \right) \simeq K_1,$$

temos, pelo lema 2.1.4, que existem únicos $\tilde{x}_i \in K_1$ e $v_i \in K^{K_1}$ tais que

$$x_i = \tilde{x}_i v_i \in M_1.$$

Pelo lema 2.1.4 e por (4.1.4), temos que

$$\tilde{x}_i \tilde{x}_{i+2} \cdots \tilde{x}_{i+2l_1} = \tilde{x}_{i+1} \tilde{x}_{i+3} \cdots \tilde{x}_{i+2l_1-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

↓

$$\tilde{x}_{i+2l_1} = (\tilde{x}_i \tilde{x}_{i+2} \cdots \tilde{x}_{2l_1-2})^{-1} \tilde{x}_{i+1} \tilde{x}_{i+3} \cdots \tilde{x}_{i+2l_1-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Transladando os índices por $-2l_1$, temos que

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-2}^{-1} \tilde{x}_{i-4}^{-1} \cdots \tilde{x}_{i-2l_1}^{-1} \tilde{x}_{i-2l_1+1} \tilde{x}_{i-2l_1+3} \cdots \tilde{x}_{i-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Seja $i \geq 2l_1$. Então, por (4.1.4), transladando os índices por $-2l_1$, temos que

$$\begin{aligned} x_i &= y_i^{-1} x_{i-2}^{-1} y_{i-2}^{-1} x_{i-4}^{-1} \cdots y_{i-2l_1+4}^{-1} x_{i-2l_1+2}^{-1} y_{i-2l_1+2}^{-1} x_{i-2l_1}^{-1} \\ &\quad \cdot y_{i-2l_1+1} x_{i-2l_1+1} y_{i-2l_1+3} x_{i-2l_1+3} \cdots x_{i-3} y_{i-1} x_{i-1} y_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Para facilitar a notação, considere ζ_j como sendo o elemento de K_1 formado pelo produto dos j últimos fatores do lado direito da equação (4.1.9), de forma que $\tilde{x}_i = \zeta_{2l_1}$.

Substituindo $x_j = \tilde{x}_j v_j$ em (4.1.16) e conjugando os fatores, da direita para a esquerda, de modo a “deslocar” os \tilde{x}_j para a esquerda, temos que

$$\begin{aligned} x_i &= \zeta_{2l_1} \left(y_i^{\zeta_{2l_1}} \right)^{-1} \left(v_{i-2}^{\zeta_{2l_1}} \right)^{-1} \left(y_{i-2}^{\zeta_{2l_1-1}} \right)^{-1} \left(v_{i-4}^{\zeta_{2l_1-2}} \right)^{-1} \cdots \\ &\quad \cdots \left(y_{i-2l_1+4}^{\zeta_{1+2}} \right)^{-1} \left(v_{i-2l_1+2}^{\zeta_{1+2}} \right)^{-1} \left(y_{i-2l_1+2}^{\zeta_{1+1}} \right)^{-1} \left(v_{i-2l_1}^{\zeta_{1+1}} \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(y_{i-2l_1+1}^{\zeta_1} \right) \left(v_{i-2l_1+1}^{\zeta_1-1} \right) \left(y_{i-2l_1+3}^{\zeta_1-1} \right) \left(v_{i-2l_1+3}^{\zeta_1-2} \right) \cdots \\ &\quad \cdots \left(v_{i-3}^{\zeta_1} \right) \left(y_{i-1}^{\zeta_1} \right) (v_{i-1}) (y_{i+1}). \end{aligned}$$

Como a decomposição $x_i = \tilde{x}_i v_i$ é única e $\tilde{x}_i = \zeta_{2l_1}$, temos que

$$\begin{aligned}
v_i &= \left(y_i^{\zeta_{2l_1}}\right)^{-1} \left(v_{i-2}^{\zeta_{2l_1}}\right)^{-1} \left(y_{i-2}^{\zeta_{2l_1-1}}\right)^{-1} \left(v_{i-4}^{\zeta_{2l_1-2}}\right)^{-1} \cdots \\
&\quad \cdots \left(y_{i-2l_1+4}^{\zeta_{l_1+2}}\right)^{-1} \left(v_{i-2l_1+2}^{\zeta_{l_1+2}}\right)^{-1} \left(y_{i-2l_1+2}^{\zeta_{l_1+1}}\right)^{-1} \left(v_{i-2l_1}^{\zeta_{l_1+1}}\right)^{-1} \cdot \\
&\quad \cdot \left(y_{i-2l_1+1}^{\zeta_{l_1}}\right) \left(v_{i-2l_1+1}^{\zeta_{l_1-1}}\right) \left(y_{i-2l_1+3}^{\zeta_{l_1-1}}\right) \left(v_{i-2l_1+3}^{\zeta_{l_1-2}}\right) \cdots \\
&\quad \cdots \left(v_{i-3}^{\zeta_1}\right) \left(y_{i-1}^{\zeta_1}\right) (v_{i-1}) (y_{i+1}), \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (4.1.17)
\end{aligned}$$

que nos dá, por indução, o resultado desejado para $i \geq 2l_1$.

Para $i < 0$, vale um argumento análogo.

Reorganizando (4.1.9) e trasladando os índices por $2l_1$, temos que

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i+1} \tilde{x}_{i+3} \cdots \tilde{x}_{i+2l_1-3} \tilde{x}_{i+2l_1-1} \tilde{x}_{i+2l_1}^{-1} \tilde{x}_{i+2l_1-2}^{-1} \cdots \tilde{x}_{i+4}^{-1} \tilde{x}_{i+2}^{-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (4.1.18)$$

Por (4.1.4), temos que

$$\begin{aligned}
x_i &= y_{i+1} x_{i+1} y_{i+3} x_{i+3} \cdots x_{i+2l_1-3} y_{i+2l_1-1} x_{i+2l_1-1} y_{i+2l_1+1} \cdot \\
&\cdot x_{i+2l_1}^{-1} y_{i+2l_1}^{-1} x_{i+2l_1-2}^{-1} y_{i+2l_1-2}^{-1} \cdots x_{i+4}^{-1} y_{i+4}^{-1} x_{i+2}^{-1} y_{i+2}^{-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (4.1.19)
\end{aligned}$$

Para facilitar a notação, considere ζ'_j como sendo o produto em K_1 do j últimos fatores do lado direito da equação (4.1.18), de forma que $\tilde{x}_i = \zeta'_{2l_1}$.

Então, substituindo $x_j = \tilde{x}_j v_j$ em (4.1.19) e conjugando os fatores, da direita para a esquerda, de modo a “deslocar” os \tilde{x}_j para a esquerda, temos que

$$\begin{aligned}
x_i &= (\zeta'_{2l_1}) \left(y_{i+1}^{\zeta'_{2l_1}}\right) \left(v_{i+1}^{\zeta'_{2l_1-1}}\right) \left(y_{i+3}^{\zeta'_{2l_1-1}}\right) \left(v_{i+3}^{\zeta'_{2l_1-2}}\right) \cdots \\
&\quad \cdots \left(v_{i+2l_1-3}^{\zeta'_{l_1+1}}\right) \left(y_{i+2l_1-1}^{\zeta'_{l_1+1}}\right) \left(v_{i+2l_1-1}^{\zeta'_{l_1}}\right) \left(y_{i+2l_1+1}^{\zeta'_{l_1}}\right) \cdot \\
&\quad \cdot \left(v_{i+2l_1}^{\zeta'_{l_1}}\right)^{-1} \left(y_{i+2l_1}^{\zeta'_{l_1-1}}\right)^{-1} \left(v_{i+2l_1-2}^{\zeta'_{l_1-1}}\right)^{-1} \left(y_{i+2l_1-2}^{\zeta'_{l_1-2}}\right)^{-1} \cdots \\
&\quad \cdots \left(v_{i+4}^{\zeta'_2}\right)^{-1} \left(y_{i+4}^{\zeta'_1}\right)^{-1} \left(v_{i+2}^{\zeta'_1}\right)^{-1} (y_{i+2})^{-1}.
\end{aligned}$$

Como a decomposição $x_i = \tilde{x}_i v_i$ é única e $\tilde{x}_i = \zeta'_{2l_1}$, temos que

$$\begin{aligned}
v_i &= \binom{\zeta'_{2l_1}}{y_{i+1}} \binom{\zeta'_{2l_1-1}}{v_{i+1}} \binom{\zeta'_{2l_1-1}}{y_{i+3}} \binom{\zeta'_{2l_1-2}}{v_{i+3}} \cdots \\
&\quad \cdots \binom{\zeta'_{l_1+1}}{v_{i+2l_1-3}} \binom{\zeta'_{l_1+1}}{y_{i+2l_1-1}} \binom{\zeta'_{l_1}}{v_{i+2l_1-1}} \binom{\zeta'_{l_1}}{y_{i+2l_1+1}} \cdot \\
&\quad \cdot \binom{\zeta'_{l_1}}{v_{i+2l_1}}^{-1} \binom{\zeta'_{l_1-1}}{y_{i+2l_1}}^{-1} \binom{\zeta'_{l_1-1}}{v_{i+2l_1-2}}^{-1} \binom{\zeta'_{l_1-2}}{y_{i+2l_1-2}}^{-1} \cdots \\
&\quad \cdots \binom{\zeta'_{l_1}}{v_{i+4}}^{-1} \binom{\zeta'_{l_1}}{y_{i+4}}^{-1} \binom{\zeta'_{l_1}}{v_{i+2}}^{-1} (y_{i+2})^{-1}, \quad (4.1.20)
\end{aligned}$$

que nos dá, por indução, o resultado desejado para $i < 0$.

2. A primeira parte é consequência do lema 2.1.4, de forma análoga ao item 1.

Pelo lema 2.1.4 e por (4.1.5), temos que

$$\tilde{z}_{i+2l_2-1} \tilde{z}_{i+2l_2-3} \cdots \tilde{z}_{i+1} = \tilde{z}_{i+2l_2} \tilde{z}_{i+2l_2-2} \cdots \tilde{z}_i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Isolando z_{i+2l_2-1} e trasladando os índices por $-2l_2 + 1$, temos que

$$\tilde{z}_i = \tilde{z}_{i-1} \tilde{z}_{i-3} \cdots \tilde{z}_{i-2l_2+1} \tilde{z}_{i-2l_2}^{-1} \tilde{z}_{i-2l_2+2}^{-1} \cdots \tilde{z}_{i-2}^{-1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (4.1.21)$$

Seja $i \geq 2l_2$. Então, por (4.1.5),

$$\begin{aligned}
z_i &= y_{i+1} y_i^{-1} z_{i-1} y_{i-2}^{-1} z_{i-2} \cdots y_{i-2l_2+4}^{-1} z_{i-2l_2+3} y_{i-2l_2+2}^{-1} z_{i-2l_2+1} \cdot \\
&\quad \cdot z_{i-2l_2}^{-1} y_{i-2l_2+1} z_{i-2l_2+2}^{-1} y_{i-2l_2+3} \cdots z_{i-4}^{-1} y_{i-3} z_{i-2}^{-1} y_{i-1}. \quad (4.1.22)
\end{aligned}$$

Para facilitar a notação, considere ξ_j como sendo o produto em K_3 dos j últimos fatores do lado direito da equação (4.1.13), de forma que $\tilde{z}_i = \xi_{2l_2}$.

Substituindo $z_j = \tilde{z}_j w_j$ em (4.1.22) e conjugando os fatores, da direita para a esquerda, de modo a “deslocar” os \tilde{z}_j para a esquerda, temos que

$$\begin{aligned}
z_i &= (\xi_{2l_2}) \binom{\xi_{2l_2}}{y_{i+1}} \cdot \\
&\quad \cdot \binom{\xi_{2l_2}}{y_i}^{-1} \binom{\xi_{2l_2-1}}{w_{i-1}} \binom{\xi_{2l_2-1}}{y_{i-2}}^{-1} \binom{\xi_{2l_2-2}}{w_{i-3}} \cdots \\
&\quad \cdots \binom{\xi_{l_2+2}}{y_{i-2l_2+4}}^{-1} \binom{\xi_{l_2+1}}{w_{i-2l_2+3}} \binom{\xi_{l_2+1}}{y_{i-2l_2+2}}^{-1} \binom{\xi_{l_2}}{w_{i-2l_2+1}} \cdot \\
&\quad \cdot \binom{\xi_{l_2}}{w_{i-2l_2}}^{-1} \binom{\xi_{l_2-1}}{y_{i-2l_2+1}} \binom{\xi_{l_2-1}}{w_{i-2l_2+2}}^{-1} \binom{\xi_{l_2-2}}{y_{i-2l_2+3}} \cdots \\
&\quad \cdots \binom{\xi_2}{w_{i-4}}^{-1} \binom{\xi_1}{y_{i-3}} \binom{\xi_1}{w_{i-2}}^{-1} (y_{i-1}).
\end{aligned}$$

Como a decomposição $z_i = \tilde{z}_i w_i$ é única e $\tilde{z}_i = \xi_{2l_2}$, temos que

$$\begin{aligned} w_i &= \left(y_{i+1}^{\xi_{2l_2}} \right) \cdot \left(y_i^{\xi_{2l_2}} \right)^{-1} \left(w_{i-1}^{\xi_{2l_2-1}} \right) \left(y_{i-2}^{\xi_{2l_2-1}} \right)^{-1} \left(w_{i-3}^{\xi_{2l_2-2}} \right) \cdots \\ &\quad \cdots \left(y_{i-2l_2+4}^{\xi_{l_2+2}} \right)^{-1} \left(w_{i-2l_2+3}^{\xi_{l_2+1}} \right) \left(y_{i-2l_2+2}^{\xi_{l_2+1}} \right)^{-1} \left(w_{i-2l_2+1}^{\xi_{l_2}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(w_{i-2l_2}^{\xi_{l_2}} \right)^{-1} \left(y_{i-2l_2+1}^{\xi_{l_2-1}} \right) \left(w_{i-2l_2+2}^{\xi_{l_2-1}} \right)^{-1} \left(y_{i-2l_2+3}^{\xi_{l_2-2}} \right) \cdots \\ &\quad \cdots \left(w_{i-4}^{\xi_2} \right)^{-1} \left(y_{i-3}^{\xi_1} \right) \left(w_{i-2}^{\xi_1} \right)^{-1} (y_{i-1}), \quad (4.1.23) \end{aligned}$$

que nos dá, por indução, o resultado desejado para $i \geq 2l_2$.

