Igor dos Santos Lima

Completamentos Pro-p de Grupos de Dualidade de Poincaré

CAMPINAS
2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Igor dos Santos Lima

Completamentos Pro-p de Grupos de Dualidade de Poincaré

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

ORIENTADORA: DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO IGOR DOS SANTOS LIMA, E ORIENTADA PELA PROFª DRª DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA.

Assinatura da Orientadora

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

	Lima, Igor dos Santos, 1983-
L628c	Completamentos pro-p de grupos de dualidade de Poincaré / Igor dos Santos Lima. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.
	Orientador: Dessislava Hristova Kochloukova.
	Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Grupos topológicos. 2. Álgebra homológica. 3. Dualidade (Matemática). 4. Grupos profinitos. 5. Teoria dos grupos. I. Kochloukova, Dessislava Hristova,1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Pro-p completions of Poincaré duality groups
Palavras-chave em inglês:
Topological groups
Homological algebra
Duality theory (Mathematics)
Profinite groups
Group theory
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Dessislava Hristova Kochloukova [Orientador]
Paulo Roberto Brumatti
Pavel Zalesski
Said Najati Sidki
Aline Gomes da Silva Pinto
Data de defesa: 03-08-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 03 de agosto de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof(a). Dr(a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

Prof(a). Dr(a). PAVEL ZALESSKI

Prof(a). Dr(a). SAID NAJATI SIDKI

Prof(a). Dr(a). ALINE GOMES DA SILVA PINTO

Pra minha mãe: Isabel
Pereira dos Santos Lima.

Aos que sempre acreditaram
que esse sonho seria possível...

AGRADECIMENTOS

Um dia uma pessoa acreditou

Depositou em mim sua própria confiança

Esperança no menino

Destino, coisa mágica

Matemática, curso escolhido

Atingido, objetivo: Formou-se

Continuou-se, na mesma trilha

Brilha, como um dia imaginado

Mestrado, concluído, coração partido

Decidido: Campinas lá vou eu

Prometeu: voltaria, terminaria, faria o Doutorado

Acabado, terminado, sofrido é fato

Grato: mãe, pai, irmãos e aos demais que acreditaram

Apostaram: final feliz

Diz: 10 anos de Matemática

Prática ou teoria

Dia a dia, enfim, pensaria

Dedicaria: aos amigos também

Ninguém vive sem eles e sem eles eu não sou ninguém

Porém... também não posso esquecer: Obrigado Capes e CNPq

Que custearam a parte financeira nesse processo

Progresso: Doutor em matemática

Tática, seja qual for, foi promissora

Orientadora, Desi: Obrigado!

Registrado: Sugestões, correções, paciência, competência e sinceridade

Humildade: Agradeço a toda banca, pelo sim, pela confiança, pelo aceite do convite é verdade...

Amizade: Desta cidade me recordarei... dos momentos bons e ruins que passei

Sei que fiz amigos, mas não os nomearei

Lembrarei deles e eles de mim eu sei... assim segue a trilha que eu citarei

Cheguei em Campinas já muito bem recebido

Acolhido na república do Luís de Miranda, meu amigo sabido

Agradecido: Obrigado Luís pela força durante toda minha caminhada

Inaugurada, faz parte, na Rua José Duarte, com a Dahisy e Deborah na mesma morada

Marcada: Obrigado meninas pela experiência inicial compartilhada

Nada que eu cite aqui valerá mais do que o que eu guardarei pra mim

Sim, deixo pra Dahisy um agradecimento em especial: Obrigado pela música, na moral

Legal também vai ser deixar aqui registrado:

Obrigado, Grasiele, muito obrigado por ter me cedido sua mesa no predinho

Sozinho, quietinho lá estava eu estudando na Lattes e você passou

Conversou e no dia seguinte foi a Fernanda (gente fina) que me contou

Marcou-me fortemente aquele momento, vou resumir em uma palavra meu sentimento: Surpresa!

Certeza que também recordei... da Praça do Coco, da Santa Genebra onde também morei

Sei que tenho que registrar: de longe, de perto, onde quer que eu vá

Lá está: a galera de Brasília

Família que só aumenta, "Os malas"que ninguém aguenta

Lamenta pela distância, mas fica sempre na esperança

Lembrança, coisa que vai e vem

Sem vocês eu seria quem?

Hein? Tem muitas pessoas que eu gostaria e poderia mencionar

Parar aqui é que não vou

Sou muito grato ao grupo de estudo que naturalmente se formou

Lembrou? Lembrei: Alda, Carlos, Juliana, Pedro, Sérgio, Ariane, Elisa, Ricardo,

Lonardo, Manuela, Júlio, Kisnney, Tiago, Edinho, PH, Mariana, Cléber, Renato,

Ronaldo e todos que fizeram parte do grande aprendizado

Obrigado pela união que fez a força! Sem vocês, o presente seria incerto

Certo mesmo é a excelência, competência do trabalho: da Lívia, da Tânia e do Edinaldo

Respaldo... tive do Vágner, Anderson, casal Zapata (Flávia e Theo), Zalesski, Marcelo, Raimundo: profinitos da pesada

Animada foi a época que estive na quebrada e estudei SSS com o Theo Zapata

Grata também foi a satisfação de um cara que é como se fosse meu irmão

Então, sempre trocando ideia e opinião, sim ele tem o dom

Robson, valeu! Mano Robson obrigado pelo apoio que me deu

Seu espaço aqui está registrado

Anotado também e dedicado: para a Suele minha grande amiga

Antiga amizade que me inspira

Vira, virou rotina boa, obrigado Ludimila pela conversa ”à toa”e boa

Soa como zuação, mas na minha opinião

Distração também agrega na formação

Então, Tamara, obrigado sim

Tim: esta empresa sabe o que a Tamara já fez por mim

Assim, por tudo isso eu fico agradecido

Esquecido é que não posso ficar...

Parar já já eu vou

Estou lembrando de forma grata da ’Su’sanne, da ’Chris’tiane, da ’Mano’ela, da ’Rafa’ela...

Dela que tá no Distrito Federal

Especial, minha mãe: tá na torcida desde 9 meses antes do parto normal

Legal? Enfim, final: Falei de coração...

São vocês minha maior motivação

Então como diria o rapper Edi Rock (alto nível): é necessário sempre acreditar que um sonho é possível...

ABSTRACT

In this work we give in the Main Theorems sufficient conditions for that the pro-p completion of an abstract orientable PD_n group to be virtually a pro-p PD_s group for some $s \leq n-2$ with $n \geq 4$. This result is a generalization of the Theorem 3 in [K-2009]. Our proof is based on [K-2009] and on the results of A. A. Korenev [Ko-2004] and [Ko-2005]. Furthermore we give some examples of groups that satisfy the conditions of the Main Theorems.

RESUMO

Neste trabalho, nos Teoremas Principais, damos condições suficientes para que o completamento pro-p de um grupo abstrato PD_n seja virtualmente um grupo pro-p PD_s para algum $s \leq n-2$ com $n \geq 4$. Esse resultado é uma generalização do Teorema 3 em [K-2009]. Nossa prova é baseada em [K-2009] e nos resultados de A. A. Korenev [Ko-2004] e [Ko-2005]. Além disso, damos alguns exemplos de grupos que satisfazem as condições dos Teoremas Principais.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Em [JW-1972], F.E.A Johnson e C.T.C Wall definiram os grupos de dualidade de Poincaré por meio de três condições de finitude: A primeira delas pede que o grupo (finitamente apresentado) G tenha dimensão cohomológica finita, o que é equivalente a pedir que o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ possua uma resolução projetiva $\mathcal{P}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento finito, onde $\mathbb{Z}G$ é o anel de grupo de G; A segunda condição de finitude pede que todos os módulos projetivos da resolução projetiva $\mathcal{P}$ sejam finitamente gerados, o que é equivalente a G ter tipo FP_∞; Já a terceira e última, que exista um inteiro k tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G) \cong \mathbb{Z}$ (como grupo abeliano) se $i = k$ e 0 se $i \neq k$, onde $H^i(G, \mathbb{Z}G)$ é a i-ésima cohomologia de G com coeficientes em $\mathbb{Z}G$. E esse inteiro é dito a dimensão do grupo de dualidade de Poincaré.

Em seguida, Johnson-Wall justificaram que a motivação para o estudo dos grupos de dualidade de Poincaré era geométrica: Grupos fundamentais de variedades asféricas (variedades cujos grupos de homotopia são todos triviais em dimensões maiores do que 1) fechadas de dimensão n são grupos de dualidade de Poincaré de mesma dimensão n. E ainda obtiveram resultados que permitem construir exemplos de grupos de dualidade de Poincaré em todas as dimensões: Um subgrupo H de índice finito em um grupo livre de torção G é de dualidade de Poincaré de dimensão n se, e somente se, o grupo G também o é; Extensão de grupos de dualidade de Poincaré também é um grupo de dualidade de Poincaré (a dimensão nesse caso é a soma das dimensões). O próprio artigo [JW-1972] menciona que R. Bieri também definiu, de modo independente e equivalente, os grupos de dualidade de Poincaré em [Bi-1972]. A definição de Bieri usa produto cap e não exige que o grupo seja finitamente apresentado. Vale ressaltar que M. W. Davis mostrou em [D-2000], Teorema 7.1.5, que para cada $n \geq 4$, existem grupos de dualidade de Poincaré de dimensão n que não são finitamente apresentados (diferentemente do que ocorre com o grupo fundamental de uma n-variedade fechada que necessariamente é finitamente apresentado).

Em [BE-1973], R. Bieri e B. Eckmann caracterizam os grupos de dualidade de Poincaré como sendo grupos de tipo FP (isto é, dimensão cohomológica finita e tipo FP_∞) e também por meio de uma dualidade entre a cohomologia e a homologia (dualidade de Poincaré já conhecida para certas variedades), para maiores detalhes, veja Capítulo 8, Teorema 10.1 em [B-1982]. Vale ressaltar que o grupo de dualidade de Poincaré é dito orientável se $H^k(G, \mathbb{Z}G)$ for um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, caso contrário G é não orientável. E ainda, todo grupo de dualidade de Poincaré possui um subgrupo de índice ≤ 2 que é orientável, veja por exemplo [Bi-1981], página 173.

Usaremos a notação grupo PD_n para designar um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n. É bem conhecido que, a menos de isomorfismos, o único grupo PD_1 é $\mathbb{Z}$ e que os grupos PD_2 são precisamente os grupos de superfície fechadas, veja por exemplo [D-2000], Teorema 5.1. Em dimensão 3, é um problema em aberto se os grupos PD_3 são apenas grupos fundamentais de 3-variedades asféricas fechadas. Se G é um grupo PD_3 solúvel, então G é o grupo fundamental de uma 3-variedade asférica fechada. De fato, em [Bi-1981], Teoremas 9.9 e 9.10, temos que qualquer grupo policíclico livre de torção é um grupo de dualidade de Poincaré (mostra-se usando que extensão de grupo PD_n por PD_m é um grupo PD_{m+n}) e por [Bi-1981], Teorema 9.23, qualquer grupo de dualidade de Poincaré solúvel é policíclico (em particular, livre de torção) e por L. Auslander e F.E.A. Johnson, veja Teorema 1 em [AJ-1976], temos que todo grupo policíclico livre de torção é o grupo fundamental de alguma variedade asférica fechada.

Há ainda muitos problemas em aberto sobre grupos de dualidade de Poincaré. Em particular, em dimensão 3 temos o trabalho de J. Hillman [H-2009] que apresenta 39 questões em aberto sobre grupos PD_3 e seus subgrupos.

Para lembrar, um grupo profinito é limite inverso de grupos finitos. No caso profinito, existem duas definições de um grupo profinito de dualidade de Poincaré G (em um primo p) de dimensão n: A de Symonds-Weigel em [SW-2000] e a de Neukirch-Schmidt-Wingberg [NSW-2000]. Tais definições diferem no ponto em que G deve ser de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$. Mas ambas definições são equivalentes no caso pro-p (um grupo pro-p é o limite inverso de p-grupos finitos):

Definição. *[SW-2000] Seja G um grupo pro-p de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e p-dimensão cohomológica $cd_p(G) = n$. Se $H^i(G, \mathbb{Z}_p[[G]]) = 0$ para $i \neq n$ e para $i = n$ é livre de p-torção, então G é um grupo pro-p de dualidade. Se além disso $H^n(G, \mathbb{Z}_p[[G]]) \cong \mathbb{Z}_p$, então G é dito um grupo grupo pro-p de dualidade de Poincaré de dimensão n. E ainda, se a ação de G em $H^n(G, \mathbb{Z}_p[[G]])$ é trivial, então G é dito um grupo pro-p PD_n orientável, caso contrário G é não orientável.*

É bem conhecido que $\mathbb{Z}_p$ é o único, a menos de isomorfismos, grupo pro-p PD_1 e que os grupos pro-p PD_2 são precisamente os grupos de Demushkin infinitos.

Em [Re-1997], Teorema 10.2, A. Reznikov mostrou que se um grupo G viola a Conjectura de W. Thurston sobre o primeiro número de Betti de uma certa 3-variedade (isto é, se G é um reticulado hiperbólico cocompacto 3-dimensional onde cada subgrupo de índice finito em G possui abelianização finita), então o completamento pro-p de G é um grupo pro-p PD_3. Adotando a definição de Symonds-Weigel, que está de acordo com a definição no caso abstrato, Kochloukova-Zalesskii em [KZ-2008], Teorema C, generalizaram os resultados obtidos por A. Reznikov. Esse resultado de Kochloukova-Zalesskii foi obtido independentemente por Th. Weigel no Teorema 3.3 em [W-2007]. A prova de Kochloukova-Zalesskii foi homológica e generalizada para completamentos profinitos e os métodos de Kochloukova-Zalesskii [KZ-2008] foram aplicados para completamentos profinitos e pro-p de grupos PD_3 orientáveis e em alguns casos para uma classe mais geral de completamentos de grupos.

Para lembrar, a p-característica de Euler de um grupo pro-p G de tipo FP_∞ e $cd_p(G)$ finita é dada por $\chi_p(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd_p(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(G, \mathbb{F}_p)$. E ainda, se X é uma propriedade de grupos, dizemos que um grupo K é virtualmente X se K possui um subgrupo de índice finito que tem a propriedade X.

Como uma continuação natural dos resultados de Kochloukova-Zalesskii [KZ-2008] e usando cohomologia com coeficientes no anel de grupo $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$ e os resultados de A. A. Korenev [Ko-2004] e [Ko-2005] sobre grupos pro-p virtualmente grupos pro-p de dualidade de Poincaré, D. H. Kochloukova em [K-2009] estabeleceu condições necessárias e suficientes para que o completamento pro-p de um grupo PD_4 orientável e de característica de Euler 0 seja um grupo pro-p PD_4 orientável de p-característica de Euler 0. De fato, os resultados funcionam para uma classe mais geral de completamentos de grupos.

Esta tese é uma generalização do Teorema 3 de Kochloukova [K-2009]

Teorema (Teorema 3, [K-2009])**.** *Seja G um grupo abstrato PD_4 orientável e de característica de Euler $\chi(G) = 0$ com completamento pro-p $\widehat{G}_p$. Seja $\mathcal{T}$ um conjunto dirigido de subgrupos normais de índice potência de p em G tal que $\mathcal{T}$ induz a topologia pro-p de G. Suponha além disso que*

1. *$\widehat{G}_p$ não é virtualmente procíclico e não é um grupo pro-p PD_4 orientável.*
2. *$\forall U \in \mathcal{T}$, temos que $\sum_{0\leq i\leq 4}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) = 0$.*
3. *$\sup_{U\in\mathcal{T}}(2\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p)) = m < \infty$.*

Então $\widehat{G}_p$ é virtualmente $\mathbb{Z}_p$-por-$\mathbb{Z}_p$.

A demonstração do Teorema 3 de Kochloukova [K-2009] usa os resultados de Korenev [Ko-2004] e [Ko-2005], com intuito de provar que $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo de Demushkin de dimensão 2 (isto é, um grupo pro-p PD_2) que pela condição (3) tem posto finito. E o resultado segue da classificação de todos os grupos de Demushkin infinitos.

Os Teoremas Principais desta tese são

Teorema Principal 1. *Seja p um primo fixo. Seja $n \geq 5$. Seja G um grupo abstrato PD_n orientável. Suponha que o completamento pro-p $\widehat{G}_p$ de G é infinito e não é virtualmente um grupo pro-p PD_n. Suponha além disso que:*

(a) $\sup\left\{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) \mid U \triangleleft G \text{ de índice potência de } p\right\}$ *é finito.*

(b) $\sup_{U\in\mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U,\mathbb{F}_p) < \infty$*, para* $0 \leq i \leq n$*.*

Então $\widehat{G}_p$ *é virtualmente um grupo pro-p* PD_s *para algum* $s \leq n-2$*.*

Observação 1. (1) *No Teorema Principal* 1*, usando somente a hipótese* (*a*) *e Proposição* 3.11 *em [DSMS-2003], temos que* $\widehat{G}_p$ *é um grupo pro-p de posto finito e portanto pelo Corolário* 4.3 *em [DSMS-2003]* $\widehat{G}_p$ *é virtualmente pro-p analítico e por [Laz-1965] é virtualmente* PD_s *para algum s, mas não temos controle sobre s. Em particular,* $\widehat{G}_p$ *é um grupo pro-p de tipo* FP_∞*. Ainda mais por [Laz-1965] (ou veja Teorema* 5.1 *em [SW-2000]) para grupo pro-p uniformemente powerful* G_0 *(no nosso caso,* G_0 *será um subgrupo de índice finito em* $\widehat{G}_p$*), a cohomologia do grupo* G_0 *é um anel graduado que é álgebra exterior de* $H^1(G_0,\mathbb{F}_p)$*. Assim, temos que* $\sup\left\{\dim_{\mathbb{F}_p} H^i(H,\mathbb{F}_p) | H \leq G_0 \text{ de índice finito}\right\} < \infty$*, para todo i. Por dualidade,* $\sup\left\{\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(H,\mathbb{F}_p) | H \leq G_0 \text{ de índice finito}\right\} < \infty$*.*

(2) *E como* $\sup\left\{\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{U}_p,\mathbb{F}_p)|\ U \triangleleft G \text{ de índice potência de } p\right\}$ *é finito, segue que* $\exists\ m > 0$ *tal que* $\forall\ U \triangleleft G$ *de índice potência de p em G, tem-se*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U,\mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{U}_p,\mathbb{F}_p) \leq m,\ \forall\ 0 \leq i \leq n.$$

Teorema Principal 2. *Seja p um primo fixo. Seja G um grupo abstrato* PD_4 *orientável. Suponha que o completamento pro-p* $\widehat{G}_p$ *de G é infinito e não é virtualmente um grupo pro-p* PD_4*. Suponha além disso que:* $\exists\ m > 0$ *tal que* $\forall\ U \triangleleft G$ *de índice potência de p em G, tem-se*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U,\mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{U}_p,\mathbb{F}_p) \leq m,\ \forall\ 0 \leq i \leq 4.$$

Então $\widehat{G}_p$ *é virtualmente um grupo pro-p* PD_s *para algum* $s \leq 2$*.*

Primeiramente, foram feitos os casos $n = 4$ e $n = 5$ e o caso geral seguiu de modo similar. Além das ideias da demonstração do Teorema 3 de Kochloukova [K-2009] e alguns resultados de Kochloukova-Zalesskii [KZ-2008], também foram utilizados alguns resultados de Korenev: Teorema 3 e Teorema 4 de [Ko-2004] e Teorema 1 e Corolário 1 do Teorema 1 de [Ko-2005]. De fato, Korenev, Corolário 1 [Ko-2005], provou que um grupo pro-p K é virtualmente um grupo pro-p PD_n se, e somente se, K é de tipo FP_n sobre $\mathbb{F}_p$, $H^i(K, \mathbb{F}_p[[K]]) = 0$ para todo $0 \leq i < n$ e $H^n(K, \mathbb{F}_p[[K]]) \cong \mathbb{F}_p$. As condições (a) e (b) foram usadas para provar que

$$\varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_i(U, \mathbb{F}_p)$$

é finito para todo i. Isso é importante na prova dos Teoremas Principais, pois permite mostrar, dentre outros resultados auxiliares, que $\widehat{G}_p$ satisfaz as condições de Korenev.

