



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

LIVIA MARIA PIERINI

**Problemas de dimensionamento de lotes e
corte de estoque no processo industrial de
produção de papel**

Campinas-SP

2017

Livia Maria Pierini

Problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque no processo industrial de produção de papel

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada.

Orientadora: Kelly Cristina Poldi

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Livia Maria Pierini e orientada pela Profa. Dra. Kelly Cristina Poldi.

Campinas-SP

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P612p Pierini, Livia Maria, 1992-
Problemas de dimensionamento de lotes e de corte de estoque no processo industrial de produção de papel / Livia Maria Pierini. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Kelly Cristina Poldi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Pesquisa operacional. 2. Problema de corte de estoque. 3. Planejamento da produção. 4. Papel - indústria. I. Poldi, Kelly Cristina, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Lot-sizing and cutting stock problems in the industrial paper production process

Palavras-chave em inglês:

Operational reseach
Cutting stock problem
Production planning
Paper industry

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Kelly Cristina Poldi [Orientador]
Márcia Aparecida Gomes Ruggiero
Silvio Alexandre de Araujo

Data de defesa: 09-03-2017

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

**Dissertação de Mestrado defendida em 09 de março de 2017 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof.(a). Dr(a). KELLY CRISTINA POLDI

Prof.(a). Dr(a). MÁRCIA APARECIDA GOMES RUGGIERO

Prof.(a). Dr(a). SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do(a) aluno(a).

Dedico ao meu eterno amigo, Felipe.

Agradecimentos

Agradeço à Deus. E, então, agradeço a tudo que Ele me deu durante essa jornada.

Agradeço à CAPES, pelo financiamento e oportunidade.

Agradeço à minha querida orientadora, Kelly, por toda a sua dedicação e atenção; por me possibilitar desenvolver este trabalho e firmar essa parceria, que não acabarão aqui.

Agradeço à minha família, por todo incentivo, amor, compreensão e carinho. Vocês são essenciais e não haveria como amar mais vocês. Obrigada pelo amor de todos, que é tão recíproco. Sou muito grata à Deus por ter me dado cada um de vocês (isso inclui os cunhados), que são fundamentais e tornam essa trajetória aqui na terra muito mais feliz, tranquila e prazerosa.

Agradeço aos meus amigos, novos e velhos, a minha família escolhida, que tornam o caminho tão mais agradável, divertido e singular. Em específico, aos presentes que ganhei nessa jornada em Campinas. Obrigada por tantos momentos especiais e divertidos.

Agradeço à minha querida amiga, Danuza, presente eterno que o Felipe me deu, por todos os momentos de companheirismo, sorrisos e reflexões; pelas nossas conversas especiais e incomuns.

Agradeço aos meus amigos, Nilmara e Renan, pela companhia em tantos momentos e por tantas corridas maravilhosas. À minha amiga, Pammela, por nossos momentos descontraídos e divertidos fazendo música. E à minha querida amiga e companheira de casa, Bruna, por toda sua parceria e confiança.

Agradeço ao meu incomparável amigo, Fabricio, por tantos momentos de companheirismo. Sua presença na minha vida, nos últimos 5 anos, foi, e continua sendo, fundamental. Obrigada por estar sempre presente. Aliás, obrigada por não conseguir não estar presente. Além de tudo, obrigada por ser grande parte responsável pela minha preparação para o mestrado e por todo o meu sucesso.

Agradeço ao meu amigo, Fabrício, novamente, por ter me apresentado o meu amor, Ana Paula. Minha joia rara, meu porto seguro, minha alegria. Obrigada, Ana Paula, por todo companheirismo, carinho, dedicação, compreensão, paciência e amor. Você trouxe um brilho único para a minha vida, que me faz muito mais feliz!

Por fim, e não menos importante, pelo contrário, agradeço ao meu eterno, inesquecível, insubstituível amigo, Felipe. Você foi parte responsável por essa trajetória tão agradável que agora chega ao fim. Obrigada pelo companheirismo incomparável e por sua proteção. Saudades...

“Amarás ao Senhor, teu Deus, de todo o teu coração, de toda a tua alma, de todo o teu espírito e de todas as tuas forças. (...) Amarás o teu próximo como a ti mesmo. Outro mandamento maior do que estes não existe.”
(Bíblia Sagrada, Marcos 12, 30-31)

Resumo

Em muitas indústrias de manufatura, como a papelreira, moveleira e metalúrgica, há a produção e o corte dos objetos produzidos em unidades menores para atender a uma demanda específica. Na otimização desses processos produtivos, encontram-se os problemas de dimensionamento de lotes e de corte de estoque. Nos processos de produção e corte, o problema de corte de estoque apresenta-se como um subproblema fundamental do problema de planejamento de produção, no entanto, são encontrados na literatura vários trabalhos que tratam esses problemas de forma desacoplada. Tratar esses dois problemas de forma separada pode aumentar os custos globais. Nesse trabalho, tratamos tais problemas de maneira integrada, propondo um modelo para a produção e corte de papel, baseado na literatura, que considera o custo de preparação da máquina e a capacidade de produção. Para a resolução do modelo, foi utilizado o método de geração de colunas, a heurística *relax-and-fix* e um pacote de otimização. Testes computacionais foram realizados a fim de analisar a metodologia utilizada na resolução do modelo.

Palavras-chave: Pesquisa operacional. Problema de corte de estoque. Planejamento da produção. Papel - indústria.

Abstract

In many manufacturing industries, such as paper, furniture and metallurgy, there are the production of the objects and the cutting of the objects into smaller pieces in order to meet a specific demand. In the optimization of such productive processes, one can identify the lot-sizing and the cutting stock problems. In the production and cutting processes, the cutting stock problem is a fundamental subproblem of the production planning problem. However, in the literature, these problems are mostly dealt separately. Treating these two problems separately can increase overall costs. In this research, we deal with these problems in a coupled way, proposing an integrated model for the production and cutting of paper based on the literature, which considers setup costs and production capacity. For the solution of the proposed model, we used the column generation method, the relax-and-fix heuristic and an optimization package. Computational tests were carried out in order to analyze the methodology used in the resolution of the model.

Keywords: Operational reseach. Cutting stock problem. Production planning. Paper - industry.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de uma produção multiestágio em indústrias moveleiras.	21
Figura 2 – Exemplo de PCE bidimensional.	25
Figura 3 – Exemplo de PCE 1,5–dimensional.	25
Figura 4 – Corte de um jumbo em itens demandados.	36
Figura 5 – Representação do jumbo por várias bobinas menores.	38

Lista de tabelas

Tabela 1	– Número médio de colunas geradas ao aplicar o método de geração de colunas.	54
Tabela 2	– Valores médios dos <i>gaps</i>	55
Tabela 3	– Tempo computacional médio, em segundos, utilizado na resolução do modelo.	56
Tabela 4	– Valores da função objetivo e dos <i>gaps</i> encontrados para os exemplos da Classe 1.	57
Tabela 5	– Valores da função objetivo e dos <i>gaps</i> encontrados para os exemplos da Classe 2.	58
Tabela 6	– Tempo computacional, em segundos, utilizado na resolução dos exemplos das Classes 1 e 2.	59

Lista de abreviaturas e siglas

PDL	Problema de dimensionamento de lotes
PCE	Problema de corte de estoque

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	OS PROBLEMAS DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E DE CORTE DE ESTOQUE	18
2.1	Problema de dimensionamento de lotes	18
2.1.1	Uma formulação matemática para o PDL	22
2.2	Problema de corte de estoque	23
2.2.1	Uma formulação matemática para o PCE	26
3	O PROBLEMA INTEGRADO	29
3.1	Estudos envolvendo o problema integrado	29
3.2	Problema integrado na produção de papel	34
3.3	Uma formulação matemática para o problema integrado . . .	37
4	O MODELO INTEGRADO PROPOSTO	43
4.1	Modelo proposto	43
5	MÉTODOS DE SOLUÇÃO	48
5.1	Heurística <i>relax-and-fix</i>	48
5.2	Método de geração de colunas	49
5.3	Metodologia utilizada na resolução do modelo	51
6	ESTUDO COMPUTACIONAL	53
6.1	Conjunto de dados	53
6.2	Resultados computacionais	54
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
	REFERÊNCIAS	62

1 Introdução

Desde a revolução industrial, a competitividade entre as indústrias desencadeou a procura pela otimização dos processos de produção com o intuito de aumentar a produtividade, evitar o desperdício e diminuir custos. Principalmente em tempos de crise, a procura por procedimentos mais eficientes torna-se ainda maior, uma vez que elevar a produtividade e diminuir custos faz aumentar o lucro e, conseqüentemente, a capacidade de permanecer e crescer no mercado.

Em muitas indústrias de manufatura, como a papelreira, a moveleira e a metalúrgica, os objetos são produzidos e, posteriormente, cortados em unidades menores para atender determinada demanda. Na otimização desses processos produtivos, encontram-se os problemas de otimização de dimensionamento de lotes e de corte de estoque.

O problema de dimensionamento de lotes (PDL) busca determinar a quantidade de itens a serem produzidos em um determinado intervalo de tempo e a forma como ocorrerá essa produção, de modo a atender a demanda e satisfazer algum critério de otimização. Para resolver tais problemas, várias heurísticas e pacotes de otimização são utilizados, como por exemplo a heurística *relax-and-fix* e o *software* CPLEX.

O problema de corte de estoque (PCE) determina como ocorrerá o processo de corte de objetos maiores em um conjunto de itens menores ao longo de um horizonte de planejamento, de forma a atender a demanda desses itens e satisfazer algum critério de otimização.

Na resolução do problema de corte de estoque, duas dificuldades são encontradas. A primeira são as restrições de integralidade das variáveis, que pode ser relaxada e, posteriormente, por meio de alguma heurística, encontrar uma solução inteira para o problema. A segunda é a grande quantidade de variáveis do problema, que pode ser contornada por meio da utilização de uma modificação do método simplex, o método de geração de colunas.

O problema de corte de estoque é considerado um subproblema fundamental do problema de planejamento de produção em muitas indústrias, no entanto, há, na literatura, vários trabalhos que tratam esses problemas de forma desacoplada, possibilitando o aumento dos custos globais, por não considerar os custos envolvidos nesses processos mutuamente.

Nesse sentido, é possível observar, conforme em [Gramani, França e Arenales \(2011\)](#), que melhores resultados podem ser obtidos por meio dos modelos integrados. Além disso, algumas técnicas apresentam melhores resultados mediante determinados problemas, o que motiva novas abordagens com diferentes modelos e combinando diferentes técnicas. Com isso, de acordo com [Poltroniére et al. \(2008\)](#), o problema integrado vem se tornando uma tendência e várias propostas de modelos e métodos de solução vêm sendo desenvolvidos. Dentre esses trabalhos, estão [Kantorovich \(1960\)](#), [Farley \(1988\)](#), [Nonas e Thorstenson \(2000\)](#), [Gramani e França \(2006\)](#), [Gramani, França e Arenales \(2011\)](#), [Silva, Alvelos e Valério de Carvalho \(2014\)](#), [Melega, Araujo e Jans \(2016\)](#), entre outros.

Um dos contextos em que o problema de corte de estoque apresenta-se integrado ao problema de planejamento de produção é a indústria papelreira. Nessas indústrias, são produzidas bobinas grandes de diferentes larguras e gramaturas de papel, chamadas jumbos, que são cortadas, posteriormente, para atender uma certa demanda de itens finais. Dessa forma, um modelo matemático, que integra os problemas de dimensionar o lote de produção de jumbos e a forma de cortar esses objetos, busca minimizar os custos envolvidos em ambos os processos, por exemplo, minimizar os custos de produção de jumbos, estoque de bobinas e itens finais, preparação das máquinas no processo de produção e perda no processo de corte.

Na produção do papel, uma bobina pode ser composta por diferentes gramaturas, assim, durante sua produção, ocorre uma ou mais mudanças na gramatura do papel e, conseqüentemente, perda de material nesse processo, como pode ser visto em [Poltroniére et al. \(2008\)](#). No entanto, em algumas indústrias papelreiras, a produção das bobinas de cada gramatura de papel pode ser feita separadamente. Assim, cada bobina de papel produzida é composta por um único tipo de gramatura.

Dessa forma, nesse trabalho, é proposto um modelo integrado com base no proposto por [Poltroniere et al. \(2008\)](#), que considera o custo de preparação da máquina, a capacidade de produção e a produção de jumbos compostos por apenas uma gramatura de papel. Para a resolução do modelo, é utilizado o método de geração de colunas, a heurística *relax-and-fix* e o pacote de otimização [CPLEX 12.6.1 \(2014\)](#). Por fim, são feitos testes computacionais e a análise dos resultados obtidos.