Para $i < 0$, vale um argumento análogo.

Reorganizando (4.1.13) e transladando os índices por $2l_2$, temos que

$$\tilde{z}_i = \tilde{z}_{i+2}^{-1} \tilde{z}_{i+4}^{-1} \cdots \tilde{z}_{i+2l_2}^{-1} \tilde{z}_{i+2l_2-1} \tilde{z}_{i+2l_2-3} \cdots \tilde{z}_{i+1}. \quad (4.1.24)$$

Para facilitar a notação, considere ξ'_j como sendo o produto em K_3 dos j últimos fatores do lado direito da equação (4.1.24), de forma que $\tilde{z}_i = \xi'_{2l_2}$.

Por (4.1.5), temos que

$$\begin{aligned} z_i &= y_{i+1} z_{i+2}^{-1} y_{i+3} z_{i+4}^{-1} \cdots z_{i+2l_2}^{-1} y_{i+2l_2+1} \cdot \\ &\quad \cdot y_{i+2l_2}^{-1} z_{i+2l_2-1} y_{i+2l_2-2} z_{i+2l_2-3} \cdots y_{i+2}^{-1} z_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (4.1.25) \end{aligned}$$

Então, substituindo $z_j = \tilde{z}_j w_j$ em (4.1.25) e conjugando os fatores, da direita para a esquerda, de modo a “deslocar” os \tilde{z}_j para a esquerda, temos que

$$\begin{aligned} z_i &= (\xi'_{2l_2}) \left(y_{i+1}^{\xi'_{2l_2}} \right) \left(w_{i+2}^{\xi'_{2l_2}} \right)^{-1} \left(y_{i+3}^{\xi'_{2l_2-1}} \right) \left(w_{i+4}^{\xi'_{2l_2-1}} \right)^{-1} \cdots \\ &\quad \cdots \left(w_{i+2l_2-2}^{\xi'_{l_2+2}} \right)^{-1} \left(y_{i+2l_2-1}^{\xi'_{l_2+1}} \right) \left(w_{i+2l_2}^{\xi'_{l_2+1}} \right)^{-1} \left(y_{i+2l_2+1}^{\xi'_{l_2}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(y_{i+2l_2}^{\xi'_{l_2}} \right)^{-1} \left(w_{i+2l_2-1}^{\xi'_{l_2-1}} \right) \left(y_{i+2l_2-2}^{\xi'_{l_2-1}} \right)^{-1} \left(w_{i+2l_2-3}^{\xi'_{l_2-2}} \right) \cdots \\ &\quad \cdots \left(y_{i+4}^{\xi'_2} \right) \left(w_{i+3}^{\xi'_1} \right) \left(y_{i+2}^{\xi'_1} \right)^{-1} (w_{i+1}). \end{aligned}$$

Como a decomposição $z_i = \tilde{z}_i w_i$ é única e $\tilde{z}_i = \xi'_{2l_2}$, temos que

$$\begin{aligned}
w_i &= \begin{pmatrix} \xi'_{2l_2} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_{2l_2} \\ w_{i+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi'_{2l_2-1} \\ y_{i+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_{2l_2-1} \\ w_{i+4} \end{pmatrix}^{-1} \cdots \\
&\quad \cdots \begin{pmatrix} \xi'_{l_2+2} \\ w_{i+2l_2-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi'_{l_2+1} \\ y_{i+2l_2-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_{l_2+1} \\ w_{i+2l_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi'_{l_2} \\ y_{i+2l_2+1} \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} \xi'_{l_2} \\ y_{i+2l_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi'_{l_2-1} \\ w_{i+2l_2-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_{l_2-1} \\ y_{i+2l_2-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi'_{l_2-2} \\ w_{i+2l_2-3} \end{pmatrix} \cdots \\
&\quad \cdots \begin{pmatrix} \xi'_2 \\ y_{i+4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ w_{i+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ y_{i+2} \end{pmatrix}^{-1} (w_{i+1}), \quad (4.1.26)
\end{aligned}$$

que nos dá, por indução, o resultado desejado para $i < 0$. □

Queremos agora construir um epimorfismo

$$\theta : M \twoheadrightarrow A$$

de modo que $\theta|_K = \text{Id}_K$ e θ projete K_1 em \mathbb{Z}_{k_1} e K_3 em \mathbb{Z}_{k_3} .

Levando isso em consideração e considerando \mathbb{Z}_{k_1} como subgrupo de A , definimos θ em K_1 da seguinte maneira:

$$\theta(x_0) = \theta(x_1) = \cdots = \theta(x_{2l_1-2}) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{k_1}, \quad \theta(x_{2l_1-1}) = \bar{2} \in \mathbb{Z}_{k_1}.$$

Pelo lema 4.1.3, parte 1, temos que

$$\theta(\tilde{x}_{i+2l_1}) = -\theta(\tilde{x}_i) + \theta(\tilde{x}_{i+1}) - \theta(\tilde{x}_{i+2}) + \cdots + \theta(\tilde{x}_{i+2l_1-1}), \quad \forall i.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\theta(\tilde{x}_{2l_1}) &= \bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{2l_1+1}) = \theta(\tilde{x}_{2l_1+2}) = \cdots = \theta(\tilde{x}_{4l_1-1}) = -\bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{4l_1}) = -\bar{2}, \\
\theta(\tilde{x}_{4l_1+1}) &= -\bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{4l_1+2}) = \theta(\tilde{x}_{4l_1+3}) = \cdots = \theta(\tilde{x}_{6l_1}) = \bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{6l_1+1}) = \bar{2}, \cdots
\end{aligned} \quad (4.1.27)$$

e assim por diante, de modo que

$$\theta(x_{i+4l_1+2}) = \theta(x_i), \quad \forall i.$$

O resultado também vale de maneira análoga para índices negativos, usando que

$$\theta(\tilde{x}_i) = \theta(\tilde{x}_{i+1}) - \theta(\tilde{x}_{i+2}) + \theta(\tilde{x}_{i+3}) + \cdots - \theta(\tilde{x}_{i+2l_1}).$$

Usando a decomposição $x_i = \tilde{x}_i v_i$, temos que

$$\begin{aligned}
\theta(x_i)^{k_1} &= \underbrace{(\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i))(\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i))\cdots(\theta(\tilde{x}_i)\theta(v_i))}_{k_1 \text{ termos}} \\
&= \theta(\tilde{x}_i)^{k_1} \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^{k_1-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^2} \right) \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)} \right) \left(\theta(v_i)^1 \right) \\
&= \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^{k_1-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)^2} \right) \left(\theta(v_i)^{\theta(\tilde{x}_i)} \right) \left(\theta(v_i)^1 \right). \quad (4.1.28)
\end{aligned}$$

Defina

$$x := \bar{1} = \theta(x_0) = \theta(\tilde{x}_0) \in \mathbb{Z}_{k_1}.$$

Suponha que $k_1 \neq 2$. Então, por (4.1.27), temos que $\theta(\tilde{x}_i)$ é um gerador de \mathbb{Z}_{k_1} , qualquer que seja $i \in \mathbb{Z}$. Logo, a menos de uma permutação dos expoentes

$$\{x^{k_1-1}, x^{k_1-2}, \dots, x^2, x, 1\},$$

temos que

$$\theta(x_i)^{k_1} = \left(\theta(v_i)^{x^{k_1-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_i)^{x^2} \right) \left(\theta(v_i)^x \right) \left(\theta(v_i)^1 \right). \quad (4.1.29)$$

Se $k_1 = 2$, temos que

$$\theta(\tilde{x}_i) = \begin{cases} e_A, & \text{se } i \equiv -2 \pmod{2l_1 + 1} \\ x, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1.30)$$

Assim, se $i \equiv -2 \pmod{2l_1 + 1}$, temos que

$$\theta(x_i)^2 = \theta(v_i)^2.$$

Note que esse é o único caso em que $\theta(\tilde{x}_i) = e_A$.

Caso contrário,

$$\theta(x_i)^2 = (\theta(v_i)^x) \theta(v_i).$$

Para definir θ em K_3 , procederemos de maneira semelhante. Definimos

$$\theta(z_0) = \theta(z_1) = \cdots = \theta(z_{2l_2-2}) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{k_3}, \quad \theta(z_{2l_2-1}) = \bar{2} \in \mathbb{Z}_{k_3}.$$

Pela parte 2 do lema 4.1.3, temos que

$$\theta(\tilde{z}_{i+2l_2}) = -\theta(\tilde{z}_0) + \theta(\tilde{z}_1) - \theta(\tilde{z}_2) + \cdots + \theta(\tilde{z}_{2l_2-1}), \quad \forall i.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\theta(\tilde{z}_{2l_2}) &= \bar{1}, & \theta(\tilde{z}_{2l_2+1}) &= \theta(\tilde{z}_{2l_2+2}) = \cdots = \theta(\tilde{z}_{4l_2-1}) = -\bar{1}, & \theta(\tilde{z}_{4l_2}) &= -\bar{2}, \\
\theta(\tilde{z}_{4l_2+1}) &= -\bar{1}, & \theta(\tilde{z}_{4l_2+2}) &= \theta(\tilde{z}_{4l_2+3}) = \cdots = \theta(\tilde{z}_{6l_2}) = \bar{1}, & \theta(\tilde{z}_{6l_2+1}) &= \bar{2}, \\
&&&&& \cdots & (4.1.31)
\end{aligned}$$

e assim por diante, de modo que

$$\theta(\tilde{z}_{i+4l_2+2}) = \theta(\tilde{z}_i), \quad \forall i.$$

O resultado também vale de maneira análoga para índices negativos, usando que

$$\theta(\tilde{z}_i) = \theta(\tilde{z}_{i+1}) - \theta(\tilde{z}_{i+2}) + \theta(\tilde{z}_{i+3}) + \cdots - \theta(\tilde{z}_{i+2l_1}).$$

Usando a decomposição $z_i = \tilde{z}_i w_i$, temos que

$$\begin{aligned} \theta(z_i)^{k_3} &= \underbrace{(\theta(\tilde{z}_i)\theta(w_i)) (\theta(\tilde{z}_i)\theta(w_i)) \cdots (\theta(\tilde{z}_i)\theta(w_i))}_{k_3 \text{ termos}} \\ &= \theta(\tilde{z}_i)^{k_3} \left(\theta(w_i)^{\theta(\tilde{z}_i)^{k_3-1}} \right) \cdots \left(\theta(w_i)^{\theta(\tilde{z}_i)^2} \right) \left(\theta(w_i)^{\theta(\tilde{z}_i)} \right) (\theta(w_i)^1) \\ &= \left(\theta(w_i)^{\theta(\tilde{z}_i)^{k_3-1}} \right) \cdots \left(\theta(w_i)^{\theta(\tilde{z}_i)^2} \right) \left(\theta(w_i)^{\theta(\tilde{z}_i)} \right) (\theta(w_i)^1). \end{aligned}$$

Defina

$$z := \bar{1} = \theta(z_0) = \theta(\tilde{z}_0) \in \mathbb{Z}_{k_3}.$$

Suponha que $k_3 \neq 2$. Então, por (4.1.31), temos que $\theta(\tilde{z}_i)$ é um gerador de \mathbb{Z}_{k_3} , qualquer que seja $i \in \mathbb{Z}$.