Também será dado um exemplo de um grupo PD_3 orientável, denotado por H, tal que o completamento pro-p $\widehat{H} \cong \mathbb{Z}_p$ e usando um resultado de Bieri-Eckmann sobre PD_3 pares (veja Teorema 8.1 em [BE-1978]) e a Fórmula de Künneth, será mostrado o seguinte Lema

Lema. *Sejam $r \geq 1$ e $s \geq 1$ e $3r + s \geq 5$. O grupo $H^r \times \mathbb{Z}^s$ é um grupo PD_{3r+s} orientável e satisfaz as condições dos Teoremas Principais.*

Esta tese está organizada em cinco capítulos e da seguinte maneira:

No Capítulo 1 serão apresentadas preliminares para o entendimento da tese que abordam conceitos, definições, exemplos, resultados e propriedades básicas sobre homologia e coholomogia de grupos abstratos: módulos livres, projetivos, injetivos, resoluções livres, projetivas e injetivas, homologia, cohomologia, dimensão cohomológica, tipo FP_n, grupos PD_n e característica de Euler. As principais referências foram [R-1979] e [B-1982] para álgebra homológica abstrata e [Bi-1981] e [B-1982] para condições de finitude, grupos PD_n e demais propriedades.

No Capítulo 2 serão apresentadas também preliminares análogas, mas no caso pro-p (ou profinito) sobre homologia e cohomologia de grupos pro-p, como álgebra de grupo completa, produto tensorial completo, homologia e cohomologia contínuas, p-dimensão cohomológica, tipo FP_n, grupo pro-p PD_n e p-característica de Euler. E as referências básicas mais utilizadas foram [RZ-2000], [W-1998] e [SW-2000].

No Capítulo 3, denominado Resoluções, foram construídas resoluções essenciais na demonstração dos resultados principais e em aplicações no próprio capítulo, em Lemas auxiliares para demonstrar os resultados principais.

No Capítulo 4, denominado Resultados Principais, foram demonstrados os Teoremas Principais desta tese já mencionados.

E por fim, no Capítulo 5, denominado Exemplos, foram feitos o exemplo H e o Lema já citados.

As referências seguem no final da tese.

CAPÍTULO 1

HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE GRUPOS ABSTRATOS

Vamos fixar que R denotará um anel associativo com unidade 1. As categorias consideradas nesta seção serão as de grupos abelianos $\mathcal{A}b$, de R-módulos à direita $\mathcal{M}_R$ e de R-módulos à esquerda ${}_R\mathcal{M}$, logo pré-aditivas (isto é, onde os morfismos formam um grupo abeliano). E os funtores serão todos aditivos. Iremos recordar algumas propriedades básicas sobre álgebra homológica de grupos abstratos. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [R-1979] e [B-1982] para álgebra homológica abstrata e [Bi-1981] e [B-1982] para condições de finitude, grupos PD_n e demais propriedades.

Uma **sequência** (finita ou infinita) de homomorfismos

$$\ldots \to M_{n+1} \stackrel{f_{n+1}}{\to} M_n \stackrel{f_n}{\to} M_{n-1} \to \ldots$$

é **exata** se cada par adjacente de homomorfismos é exato, isto é, $Ker(f_n) = Im(f_{n+1})$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Em particular, $0 \to A \stackrel{f}{\to} B \stackrel{g}{\to} C \to 0$ é dita uma **sequência exata curta** de R-módulos se f é monomorfismo, g é epimorfismo e $Im(f) = Ker(g)$.

Definição 1.1. *Um **funtor** covariante F é dito **exato à esquerda** se a exatidão de $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ implica na exatidão de $0 \to FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$. Analogamente, define-se **funtor** covariante **exato à direita** e dualmente funtor contravariante exato à esquerda ou à direita. Um **funtor** é **exato** se é exato à direita e à esquerda.*

Vamos sintetizar algumas propriedades dos (bi)funtores $Hom_R(\ ,\ )$ e $\otimes_R$:

Proposição 1.1. *Sejam A um R-módulo à direita e B um R-módulo à esquerda. Então:*

(a) $Hom_R(\ ,\ )$ *é um funtor contravariante na primeira variável e covariante na segunda variável; Exato à esquerda em ambas variáveis e comuta com produto direto na segunda variável.*

(b) $Hom_R(\oplus_{j\in J} A_j, B) \cong \prod_{j\in J} Hom_R(A_j, B)$ *com* $\varphi \mapsto (\varphi\lambda_j)$, *onde* $\lambda_j : A_j \to \prod_{j\in J} A_j$ *é a j-ésima injeção.*

(c) $Hom_R(R, B) \cong B$ *com* $f \mapsto f(1)$.

(d) $\otimes_R : \mathcal{M}_R \times {}_R\mathcal{M} \to \mathcal{A}b$ *é um funtor covariante, exato à direita e comuta com soma direta em ambas variáveis.*

(e) $R \otimes_R B \cong B$ *com* $r \otimes b \mapsto rb$. *Analogamente,* $A \otimes_R R \cong A$.

Agora iremos falar um pouco sobre **módulos livres**, **projetivos** e **injetivos** e também sobre **resoluções livres**, **projetivas** e **injetivas** que serão fundamentais para o estudo de **homologia** e **cohomologia** de grupos abstratos.

Definição 1.2. *Um R-módulo à esquerda F é **livre** se é soma direta de cópias de R, isto é, $F \cong \oplus_{i\in I} Ra_i$, com $Ra_i \cong R$ e $\{a_i | i \in I\}$ é dito base de F.*

Equivalentemente, um módulo F é livre com base X, se dado qualquer módulo B e qualquer função $f : X \to B$, existe um único homomorfismo $\varphi : F \to B$ que estende f.

Definição 1.3. *Uma **resolução livre** de um R-módulo M é uma sequência exata longa*

$$\ldots \to F_n \xrightarrow{dn} F_{n-1} \to \ldots \to F_1 \xrightarrow{d1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

onde cada F_i é R-módulo livre e d_i é R-homomorfismo.

Como para qualquer conjunto X, existe um módulo livre com base X e todo módulo M é quociente de um módulo livre, decorre que todo módulo M possui uma resolução livre.

Definição 1.4. *Um R-módulo P é **projetivo** se dados $\beta : B \to C$ epimorfismo de R-módulos e um R-homomorfismo $\alpha : P \to C$, o diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Agora uma caracterização dos módulos projetivos:

Teorema 1.1. *As afirmações seguintes sobre um módulo P são equivalentes:*

(i) *P é projetivo.*

(ii) *O funtor $Hom(P, \ )$ é exato.*

(iii) *P é somando de um módulo livre.*

(iv) *Toda sequência exata curta $0 \to A \to B \to P \to 0$ cinde.*

Decorre que soma direta de módulos projetivos é projetivo se e só se cada somando é projetivo. No entanto, o produto direto de módulos projetivos pode não ser projetivo: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \dots$ não é projetivo (Teorema de Baer).

Definição 1.5. *Uma **resolução projetiva** de um R-módulo M é uma sequência exata longa*

$$\dots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \dots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

onde cada P_i é R-módulo projetivo e d_i é R-homomorfismo.

A noção de módulo injetivo é dual a de módulo projetivo.

Definição 1.6. *Um módulo E é **injetivo** se para todo módulo B e todo submódulo $A \leq B$, cada R-homomorfismo $f : A \to E$ pode ser estendido a um R-homomorfismo $g : B \to E$, isto é, o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Dualmente ao caso projetivo, temos uma caracterização para módulos injetivos.

Teorema 1.2. *As seguintes afirmações sobre um módulo E são equivalentes:*

(i) *E é injetivo.*

(ii) *O funtor $Hom(\,, E)$ é exato.*

(iii) *Toda sequência exata curta $0 \xrightarrow{i} E \to B \to C \to 0$ cinde.*

(iv) *(**Critério de Baer**) Todo homomorfismo $f : I \to E$, onde I é ideal à esquerda de R, pode ser estendido a R.*

Vale ressaltar que o produto direto de módulos injetivos é injetivo se e só se cada módulo é injetivo. Já a soma direta de módulos injetivos pode não ser injetivo.

Definição 1.7. *Uma **resolução injetiva** de um R-módulo M é uma sequência exata longa*

$$0 \to M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

onde cada E^n é injetivo.

Segue do fato que todo R-módulo M pode ser mergulhado num R-módulo injetivo que todo R-módulo M tem uma resolução injetiva.

Definição 1.8. *Um **complexo** (ou cadeia de complexo) $\mathcal{A}$ é uma sequência de módulos e homomorfismos (diferenciais)*

$$\mathcal{A} : \dots \to A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \dots$$

com $d_n d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Se $\mathcal{A}$ é um complexo com diferenciais d_n, sua n-ésima homologia é o grupo abeliano $H_n(\mathcal{A}) = Ker(d_n)/Im(d_{n+1})$. Vale ressaltar que H_n é um funtor.

Considere o complexo $\mathcal{P} : \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$. O complexo obtido apagando M é $\mathcal{P}_M : \ldots \to P_1 \to P_0 \to 0$ e é dito **complexo apagado** de $\mathcal{P}$. Analogamente, definimos o complexo apagado $\mathcal{E}_N$ obtido do complexo $\mathcal{E} : 0 \to N \to E^0 \to E^1 \to \ldots$, apagando N.

Vamos descrever os **funtores derivados** à esquerda L_nT para um dado funtor aditivo T.

Definição 1.9. *Sejam T um funtor aditivo, A e um R-módulo e $\mathcal{P}$ uma resolução projetiva de A. O n-ésimo **funtor derivado à esquerda** de T é definido por*

$$(L_nT)\,A = H_n\,(T\mathcal{P}_A) = \frac{Ker\,(Td_n)}{Im\,(Td_{n+1})}$$

.

Vale ressaltar que $(L_nT)\,A$ não depende da escolha da resolução projetiva $\mathcal{P}$ de A, vide [R-1979], Teo. 6.11, pág. 182.

Exemplo 1.1. *Se $T = \otimes_R B$ com $B \in {}_R\mathcal{M}$, então definimos $L_nT = Tor_n^R(\ ,B)$. E se $T = A\otimes_R$ com $A \in \mathcal{M}_R$, definimos $L_nT = tor_n^R(A,\ )$. Em particular, $Tor_n^R(A,B) = H_n(\mathcal{P}_A \otimes_R B)$ e $tor_n^R(A,B) = H_n(A \otimes_R \mathcal{Q}_B)$, onde $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são resoluções projetivas de A e B, respectivamente. Ressaltamos que $H_n(\mathcal{P}_A \otimes_R B) \cong H_n(A \otimes_R \mathcal{Q}_B)$ e portanto denotaremos por Tor ambos funtores.*

Ressaltamos também que se R^{op} é o anel oposto de R, então para todo $n \geq 0$ e quaisquer R-módulos A e B, tem-se $Tor_n^R(A,B) \cong Tor_n^{R^{op}}(B,A)$. Por isso, iremos supor todos os resultados válidos na outra variável.

De modo similar, podemos definir os **funtores derivados à direita** de um dado funtor covariante aditivo T por

$$(R^nT)\,A = H^n(T\mathcal{E}_A) = \frac{Ker(Td^n)}{Im(Td^{n-1})}$$

onde $\mathcal{E}$ é uma resolução injetiva de A escolhida. E tal definição é independente da resolução injetiva escolhida.

Exemplo 1.2. *Se* $T = Hom_R(C, \ )$*, para algum* R*-módulo* C*, então definimos* $R^nT = Ext^n_R(C, \ )$*. Em particular,* $Ext^n_R(C, A) = H^n(Hom_R(C, \mathcal{E}_A))$ *onde* $\mathcal{E}$ *é uma resolução injetiva escolhida do* R*-módulo* A*.*

Se T é contravariante, então seus funtores derivados à direita são $(R^nT)\,C = H^n(T\mathcal{P}_C) = Ker(Td_{n+1})/Im(Td_n)$ onde $\mathcal{P}$ é uma resolução projetiva escolhida do R-módulo C.

Funtores derivados de um funtor contravariante são chamados de **funtores cohomológicos**.

Exemplo 1.3. *Se* $T = Hom_R(\ , A)$*, para algum* R*-módulo* A*, então definimos* $R^nT = ext^n_R(\ , A)$*. Em particular,* $ext^n_R(C, A) = H^n(Hom_R(\mathcal{P}_C, A))$*, onde* $\mathcal{P}$ *é uma resolução projetiva de* C *escolhida. Ressaltamos que* $H^n(Hom_R(\mathcal{P}_C, A)) \cong H^n(Hom_R(C, \mathcal{E}_A))$*, onde* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{E}$ *são resoluções projetiva e injetiva de* C *e* A*, respectivamente. Denotaremos por Ext ambos funtores.*

Descreveremos um pouco sobre homologia e cohomologia de grupos abstratos. Aqui G será um grupo abstrato, A um $\mathbb{Z}[G]$-módulo à esquerda, onde $\mathbb{Z}[G]$ é o anel de grupo de G sobre $\mathbb{Z}$. E ainda $\mathbb{Z}$ será considerado como um $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial, isto é, G age trivialmente sobre $\mathbb{Z}$.

Para cada $n \geq 0$, definimos o n-ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em A por

$$H_n(G, A) = Tor_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$$

e o n-ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em A por

$$H^n(G, A) = Ext^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

Segue da definição que $H_n(G, \ )$ e $H^n(G, \ )$ são funtores covariantes aditivos indo de ${}_{\mathbb{Z}[G]}\mathcal{M}$ para $\mathcal{A}b$.

A seguir coletamos alguns resultados básicos sobre **homologia** e **cohomologia** de grupos.

Observação 1.1. *(a)* $H_0(G, A) = Tor_0^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A \cong A/IA$*, onde* I *é o ideal aumentado de* $\mathbb{Z}[G]$*.*

(b) $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$, *onde* $[G, G]$ *denota o subgrupo comutador de* G.

(c) ***(Fórmula de Hopf)*** $H_2(G, \mathbb{Z}) \cong \left(\frac{R \cap [F,F]}{[F,R]}\right)$, *onde* $R = Ker(\pi)$, $\pi : F \twoheadrightarrow G$, F *é um grupo livre,* $F/R \cong G$ *e* $[F, R]$ *é o subgrupo de* F *gerado por* $[f, r] = frf^{-1}r^{-1}$, *onde* $f \in F$ *e* $r \in R$.

(d) $H_n(G, \oplus_i A_i) \cong \oplus_i H_n(G, A_i)$.

(e) $H^0(G, A) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) \cong A^G = \{a \in A|\ ga = a,\ \forall g \in G\}$ *o submódulo de pontos fixos* A *pela ação de* G.

(f) $H^1(G, A) \cong Hom_{\mathbb{Z}[G]}(G, A)$ *se* A *é um* $\mathbb{Z}[G]$*-módulo trivial.*

(g) $H^n(G, \prod_i A_i) \cong \prod_i H^n(G, A_i)$.

Seja S um subgrupo de G.

Definição 1.10. *Um* $\mathbb{Z}[G]$*-módulo* A *é chamado de um* ***módulo*** S***-induzido*** *se existe um* $\mathbb{Z}[S]$*-módulo* X *tal que* $A = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[S]} X$ *e é chamado de um* ***módulo*** S***-coinduzido*** *se existe um* $\mathbb{Z}[S]$*-módulo* Y *tal que* $A = Hom_{\mathbb{Z}[S]}(\mathbb{Z}[G], Y)$.

Lema 1.1. ***(Lema de Shapiro)*** *Sejam* G *um grupo,* $S \leq G$ *e* B *um* $\mathbb{Z}[S]$*-módulo, então para todo* $n \geq 0$

(i) $H_n(S, B) \cong H_n(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[S]} B)$.

(ii) $H^n(S, B) \cong H^n(G, Hom_{\mathbb{Z}[S]}(\mathbb{Z}[G], B))$.

Nas condições do Lema de Shapiro, se $[G : S] < \infty$ então $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[S]} B \cong Hom_{\mathbb{Z}[S]}(\mathbb{Z}[G], B)$.

Dizemos que a **dimensão projetiva** de um R-módulo M é menor ou igual n, $(projdim_R M) \leq n$, se M admite uma resolução projetiva: $\mathcal{P} : 0 \to P_n \to \ldots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$.

Definimos a **dimensão cohomológica** $cd(G)$ de um grupo G como sendo $projdim_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ é considerado como $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial. Em particular,

$$cd(G) = sup\,\{n|\ H^n(G, A) \neq 0 \text{ para algum } \mathbb{Z}[G]\text{-módulo } A\}$$

e se $cd(G) < \infty$ então A pode ser tomado $\mathbb{Z}[G]$-módulo livre, vide Prop. 2.3, pág. 186, em [B-1982].

Proposição 1.2 ([B-1982], Prop. 2.4 pág. 187)**.** *Seja S um subgrupo de G, então:*

(i) $cd(S) \leq cd(G)$;

(ii) *Se* $[G : S] < \infty$ *e* $cd(G) < \infty$, *então* $cd(S) = cd(G)$.

Segue desta Proposição que se G é um grupo finito não trivial, então $cd(G) = \infty$. E ainda se G é um grupo não trivial tal que $cd(G) < \infty$ então G é um grupo livre de torção. Ressaltamos que o grupo trivial é o único de dimensão cohomológica zero e um grupo livre não trivial tem dimensão cohomológica 1.

Definição 1.11. *Uma* ***resolução*** *ou resolução parcial $\mathcal{P}$ é* ***de tipo finito*** *se cada P_i é f.g. Um R-módulo M é de* ***tipo*** *FP_n, $n \geq 0$, se existe uma resolução parcial projetiva*

$$P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

de tipo finito. Dizemos que um R-módulo M é de tipo FP_∞ se M é de tipo FP_n para todo $n \geq 0$. E um grupo G é de tipo FP_n, $0 \leq n \leq \infty$, se $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_n como um $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial.

A próxima Proposição é devida a R. Bieri e é conhecida como "**mudança de dimensão**".

Proposição 1.3 ([Bi-1981], Prop. 1.4, pág. 12)**.** *Seja $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ uma sequência exata curta de R-módulos. Então*

(a) Se A' é de tipo FP_{n-1} e A é de tipo FP_n, então A'' é de tipo FP_n;

(b) Se A é de tipo FP_{n-1} e A'' é de tipo FP_n, então A' é de tipo FP_{n-1};

(c) Se A' e A'' são de tipo FP_n, então A é de tipo FP_n.

Como consequência da Proposição 1.3 temos que se A é de tipo FP_∞ e $n \geq 1$, então A'' é de tipo FP_n se, e somente se, A' é de tipo FP_{n-1}.

Vale ressaltar que todo grupo é de tipo FP_0, um grupo é de tipo FP_1 se, e somente se, é f.g. e um grupo finitamente apresentável é de tipo FP_2. No entanto, Bestvina-Brady em [BB-1997] construíram exemplos de grupos de tipo FP_∞ que não são finitamente apresentáveis. Já Bieri-Strebel em [BS-1980] mostraram que um grupo metabeliano de tipo FP_2 é finitamente apresentável.

Proposição 1.4 ([B-1982], Prop. 5.1 pág. 197)**.** *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G de índice finito. Então G é de tipo FP_n se e somente se S é de tipo FP_n.*

Proposição 1.5 ([Bi-1981], Prop. 2.13, item (a))**.** *Seja $G = G_1 *_S G_2$ o produto livre de G_1 e G_2 amalgamado o subgrupo S. Se G_1 e G_2 são de tipo FP_n e S é de tipo FP_{n-1}, então G é de tipo FP_n. Se G e S são de tipo FP_n, então G_1 e G_2 também são de tipo FP_n. Se G_1 e G_2 são de tipo FP_{n-1} e G de tipo FP_n, então S é de tipo FP_{n-1}.*

Conforme [Bi-1981], pág. 36, a seguir temos uma lista de grupos de tipo FP_∞.

Exemplos 1.1. *(1) O grupo trivial.*

(2) Todos os grupos finitos (isto segue do item (1) *e da Proposição 1.4).*

(3) Todos os grupos livres f.g. (segue da Proposição 1.5).

