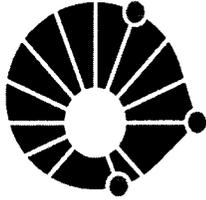


Michael Macedo Diniz

**Abordagem Fuzzy do Teorema de
Poincaré-Bendixson**

Campinas
2012



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC
Departamento de Matemática Aplicada



Michael Macedo Diniz

Abordagem Fuzzy do Teorema de Poincaré-Bendixson

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Rodney Carlos Bassanezi

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida por Michael Macedo Diniz e orientado pelo Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi


Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Campinas, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Diniz, Michael Macedo, 1987-
D615a Abordagem fuzzy do teorema de Poincaré-Bendixson / Michael
Macedo Diniz. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Rodney Carlos Bassanezi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Lógica fuzzy. 2. Sistemas dinâmicos fuzzy. 3. Sistemas
P-fuzzy. 4. Poincaré-Bendixson, Teorema de. I. Bassanezi,
Rodney Carlos, 1943-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Fuzzy approach of the Poincaré-Bendixson theorem

Palavras-chave em inglês:

Fuzzy logic

Fuzzy dynamics systems

P-fuzzy systems

Poincaré-Bendixson theorem

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Rodney Carlos Bassanezi [Orientador]

Rosana Sueli da Motta Jafelice

Weldon Alexander Lodwick

Data de defesa: 27-04-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de abril de 2012 e aprovada

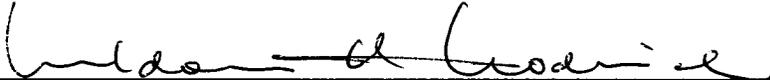
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI



Prof.(a). Dr(a). ROSANA SUELI DA MOTTA JAFELICE



Prof.(a). Dr(a). WELDON ALEXANDER LODWICK

Agradecimentos

A Deus por me dar o dom da vida, por iluminar meus pensamentos e principalmente por me dar forças e coragem nos momentos mais difíceis.

Ao meu Orientador e amigo Professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi por acreditar no meu potencial, por dividir comigo o seu conhecimento, pelas oportunidades e principalmente pela amizade estabelecida.

Aos meus pais Gibaldo Diniz e Maria das Dores Macedo Diniz pelo amor, formação moral, dedicação e apoio que me deram durante toda a vida e principalmente durante o período de mestrado.

Aos meus amigos do IMECC que participaram de todo o processo de execução desse trabalho, em especial ao Pedro, Júnior, Luiz Fernando, Luciana Takata e Ana Camila. Sem eles tudo seria mais difícil.

A minha namorada Ariane Zeller, pelo apoio, carinho, incentivo e paciência.

Aos meus amigos do grupo Fidaha pelo incentivo e companherismo, principalmente ao Filipe Augusto, meu parceiro de Crisma e amigo para todas as horas.

Por fim, ao CNPQ pelo financiamento do mestrado.

Resumo

Nesta dissertação temos como objetivo principal, o estudo do Teorema de Poincaré-Bendixson em sistemas dinâmicos que utilizam a teoria dos conjuntos fuzzy para incorporar à estes, incertezas inerentes no processo de modelagem. Para isso, abordaremos os sistemas dinâmicos fuzzy através de duas vertentes. Primeiramente estudaremos o Teorema de Poincaré-Bendixson em sistemas de EDOs cuja condição inicial é fuzzy, estes sistemas são obtidos através da extensão de Zadeh aplicada à solução de uma equação diferencial. Nestes modelos consideremos apenas a condição inicial como sendo fuzzy. Como resultado, proporemos um teorema que sob certas condições, garante a existência de uma região de atração para o fluxo fuzzy. No último capítulo, trabalharemos com sistemas P-fuzzy contínuo. Inicialmente, apresentaremos condições suficientes para que um sistema P-fuzzy contínuo tenha solução única, dada uma condição inicial. Para sistemas que satisfazem essas condições, será enunciado o Teorema de Poincaré-Bendixson, que garantirá sob certas hipóteses, a convergência de uma solução de um sistema P-fuzzy para uma órbita periódica.