Então, a menos de uma permutação dos expoentes

$$\{z^{k_3-1}, z^{k_3-2}, \dots, z^2, z, 1\},$$

temos que

$$\theta(z_i)^{k_3} = \left(\theta(w_i)^{z^{k_3-1}} \right) \cdots \left(\theta(w_i)^{z^2} \right) (\theta(w_i)^z) (\theta(w_i)^1). \quad (4.1.32)$$

Se $k_3 = 2$, temos que

$$\theta(\tilde{z}_i) = \begin{cases} e_A, & \text{se } i \equiv -2 \pmod{2l_2 + 1} \\ z, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.1.33)$$

Assim, se $i \equiv -2 \pmod{2l_2 + 1}$, temos que

$$\theta(z_i)^2 = \theta(w_i)^2.$$

Note que esse é o único caso em que $\theta(\tilde{z}_i) = e_A$.

Caso contrário,

$$\theta(z_i)^2 = (\theta(w_i)^z) \theta(v_i).$$

Considere agora a projeção canônica

$$\delta : A \rightarrow \frac{A}{\langle \{\theta(x_i)^{k_1}, \theta(z_i)^{k_3}, \theta(r_i)\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle^A} =: \bar{A}.$$

O epimorfismo $\theta : M \rightarrow A$ induz um epimorfismo $\bar{\theta} : \bar{N} \rightarrow \bar{A}$, conforme o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & A \\ \pi \downarrow & & \downarrow \delta \\ \bar{N} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & \bar{A} \end{array}$$

Portanto, \bar{A} é finitamente gerado.

Observe que K^A é um subgrupo de índice finito de A , já que

$$\frac{A}{K^A} \simeq \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_3}. \quad (4.1.34)$$

Então,

$$B := \delta(K^A)$$

é um subgrupo de índice finito de \bar{A} . Ou seja, B é finitamente gerado. Veremos que isso gera uma contradição.

Pelo lema 2.1.5, temos que

$$K^A = *_{i \in \mathbb{Z}, d \in D} \langle y_i^d \rangle \leq A.$$

Note que como x é gerador de \mathbb{Z}_{k_1} e z é gerador de \mathbb{Z}_{k_3} como grupos, então $\mathbb{Z}_{k_2}[D] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$, como álgebras de grupos (com coeficientes em \mathbb{Z}_{k_2}).

Considere B^{ab} como sendo a abelianização de B . O \mathbb{Z} -módulo B^{ab} é finitamente gerado, pois B é finitamente gerado. Veremos B^{ab} como sendo um $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -módulo, gerado pelas classes de

$$e_i := \delta\theta(y_i),$$

onde a ação de D (denotada por \circ) é dada por conjugação.

Pelo lema 2.1.4, existe uma decomposição única

$$r_i = \tilde{r}_i \rho_i, \quad (4.1.35)$$

com $\tilde{r}_i \in K_1 * K_3$ e $\rho_i \in K^M$.

Para podermos descrever B^{ab} mais detalhadamente, precisamos analisar a classe de $\theta(r_i)$. Faremos isso no lema a seguir, usando a decomposição acima.

Antes, defina

$$p_j(a) := 1 + a + \cdots + a^{j-2} + a^{j-1}.$$

Lema 4.1.4. *Seja B^{ab} como descrito acima. Defina*

$$\hat{x}_j, \quad \hat{e}_j, \quad \hat{z}_j, \quad \hat{v}_j, \quad \hat{w}_j, \quad t_j, \quad \hat{\rho}_j$$

como sendo as imagens em B^{ab} de

$$\delta\theta(\tilde{x}_j), \quad e_j, \quad \delta\theta(\tilde{z}_j), \quad \delta\theta(v_j), \quad \delta\theta(w_j), \quad \delta\theta(\tilde{x}_j \tilde{z}_j), \quad \delta\theta(\rho_j),$$

respectivamente. Então, para todo $i \in \mathbb{Z}$,

$$\theta(r_i) = \theta(\rho_i)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_i &= (\hat{v}_{i+1} - \hat{e}_{i+2}) \circ (\hat{z}_{i+1} p_{k_4}(t_{i+1})) + \hat{w}_{i+1} \circ (p_{k_4}(t_{i+1})) \\ &\quad + (\hat{e}_{i+1} - \hat{v}_i) \circ (p_{k_4}(t_i^{-1})) - \hat{w}_i \circ (\hat{z}_i^{-1} p_{k_4}(t_i^{-1})) \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

Demonstração. Seja $i \in \mathbb{Z}$.

Substituindo (4.1.35), $x_i = \tilde{x}_i v_i$ e $z_i = \tilde{z}_i w_i$ em

$$r_i := (x_{i+1} y_{i+2}^{-1} z_{i+1})^{k_4} (x_i^{-1} z_i^{-1} y_{i+1})^{k_4}$$

e conjugando os fatores de modo a “deslocar” os \tilde{x}_i, \tilde{z}_i para a esquerda, temos que

$$\tilde{r}_i = (\tilde{x}_{i+1} \tilde{z}_{i+1})^{k_4} (\tilde{x}_i^{-1} \tilde{z}_i^{-1})^{k_4} \in K_1 * K_3, \quad (4.1.37)$$

$$\begin{aligned} \rho_i &= (v_{i+1}^{\eta_{4k_4-1}} (y_{i+2}^{\eta_{4k_4-1}})^{-1} (w_{i+1}^{\eta_{4k_4-2}}) (v_{i+1}^{\eta_{4k_4-3}}) (y_{i+2}^{\eta_{4k_4-3}})^{-1} (w_{i+1}^{\eta_{4k_4-4}}) \dots \\ &\quad \dots (v_{i+1}^{\eta_{2k_4+3}}) (y_{i+2}^{\eta_{2k_4+3}})^{-1} (w_{i+1}^{\eta_{2k_4+2}}) (v_{i+1}^{\eta_{2k_4+1}}) (y_{i+2}^{\eta_{2k_4+1}})^{-1} (w_{i+1}^{\eta_{2k_4}}) \cdot \\ &\quad \cdot (v_i^{\eta_{2k_4}})^{-1} (w_i^{\eta_{2k_4-1}})^{-1} (y_{i+1}^{\eta_{2k_4-2}}) (v_i^{\eta_{2k_4-2}})^{-1} (w_i^{\eta_{2k_4-3}})^{-1} (y_{i+1}^{\eta_{2k_4-4}}) \dots \\ &\quad \dots (v_i^{\eta_4})^{-1} (w_i^{\eta_3})^{-1} (y_{i+1}^{\eta_2}) (v_i^{\eta_2})^{-1} (w_i^{\eta_1})^{-1} (y_{i+1}), \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

onde η_j é o produto em $K_1 * K_3$ dos j últimos fatores do lado direito da equação (4.1.37) (de modo que $\eta_{4k_4} = \tilde{r}_i$).

Aplicando θ em (4.1.37), temos que $\theta(\tilde{r}_i) = e_A$, uma vez que $\theta(K_1 * K_3) \subset D$ e, pela hipótese do teorema, $k_1 | k_4$ e $k_3 | k_4$. Logo, por (4.1.35),

$$\theta(r_i) = \theta(\rho_i).$$

Note que, como $\hat{x}_j^{k_1} = \hat{z}_j^{k_3} = 1 \forall j$ e $\tilde{x}_j \tilde{z}_j = \tilde{z}_j \tilde{x}_j$, então $t_j^{k_4} = 1 \forall j$.

Defina $\hat{\eta}_j$ como sendo $\delta\theta(\eta_j) \in \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_3} \leq A$. Como

$$t_j^{k_4} = 1 \forall j,$$

temos que

$$\hat{\eta}_{4k_4} = \hat{\eta}_{2k_4} = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_1 &= \hat{z}_i^{-1}, \quad \hat{\eta}_3 = t_i^{-1} \hat{z}_i^{-1}, \quad \dots \\ \dots, \hat{\eta}_{2k_4-3} &= (t_i^{-1})^{k_4-2} \hat{z}_i^{-1}, \quad \hat{\eta}_{2k_4-1} = (t_i^{-1})^{k_4-1} \hat{z}_i^{-1}, \\ \hat{\eta}_{2k_4+1} &= \tilde{z}_{i+1}, \quad \hat{\eta}_{2k_4+3} = t_{i+1} \tilde{z}_{i+1}, \quad \dots \\ \dots, \hat{\eta}_{4k_4-3} &= t_{i+1}^{k_4-2} \tilde{z}_{i+1}, \quad \hat{\eta}_{4k_4-1} = t_{i+1}^{k_4-1} \tilde{z}_{i+1}, \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_2 &= t_i^{-1}, \quad \hat{\eta}_4 = (t_i^{-1})^2, \quad \dots, \quad \hat{\eta}_{2k_4-2} = (t_i^{-1})^{k_4-1}, \quad \hat{\eta}_{2k_4} = 1, \\ \hat{\eta}_{2k_4+2} &= t_{i+1}, \quad \hat{\eta}_{2k_4+4} = t_{i+1}^2, \quad \dots, \quad \hat{\eta}_{4k_4-2} = t_{i+1}^{k_4-1}, \quad \hat{\eta}_{4k_4} = 1.\end{aligned}\quad (4.1.40)$$

Aplicando $\delta\theta$ e a projeção $B \rightarrow B^{ab}$ em (4.1.38), podemos mudar a notação multiplicativa para aditiva, de forma que a conjugação por elementos de D será denotada como a ação (\circ) à direita de $\mathbb{Z}[D]$. Temos, então, que

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_i &= \hat{v}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{4k_4-1}) - \hat{e}_{i+2} \circ (\hat{\eta}_{4k_4-1}) + \hat{w}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{4k_4-2}) \\ &+ \hat{v}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{4k_4-3}) - \hat{e}_{i+2} \circ (\hat{\eta}_{4k_4-3}) + \hat{w}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{4k_4-4}) + \dots \\ &\dots + \hat{v}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{2k_4+3}) - \hat{e}_{i+2} \circ (\hat{\eta}_{2k_4+3}) + \hat{w}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{2k_4+2}) \\ &+ \hat{v}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{2k_4+1}) - \hat{e}_{i+2} \circ (\hat{\eta}_{2k_4+1}) + \hat{w}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{2k_4}) \\ &- \hat{v}_i \circ (\hat{\eta}_{2k_4}) - \hat{w}_i \circ (\hat{\eta}_{2k_4-1}) + \hat{e}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{2k_4-2}) \\ &- \hat{v}_i \circ (\hat{\eta}_{2k_4-2}) - \hat{w}_i \circ (\hat{\eta}_{2k_4-3}) + \hat{e}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_{2k_4-4}) - \dots \\ &\dots - \hat{v}_i \circ (\hat{\eta}_4) - \hat{w}_i \circ (\hat{\eta}_3) + \hat{e}_{i+1} \circ (\hat{\eta}_2) \\ &- \hat{v}_i \circ (\hat{\eta}_2) - \hat{w}_i \circ (\hat{\eta}_1) + \hat{e}_{i+1}.\end{aligned}\quad (4.1.41)$$

Substituindo (4.1.39) e (4.1.40) na equação acima e reagrupando as parcelas, temos a equação desejada. \square

Por (4.1.29), (4.1.30), (4.1.32), (4.1.33) e (4.1.41), temos que, como $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -módulos,

$$B^{ab} \simeq \frac{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} e_i (\mathbb{Z}_{k_2}[x, z])}{I + I'}, \quad (4.1.42)$$

de modo que $e_i \mathbb{Z}_{k_2}[D] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[D]$, I é o $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -submódulo gerado por:

- $\hat{v}_i \circ (p_{k_1}(x))$, $\forall i$ tal que $\theta(\tilde{x}_i) \neq e_A$;
- $\hat{w}_i \circ (p_{k_3}(z))$, $\forall i$ tal que $\theta(\tilde{z}_i) \neq e_A$;
- $\hat{\rho}_i$, $\forall i \in \mathbb{Z}$

e I' é o $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -submódulo gerado por:

- $k_1 \hat{v}_i$, $\forall i$ tal que $\theta(\tilde{x}_i) = e_A$ (ou seja, se $k_1 = 2$ e $i \equiv -2 \pmod{2l_1 + 1}$);
- $k_3 \hat{w}_i$, $\forall i$ tal que $\theta(\tilde{z}_i) = e_A$. (ou seja, se $k_1 = 2$ e $i \equiv -2 \pmod{2l_1 + 1}$);

Para prosseguirmos, precisamos do lema a seguir:

Lema 4.1.5. *Suponha que k_1, k_3 não são ambos iguais a dois. Seja $t = x^\alpha z^\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Então, o anel*

$$\Upsilon = \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]}{(p_{k_1}(x), p_{k_3}(z), p_{k_4}(t))}$$

é não-nulo. Em particular, como \mathbb{Z}_{k_2} é um corpo (já que k_2 é primo), o conjunto acima é um \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial de dimensão $m \geq 1$.