(4) Todos os grupos poli(livre f.g. ou finito), em particular todo grupo policíclico (segue da Proposição 1.3).

(5) Todo grupo f.g. com único relator definidor.

Em [Bi-1981], Prop. 2.14, pág. 37, R. Bieri exibiu, para cada $n \in \mathbb{N}$, grupos (finitamente apresentados para $n \geq 2$) A_n e B_n que são de tipo FP_n, mas não são de tipo FP_{n+1}.

Definição 1.12. *Uma resolução é dita finita se é de tipo finito e tem comprimento finito. Um grupo é de **tipo** FP se $\mathbb{Z}$ admite uma resolução projetiva finita sobre $\mathbb{Z}[G]$.*

É possível mostrar que G é de tipo FP se, e somente se, $cd(G) < \infty$ e G é de tipo FP_∞, vide [B-1982], Prop. 6.1, pág. 199.

Agora estudaremos grupos G tais que $H^i(G, A) \cong H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} A)$, onde $D = H^n(G, \mathbb{Z}[G])$.

Teorema 1.3 ([B-1982], Teo. 10.1, pág. 220)**.** *Seja G um grupo de tipo FP, então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) Existe um inteiro n e um $\mathbb{Z}[G]$-módulo à direita D tal que $H^i(G, A) \cong H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} A)$, para qualquer $\mathbb{Z}[G]$-módulo à esquerda A e para todo i inteiro;

(2) Existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} B) = 0$ para todo $i \neq n$ e todo grupo abeliano B;

(3) Existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}[G]) = 0$ para todo $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}[G])$ é livre de torção como grupo abeliano;

(4) Existem isomorfismos $H^i(G, \ ) \cong H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} \ )$, onde $D = H^n(G, \mathbb{Z}[G])$ e $n = cd(G)$.

Definição 1.13. *Um grupo G é dito **grupo de dualidade** se satisfaz o Teorema 1.3 e o $\mathbb{Z}[G]$-módulo $D = H^n(G, \mathbb{Z}[G])$ é chamado de **módulo dualizante** de G.*

Definição 1.14. *Um grupo G é dito **grupo de dualidade de Poincaré** se seu módulo dualizante $D \cong \mathbb{Z}$. Neste caso, G é dito **orientável** se G age trivialmente em D e **não orientável** se G age em D via multiplicação por ± 1. O inteiro n do Teorema anterior é dito a **dimensão de Poincaré**.*

Observe que se G é um grupo de dualidade de Poincaré orientável, então do item (4) do Teorema 1.3 segue que $H^i(G, A) \cong H_{n-i}(G, A)$.

Proposição 1.6 ([B-1982], Prop. 10.2 pág. 224)**.** *Seja G um grupo livre de torção e S um subgrupo de índice finito de G. Então G é grupo de dualidade se, e somente se, S é grupo de dualidade.*

Notação 1.1. *grupo PD_n = grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n.*

Proposição 1.7. *Seja G um grupo PD_n, então existe um subgrupo $S \leq G$ com $[G : S] \leq 2$ tal que S é grupo PD_n orientável.*

Para uma demonstração com detalhes, vide [M-2009], Prop. 2.4.6, página 62.

Exemplos 1.2. *(i) $\mathbb{Z}^n$ é um grupo PD_n orientável.*

(ii) O grupo fundamental de uma variedade (asférica) fechada n-dimensional é um grupo PD_n.

Observação 1.2. *(i) ([Bi-1981], Prop. 2.1.5, pág. 39) Se G é um grupo de tipo FP_n, então $H_k(G, \mathbb{Z})$ e $H^k(G, \mathbb{Z})$ são grupos abelianos f.g., para todo $0 \leq k \leq n$.*

(ii) Em particular, $H_k(G, \mathbb{F}_p)$ e $H^k(G, \mathbb{F}_p)$ são grupos abelianos finitos, para todo $0 \leq k \leq n$ e para qualquer primo p, onde $\mathbb{F}_p$ é o corpo com p elementos.

Definição 1.15 ([B-1982], pág. 247)**.** *Seja G um grupo abstrato de tipo FP. A **característica de Euler** de G é*

$$\chi(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd(G)} (-1)^i posto_{\mathbb{Z}}(H_i(G, \mathbb{Z}))$$

onde para qualquer grupo abeliano f.g. B, o posto de B é definido por $posto_{\mathbb{Z}}(B) = dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B)$.

Coletamos a seguir alguns fatos sobre $\chi(G)$ onde o grupo G é de tipo FP. Para maiores detalhes de $(a) - (e)$, vide [B-1982] página 248. O item (f) é conhecido como *Teorema de Gottlieb-Stallings*, [Go-1965], [St-1965].

Lema 1.2. *(a) $\chi(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd(G)} (-1)^i posto_{\mathbb{Z}}(H^i(G, \mathbb{Z}))$;*

(b) $\chi(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}(H_i(G, \mathbb{F}_p))$;

(c) $\chi(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}(H^i(G, \mathbb{F}_p))$;

(d) Seja $S \leq G$ um subgrupo de índice finito, então $\chi(S) = [G : S]\chi(G)$;

(e) Seja G um grupo PD_n com n ímpar, então $\chi(G) = 0$.

(f) Se $\chi(G) \neq 0$, então o centro de G é um subgrupo finito.

CAPÍTULO 2

HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE GRUPOS PRO-P

O intuito desta seção é estabelecer definições gerais e propriedades homológicas na categoria profinita (pro-p) e ainda o conceito de grupo pro-p de dualidade de Poincaré. As referências básicas mais utilizadas serão [RZ-2000], [W-1998] e [SW-2000] que também podem ser consultadas para maiores detalhes.

O conceito de limite inverso (projetivo) pode ser definido numa categoria geral, no entanto, o faremos na categoria de grupos (anéis) topológicos para tornar as ideias mais claras.

Definição 2.1. *Sejam I um conjunto quase-ordenado e $\mathfrak{C}$ a categoria de grupos topológicos. Um* ***sistema inverso (sobrejetor) de grupos (anéis) topológicos*** *em $\mathfrak{C}$ com conjunto de índices I é um funtor contravariante $G : I \to \mathfrak{C}$, tal que para cada $i \in I$, existe um grupo topológico G_i e sempre que $i, j \in I$ satisfaçam $i \leq j$, existe um homomorfismo (sobrejetor) de grupos (anéis) contínuo $\psi_i^j : G_j \to G_i$ tal que:*

1. *$\psi_i^i = id_{G_i}$, $\forall i \in I$.*

2. *se $i \leq j \leq k$, então $\psi_i^k = \psi_i^j \psi_j^k$*

É comum denotar um sistema inverso (com conjunto de índices I) por $\{G_i, \psi_i^j, I\}$ ou $\{G_i, \psi_i^j\}$. Vamos dar um exemplo de um sistema inverso que nos será útil mais adiante nessa seção.

Exemplo 2.1. *Seja p um número natural fixo. Tome o conjunto de índices I como sendo o conjuntos dos números naturais e defina $G_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ para cada $i \in I$. E para cada $j \geq i$, defina $\psi_i^j : G_j \to G_i$ o homomorfismo contínuo de grupos dado por*

$$\psi_i^j(z + p^j\mathbb{Z}) = z + p^i\mathbb{Z}$$

para cada $z \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\{G_i, \psi_i^j\}$ é um sistema inverso de grupos (anéis) finitos.

Definição 2.2. *Seja $\{G_i, \psi_i^j\}$ um sistema inverso na categoria dos grupos topológicos $\mathfrak{C}$ sobre o conjunto parcialmente ordenado dirigido I. O **limite inverso** desse sistema inverso, denotado por $\varprojlim G_i$, é um grupo (anel) topológico e uma família de homomorfismos contínuos de grupos (anéis) $\alpha_i : \varprojlim G_i \to G_i$ com $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$ sempre que $i \leq j$, satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo grupo (anel) topológico X e homomorfismos contínuos de grupos (anéis) $f_i : X \to G_i$ com $f_i = \psi_i^j f_j$, sempre que $i \leq j$, existe um único homomorfismo contínuo de grupos (anéis) $\beta : X \to \varprojlim G_i$ fazendo o diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim G_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, dashed, "\exists!\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& G_i & \\
& G_j \arrow[u, "\psi_i^j"] &
\end{tikzcd}$$

Como esperado, limites inversos de grupos topológicos existem e são únicos a menos de isomorfismos topológicos, vide [RZ-2000], Prop. 1.1.1. Por isso, iremos nos referir frequentemente ao limite inverso do sistema inverso. Vale ressaltar que o limite inverso de um sistema inverso de grupos topológicos não vazios sobre um conjunto dirigido é também não vazio, vide Prop. 1.1.4, pág. 4, em [RZ-2000].

Agora já estamos aptos a definir o que é um grupo profinito.

Definição 2.3 ([RZ-2000]). *Seja $\mathcal{T}$ uma classe não vazia de grupos finitos. Um grupo G é um grupo pro-$\mathcal{T}$ se é limite inverso $\varprojlim G_i$ de $\mathcal{T}$-grupos $G_i \in \mathcal{T}$, onde cada grupo G_i tem topologia discreta. Se $\mathcal{T}$ é a classe de todos os grupos finitos (p-grupos finitos) então G é dito um grupo profinito (pro-p).*

Se $\mathcal{T}$ é uma classe de grupos cíclicos finitos, solúveis finitos, abelianos finitos, nilpotentes finitos etc então dizemos que um grupo pro-$\mathcal{T}$ é um grupo procíclico, prosolúvel, proabeliano, pronilpotente etc

Vale ressaltar que o limite inverso $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$ de grupos finitos $G_i \in \mathcal{T}$ é um subgrupo fechado do produto cartesiano de todos os G_i, como segue

$$G = \left\{(g_i) \middle|\ \psi_i^j(g_j) = g_i \text{ sempre que } j \geq i\right\} \leq \prod_{i \in I} G_i.$$

Deste modo, $G = \varprojlim_{i \in I} G_i$ é de modo natural um grupo topológico. De fato, dando para cada grupo finito G_i a topologia discreta, teremos o produto cartesiano $\prod_{i \in I} G_i$ com a topologia produto. Portanto, segue pelo Teorema de Tychonoff que $\prod_{i \in I} G_i$ será um grupo topológico compacto e Hausdorff e consequentemente G também o é por ser um subgrupo fechado de $\prod_{i \in I} G_i$.

Considere a projeção canônica

$$\varphi_j : \prod_{i \in I} G_i \to G_j.$$

Chamamos de *projeções* (não são necessariamente sobrejetivas) a restrição de φ_j para $G = \varprojlim G_i$. Para qualquer sistema inverso $\{G_i, \psi_i^j, I\}$, com $G = \varprojlim G_i$, existe um sistema inverso sobrejetivo $\{\varphi_i(G), \psi_i^{j'}, I\}$ ($\psi_i^{j'}$ é a restrição de ψ_i^j para $\varphi_i(G)$) com o mesmo limite inverso, conforme a Proposição a seguir.

Proposição 2.1 ([RZ-2000], Cor. 1.1.8). *Sejam $\left\{G_i, \psi_i^j, I\right\}$ um sistema inverso de grupos topológicos compactos Hausdorff, $G = \varprojlim G_i$ e $\varphi_i : G \to G_i$ as projeções para todo $i \in I$. Então*

(a) *Se H é um subgrupo fechado de G, então $H = \varprojlim \varphi_i(H)$;*

(b) *Se H é um subgrupo de G, então $\overline{H} = \varprojlim \varphi_i(H)$, onde $\overline{H}$ é o fecho de H em G;*

(c) *Se H_1 e H_2 são subgrupos de G e $\varphi_i(H_1)=\varphi_i(H_2)$ para cada $i \in I$, então seus fechos em G coincidem: $\overline{H_1} = \overline{H_2}$.*

Segue uma caracterização dos grupos profinitos:

Teorema 2.1 ([RZ-2000], Teo. 2.1.3; [W-1998], Prop. 1.1.5)**.** *Seja G um grupo topológico. São equivalentes:*

1. *G é profinito.*
2. *G é totalmente desconexo, Hausdorff e compacto.*
3. *G é compacto, Hausdorff e a identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas tais que $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = 1$ e cada U é um subgrupo normal aberto de G.*
4. *A identidade 1 de G admite um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vizinhanças abertas tal que cada $U \in \mathcal{U}$ é um subgrupo normal aberto de G e $G = \varprojlim_{U\in\mathcal{U}} G/U$.*

Seja $\mathcal{T}$ uma classe não vazia de grupos finitos com a propriedade de que, para todo $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $V \leq U_1 \cap U_2$.

Seja G um grupo abstrato. Considere

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(G) = \{N \lhd G |\ [G:N] < \infty,\ G/N \in \mathcal{T}\}$$

onde $\mathcal{N}$ é ordenado pela inclusão inversa: $M, N \in \mathcal{N}$, $\quad M \preceq N$ se, e somente se, $N \leq M$. Se $M, N \in \mathcal{N}$ e $M \preceq N$, seja $\psi_M^N : G/N \to G/M$ o epimorfismo natural. Então $\left\{G/N, \psi_M^N\right\}$ é um sistema inverso de grupos em $\mathcal{T}$ e o grupo pro-$\mathcal{T}$ $G_{\widehat{\mathcal{T}}} = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} G/N$ é dito completamento pro-$\mathcal{T}$ de G. E a topologia determinada por $\mathcal{N}$ é dita topologia pro-$\mathcal{T}$.

Se p é um primo e $\mathcal{T}$ é a classe de todos os p-grupos finitos, então $\widehat{G}_{\mathcal{T}}$ é chamado de completamento pro-p de G e será denotado por $\widehat{G}_p$.

Segue que $\mathcal{N}$ pode ser visto como um sistema fundamental de vizinhanças da identidade de G. E a topologia determinada por $\mathcal{N}$ é dita topologia pro-$\mathcal{T}$.

Exemplos 2.1. *(a) O completamento profinito de $\mathbb{Z}$ é*

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

(b) O completamento pro-p de $\mathbb{Z}$ é o grupo (anel) de ***inteiros** p**-ádicos***

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \left\{(a_n) |\ a_n \in \mathbb{N},\ a_n \equiv a_m \ mod\ p^m \ se\, m \leq n\right\}.$$

A seguir, iremos definir produto livre amalgamado na categoria de grupos pro-p. Usaremos tal conceito no último capítulo desta tese. A definição que segue, baseada em [RZ-2000], vale para uma categoria de grupos pro-$\mathcal{C}$, onde $\mathcal{C}$ é uma variedade de grupos finitos, isto é, uma classe (não-vazia) de grupos finitos fechada para subgrupos, quocientes e produtos diretos finitos.

Definição 2.4. *Sejam G_1 e G_2 grupos pro-p. Seja $f_i : H \to G_i$, para $i = 1, 2$, monomorfismos (contínuos) de grupos pro-p. Um* ***produto livre pro-**p **amalgamado*** *de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado H é um pushout na categoria de grupos pro-p:*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\ G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & G \end{tikzcd}$$

isto é, um grupo pro-p G juntamente com homomorfismos (contínuos) $\varphi_i : G_i \to G$, para $i = 1, 2$, satisfazendo a seguinte propriedade universal: para K um grupo pro-p e para cada par de homomorfismos (contínuos) $\psi_i : G_i \to K$, para $i = 1, 2$, tais que $\psi_1 f_1 = \psi_2 f_2$, existe um único homomorfismo (contínuo) $\psi : G \to K$ tal que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & G_1 \arrow[d, "\varphi_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_1"] & \\ G_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[drr, bend right, "\psi_2"'] & G \arrow[dr, dotted, "\psi"] & \\ & & K. \end{tikzcd}$$

Pela Proposição 9.2.1 em [RZ-2000], segue que o produto livre pro-p com amalgamação existe e é único. Denotaremos por $G = G_1 \coprod_H G_2$ o produto livre pro-p de G_1 e G_2 com amalgamação H.

Diferentemente do caso abstrato, as aplicações $\varphi_i : G_i \to G_1 \coprod_H G_2$, para $i = 1, 2$, nem sempre são injetivas, vide Exemplos 9.2.9 e 9.2.10 em [RZ-2000].

Na sequência, iremos falar sobre anéis e módulos profinitos.

Definição 2.5. *Um anel $\mathcal{R}$ é um* ***anel profinito*** *se é o limite inverso de anéis finitos.*

Anéis profinitos possuem caracterizações análogas as de grupos profinitos em termos de seus ideais abertos, vide [RZ-2000], Prop. 5.1.2.

Definição 2.6. *Seja $\mathcal{R}$ um anel profinito. Um* ***$\mathcal{R}$-módulo profinito*** *à direita é um grupo profinito abeliano M com uma aplicação contínua $M \times \mathcal{R} \to M$ que satisfaz as propriedades usuais de um $\mathcal{R}$-módulo abstrato.*

As noções de *submódulo*, *módulo quociente* etc são análogas as noções quando $\mathcal{R}$ é anel abstrato.

Seja $\mathcal{R}$ um anel profinito. As definições de *$\mathcal{R}$-módulos profinitos livres* e *projetivos* são análogas ao caso abstrato, assim como as *resoluções livres* e *projetivas*. E no caso em que $\mathcal{R}$ é um *anel local profinito*, então todo $\mathcal{R}$-módulo profinito projetivo é livre, vide [W-1998] Prop. 7.5.1, portanto, nesse caso, resoluções projetivas serão resoluções livres.

Os módulos projetivos e os injetivos são duais e como as categorias de $\mathcal{R}$-módulos profinitos $PMod(\mathcal{R})$ é dual a categoria de $\mathcal{R}$-módulo discreto $DMod(\mathcal{R})$, temos que os $\mathcal{R}$-módulos discretos injetivos são os duais dos $\mathcal{R}$-módulos profinitos projetivos.

A seguir definiremos álgebra de grupo completa.

Definição 2.7. *Sejam $\mathcal{R}$ um anel profinito comutativo e G um grupo profinito. A* ***álgebra de grupo completa*** *$\mathcal{R}[[G]]$ do grupo G com coeficientes em $\mathcal{R}$ é definida como o limite inverso da $\mathcal{R}$-álgebra de grupo $\mathcal{R}(G/U)$ do grupo finito G/U*

$$\mathcal{R}[[G]] = \varprojlim_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{R}(G/U)$$

onde $\mathcal{U}$ é a coleção de todos os subgrupos normais abertos de G.

Segue que $\mathcal{R}[[G]]$ é um anel profinito e pode ser expresso como limite inverso de anéis finitos

$$\mathcal{R}[[G]] = \varprojlim_{U \in \mathcal{U},\, I \in \mathcal{I}} (\mathcal{R}/I)(G/U)$$

onde I e U percorrem os ideais abertos $\mathcal{I}$ de $\mathcal{R}$ e os subgrupos normais abertos de G, respectivamente.

Proposição 2.2 ([W-1998], Prop. 7.5.1)**.** *Sejam $\mathcal{R}$ um anel profinito comutativo e G um grupo profinito. Então $\mathcal{R}[[G]]$ é um anel local profinito se, e somente se, existe um número primo p tal que $\mathcal{R}$ é um anel local pro-p e G é um grupo pro-p.*

Seja G um grupo pro-p. Segue que $\mathbb{Z}_p[[G]]$ e $\mathbb{F}_p[[G]]$ são anéis locais pro-p e portanto $R[[G]]$-módulos profinitos projetivos são $R[[G]]$-módulos profinitos livres, onde R é $\mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{F}_p$.

Os resultados a seguir permitem alternar a noção de G-módulo pro-p e $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulo pro-p, onde G é um grupo pro-p.

Lema 2.1 ([Ki-1999], Lema 2)**.** *Sejam G um grupo pro-p e M um G-módulo pro-p. Então M tem uma estrutura natural de $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulo pro-p. Além disso, M tem uma base de vizinhanças de 0 dada pelos G-submódulos abertos.*

Lema 2.2 ([Ki-1999], Cor. 4)**.** *Sejam G um grupo pro-p e M um G-módulo pro-p. São equivalentes:*

(a) M é f.g. como G-módulo pro-p.

(b) M é f.g. como um $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulo abstrato.