No Capítulo 2, são abordados os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque. Para o problema de dimensionamento de lotes, é apresentado um modelo básico proposto por [Wagner e Whitin \(1958\)](#). Para o problema de corte de estoque, é abordado o modelo proposto por [Gilmore e Gomory \(1961, 1963\)](#).

No Capítulo 3, é definido o problema integrado e apresentado o modelo proposto por [Poltroniere et al. \(2008\)](#). Também, nesse capítulo, é apresentada uma revisão de literatura dos trabalhos que abrangem esse tipo de problema e explicado como ocorre o processo de produção e corte de papel. No Capítulo 4, é apresentado um modelo integrado para a produção de papel baseado no modelo proposto por [Poltroniere et al. \(2008\)](#).

No Capítulo 5, são apresentados os métodos mais comuns utilizados na resolução dos problemas de dimensionamento de lotes e de corte de estoque. Em específico, são abordados o método de geração de colunas e a heurística *relax-and-fix*. No Capítulo 6, é apresentado o estudo computacional realizado.

No Capítulo 7, são feitas as considerações finais. Ao final do trabalho, são apresentadas as referências bibliográficas. As figuras apresentadas nessa dissertação que não possuem fonte especificada foram produzidas pela autora.

2 Os problemas de dimensionamento de lotes e de corte de estoque

Neste capítulo, definimos os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque, apresentando suas características, o modelo básico de dimensionamento de lotes proposto por [Wagner e Whitin \(1958\)](#), o modelo proposto por [Gilmore e Gomory \(1961, 1963\)](#) para o problema de corte de estoque.

2.1 Problema de dimensionamento de lotes

O problema de dimensionamento de lotes (PDL) consiste em um problema de otimização cujo objetivo é determinar a quantidade de itens a serem produzidos em uma ou várias máquinas ao longo de um horizonte de planejamento, de forma a atender a demanda e satisfazer algum critério de otimização ([DREXL; KIMMS, 1997](#)), como minimizar custos e atrasos. Nos contextos em que existe um limite de produção, podem aparecer restrições de capacidade.

Na literatura, há vários trabalhos que abordam o PDL, tais como [Bitran e Yanasse \(1982\)](#), [Trigeiro, Thomas e McClain \(1989\)](#), [Bahl, Ritzman e Gupta \(1987\)](#), [Drexel e Kimms \(1997\)](#), [Karimi, Ghomi e Wilson \(2003\)](#), [Jans e Degraeve \(2008\)](#), [Ramya, Rajendran e Ziegler \(2016\)](#), entre outros. A partir desses estudos, nota-se que algumas características do PDL influenciam na sua classificação, modelagem matemática, complexidade e método de solução. Dentre essas características, é possível citar o número de tipos de itens, as restrições de capacidade, os tipos de demanda, a preparação para a produção, o tipo de horizonte de planejamento e o número de estágios.

O número de tipos de itens em um PDL é a quantidade existente de diferentes tipos de objetos. Esse número pode ser um, no caso em que se deseja planejar a produção de apenas um item, ou múltiplos, quando há mais de um item a ser produzido. Conforme [Karimi, Ghomi e Wilson \(2003\)](#), quanto maior o número

de itens, maior o número de variáveis do modelo e, conseqüentemente, maior a complexidade do PDL.

As restrições de capacidade aparecem nos problemas em que há uma limitação nos recursos disponíveis para a produção dos itens, por exemplo, a capacidade máxima de produção de papel que aparece no contexto das indústrias papeleiras ou a capacidade da serra no corte de placas de madeiras nas indústrias de móveis. Quando não há restrição de recursos no modelo, o problema é dito ser não-capacitado. Por outro lado, quando há restrições de capacidade, o problema é chamado capacitado. Tais restrições de capacidade afetam diretamente a complexidade do problema (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003), uma vez que, para não ultrapassar a capacidade, pode ser necessário realocar a produção dos itens.

Nos contextos em que os itens sofrem deterioração, outro fator que pode aumentar a complexidade do PDL são as restrições de tempo de espera de estoque. Além disso, a escassez de estoque também pode afetar a modelagem e complexidade do problema. Quando a escassez é permitida, é possível satisfazer a demanda do período atual em períodos futuros, não satisfazer a demanda e perder as vendas ou então uma combinação entre esses dois casos, com isso, tais problemas com escassez de estoque são mais difíceis de resolver do que sem escassez (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003).

A demanda do PDL pode ser determinística, quando é conhecida a quantidade demandada dos itens produzidos, ou, caso contrário, probabilística. Além disso, pode ser também dinâmica, no caso em que a demanda pode ser influenciada por outros fatores e variar ao longo do tempo, ou, caso contrário, estática, quando não há variação. Em alguns contextos, também pode aparecer, no PDL, quando são relevantes, os custos ou tempo gastos na preparação da(s) máquina(s) para a produção dos itens demandados.

Segundo Karimi, Ghomi e Wilson (2003), considerar a preparação da(s) máquina(s) afeta diretamente a complexidade do problema, uma vez que, são introduzidas, ao modelo, variáveis binárias que indicam se a máquina será ou não utilizada. A preparação da(s) máquina(s) pode ser simples ou complexa. No caso simples, o custo de tempo de preparação não depende da sequência em que os

itens são produzidos assim como não dependem das decisões tomadas nos períodos anteriores. Nos casos em que há essas dependências, a preparação da(s) máquina(s) é classificada como complexa.

Quando a preparação da(s) máquina(s) é complexa, pode haver aproveitamento da preparação nos períodos anteriores, reduzindo o custo e tempo de preparação, e também a possibilidade de uma preparação com menor custo e tempo nos casos em que há uma semelhança entre a produção dos itens. Quando a preparação da(s) máquina(s) depende da sequência de produção, o custo e o tempo dependerão dessa sequência de produção, dificultando tanto a modelagem do problema como a sua resolução (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003).

O horizonte de planejamento caracteriza-se pelo período de tempo em que é feito o planejamento do dimensionamento de lotes, isto é, o tempo abrangido pelo PDL. O horizonte de planejamento pode ser composto por dias, semanas, meses ou anos. Cada divisão é chamada período. Quando considerado um número finito de períodos, o horizonte de planejamento é caracterizado como finito. Caso contrário, infinito.

Além disso, o horizonte de planejamento pode ser classificado também como rolante. Nesse caso, o primeiro período do horizonte de planejamento é dividido em uma quantidade finita de subperíodos fazendo com que as decisões referentes ao primeiro período sejam bem detalhadas e as demais soluções dos outros períodos agregadas. Somente a solução do primeiro período é implementada, então os dados são atualizados e o horizonte de planejamento é rolado, isto é, o segundo período passa a ser primeiro, o terceiro passa a ser segundo e assim sucessivamente. Então, o problema é resolvido novamente.

Referente ao número de estágios, os problemas de dimensionamento de lotes podem ser classificados como monoestágios e multiestágios. Em um problema monoestágio, a produção de um item não depende da produção de outros itens. Assim, o problema é classificado como multiestágio quando existe essa dependência, isto é, quando a produção de um item depende da produção de outros itens. Com isso, nos problemas monoestágios e multiestágios, as demandas são classificadas como independente e dependentes, respectivamente, uma vez que, para problemas

monoestágios, a demanda de um item não depende da produção de outros itens e, nos multiestágios, há essa dependência.

Na Figura 1, pode-se observar um exemplo em que ocorre a dependência entre itens, em indústrias moveleiras, na produção de um armário de duas portas, uma vez que são necessários vários estágios (corte, furação, montagem, pintura e acabamento) para a produção do armário.

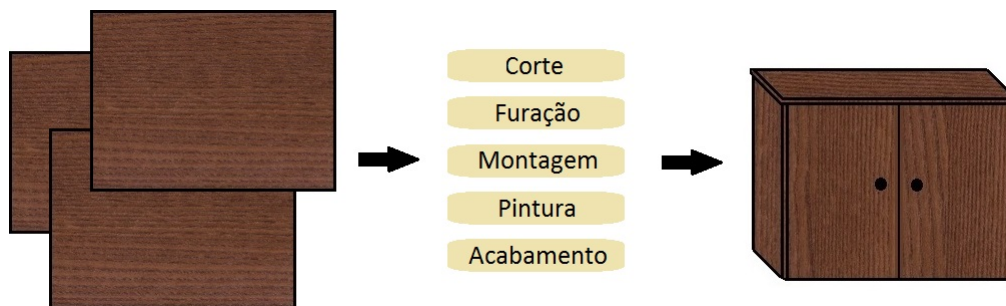


Figura 1 – Exemplo de uma produção multiestágio em indústrias moveleiras.

Um problema de dimensionamento de lotes de simples resolução consiste em um problema de programação linear monoestágio que determina a quantidade de um único item a ser produzido, com demanda fixa, horizonte de planejamento finito, sem limitações de capacidade e preparação da máquina, com objetivo a minimização dos custos de produção e estoque dos itens. À medida que se considera a produção de vários itens, restrições de capacidade e custos de preparação da máquina, o problema vai se tornando mais complexo. Quando consideramos o processo de preparação da máquina, o PDL passa a ser formulado como um problema de programação linear inteiro-misto, pois passa a apresentar variáveis binárias associadas à preparação ou não das máquinas.

Na próxima seção, é apresentada uma formulação clássica para o PDL proposta por [Wagner e Whitin \(1958\)](#), que consiste em determinar a produção dos lotes de vários tipos de itens, para diversos períodos de tempo, satisfazendo a demanda e minimizando a soma dos custos de preparação e estocagem.

2.1.1 Uma formulação matemática para o PDL

Seja T o número de períodos de horizonte de planejamento, N o número de diferentes tipos de itens a serem produzidos e os dados definidos a seguir.

Índices:

$t = 1, \dots, T$: número de períodos no horizonte de planejamento;

$i = 1, \dots, N$: número de itens.

Parâmetros:

s_{it} : custo de preparação (*setup*) para a produção do item i no período t ;

h_{it} : custo unitário de estocagem do item i no período t ;

D_{it} : demanda do item i no período t ;

sd_{itr} : soma das demandas do item i do período t até o período r .

Variáveis:

x_{it} : quantidade do item i produzida no período t ;

w_{it} : quantidade do item i estocada no período t ;

z_{it} : variável binária que indica se a máquina está preparada para a produção do item i no período t .

Logo, o modelo matemático para o PDL com custo de preparação proposto por [Wagner e Whitin \(1958\)](#) é dado por:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N h_{it} w_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N s_{it} z_{it} \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad x_{i1} - w_{i1} = D_{i1}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

$$w_{i,t-1} + x_{it} - w_{it} = D_{it}, \quad i = 1, \dots, N; t = 2, \dots, T \quad (2.3)$$

$$x_{it} - sd_{iT}z_{it} \leq 0, \quad i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \quad (2.4)$$

$$z_{it} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T \quad (2.5)$$

$$x_{it}, w_{it} \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T. \quad (2.6)$$

A função objetivo (2.1) minimiza os custos de estocagem e de preparação. As restrições (2.2) e (2.3) são de balanceamento de estoque, garantindo que a demanda seja sempre satisfeita, ou seja, para cada item, no primeiro período, a quantidade produzida menos a quantidade que será estocada deve ser igual a demanda e, nos demais períodos, para cada item, a quantidade de itens em estoque mais a quantidade produzida menos a quantidade de itens que será estocada deve ser igual a demanda daquele tipo de item, em cada um dos períodos. Sem perda de generalidade, o estoque inicial é considerado nulo.

As restrições (2.4) e (2.5) asseguram que haverá produção apenas quando houver preparação da máquina. Assim, quando $x_{it} > 0$, z_{it} será igual a 1. Caso contrário, se $x_{it} = 0$, a otimalidade faz com que $z_{it} = 0$. Por fim, a restrição (2.6) é de não negatividade das variáveis.

2.2 Problema de corte de estoque

O problema de corte de estoque (PCE) consiste na otimização do processo de corte de objetos maiores em um conjunto de itens menores de forma a atender a demanda dos itens menores e satisfazer algum critério de otimização (GILMORE; GOMORY, 1961), como a perda de material ou o custo total associado aos objetos cortados. As diferentes formas em que os objetos maiores podem ser cortados, produzindo os itens demandados são chamadas de padrões de corte. Nesses problemas, os objetos maiores podem ser de um único tipo ou de vários tipos, havendo ou não uma limitação na quantidade disponível em estoque dos objetos.

Por buscar minimizar a perda no processo de corte de objetos, os estudos envolvendo o PCE têm grande valor para a indústria e têm atraído a atenção de vários pesquisadores. Tais trabalhos que tratam o PCE podem ser encontrados

na literatura. Entre eles, podemos citar [Dyckhoff \(1990\)](#), [Wang e Wäscher \(2002\)](#), [Oliveira e Wäscher \(2007\)](#), [Morabito, Arenales e Yanasse \(2009\)](#), [Furini et al. \(2012\)](#), [Lu e Huang \(2015\)](#), entre outros.