Palavras chave: Teorema de Poincaré-Bendixson, Órbitas periódicas, Princípio de Extensão de Zadeh, Sistemas P-fuzzy.

Abstract

In this work, we have as a main goal, the study of the Poincaré-Bendixson Theorem in dynamic systems that uses fuzzy set theory to incorporate uncertainties in the modeling process. To do this, we treat the fuzzy dynamic systems in two different contexts. In the first one, we study the Poincaré-Bendixson theorem for systems of ODEs whose initial condition is fuzzy. These systems are obtained by Zadeh's extension applied to the solution of a differential equation. For these models, we consider only the initial condition as being fuzzy. Moreover, we propose a theorem that guarantees the existence of a region of attraction for the fuzzy flow under certain conditions. In the last chapter, we will work with P-fuzzy continuous systems. Initially, we present sufficient conditions for a fuzzy P-continuous system which ensure the uniqueness of the solution, given an initial condition. For systems that satisfy those conditions, we state the Poincaré-Bendixson theorem, with additional hypotheses that guarantee the convergence of a solution of a P-fuzzy system for a periodic orbit.

Key words: Poincaré-Bendixson Theorem, periodic orbits, Extension Principle of Zadeh, P-Fuzzy Systems.

Sumário

1	Sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas	5
1.1	Introdução	6
1.2	Conceitos preliminares	6
1.2.1	Sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas	7
1.2.2	Equações diferenciais ordinárias lineares	8
1.2.3	Plano de fase	11
1.2.4	Pontos de equilíbrio	13
1.2.5	Estabilidade e linearização	14
1.3	Órbitas periódicas	22
1.4	Resultados importantes	25
1.5	Conclusão	26
2	Teorema de Poincaré-Bendixson	29
2.1	Introdução	29
2.2	Teorema de Poincaré-Bendixson	30
2.2.1	Conceitos preliminares	31
2.2.2	Resultados preliminares à demonstração do Teorema	36
2.2.3	Demonstração do teorema	39

2.3	Critérios de existência de ciclos limites	40
2.4	Exemplos	43
2.4.1	Modelo de Lotka-Volterra	43
2.4.2	Modelo de Holling-Tanner	45
2.4.3	Modelo geral de Volterra	47
2.5	Conclusão	49
3	Teoria fuzzy	51
3.1	Introdução	52
3.2	Conjuntos fuzzy	52
3.2.1	Subconjuntos fuzzy	53
3.2.2	α - nível e suas propriedades	56
3.2.3	O subespaço $\mathcal{E}(X)$	57
3.2.4	Extensão de Zadeh	59
3.2.5	Extensão do fluxo determinístico	63
3.3	Sistemas P-fuzzy	66
3.3.1	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	66
3.3.2	Modelos unidimensionais P-fuzzy	69
3.3.3	Pontos de equilíbrio para sistemas P-fuzzy	74
3.3.4	Sistemas P-fuzzy bidimensionais	78
3.3.5	Conjunto viável de equilíbrio para sistemas bidimensionais	80
3.4	Conclusão	82
4	Teorema de Poincaré-Bendixson em espaços métricos fuzzy	84
4.1	Introdução	85

4.2	Órbitas periódicas em espaços métricos fuzzy	85
4.2.1	Resultados preliminares quanto às órbitas periódicas fuzzy	89
4.3	Teorema de Poincaré-Bendixson	92
4.3.1	Teoremas equivalentes	99
4.3.2	Modelo de Holling-Tanner	102
4.3.3	Modelo de Gause	106
4.4	Conclusão	109
5	Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy contínuos	112
5.1	Introdução	112
5.1.1	Revisitando os sistemas P-fuzzy	114
5.2	Existência e unicidade para Sistemas P-fuzzy contínuos	114
5.2.1	Existência e unicidade para sistemas unidimensionais	115
5.2.2	Existência e unicidade para sistemas P-fuzzy bidimensionais	127
5.3	Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy	136
5.4	Exemplos de aplicações	139
5.4.1	Modelo logístico unidimensional	140
5.4.2	Modelo P-fuzzy para presa-predador	143
5.5	Conclusão	147
	Conclusão	150
	Referências Bibliográficas	152