Vamos fixar que $\mathcal{R}$ é um anel profinito e R é uma $\mathcal{R}$-álgebra.

Sejam A um R-módulo à direita profinito e B um R-módulo à esquerda profinito. O **produto tensorial completo** de A por B sobre R, denotado por $A\widehat{\otimes}_R B$, é construído como segue: Se $A = \varprojlim_{i \in I} A_i$ e $B = \varprojlim_{j \in J} B_j$ onde cada A_i e cada B_j é um R-módulo finito à direita e à esquerda, respectivamente, então $A\widehat{\otimes}_R B = \varprojlim_{i\in I,\, j\in J} (A_i \otimes_R B_j)$, onde $A_i \otimes_R B_j$ é o produto tensorial usual de R-módulos abstratos.

Se A ou B é finitamente gerado, então existe um isomorfismo de grupos abelianos: $A\widehat{\otimes}_R B \cong A \otimes_R B$. Como no caso abstrato, o produto tensorial completo existe e é único a menos de isomorfismos. Vale ressaltar também que o produto tensorial completo comuta com limite inverso. Outras propriedades de produto tensorial completo podem ser encontradas em [RZ-2000], Prop. 5.5.3.

Fixemos $A \in PMod(R)$. Denote $Ext^n_R(A,\ ) : DMod(R) \to DMod(\mathcal{R})$ o n-ésimo funtor derivado à direita de $Hom_R(A,\ )$. Vale ressaltar que o funtor $Ext^n_R(\ ,\ )$ comuta com somas diretas finitas.

O funtor $Ext^n_R(\ ,\ )$ possui propriedades análogas ao caso abstrato, vide [RZ-2000], Prop. 6.1.7.

Agora considere o funtor $\widehat{\otimes}_R : PMod(R^{op}) \times PMod(R) \to PMod(\mathcal{R})$.

Seja A um R-módulo à direita profinito. Denote por $Tor^R_n(A,\ )$ o n-ésimo funtor derivado de $A\widehat{\otimes}_R$. O funtor $Tor^R_n(\ ,\ )$ possui propriedades análogas ao caso abstrato, no entanto, comuta com limites inversos (diferente do caso abstrato), vide [RZ-2000], Cor. 6.1.10.

Agora iremos definir homologia e cohomologia de grupos profinitos.

Definição 2.8. *Sejam G um grupo profinito e $\mathcal{R}$ um anel profinito comutativo. Considere G agindo trivialmente em $\mathcal{R}$, logo $\mathcal{R}$ torna-se $\mathcal{R}[[G]]$-módulo. O **n-ésimo grupo de cohomologia** $H^n(G, A)$ de G com coeficientes em um dado $\mathcal{R}[[G]]$-módulo discreto A é dado por $H^n(G, A) = Ext^n_{\mathcal{R}[[G]]}(\mathcal{R}, A)$. O **$n$-ésimo grupo de homologia** $H_n(G, A)$ de G com coeficientes em um dado $\mathcal{R}[[G]]$-módulo à direita profinito A é dado por $H_n(G, A) = Tor^{\mathcal{R}[[G]]}_n(A, \mathcal{R})$.*

Decorre de [RZ-2000], Observação 6.2.5 e Lema 6.3.5, que na definição acima podemos trocar $\mathcal{R}$ por $\widehat{\mathbb{Z}}$, o completamento profinito de $\mathbb{Z}$.

Seja p um primo fixo.

Propriedades análogas ao caso abstrato ocorrem em dimensões pequenas para H_n e H^n.

Destacamos que se G é grupo pro-p, então

$$H_1(G, \mathbb{Z}_p) \cong G/\overline{[G,G]}$$

e

$$H_1(G, \mathbb{F}_p) \cong G/\phi(G) = G/\overline{G^p[G,G]}$$

onde G age trivialmente em $\mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{F}_p$ e $\phi(G)$ é o subgrupo de Frattini de G (interseção dos subgrupos abertos maximais de G).

Para um grupo abeliano A, denotaremos por

$$A_p = \{a \in A |\ \exists\ n \geq 0,\ |a| = p^n\}$$

sua componente p-primária.

Como no caso abstrato, temos a definição de p-dimensão cohomológica.

Definição 2.9 ([RZ-2000]). *Seja G um grupo profinito. A **p-dimensão cohomológica** $cd_p(G)$ é o menor inteiro não negativo n tal que $H^k(G, M)$ é livre de p-torção para todo $k > n$ e para todo $\widehat{\mathbb{Z}}[[G]]$-módulo discreto M, se tal n existe. Caso contrário, $cd_p(G) = \infty$.*

Como no caso abstrato, se $cd_p(G) < \infty$ então G é livre de p-torção. Além disso, $cd_p(G) \leq n$ se, e somente se, existe uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_p$ (ou $\mathbb{F}_p$) de comprimento n sobre $\mathbb{Z}_p[[G]]$ (ou $\mathbb{F}_p[[G]]$). Equivalentemente, $cd_p(G) \leq n$ se, e somente se, $H^{n+1}(G, M) = 0$ para todo $\widehat{\mathbb{Z}}[[G]]$-módulo M p-primário discreto simples, vide [RZ-2000], Prop. 7.1.4.

Em particular, se G é um grupo pro-p temos a seguinte caracterização de $cd_p(G)$:

Lema 2.3 ([RZ-2000], Cor. 7.1.6). *Sejam G um grupo pro-p e $n \in \mathbb{N}$ fixo. Então $cd_p(G) \leq n$ se, e somente se, $H^{n+1}(G, \mathbb{F}_p) = 0$.*

Analogamente ao caso abstrato, se S é um subgrupo fechado de um grupo profinito G, temos que $cd_p(S) \leq cd_p(G)$ e se $cd_p(G) < \infty$ e S é aberto então $cd_p(S) = cd_p(G)$. Além disso, $cd_p(G) = 0$ se, e somente se, G é trivial. E um grupo pro-p G não trivial é livre se, e somente se, $cd_p(G) = 1$, vide [RZ-2000], Teo. 7.7.4.

Se G é um grupo pro-p, então $H^n(G, \mathbb{F}_p)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}_p$ e portanto faz sentido computar $\dim_{\mathbb{F}_p} H^n(G, \mathbb{F}_p)$. A seguir, temos o conceito de deficiência de um grupo pro-p.

Definição 2.10. *Seja G um grupo pro-p finitamente apresentável. Definimos a deficiência de G como o número*

$$def(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, \mathbb{F}_p).$$

Observação 2.1. *Note que, se X é um conjunto minimal de geradores e R é um conjunto minimal de relações para um grupo pro-p finitamente apresentado $G =< X|R >$ tal que R é um subconjunto de um grupo pro-p livre com base X, então a cardinalidade de X e de R correspondem a*

$$|X| = \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(G, \mathbb{F}_p)$$

e

$$|R| = \dim_{\mathbb{F}_p} H^2(G, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(G, \mathbb{F}_p),$$

respectivamente. Portanto, $def(G) = |X| - |R|$.

Agora iremos definir módulos e grupos profinitos de *tipo FP_m*.

Definição 2.11. *Sejam G um grupo profinito e M um $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulo profinito. Dizemos que M é de **tipo** FP_m **sobre** $\mathbb{Z}_p[[G]]$ se M tem uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulos profinitos onde todos os módulos em dimensão menor ou igual a m são finitamente gerados. Se M for de tipo FP_m para todo m, então M é dito de tipo FP_∞.*

Definição 2.12. *Um **grupo profinito** G é **de tipo** FP_m **sobre** $\mathbb{Z}_p$, para algum $0 \leq m < \infty$, se existe uma resolução projetiva profinita do $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulo trivial $\mathbb{Z}_p$,*

$$\ldots \to P_i \to P_{i-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z}_p \to 0,$$

*onde cada P_i é $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulo projetivo f.g. para $i \leq m$. E o grupo G é de **tipo** FP_∞ se G é de tipo FP_m para todo $m \geq 0$.*

Nas duas últimas definições, podemos trocar $\mathbb{Z}_p$ por $\mathbb{F}_p$.

Para uma demonstração com maior riqueza de detalhes do Lema a seguir, vide [M-2009].

Lema 2.4 ([P-1980], Teo. 1.6)**.** *Sejam G um grupo pro-p. Então*

(a) G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se e só se $H_i(G, \mathbb{F}_p)$ é finito $\forall i \leq m$.

(b) G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se e só se $H^i(G, \mathbb{F}_p)$ é finito $\forall i \leq m$.

Como consequência do Lema 2.4 e do conceito de deficiência de um grupo, vide a Observação 2.1, temos que um grupo pro-p G é finitamente apresentável se, e somente se, G é de tipo FP_2 sobre $\mathbb{Z}_p$, diferentemente do caso abstrato.

Analogamente ao caso abstrato, um grupo pro-p G é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$ se, e somente se, qualquer subgrupo aberto H de G também é de tipo FP_m sobre $\mathbb{Z}_p$, vide [SW-2000], Prop. 4.2.1.

Lema 2.5. *Seja G um grupo de tipo FP_∞. Para cada $i \geq 1$, se*

$$\sup_{U \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) < \infty$$

então

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_i(U, \mathbb{F}_p) \leq \sup_{U \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) < \infty.$$

Demonstração: Para cada $i \geq 1$ e $U \in \mathcal{T}$, tem-se que $H_i(U, \mathbb{F}_p)$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}_p$, pois G tem tipo FP_∞. Além disso, por hipótese existe $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que

$$\sup_{U \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U_0, \mathbb{F}_p).$$

Segue que o sistema inverso sobrejetivo $\left\{ \varphi_U(\varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_i(U, \mathbb{F}_p)), U \right\}$, onde φ_U é a restrição da projeção canônica ao limite inverso

$$\varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_i(U, \mathbb{F}_p),$$

é tal que para $U \geq U_0$, $H_i(U, \mathbb{F}_p) \cong H_i(U_0, \mathbb{F}_p)$. Portanto,

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} \varphi_U(H_i(U, \mathbb{F}_p)) \leq H_i(U_0, \mathbb{F}_p),$$

logo

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U\in\mathcal{T}} H_i(U,\mathbb{F}_p) \leq \sup\left\{\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U,\mathbb{F}_p) \mid U \in \mathcal{T}\right\} < \infty.$$

■

Observação 2.2. *Podemos calcular cohomologia de grupos profinitos com coeficientes em $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulos profinitos. Para tanto, seja G um grupo pro-p de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e com $cd_p(G) < \infty$. Defina como no caso abstrato*

$$H^i(G,\mathbb{Z}_p[[G]]) = H^i(Hom_{\mathbb{Z}_p[[G]]}(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p},\mathbb{Z}_p[[G]]))$$

onde $\mathcal{P}$ é uma resolução projetiva escolhida do $\mathbb{Z}_p[[G]]$-módulo trivial profinito $\mathbb{Z}_p$ com todos os projetivos f.g.

Definição 2.13. *Sejam G um grupo pro-p e $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que G é um* ***grupo pro-p de dualidade de dimensão*** *n se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$cd_p(G) = n$.*
2. *G é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$.*
3. *$H^i(G,\mathbb{Z}_p[[G]]) = 0$ se $i \neq n$ ou livre de p-torção para $i = n$, isto é, $H^n(G,\mathbb{Z}_p[[G]])_p = 0$.*

Como no caso abstrato, temos a seguinte caracterização:

Teorema 2.2 ([SW-2000], Teo. 4.5.1)**.** *Seja G um grupo pro-p de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e $cd_p(G) = n < \infty$. Então G é um grupo pro-p de dualidade se, e somente se, $H^{n-i}(G,\ ) \cong H_i(G,H^i(G,\mathbb{Z}_p[[G]])\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Além disso, se $H^n(G,\mathbb{Z}_p[[G]]) \cong \mathbb{Z}_p$, então G é dito **grupo pro-p de dualidade de Poincaré de dimensão** n. E se a ação de G em $H^n(G,\mathbb{Z}_p[[G]])$ é trivial, então G é dito grupo pro-p de dualidade de Poincaré orientável, caso contrário G é não orientável.

O único grupo pro-p de dualidade de Poincaré de dimensão 1 é $\mathbb{Z}_p$. A classe de *grupos de Demushkin* infinitos, isto é, grupos pro-p com um relator definidor, coincide com a classe de grupos pro-p de dualidade de Poincaré de dimensão 2.

E como no caso abstrato, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.3 ([SW-2000], Prop. 4.4.1). *Seja G um grupo pro-p de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ com $cd_p(G) = n < \infty$. E seja H um subgrupo aberto de G. Então G é um grupo pro-p de dualidade (resp. dualidade de Poincaré) se, e somente se, H é um grupo de dualidade (resp. dualidade de Poincaré).*

Com frequência iremos fazer uso da *notação* **grupo pro-p** PD_n ou **grupo profinito** PD_n para denotar um grupo pro-p de dualidade de Poincaré de dimensão n ou um grupo profinito de dualidade de Poincaré de dimensão n, respectivamente.

Observação 2.3. *Existem duas definições de um grupo profinito de dualidade de Poincaré G em um primo p, a de Symonds-Weigel em [SW-2000] e a de Neukirch-Schmidt-Wingberg em [NSW-2000]. As definições diferem em um ponto: que G deve ser de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$. Ambas definições são equivalentes no caso pro-p. Em [KZ-2008] e [K-2009] foi adotada a definição dada por Symonds-Weigel, [SW-2000], que está de acordo com a definição do caso abstrato em [B-1982], Cap. 8, Teo.* 10.1.

Analogamente ao caso abstrato, temos a p-**característica de Euler** de um grupo profinito.

Definição 2.14. *Seja G um grupo profinito de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ com $cd_p(G) = n < \infty$. Definimos a p-**característica de Euler** de G por*

$$\chi_p(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd_p(G)} (-1)^i posto_{\mathbb{Z}_p}(H_i(G, \mathbb{Z}_p))$$

onde para qualquer grupo abeliano profinito f.g. B, $posto_{\mathbb{Z}_p}(B) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} B)$, onde $\mathbb{Q}_p$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}_p$.

Usando resolução projetiva é possível mostrar que $\chi_p(G) = \sum_{0 \leq i \leq cd_p(G)} (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p}(H_i(G, \mathbb{F}_p))$. Como no caso abstrato:

Lema 2.6.

1. *Seja G um grupo pro-p de dualidade de Poincaré orientável de dimensão n ímpar, então $\chi_p(G) = 0$.*
2. *Sejam G um grupo profinito de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$ e H é um subgrupo aberto de G, então $\chi_p(H) = [G : H]\chi_p(G)$.*

CAPÍTULO 3

RESOLUÇÕES

Nesta seção iremos construir resoluções essenciais para demonstrar os Teoremas Principais. Além disso, aplicaremos tais construções ainda neste capítulo e estabeleceremos alguns resultados preliminares que faremos uso também no próximo capítulo, no resultados principais:

Teorema Principal 1. *Seja p um primo fixo. Seja $n \geq 5$. Seja G um grupo abstrato PD_n orientável. Suponha que o completamento pro-p $\widehat{G}_p$ de G é infinito e não é virtualmente um grupo pro-p PD_n. Suponha além disso que:*

(a) $\sup \left\{ \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) |\ U \triangleleft G \textit{ de índice potência de } p \right\}$ *é finito.*

(b) $\sup_{U \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) < \infty$, *para* $0 \leq i \leq n$.

Então $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo pro-p PD_s para algum $s \leq n-2$.

Teorema Principal 2. *Seja p um primo fixo. Seja G um grupo abstrato PD_4 orientável. Suponha que o completamento pro-p $\widehat{G}_p$ de G é infinito e não é virtualmente um grupo pro-p PD_4. Suponha além disso que: $\exists\ m > 0$ tal que $\forall\ U \triangleleft G$ de índice potência de p em G,* *tem-se*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) \leq m, \ \forall\, 0 \leq i \leq 4.$$

Então $\widehat{G}_p$ *é virtualmente um grupo pro-p* PD_s *para algum* $s \leq 2$.

Construções

Lema 3.1. *Seja*

$$\mathcal{A} : \ldots \to A_i \stackrel{\alpha_i}{\to} A_{i-1} \to \ldots \to A_1 \to A_0 \to 0$$

um complexo de módulos projetivos (projetivos para $i \geq 1$*).*

Defina

$$\tilde{\mathcal{A}} : \ldots \to A_i \stackrel{\alpha_i}{\to} A_{i-1} \to \ldots \to A_1 \stackrel{\alpha_1}{\to} Im(\alpha_1) \to 0.$$

Seja

$$\mathcal{B} : \ldots \to B_i \stackrel{\beta_i}{\to} B_{i-1} \to \ldots \to B_1 \to A_0/Im(\alpha_1) \to 0$$

uma resolução projetiva de $A_0/Im(\alpha_1)$.

Então existe uma sequência exata curta de complexos

$$0 \to \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{C} \to \mathcal{B} \to 0, \tag{3.1}$$

até dimensão j*, onde*

$$\mathcal{C} : \ldots \to C_2 \to C_1 \to A_0 \to 0,$$

nos seguintes casos:

(a) $j = 2$;

(b) $j > 2$*, no caso que*

$$H_{j-2}(\tilde{\mathcal{A}}) = H_{j-1}(\tilde{\mathcal{A}}) = \ldots = H_1(\tilde{\mathcal{A}}) = 0$$

Demonstração: (a):

Seja $M_0 = Im(\alpha_1)$.

Considere o diagrama comutativo a seguir

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r, two heads] & A_0/M_0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "\iota_1"'] & C_1 = A_1 \oplus B_1 \arrow[u, dotted, "\gamma_1"] \arrow[r, "\pi_1"'] & B_1 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[ul, dotted, "\exists \sigma_1"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(\alpha_1) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\gamma_1) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\beta_1) \arrow[u, hook] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

onde σ_1 existe pela projetividade de B_1 e $\gamma_1 = \sigma_1 \circ \pi_1$.

Então, como o diagrama é comutativo, as colunas são exatas e as duas primeiras linhas são exatas, segue pelo Lema 3×3, [R-1979], pág. 175, que a última linha é exata.

Agora considere o diagrama abaixo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r, two heads] & A_0/M_0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "\iota_1"'] & C_1 = A_1 \oplus B_1 \arrow[u, dotted, "\gamma_1"] \arrow[r, "\pi_1"'] & B_1 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[ul, dotted, "\exists \sigma_1"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(\alpha_1) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\gamma_1) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & Ker(\beta_1) \arrow[u, hook] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "\iota_2"'] & C_2 = A_2 \oplus B_2 \arrow[u, dotted, "\gamma_2"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B_2 \arrow[u, "\beta_2"] \arrow[ul, dotted, "\exists \sigma_2"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

onde σ_2 existe pela projetividade de B_2 e $\gamma_2 = \sigma_2 \circ \pi_2$. Portanto, (a) segue.

(b):

Por hipótese, $H_1(\tilde{\mathcal{A}}) = 0$ e por exatidão do complexo $\mathcal{B}$, temos que $H_1(\mathcal{B}) = 0$. Usando sequência exata longa associada a sequência exata curta de complexos (3.1), temos a sequência exata longa em homologia

$$\ldots \to H_1(\tilde{\mathcal{A}}) = 0 \to H_1(\mathcal{C}) \to H_1(\mathcal{B}) = 0 \to \ldots,$$

portanto $H_1(\mathcal{C}) = 0$ e temos que $Ker(\gamma_1) = Im(\gamma_2)$.

Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im(\alpha_2) \arrow[r] & Im(\gamma_2) \arrow[r, two heads] & Im(\beta_2) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "\iota_2"'] & C_2 = A_2 \oplus B_2 \arrow[u, dotted, "\gamma_2"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B_2 \arrow[u, "\beta_2"'] \arrow[ul, dotted, "\exists\sigma_2"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(\alpha_2) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\gamma_2) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\beta_2) \arrow[u, hook] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

onde σ_2 existe pela projetividade de B_2 e $\gamma_2 = \sigma_2 \circ \pi_2$. Como o diagrama é comutativo, as colunas são exatas e as duas primeiras linhas também, segue pelo Lema 3×3, [R-1979], pág. 175, que a última linha é exata.