Geralmente, nos problemas de corte de estoque, há relativamente poucos tipos de itens, porém, uma quantidade grande a ser produzida, ocorrendo uma grande repetição desses itens. Além disso, muitos objetos podem ser igualmente cortados, levando à repetição de padrões de cortes. Nos casos em que há um número muito grande de padrões de cortes, encontra-se dificuldade em gerar esses padrões e determinar a quantidade de repetições que devem ocorrer.

Os problemas de corte de estoque podem ser classificados a partir das dimensões relevantes no processo de corte dos objetos e variam de unidimensional à multidimensional, isto é, unidimensional, bidimensional, tridimensional ou multidimensional ([WÄSCHER; HAUBNER; SCHUMANN, 2007](#)). Problemas unidimensionais são aqueles em que apenas uma dimensão (comprimento) é relevante no processo de corte, como no corte de bobinas de papel ou barras de aço. Em contextos que envolvem corte de placas, como em indústrias moveleiras, em que são considerados o comprimento e a largura no processo de corte, os problemas são classificados como bidimensionais. Quando o comprimento, a largura e a altura são relevantes, como na produção de colchões e travesseiros, tem-se um problema tridimensional. Por fim, nos casos em que mais de três dimensões são relevantes para a obtenção da solução, o PCE é classificado como multidimensional, como ocorre, por exemplo, no problema de alocação de tarefas.

A Figura 2 apresenta uma ilustração de um PCE bidimensional no contexto das indústrias moveleiras. Nela, é possível observar vários itens que são produzidos por meio do corte de uma placa de madeira e que, posteriormente, serão utilizados na produção de móveis. Note que, para cada padrão de corte, associa-se uma perda de material, destacada em amarelo.

Outras formas de classificar os problemas de estoque também são encontradas, como problemas de corte 1,5–dimensional, que consiste em problemas bidimensionais com uma das dimensões variável, como no caso do corte de bobinas de papel cujo comprimento é fixo e a largura suficientemente longa (Figura 3), e

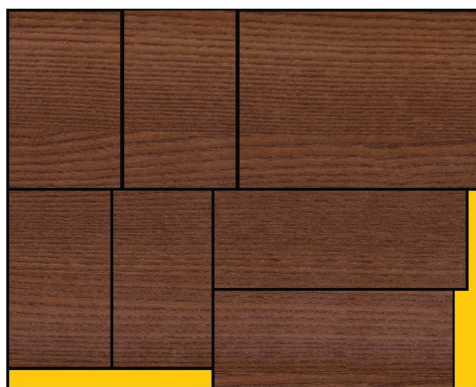


Figura 2 – Exemplo de PCE bidimensional.

problemas de corte 2,5–dimensional, que consiste em problemas tridimensionais com uma das dimensões variáveis, por exemplo, objetos com largura e comprimento fixos e altura suficientemente grande. Além disso, existem diferentes formas de ocorrer o processo de corte como, por exemplo, cortes guilhotinados, que transforma, a cada corte, uma placa retangular em dois novos retângulos. Nesses processos, podem haver capacidade limitada de corte ou diferentes estágios de corte, como no caso em que é permitida mudança no sentido dos cortes (horizontal/vertical).

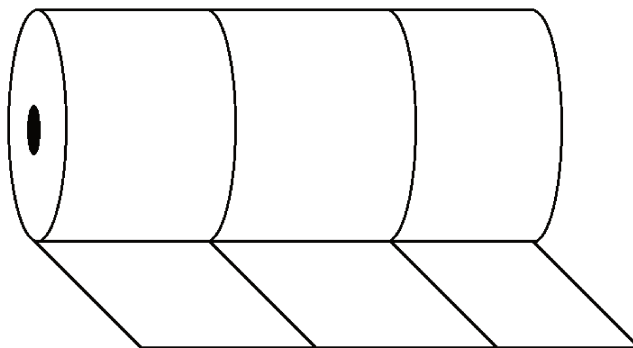


Figura 3 – Exemplo de PCE 1,5–dimensional.

Conforme [Wäscher, Haubner e Schumann \(2007\)](#), há também a classificação dos problemas de corte de estoque a partir da variedade dos objetos que serão cortados. Assim, quando há apenas um objeto a ser cortado, o problema é classificado como problema de corte com tamanho de estoque único. No caso de vários objetos distintos a serem cortados, o problema pode ser classificado como

problema de corte com tamanho de estoque múltiplo ou ainda problema de corte de estoque residual, quando a variedade dos objetos a serem cortados é fortemente heterogênea.

Um dos primeiros estudos abordando problemas de corte de estoque foram realizados por [Gilmore e Gomory \(1961, 1963\)](#), que propõem um modelo unidimensional com vários tipos de objetos em estoque e em quantidades limitadas. Na próxima seção, são apresentados os dados do modelo e, em seguida, sua formulação.

2.2.1 Uma formulação matemática para o PCE

Considere M a quantidade de tipos de objetos disponíveis em estoque, N o número de itens demandados, N_m o número de padrões de corte gerados para o objeto do tipo m , $m = 1, \dots, M$, e os demais dados a seguir.

Índices:

$m = 1, \dots, M$: número de tipos de objeto;

$i = 1, \dots, N$: número de itens;

$j = 1, \dots, N_m$: número de padrões de corte para o objeto tipo m .

Parâmetros:

c_{jm} : perda de material no padrão de corte j no objeto tipo m ;

a_{ijm} : número de itens tipo i no padrão de corte j do objeto tipo m ;

d_i : demanda do item tipo i ;

e_m : disponibilidade em estoque do objeto tipo m ;

L_m : comprimento do objeto tipo m ;

ℓ_i : comprimento do item tipo i .

Variáveis:

y_{jm} : quantidade de objetos tipo m cortados no padrão de corte j .

Logo, o modelo proposto por [Gilmore e Gomory \(1961, 1963\)](#) para o PCE unidimensional é dado por:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} c_{jm} y_{jm} \quad (2.7)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} a_{ijm} y_{jm} \geq d_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^{N_m} y_{jm} \leq e_m, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.9)$$

$$y_{jm} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad j = 1, \dots, N_m; m = 1, \dots, M. \quad (2.10)$$

A função objetivo (2.7) minimiza a perda total de material. A perda de material no padrão de corte j no objeto tipo m é dada por $c_{jm} = L_m - (a_{1jm}\ell_1 + a_{2jm}\ell_2 + \dots + a_{Njm}\ell_N)$. As restrições (2.8) garantem que a demanda seja satisfeita para todos os tipos de itens, isto é, asseguram que, para cada item, a soma das quantidades de itens cortados em cada máquina, por cada padrão de corte, seja maior ou igual à demanda.

As restrições (2.9) asseguram que a quantidade de objetos cortados para atender a demanda não ultrapassa a disponibilidade em estoque dos objetos e as restrições (2.10) são de não negatividade e integralidade das variáveis.

Note que o PCE consiste em determinar a melhor maneira de cortar os M tipos de objetos disponíveis em estoque a partir de diferentes padrões de cortes, de forma a minimizar a perda de material, atender a demanda dos N itens e respeitar o limite de objetos disponíveis em estoque.

Observe que a resolução do PCE consiste em definir, inicialmente, os possíveis padrões de cortes para os objetos estocados e, então, decidir quantas

vezes cada padrão de corte será utilizado. A cada iteração do método simplex, uma nova coluna (padrão de corte) atrativa entra na base. No caso do problema de corte de estoque unidimensional, para determinar uma coluna atrativa, ou seja, um padrão de corte para entrar na base, basta resolvermos um problema da mochila da seguinte forma:

$$\ell_1 a_{1jm} + \ell_2 a_{2jm} + \dots + \ell_N a_{Njm} \leq L_m, \quad (2.11)$$

$$a_{ijm} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N_m; m = 1, \dots, M. \quad (2.12)$$

As restrições (2.11) garantem que a largura total necessária para produzir todos os itens, que são determinados pelo padrão de corte, não ultrapassa a largura do objeto a ser cortado. As restrições (2.12) asseguram que a quantidade de cada item produzida pelo padrão de corte seja inteira e não negativa. Mais detalhes sobre como os padrões são gerados são apresentados na Seção 5.2.

3 O problema integrado

Neste capítulo, apresentamos uma revisão de literatura dos trabalhos que abordam o problema integrado em diferentes contextos, em específico, nas indústrias papéis. Também é explicado como ocorre a produção e corte de papel e apresentado o modelo proposto por [Poltroniére et al. \(2008\)](#).

3.1 Estudos envolvendo o problema integrado

Em muitas indústrias, como, por exemplo, a moveleira e a papelaria, observa-se uma interligação entre o problema de corte de estoque e o problema de dimensionamento de lotes. Tratar esses dois problemas de forma separada, pode aumentar os custos globais, uma vez que o planejamento da produção que minimiza os custos de preparação e estocagem pode aumentar a perda de material no processo de corte ou, por outro lado, a quantidade de objetos que minimiza a perda no problema de corte pode elevar os custos de produção.

Em busca de diminuir os custos de produção e o desperdício de material, é possível antecipar a produção de itens e estocá-los, para, posteriormente, serem entregues, porém, esse processo gera custo de estocagem, além dos custos de preparação de máquinas envolvidos na produção. Assim, é preciso decidir qual o melhor caminho, adiantar ou não a produção de alguns itens, questão que também induz à combinação dos problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque.

Quando comparadas as abordagens dos problemas de forma separada e acoplada, observa-se que podem ser obtidos por meio dos modelos integrados melhores resultados. Com isso, é possível, encontrar, na literatura, diversos estudos que abordam o problema de dimensionamento de lotes acoplado ao problema de corte de estoque. Entre eles, estão [Kantorovich \(1960\)](#), [Farley \(1988\)](#), [Hendry, Fok e Shek \(1996\)](#), [Nonas e Thorstenson \(2000\)](#), [Gramani e França \(2006\)](#), [Ghidini \(2008\)](#), [Gramani, França e Arenales \(2009\)](#), [Gramani, França e Arenales \(2011\)](#), [Alem Junior \(2011\)](#), [Longhi \(2013\)](#), [Silva, Alvelos e Valério de Carvalho \(2014\)](#) e

Melega, Araujo e Jans (2016).

Kantorovich (1960), possivelmente, realizou o primeiro trabalho que trata o problema de dimensionamento de lotes integrado ao problema de corte de estoque. O trabalho é datado de 1939, porém, foi traduzido do russo em 1960. Nele, Kantorovich (1960) propõe um modelo para o problema de corte de estoque que determina o tamanho do lote.

Farley (1988) propôs dois modelos de dimensionamento de lotes integrado ao problema de corte de estoque, um linear e um quadrático, para determinar a produção, corte e costura de tecidos em uma indústria de vestuários. O objetivo é maximizar o lucro, respeitando as limitações no processo de produção dos vestuários.

Hendry, Fok e Shek (1996) aborda o problema de corte de estoque e o problema de dimensionamento de lotes em indústrias de cobre. Os autores propõem dois estágios para resolver o problema integrado, cada estágio consiste na resolução de um problema. O primeiro tem como objetivo diminuir a produção de barras de cobre que serão cortadas e, conseqüentemente, a perda envolvida no processo de corte. O segundo visa minimizar o tempo relacionado à produção das barras e à preparação das máquinas. Os problemas são resolvidos por meio de heurísticas, entre elas, um método heurístico envolvendo programação inteira e utilizando um subconjunto de padrões de cortes, que obteve os melhores resultados para ambos os problemas.

Nonas e Thorstenson (2000) propõem um modelo não linear para o problema integrado em uma fábrica de caminhões. O objetivo do modelo é minimizar a perda no processo de corte, o custo de preparação da máquina e o custo de estocagem. Para resolver o modelo, que possui uma função objetivo de minimização côncava, são utilizados o método de classificação de pontos extremos de Murty, uma variação desse método e a heurística sequencial, que resolve o problema de corte de estoque e, em seguida, de dimensionamento de lotes. Os resultados mostraram que o método de Murty obtém um melhor desempenho, sendo capaz de resolver problemas com até 50 diferentes padrões de cortes. Também foram sugeridos três métodos de busca local distintos para resolver o modelo, que obteve bons resultados

para os problemas testados. Para problemas com um número muito grande de padrões de cortes, foi proposto um algoritmo para geração de padrões de cortes, que obteve melhor desempenho que a heurística sequencial.