Demonstração. Defina os seguintes anéis:

$$R_1 := \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}]}{(p_{k_1}(x))}, \quad R_2 := \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[z^{\pm 1}]}{(p_{k_3}(z))}.$$

Então,

$$R := R_1 \otimes_{\mathbb{Z}_{k_2}} R_2$$

é um anel que também é um \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial.

Seja I o ideal de R gerado por $p_{k_4}(t)$, onde aqui $t = x^\alpha \otimes z^\beta$.

Então,

$$\Upsilon \simeq \frac{R}{I}$$

e temos que

$$\Upsilon = 0 \Leftrightarrow I = R \Leftrightarrow \text{ann}_R(p_{k_4}(t)) = 0,$$

já que

$$\dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} R = \dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} I + \dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} \text{ann}_R(p_{k_4}(t)).$$

Como k_1, k_3 não são ambos iguais a dois e α, β não são ambos iguais a zero, então

$$0 \neq 1 - t \in \text{ann}_R(p_{k_4}(t)).$$

De fato,

$$(1 + t + \dots + t^{k_4-1})(1 - t) = 1 - t^{k_4} = 0,$$

onde a última igualdade segue da hipótese do teorema 4.1.1 de que $k_1, k_3 | k_4$. Logo, $\text{ann}_R(p_{k_4}(t)) \neq 0$ e, portanto, $\Upsilon \neq 0$. \square

A partir de agora, consideraremos o $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -módulo B^{ab} como um \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial e omitiremos o símbolo “o” para simplificar a notação. Note que

$$\dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} B^{ab} < \infty,$$

pois B^{ab} é finitamente gerado como \mathbb{Z} -módulo.

Defina

$$R := \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]}{(p_{k_1}(x), p_{k_3}(z))}.$$

Suponha que $k_1, k_3 \neq 2$.

Por (4.1.27) e (4.1.31), temos que $I' = 0$.

Então, o \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial (que também é um R -módulo)

$$V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{e}_i R}{\langle \{\hat{\rho}_i R\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle},$$

onde $\hat{e}_i R \simeq R$, é um quociente de B^{ab} , e, portanto, tem dimensão finita. Defina

$$g_i := ((\hat{v}_{i+1} - \hat{e}_{i+2})\hat{z}_{i+1} + \hat{w}_{i+1})(p_{k_4}(t_{i+1})).$$

Então, por (4.1.41),

$$\hat{\rho}_i = g_i - g_{i-1} \left(\hat{z}_{i-1}^{-1} t_{i-1}^{1-k_4} \right),$$

ou seja,

$$g_i R = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{\rho}_i R = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Logo, o \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial (que também é um R -módulo)

$$V_0 := \frac{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} e_i R}{\langle \{g_i R\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle} \quad (4.1.43)$$

é um quociente de V , e, portanto, tem dimensão finita. Seja

$$l := \max(2l_1, 2l_2) > 0$$

e seja

$$\pi : \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \hat{e}_j R \rightarrow \bigoplus_{j \geq l} \hat{e}_j R$$

a projeção canônica entre os \mathbb{Z}_{k_2} -espaços vetoriais acima. Então, π induz um epimorfismo de \mathbb{Z}_{k_2} -espaços vetoriais

$$V_0 = \frac{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{e}_i R}{\langle \{g_i R\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle} \twoheadrightarrow \frac{\bigoplus_{i \geq l} \hat{e}_i R}{\langle \{\pi(g_i) R\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle} =: V_1,$$

de modo que V_1 tem dimensão finita.

Por (4.1.10) e (4.1.14), temos que, para cada $i \geq l$,

$$\hat{v}_{i+1} - \hat{e}_{i+2} \in \bigoplus_{0 \leq j \leq i} \hat{e}_j \mathbb{Z}_{k_2}[D]$$

e

$$\hat{w}_{i+1} - \hat{e}_{i+2} \tilde{z}_{i+1} \in \bigoplus_{0 \leq j \leq i} \hat{e}_j \mathbb{Z}_{k_2}[D].$$

Logo, para cada $i \geq l$, existem $\lambda_{ji} \in \mathbb{Z}_{k_2}[D]$, com $0 \leq j \leq i$, tais que

$$\begin{aligned}
g_i &= \left((\hat{e}_{i+2} - \hat{e}_{i+2})\hat{z}_{i+1} + \hat{e}_{i+2}\hat{z}_{i+1} + \sum_{0 \leq j \leq i+1} \hat{e}_j \lambda_{ji} \right) (p_{k_4}(t_{i+1})) \\
g_i &= (\hat{e}_{i+2}\hat{z}_{i+1} + \gamma_i) (p_{k_4}(t_{i+1})), \tag{4.1.44}
\end{aligned}$$

onde

$$\gamma_i := \sum_{0 \leq j \leq i+1} \hat{e}_j \lambda_{ji}. \tag{4.1.45}$$

Então, por (4.1.44), temos que

$$\pi(g_i) = 0 \text{ se } i + 2 < l.$$

Logo,

$$\langle \{\pi(g_i)R\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle \subset \langle \{\pi(g_i)R\}_{i \geq l-2} \rangle,$$

e, portanto, existe um isomorfismo de \mathbb{Z}_{k_2} -espaços vetoriais

$$V_1 = \frac{\oplus_{i \geq l} \hat{e}_i R}{\langle \{\pi(g_i)R\}_{i \in \mathbb{Z}} \rangle} \rightarrow \frac{\oplus_{i \geq l} \hat{e}_i R}{\langle \{\pi(g_i)R\}_{i \geq l-2} \rangle} =: V_2,$$

de modo que V_2 tem dimensão finita.

Defina, para cada $i \in \mathbb{Z}$,

$$J_i := p_{k_4}(t_{i-1})R,$$

que é um ideal de R , que, portanto, também é um \mathbb{Z}_{k_2} -subespaço de R . Então, temos que, como \mathbb{Z}_{k_2} -espaços vetoriais,

$$R \simeq J_i \oplus \frac{R}{J_i},$$

embora não sejam isomorfos como R -módulos.

Seja

$$f : \frac{R}{J_i} \hookrightarrow R$$

o mergulho dado pelo isomorfismo acima. Então,

$$R = J_i \oplus f \left(\frac{R}{J_i} \right)$$

e, portanto, todo elemento $r \in R$ pode ser decomposto, de maneira única, como

$$r = r_1 + f(r_2), \quad \text{onde } r_1 = (p_{k_4}(t_{i-1}))r'_1 \in J_i, r_2 \in \frac{R}{J_i}. \tag{4.1.46}$$

Seja

$$\phi : \oplus_{i \geq l} \hat{e}_i R \rightarrow \oplus_{i \geq l} \hat{e}_i \frac{R}{J_i}$$

a transformação linear definida indutivamente por:

$$\phi(\hat{e}_i r) = \phi(\hat{e}_i r_1) + \phi(\hat{e}_i f(r_2)), \quad \text{para todo } i \geq l,$$

onde, para γ_{i-2} definido em (4.1.44) e (4.1.45),

$$\phi(\hat{e}_i r_1) := -\phi(\pi(\gamma_{i-2})r_1 \hat{z}_{i-1}^{-1}), \quad \text{para todo } r_1 \in J_i, i \geq l,$$

e

$$\phi(\hat{e}_i f(r_2)) := \hat{e}_i r_2, \quad \text{para todo } r_2 \in \frac{R}{J_i}, i \geq l. \quad (4.1.47)$$

Observamos que (4.1.45) implica $\pi(\gamma_{i-2}) = 0$, portanto

$$\phi(\hat{e}_l r_1) = 0 \quad \text{para todo } r_1 \in J_l.$$

Note que ϕ está bem-definida, pois $\phi(\hat{e}_i J_i)$ depende apenas de $\phi(\hat{e}_j R)$ para $0 \leq j < i$ e

$$\phi(\hat{e}_l r) = \hat{e}_l r_2, \quad \text{para todo } r \in R,$$

onde r_2 foi definido em (4.1.35).

Temos que $\phi(\pi(g_i)R) = 0$ para todo $i \geq l-2$, pois, usando (4.1.44) e (4.1.47), temos que

$$\begin{aligned} \phi(\pi(g_i)r) &= \phi((\pi(\hat{e}_{i+2}\hat{z}_{i+1}) + \pi(\gamma_i))rp_{k_4}(t_{i+1})) \\ &= \phi(\hat{e}_{i+2}\hat{z}_{i+1}rp_{k_4}(t_{i+1})) + \phi(\pi(\gamma_i)rp_{k_4}(t_{i+1})) \\ &= -\phi(\pi(\gamma_i)rp_{k_4}(t_{i+1})) + \phi(\pi(\gamma_i)rp_{k_4}(t_{i+1})) = 0 \end{aligned}$$

Ou seja, ϕ induz uma transformação linear

$$\phi_2 : V_2 = \frac{\oplus_{i \geq l} \hat{e}_i R}{\langle \{\pi(g_i)R\}_{i \geq l-2} \rangle} \rightarrow \oplus_{i \geq l} \hat{e}_i \frac{R}{J_i}.$$

Além disso, ϕ_2 é sobrejetora, pois, para todo $r_2 \in \frac{R}{J_i}$ temos que

$$\hat{e}_i r_2 = \phi(\hat{e}_i f(r_2)) = \phi_2(\hat{e}_i f(r_2)) \in \phi_2(V_2).$$

Recordamos que

$$t_i = \hat{x}_i \hat{z}_i \in \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle.$$

Como $k_1, k_3 \neq 2$, temos, por (4.1.27) e (4.1.31), que

$$t_i = x^{\alpha_i} z^{\beta_i}, \quad \text{onde } \alpha_i, \beta_i \neq 0.$$

Logo, pelo lema 4.1.5, temos que

$$\frac{R}{J_i} \neq 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

e, portanto,

$$\dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} \phi_2(V_2) = \dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} \bigoplus_{i \geq l} \hat{e}_i \frac{R}{J_i} = \infty.$$

Mas isso implica

$$\dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} V_2 = \infty,$$

o que é uma contradição.

Suponha que $k_1 = 2, k_3 \neq 2$.

Seja

$$L_1 = \{j \in \mathbb{Z} \mid j \equiv -2 \pmod{2l_1 + 1}\}.$$

Recordamos que I e I' foram definidos em (4.1.42). Pelas observações após (4.1.30) e (4.1.33), temos que I' está contido no $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -submódulo gerado por $\{\hat{v}_i\}_{i \in L_1}$, sendo que vale a igualdade se $k_1 \neq k_2$.

Recordando que definimos V_0 em (4.1.43), temos que o \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial (que também é um R -módulo)

$$V'_0 := \frac{V_0}{\langle \{\hat{v}_i R\}_{i \in L_1} \rangle}$$

é um quociente de V e, portanto, tem dimensão finita.

Como comentado no início da demonstração, podemos supor $k_4 = \text{mmc}(k_1, k_3) = \text{mmc}(2, k_3)$. Uma vez que k_3 é primo diferente de 2, temos que $k_4 = 2k_3$. Além disso,

$$R = \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]}{(x+1, p_{k_3}(z))} \simeq \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[z^{\pm 1}]}{(p_{k_3}(z))},$$

de modo que $x = -1$ em R .

Note que, como $k_3 \neq 2$ é primo, temos que $z_i = \theta(\tilde{z}_i)$ é um gerador de \mathbb{Z}_{k_3} (por 4.1.31) e, portanto,

$$p_{k_3}(z_i) = p_{k_3}(z), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

lembrando que z foi fixado como um gerador de \mathbb{Z}_{k_3} .

Seja $i \in \mathbb{Z}$. Por (4.1.30), temos duas possibilidades:

1. Se $i \equiv -2 \pmod{2l_1 + 1}$, então $\theta(\tilde{x}_i) = e_A$. Logo, $\hat{x}_i = 1$ e, portanto,

$$p_{k_4}(t_i) = 1 + \hat{z}_i + \cdots + \hat{z}_i^{2k_3-1} = p_{k_3}(\hat{z}_i) + \hat{z}_i^{k_3} p_{k_3}(\hat{z}_i) = p_{k_3}(z) + p_{k_3}(z) = 0.$$

2. Caso contrário, então $\theta(\tilde{x}_i) = x$. Logo, $\hat{x}_i = -1$ e, portanto,

$$\begin{aligned} p_{k_4}(t_i) &= \sum_{0 \leq j \leq 2k_3-1} (-1)^j \hat{z}_i^j \\ &= \sum_{0 \leq j \leq k_3-1} (-1)^j \hat{z}_i^j + \sum_{k_3 \leq j \leq 2k_3-1} (-1)^j \hat{z}_i^j \\ &= \sum_{0 \leq j \leq k_3-1} (-1)^j \hat{z}_i^j + \sum_{0 \leq j \leq k_3-1} (-1)^{j+1} \hat{z}_i^j = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $p_{k_4}(t_i) = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$. Logo, $g_i = 0 \forall i$ e, portanto, $g_i R = 0 \forall i$. Assim, temos que

$$V'_0 \simeq \frac{\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{e}_i R}{\langle \{\hat{v}_i R\}_{i \in L_1} \rangle}.$$

Se $i \geq 2l_1$, temos, por (4.1.10), que

$$\hat{v}_i - \hat{e}_{i+1} \in \oplus_{0 \leq j < i} \hat{e}_j R.$$

Por outro lado, se $i < 0$ temos, por (4.1.11), que

$$\hat{v}_i - \hat{e}_{i+1} \in \oplus_{i < j \leq 2l_1-1} \hat{e}_j R.$$

Além disso, por (4.1.8), temos que $\hat{v}_i = 0$ se $0 \leq i < 2l_1$. Portanto, temos que

$$V'_0 \simeq \oplus_{i \in \Lambda_1} \hat{e}_i R,$$

onde

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z} \setminus \{j \in \mathbb{Z} \mid j \equiv -1 \pmod{2l_1 + 1}\}.$$

Como $R \neq 0$ pelo lema 4.1.5 e Λ_1 é infinito, temos que V'_0 tem dimensão infinita, o que é uma contradição.