Portanto, temos o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker(\alpha_2) \arrow[r] & Ker(\gamma_2) \arrow[r, two heads] & Ker(\beta_2) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[u, "\alpha_3"] \arrow[r, "\iota_3"'] & C_3 = A_3 \oplus B_3 \arrow[u, dotted, "\gamma_3"] \arrow[r, "\pi_3"'] & B_3 \arrow[u, "\beta_3"'] \arrow[ul, dotted, "\exists\sigma_3"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

onde σ_3 existe por projetividade de B_3 e $\gamma_3 = \sigma_3 \circ \pi_3$.

Por hipótese temos que $H_2(\tilde{\mathcal{A}}) = 0$ e por exatidão do complexo $\mathcal{B}$, temos que $H_2(\mathcal{B}) = 0$. Logo da sequência exata longa em homologia, temos que $H_2(\mathcal{C}) = 0$, assim $Ker(\gamma_2) = Im(\gamma_3)$.

Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im(\alpha_3) \arrow[r] & Im(\gamma_3) \arrow[r, two heads] & Im(\beta_3) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[u, "\alpha_3"] \arrow[r, "\iota_3"'] & C_3 = A_3 \oplus B_3 \arrow[u, dotted, "\gamma_3"] \arrow[r, "\pi_3"'] & B_3 \arrow[u, "\beta_3"'] \arrow[ul, dotted, "\exists\sigma_3"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(\alpha_3) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\gamma_3) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\beta_3) \arrow[u, hook] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

e novamente como o diagrama é comutativo, as colunas exatas e as duas primeiras linhas também exatas, temos pelo Lema 3×3, [R-1979], pág. 175, que a última linha é exata.

Continuando assim por diante, para $j \geq 4$ se

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker(\alpha_{j-2}) \arrow[r] & Ker(\gamma_{j-2}) \arrow[r, two heads] & Ker(\beta_{j-2}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

é uma sequência exata curta, então como por hipótese $H_{j-2}(\tilde{\mathcal{A}}) = 0$ e por exatidão do complexo $\mathcal{B}$, temos $H_{j-2}(\mathcal{B}) = 0$, segue da sequência exata longa em homologia que $H_{j-2}(\mathcal{C}) = 0$, assim $Ker(\gamma_{j-2}) = Im(\gamma_{j-1})$.

Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Im(\alpha_{j-1}) \arrow[r] & Im(\gamma_{j-1}) \arrow[r, two heads] & Im(\beta_{j-1}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{j-1} \arrow[u, "\alpha_{j-1}"'] \arrow[r, "\iota_{j-1}"'] & C_{j-1} = A_{j-1} \oplus B_{j-1} \arrow[u, dotted, "\gamma_{j-1}"'] \arrow[r, "\pi_{j-1}"'] & B_{j-1} \arrow[u, "\beta_{j-1}"'] \arrow[ul, dotted, "\exists\sigma_{j-1}"'] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(\alpha_{j-1}) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\gamma_{j-1}) \arrow[u, hook] \arrow[r] & Ker(\beta_{j-1}) \arrow[u, hook] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde σ_{j-1} existe por projetividade de B_{j-1} e $\gamma_{j-1} = \sigma_{j-1} \circ \pi_{j-1}$. E como o diagrama é comutativo, as colunas são exatas e as duas primeiras linhas são exatas, temos que a última linha é exata, pelo Lema 3×3, [R-1979], pág. 175. Portanto, obtemos γ_j conforme o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker(\alpha_{j-1}) \arrow[r] & Ker(\gamma_{j-1}) \arrow[r, two heads] & Ker(\beta_{j-1}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_j \arrow[u, "\alpha_j"'] \arrow[r, "\iota_j"'] & C_j = A_j \oplus B_j \arrow[u, dotted, "\gamma_j"'] \arrow[r, "\pi_j"'] & B_j \arrow[u, "\beta_j"'] \arrow[ul, dotted, "\exists\sigma_j"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde σ_j existe pela projetividade de B_j e $\gamma_j = \sigma_j \circ \pi_j$. Portanto, segue (b).

■

Seja

$$\mathcal{A} : \ldots \to A_{i+1} \stackrel{\alpha_{i+1}}{\to} A_i \to \ldots \to A_1 \to A_0 \to 0$$

um complexo de módulos projetivos para $i \geq 1$ e defina os seguintes complexos

$$\mathcal{A}' : \ldots \to A_{i+2} \to A_{i+1} \to A_i \to 0$$

e

$$\tilde{\mathcal{A}}' : \ldots \to A_{i+2} \to A_{i+1} \to Im(\alpha_{i+1}) \to 0.$$

Lema 3.2. *Existe uma sequência exata curta de complexos*

$$\tilde{\mathcal{A}}' \to \mathcal{C}' \to \breve{\mathcal{B}}$$

até dimensão $i+j$, onde pelo Lema 3.1

$$\begin{cases} j = 2 \text{ se } H_{i+1}(\mathcal{A}) \neq 0 \\ j > 2 \text{ se } H_{j-2+i}(\mathcal{A}) = \ldots = H_{i+1}(\mathcal{A}) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

e onde

$$\breve{\mathcal{B}} : \ldots \to B_{i+2} \to B_{i+1} \to Ker(\alpha_i)/Im(\alpha_{i+1}) \to 0$$

é uma resolução projetiva de $Ker(\alpha_i)/Im(\alpha_{i+1})$ e

$$\mathcal{C}' : \ldots \to C_{i+2} \to C_{i+1} \to Ker(\alpha_i) \to 0$$

é um complexo, onde $C_t = A_t \oplus B_t$, para $t > i$.

Demonstração: Pelo Lema 3.1, segue que existe a seguinte sequência exata curta

$$\tilde{\mathcal{A}}' \to \mathcal{C}' \to \breve{\mathcal{B}}$$

até dimensão $i+j$, onde j é dado por (3.2), conforme o Lema 3.1.

■

Lema 3.3. *O complexo $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} : \ldots \arrow[r] & C_{i+2} \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[r] \arrow[dr] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"'] & A_{i-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & A_0 \arrow[r] & 0, \\ & & & Ker(\alpha_i) \arrow[u, hook] & & & & \end{tikzcd}$$

onde $C_t = A_t \oplus B_t, \forall t \geq i+1$, obtido da colagem do complexo $\mathcal{C}'$ do Lema 3.2 com o complexo

$$0 \to Ker(\alpha_i) \to A_i \to \ldots \to A_0 \to 0$$

induzido por $\mathcal{A}$, é tal que existe a sequência exata curta de complexos

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C} \xrightarrow{\rho} \mathcal{B} \tag{3.3}$$

até a dimensão $i+j$, onde j vem do Lema 3.1 e é dado por (3.2), *e*

$$\mathcal{B} : \ldots \to B_{i+2} \to B_{i+1} \to 0$$

é uma resolução projetiva apagada de $Ker(\alpha_i)/Im(\alpha_{i+1})$ *(isto é, obtida de* $\breve{\mathcal{B}}$ *depois de apagar* $Ker(\alpha_i)/Im(\alpha_{i+1})$ *e fazer translação de índices), ou seja,* $H_j(\mathcal{B}) = 0$ *para* $j \neq i+1$ *e* $H_{i+1}(\mathcal{B}) \cong H_i(\mathcal{A})$*. Além disso,*

$$H_j(\mathcal{A}) \cong H_j(\mathcal{C}) \textit{ para } j \neq i \textit{ e } H_i(\mathcal{C}) = 0. \tag{3.4}$$

Demonstração: Pelo Lema 3.2, resta mostrar apenas (3.4).

Associada a sequência exata curta (3.3), existe a sequência exata longa em homologia

$$\ldots \stackrel{\rho_{i+1}}{\to} H_{i+1}(\mathcal{B}) \stackrel{\Delta_{i+1}}{\to} H_i(\mathcal{A}) \stackrel{\iota_i}{\to} H_i(\mathcal{C}) \stackrel{\rho_i}{\to} H_i(\mathcal{B}) \stackrel{\Delta_i}{\to} H_{i-1}(\mathcal{A}) \stackrel{\iota_{i-1}}{\to} H_{i-1}(\mathcal{C}) \stackrel{\rho_{i-1}}{\to} \ldots \stackrel{\rho_0}{\to} H_0(\mathcal{B}) \to 0$$

e como $H_{i+1}(\mathcal{B}) \cong H_i(\mathcal{A})$, isto é, Δ_{i+1} é isomorfismo (isto segue da definição de homomorfismo de conexão, vide pag. 171 Teorema 6.2 em [R-1979]), temos que $H_i(\mathcal{A}) = Im(\Delta_{i+1}) = Ker(\iota_i)$, logo $Im(\iota_i) = 0 = Ker(\rho_i)$ e como $Im(\rho_i) \subseteq H_i(\mathcal{B}) = 0$, segue pelo Teorema do Isomorfismo para Módulos que $H_i(\mathcal{C}) = 0$.

Se $j \neq i+1, i$, temos que $H_j(\mathcal{B}) = H_{j+1}(\mathcal{B}) = 0$, portanto da sequência exata

$$\ldots \to H_{j+1}(\mathcal{B}) = 0 \to H_j(\mathcal{A}) \to H_j(\mathcal{C}) \to H_j(\mathcal{B}) = 0 \to \ldots$$

obtemos que $H_j(\mathcal{A}) \cong H_j(\mathcal{C})$. Finalmente se $j = i+1$, temos a sequência exata longa

$$\ldots \to H_{i+2}(\mathcal{B}) = 0 \stackrel{\Delta_{i+2}}{\to} H_{i+1}(\mathcal{A}) \stackrel{\iota_{i+1}}{\to} H_{i+1}(\mathcal{C}) \stackrel{\rho_{i+1}}{\to} H_{i+1}(\mathcal{B}) \underset{iso}{\stackrel{\Delta_{i+1}}{\to}} H_i(\mathcal{A}) \to \ldots,$$

além disso, como $0 = Ker(\Delta_{i+1}) = Im(\rho_{i+1})$, segue que $H_{i+1}(\mathcal{C}) = Ker(\rho_{i+1}) = Im(\iota_{i+1})$ e portanto ι_{i+1} é sobrejetiva. Agora note que de $H_{i+2}(\mathcal{B}) = 0$, segue que $0 = Im(\Delta_{i+2}) = Ker(\iota_{i+1})$, logo ι_{i+1} é injetiva e portanto isomorfismo. Segue portanto de $H_j(\mathcal{B}) = 0$, para $j \neq i+1$, e $H_{i+1}(\mathcal{B}) \cong H_i(\mathcal{A})$ que

$$H_j(\mathcal{A}) \cong H_j(\mathcal{C}) \text{ para } j \neq i \text{ e } H_i(\mathcal{C}) = 0 \tag{3.5}$$

e portanto $\mathcal{C}$ é exato em dimensão i.

■

Aplicações e resultados preliminares

Sejam p um número primo fixo e G um grupo abstrato PD_n orientável. Seja $\mathcal{T}$ um conjunto dirigido de subgrupos normais de índice potência p em G tal que $\mathcal{T}$ induz a topologia pro-p de G. Seja

$$\mathcal{R} : 0 \to \mathcal{R}_n \overset{\partial_n}{\to} \dots \overset{\partial_3}{\to} \mathcal{R}_2 \overset{\partial_2}{\to} \mathcal{R}_1 \overset{\partial_1}{\to} \mathcal{R}_0 \overset{\partial_0}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

uma resolução projetiva do $\mathbb{Z}[G]$-módulo (à direita) trivial $\mathbb{Z}$ com todos os projetivos f.g. Considere o complexo $\mathcal{R}_U = \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[U]} \mathbb{F}_p$ para $U \in \mathcal{T}$. Seja

$$\widehat{\mathcal{R}} : 0 \to \widehat{\mathcal{R}}_n \overset{\widehat{\partial}_n}{\to} \dots \overset{\widehat{\partial}_3}{\to} \widehat{\mathcal{R}}_2 \overset{\widehat{\partial}_2}{\to} \widehat{\mathcal{R}}_1 \overset{\widehat{\partial}_1}{\to} \widehat{\mathcal{R}}_0 \overset{\widehat{\partial}_0}{\to} \mathbb{F}_p \to 0$$

o limite inverso dos complexos $\mathcal{R}_U$ sobre $U \in \mathcal{T}$. Segue de (1) em [KZ-2008] que

$$\widehat{\mathcal{R}} \cong \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$$

e pelo Lema 2.1 em [KZ-2008]

$$H_i(\widehat{\mathcal{R}}) \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_i(\mathcal{R}_U) \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_i(U, \mathbb{F}_p).$$

Seja $j \geq 1$. Se $H_j(\widehat{\mathcal{R}})$ é um $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo finito, existe $s_j \in \mathbb{N}$ tal que $H_j(\widehat{\mathcal{R}}) \cong \mathbb{F}_p^{s_j}$. Seja $G_0 \in \mathcal{T}$ tal que $M = \widehat{(G_0)}_p$ age trivialmente sobre $H_j(\widehat{\mathcal{R}})$ para todo j.

Lema 3.4. *Seja p um primo fixo. Seja G um grupo abstrato PD_n orientável. Suponha que o completamento pro-p $\widehat{G}_p$ de G é infinito. Se $\widehat{G}_p$ é de tipo FP_k sobre $\mathbb{Z}_p$, então $\mathbb{F}_p$ tem tipo FP_k sobre $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}_p]]$. Em particular, $\oplus_{finita}\mathbb{F}_p$ tem tipo FP_k sobre $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}_p]]$.*

Demonstração: A justificativa que segue é baseada na demonstração do Lema 1 em [D.H.K-2009].

Seja R um anel profinito. Do Lema 7.2.2 em [W-1998], temos para quaisquer R-módulos profinitos finitamente gerados M_1 e M_2, que qualquer homomorfismo $\varphi : M_1 \to M_2$ de R-módulos abstratos é contínuo. Isso implica que M_i é de tipo FP_k como R-módulo profinito se, e somente se, M_i tem tipo FP_k como R-módulo abstrato. Vamos aplicar isso para a Proposição 1.3 ("mudança de dimensão") com $R = \mathbb{Z}_p[[\widehat{G}_p]]$.

Considere a sequência exata curta

$$p\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$$

de $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos profinitos, onde $p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$ é por hipótese de tipo FP_k como módulo pro-p (logo como módulo abstrato) sobre $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}_p]]$. Portanto, pelo item (a) da Proposição 1.3, segue que $\mathbb{F}_p$ é de tipo FP_k como módulo abstrato sobre $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}_p]]$, portanto $\mathbb{F}_p$ é de tipo FP_k como módulo pro-p sobre $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}_p]]$.

Em particular, a soma direta finita $\oplus_{\text{finita}}\mathbb{F}_p$ tem tipo FP_k (como módulo abstrato e pro-p) sobre $\mathbb{Z}_p[[\widehat{G}_p]]$ (isto é consequência imediata do item (c) da Proposição 1.3).

■

No caso $n \geq 5$, nas condições do Teorema Principal 1, temos que $\widehat{G}_p$ é virtualmente pro-p analítico. Portanto é de tipo FP_∞. O seguinte Lema será usado somente no caso $n = 4$ para obter que $\widehat{G}_p$, nas condições do Teorema Principal 2, é de tipo FP_∞. Observamos que no seguinte Lema não supomos as hipóteses dos Teoremas Principais.

Lema 3.5. *Seja p um primo fixo. Seja G um grupo abstrato PD_n orientável. Suponha que o completamento pro-p $\widehat{G}_p$ de G é infinito e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(\widehat{\mathcal{R}}) < \infty, \forall j$. Então se $\widehat{G}_p$ é de tipo FP_k sobre $\mathbb{Z}_p$, vamos ter que $\widehat{G}_p$ tem tipo FP_{k+3} sobre $\mathbb{Z}_p$. Em particular, $\widehat{G}_p$ tem tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$.*

Demonstração: Observamos que $M = \widehat{(G_0)}_p$ tem tipo FP_k se, e somente se, $\widehat{G}_p$ tem tipo FP_k. Pelo Lema 3.4, temos que $\oplus_{\text{finita}}\mathbb{F}_p$ é de tipo FP_k sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$. Em particular, $H_j(\widehat{\mathcal{R}})$ é de tipo FP_k sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$, para $j \geq 1$. Portanto, existe uma resolução projetiva pro-p apagada deslocada de $H_j(\widehat{\mathcal{R}})$ sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$

$$\mathcal{S}^{(j)} : \ldots \to \mathcal{S}^{(j)}_{j+1+k} \to \ldots \to \mathcal{S}^{(j)}_{j+3} \to \mathcal{S}^{(j)}_{j+2} \to \mathcal{S}^{(j)}_{j+1} \to 0 \to 0 \to \ldots \to 0 \tag{3.6}$$

tal que $\mathcal{S}^{(j)}_i = 0$ para $i \leq j$ e os $\mathbb{Z}_p[[M]]$-módulos projetivos pro-p $\mathcal{S}^{(j)}_i$ são finitamente gerados para $j+1 \leq i \leq j+1+k$. Isto é, $H_i(\mathcal{S}^{(j)}) = 0$ para $i \neq j+1$ e $H_{j+1}(\mathcal{S}^{(j)}) \cong H_j(\widehat{\mathcal{R}})$.

Considere a sequência exata curta (definida até dimensão $j+2$, conforme Lema 3.3) de complexos de $\mathbb{Z}_p[[M]]$-módulos

$$\widehat{\mathcal{R}} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(j)} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(j)} \tag{3.7}$$

onde $\mathcal{S}_i^{(j)} = 0$ para $i \leq j$ e, para $i \geq 0$, $\mathcal{Q}_i^{(j)} = \widehat{\mathcal{R}}_i \oplus \mathcal{S}_i^{(j)}$ (pois $\mathcal{S}^{(j)}$ contém somente projetivos) é tal que

$$H_j(\mathcal{Q}^{(j)}) = 0 \text{ e } H_i(\mathcal{Q}^{(j)}) \cong H_i(\widehat{\mathcal{R}}) \text{ para } i \neq j, \tag{3.8}$$

por (3.5) no Lema 3.3 com $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{R}}$, $\mathcal{C} = \mathcal{Q}^{(j)}$ e $\mathcal{B} = \mathcal{S}^{(j)}$.

Observe que $\mathcal{Q}_i^{(j)}$ é f.g. para $0 \leq i \leq j+1+k$, pois $\widehat{\mathcal{R}}_i$ é f.g. para todo i, $\mathcal{S}_i^{(j)}$ é f.g. para $j+1 \leq i \leq j+1+k$ e $\mathcal{S}_i^{(j)} = 0$ para $i \leq j$ (resolução deslocada nos j-primeiros termos).

Note em (3.8) que $H_i(\mathcal{Q}^{(j)}) \cong H_i(\widehat{\mathcal{R}})$ para $i \neq j$. Em particular, temos que $H_{j-1}(\mathcal{Q}^{(j)}) \cong H_{j-1}(\widehat{\mathcal{R}})$ que tem tipo FP_k sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$, por hipótese e pelo Lema 3.4. Portanto, existe uma resolução projetiva pro-p apagada deslocada de $H_{j-1}(\mathcal{Q}^{(j)})$

$$\mathcal{S}^{(j-1)} : \ldots \to \mathcal{S}_{j+k}^{(j-1)} \to \ldots \to \mathcal{S}_{j+2}^{(j-1)} \to \mathcal{S}_{j+1}^{(j-1)} \to \mathcal{S}_{j}^{(j-1)} \to 0 \to \ldots \to 0 \tag{3.9}$$

tal que $\mathcal{S}_i^{(j-1)} = 0$ para $i \leq j-1$ e os $\mathbb{Z}_p[[M]]$-módulos projetivos pro-p $\mathcal{S}_i^{(j-1)}$ são finitamente gerados para $j \leq i \leq j+k$. Isto é, $H_i(\mathcal{S}^{(j-1)}) = 0$ para $i \neq j$ e $H_j(\mathcal{S}^{(j-1)}) \cong H_{j-1}(\widehat{\mathcal{R}})$.