[Gramani e França \(2006\)](#) abordam o problema de corte de estoque bidimensional integrado ao dimensionamento de lotes em processos industriais com o objetivo de diminuir a perda de material durante o corte, o custo de produção relacionado ao estoque e o custo de preparação da máquina. Para isso, os autores propõem um método de solução baseado em uma analogia com o problema de caminho mínimo em redes. Os resultados computacionais obtidos pelo método proposto a partir do modelo integrado foram comparados com os obtidos geralmente nas indústrias, isto é, utilizando os problemas de corte de estoque e dimensionamento de lotes separadamente. O estudo demonstrou que, utilizando o modelo integrado, é possível elevar o lucro em até 28%. A solução obtida pelo método proposto também foi comparada com a solução ótima de seis problemas simples obtida por meio do pacote de otimização CPLEX. O método proposto encontrou a solução ótima de três testes e a solução manteve-se, em média, a uma distância de 0,22% do ótimo.

[Ghidini \(2008\)](#) desenvolve um modelo integrado em uma indústria de móveis de pequeno porte. O modelo considera o horizonte de planejamento rolante e tem como objetivo minimizar os custos de produção e estocagem, a preparação das máquinas no corte e a perda de matéria-prima. São propostas duas heurísticas, de decomposição e de acoplamento, baseadas no método simplex com geração de colunas para resolver uma simplificação do modelo, uma vez que este possui um alto grau de complexidade. A partir dos resultados, verificou-se que o tempo total médio de resolução do modelo é menor quando variáveis artificiais foram colocadas na restrição de acoplamento, para ambas as heurísticas. Porém, a heurística de decomposição obteve melhores tempos. Além disso, constatou-se que a heurística de decomposição é menos sensível à variação dos parâmetros do modelo, no entanto, esta heurística tende a produzir o máximo possível no primeiro período, fazendo com que as capacidades das máquinas nos subperíodos sejam insuficientes, inviabilizando o problema. Diante disso, uma heurística de factibilização também é proposta pela autora.

[Gramani, França e Arenales \(2009\)](#) propõem um modelo integrado para

indústrias moveleiras e uma heurística baseada na relaxação Lagrangiana para resolvê-lo. O modelo considera a conjectura de que é vantajoso antecipar a produção de determinados produtos finais porque diminui o custo no processo de corte e preparação das máquinas, compensando o aumento no custo de estocagem. A partir dos resultados computacionais, foi confirmada a vantagem de antecipar a produção de determinados produtos finais e utilizar o problema integrado, ao invés de tratar os problemas separadamente. Além disso, constatou-se que a heurística proposta pode obter resultados muito próximos do ótimo do problema integrado.

Utilizando o mesmo modelo proposto por [Gramani, França e Arenales \(2009\)](#), mas desconsiderando o custo de preparação, para simplificar o modelo, e considerando o estoque das partes que compõem os itens finais, [Gramani, França e Arenales \(2011\)](#) resolvem o problema integrado decompondo-o e utilizando a técnica de geração de colunas por meio do CPLEX, resolvendo primeiramente o problema de dimensionamento de lotes e, em seguida, o de corte de estoque. Foram analisados os resultados do modelo combinado com diferentes capacidades da serra e custos da placa utilizada na produção e também foram comparados os resultados obtidos resolvendo o modelo integrado no CPLEX. Os resultados, assim como em [Gramani, França e Arenales \(2009\)](#), mostram que pode ser lucrativo antecipar a produção das partes ou dos itens finais pela redução da perda no processo de corte, mesmo aumentando o custo de estoque. A partir da resolução do modelo integrado pelo CPLEX, em comparação com a técnica de decomposição, obteve-se um ganho de até 12,7%. Os resultados mostraram que, quando a capacidade da serra é baixa, a solução usa mais placas em comparação com a capacidade normal. Além disso, se o custo da placa aumenta, a quantidade de placas usadas diminui por meio da utilização de melhores padrões de corte.

[Alem Junior \(2011\)](#) estuda duas formulações matemáticas para o problema integrado com aplicação em indústrias moveleiras. O autor considera as incertezas dos dados e desenvolve modelos de programação estocástica e otimização robusta. Para resolver tais modelos, são utilizados o método *branch-and-cut* do CPLEX e heurísticas *relax-and-fix*. A partir dos resultados, observou-se que as duas metodologias são valiosas no contexto dos problemas integrados sob incertezas propostos e apresentam vantagens e desvantagens, cada uma com suas especificidades,

suposições, simplificações e limitações. Assim, o autor concluiu que o método mais adequado depende da aplicação específica e do tipo de dados que o decisor tem em mãos.

Longhi (2013) integra diferentes modelos de corte e de dimensionamento de lotes presentes na literatura e faz um estudo comparando o desempenho desses modelos integrados. Foram estudados o modelo clássico de dimensionamento de lotes e sua reformulação baseada no problema de caminho mínimo e os modelos de corte de estoque de Kantorovich (1960), de Gilmore e Gomory (1961, 1963) e de Valério de Carvalho (1999, 2002). Para resolver alguns modelos, utilizou-se o método *branch and price* e, para outros modelos, um método heurístico baseado no método simplex com geração de colunas. Para os modelos resolvidos por *branch-and-price*, o modelo integrado baseado na formulação de Valério de Carvalho obteve melhores resultados, quando comparados com o modelo baseado na formulação de Kantorovich. Além disso, o modelo de Valério de Carvalho contribuiu para a obtenção de limitantes superiores melhores, quando comparado aos modelos envolvendo a formulação de Gilmore e Gomory. Os modelos integrados baseados na reformulação como problema de caminho mínimo apresentaram melhores limitantes inferiores e superiores que os modelos baseados na formulação clássica de dimensionamento de lotes.

Silva, Alvelos e Valério de Carvalho (2014) propõem dois modelos que integram o problema de corte de estoque bidimensional e o problema de dimensionamento de lotes. O objetivo dos modelos é diminuir o custo total do processo de produção e corte. Os autores propõem duas heurísticas baseadas no que é realizado na prática nas indústrias para resolver os problemas. A primeira heurística antecipa a produção de todos os itens para o primeiro período, diminuindo o custo das placas usadas. A segunda heurística minimiza o custo de estoque. De 192 casos estudados, foi possível provar a otimalidade em 82% dos experimentos. Considerando somente os casos em que a solução ótima foi obtida, o primeiro modelo atingiu o ótimo em menos de 4 segundos em 98,7% dos casos, enquanto o segundo modelo em 97,5%. Constatou-se que a primeira heurística usa menos placas do que a segunda, no entanto o valor da solução é maior devido aos custos de armazenamento. O número de placas usadas pela primeira heurística é, na maioria dos casos estudados, igual da solução ótima, enquanto o valor dos custos totais

obtidos pela segunda heurística são próximos do custo total ótimo.

Melega, Araujo e Jans (2016) propõem diferentes formulações matemáticas para o problema integrado a partir da combinação de diferentes modelos de corte e de dimensionamento de lotes com o objetivo de avaliar o impacto que essas distinções causam no desempenho dos modelos. Dentre os modelos abordados estão os propostos por Gilmore e Gomory (1961), Valério de Carvalho (1999, 2002), Kantorovich (1960) e Wagner e Whitin (1958). Os modelos foram implementados no CPLEX e, para resolvê-los, são utilizadas duas heurísticas distintas. A primeira utiliza o *solver* com um critério de parada de 600 segundos ou *gap* menor que 0,1%. A segunda consiste em utilizar a técnica de geração de colunas, sendo o problema, os subproblemas e o problema inteiro restrito também resolvidos pelo *solver*. Foi constatada a dificuldade dos modelos para obter uma solução factível quando se considera a restrição de capacidade no problema de dimensionamento de lotes. No entanto, no geral, os modelos integrados com o problema clássico de dimensionamento de lotes e com o modelo de Valério de Carvalho (1999, 2002) utilizando geração de colunas obtiveram um maior número de soluções factíveis em comparação com outros modelos matemáticos. Em contraposição, as formulações que se integram com o modelo proposto por Kantorovich (1960) produziram resultados ruins em todos os experimentos.

3.2 Problema integrado na produção de papel

Dentre os contextos de produção e corte em que o PDL apresenta-se integrado ao PCE, na literatura, é possível encontrar trabalhos que tratam, especificamente, o problema integrado nas indústrias de papel, tais como Correia, Oliveira e Ferreira (2004), Poltroniere et al. (2008), Poltroniere, Araujo e Poldi (2016) e Leão (2012).

Correia, Oliveira e Ferreira (2004) estudam o problema de dimensionamento de lotes e corte de bobinas e resmas em uma indústria papeleira. Para resolver o problema, os autores propõem um método de solução heurístico composto por três estágios. Primeiramente, padrões de cortes são gerados e selecionados. O segundo estágio baseia-se na resolução de dois problemas de programação linear

distintos por meio do método Simplex. Por fim, uma heurística de arredondamento é utilizada a fim de se obter uma solução inteira para o problema. Os autores consideraram bastante satisfatórios os resultados encontrados, porém afirmam que o procedimento de arredondamento deve ser melhorado.

[Poltroniere et al. \(2008\)](#) propõem um modelo que integra o problema de corte de estoque unidimensional e o problema de dimensionamento de lotes no contexto das indústrias papeleras. O modelo tem como objetivo diminuir os custos associados aos processos de produção e corte e, para resolvê-lo, os autores desenvolveram dois métodos de solução, a heurística lote-corte e a heurística corte-lote. Ambas as heurísticas propostas baseiam-se na relaxação Lagrangiana, decompondo o problema integrado em dois subproblemas, o problema de dimensionamento de lotes e o problema de corte de estoque. Na heurística lote-corte, é resolvido primeiro o problema de dimensionamento de lote e depois de corte de estoque. Na heurística corte-lote, os problemas são resolvidos na ordem inversa. Os experimentos computacionais realizados mostraram que a heurística corte-lote obteve um desempenho melhor quando encontrada a solução lote por lote. Quando permitida antecipação de itens, as heurísticas obtiveram valores bem próximos para a função objetivo.

Considerando o modelo proposto em [Poltroniere et al. \(2008\)](#) e propondo um novo modelo baseado em [Valério de Carvalho \(1999, 2002\)](#), [Poltroniere, Araujo e Poldi \(2016\)](#) fazem um estudo computacional resolvendo ambos os modelos usando heurísticas e o CPLEX. Além disso, versões relaxadas dos modelos também são resolvidas e é feita uma extensão da heurística Lagrangiana proposta por [Poltroniere et al. \(2008\)](#), permitindo a antecipação do corte de alguns itens entre os períodos. Como resultado, as soluções encontradas a partir da heurística de antecipação de itens e do pacote de otimização foram satisfatórias e as relaxações dos modelos forneceram bons limites inferiores para ambos os problemas.

[Leão \(2012\)](#) propõe diferentes reformulações matemáticas para o problema integrado proposto por [Poltroniere et al. \(2008\)](#) baseadas em formulações que são clássicas para o problema de corte e para o problema de dimensionamento de lotes. São estudados três diferentes cenários, para um tipo de objeto e uma máquina para produzi-lo, vários tipos de objetos e uma máquina para produzi-los e vários tipos de objetos e várias máquinas para produzi-los. Para resolver os modelos, foi

utilizado o método de geração de colunas, o CPLEX e o método *branch-and-bound*. Os resultados mostraram que a formulação baseada no modelo de corte de estoque unidimensional proposto por [Gilmore e Gomory \(1961\)](#) obteve o melhor *gap* e maior controle na produção dos objetos. Por outro lado, as formulações com decomposição de Dantzig-Wolfe apresentam soluções com menor perda. Além disso, os resultados foram comparados com as soluções obtidas por meio das heurísticas propostas por [Poltroniere et al. \(2008\)](#) e as formulações propostas obtiveram menor *gap* e perda, porém, o número de soluções factíveis foi menor.

Como é possível observar nesses trabalhos, o problema de corte de estoque apresenta-se integrado ao problema de dimensionamento de lotes nas indústrias papeleiras pois, nelas, são produzidas bobinas grandes de diferentes larguras e gramaturas de papel, chamadas jumbos, que são cortadas em bobinas menores ou retângulos com dimensões definidas (Figura 4) para atender uma certa demanda de itens finais (por exemplo, papel A4, A3, carta, ofício, *cut-size*, etc).

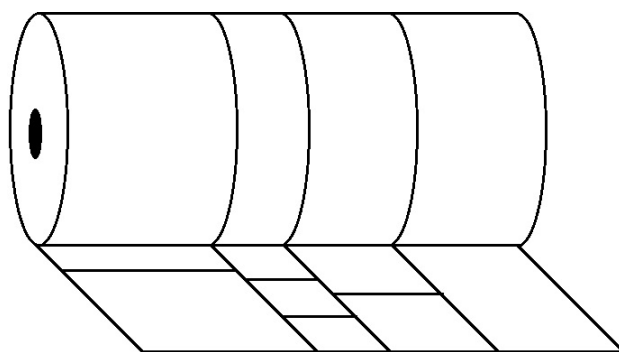


Figura 4 – Corte de um jumbo em itens demandados.