Suponha que $k_1 \neq 2, k_3 = 2$.

O argumento nesse caso é análogo ao do caso anterior.

Seja

$$L_2 = \{j \in \mathbb{Z} \mid j \equiv -2 \pmod{2l_2 + 1}\}.$$

Recordamos que I e I' foram definidos em (4.1.42). Pelas observações após (4.1.30) e (4.1.33), temos que I' está contido no $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -submódulo gerado por $\{\hat{w}_i\}_{i \in L_2}$, sendo que vale a igualdade se $k_3 \neq k_2$.

Recordando que definimos V_0 em (4.1.43), temos que o \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial (que também é um R -módulo)

$$V_0'' := \frac{V_0}{\langle \{w_i R\}_{i \in L_2} \rangle}$$

é um quociente de V e, portanto, tem dimensão finita. Nesse caso, temos que $k_4 = 2k_1$. Além disso,

$$R = \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}]}{(p_{k_1}(x), 1+z)} \simeq \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}]}{(p_{k_1}(x))},$$

de modo que $z = -1$ em R .

Note que, como $k_1 \neq 2$ é primo, temos que $x_i = \theta(\hat{x}_i)$ é um gerador de \mathbb{Z}_{k_1} (por 4.1.31) e, portanto,

$$p_{k_1}(x_i) = p_{k_1}(x), \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Seja $i \in \mathbb{Z}$. Por (4.1.33), temos duas possibilidades:

1. Se $i \equiv -2 \pmod{2l_2 + 1}$, então $\theta(\tilde{z}_i) = e_A$. Logo, $\hat{z}_i = 1$, e, portanto,

$$p_{k_4}(t_i) = 1 + \hat{x}_i + \cdots + \hat{x}_i^{2k_1-1} = p_{k_1}(\hat{x}_i) + \hat{x}_i^{k_1} p_{k_1}(\hat{x}_i) = p_{k_1}(x) + p_{k_1}(x) = 0.$$

2. Caso contrário, então $\theta(\tilde{z}_i) = z$. Logo, $\hat{z}_i = -1$, e, portanto,

$$\begin{aligned} p_{k_4}(t_i) &= \sum_{0 \leq j \leq 2k_1-1} (-1)^j \hat{x}_i^j \\ &= \sum_{0 \leq j \leq k_1-1} (-1)^j \hat{x}_i^j + \sum_{k_1 \leq j \leq 2k_1-1} (-1)^j \hat{x}_i^j \\ &= \sum_{0 \leq j \leq k_1-1} (-1)^j \hat{x}_i^j + \sum_{0 \leq j \leq k_1-1} (-1)^{j+1} \hat{x}_i^j = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $p_{k_4}(t_i) = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$. Logo, $g_i = 0 \forall i$ e, portanto, $g_i R = 0 \forall i$. Assim, temos que

$$V_0'' \simeq \frac{\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{e}_i R}{\langle \{\hat{w}_i R\}_{i \in L_2} \rangle}.$$

Se $i \geq 2l_2$, então temos, por (4.1.14), que

$$\hat{w}_i - \hat{e}_{i+1} \in \oplus_{0 \leq j < i} \hat{e}_j R.$$

Por outro lado, se $i < 0$ temos, por (4.1.15), que

$$\hat{w}_i - \hat{e}_{i+1} \in \oplus_{i < j \leq 2l_2-1} \hat{e}_j R.$$

Além disso, temos, por (4.1.12), que $\hat{w}_i = 0$ se $0 \leq i < 2l_2$. Portanto, temos que

$$V_0'' \simeq \oplus_{i \in \Lambda_2} \hat{e}_i R,$$

onde

$$\Lambda_2 = \mathbb{Z} \setminus \{j \in \mathbb{Z} \mid j \equiv -1 \pmod{2l_2 + 1}\}.$$

Como $R \neq 0$ pelo lema 4.1.5 e Λ_2 é infinito, temos que V_0'' tem dimensão infinita, o que é uma contradição.

□

Observação 4.1.6. Podemos permitir que k_1 e k_3 sejam potências de dois, no enunciado do teorema 4.1.1, se k_2 também é par. Nesse caso, basta identificar os pares de geradores (u_1, u_3) e (u_2, u_4) , *i.e.*, definir

$$\bar{G} := \frac{G}{\langle u_1 u_3^{-1}, u_2 u_4^{-1} \rangle^G}.$$

Assim temos, pelo corolário 2.3.26, que

$$\bar{G} \simeq \langle u_1, u_2 \mid (u_1 u_2)^k = (u_2 u_1)^k \rangle,$$

onde

$$k := \text{mdc}(\text{mdc}(\text{mdc}(k_1, k_2), k_3), k_4),$$

que é maior ou igual a 2, por hipótese, já que k_1, k_3 são potências de dois, k_4 é múltiplo de k_1 e k_2 é par.

Seja $\bar{\chi}$ o caractere de \bar{G} induzido por χ . Pelo teorema 2.3.20, temos que

$$[\bar{\chi}] \in \Sigma^1(\bar{G})^c.$$

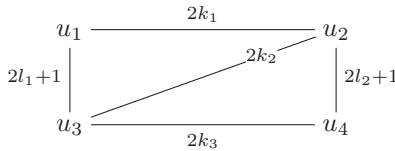
Então, pelo corolário 2.3.26, temos que

$$[\chi] \in \Sigma^1(G)^c,$$

como queríamos demonstrar.

Se retirarmos apenas uma das arestas, o problema já se torna muito mais simples e não exige hipóteses adicionais. De fato, o grupo de Artin do enunciado do teorema 4.1.1 tem posto 3, enquanto o do enunciado do teorema abaixo tem posto 2. Como dito na introdução, acreditamos que um método similar ao usado nessa tese pode ser usado para provar a conjectura 2.3.16 para grupos de Artin de posto 2, mas, assim como no teorema 4.1.1, o problema se torna muito mais difícil quando o grupo de Artin tem posto 3.

Teorema 4.1.7. *Seja $G = G(k_1, k_2, k_3, l_1, l_2)$ o grupo de Artin associado ao grafo*



tal que k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 são inteiros positivos, com $k_1, k_2, k_3 > 1$ e $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ tal que

$$-1 = \chi(u_1) = \chi(u_3) = -\chi(u_2) = -\chi(u_4).$$

Então, $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$.

Demonstração. Suponha que k_1 e k_3 não são ambos potências de dois. Adicione uma aresta de rótulo igual a $\text{mmc}(2k_1, 2k_3)$, ligando u_1 e u_4 , de forma a aplicar o corolário 2.3.26. Dessa forma, o resultado segue do teorema 4.1.1.

Suponha que k_1 e k_3 são potências de dois. Pelo corolário 2.3.26, podemos considerar $k_1 = k_3 = 2$ e k_2 primo. O início da demonstração é análogo ao do teorema 4.1.1, apenas omitindo as referências à aresta com rótulo $2k_4$ (incluindo as relações r_i , ρ_i e $\hat{\rho}_i$) até a equação (4.1.42).

Então, por (4.1.29) e (4.1.32), temos que, como $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -módulos,

$$B^{ab} \simeq \frac{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{e}_i (\mathbb{Z}_{k_2}[x^{\pm 1}, z^{\pm 1}])}{I + I'},$$

de modo que

$$D = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

$\hat{e}_i \mathbb{Z}_{k_2}[D] \simeq \mathbb{Z}_{k_2}[D]$, I é o $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -submódulo gerado por:

- $\hat{v}_i \circ (x + 1)$, $\forall i$ tal que $\theta(\tilde{x}_i) \neq e_A$;
- $\hat{w}_i \circ (z + 1)$, $\forall i$ tal que $\theta(\tilde{z}_i) \neq e_A$;

e I' é o $\mathbb{Z}_{k_2}[D]$ -submódulo gerado por:

- $2\hat{v}_i$, $\forall i$ tal que $\theta(\tilde{x}_i) = e_A$;
- $2\hat{w}_i$, $\forall i$ tal que $\theta(\tilde{z}_i) = e_A$.

Defina

$$R := \frac{\mathbb{Z}_{k_2}[x, z]}{(x + 1, z + 1)} \simeq \mathbb{Z}_{k_2},$$

de modo que $x = z = -1$ em R .

Defina

$$L_j := \{i \in \mathbb{Z} \mid i \equiv -1 \pmod{2l_j + 1}\}.$$

Pelas observações após (4.1.30) e (4.1.33), temos que I' está contido no \mathbb{Z}_{k_2} -subespaço vetorial de R gerado por $\{\hat{v}_i\}_{i \in L_1}$ e $\{\hat{w}_i\}_{i \in L_2}$, sendo que vale a igualdade se $2 \neq k_2$.

Ou seja, temos que o \mathbb{Z}_{k_2} -espaço vetorial

$$W := \frac{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{e}_i R}{\langle \{\hat{v}_i\}_{i \in L_1}, \{\hat{w}_i\}_{i \in L_2} \rangle}$$

é um quociente de B^{ab} , e, portanto, tem dimensão finita.

Sejam

$$l := \text{mmc}(2l_1 + 1, 2l_2 + 1),$$

de modo que

$$(2l_1 + 1)(2l_2 + 1) = ld, \quad d := \text{mdc}(2l_1 + 1, 2l_2 + 1). \quad (4.1.48)$$

Defina também, para cada $j \geq 0$,

$$\Lambda_j := \{0, 1, \dots, jl - 1\}$$

e o seguinte subespaço de W :

$$E_j := \frac{\oplus_{i \in \Lambda_j} \hat{e}_i R}{\langle \{\hat{v}_i\}_{i \in L_1}, \{\hat{w}_i\}_{i \in L_2} \rangle \cap [\oplus_{i \in \Lambda_j} \hat{e}_i R]}.$$

Sabemos, do lema 4.1.3, que

- $\hat{v}_i - \hat{e}_{i+1} \in \oplus_{0 \leq j < i} \hat{e}_j R, \quad \text{se } i \geq 2l_1;$
- $\hat{v}_i = 0, \quad \text{se } 0 \leq i < 2l_1;$
- $\hat{v}_i - \hat{e}_{i+1} \in \oplus_{i < j \leq 2l_1 - 1} \hat{e}_j R, \quad \text{se } i < 0;$
- $\hat{w}_i - \hat{e}_{i+1} \hat{z}_i \in \oplus_{0 \leq j < i} \hat{e}_j R, \quad \text{se } i \geq 2l_2;$
- $\hat{w}_i = 0, \quad \text{se } 0 \leq i < 2l_2;$
- $\hat{w}_i - \hat{e}_{i+1} \hat{z}_i \in \oplus_{i < j \leq 2l_2 - 1} \hat{e}_j R, \quad \text{se } i < 0.$

Portanto,

$$E_j = \frac{\oplus_{i \in \Lambda_j} e_i R}{\langle \{\hat{v}_i\}_{i \in L_1 \cap (\Lambda_j - 1)}, \{\hat{w}_i\}_{i \in L_2 \cap (\Lambda_j - 1)} \rangle}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} E_j &\geq \#\Lambda_j - (\#[L_1 \cap (\Lambda_j - 1)] + \#[L_2 \cap (\Lambda_j - 1)]) \\ &\geq \#\Lambda_j - \#[L_1 \cap (\Lambda_j - 1)] - \#[L_2 \cap (\Lambda_j - 1)] \\ &\geq j \left(l - \frac{l}{2l_1 + 1} - \frac{l}{2l_2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Logo, por (4.1.48),

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} E_j &\geq j \left(l - \frac{2l_2 + 1}{d} - \frac{2l_1 + 1}{d} \right) \\
&\geq \frac{j}{d} ((2l_1 + 1)(2l_2 + 1) - (2l_2 + 1) - (2l_1 + 1)) \\
&\geq \frac{j}{d} (2l_1(2l_2 + 1) - 2l_1 - 1) \\
&\geq \frac{j}{d} (4l_1l_2 - 1) \\
&\geq \frac{j}{d} 3.
\end{aligned}$$

Como $E_j \leq W$ para todo $j > 0$, então

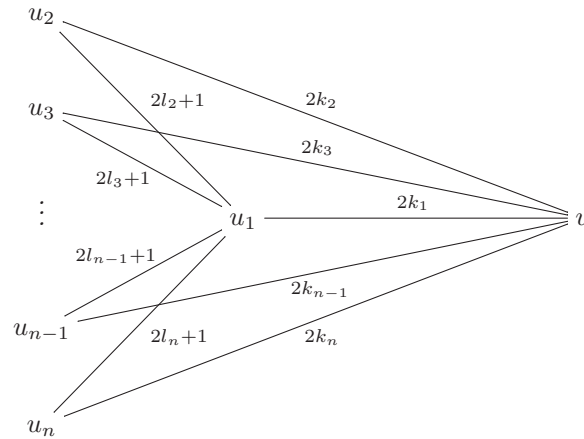
$$\dim_{\mathbb{Z}_{k_2}} W = \infty,$$

o que é uma contradição. \square

4.2 Uma generalização

Abaixo, demonstramos uma versão mais geral do teorema 3.2.2. De fato, a demonstração do teorema 3.2.2 poderia ter sido omitida, mas optamos por deixá-la por ser muito mais simples e pela importância dele por si só. Note que o grupo de Artin abaixo possui posto arbitrário.