Prosseguindo, considere a sequência exata curta (exata até dimensão $j+2$, pois $H_j(\mathcal{Q}^{(j)}) = 0$, conforme Lema 3.3) de complexos de $\mathbb{Z}_p[[M]]$-módulos

$$\mathcal{Q}^{(j)} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(j,j-1)} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(j-1)} \tag{3.10}$$

onde $\mathcal{S}_i^{(j-1)} = 0$ para $i \leq j-1$ e, para todo $i \geq 0$, $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1)} = \mathcal{Q}_i^{(j)} \oplus \mathcal{S}_i^{(j-1)}$ (pois $\mathcal{S}^{(j-1)}$ contém somente projetivos) é tal que

$$H_{j-1}(\mathcal{Q}^{(j,j-1)}) = 0 \text{ e } H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1)}) \cong H_i(\mathcal{Q}^{(j)}) \text{ para } i \neq j-1, \tag{3.11}$$

por (3.5) no Lema 3.3 com $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{(j)}$, $\mathcal{C} = \mathcal{Q}^{(j,j-1)}$ e $\mathcal{B} = \mathcal{S}^{(j-1)}$.

Observe que $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1)}$ é f.g. para $0 \leq i \leq j+k$, pois $\mathcal{Q}_i^{(j)}$ é f.g. para $0 \leq i \leq j+1+k$, $\mathcal{S}_i^{(j-1)}$ é f.g. para $j \leq i \leq j+k$ e $\mathcal{S}_i^{(j-1)} = 0$ para $i \leq j-1$ (resolução deslocada nos $(j-1)$-primeiros termos).

Suponha por hipótese de indução que já construímos

$$\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)} = \mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda+1)} \oplus \mathcal{S}^{(j-\lambda)},$$

onde λ é um número natural tal que $1 < \lambda < j-2$ e $\mathcal{S}^{(j-\lambda)}$ é uma resolução projetiva pro-p apagada deslocada do $\mathbb{Z}_p[[M]]$-módulo $H_{j-\lambda}(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda+1)}) \cong H_{j-\lambda}(\widehat{\mathcal{R}})$, isto é, $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda)}$ é f.g. para $j-\lambda+1 \leq i \leq j-\lambda+1+k$ e $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda)} = 0$ para $i \leq j-\lambda$ (resolução deslocada dos $(j-\lambda)$-primeiros termos). E que $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda+1)}$ é f.g. para $0 \leq i \leq j-\lambda+2+k$. Além disso,

$$H_{j-\lambda}(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)}) = 0 \text{ e } H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)}) \cong H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda+1)}), \tag{3.12}$$

para $i \neq j-\lambda$, por (3.5) no Lema 3.3 com $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda+1)}$, $\mathcal{C} = \mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)}$ e $\mathcal{B} = \mathcal{S}^{(j-\lambda)}$.

Então, $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)}$ é f.g. para $0 \leq i \leq j-\lambda+1+k$, pois por hipótese de indução $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda+1)}$ é f.g. para $0 \leq i \leq j-\lambda+2+k$, $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda)}$ é f.g. para $j-\lambda+1 \leq i \leq j-\lambda+1+k$ e $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda)} = 0$ para $i \leq j-\lambda$ (resolução deslocada nos $(j-\lambda)$-primeiros termos).

Note que de (3.8), (3.11) e (3.12), temos que

$$H_i(\mathcal{Q}^{j,j-1,\ldots,j-\lambda}) = 0 \text{ para } j-\lambda \leq i \leq j \tag{3.13}$$

e

$$H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)}) \cong H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda+1)}) \cong \ldots \cong H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1)}) \cong H_i(\mathcal{Q}^{(j)}) \cong H_i(\widehat{\mathcal{R}}), \tag{3.14}$$

para $i \leq j-\lambda-1$, que é de tipo FP_k sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$, por hipótese e pelo Lema 3.4. Em particular, existe $\mathcal{S}^{(j-\lambda-1)}$ uma resolução projetiva pro-p apagada deslocada de $H_{j-\lambda-1}(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)})$ sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$, tal que $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda-1)} = 0$ para $i \leq j-\lambda-1$ e $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda-1)}$ é finitamente gerado para $j-\lambda \leq i \leq j-\lambda+k$. Isto é,

$$H_i(\mathcal{S}^{(j-\lambda-1)}) = 0 \text{ para } i \neq j-\lambda \text{ e } H_{j-\lambda}(\mathcal{S}^{(j-\lambda-1)}) \cong H_{j-\lambda-1}(\widehat{\mathcal{R}}). \tag{3.15}$$

Considere a sequência exata curta (exata até dimensão $j+2$, conforme (3.13) e Lema 3.3) de complexos de $\mathbb{Z}_p[[M]]$-módulos

$$\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda-1)} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(j-\lambda-1)} \tag{3.16}$$

onde $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda-1)} = 0$ para $i \leq j-\lambda-1$ e, para todo $i \geq 0$, $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda-1)} = \mathcal{Q}_i^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)} \oplus \mathcal{S}_i^{(j-\lambda-1)}$, pois $\mathcal{S}^{(j-\lambda-1)}$ contém somente projetivos. Por (3.16) e por construção (vide (3.5) no Lema 3.3 com $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)}$, $\mathcal{C} = \mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda-1)}$ e

$\mathcal{B} = \mathcal{S}^{(j-\lambda-1)}$), segue que

$$H_{j-\lambda-1}(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda-1)}) = 0 \text{ e } H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda-1)}) \cong H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)}), \tag{3.17}$$

para $i \neq j-\lambda-1$. Agora observe que $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda-1)}$ é f.g. para $0 \leq i \leq j-\lambda+k$. De fato, por hipótese de indução, temos que $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1,j-2,\ldots,j-\lambda)}$ é f.g. para $0 \leq i \leq j-\lambda+1+k$, $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda-1)}$ é f.g. para $j-\lambda \leq i \leq j-\lambda+k$ e $\mathcal{S}_i^{(j-\lambda-1)} = 0$ para $i \leq j-\lambda-1$ (resolução deslocada nos $(j-\lambda-1)$-primeiros termos).

Portanto, em particular, usando o Lema 3.4 e por indução podemos construir o seguinte complexo $\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,2)}$ onde temos sequência exata curta até dimensão $j+2$

$$\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,3)} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,2)} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(2)} \tag{3.18}$$

onde $\mathcal{S}^{(2)}$ é uma resolução projetiva pro-p apagada deslocada de $H_2(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,3)})$ sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$ com os projetivos $\mathcal{S}_i^{(2)}$ finitamente gerados para $3 \leq i \leq 3+k$, $\mathcal{S}_i^{(2)} = 0$ para $i \leq 2$ e $H_3(\mathcal{S}^{(2)}) \cong H_2(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,3)})$. Além disso, por (3.8), (3.11) e (3.17) temos que

$$H_2(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,2)}) = 0 \text{ e } H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,2)}) \cong H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,3)}) \text{ para } i \neq 2. \tag{3.19}$$

Portanto, como $H_i(\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,3)}) = 0$ para $i \in \{j, j-1, j-2, \ldots, 3\}$, segue por (3.19) que $\mathcal{Q}^{(j,j-1,j-2,\ldots,2)}$ até dimensão $j+1$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{F}_p$ sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$.

Note que por construção $\mathcal{Q}_i^{(j,j-1,j-2,\ldots,2)}$ é f.g. para todo $0 \leq i \leq k+3$, logo concluímos que $\mathbb{F}_p$ é de tipo FP_{k+3} sobre $\mathbb{Z}_p[[M]]$. Logo $\mathbb{F}_p$ é de tipo FP_{k+3} sobre $\mathbb{F}_p[[M]]$, portanto $\widehat{G}_p$ é de tipo FP_{k+3} sobre $\mathbb{F}_p$. Em particular, como todo grupo é tipo FP_0, obtemos que $\widehat{G}_p$ é de tipo FP_{3r} para todo número natural r, logo $\widehat{G}_p$ é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{F}_p$. E equivalentemente, segue por [P-1980], pág. 59, que $\widehat{G}_p$ é de tipo FP_∞ sobre $\mathbb{Z}_p$.

■

Lema 3.6. *$H_i(\widehat{\mathcal{R}}) = 0$ para $i = 0, 1, n$.*

Demonstração: Como o produto tensorial é funtor exato à direita, temos que $H_0(\widehat{\mathcal{R}}) = 0$. Além disso,

$$H_1(U, \mathbb{F}_p) \cong \frac{U}{[U,U]U^p} \cong \frac{\widehat{U}_p}{[\widehat{U}_p, \widehat{U}_p]\widehat{U}_p^p} \cong H_1(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p)$$

logo como limite inverso comuta com homologia contínua tem-se que

$$H_1(\widehat{\mathcal{R}}) \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_1(U, \mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_1(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) = H_1(\varprojlim_{U \in \mathcal{T}} \widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) = H_1(1, \mathbb{F}_p) = 0.$$

Como G é um grupo PD_n orientável, temos que todo subgrupo de índice finito em G também o é. Logo, para todo $U \in \mathcal{T}$, temos que $H_n(U, \mathbb{F}_p) \cong H^0(U, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$ pois U age trivialmente em $\mathbb{F}_p$. Portanto, $\varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_n(U, \mathbb{F}_p)$ é 0 ou $\mathbb{F}_p$, pelo Lema 2.5. Suponha que $H_n(\widehat{\mathcal{R}}) \cong \mathbb{F}_p$. Note que como $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$ é anel local, cada $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo projetivo finitamente gerado é livre, portanto $\widehat{\mathcal{R}}_n$ é um $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo livre de posto finito. Logo, existe um número natural t tal que

$$\mathbb{F}_p \cong H_n(\widehat{\mathcal{R}}) = Ker\widehat{\partial}_n \subseteq \widehat{\mathcal{R}}_n \cong \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]^t$$

isto é, o $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo trivial $\mathbb{F}_p$ é um submódulo finito de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$, o que é um absurdo pela Proposição 3.1 em [KZ-2008] ou, com maiores detalhes, por [M-2009], página 124. Portanto, $H_n(\widehat{\mathcal{R}}) = 0$. ■

A demonstração do Lema a seguir é baseada nas ideias da demonstração do Teorema 1 em [K-2009].

Lema 3.7. $\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{\mathcal{R}}) \leq m$.

Demonstração: A aplicação canônica

$$\varphi_{2,U} : H_2(U, \mathbb{F}_p) \to H_2(\widehat{U}, \mathbb{F}_p)$$

é um epimorfismo e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{\mathcal{R}})$ é finito. De fato, $H_2(U, \mathbb{F}_p) \cong H_2(\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[U]} \mathbb{F}_p) \cong H_2(\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]} \mathbb{F}_p)$. A resolução parcial projetiva profinita do $\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]$-módulo trivial $\mathbb{F}_p$

$$\widehat{\mathcal{R}}_2 \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} \widehat{\mathcal{R}}_1 \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} \widehat{\mathcal{R}}_0 \to \mathbb{F}_p \to 0$$

pode ser estendida para a resolução parcial projetiva

$$\mathcal{S} : S \xrightarrow{\nu} \widehat{\mathcal{R}}_2 \xrightarrow{\widehat{\partial}_2} \widehat{\mathcal{R}}_1 \xrightarrow{\widehat{\partial}_1} \widehat{\mathcal{R}}_0 \to \mathbb{F}_p \to 0$$

onde o $\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]$-módulo S contém $\widehat{\mathcal{R}}_3$ como um submódulo fechado e ν é uma extensão de $\widehat{\partial}_3 : \widehat{\mathcal{R}}_3 \to \widehat{\mathcal{R}}_2$. Logo, $H_2(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) \cong H_2(\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]} \mathbb{F}_p)$ é um quociente de $H_2(\widehat{\mathcal{R}} \otimes_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]} \mathbb{F}_p) \cong$

$H_2(U, \mathbb{F}_p)$ e portanto $\varphi_{2,U}$ é sobrejetiva. Disto e da hipótese do Teorema Principal 2 e a Observação 1 do Teorema Principal 1, segue que

$$\dim_{\mathbb{F}_p} Ker(\varphi_{2,U}) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) \leq m$$

logo não depende de $U \in \mathcal{T}$ e segue que

$$\sup_{U \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} Ker(\varphi_{2,U}) \leq m.$$

Portanto, pelo Lema 2.5 temos que

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} Ker(\varphi_{2,U}) \leq \sup_{U \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} Ker(\varphi_{2,U}) \leq m$$

e da sequência exata

$$0 \to \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} Ker(\varphi_{2,U}) \to \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_2(U, \mathbb{F}_p) \to (\varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_2(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p)) = 0 \to \dots$$

segue que

$$\dim_{\mathbb{F}_p} Tor_2^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{\mathcal{R}}) = \dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} H_2(U, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U \in \mathcal{T}} Ker(\varphi_{2,U}) \leq m.$$

■

O Lema a seguir mostra que $H_i(\widehat{\mathcal{R}})$ é finito para todo $i \leq n$.

Lema 3.8. *(a) Nas condições do Teorema Principal* 2, *para* $U \in \mathcal{T}$ *e para a aplicação canônica*

$$\varphi_{3,U} : H_3(U, \mathbb{F}_p) \to H_3(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p)$$

temos que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} Coker(\varphi_{3,U}) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} Im(\varphi_{3,U}) \\ &\leq s_2 < \infty \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $s_2 = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{\mathcal{R}})$.

(b) Nas condições do Teorema Principal 1 *ou Teorema Principal* 2,

$$Tor_j^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \cong H_j(\widehat{\mathcal{R}}) = H_j(\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])$$

é finito para $j \leq n$.

Demonstração de (a) e (b): No caso do Teorema Principal 1, $\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(\widehat{\mathcal{R}}) = \dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U\in\mathcal{T}} H_i(U,\mathbb{F}_p) < \infty$ pela Observação 1 do Teorema Principal 1. Podemos supor que estamos nas hipóteses do Teorema Principal 2 e mostraremos (a) e (b). Usaremos as construções já feitas em (3.19) no Lema 3.5, com $\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$ e $U = G$ para o complexo de projetivos $\mathcal{S}^{(j)}$, mas sem a condição de que o complexo $\mathcal{S}^{(j)}$ seja de módulos finitamente gerados até uma certa dimensão (isto é, sem que $\mathcal{S}_i^{(j)}$ seja necessariamente f.g. para $0 \leq i \leq k$, para algum $k \in \mathbb{N}$).

Pelos Lemas 3.7 e 3.6, temos que mostrar apenas que $H_3(\widehat{\mathcal{R}})$ é finito.

Primeiramente, note que pelo Lema 3.7, $H_2(\widehat{\mathcal{R}})$ é um $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo finito, logo existe $s_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$H_2(\widehat{\mathcal{R}}) = \mathbb{F}_p^{s_2} = \underbrace{\mathbb{F}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}_p}_{s_2}$$

isto é, $s_2 = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{\mathcal{R}})$ é finito. Observamos que existe $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que U_0 age trivialmente sobre $H_2(\widehat{\mathcal{R}})$. Consideraremos somente $U \in \mathcal{T}$ tal que $U \subseteq U_0$.

Como

$$\widehat{\mathcal{R}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p = \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]] \otimes_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]} \mathbb{F}_p \cong \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{F}_p[G/U]$$

temos pelo Lema de Shapiro que

$$H_3(\widehat{\mathcal{R}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) \cong H_3(G, \mathbb{F}_p[G/U]) \cong H_3(U, \mathbb{F}_p)$$

e como $\mathcal{Q}^{(3,2)}$ é até dimensão 4 uma resolução projetiva pro-p de $\mathbb{F}_p$ sobre $\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]$, existe o isomorfismo $H_3(\mathcal{Q}^{(3,2)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) \cong H_3(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p)$. Segue desses isomorfismos que a aplicação

$$\varphi_{3,U} : H_3(U, \mathbb{F}_p) \to H_3(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p)$$

é a aplicação

$$f_U : H_3(\widehat{\mathcal{R}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) \to H_3(\mathcal{Q}^{(3,2)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p)$$

induzida pela inclusão de $\widehat{\mathcal{R}}$ em $\mathcal{Q}^{(3,2)}$ até dimensão 4.

Como os complexos $\mathcal{S}^{(t)}$, para $2 \leq t \leq 3$, contém somente projetivos, temos as seguintes sequências exatas curtas

$$\widehat{\mathcal{R}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(3)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(3)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p,$$

$$\mathcal{Q}^{(3)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(3,2)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(2)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p,$$

e as respectivas sequências exatas longas associadas em homologia

$$\ldots \to H_3(\widehat{\mathcal{R}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) \stackrel{f_{1,U}}{\to} H_3(\mathcal{Q}^{(3)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) \to H_3(\mathcal{S}^{(3)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) = 0 \to \ldots, \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\ldots \to H_3(\mathcal{Q}^{(3)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) \stackrel{f_{2,U}}{\to} H_3(\mathcal{Q}^{(3,2)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) \to H_3(\mathcal{S}^{(2)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) &\cong \\ \cong Tor_0^{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}(H_2(\widehat{\mathcal{R}}), \mathbb{F}_p) &\cong \\ \cong H_2(\widehat{\mathcal{R}}) \otimes_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]} \mathbb{F}_p &\to \ldots\end{aligned}$$

Como $f_U = f_{2,U} \circ f_{1,U}$ e $f_{1,U}$ é sobrejetiva, segue que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_p} Coker(f_U) &= \dim_{\mathbb{F}_p} Coker(f_{2,U} \circ f_{1,U}) \\ &\leq \dim_{\mathbb{F}_p} Coker(f_{2,U})\end{aligned} \tag{3.22}$$

onde temos por (3.21) que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_p} Coker(f_{2,U}) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(\mathcal{Q}^{(3,2)}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}\mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} Im(f_{2,U}) \\ &\leq \dim_{\mathbb{F}_p} Tor_0^{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]}(H_2(\widehat{\mathcal{R}}), \mathbb{F}_p) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p}(H_2(\widehat{\mathcal{R}}) \otimes_{\mathbb{F}_p[[\widehat{U}_p]]} \mathbb{F}_p) \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{\mathcal{R}}) = s_2\end{aligned} \tag{3.23}$$

Logo, por (3.22) e (3.23), temos que

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_p} Coker(f_U) &\leq \dim_{\mathbb{F}_p} Coker(f_{2,U}) \\ &\leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{\mathcal{R}}) = s_2\end{aligned} \tag{3.24}$$

e a expressão na última linha de (3.24) é finita pelo Lema 3.7 (e não depende de $U \in \mathcal{T}$).

Agora vamos mostrar que

$$Tor_3^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \cong H_3(\widehat{\mathcal{R}}) = H_3(\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \tag{3.25}$$

é finito.

De fato, pela hipótese do Teorema Principal 2 e por (3.24), tem-se

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{F}_p} Ker(\varphi_{3,U}) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(U,\mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} Im(\varphi_{3,U}) \\
&\leq \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(\widehat{U}_p,\mathbb{F}_p) + m - \dim_{\mathbb{F}_p} Im(\varphi_{3,U}) \\
&= \dim_{\mathbb{F}_p} Coker(\varphi_{3,U}) + m \\
&\leq s_2 + m,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $s_2 = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(\widehat{\mathcal{R}})$ é finito pelo Lema 3.7. Portanto, por (3.24), segue que a expressão na última linha de (3.26) é finita e não depende de $U \in \mathcal{T}$. Logo,

$$\sup_{U\in\mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} Ker(\varphi_{3,U}) \leq s_2 + m < \infty. \tag{3.27}$$

Então usando as seguintes sequências exatas

$$0 \to \varprojlim_{U\in\mathcal{T}} Im(\varphi_{3,U}) \to (\varprojlim_{U\in\mathcal{T}}{}^{1} H_3(\widehat{U}_p,\mathbb{F}_p)) = 0 \to \dots$$

e

$$0 \to \varprojlim_{U\in\mathcal{T}} Ker(\varphi_{3,U}) \to \varprojlim_{U\in\mathcal{T}} H_3(U,\mathbb{F}_p) \to (\varprojlim_{U\in\mathcal{T}} Im(\varphi_{3,U})) = 0 \to \dots$$

temos pelo Lema 2.5 e por (3.27) que

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{F}_p} Tor_3^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_3(\widehat{\mathcal{R}}) \\
&= \dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U\in\mathcal{T}} H_3(U,\mathbb{F}_p) \\
&= \dim_{\mathbb{F}_p} \varprojlim_{U\in\mathcal{T}} Ker(\varphi_{3,U}) \\
&\leq \sup_{U\in\mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} Ker(\varphi_{3,U}) < \infty.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Portanto, $H_i(\widehat{\mathcal{R}})$ é finito para todo $i \leq 4$. ■

Lema 3.9 ([K-2009], ideias do Teorema 4)**.** *Suponha satisfeitas as hipóteses do Teorema Principal* 1 *ou Teorema Principal* 2*. Então*

$$H^i(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}^{del},\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]))$$

é finito para cada $i \geq 1$.