Os jumbos são produzidos em diferentes máquinas, com características específicas, como tempo de preparação da máquina e largura. Assim, um modelo matemático, que integra os problemas de dimensionar o lote de produção e de como cortar as bobinas, busca determinar uma solução que minimize os custos de produção, estoque e preparação de máquinas e custos de perda de papel no processo de corte.

Nesse contexto, o problema de dimensionamento de lotes determina qual o peso dos jumbos produzidos em cada período do horizonte de planejamento. A

largura e o peso máximo do jumbo dependem da máquina em que ele foi produzido. Além disso, diferentes tipos de papéis são produzidos para atender a demanda. Assim, nesse processo, determina-se a quantidade de jumbos produzida de cada gramatura e em cada máquina.

O problema de corte de estoque consiste em determinar a quantidade de jumbos que será cortada em bobinas menores, as quais podem ser cortadas novamente em retângulos, e a forma como será cortada em cada período do horizonte de planejamento a fim de atender a demanda com perda mínima de material.

No processo de corte, os jumbos passam para o setor de rebobinamento, momento em que são cortados em bobinas menores. Essas bobinas menores passam pelo setor de acabamento, quando são embaladas e despachadas ou cortadas em retângulos de vários tamanhos de acordo com a demanda. Note que, cada etapa do processo de corte dos jumbos, pode ser considerada unidimensional com cortes longitudinais ou transversais. Na próxima seção, é apresentado um modelo que integra o problema de dimensionamento de lotes e corte de estoque unidimensional proposto por [Poltroniere et al. \(2008\)](#) para o processo de produção e corte de jumbos na indústrias papeleiras.

3.3 Uma formulação matemática para o problema integrado

[Poltroniere et al. \(2008\)](#) considera um jumbo do tipo de papel k e largura L_s cm representado por um número de bobinas menores (Figura 5), com peso específico ρ_k (kg/cm), para facilitar a formulação do modelo matemático. Assim, se x_s é o número de bobinas menores de largura L_s cm, então o peso do jumbo, T_s , é dado por $T_s = L_s \rho_k x_s$. Além disso, se for cortado um item de largura ℓ_i , ele pesará $\ell_i \rho_k$. Nessa formulação, torna-se importante conhecer o peso de cada item, pois a demanda é dada em função do peso.

A abordagem de [Poltroniere et al. \(2008\)](#) exige que a variável de decisão seja inteira, isto é, a quantidade de bobinas menores que deve ser produzida é inteira. No entanto, quanto menor ρ_k , maior é x_s , com isso, a discretização do jumbo em bobinas menores tende a representar o jumbo de maneira contínua. A seguir, é apresentado o modelo que integra o problema de corte de estoque unidimensional

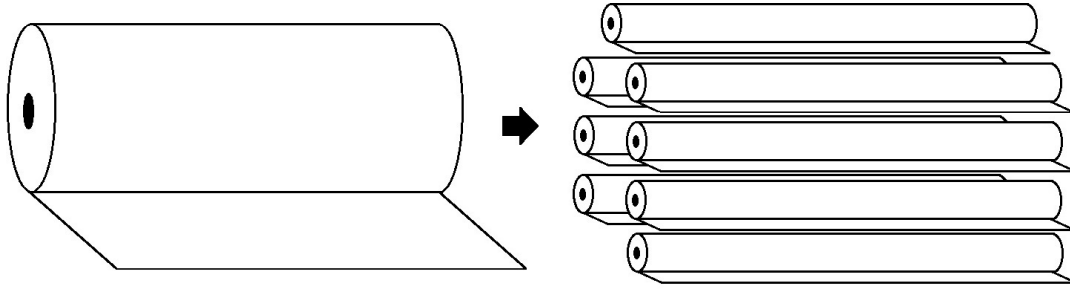


Figura 5 – Representação do jumbo por várias bobinas menores.

e o problema de dimensionamento de lotes no contexto das indústrias papeleiras proposto por [Poltroniere et al. \(2008\)](#). Para simplificar a notação, as bobinas menores que compõem o jumbo serão denotadas apenas por bobinas. Considere os dados a seguir.

Índices:

$t = 1, \dots, T$: número de períodos no horizonte de planejamento;

$k = 1, \dots, K$: número de tipos de papel;

$m = 1, \dots, M$: número de máquinas;

$j = 1, \dots, N_m$: número de padrões de corte para as bobinas do tipo m ;

$i = 1, \dots, N$: número de itens;

$\{1, \dots, N\} = S(1) \cup S(2) \cup \dots \cup S(K)$, sendo $S(k) = \{i, \text{ tal que o item } i \text{ é de gramatura } k\}$.

Parâmetros:

cp_{kt} : custo/cm de perda de papel de tipo k durante o processo de corte no período t ;

σ_{it} : custo/ton de estocagem de itens finais do tipo i no período t ;

h_{kt} : custo/ton de estocar bobinas de tipo k no final do período t ;

- c_{kmt} : custo de produção da bobina de tipo k na máquina m no período t ;
- s_{kmt} : custo de preparação da máquina m para produzir a bobina de tipo k no período t ;
- p_{jm} : perda de papel (por cm) no padrão de corte j usado para cortar uma bobina de largura L_m ;
- $F(k, t)$: perda no processo de corte das bobinas de tipo k no período t ;
- D_{kt} : demanda (ton) de papel de tipo k no período t ;
- b_{km} : peso da bobina de tipo k produzida na máquina m ;
- f_{km} : peso de papel desperdiçado na preparação da máquina m para a produção da bobina de tipo k ;
- η_k : vetor de pesos dos itens finais de papel do tipo k ;
- C_{mt} : capacidade da máquina m no período t ;
- a_{jm} : vetor associado ao padrão de corte j para a bobina de largura L_m . Cada componente a_{ijm} representa o número de itens i , $i \in S(k)$, cortados pelo padrão de corte j na bobina de largura L_m ;
- d_{kt} : vetor da demanda de itens finais de papel de tipo k no período t ;
- Q : número suficientemente grande.

Variáveis:

- x_{kmt} : número de bobinas de tipo k produzidas na máquina m no período t ;
- w_{kmt} : número de bobinas de tipo k produzidas na máquina m estocadas no fim do período t ;
- z_{kmt} : variáveis binárias que indicam a produção ou não da bobina de tipo k na máquina m no período t ;
- y_{kmt}^j : número de bobinas de tipo k produzidas na máquina m no período t cortadas usando o padrão de corte j ;
- e_{kt} : vetor de itens finais de tipo de papel k que são estocados no final do período t .

Logo, o modelo integrado proposto por [Poltroniere et al. \(2008\)](#) é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K (c_{kmt}x_{kmt} + h_{kt}b_{km}w_{kmt} + s_{kmt}z_{kmt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K cp_{kt}F(k, t) \\ & + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{i \in S(k)} \sigma_{it}\eta_{ik}e_{ikt} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{m=1}^M (b_{km}x_{kmt} + b_{km}w_{k,m,t-1} - b_{km}w_{kmt}) = D_{kt}, \quad k = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^K (b_{km}x_{kmt} + f_{km}z_{kmt}) \leq C_{mt}, \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (3.3)$$

$$x_{kmt} \leq Q z_{kmt}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (3.4)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} a_{jm}y_{kmt}^j + e_{k,t-1} - e_{kt} = d_{kt}, \quad k = 1, \dots, K; t = 1, \dots, T \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^{N_m} y_{kmt} = x_{kmt} + w_{k,m,t-1} - w_{kmt}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (3.6)$$

$$w_{km0} = 0, \quad e_{k0} = 0, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M \quad (3.7)$$

$$x_{kmt} \geq 0, \quad w_{kmt} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (3.8)$$

$$z_{kmt} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (3.9)$$

$$y_{kmt}^j \geq 0, \quad e_{kt} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad k = 1, \dots, K; m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T. \quad (3.10)$$

A função objetivo (3.1) é composta por três termos que buscam minimizar os custos associados ao processo de produção e corte das bobinas. O primeiro termo tem como objetivo minimizar os custos de produção e estoque de bobinas e o custo de preparação da máquina. O segundo termo busca minimizar a perda total de material no processo de corte. Tal perda no processo de corte das bobinas de tipo k no período t é dada por $F(k, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} p_{jm} y_{kmt}^j$. O último termo da função objetivo busca minimizar o custo de estocagem dos itens finais.

As restrições (3.2) são de balanceamento de estoque de bobinas, isto é, asseguram que, para cada tipo de papel e em cada período, a quantidade total de papel produzido mais o estoque do período anterior deve ser igual a demanda mais o estoque do período. As restrições (3.3) garantem que, para cada máquina e período do horizonte de planejamento, a quantidade total de papel produzido de todos os tipos de gramatura mais a perda de papel devido a preparação da máquina não exceda a capacidade da máquina naquele período. As restrições (3.4) garantem que $z_{kmt} = 1$ quando $x_{kmt} > 0$ e, no caso que $x_{kmt} = 0$, a otimalidade resulta em $z_{kmt} = 0$, isto é, asseguram que, se houver produção de bobinas do tipo k na máquina m no período t , $z_{kmt} = 1$, caso contrário, $z_{kmt} = 0$.

As restrições (3.5) são de balanceamento de estoque de itens, ou seja, descrevem que, para cada tipo de papel e em cada período, a quantidade total de cada item cortado mais a quantidade de itens estocados no período anterior deve ser igual a demanda de itens mais o estoque de itens do período. As restrições (3.6) são de acoplamento, isto é, associam a produção e o corte das bobinas. Essas restrições garantem que, para cada tipo de papel, máquina e período, a quantidade total de bobinas cortadas e estocadas no período é igual a quantidade de bobinas produzidas mais o estoque do período anterior.

Nas restrições (3.7) é considerado que o estoque inicial de bobinas e itens é nula. Caso o estoque inicial seja diferente de zero, basta abater na demanda dos primeiros períodos até se tornar nulo. As restrições (3.8) e (3.10) são de não

negatividade e integralidade das variáveis do modelo. As restrições (3.9) garantem que as variáveis z_{kmt} sejam binárias.

Observe que o parâmetro que representa a demanda de papel do tipo k no período t (D_{kt}) não é um dado do problema, pois depende da perda que ocorre durante o processo de corte. Esse parâmetro é dado por $D_{kt} = \sum_{i \in S(k)} \eta_{ik} d_{ikt} + perda$, em que $perda$ é uma estimativa Θ para a perda. Porém, D_{kt} pode ser expresso em termos das variáveis que determinam o número de bobinas do tipo k que deve ser cortada no período t , ou seja, $D_{kt} = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} b_{km} y_{kmt}^j$.

Note que o modelo de [Poltroniere et al. \(2008\)](#) abrange o problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade. Quando consideramos perdas na preparação da máquina, esse problema se torna NP-difícil e, devido a dificuldade de resolvê-lo, a maioria dos métodos encontrados na literatura são heurísticos. Por outro lado, o problema de corte envolvido no modelo apresenta outras duas dificuldades, a restrição de integralidade das variáveis y_{kmt}^j e o grande número de variáveis, que é associado à quantidade de padrões de cortes.

4 O modelo integrado proposto

Neste capítulo, é apresentado o modelo proposto na modelagem da produção e corte de papel em indústrias papelerias baseado no modelo de [Poltroniére et al. \(2008\)](#), que considera o custo de preparação da máquina, a capacidade de produção e o contexto em que os jumbos são compostos por apenas uma gramatura de papel.

4.1 Modelo proposto

Em algumas indústrias papelerias, a produção dos itens de cada gramatura de papel é feita separadamente, não ocorrendo mudança na gramatura do papel, durante sua produção, e, conseqüentemente, perda de material, conforme pode ser notado na formulação matemática proposta por [Poltroniére et al. \(2008\)](#), que aborda a produção de bobinas compostas por várias gramaturas distintas. Nessas indústrias, cada bobina de papel produzida tem uma única gramatura e por esta razão, são produzidas diferentes bobinas para cada gramatura.

A quantidade de máquinas presentes nas indústrias que produzem as bobinas pode ser uma ou várias, com especificações próprias para a produção de bobinas de cada gramatura. Com isso, o problema integrado, nesse contexto, pode ser modelado de forma a não considerar a gramatura e ser resolvido para cada gramatura específica, diferentemente do modelo de [Poltroniére et al. \(2008\)](#).

A seguir, apresentamos o modelo proposto que se enquadra no contexto descrito anteriormente. Para isso, considere os seguintes dados e parâmetros.