Teorema 4.2.1. *Seja $G = G(k_1, k_2, \dots, k_n, l_2, l_3, \dots, l_n)$ o grupo de Artin associado ao grafo*



tal que $k_1, k_2, \dots, k_n, l_2, \dots, l_n$ são inteiros positivos, com $k_1, k_2, \dots, k_n > 1$, e $[\chi] \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ tal que

$$-1 = \chi(u_1) = \chi(u_2) = \dots = \chi(u_n) = -\chi(u).$$

Além disso, suponha que

$$\sum_{k_i \text{ é potência de } 2} \frac{1}{2l_i + 1} < 1.$$

Então, $[\chi] \in \Sigma^1(G)^c$.

Demonstração. Por definição, G tem uma apresentação

$$\begin{aligned} G = \langle u, u_1, u_2, \dots, u_n \mid & (uu_1)^{k_1} = (u_1u)^{k_1}, (uu_2)^{k_2} = (u_2u)^{k_2}, \dots \\ & \dots, (uu_n)^{k_n} = (u_nu)^{k_n}, (u_1u_2)^{l_2}u_1 = (u_2u_1)^{l_2}u_2, \\ & (u_1u_3)^{l_3}u_1 = (u_3u_1)^{l_3}u_3, \dots, (u_1u_n)^{l_n}u_1 = (u_nu_1)^{l_n}u_n \rangle. \end{aligned}$$

Pelo corolário 2.3.26, podemos supor que $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ são primos. Sempre que possível, tomaremos $k_i \neq 2$, por ser um caso mais simples.

Sabemos que basta provar que $N := \ker \chi$ não é finitamente gerado. Suponhamos o contrário, que N é finitamente gerado.

Defina

$$x_{0,i} := uu_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad y_0 := x_{0,1}.$$

ou seja,

$$u_i = u^{-1}x_{0,i}, \quad i = 1, \dots, n$$

Então, $N = \langle \{x_{0,i}\}_{1 \leq i \leq n} \rangle^G$. Defina, também,

$$x_{j,i} := x_{0,i}^{u^j} \quad i = 1, \dots, n, \quad j \in \mathbb{Z},$$

que são geradores de N como subgrupo de G . Usaremos ainda a seguinte notação:

$$y_j := x_{j,1}.$$

Devido ao fato da demonstração do teorema 4.2.1 ser longa, precisaremos de vários resultados auxiliares, que serão enunciados como lemas, dentro do corpo da demonstração.

O lema abaixo traduz as relações de G para palavras compatíveis com a apresentação de N que usaremos.

Lema 4.2.2. *Com a notação acima, temos que*

1. para $i = 1, 2, \dots, n$,

$$(u_iu)^{k_i} = (uu_i)^{k_i} \Leftrightarrow x_{j,i}^{k_i} = x_{0,i}^{k_i}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.2.1)$$

2. para $i = 2, 3, \dots, n$,

$$\begin{aligned} (u_1u_i)^{l_i}u_1 = (u_iu_1)^{l_i}u_i \Leftrightarrow \\ x_{j,i} = y_{j-1}^{-1}x_{j-2,i}^{-1}y_{j-3}^{-1}x_{j-4,i}^{-1} \cdots y_{j-2l_i+3}^{-1}x_{j-2l_i+2,i}^{-1}y_{j-2l_i+1}^{-1}x_{j-2l_i,i}^{-1} \\ \cdot y_{j-2l_i}x_{j-2l_i+1,i}y_{j-2l_i+2}x_{j-2l_i+3,i} \cdots x_{j-3,i}y_{j-2}x_{j-1,i}y_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Demonstração. 1. Por definição,

$$(uu_i)^{k_i} = (u_iu)^{k_i} \Leftrightarrow x_{0,i}^{k_i} = x_{-1,i}^{k_i} \Leftrightarrow x_{j,i}^{k_i} = x_{j-1,i}^{k_i} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Por indução, temos o resultado desejado.

2. Como $u_i = u^{-1}x_{0,i}$, temos que

$$\begin{aligned} (u_iu_1)^{l_i}u_i &= (u_1u_i)^{l_i}u_1 \Leftrightarrow \\ &(u^{-1}x_{0,i}u^{-1}y_0)^{l_i}u^{-1}x_{0,i} = (u^{-1}y_0u^{-1}x_{0,i})^{l_i}u^{-1}y_0. \end{aligned}$$

Conjugando os fatores por potências de u de modo a deslocá-las para a direita, temos que a equação acima é equivalente a

$$\begin{aligned} x_{1,i}y_2x_{3,i}y_4 \cdots y_{2l_i-2}x_{2l_i-1,i}y_{2l_i}x_{2l_i+1,i}u^{-2l_i-1} &= \\ y_1x_{2,i}y_3x_{4,i} \cdots x_{2l_i-2,i}y_{2l_i-1}x_{2l_i,i}y_{2l_i+1}u^{-2l_i-1} & \\ \Leftrightarrow & \\ x_{2l_i+1,i} &= y_{2l_i}^{-1}x_{2l_i-1,i}^{-1}y_{2l_i-2}^{-1}x_{2l_i-3,i}^{-1} \cdots y_4^{-1}x_{3,i}^{-1}y_2^{-1}x_{1,i}^{-1} \cdot \\ &\cdot y_1x_{2,i}y_3x_{4,i} \cdots x_{2l_i-2,i}y_{2l_i-1}x_{2l_i,i}y_{2l_i+1}. \end{aligned}$$

Conjugando à direita ambos os lados da equação acima por u^{j-2l_i-1} , temos o resultado desejado. \square

Defina agora o quociente de N :

$$\overline{N} := \langle N \mid x_{0,i}^{k_i} = 1, 1 \leq i \leq n \rangle.$$

Note que, em \overline{N} ,

$$x_{j,i}^{k_i} = 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

por (4.2.1).

Temos que \overline{N} é finitamente gerado, por ser quociente do grupo finitamente gerado N .

Defina os grupos

$$\begin{aligned} K_i &:= \langle x_{0,i}, x_{1,i}, \dots, x_{2l_i-1,i} \mid x_{j,i}^{k_i} = 1, j = 0, 1, \dots, 2l_i - 1 \rangle \\ &= *_{0 \leq j \leq 2l_i-1} \langle x_{j,i} \mid x_{j,i}^{k_i} = 1 \rangle \simeq *_{0 \leq j \leq 2l_i-1} \mathbb{Z}_{k_i}, \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

$$K := K_1 := \langle \{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \mid y_j^{k_1} = 1, j \in \mathbb{Z} \rangle = *_{j \in \mathbb{Z}} \langle y_j \mid y_j^{k_1} = 1 \rangle \simeq *_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{k_1},$$

$$M := *_{1 \leq i \leq n} K_i, \quad M_i := K * K_i, \quad \text{para } 2 \leq i \leq n,$$

$$D := \times_{2 \leq i \leq n} \mathbb{Z}_{k_i}, \quad A := K * D.$$

Note que, usando (4.2.2), dado $2 \leq i \leq n$, podemos escrever $\{x_{j,i}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ como subconjunto de M_i . Levando isso em conta, podemos descrever \bar{N} como o seguinte quociente de M :

$$\pi : M \twoheadrightarrow \frac{M}{\langle \{x_{j,i}^{k_i}\}_{j \in \mathbb{Z}, 2 \leq i \leq n} \rangle_M} \simeq \bar{N}.$$

Para dar continuidade à demonstração, precisaremos de outro lema.

Lema 4.2.3. *Para todo $2 \leq i \leq n$ e para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que existem únicos $\tilde{x}_{j,i} \in K_i$ e $v_{j,i} \in K^{K_i}$ tais que*

$$x_{j,i} = \tilde{x}_{j,i} v_{j,i}.$$

Note que

$$\tilde{x}_{j,i} = x_{j,i} \quad \text{se } j = 0, 1, \dots, 2l_i - 1.$$

Portanto,

$$v_{j,i} = 1 \quad \text{se } 0 \leq j \leq 2l_i - 1.$$

Além disso, temos que, para todo $2 \leq i \leq n$,

$$\tilde{x}_{j,i} = \tilde{x}_{j-2,i}^{-1} \tilde{x}_{j-4,i}^{-1} \cdots \tilde{x}_{j-2l_i+2,i}^{-1} \tilde{x}_{j-2l_i,i}^{-1} \tilde{x}_{j-2l_i+1,i} \tilde{x}_{j-2l_i+3,i} \cdots \tilde{x}_{j-3,i} \tilde{x}_{j-1,i}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$v_{j,i} y_j^{-1} \in \langle \{y_k^{K_1}\}_{0 \leq k < j} \rangle, \quad \text{para } j \geq 2l_i \quad (4.2.3)$$

$$v_{j,i}^{-1} y_j^{\tilde{x}_{j,i}} \in \langle \{y_k^{K_i}\}_{j+1 \leq k \leq 2l_i-1} \rangle \quad \text{para } j < 0. \quad (4.2.4)$$

Demonstração. Fixe $2 \leq i \leq n$.

A primeira parte é consequência do lema 2.1.4.

Pelo lemas 2.1.4 e por (4.2.2), temos que

$$\tilde{x}_{j,i} = \tilde{x}_{j-2,i}^{-1} \tilde{x}_{j-4,i}^{-1} \cdots \tilde{x}_{j-2l_i+2,i}^{-1} \tilde{x}_{j-2l_i,i}^{-1} \tilde{x}_{j-2l_i+1,i} \tilde{x}_{j-2l_i+3,i} \cdots \tilde{x}_{j-3,i} \tilde{x}_{j-1,i}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.2.5)$$

Não há o que provar para $0 \leq j \leq 2l_i - 1$.

Seja $j \geq 2l_i$. Então, pelo lema 4.2.2,

$$x_{j,i} = y_{j-1}^{-1} x_{j-2,i}^{-1} y_{j-3}^{-1} x_{j-4,i}^{-1} \cdots y_{j-2l_i+3}^{-1} x_{j-2l_i+2,i}^{-1} y_{j-2l_i+1}^{-1} x_{j-2l_i,i}^{-1} \cdot y_{j-2l_i} x_{j-2l_i+1,i} y_{j-2l_i+2} x_{j-2l_i+3,i} \cdots x_{j-3,i} y_{j-2} x_{j-1,i} y_j. \quad (4.2.6)$$

Para facilitar a notação, considere $\zeta_{k,i}$ como sendo o produto em K_i dos k últimos fatores do lado direito da equação (4.2.5), de forma que $\tilde{x}_{j,i} = \zeta_{2l_i,i}$.