Demonstração: Considere o complexo dual $\mathcal{M} = Hom_{\mathbb{Z}[G]}(\mathcal{R}^{del},\mathbb{Z}[G])$, isto é, $\mathcal{M}$ é um complexo de $\mathbb{Z}[G]$-módulos à esquerda. Como G é PD_n orientável por hipótese, temos que $H^i(\mathcal{M}) = H^i(G,\mathbb{Z}[G])$ é 0 para $i \neq n$ e $\mathbb{Z}$ para $i = n$, conforme o Teorema 1.3.

Defina $\mathfrak{T}$ o complexo obtido de $\mathcal{M}$ adicionando sua única cohomologia não trivial

$$\mathfrak{T} : 0 \to M^0 \to M^1 \to M^2 \to M^3 \to \ldots \to M^n \to H^n(\mathcal{M}) = \mathbb{Z} \to 0.$$

Em particular, o complexo $\mathfrak{T}$ é uma resolução projetiva do $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial à esquerda $\mathbb{Z}$ com cada M_i f.g. Defina $\widehat{\mathfrak{T}} = \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathfrak{T}$. Então $\widehat{\mathfrak{T}}$ é um complexo de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos e

$$\widehat{\mathfrak{T}}^{del} \cong Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}^{del}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])$$

como complexos de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos, conforme demonstração do item (b) do Teorema 4.1 em [KZ-2008] (ou com maiores detalhes em [M-2009], página 134), onde $\widehat{\mathcal{R}}$ é um complexo de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos à direita. Logo,

$$H^i(\widehat{\mathfrak{T}}^{del}) \cong H^i(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}^{del}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])), \tag{3.29}$$

para cada $i \geq 1$.

Seja $\widehat{\mathcal{R}^{op}}$ a versão de $\widehat{\mathcal{R}}$ trocando módulos à direita por módulos à esquerda. Então pela versão dual do item (b) do Lema 3.8 (isto é, trocando módulos à direita por módulos à esquerda)

$$H^i(\widehat{\mathfrak{T}}^{del}) \cong Tor_{n-i}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]], \mathbb{Z}) \cong H_{n-i}(\widehat{\mathcal{R}^{op}}^{del}) \text{ é finito para todo } 1 \leq i \leq n-1 \tag{3.30}$$

e por exatidão à direita $\quad H^n(\widehat{\mathfrak{T}}^{del}) \cong H_0(\widehat{\mathcal{R}^{op}}^{del}) = 0.$

■

Lema 3.10. *Seja G um grupo abstrato. Seja $j \geq 0$. Suponha que $\widehat{G}_p$ é infinito. Seja M é um pro-p $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo finito. Então*

$$Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(M, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0.$$

Além disso, para $j \geq 1$, se

$$Ext^j_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0,$$

então

$$Ext^j_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(M, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0.$$

Demonstração: Se $M = 0$, o resultado é óbvio, portanto assumiremos que $M \neq 0$.

Primeiramente, como $\widehat{G}_p$ é infinito, segue do Lema 3 em [Me-1996] que

$$Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]^{\widehat{G}_p} = 0.$$

Seja M um pro-p $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo finito. Então M é p-primário e possui uma filtração de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos com quocientes simples e, pelo Lema 7.1.5 em [RZ-2000], a menos de isomorfismos existe apenas um único $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo simples, que é o $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo trivial $\mathbb{F}_p$.

Portanto, considere a seguinte sequência exata curta de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos finitos

$$0 \to M_1 \to M \to M_2 = \mathbb{F}_p \to 0$$

onde $M_i \neq 0$ e $|M_i| < |M|$, para $i = 1$ e 2.

Assuma por hipótese de indução que o resultado é válido para $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos finitos de ordem menor que $|M|$.

Existe a sequência exata longa em Ext

$$\ldots \to Ext^j_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(M_2, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to Ext^j_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(M, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to Ext^j_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(M_1, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots$$

e por indução em $|M|$, temos que $Ext^j_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(M_i, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ para $i = 1$ (hipótese de indução) e $i = 2$ (base da indução no caso $j = 0$ ou por hipótese no caso $j \geq 1$). Segue portanto por indução em $|M|$ que $Ext^j_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(M, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$.

■

CAPÍTULO 4

RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção iremos demonstrar os resultados principais desta tese:

Teorema Principal 1. *Seja p um primo fixo. Seja $n \geq 5$. Seja G um grupo abstrato PD_n orientável. Suponha que o completamento pro-p $\widehat{G}_p$ de G é infinito e não é virtualmente um grupo pro-p PD_n. Suponha além disso que:*

(a) $\sup\left\{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) |\ U \triangleleft G \text{ de índice potência de } p\right\}$ *é finito.*

(b) $\sup_{U \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) < \infty$, *para* $0 \leq i \leq n$.

Então $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo pro-p PD_s para algum $s \leq n-2$.

Teorema Principal 2. *Seja p um primo fixo. Seja G um grupo abstrato PD_4 orientável. Suponha que o completamento pro-p $\widehat{G}_p$ de G é infinito e não é virtualmente um grupo pro-p PD_4. Suponha além disso que: $\exists\ m > 0$ tal que $\forall\ U \triangleleft G$ de índice potência de p em G, tem-se*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) - \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) \leq m,\ \forall\ 0 \leq i \leq 4.$$

Então $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo pro-p PD_s para algum $s \leq 2$.

Demonstração: A demonstração funciona para os dois Teoremas Principais. Iremos considerar ao longo da demonstração a resolução projetiva pro-p construída em (3.18) na demonstração do Lema 3.5, no entanto, sem a condição de que a resolução projetiva pro-p $\mathcal{S}^{(k)}$ seja de módulos f.g.

Primeiramente, considere a sequência exata curta (exata até dimensão $n+1$, conforme Lema 3.3)

$$\widehat{\mathcal{R}} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(n-1)} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(n-1)} \tag{4.1}$$

de complexos de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos.

E ainda como $\mathcal{S}^{(n-1)}$ contém somente módulos projetivos, temos para cada $j \geq 1$ que

$$\mathcal{Q}_j^{(n-1)} = \widehat{\mathcal{R}}_j \oplus \mathcal{S}_j^{(n-1)}$$

onde $\mathcal{S}_j^{(n-1)} = 0$ para $j \leq n-1$. Portanto temos a seguinte sequência exata curta (exata até dimensão $n+1$, conforme Lema 3.3) de complexos de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos

$$Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \tag{4.2}$$

e a correspondente sequência exata longa em cohomologia

$$\begin{aligned}
&\ldots \to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \\
&\to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^2(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \ldots \\
&\to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \\
&\to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^{n}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong \\
&\cong Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-1}(\widehat{\mathcal{R}}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Note que $\mathcal{S}_j^{(n-1)} = 0$ para $j \leq n-1$. E além disso, pelo item (b) do Lema 3.8 temos que $H_{n-1}(\widehat{\mathcal{R}})$ é finito, logo pelo Lema 3.10 segue que $Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-1}(\widehat{\mathcal{R}}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ e portanto $H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) = 0$ para $t \leq n$, logo

$$H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])), \text{ para } t \leq n-1. \tag{4.4}$$

Continuando, considere a sequência exata curta (exata até dimensão $n+1$, conforme Lema 3.3)

$$\mathcal{Q}^{(n-1)} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(n-1,n-2)} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(n-2)} \tag{4.5}$$

de complexos de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos.

E ainda como $\mathcal{S}^{(n-2)}$ contém somente módulos projetivos, temos para cada $j \geq 0$ que

$$\mathcal{Q}_j^{(n-1,n-2)} = \mathcal{Q}_j^{(n-1)} \oplus \mathcal{S}_j^{(n-2)}$$

onde $\mathcal{S}_j^{(n-2)} = 0$ para $j \leq n-2$. Portanto temos a seguinte sequência exata curta (exata até dimensão $n+1$, conforme Lema 3.3) de complexos $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos

$$Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \tag{4.6}$$

e a correspondente sequência exata longa em cohomologia

$$\begin{aligned}\ldots\ & \to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \\ & \to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^2(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \ldots \\ & \to H^{n-2}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^{n-2}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \\ & \to H^{n-2}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong \\ & \cong Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-2}(\mathcal{Q}^{(n-1)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \\ & \to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^{n}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong \\ & \cong Ext^1_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-2}(\mathcal{Q}^{(n-1)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots\end{aligned} \tag{4.7}$$

Note que $\mathcal{S}_j^{(n-2)} = 0$ para $j \leq n-2$. E além disso, por construção, temos que $H_{n-2}(\mathcal{Q}^{(n-1)}) \cong H_{n-2}(\widehat{\mathcal{R}})$ que é finito pelo item (b) do Lema 3.8, logo pelo Lema 3.10 segue que $Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-2}(\mathcal{Q}^{(n-1)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ e portanto $H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) = 0$ para $t \leq n-1$, logo por (4.7) e (4.4)

$$\begin{aligned} H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) & \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ & \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])), \text{ para } t \leq n-2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Suponha por indução em $k \geq 2$ que já mostramos para todo $t \leq n-k$ que

$$\begin{aligned} & H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ & \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k+1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ & \cong \ldots \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ & \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Vamos mostrar que para todo $t \leq n-k-1$

$$\begin{aligned}
&H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]))\\
&\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]))\\
&\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k+1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]))\\
&\cong \ldots \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]))\\
&\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Considere a sequência exata curta (exata até dimensão $n+1$, conforme Lema 3.3)

$$\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k-1)} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(n-k-1)} \tag{4.11}$$

de complexos de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos.

Como $\mathcal{S}^{(n-k-1)}$ contém somente módulos projetivos, temos para cada $j \geq 0$ que

$$\mathcal{Q}_j^{(n-1,n-2,\ldots,n-k-1)} = \mathcal{Q}_j^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)} \oplus \mathcal{S}_j^{(n-k-1)}$$

onde $\mathcal{S}_j^{(n-k-1)} = 0$ para $j \leq n-k-1$. Portanto temos a seguinte sequência exata curta (exata até dimensão $n+1$, conforme Lema 3.3) de complexos de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos

$$\begin{aligned}
&Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \twoheadrightarrow\\
&\twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])
\end{aligned} \tag{4.12}$$

e a correspondente sequência exata longa em cohomologia

$$\begin{aligned}
\ldots\ &\to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to\\
&\to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^2(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \ldots\\
&\to H^{n-k}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots\\
&\to H^{n-k+1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^1_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots\\
&\to H^{n-k+2}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^2_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots\\
&\to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^{k-1}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to\\
&\to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to\\
&\to H^{n}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^k_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Note que $\mathcal{S}_j^{(n-k-1)} = 0$ para $j \leq n-k-1$. E além disso, por construção, temos que $H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}) \cong H_{n-k-1}(\widehat{\mathcal{R}})$ que é finito pelo item (b) do Lema 3.8, logo pelo Lema 3.10 segue que $Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ e portanto por (4.13) temos que $H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) = 0$ para $t \leq n-k$. Portanto, por indução em k, concluímos de (4.13) que (4.10) vale para $t \leq n-k-1$.

Por fim, considere a sequência exata curta (exata até dimensão $n+1$, conforme Lema 3.3) construída em (3.19) na demonstração do Lema 3.5

$$\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)} \twoheadrightarrow \mathcal{S}^{(2)} \tag{4.14}$$

de complexos de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos.

E ainda como $\mathcal{S}^{(2)}$ contém somente módulos projetivos, temos para cada $j \geq 0$ que

$$\mathcal{Q}_j^{(n-1,n-2,\ldots,2)} = \mathcal{Q}_j^{(n-1,n-2,\ldots,3)} \oplus \mathcal{S}_j^{(2)}$$

onde $\mathcal{S}_j^{(2)} = 0$ para $j \leq 2$ portanto temos a seguinte sequência exata curta (exata até dimensão $n+1$, conforme Lema 3.3) de complexos de $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulos

$$\begin{aligned} &Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \hookrightarrow Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \twoheadrightarrow \\ &\twoheadrightarrow Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \end{aligned} \tag{4.15}$$

e a correspondente sequência exata longa em cohomologia

$$\begin{aligned} \ldots \quad &\to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \\ &\to H^1(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^2(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \ldots \\ &\to H^3(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_2(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots \\ &\to H^4(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^1_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_2(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots \\ &\to H^{n-2}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^{n-5}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_2(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots \\ &\to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^{n-4}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_2(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \\ &\to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to H^{n-1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \to \\ &\to H^{n}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \cong Ext^{n-3}_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_2(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \to \ldots \end{aligned} \tag{4.16}$$

Note que $\mathcal{S}_j^{(2)} = 0$ para $j \leq 2$. E além disso, por construção, temos que $H_2(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}) \cong H_2(\widehat{\mathcal{R}})$ que é finito pelo Lema 3.7, logo pelo Lema 3.10 segue que

$$Ext^0_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_2(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0.$$

Portanto $H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{S}^{(2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) = 0$ para $t \leq 3$, logo por (4.10) e (4.16)

$$\begin{aligned} H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) &\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong \ldots \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])), \text{ para } t \leq 2. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Por (3.19) no Lema 3.5, sabemos que $\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}$ em dimensão até $n+1$ é uma resolução parcial projetiva profinita do $\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]$-módulo trivial $\mathbb{F}_p$. Portanto, usando (4.17), segue em particular para $t \leq 2$ que

$$\begin{aligned} &H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong \ldots \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \end{aligned} \tag{4.18}$$

que é finito, para $t \leq 2$, pelo Lema 3.9. Logo, pelo Teorema 4 em [Ko-2004], para $t = 1$, $H^1(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ ou isomorfo a $\mathbb{F}_p$. No segundo caso, pelo Teorema 3 em [Ko-2004], teremos que $\widehat{G}_p$ é virtualmente $\mathbb{Z}_p$ (se $p = 2$, virtualmente pro-2 diedral infinito $\mathbb{Z}_2 \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \coprod (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$). Suponhamos então que $H^1(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$. Segue para $t = 2$ que $H^2(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ ou é isomorfo a $\mathbb{F}_p$, pelo Teorema 1, item (1), em [Ko-2005]. No segundo caso, como $\widehat{G}_p$ é FP_2 (vide Lema 3.5) e $H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$, para $0 \leq t \leq 1$, segue pelo Corolário 1 do Teorema 1 em [Ko-2005] que $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo pro-p PD_2. Suponhamos então que $H^2(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$.

Vamos mostrar que $H^3(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])$ é finito usando os isomorfismos em (4.18) e o Lema 3.9. Queremos portanto que ocorra

$$\begin{aligned} &H^3(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = H^3(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^3(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,3)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^3(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Para obtermos o primeiro isomorfismo em (4.19), basta aplicarmos (4.13) com $k = n-3$. De fato, por construção, temos que $H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}) \cong H_{n-k-1}(\widehat{\mathcal{R}})$ que é finito pelo item (b) do Lema 3.8. E como $Ext^t_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \cong H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ para $t \leq 2$, temos pelo Lema 3.10 que para $t \leq 2$

$$Ext^t_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0. \tag{4.20}$$

Logo, por (4.20) obtemos de (4.13), para $t \leq n-k+1$, que

$$\begin{aligned} &H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Portanto, com $k = n-3$ segue de (4.21) que o primeiro isomorfismo em (4.19) ocorre. O segundo isomorfismo em (4.19) ocorre, pois por construção (vide (4.10)) temos para $t \leq \lambda$

que

$$\begin{aligned} &H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,\lambda)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])). \end{aligned} \tag{4.22}$$

E, em particular para $t = 3 = \lambda$, segue por (4.19) e pelo Lema 3.9 que $H^3(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])$ é finito.

Portanto, pelo Teorema 1, item (1) em [Ko-2005], segue que $H^3(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ ou é isomorfo a $\mathbb{F}_p$. No segundo caso, como $\widehat{G}_p$ é FP_3 (vide Lema 3.5) e $H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$, para $0 \leq t \leq 2$, segue pelo Corolário 1 do Teorema 1 em [Ko-2005] que $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo pro-p PD_3. Suponhamos então que $H^3(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$.

Suponha, para algum $3 \leq j < n$, que $H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ para $t \leq j$. Mostraremos que $H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])$ é finito para $t = j+1$.

Queremos portanto que ocorra

$$\begin{aligned} &H^{j+1}(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = H^{j+1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^{j+1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,j+1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^{j+1}(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])). \end{aligned} \tag{4.23}$$

De fato, por construção, temos que $H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}) \cong H_{n-k-1}(\widehat{\mathcal{R}})$ que é finito pelo item (b) do Lema 3.8. E como $Ext^t_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) \cong H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ para $t \leq j$, temos pelo Lema 3.10 que para $t \leq j$

$$Ext^t_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(H_{n-k-1}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}), \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0. \tag{4.24}$$

Logo, por (4.24) obtemos de (4.13), para $t \leq n-k+j-1$, que

$$\begin{aligned} &H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k-1)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,n-k)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Portanto, segue de (4.25), para cada $n-j-1 \leq k \leq n-3$, que o primeiro isomorfismo em (4.23) ocorre. O segundo isomorfismo em (4.23) ocorre, pois por construção (vide (4.10)) temos para $t \leq \lambda$ que

$$\begin{aligned} &H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,\lambda)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ &\cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])). \end{aligned} \tag{4.26}$$

E, em particular para $t = j+1 = \lambda$, segue por (4.23) e pelo Lema 3.9 que $H^{j+1}(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])$ é finito.

Portanto, $H^{j+1}(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ ou é isomorfo a $\mathbb{F}_p$, pelo Teorema 1, item (1) em [Ko-2005], para algum $3 \leq j < n$. No segundo caso, como $\widehat{G}_p$ é FP_{j+1} (vide Lema 3.5) e $H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$ para $0 \leq t \leq j$, segue pelo Corolário 1 do Teorema 1 em [Ko-2005] que $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo pro-p PD_{j+1}, para algum $3 \leq j < n$. Suponhamos que $H^{j+1}(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0$.

Continuando assim por diante, podemos supor que $H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0, \forall\ t \leq n-2$, (caso contrário, $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo pro-p PD_s para algum $s \leq n-2$).

Portanto, segue para $t \leq n-2$ que

$$\begin{aligned} & H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\widehat{\mathcal{R}}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) \\ & \cong H^t(Hom_{\mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]}(\mathcal{Q}^{(n-1,n-2,\ldots,2)}, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]])) = H^t(\widehat{G}_p, \mathbb{F}_p[[\widehat{G}_p]]) = 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Logo, pela construção feita em (3.29) e (3.30) na demonstração do Lema 3.9, segue para $t \leq n-2$ que $H_j(\widehat{\mathcal{R}^{op}}) = 0$ para $2 \leq j \leq n$. Também pela versão dual do Lema 3.6 (isto é, trocando módulos à esquerda com módulos à direita), segue que $H_j(\widehat{\mathcal{R}^{op}}) = 0$ para $j = 0, 1$. Portanto, $\widehat{\mathcal{R}^{op}}$ é exato. Mas como G é PD_n orientável, isso implica, pela versão dual do Teorema 4 em [K-2009] (isto é, trocando módulos à esquerda por módulos à direita), que $\widehat{G}_p$ é um grupo pro-p PD_n orientável, uma contradição pois $\widehat{G}_p$ não é virtualmente um grupo pro-p PD_n.

Portanto, existe $s \leq n-2$ tal que $\widehat{G}_p$ é virtualmente um grupo pro-p PD_s e isso encerra a demonstração dos Teoremas Principais. ■

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS

Nesta seção iremos apresentar alguns exemplos de grupos que satisfazem as hipóteses dos Teoremas Principais.