Índices:

$t = 1, \dots, T$: número de períodos no horizonte de planejamento;

$m = 1, \dots, M$: número de máquinas;

$j = 1, \dots, N_m$: número de padrões de corte para as bobinas do tipo m ;

$i = 1, \dots, N$: número de itens.

Parâmetros:

s_{mt} : custo de preparação da máquina m para produzir a bobina no período t ;

c_{mt} : custo de produção da bobina na máquina m no período t ;

h_t : custo/ton de estocar bobinas no final do período t ;

σ_{it} : custo/ton de estocagem de itens finais do tipo i no período t ;

cp_t : custo/cm de perda de papel durante o processo de corte no período t ;

b_m : peso da bobina produzida na máquina m ;

f_m : peso de papel desperdiçado na preparação da máquina m ;

η : vetor de pesos dos itens finais;

p_{jm} : perda de papel (por cm) no padrão de corte j usado para cortar uma bobina de largura L_m ;

$F(t)$: perda no processo de corte das bobinas no período t ;

D_t : demanda (ton) de papel no período t ;

C_{mt} : capacidade da máquina m no período t ;

a_{jm} : vetor associado ao padrão de corte j para a bobina de largura L_m . Cada componente a_{ijm} representa o número de itens i cortados pelo padrão de corte j na bobina de largura L_m ;

d_t : vetor da demanda de itens finais de papel no período t ;

Q : número suficientemente grande.

Variáveis:

x_{mt} : número de bobinas produzidas na máquina m no período t ;

w_{mt} : número de bobinas produzidas na máquina m estocadas no fim do período t ;

z_{mt} : variáveis binárias que indicam a produção ou não de bobinas na máquina m no período t ;

y_{mt}^j : número de bobinas produzidas na máquina m no período t cortadas usando o padrão de corte j ;

e_t : vetor de itens finais que são estocados no final do período t ;

ϵ_t : variável de folga.

Logo, o modelo integrado com restrições de capacidade de produção e custos de preparação das máquinas proposto é dado por:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M (c_{mt}x_{mt} + h_t b_m w_{mt} + s_{mt}z_{mt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} c_{p_t} p_{j_m} y_{mt}^j + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sigma_{it} \eta_i e_{it} \quad (4.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{m=1}^M (b_m x_{mt} + b_m w_{m,t-1} - b_m w_{mt}) - \epsilon_t = D_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (4.2)$$

$$b_m x_{mt} + f_m z_{mt} \leq C_{mt}, \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (4.3)$$

$$x_{mt} \leq Q z_{mt}, \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (4.4)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} a_{j_m} y_{mt}^j + e_{t-1} - e_t = d_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (4.5)$$

$$\sum_{j=1}^{N_m} y_{mt} = x_{mt} + w_{m,t-1} - w_{mt}, \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (4.6)$$

$$w_{m0} = 0, \quad e_0 = 0, \quad m = 1, \dots, M \quad (4.7)$$

$$x_{mt} \geq 0, \quad w_{mt} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (4.8)$$

$$z_{mt} \in \{0, 1\}, \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (4.9)$$

$$y_{mt}^j \geq 0, \quad e_t \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad m = 1, \dots, M; t = 1, \dots, T \quad (4.10)$$

$$\epsilon_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.11)$$

A função objetivo (4.1) é composta por três termos que buscam minimizar os custos associados ao processo de produção e corte das bobinas. O primeiro termo tem como objetivo minimizar os custos de produção e estoque de bobinas e o custo de preparação das máquinas. O segundo termo busca minimizar a perda total de material no processo de corte. Tal perda no processo de corte das bobinas de tipo k no período t é dada por $F(k, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} p_{jm} y_{kmt}^j$. O último termo da função objetivo busca minimizar o custo de estocagem dos itens finais.

As restrições (4.2) são de balanceamento de estoque de bobinas, isto é, asseguram que, em cada período, a quantidade total de papel produzido mais o estoque do período anterior menos o estoque do período atual deve ser maior ou igual a demanda. A variável de folga ϵ_t foi adicionada ao modelo por problemas de factibilidade, isto é, pela dificuldade de encontrar valores para as demandas de objetos que torne o modelo factível. Um dos fatores que ocasionam essa dificuldade é presença das restrições de acoplamento que relacionam as variáveis do problema de dimensionamento de lotes com as variáveis de corte de estoque, associando, assim, os valores das demandas de itens e de objetos. Além disso, as restrições de capacidade afunilam o conjunto de soluções factíveis, assim como as restrições de integralidade das variáveis. Todos esses fatores dificultam a geração de modelos factíveis. Para o modelo relaxado, não houve problema de factibilização. No entanto, adotamos o modelo (4.1) - (4.11), com a variável de folga, em todas as etapas da resolução do modelo, que serão descritas na Seção 5.3.

As restrições (4.3) garantem que, para cada máquina e período do horizonte de planejamento, a quantidade total de papel produzido não excede a capacidade da máquina naquele período. As restrições (4.4) estão associadas a

variável binária z_{mt} , isto é, $z_{mt} = 1$ quando $x_{mt} > 0$ e, no caso que $x_{mt} = 0$, a otimalidade resulta em $z_{mt} = 0$.

As restrições (4.5) são de balanceamento de estoque de itens, ou seja, descrevem que, em cada período, a quantidade total de cada item cortado mais a quantidade de itens estocados do período anterior deve ser igual a demanda de itens mais o estoque de itens do período. As restrições (4.6) são de acoplamento, isto é, associam a produção e o corte das bobinas. Essas restrições garantem que, para cada máquina e período, a quantidade total de bobinas cortadas e estocadas no período é igual a quantidade de bobinas produzidas mais o estoque do período anterior.

Nas restrições (4.7) é considerado que o estoque inicial de bobinas e itens é nulo. Caso o estoque inicial seja diferente de zero, basta abater na demanda dos primeiros períodos até se tornar nulo. As restrições (4.8) e (4.10) são de não negatividade e integralidade das variáveis do modelo. As restrições (4.9) garantem que as variáveis z_{mt} sejam binárias.

As restrições (4.11) são das variáveis de folga adicionadas às restrições (4.2) e garantem, ao ser não negativas, que a demanda seja atendida.

5 Métodos de solução

Neste capítulo, são descritos algumas técnicas de resolução dos PDL e PCE encontradas na literatura, enfatizando a heurística *relax-and-fix* e o método de geração de colunas, que são utilizados na resolução do modelo apresentado no Capítulo 4, assim como o pacote de otimização CPLEX.

5.1 Heurística *relax-and-fix*

Segundo Karimi, Ghomi e Wilson (2003), pela complexidade dos PDLs, geralmente os métodos utilizados na sua resolução são heurísticos. Tais heurísticas se baseiam em relaxação Lagrangiana, *branch-and-bound*, geração de colunas, caminho mínimo, entre outras técnicas. São geralmente utilizados *softwares* específicos que resolvem problemas de otimização, como o CPLEX, Gurobi, GLPK, XPRESS-MP, COIN-OR, etc.

Uma heurística utilizada em problemas de programação linear inteiro-misto, é conhecida como *relax-and-fix* (POCHET; WOLSEY, 2006). Na literatura, é possível encontrar vários trabalhos que utilizam essa heurística na resolução do problema de dimensionamento de lotes, como Moraes e Santos (2012), Helber e Sahling (2010) e Mercé e Fontan (2003).

A heurística *relax-and-fix* baseia-se em dividir um problema, com variáveis inteiras, em vários subproblemas mais simples. Para isso, o conjunto de variáveis inteiras é dividido em P subconjuntos distintos, Q_i , $i = 1, \dots, P$. O número de iterações da heurística é determinado pelo número de subconjuntos P . Em cada iteração n , as variáveis do conjunto Q_n são definidas como inteiras, as variáveis dos conjuntos Q_i , $i = 1, \dots, n - 1$, são fixadas e as variáveis dos conjuntos Q_i , $i = n + 1, \dots, P$, são relaxadas, e o subproblema é resolvido. Se for infactível, o processo é interrompido, pois não é possível encontrar uma solução para o problema com as variáveis pertencentes aos conjuntos Q_i , $i = 1, \dots, n - 1$ fixadas. Caso contrário, as variáveis do conjunto Q_n , ou parte delas, são fixadas. Então, o processo

se repete, até que todas as variáveis tenham solução inteira (MORAES; SANTOS, 2012).

5.2 Método de geração de colunas

O problema de corte de estoque apresenta dois fatores que o torna de difícil resolução. O primeiro fator é a presença das restrições de integralidade das variáveis, que podem ser relaxadas e, então, o problema pode ser resolvido pelo método simplex desenvolvido por Dantzig em 1947. O segundo fator é a quantidade de variáveis, que aumenta à medida que a quantidade de padrões de corte é maior. O número de possíveis colunas no PCE pode ser muito grande, tornando inviável analisar todas as colunas do problema. No entanto, a cada iteração do método simplex, é preciso analisar as colunas e determinar uma nova coluna para entrar na base.

Para contornar esse problema, Gilmore e Gomory (1961) propuseram uma modificação do método simplex, a qual foi chamada de método de geração de colunas e que consiste em resolver o problema relaxado com apenas um subconjunto de padrões de corte. Para isso, a cada iteração, são gerados padrões de corte que melhorem a solução do problema relaxado, até a obtenção da solução ótima. Para gerar esses padrões de corte, a cada iteração, deve ser resolvido um subproblema.

Considere uma partição básica da matriz A , onde B é a matriz básica da iteração, e π o vetor multiplicador simplex, isto é, $\pi^T = c_B^T B^{-1}$, onde c_B o vetor de custos c_j associado às variáveis básicas. Seja ℓ_i o comprimento do item tipo i , L_m o comprimento do objeto do tipo m , $m = 1, \dots, M$, e N a quantidade de tipos de itens. Considere c_{jm} o custo associado à perda de material ao utilizar o padrão de corte j para cortar o objeto do tipo m , isto é, $c_{jm} = L_m - \sum_{i=1}^N \ell_i a_{ijm}$. Dessa forma, no caso do PCE unidimensional com M tipos de objetos a serem cortados, para cada objeto m , o subproblema é dado por:

$$\text{Minimizar } c_{jm} - \pi^T a_{jm} \quad (5.1)$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{i=1}^N \ell_i a_{ijm} \leq L_m, \quad (5.2)$$

$$a_{ijm} \geq 0 \text{ e inteiros,} \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

A função objetivo (5.1) busca a variável, isto é, o padrão de corte, com o menor custo relativo, garantindo, ao entrar na base do problema, uma melhor solução. As restrições (5.2) e (5.3), que caracterizam o problema da mochila, asseguram que a soma das dimensões dos itens que compõem o padrão de corte não ultrapasse a dimensão do objeto a ser cortado e que as quantidades de itens cortadas sejam não negativas.

Observe que uma coluna da matriz de restrições do modelo (2.7) - (2.10), e consequentemente do subproblema, referente ao padrão j associado ao objeto m é da forma $a_{jm}^T = (a_{1jm}, a_{2jm}, \dots, a_{Njm}, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, com 1 na posição $N + m$, em decorrência das restrições de limitação de estoque. Assim, ao considerar o valor de c_{jm} , a função objetivo (5.1) do subproblema pode ser expressa por:

$$c_{jm} - \pi^T a_{jm} = (L_m - \sum_{i=1}^N \ell_i a_{ijm}) - \sum_{i=1}^N \pi_i a_{ijm} - \pi_{N+m} = L_m - \sum_{i=1}^N (\ell_i + \pi_i) a_{ijm} - \pi_{N+m}$$

Esse procedimento, então, consiste em gerar uma coluna j , isto é, um padrão de corte a_j , procurando a variável com o menor custo relativo. Assim, para cada objeto, tem-se um subproblema, equivalente ao problema da mochila, no caso unidimensional.

A matriz básica inicial do método simplex do problema de corte de estoque pode ser construída com os padrões homogêneos referentes aos diferentes objetos disponíveis em estoque. Padrões homogêneos são padrões de cortes que produzem apenas um tipo de item. Nos casos em que há limitação de estoque de objetos, a solução homogênea inicial pode ser infactível e a fase I do método simplex deve ser realizada.

Note que o método de geração de colunas é utilizado para o PCE com as variáveis relaxadas. Assim, para encontrar uma solução inteira, a partir da solução real, podem ser utilizados métodos heurísticos de arredondamento. Essas heurísticas podem ser encontradas em Stadtler (1990), Wäscher e Gau (1996), Poldi e Arenales (2010), entre outros.