Substituindo $x_{k,i} = \tilde{x}_{k,i} v_{k,i}$ em (4.2.6) e conjugando os fatores, da direita para a esquerda, de modo a “deslocar” os $\tilde{x}_{k,i}$ para a esquerda, temos que

$$x_{j,i} = \zeta_{2l_i,i} \left(y_{j-1}^{\zeta_{2l_i,i}} \right)^{-1} \left(v_{j-2,i}^{\zeta_{2l_i,i}} \right)^{-1} \left(y_{j-3}^{\zeta_{2l_i-1,i}} \right)^{-1} \left(v_{j-4,i}^{\zeta_{2l_i-1,i}} \right)^{-1} \cdots \cdot \left(y_{j-2l_i+3}^{\zeta_{l_i+2,i}} \right)^{-1} \left(v_{j-2l_i+2,i}^{\zeta_{l_i+2,i}} \right)^{-1} \left(y_{j-2l_i+1}^{\zeta_{l_i+1,i}} \right)^{-1} \left(v_{j-2l_i}^{\zeta_{l_i+1,i}} \right)^{-1} \cdot \left(y_{j-2l_i}^{\zeta_{l_i,i}} \right) \left(v_{j-2l_i+1,i}^{\zeta_{l_i-1,i}} \right) \left(y_{j-2l_i+2}^{\zeta_{l_i-1,i}} \right) \left(v_{j-2l_i+3,i}^{\zeta_{l_i-2,i}} \right) \cdots \cdot \left(v_{j-3,i}^{\zeta_{1,i}} \right) \left(y_{j-2}^{\zeta_{1,i}} \right) (v_{j-1,i}) (y_j).$$

Como a decomposição $x_{j,i} = \tilde{x}_{j,i} v_{j,i}$ é única e $\tilde{x}_{j,i} = \zeta_{2l_i,i}$, temos que

$$v_{j,i} = \left(y_{j-1}^{\zeta_{2l_i,i}} \right)^{-1} \left(v_{j-2,i}^{\zeta_{2l_i,i}} \right)^{-1} \left(y_{j-3}^{\zeta_{2l_i-1,i}} \right)^{-1} \left(v_{j-4,i}^{\zeta_{2l_i-1,i}} \right)^{-1} \cdots \cdot \left(y_{j-2l_i+3}^{\zeta_{l_i+2,i}} \right)^{-1} \left(v_{j-2l_i+2,i}^{\zeta_{l_i+2,i}} \right)^{-1} \left(y_{j-2l_i+1}^{\zeta_{l_i+1,i}} \right)^{-1} \left(v_{j-2l_i}^{\zeta_{l_i+1,i}} \right)^{-1} \cdot \left(y_{j-2l_i}^{\zeta_{l_i,i}} \right) \left(v_{j-2l_i+1,i}^{\zeta_{l_i-1,i}} \right) \left(y_{j-2l_i+2}^{\zeta_{l_i-1,i}} \right) \left(v_{j-2l_i+3,i}^{\zeta_{l_i-2,i}} \right) \cdots \cdot \left(v_{j-3,i}^{\zeta_{1,i}} \right) \left(y_{j-2}^{\zeta_{1,i}} \right) (v_{j-1,i}) (y_j), \quad (4.2.7)$$

que nos dá, por indução, o resultado desejado para $j \geq 2l_i$.

Para $j < 0$, vale um argumento análogo.

Reorganizando (4.2.5) e trocando os índices j por $j + 2l_i$, temos que

$$\tilde{x}_{j,i} = \tilde{x}_{j+1,i} \tilde{x}_{j+3,i} \cdots \tilde{x}_{j+2l_i-3,i} \tilde{x}_{j+2l_i-1,i} \tilde{x}_{j+2l_i,i}^{-1} \tilde{x}_{j+2l_i-2,i}^{-1} \cdots \tilde{x}_{j+4,i}^{-1} \tilde{x}_{j+2,i}^{-1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.2.8)$$

Pelo lema 4.2.2, temos que, trocando os índices j por $j + 2l_i$,

$$x_{j,i} = y_j x_{j+1,i} y_{j+2} x_{j+3,i} \cdots x_{j+2l_i-3,i} y_{j+2l_i-2} x_{j+2l_i-1,i} y_{j+2l_i} \cdot x_{j+2l_i,i}^{-1} y_{j+2l_i-1} x_{j+2l_i-2,i} y_{j+2l_i-3}^{-1} \cdots x_{j+4,i}^{-1} y_{j+3}^{-1} x_{j+2,i}^{-1} y_{j+1,i}^{-1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.2.9)$$

Para facilitar a notação, considere $\zeta'_{k,i}$ como sendo o produto em K_i dos k últimos fatores do lado direito da equação (4.2.8), de forma que $\tilde{x}_{j,i} = \zeta'_{2l_1,i}$.

Então, substituindo $x_{k,i} = \tilde{x}_{k,i}v_{k,i}$ em (4.2.9) e conjugando os fatores, da direita para a esquerda, de modo a “deslocar” os $\tilde{x}_{k,i}$ para a esquerda, temos que

$$\begin{aligned} x_{j,i} &= (\zeta'_{2l_1,i}) \left(y_j^{\zeta'_{2l_1,i}} \right) \left(v_{j+1,i}^{\zeta'_{2l_1-1,i}} \right) \left(y_{j+2}^{\zeta'_{2l_1-1,i}} \right) \left(v_{j+3,i}^{\zeta'_{2l_1-2,i}} \right) \cdots \\ &\quad \cdots \left(v_{j+2l_1-3,i}^{\zeta'_{l_1+1,i}} \right) \left(y_{j+2l_1-2}^{\zeta'_{l_1+1,i}} \right) \left(v_{j+2l_1-1,i}^{\zeta'_{l_1,i}} \right) \left(y_{j+2l_1}^{\zeta'_{l_1,i}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(v_{j+2l_1,i}^{\zeta'_{l_1,i}} \right)^{-1} \left(y_{j+2l_1-1}^{\zeta'_{l_1-1,i}} \right)^{-1} \left(v_{j+2l_1-2,i}^{\zeta'_{l_1-1,i}} \right)^{-1} \left(y_{j+2l_1-3}^{\zeta'_{l_1-2,i}} \right)^{-1} \cdots \\ &\quad \cdots \left(v_{j+4,i}^{\zeta'_{2,i}} \right)^{-1} \left(y_{j+3}^{\zeta'_{1,i}} \right)^{-1} \left(v_{j+2,i}^{\zeta'_{1,i}} \right)^{-1} (y_{j+1})^{-1}. \end{aligned}$$

Como a decomposição $x_{j,i} = \tilde{x}_{j,i}v_{j,i}$ é única e $\tilde{x}_{j,i} = \zeta'_{2l_1,i}$, temos que

$$\begin{aligned} v_{j,i} &= \left(y_j^{\zeta'_{2l_1,i}} \right) \left(v_{j+1,i}^{\zeta'_{2l_1-1,i}} \right) \left(y_{j+2}^{\zeta'_{2l_1-1,i}} \right) \left(v_{j+3,i}^{\zeta'_{2l_1-2,i}} \right) \cdots \\ &\quad \cdots \left(v_{j+2l_1-3,i}^{\zeta'_{l_1+1,i}} \right) \left(y_{j+2l_1-2}^{\zeta'_{l_1+1,i}} \right) \left(v_{j+2l_1-1,i}^{\zeta'_{l_1,i}} \right) \left(y_{j+2l_1}^{\zeta'_{l_1,i}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(v_{j+2l_1,i}^{\zeta'_{l_1,i}} \right)^{-1} \left(y_{j+2l_1-1}^{\zeta'_{l_1-1,i}} \right)^{-1} \left(v_{j+2l_1-2,i}^{\zeta'_{l_1-1,i}} \right)^{-1} \left(y_{j+2l_1-3}^{\zeta'_{l_1-2,i}} \right)^{-1} \cdots \\ &\quad \cdots \left(v_{j+4,i}^{\zeta'_{2,i}} \right)^{-1} \left(y_{j+3}^{\zeta'_{1,i}} \right)^{-1} \left(v_{j+2,i}^{\zeta'_{1,i}} \right)^{-1} (y_{j+1})^{-1}, \quad (4.2.10) \end{aligned}$$

que nos dá, por indução, o resultado desejado para $j < 0$. □

Queremos agora construir um epimorfismo

$$\theta : M \twoheadrightarrow A$$

de modo que $\theta|_K = \text{Id}_K$ e θ projete K_i em \mathbb{Z}_{k_i} , para $2 \leq i \leq n$.

Fixe $2 \leq i \leq n$. Levando o comentário acima em consideração e considerando \mathbb{Z}_{k_i} como subgrupo de A , definimos θ em K_i da seguinte maneira:

$$\theta(x_{0,i}) = \theta(x_{1,i}) = \cdots = \theta(x_{2l_1-2,i}) = \bar{1} \in \mathbb{Z}_{k_i}, \quad \theta(x_{2l_1-1,i}) = \bar{2} \in \mathbb{Z}_{k_i}.$$

Pelo lema 4.2.3, parte 1, temos que

$$\theta(\tilde{x}_{j+2l_1,i}) = -\theta(\tilde{x}_{j,i}) + \theta(\tilde{x}_{j+1,i}) - \theta(\tilde{x}_{j+2,i}) + \cdots + \theta(\tilde{x}_{j+2l_1-1,i}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\theta(\tilde{x}_{2l_i,i}) = \bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{2l_i+1,i}) = \theta(\tilde{x}_{2l_i+2,i}) = \cdots = \theta(\tilde{x}_{4l_i-1,i}) = -\bar{1}, \\ \theta(\tilde{x}_{4l_i,i}) = -\bar{2}, \quad \theta(\tilde{x}_{4l_i+1,i}) = -\bar{1}, \\ \theta(\tilde{x}_{4l_i+2,i}) = \theta(\tilde{x}_{4l_i+3,i}) = \cdots = \theta(\tilde{x}_{6l_i,i}) = \bar{1}, \quad \theta(\tilde{x}_{6l_i+1,i}) = \bar{2}, \cdots\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

e assim por diante, de modo que

$$\theta(x_{j+4l_i+2,i}) = \theta(x_{j,i}) \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

O resultado também vale de maneira análoga para índices negativos, usando que

$$\theta(\tilde{x}_{j,i}) = \theta(\tilde{x}_{j+1,i}) - \theta(\tilde{x}_{j+2,i}) + \theta(\tilde{x}_{j+3,i}) + \cdots - \theta(\tilde{x}_{j+2l_i,i}).$$

Usando a decomposição $x_{k,i} = \tilde{x}_{k,i} v_{k,i}$, temos que

$$\theta(x_{j,i})^{k_i} = \underbrace{(\theta(\tilde{x}_{j,i})\theta(v_{j,i})) (\theta(\tilde{x}_{j,i})\theta(v_{j,i})) \cdots (\theta(\tilde{x}_{j,i})\theta(v_{j,i}))}_{k_i \text{ termos}},$$

$$\theta(x_{j,i})^{k_i} = \theta(\tilde{x}_{j,i})^{k_i} \left(\theta(v_{j,i})^{\theta(\tilde{x}_{j,i})^{k_i-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_{j,i})^{\theta(\tilde{x}_{j,i})^2} \right) \left(\theta(v_{j,i})^{\theta(\tilde{x}_{j,i})} \right) \left(\theta(v_{j,i})^1 \right),$$

$$\theta(x_{j,i})^{k_i} = \left(\theta(v_{j,i})^{\theta(\tilde{x}_{j,i})^{k_i-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_{j,i})^{\theta(\tilde{x}_{j,i})^2} \right) \left(\theta(v_{j,i})^{\theta(\tilde{x}_{j,i})} \right) \left(\theta(v_{j,i})^1 \right).$$

Defina

$$x_i := \bar{1} = \theta(x_{0,i}) = \theta(\tilde{x}_{0,i}) \in \mathbb{Z}_{k_i}.$$

Suponha que $k_i \neq 2$. Então, por (4.2.11), temos que $\theta(\tilde{x}_{j,i})$ é um gerador de \mathbb{Z}_{k_i} , qualquer que seja $j \in \mathbb{Z}$. Logo, a menos de uma permutação dos expoentes $\{x_i^{k_i-1}, x_i^{k_i-2}, \dots, x_i^2, x_i, 1\}$, temos que

$$\theta(x_{j,i})^{k_i} = \left(\theta(v_{j,i})^{x_i^{k_i-1}} \right) \cdots \left(\theta(v_{j,i})^{x_i^2} \right) \left(\theta(v_{j,i})^{x_i} \right) \left(\theta(v_{j,i})^1 \right). \quad (4.2.12)$$

Se $k_i = 2$, temos que

$$\theta(\tilde{x}_{j,i}) = \begin{cases} e_A, & \text{se } j \equiv -2 \pmod{2l_i + 1} \\ x_i, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Assim, se $j \equiv -2 \pmod{2l_i + 1}$, temos que

$$\theta(x_{j,i})^2 = \theta(v_{j,i})^2. \quad (4.2.14)$$

Note que esse é o único caso em que $\theta(\tilde{x}_{j,i}) = e_A$.

Caso contrário,

$$\theta(x_{j,i})^2 = (\theta(v_{j,i})^{x_i})\theta(v_{j,i}).$$

Considere agora a projeção canônica

$$\delta : A \twoheadrightarrow \frac{A}{\langle \{\theta(x_{j,i})^{k_i}\}_{j \in \mathbb{Z}, 2 \leq i \leq n} \rangle^A} =: \bar{A}$$

O epimorfismo $\theta : M \rightarrow A$ induz um epimorfismo $\bar{\theta} : \bar{N} \rightarrow \bar{A}$, conforme o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\theta} & A \\ \pi \downarrow & & \downarrow \delta \\ \bar{N} & \xrightarrow{\bar{\theta}} & \bar{A} \end{array}$$

Portanto, \bar{A} é finitamente gerado.