Considere o grupo de trança de Artin (grupo nó de trevo)

$$G = \left\langle x, y | x^2 = y^3 \right\rangle.$$

Seja

$$T = \left\langle y^{-1}x, xy \right\rangle \cong \mathbb{Z}^2$$

um subgrupo de G gerado por $y^{-1}x$ e xy e tal que (G, Ω) é um PD_3 par, sobre pares de dualidade vide [DD-1988], onde $\Omega = Gw$ é um órbita com estabilizador $G_w = T$ e $T[G,G] = G$. Além disso, $G/[G,G] \cong \mathbb{Z}$. Logo, $\widehat{G}_p/[\widehat{G}_p, \widehat{G}_p] \cong \mathbb{Z}_p$ e segue que $\widehat{G}_p \cong \mathbb{Z}_p$.

Segue do Teorema 8.1 em [BE-1978] que o produto livre amalgamado $H = G *_T G$ é um grupo abstrato PD_3 orientável.

Observe que $\widehat{H}_p$ é um quociente do produto pro-p com amalgamação $\widehat{G}_p \coprod_{T_1} \widehat{G}_p$, vide definição 2.4, onde T_1 é a imagem de $\widehat{T}_p$ em $\widehat{G}_p$, portanto $T_1 \cong \mathbb{Z}_p$ e $\widehat{G}_p \coprod_{T_1} \widehat{G}_p \cong \widehat{G}_p \cong \mathbb{Z}_p$.

Logo, $\widehat{H}_p$ é procíclico. Como existe uma aplicação sobrejetiva de H para G cuja restrição para cada fator G é a aplicação identidade, segue que $\widehat{G}_p \cong \mathbb{Z}_p$ é um quociente de $\widehat{H}_p$, portanto $\widehat{H}_p \cong \mathbb{Z}_p$.

1) Seja $s \geq 2$. Então

$$H_k(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p^{\binom{s}{k}}. \tag{5.1}$$

Iremos considerar como exemplo $H \times \mathbb{Z}^s$. Seja $U \leq H$ de índice potência de p. De (5.1) e pela Fórmula de Künneth (vide [R-1979]), temos que

$$\begin{aligned} H_2(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) &= H_2(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_0(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_1(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_1(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_0(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_2(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &= H_2(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p \\ &\oplus H_1(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_1(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_0(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_2(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &= H_2(U, \mathbb{F}_p) \oplus (H_1(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p^{\binom{s}{1}}) \oplus \mathbb{F}_p^{\binom{s}{2}} \\ &= H_2(U, \mathbb{F}_p) \oplus H_1(U, \mathbb{F}_p)^s \oplus \mathbb{F}_p^{\binom{s}{2}}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Seja $\mathcal{T}_0$ um conjunto dirigido de subgrupos normais de índice potência de p em H tal que $\mathcal{T}_0$ induz a topologia pro-p de H. Como H é um grupo PD_3 orientável temos que todo $U \in \mathcal{T}_0$ é também PD_3 orientável e portanto $\chi(U) = 0$, para todo $U \in \mathcal{T}_0$. Logo, para todo $U \in \mathcal{T}_0$, como $H_0(U, \mathbb{F}_p) = H_3(U, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$, segue que $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, \mathbb{F}_p)$. Mas para $U \in \mathcal{T}_0$, tem-se que $\widehat{U}_p$ é um subgrupo de índice finito em $\widehat{G}_p \cong \mathbb{Z}_p$, portanto $\widehat{U}_p \cong \mathbb{Z}_p$ e

$$H_1(U, \mathbb{F}_p) = U/[U,U]U^p \cong \widehat{U}_p/[\widehat{U}_p, \widehat{U}_p]\widehat{U}_p^p = H_1(\widehat{U}_p, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p. \tag{5.3}$$

Portanto, de (5.2) e de (5.3), segue que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, \mathbb{F}_p) + s \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, \mathbb{F}_p) + \tbinom{s}{2} \\ &= \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, \mathbb{F}_p) + s \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, \mathbb{F}_p) + \tbinom{s}{2} \\ &= (s+1) \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, \mathbb{F}_p) + \tbinom{s}{2} \\ &= (s+1) \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p) + \tbinom{s}{2} \\ &= (s+1) + \tbinom{s}{2}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Portanto, como a última linha de (5.4) é um número finito e não depende de $V \in \mathcal{T}$ (filtração que define a topologia pro-p de $H \times \mathbb{Z}^s$), tem-se que

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) < \infty.$$

De novo usando a Fórmula de Künneth temos para $j \geq 3$ que

$$\begin{aligned} H_j(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) &= H_3(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-3}(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_2(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-2}(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_1(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_0(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_j(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &= \mathbb{F}_p^{\binom{s}{j-3}} \oplus H_2(U, \mathbb{F}_p)^{\binom{s}{j-2}} \oplus H_1(U, \mathbb{F}_p)^{\binom{s}{j-1}} \oplus \mathbb{F}_p^{\binom{s}{j}}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) &= \binom{s}{j-3} + \binom{s}{j} + \binom{s}{j-2} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U, \mathbb{F}_p) + \binom{s}{j-1} \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, \mathbb{F}_p) \\ &= \binom{s}{j-3} + \binom{s}{j} + \left(\binom{s}{j-2} + \binom{s}{j-1}\right) \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U, \mathbb{F}_p) \\ &= \binom{s}{j} + \binom{s}{j-1} + \binom{s}{j-2} + \binom{s}{j-3}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Portanto, como a última linha de (5.6) é um número finito e não depende de $V \in \mathcal{T}$, tem-se para todo $j \geq 3$,

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) < \infty.$$

Observamos que a filtração $\mathcal{T}$ que define a topologia pro-p de $H \times \mathbb{Z}^s$ pode ser escolhida somente de grupos de tipo $U \times S$, onde $U \leq H$, $S \leq \mathbb{Z}^s$ e os índices $[H : U]$ e $[\mathbb{Z}^s : S]$ são potências de p.

Note que as hipóteses dos Teoremas Principais são satisfeitas pois todo subgrupo V de $H \times \mathbb{Z}^s$ de índice potência de p é tal que o completamento pro-p $\widehat{V}_p \leq \widehat{H}_p \times \mathbb{Z}_p^s = \mathbb{Z}_p^{1+s}$, logo $\widehat{V}_p \cong \mathbb{Z}_p^{1+s}$ e, portanto, $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\widehat{V}_p, \mathbb{F}_p) = 1 + s$. E além disso, $\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{V}_p, \mathbb{F}_p) < \infty$ e mostramos que

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(V, \mathbb{F}_p) < \infty$$

para $i \geq 1$. Assim, demonstramos o seguinte resultado

Lema 5.1. *O grupo $H \times \mathbb{Z}^s$ é um grupo PD_{3+s} orientável e satisfaz as condições dos Teoremas Principais.*

2) Seja $r \geq 2$. A seguir consideraremos como exemplo H^r.

Sejam $U_1, \ldots, U_r$ subgrupos de H, cada um de índice uma potência de p. Usando a Fórmula de Künneth, temos que

$$\begin{aligned} H_1(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) &= H_1(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_0(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_0(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_1(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &= H_1(U_1, \mathbb{F}_p) \oplus H_1(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &= \ldots = H_1(U_1, \mathbb{F}_p) \oplus \ldots \oplus H_1(U_r, \mathbb{F}_p). \end{aligned} \tag{5.7}$$

E segue de (5.7) e de $H_1(U_i, \mathbb{F}_p) \cong H_1(\widehat{(U_i)}_p, \mathbb{F}_p) \cong H_1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p)$, para $U_i \in \mathcal{T}_0$, que

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) = \textstyle\sum_{j=1}^{r} \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_j, \mathbb{F}_p) = r. \tag{5.8}$$

Logo, como r é finito e não depende de $V \in \mathcal{T}$ (filtração que define a topologia pro-p de H^r), segue que

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) < \infty.$$

Agora vamos computar $H_2(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p)$. Usaremos (5.7) e a Fórmula de Künneth.

$$\begin{aligned} H_2(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) &= H_2(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_0(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_1(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_1(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_0(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_2(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &= H_2(U_1, \mathbb{F}_p) \oplus (H_1(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_1(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p)) \\ &\oplus H_2(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &= \oplus_{i=1}^{r} H_2(U_i, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus_{1 \leq i < j \leq r} H_1(U_i, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_1(U_j, \mathbb{F}_p). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Segue de (5.9), $\chi(U_i) = 0$ e $\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_i, \mathbb{F}_p) = \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_i, \mathbb{F}_p) = 1$, para todo $U_i \in \mathcal{T}_0$, que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) &= r \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_1, \mathbb{F}_p) + \tbinom{r}{2} \\ &= r + \tfrac{r(r-1)}{2} = \tfrac{r(r+1)}{2}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Portanto, como $\frac{r(r+1)}{2}$ é finito e não depende de $V \in \mathcal{T}$, temos que

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) < \infty.$$

Vamos computar $H_j(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p)$, onde $j \geq 3$. Usando a Fórmula de Künneth, temos

$$\begin{aligned} H_j(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) &= H_3(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-3}(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_2(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-2}(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_1(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_0(U_1, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_j(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &= H_{j-3}(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \oplus H_{j-2}(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p)^{\dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U_1, \mathbb{F}_p)} \\ &\oplus H_{j-1}(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p)^{\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U_1, \mathbb{F}_p)} \oplus H_j(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &= \oplus_{i=0}^{3} H_{j-i}(U_2 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \\ &= \ldots = \oplus_{i_1=0}^{3} \oplus_{i_2=0}^{3} \oplus_{i_3=0}^{3} \ldots \oplus_{i_{r-1}=0}^{3} H_{j-i_1-i_2-i_3\ldots-i_{r-1}}(U_r, \mathbb{F}_p). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Logo, segue de $\dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U_r, \mathbb{F}_p) \leq 1$, $\forall i$, e de (5.11) que, para todo $j \geq 3$,

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) \leq 4^{r-1}. \tag{5.12}$$

Portanto, como 4^{r-1} é finito e não depende de $V \in \mathcal{T}$, temos que

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U_1 \times \ldots \times U_r, \mathbb{F}_p) < \infty.$$

Observamos que podemos considerar $\mathcal{T}$ (que define a topologia pro-p de H^r) somente com elementos de tipo $U_1 \times \ldots \times U_r$.

Note que as hipóteses dos Teoremas Principais são satisfeitas pois todo subgrupo $V = U_1 \times \ldots \times U_r$ de H^r de índice potência de p é tal que o completamento pro-p $\widehat{V}_p \leq \widehat{H}_p^r = \mathbb{Z}_p^r$, logo $\widehat{V}_p \cong \mathbb{Z}_p^r$ e, portanto, $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\widehat{V}_p, \mathbb{F}_p) = r$. E além disso, $\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{V}_p, \mathbb{F}_p) < \infty$ e mostramos que

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(V, \mathbb{F}_p) < \infty$$

para $i \geq 1$.

3) Como exemplo final, iremos considerar o caso $H^r \times \mathbb{Z}^s$, onde $r, s \geq 1$ e $3r + s \geq 5$. Usaremos (5.1) e (5.12).

Sejam $U_1, U_2, \ldots, U_r$ subgrupos de índice potência de p em H. Denote por $U := U_1 \times$

$U_2 \times \ldots \times U_r$. Então pela Fórmula de Künneth e por (5.1), segue que

$$\begin{aligned} H_j(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) &= H_{3r}(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-3r}(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_{3r-1}(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-3r+1}(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus \ldots \oplus H_1(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_{j-1}(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &\oplus H_0(U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H_j(\mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) \\ &= \oplus_{i=0}^{3r} H_i(U, \mathbb{F}_p)^{\binom{s}{j-i}}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Observe que $\binom{s}{k} = 0$ se $k > s$ ou $k < 0$. Portanto, de (5.13) com $j = 1$ e de (5.8), temos que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} H_1(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) &= \textstyle\sum_{i=0}^{1} \binom{s}{1-i}. \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) \\ &= \binom{s}{1} + \binom{s}{0}.r = r + s. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Com $j = 2$ em (5.13) e usando (5.10), temos que

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} H_2(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) &\leq \textstyle\sum_{i=0}^{2} \binom{s}{2-i}. \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(U, \mathbb{F}_p) \\ &= \binom{s}{2} + \binom{s}{1}.r + \binom{s}{0}.\frac{r(r+1)}{2} \\ &= \frac{s(s-1)}{2} + r.s + \frac{r(r+1)}{2}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

E ainda, de (5.12), segue que para todo $j \geq 3$

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) &\leq 4^{r-1}. \textstyle\sum_{i=0}^{j} \binom{s}{j-i} \\ &\leq 4^{r-1}.(j+1).s!. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Logo, como cada expressão na última linha de (5.14), (5.15) e (5.16) é um número finito e não depende de $V \in \mathcal{T}$ (filtração que define a topologia pro-p de $H^r \times \mathbb{Z}^s$), temos que para todo j

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_j(U \times \mathbb{Z}^s, \mathbb{F}_p) < \infty.$$

Observamos que podemos considerar $\mathcal{T}$ somente com elementos de tipo $U \times S$, onde $U = U_1 \times \ldots \times U_r$, $U_i \leq H$, $S \leq \mathbb{Z}^s$ e os índices $[H : U_i]$ e $[\mathbb{Z}^s : S]$ são potências p.

Note que as hipóteses dos Teoremas Principais são satisfeitas pois todo subgrupo $V = U_1 \times \ldots \times U_r \times S$ de $H^r \times \mathbb{Z}^s$ de índice potência de p é tal que o completamento pro-p $\widehat{V}_p \leq \widehat{H}_p^r \times \mathbb{Z}_p^s = \mathbb{Z}_p^{r+s}$, logo $\widehat{V}_p \cong \mathbb{Z}_p^{r+s}$ e, portanto, $\dim_{\mathbb{F}_p} H_1(\widehat{V}_p, \mathbb{F}_p) = r + s$. E além disso, $\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(\widehat{V}_p, \mathbb{F}_p) < \infty$ e mostramos que

$$\sup_{V \in \mathcal{T}} \dim_{\mathbb{F}_p} H_i(V, \mathbb{F}_p) < \infty$$

para $i \geq 1$. Assim, mostramos o seguinte resultado

Lema 5.2. *O grupo* $H^r \times \mathbb{Z}^s$ *é um grupo* PD_{3r+s} *orientável e satisfaz as condições dos Teoremas Principais.*

BIBLIOGRAFIA

[AJ-1976] Auslander, L.; Johnson, F.E.A.; *On a conjecture of C.T.C. Wall*, J. London Math. Soc. (2) 14 (1976) 331-332.

[BB-1997] Bestvina, M.; Brady, N.; *Morse theory and finiteness properties of groups*, Invent. Math. 129 (1197), 445-470.

[Bi-1972] Bieri, R.; *Gruppen mit Poincaré Dualität*. Comment. Math. Helv. 47 (1972), 373-396.

[Bi-1981] Bieri, R.; *Homological Dimension of discrete groups*. Queen Mary College, London, 1981.

[BE-1973] Bieri, R. and Eckmann, B.; *Groups with Homological Duality Generalizing Poincaré Duality*, Inventiones Math. 20 (1973).

[BE-1978] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Relative homology and Poincaré duality for group pairs*. J. Pure Appl. Algebra 13 (1978), no. 3, 277-319.

[BS-1980] Bieri, R.; Strebel, R.; *Valuations and finitely presented metabelian groups*, Proc. London Math.Soc.(3) 41 (1980), 439-464.

[B-1982] Brown, K. S.; *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Bru-1966] Brumer, A.; *Pseudocompact Algebras, profinite groups and class formations*, J. Algebra 4 (1966), 442-470.

[D-2000] Davis, M.W.; *Poincaré duality groups*, Surveys in Surgery Theory, Vol. 1 (eds. S. Cappell, A. Ranicki, J. Rosenberg), Ann. of Math. Studies 145, Princeton Univ. Press, Princeton, 2000, pp. 167-193.

[DD-1988] Dicks, W.; Dunwoody, M.; *Groups acting on graphs*, Cambridge, Cambridge University Press, 1988.

[DSMS-2003] Dixon, J.D.; Sautoy, M.P.F. du; Mann, A.; Segal, D.; *Analytic Pro-p Groups*, Cambridge, Cambridge University Press, 2nd ed. rev. and enl., 2003.

[JW-1972] Johnson, F.E.A.; Wall, C.T.C.; *On groups satisfying Poincaré duality*, Ann. of Math. 96 (1972), 592-598.

[Go-1965] Gottlieb, D. H.; *A certain subgroup of the fundamental group*, Amer. J. Math 87 (1965), 840-856.

[H-2009] Hillman, J.A.; *Some questions on subgroups of 3-dimensional Poincaré duality groups*. This is an expanded and revised version of a 1988 Maquarie University Research Report. [4 March 2009].

[Ki-1999] King, J. D.; *Homological finiteness conditions for pro-p groups*, Comm. Algebra 27 (1999), no. 10, 4969-4991.

[KZ-2008] Kochloukova, D. H.;Zalesskii, P.; *Profinite and Pro-p completions of Poincaré duality groups of dimension* 3, Trans. Amer. Math. Soc. 360, 2008, 1927-1949.

[D.H.K-2009] Kochloukova, D. H.; *Homological properties of abstract and profinite modules and groups*, Journal of Pure and Applied Algebra, v. 213, p. 313-320, 2009.

[K-2009] Kochloukova, D. H.; *Profinite and pro-p completions of Poincaré duality groups of dimension* 4 *and Euler characteristic* 0, Groups, Geometry, and Dynamics (Print), v. 3, p. 401-421, 2009.

[Ko-2004] Korenev, A. A.; *Pro-p groups with a finite number of ends*, Mat. Zametki 76 (2004), no. 4, 531-538, translation in Math. Notes 76 (2004), no. 3-4, 490-496.

[Ko-2005] Korenev, A. A.; *Cohomology groups of pro-p groups with coefficients in a group ring and the virtual Poincaré duality*, Mat. Zametki 78 (2005), no. 6, 853-863, translation in Math. Notes 78 (2005), no. 5-6, 791-800.

[Laz-1965] Lazard, M.; *Groupes analytiques p-adiques*. Inst. Hautes Études Scientifiques, Publ. Math. 26, 389-603.

[L-2008] Lima, Elon L.; *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2008.

[M-2009] Martin, M. E.; *Propriedades Homológicas de Grupos Pro-p*, Tese de Mestrado em Matemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2009.

[Me-1996] Mel'nikov, O. V.; *Quotient groups of profinite groups with Poincaré duality*, Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi. Ser. Fiz. Mat. Navuk (1996), no. 3, 54-58.

[NSW-2000] Neukirch, J.; Schmidt, A.; Wingberg, K.; *Cohomology of number fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenchften, 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[P-1980] Pletch, A.; *Profinite duality groups I+II*. J. Pure Appl. Algebra 16 (1980), 55-74, 285-297.

[Re-1997] Reznikov, A.; *Three-manifolds class field theory (Homology of coverings for a nonvirtually b1-positive manifold)*, Selecta Math. (N.S.) 3 (1997), no. 3, 361-399.

[RW-1989] Ribes, L.; Wong, K.; *On the minimal number generators of groups*,Groups St. Andrews 1989, London Math. Soc. Lecture Note Series, 160, pp. 408-421.

[RZ-2000] Ribes, L.;Zalesskii, P.; *Profinite groups*, Springer, Berlin, 2000.

[R-1979] Rotman, J. J.; *An introduction to Homological Algebra*, Academic Press, Inc; Boston, 1979.

[Ro-1973] Rotman, J. J.; *The Theory of Groups, An Introduction*. Allyn and Bacon, Inc; Boston, 1973.

[Se-1997] Serre, J. P.; *Cohomologie Galoisienne*. Springer, Berlin, 1997.

[St-1965] Stallings, J.; *Centerless groups - an algebraic formulation of Gottlieb's theorem*, Topology 4 (1965), 129-134.

[SW-2000] Symonds, P.; Weigel, Th.; *Cohomology of p-adic analytic groups*, New horizons in pro-p groups, 349-410, Progr. Math; 184, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2000.

[W-2007] Weigel, Th.; *On profinite groups with finite abelianizations*, Selecta Math. (N.S.) 13, 175-181, 2007.

[W-1998] Wilson, J. S.; *Profinite Groups*. Clarendon Press, Oxford, 1998.