5.3 Metodologia utilizada na resolução do modelo

Para resolver o modelo integrado proposto (4.1) - (4.11), foram implementados, por meio do OPL no CPLEX 12.6.1, o método de geração de colunas e a heurística *relax-and-fix*. Em um primeiro momento, aplicou-se o método de geração de colunas ao modelo com as restrições (4.8)-(4.10), de integralidade das variáveis, relaxadas. Dessa forma, nessa etapa, todas as variáveis inteiras foram consideradas reais positivas e as variáveis binárias consideradas variáveis reais com valores entre 0 e 1. Nessa fase, padrões de corte foram gerados até encontrar uma solução ótima para o problema relaxado.

Para iniciar o método de geração de colunas, foi utilizado um conjunto de padrões homogêneos distinto para cada tipo de objeto. Assim, para cada item i , a quantidade produzida pelo padrão de corte homogêneo j referente ao corte do objeto da máquina m foi determinada por $a_{ijm} = \lfloor L_m/\ell_i \rfloor$, isto é, o maior valor inteiro menor que L_m/ℓ_i .

Em seguida, com os padrões de corte determinados, foi aplicada, ao modelo relaxado, a heurística *relax-and-fix*, com o intuito de obter uma solução para as variáveis binárias, z_{mt} , relacionadas à preparação da máquina. Nessa etapa, o conjunto das variáveis z_{mt} , foi dividido em 4 subconjuntos e, conseqüentemente, o problema integrado relaxado foi subdividido em 4 subproblemas distintos.

A cada iteração, as variáveis z_{mt} de um dos subconjuntos foram determinadas como sendo binárias e as restantes reais, com valores entre 0 e 1. Na iteração seguinte, a solução das variáveis binárias é fixada e novas variáveis, pertencentes a um outro subconjunto, foram consideradas binárias. Dessa maneira, o número de variáveis de cada subconjunto foi de 4, 5 e 6, para os problemas com o número de períodos igual a 8, 10 e 12, respectivamente. Ao final desse passo, obteve-se uma solução para todas as variáveis binárias z_{mt} do modelo.

Finalmente, para encontrar uma solução inteira para as variáveis inteiras do modelo, foi resolvido, por meio do CPLEX, o modelo integrado (4.1) - (4.11) com as variáveis binárias z_{mt} todas fixadas no valor encontrado na etapa anterior e os padrões de corte determinados pela primeira etapa.

Para comparar a qualidade da solução encontrada pela metodologia descrita acima, o modelo integrado (4.1) - (4.11) foi resolvido pelo OPL/CPLEX, com todos os padrões de corte possíveis e o *gap* de tolerância do CPLEX fixado em 10^{-8} , para todos os exemplos da Classe 1 e Classe 2.

6 Estudo computacional

Neste capítulo, são apresentados os testes computacionais realizados por meio do OPL/CPLEX e a análise dos resultados encontrados. Para a realização do estudo computacional, foi utilizado um computador Intel Core i7 com 3.60 GHz e 16 Gbyte de memória.

6.1 Conjunto de dados

O conjunto de dados utilizado foi baseado no trabalho de [Poltroniere et al. \(2008\)](#). No entanto, como o modelo (3.1) - (3.10), de [Poltroniere et al. \(2008\)](#), considera diferentes gramaturas de papel, isto é, apresentam parâmetros para cada gramatura, apenas parte dos dados foram utilizados, sendo os exemplos subdivididos, de acordo com a gramatura. A seguir, são apresentadas as características dos dados.

- Número de itens demandados: $N = 5, 10$ e 20 ;
- Número de períodos: $T = 8, 10$ e 12 .

Com a combinação dessas características, foram geradas 9 classes distintas, com 10 exemplos em cada classe. O número de máquinas em todos os exemplos manteve-se constante, $M = 2$, com a máquina 1 produzindo jumbos de largura $L_1 = 540$ cm e a máquina 2, jumbos de largura $L_2 = 460$ cm, tal como em [Poltroniere et al. \(2008\)](#).

O conjunto de dados utilizados dispõem das seguintes determinações:

- Peso específico das bobinas: $\rho = 2$ kg/cm;
- Peso da bobina produzida na máquina m : $b_m = L_m \rho$;
- Custo de produção da bobina: $c_{mt} \in [0,015 \ 0,025] \cdot b_m$;
- Custo de preparação da máquina: $s_{mt} \in [0,03 \ 0,05] \cdot c_{mt}$;

- Perda de papel na preparação da máquina: $f_m \in [0,01 \text{ } 0,05] \cdot b_m$;
- Custo de estoque das bobinas: $h_t \in [0,0000075 \text{ } 0,0000125]$;
- Custo de estoque dos itens: $\sigma_{it} = 0,5 \cdot h_t$;
- Custo associado à perda de papel no processo de corte: $cp_t = \frac{\sum_{m=1}^M c_{mt}}{M} \cdot 10$;
- Largura dos itens finais: $l_i \in [0,1 \text{ } 0,3] \cdot \frac{\sum_{m=1}^M L_m}{M}$;
- Demanda dos itens: $d_{it} \in [0 \text{ } 300]$. Caso $d_{it} \leq 50$, então $d_{it} = 0$;
- Capacidade da máquina: $C_{mt} = \frac{b_m}{\sum_{m=1}^M b_m} \cdot Cap$, em que $Cap = 1,24 \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M (\frac{D_t}{M} + f_m)}{MT}$.

6.2 Resultados computacionais

A Tabela 1 apresenta o número médio de colunas que foram geradas ao aplicar o método de geração de colunas no modelo (4.1) - (4.11) com as restrições de integralidade das variáveis (4.8)-(4.10) relaxadas.

Tabela 1 – Número médio de colunas geradas ao aplicar o método de geração de colunas.

Classes	T/N	Colunas geradas
1	08/05	8,5
2	08/10	11,4
3	08/20	18,4
4	10/05	7,9
5	10/10	13,0
6	10/20	19,0
7	12/05	8,5
8	12/10	12,7
9	12/20	20,2

O número de colunas geradas, isto é, padrões de corte gerados, em média, variou de 7,9, para problemas com 5 itens e 10 períodos, a 20,2, para

problemas com 20 itens e 12 períodos. É preciso destacar que, nesses dados, não estão inclusos os padrões de corte homogêneos utilizados ao iniciar o método, cuja quantidade é determinada pelo número de itens. Dessa forma, o número total de padrões de corte utilizados na resolução dos problemas, em média, variou de 17,9 a 60,2.

Na Tabela 2, são apresentados os valores médios dos *gaps*, tanto na fase da aplicação da heurística *relax-and-fix* (*Gap* RF) quanto na etapa final, isto é, na resolução dos modelos integrados com as variáveis binárias fixadas (*Gap* final). O *gap* na fase da aplicação da heurística *relax-and-fix* foi calculado a partir da diferença do valor da função objetivo ao final da aplicação da heurística *relax-and-fix* (FH), quando todas as variáveis binárias apresentavam valores inteiros, e do valor da função objetivo do problema relaxado (FR), dividido pelo valor da função objetivo ao final da aplicação da heurística *relax-and-fix*, vezes 100, pois foi calculado em porcentagem, isto é, $\text{Gap RF} = 100 \frac{FH - FR}{FH}$.

O *gap* final, isto é, o *gap* calculado ao final de todas as etapas, foi calculado pela diferença entre o valor da função objetivo final (FF), encontrado após resolver o modelo integrado na etapa final, e o valor da função objetivo do problema relaxado (FR), dividido pelo valor da função objetivo encontrado após resolver o modelo integrado na etapa final, vezes 100, isto é, $\text{Gap final} = 100 \frac{FF - FR}{FF}$.

Tabela 2 – Valores médios dos *gaps*.

Classes	T/N	<i>Gap</i> RF (%)	<i>Gap</i> final (%)
1	08/05	0,00028	0,38475
2	08/10	0,00015	0,19247
3	08/20	0,00007	0,09454
4	10/05	0,00031	0,42569
5	10/10	0,00015	0,20788
6	10/20	0,00007	0,09112
7	12/05	0,00029	0,37636
8	12/10	0,00014	0,19020
9	12/20	0,00007	0,08702
Média		0,00017	0,22778

Note que os valores dos *gaps* na fase da aplicação da heurística *relax-and-fix* foi, em média, 0,00017%, enquanto o valor médio final dos *gaps* foi de

0,22778%. Pode-se notar que os valores médios dos *gaps* diminuem à medida que o número de itens aumenta. Em média, os valores dos *gaps* finais variaram de 0,08702%, para problemas com 12 períodos e 20 itens, a 0,42569%, para problemas com 10 períodos e 5 itens.

Na Tabela 3, encontram-se os tempos computacionais, informados em segundos, gastos ao aplicar o método de geração de colunas no modelo relaxado (Tempo GC), para encontrar uma solução para as variáveis binárias utilizando a heurística *relax-and-fix* (Tempo RF) e o tempo utilizado para resolver o modelo integrado com as variáveis binárias fixadas (Tempo MZF), além do tempo total gasto para concluir todas essas etapas.

Tabela 3 – Tempo computacional médio, em segundos, utilizado na resolução do modelo.

Classes	T/N	Tempo GC	Tempo RF	Tempo MZF	Tempo total
1	08/05	12,172	1,449	0,378	13,999
2	08/10	16,394	1,461	0,416	18,270
3	08/20	30,952	1,518	0,472	32,941
4	10/05	14,486	1,760	0,466	16,711
5	10/10	25,475	1,769	0,483	27,727
6	10/20	43,734	1,835	0,566	46,135
7	12/05	19,631	2,056	0,556	22,244
8	12/10	32,033	2,091	0,611	34,734
9	12/20	62,284	2,173	0,767	65,225
Média		28,573	1,790	0,524	30,887

Note que o tempo médio utilizado na resolução dos problemas foi de 30,887 segundos, sendo a etapa da geração de colunas a que mais demorou para ser finalizada, com tempo médio de 28,573 segundos. As outras etapas obtiveram um tempo computacional bem menor, uma vez que, nessas etapas, os padrões de corte já estavam predeterminados. O tempo médio foi de 1,790 segundos, na etapa da aplicação da heurística *relax-and-fix*, e 0,524 segundos, na resolução do modelo integrado com as variáveis binárias fixadas.

O tempo total, em média, gasto na resolução dos exemplos variou de 13,999 segundos, para problemas com 8 períodos e 5 itens, a 65,225 segundos, para problemas com 12 períodos e 20 itens.

As variáveis de folga ϵ_t , adicionadas às restrições (4.2) para solucionar a infactibilidade do modelo (4.1) - (4.11), foram nulas nas etapas em que as restrições de integralidade das variáveis apresentavam-se relaxadas ou parcialmente relaxadas, ou seja, nas etapas de aplicação do método de geração de colunas e da heurística *relax-and-fix*. Dessa forma, ela se fez necessária somente na etapa final, para encontrar uma solução inteira para o modelo integrado proposto, pois, caso contrário, os exemplos eram infactíveis.

A Tabela 4 apresenta os valores encontrados para as funções objetivos dos exemplos da Classe 1. Nela, são apresentados os valores da função objetivo ótima do modelo relaxado (FO relaxado), da solução encontrada a partir da metodologia apresentada na Seção 5.3 (FO inteiro) e da solução inteira ótima encontrada pelo CPLEX com todos os padrões de corte definidos (FO ótima). Também, na Tabela 4, encontram-se os valores encontrados para o *gap* referente a solução encontrada a partir da metodologia apresentada na Seção 5.3 (*Gap* final) e referente a resolução do modelo com todos os padrões de corte (*Gap* ótimo).

Tabela 4 – Valores da função objetivo e dos *gaps* encontrados para os exemplos da Classe 1.

Ex.	FO relaxado	FO inteiro	FO ótima	<i>Gap</i> final (%)	<i>Gap</i> ótimo (%)
1	35724,8	35918,8	35918,6	0,5401	0,5396
2	52348,3	52536,2	52536,2	0,3577	0,3577
3	64576,4	64747,1	64747,1	0,2636	0,2636
4	34777,2	34891,9	34891,9	0,3287	0,3287
5	53971,8	54184,2	54184	0,3920	0,3916
6	65415,1	65609,8	65609,8	0,2968	0,2968
7	39878,0	40018,4	40018,4	0,3508	0,3508
8	57389,4	57550,5	57548,7	0,2799	0,2768
9	48948,0	49164,1	49163,6	0,4395	0,4385
10	28394,6	28565,5	28565,5	0,5983	0,5983
			Média	0,3847	0,3842

Note que os valores encontrados para os modelos, gerando todos os padrões de corte, foram bem próximos dos valores encontrados utilizando o método de geração de colunas e a heurística *relax-and-fix*, uma vez que o valor do *gap* ótimo foi, em média, 0,3842%, enquanto do *gap* final foi 0,3847%. Além disso, para a

Classe 1, a metodologia adotada para resolver o modelo encontrou a solução ótima em 6, dos 10 exemplos.