Observe que K^A é um subgrupo de índice finito de A , já que

$$\frac{A}{K^A} \simeq \times_{2 \leq i \leq n} \mathbb{Z}_{k_i} = D. \quad (4.2.15)$$

Então,

$$B := \delta(K^A)$$

é um subgrupo de índice finito de \bar{A} . Ou seja, B é finitamente gerado. Veremos que isso gera uma contradição.

Pelo lema 2.1.5, temos que

$$K^A = *_{j \in \mathbb{Z}, d \in D} \langle y_j^d \rangle \leq A.$$

Note que como x_i é gerador de \mathbb{Z}_{k_i} , para todo $2 \leq i \leq n$, então

$$\mathbb{Z}_{k_1}[D] \simeq \mathbb{Z}_{k_1}[x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}],$$

como álgebras de grupos (com coeficientes em \mathbb{Z}_{k_1}).

Considere B^{ab} como sendo a abelianização de B . O \mathbb{Z} -módulo B^{ab} é finitamente gerado, pois B é finitamente gerado. Veremos B^{ab} como sendo um $\mathbb{Z}_{k_1}[D]$ -módulo, gerado pelas classes de

$$e_j := \delta\theta(y_j),$$

onde a ação (denotada por \circ) é dada por conjugação.

Defina

$$p_k(a) := 1 + a + \dots + a^{k-2} + a^{k-1}$$

e defina

$$\hat{x}_{j,i}, \quad \hat{e}_j, \quad \hat{v}_{j,i}$$

como sendo as imagens em B^{ab} de

$$\delta\theta(\tilde{x}_{j,i}), \quad e_j, \quad \delta\theta(v_{j,i}).$$

Por (4.2.12), temos que, como $\mathbb{Z}_{k_1}[D]$ -módulos,

$$B^{ab} \simeq \frac{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} e_j (\mathbb{Z}_{k_1}[x_2^{\pm 1}, x_3^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}])}{I + I'}, \quad (4.2.16)$$

de modo que $e_j \mathbb{Z}_{k_1}[D] \simeq \mathbb{Z}_{k_1}[D]$, I é o $\mathbb{Z}_{k_1}[D]$ -submódulo gerado por

$$\{\hat{v}_{j,i} \circ (p_{k_i}(x_i)) \mid \theta(\tilde{x}_{j,i}) \neq e_A\}$$

e I' é o $\mathbb{Z}_{k_1}[D]$ -submódulo gerado por

$$\{k_i \hat{v}_{j,i} \mid \theta(\tilde{x}_{j,i}) = e_A\} = \{2\hat{v}_{j,i} \mid k_i = 2, \theta(\tilde{x}_{j,i})\}.$$

Defina

$$R := \frac{\mathbb{Z}_{k_1}[x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]}{\langle \{p_{k_i}(x_i)\}_{2 \leq i \leq n} \rangle}.$$

Obviamente, $R \neq 0$. Mais precisamente, R é um \mathbb{Z}_{k_1} -espaço vetorial de dimensão

$$\delta := \prod_{2 \leq i \leq n} (k_i - 1),$$

já que

$$p_{k_i}(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i^{k_i-1} = -x_i^{k_i-2} - x_i^{k_i-3} - \dots - x_i - 1,$$

ou seja, R é gerado, como \mathbb{Z}_{k_1} -espaço vetorial, por

$$\{x_2^{j_2} x_3^{j_3} \dots x_n^{j_n} \mid 0 \leq j_i \leq k_i - 2, 2 \leq i \leq n\}. \quad (4.2.17)$$

Suponha que $k_i \neq 2$ para $2 \leq i \leq n$.

Por (4.2.11), temos que $I' = 0$.

Então, o R -módulo

$$V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{e}_i R, \quad \text{onde } \hat{e}_i R \simeq R,$$

é um quociente de B^{ab} , e, portanto, é finitamente gerado. Mas isso é uma contradição, pois $R \neq 0$.

O caso acima é o caso mais simples. Se tivermos potências de 2 em meio aos k_i 's originais, teremos que considerar alguns k_i 's da demonstração (depois de considerá-los como primos) como iguais a 2, com a limitação que está na hipótese do teorema.

Sem perda de generalidade, digamos que os elementos de $\{k_i\}_{2 \leq i \leq n}$ que são potências de 2 são

$$k_2 = k_3 = \dots = k_{m+1} = 2,$$

onde, por hipótese do teorema,

$$\sum_{2 \leq i \leq m+1} \frac{1}{2l_i + 1} < 1$$

Seja

$$L_i = \{j \in \mathbb{Z} \mid j \equiv -2 \pmod{2l_i + 1}\}.$$

Por (4.2.12), (4.2.13) e (4.2.14), temos que I é o $\mathbb{Z}_{k_1}[D]$ -submódulo gerado por:

$$\hat{v}_{j,i} \circ p_{k_i}(x_i),$$

para $(j, i) \in (\mathbb{Z} \times \{m+2, m+3, \dots, n\}) \cup ((\mathbb{Z} \setminus L_i) \times \{2, 3, \dots, m+1\})$

e I' é o $\mathbb{Z}_{k_1}[D]$ -submódulo gerado por:

$$2\hat{v}_{j,i}, \text{ para } (j, i) \in L_i \times \{2, 3, \dots, m+1\}.$$

Nesse caso, definimos

$$R = \frac{\mathbb{Z}_{k_1}[x_2, x_3, \dots, x_n]}{\langle \{x_i + 1\}_{2 \leq i \leq m+1} \cup \{p_{k_i}(x_i)\}_{m+2 \leq i \leq n} \rangle} \simeq \frac{\mathbb{Z}_{k_1}[x_{m+2}, x_{m+3}, \dots, x_n]}{\langle \{p_{k_i}(x_i)\}_{m+2 \leq i \leq n} \rangle},$$

de modo que

$$x_2 = x_3 = \dots = x_{m+1} = -1$$

em R .

Recordando que

$$L_j := \{i \in \mathbb{Z} \mid i \equiv -2 \pmod{2l_j + 1}\},$$

temos que I' está contido no \mathbb{Z}_{k_1} -subespaço vetorial de R gerado por

$$\bigsqcup_{(j,i) \in L_i \times \{2,3,\dots,m+1\}} \hat{v}_{j,i}R,$$

sendo que vale a igualdade se $2 \neq k_1$.

Ou seja, temos que o \mathbb{Z}_{k_1} -espaço vetorial

$$W := \frac{\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \hat{e}_i R}{\langle \bigsqcup_{(j,i) \in L_i \times \{2,3,\dots,m+1\}} \hat{v}_{j,i} R \rangle}, \quad \text{onde } \hat{e}_i R \simeq R,$$

é um quociente de B^{ab} , e, portanto, tem dimensão finita.

Seja

$$l := \text{mmc}(\{2l_i + 1\}_{2 \leq i \leq m+1}) \geq 3.$$

Defina também, para cada $s \geq 1$,

$$\Lambda_s := \{0, 1, \dots, sl - 1\}$$

e o seguinte subespaço de W :

$$E_s := \frac{\bigoplus_{i \in \Lambda_s} \hat{e}_i R}{\left\langle \bigsqcup_{(j,i) \in L_i \times \{2,3,\dots,m+1\}} \hat{v}_{j,i} R \right\rangle \cap [\bigoplus_{i \in \Lambda_s} \hat{e}_i R]}.$$

Pelo lema 4.2.3, temos que

•

$$\hat{v}_{j,i} - \hat{e}_j \in \bigoplus_{0 \leq k \leq j} \hat{e}_k R, \quad \text{se } j \geq 2l_i;$$

•

$$\hat{v}_{j,i} = 0, \quad \text{se } 0 \leq j \leq 2l_i - 1;$$

•

$$\hat{v}_{j,i} - \hat{e}_j \hat{x}_{j,i} \in \bigoplus_{j+1 < k \leq 2l_i - 1}, \quad \text{se } j < 0.$$

Logo,

$$E_s = \frac{\bigoplus_{i \in \Lambda_s} \hat{e}_i R}{\left\langle \bigsqcup_{(j,i) \in [L_i \cap \Lambda_s] \times \{2,3,\dots,m+1\}} \hat{v}_{j,i} R \right\rangle}.$$

Note que, por (4.2.17), temos a igualdade de \mathbb{Z}_{k_1} -espaços vetoriais:

$$\langle \hat{v}_{j,i} R \rangle = \left\langle \{\hat{v}_{j,i} x_2^{j_2} x_3^{j_3} \cdots x_n^{j_n}\}_{0 \leq j_i \leq k_i - 2, 2 \leq i \leq n} \right\rangle.$$

Além disso, claro que

$$\dim \langle \hat{v}_{j,i} R \rangle = \dim R = \delta.$$

Portanto, temos que

$$\dim_{\mathbb{Z}_{k_1}} \bigoplus_{i \in \Lambda_s} \hat{e}_i R = \delta sl.$$

Então,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}_{k_1}} \left\langle \bigsqcup_{(j,i) \in [L_i \cap \Lambda_s] \times \{2,3,\dots,m+1\}} \hat{v}_{j,i} R \right\rangle &\leq \delta \sum_{2 \leq i \leq m+1} \#[L_i \cap \Lambda_s] \\ &\leq \delta s \sum_{2 \leq i \leq m+1} \frac{l}{2l_i + 1} < \delta s. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\dim_{\mathbb{Z}_{k_1}} E_s > \delta s l - \delta s = \delta s(l - 1),$$

e, portanto,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \dim_{\mathbb{Z}_{k_1}} E_s = \infty,$$

uma vez que $l - 1 \geq 2 > 0$.

Como $E_s \leq W$ para todo $s > 0$, então

$$\dim_{\mathbb{Z}_{k_1}} W = \infty,$$

o que é uma contradição. □

Referências Bibliográficas

- [Aberg] H. Aberg, *Bieri - Strebel valuations (of finite rank)*, Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986), n. 2, 269 - 304
- [BsBd] Bestvina, M.; Brady, N. *Morse theory and finiteness properties of groups*, Invent. Math. 129, n. 3 (1997), 445-470.
- [Bi] Bieri, R. *Homological dimension of discrete groups*, Mathematics Department Queen Mary College (1981).
- [BiNSt] Bieri, R.; Neumann, W. D.; Strebel, R. *A geometric invariant of discrete groups*, Invent. Math 90 (1987), 451-477
- [BiHa] Bieri, R., Harlander, J., *On the FP_3 -Conjecture for metabelian groups*, J. London Math. Soc. (2) 64 (2001),n. 3, 595-610
- [BiRe] Bieri, R.; Renz B. *Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups*, Comment. Math. Helv. 63 (1988), 464-497.
- [BiSt] Bieri, R.; Strebel, R. *Valuations and finitely presented metabelian groups*, Proc. London Math. Soc. (3)41 (1980), 439-464.
- [Coh] Cohen, D. E. *Combinatorial Group Theory: a topological approach*, London Math. Soc. Student Texts 14 (1989).
- [Geo] Geoghegan, R. *Topological Methods in Group Theory*, Springer (2008).
- [HaKoch1] Harlander, J.; Kochloukova, D. H. *On the Σ^3 -Conjecture for metabelian groups*, Journal of London Mathematical Society (2) , v. 67, n. 3, p. 609-625, 2003.
- [HaKoch2] Harlander, J.; Kochloukova, D. H. *The Σ^2 -Conjecture for metabelian groups:the general case*, Journal of Algebra, v. 273, n. 2, p. 435-454, 2004.
- [Ht] Hatcher, A. *Algebraic Topology*, <http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html> (2002).
- [Me] Meier, J. *Geometric invariants for Artin groups*, Proc. London Math. Soc. (3) 74 (1997) 151-173

- [Mn1] Meinert, H. *The Homological Invariants for Metabelian Groups of Finite Prüfer Rank: A Proof of the Σ^m -Conjecture*, Proc. London Math. Soc. (3) 72 (1996), n. 2, 385-424.
- [MeMnWy] Meier, J.; Meinert, H.; VanWyk, L. *On the Σ -invariants of Artin Groups*, Topology and its Applications, 110 (2001), 71-81.
- [MeMnWy2] Meier, J.; Meinert, H.; VanWyk, L. *Higher generation subgroup sets and the Σ -invariants of graph groups*, Comment. Math. Helv. 73 (1998) 22-44.
- [Re] Renz, B. *Geometrische Invarianten Endlichkeitseigenschaften von Gruppen*, Dissertation. Universität Frankfurt a.M. (1988)
- [Sch] Schmitt, S.; *Über den Zusammenhang der geometrischen Invarianten von Gruppe und Untergruppe mit Hilfe von variablen Modulkoeffizienten*. Diplomarbeit. Frankfurt a. M., 1991.