Os exemplos da Classe 1 apresentam 5 itens distintos. Para o objeto 1, o número total de padrões de corte possíveis variou de 118 a 784, com uma média de 332,4. Para o objeto 2, a quantidade variou de 64 a 439, com uma média de 182,5 padrões de corte.

A Tabela 5 apresenta os valores encontrados para as funções objetivos e os *gaps* dos exemplos da Classe 2, assim como apresentado para a Classe 1.

Tabela 5 – Valores da função objetivo e dos *gaps* encontrados para os exemplos da Classe 2.

Ex.	FO relaxado	FO inteiro	FO ótima	Gap final (%)	Gap ótimo (%)
1	74687,1	74872,1	74872,1	0,2471	0,2471
2	81998,4	82177,9	82177,9	0,2184	0,2184
3	82238,8	82376,9	82376,9	0,1676	0,1676
4	96800,7	96987,8	96984,6	0,1929	0,1896
5	69545,2	69695,0	69694,7	0,2149	0,2145
6	90287,9	90414,5	90414,5	0,1400	0,1400
7	100627,0	100806,0	100797	0,1776	0,1687
8	110658,0	110846,0	110846	0,1696	0,1696
9	101315,0	101499,0	101499	0,1813	0,1813
10	79096,4	79267,0	79267	0,2152	0,2152
			Média	0,1925	0,1912

A metodologia utilizada na solução dos modelos, por meio do método de geração de colunas, da heurística *relax-and-fix* e do CPLEX, conseguiu encontrar o resultado ótimo para 7 dos 10 exemplos da Classe 2. Além disso, o *gap* final foi bastante próximo do *gap* ótimo, com uma diferença de 0,0013%.

Para o objeto 1, o número de padrões de corte dos exemplos da Classe 2, que apresentam 10 itens distintos, variou de 3553 a 9251, com uma média de 5581,5. Para o objeto 2, a quantidade variou de 1488 a 3672, sendo a média de 2277,8 padrões de cortes distintos.

A Tabela 6 apresenta os tempos computacionais (em segundos) utilizados na resolução dos exemplos das Classes 1 e 2, ao aplicar a metodologia apresentada na Seção 5.3 (Tempo total 1 e 2) e também por meio da resolução do modelo pelo

CPLEX com todos os padrões de corte definidos (Tempo ótimo 1 e 2). Assim, os tempos identificados como 1 são referentes aos exemplos da Classe 1 e os identificados como 2, referentes aos exemplos da Classe 2.

Tabela 6 – Tempo computacional, em segundos, utilizado na resolução dos exemplos das Classes 1 e 2.

Ex.	Tempo total 1	Tempo ótimo 1	Tempo total 2	Tempo ótimo 2
1	18,531	0,594	19,469	15,453
2	11,547	0,469	15,500	8,906
3	8,688	0,485	22,766	10,594
4	15,344	0,500	15,454	22,656
5	14,454	0,437	19,609	6,109
6	12,969	0,422	13,593	9,485
7	14,344	0,469	12,703	6,703
8	14,500	0,468	21,719	6,969
9	12,860	0,516	22,796	19,484
10	16,750	0,641	19,094	17,532
Média	13,9987	0,5001	18,2703	12,3891

Para os exemplos da Classe 1, o CPLEX utilizou um tempo menor em relação à metodologia utilizada na resolução do modelo, para todos os exemplos, com uma média de 0,5 segundos, enquanto o tempo total gasto aplicando a metodologia apresentada na Seção 5.3 foi de 13 segundos. Para os exemplos da Classe 2, a diferença entre o tempo total e o tempo ótimo foi menor, no entanto, a resolução dos exemplos pelo CPLEX ainda continuou, em média, mais rápida, apesar da metodologia apresentada na Seção 5.3 ter resolvido o exemplo 4 em um menor tempo.

Para a Classe 3, que contém exemplos com 20 itens distintos, foram gerados todos os padrões de cortes, que variaram de 55761 a 186311, para o objeto 1, com uma média de 119521,8, e variaram de 15976 a 49210, para o objeto 2, com uma média de 32394,3 padrões de corte. Para esses exemplos, o CPLEX não conseguiu achar solução utilizando todos os padrões de corte, uma vez que o número de padrões de corte era muito grande e a memória do CPLEX não conseguiu armazenar tais problemas.

7 Considerações finais

Neste trabalho, propusemos um modelo integrado para o problema de dimensionamento de lotes e corte de estoque no processo industrial de produção de papel, baseado em [Poltroniere et al. \(2008\)](#), que considera o custo de preparação da máquina e a capacidade de produção. Para resolver o modelo, aplicamos o método de geração de colunas ao modelo relaxado. Em seguida, utilizamos a heurística *relax-and-fix* para encontrar uma solução para as variáveis binárias do problema. Finalmente, o modelo foi resolvido com os padrões de corte predeterminados e as variáveis binárias fixadas, por meio do pacote de otimização CPLEX. Para analisar a metodologia utilizada na resolução do modelo, testes computacionais foram realizados para 9 classes, com 10 exemplos cada e com número de períodos variando de 8 a 10 e de itens variando de 5 a 20.

Os resultados mostraram que, utilizando a metodologia adotada, é possível resolver o modelo obtendo bons *gaps*, em um tempo computacional pequeno, uma vez que o maior tempo gasto para resolver os modelos foi de 65,225 segundos e os *gaps* foram, em média, menores que 0,42569%. A etapa que mais demorou para ser concluída foi a de geração de colunas, devido ao número de iterações e também ao número de subproblemas que é resolvido à cada iteração.

Consideramos que cada objeto possui gramatura diferente, isto é, para cada gramatura, é possível resolver o modelo integrado proposto com parâmetros distintos, específicos àquela gramatura. Logo, em um processo industrial que envolve a produção e corte de objetos de diferentes gramaturas, o modelo integrado deverá ser resolvido especificamente para cada gramatura.

Uma proposta para trabalho futuro é resolver o modelo (4.1) - (4.11) encontrando uma solução inteira por meio de alguma heurística de arredondamento, ao invés do CPLEX. Outra proposta de continuidade deste trabalho é estender o modelo para considerar múltiplas plantas, isto é, a produção de papel em fábricas de diferentes localidades. Sugerimos também estudar as vantagens de produzir bobinas de um único tipo de gramatura, por meio da comparação das soluções

do modelo de [Poltroniere et al. \(2008\)](#) com as do modelo que propomos para as diferentes gramaturas. Também é possível analisar o desempenho do modelo de [Poltroniere et al. \(2008\)](#), que trata a produção e corte de bobinas de todos os tipos de gramaturas mutuamente, e o modelo que propomos, que deve ser resolvido para cada gramatura separadamente, analisando as possíveis vantagens e desvantagens nos desempenhos dos modelos.

Referências

- ALEM JUNIOR, D. J. *Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- BAHL, H. C.; RITZMAN, L. P.; GUPTA, J. N. D. Determining lot sizes and resources requirements: a review. *Operations Research*, v. 35, p. 329–348, 1987.
- BITRAN, G. R.; YANASSE, H. H. Computational complexity of the capacitated lot size problem. *Management Science*, v. 28, n. 10, p. 1174–1186, 1982.
- CORREIA, M. H.; OLIVEIRA, J. F.; FERREIRA, S. Reel and sheet cutting at a paper mill. *Computers e Operations Research*, v. 31, p. 1223–1243, 2004.
- CPLEX 12.6.1. Users manual and reference manual. *ILOG S.A.*, 2014.
- DREXL, A.; KIMMS, A. Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, v. 99, p. 221–235, 1997.
- DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 44, p. 145–159, 1990.
- FARLEY, A. A. Mathematical programming models for cutting-stock problems in the clothing industry. *The Journal of the Operational Research Society*, v. 39, n. 1, p. 41–53, 1988.
- FURINI, F.; MALAGUTI, E.; DURÁN, R. M.; PERSIANI, A.; TOTH, P. A column generation heuristic for the two-dimensional two-staged guillotine cutting stock problem with multiple stock size. *European Journal of Operational Research*, v. 218, p. 251–260, 2012.
- GHIDINI, C. T. L. da S. *Otimização de processos acoplados: programação de produção e corte de estoque*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, v. 9, n. 6, p. 849–859, 1961.
- _____. A linear programming approach to the cutting stock problem-part II. *Operations Research*, v. 11, n. 6, p. 863–888, 1963.

GRAMANI, M. C. N.; FRANÇA, P. M. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research*, v. 174, p. 509–521, 2006.

GRAMANI, M. C. N.; FRANÇA, P. M.; ARENALES, M. N. A lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. *International Journal of Production Economics*, v. 119, p. 219–227, 2009.

_____. A linear optimization approach to the combined production planning model. *Journal of the Franklin Institute*, v. 348, p. 1523–1536, 2011.

HELBER, S.; SAHLING, F. A fix-and-optimize approach for the multi-level capacitated lot sizing problem. *International Journal Production Economics*, v. 123, p. 247–256, 2010.

HENDRY, L. C.; FOK, K. K.; SHEK, K. W. A cutting stock and scheduling problem in the copper industry. *Journal of the Operational Research Society*, v. 47, p. 38–47, 1996.

JANS, R.; DEGRAEVE, Z. Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, v. 46, n. 6, p. 1619–1643, 2008.

KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Science*, v. 6, n. 4, p. 366–422, 1960.

KARIMI, B.; GHOMI, S. M. T. F.; WILSON, J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *The International Journal of Management Science*, v. 31, p. 365–378, 2003.

LEÃO, A. A. S. *Extensões em problemas de corte: padrões compartimentados e problemas acoplados*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.

LONGHI, A. L. *Modelos Matemáticos para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque Undimensional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2013.

LU, H.-C.; HUANG, Y.-H. An efficient genetic algorithm with a corner space algorithm for a cutting stock problem in the tft-lcd industry. *European Journal of Operational Research*, v. 246, p. 51–66, 2015.

MELEGA, G. M.; ARAUJO, S. A.; JANS, R. Comparison of mip models for the integrated lot-sizing and one-dimensional cutting stock problem. *Pesquisa Operacional*, v. 36, p. 167–196, 2016.

- MERCÉ, C.; FONTAN, G. Mip-based heuristics for capacitated lotsizing problems. *Int. J. Production Economics*, v. 85, p. 97–111, 2003.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. N.; YANASSE, H. H. Special issue on cutting, packing and related problems. *International Transactions in Operations Research*, v. 16, n. 6, p. 659, 2009.
- MORAES, L. C. C.; SANTOS, M. O. Heurísticas relax-and-fix para o problemas de dimensionamento de lotes com janelas de tempos de produção. In: *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2012. p. 3575–3585.
- NONAS, S. L.; THORSTENSON, A. A combined cutting-stock and lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, v. 120, p. 327–342, 2000.
- OLIVEIRA, J. F.; WÄSCHER, G. Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1106–1108, 2007.
- POCHET, Y.; WOLSEY, L. A. *Production Planning by Mixed Integer Programming*. New York: Springer, 2006.
- POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. *Pesquisa Operacional*, v. 30, p. 153–174, 2010.
- POLTRONIERE, S. C.; ARAUJO, S. A.; POLDI, K. C. Optimization of an integrated lot sizing and cutting stock problem in the paper industry. (Aceito na revista TEMA), 2016.
- POLTRONIERE, S. C.; POLDI, K. C.; TOLEDO, F. M. B.; ARENALES, M. N. A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, v. 157, p. 91–104, 2008.
- RAMYA, R.; RAJENDRAN, C.; ZIEGLER, H. Capacitated lot-sizing problem with production carry-over and set-up splitting: mathematical models. *International Journal of Production Research*, v. 54, n. 8, p. 2332–2344, 2016.
- SILVA, E.; ALVELOS, F.; VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Integrating two-dimensional cutting stock and lot-sizing problems. *Journal of the Operational Research Society*, v. 65, p. 108–123, 2014.
- STADTLER, H. A one-dimensional cutting stock in the aluminium industry and its solution. *European Journal of Operational Research*, v. 44, p. 209–223, 1990.
- TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, L. J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, v. 35, n. 3, p. 353–366, 1989.

VALÉRIO DE CARVALHO, J. M. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Anal. of Operations Research*, v. 86, p. 629–659, 1999.

_____. LP models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 144, p. 253–273, 2002.

WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, v. 5, n. 1, p. 89–96, 1958.

WANG, P. Y.; WÄSCHER, G. Editorial on cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 239–240, 2002.

WÄSCHER, G.; GAU, T. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study. *OR Spektrum*, v. 18, p. 131–144, 1996.

WÄSCHER, G.; HAUBNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, p. 1109–1130, 2007.