Introdução

Os fenômenos da natureza e os problemas da realidade muitas vezes influenciaram e motivaram os matemáticos a criarem novas teorias para explicá-los ou resolvê-los. Nesta dissertação abordaremos dois tópicos aparentemente distintos, mas que se cruzam quando o assunto é a razão pela qual foram criados: a modelagem matemática. Basicamente, trataremos de parte da análise qualitativa de EDO, desenvolvida por Poincaré, e de tópicos fundamentais da Lógica Fuzzy proposta por Zadeh. Especificamente, discutiremos o Teorema de Poincaré-Bendixson em sistemas de EDO que utilizam a teoria fuzzy para agregar as incertezas provenientes das informações utilizadas durante a modelagem.

Em meados do século XIX, o Rei Oscar II, da Suécia e Noruega, desafiou os matemáticos e físicos da época a apresentar uma prova matemática da estabilidade (ou não) do sistema solar. Depois de 3 anos, em 1889, em sua festa de 60 anos, o Rei Oscar II entregou um prêmio ao vencedor do desafio, o matemático francês J.H. Poincaré (1854 - 1912). Apesar de ganhar o prêmio, Poincaré resolveu apenas parte do problema, no entanto, durante seus estudos, ele desenvolveu um texto com quase 300 páginas, no qual demonstrou diversos teoremas relacionados à análise comportamental das soluções de sistemas de equações diferenciais não lineares. Diferentemente de seus contemporâneos, Poincaré deixou de procurar formas analíticas de soluções e se dedicou ao estudo das propriedades qualitativas das soluções, utilizando para isso ferramentas topológicas e geométricas.

Ao longo da carreira, Poincaré desenvolveu diversas ferramentas voltadas à análise qualitativa de soluções de sistemas de equações diferenciais. Um dos seus temas de interesse, era as soluções periódicas e o estudo de sua estabilidade. Uma de suas grandes contribuições nesse escopo é o Teorema de Poincaré-Bendixson que será o tema principal desta dissertação. O Teorema de Poincaré-Bendixson foi publicado pela primeira vez em 1892, por Henri Poincaré em "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*",

Oeuvres 1, Paris, numa versão mais fraca da que conhecemos hoje. Em 1901, o matemático suéco Ivar Otto Bendixson, publicou em "*Sur les courbes définies par des équations différentielles*", *Acta Mathematica (Springer Netherlands)*, uma prova mais rigorosa e completa do Teorema. [31]

Quase 80 anos depois, em 1965, um engenheiro do Azerbaijão, chamado Lofti Askar Zadeh, sentiu a necessidade de incorporar aos seus sistemas de controle, as incertezas inerentes nas informações utilizadas em seus modelos. Sua dedicação à este problema, resultou em um artigo chamado "Information and Control". Neste artigo, Zadeh sugere que as funções de pertinência dos conjuntos possam tomar valores reais entre zero e um, de modo que, cada elemento do universo teria um certo grau de pertinência à um determinado subconjunto do universo. Conjuntos com tal função de pertinência foram denotados por conjuntos fuzzy, dando início assim, à teoria dos conjuntos fuzzy e à lógica fuzzy, que atualmente possui diversas frentes de pesquisa e inúmeras aplicações, principalmente na área de engenharia.

Numa primeira impressão, não conseguimos perceber uma relação entre a teoria proposta por Poincaré e a teoria proposta por Zadeh, entretanto, o próprio Poincaré, certa vez observou que existem sistemas dinâmicos em que minúsculas incertezas na condição inicial afetam drasticamente uma previsão para uma escala de tempo longa, isso significa, que o próprio Poincaré já sentia necessidade de incorporar aos seus modelos, as incertezas que ele possui, já que estas poderiam acarretar alterações significativas no mesmo. Nesta dissertação, verificaremos o comportamento do Teorema de Poincaré-Bendixson, quando aplicado à sistemas dinâmicos que utilizam a teoria fuzzy para agregar as incertezas existentes nos processos de modelagem.

Sendo assim, neste trabalho temos dois objetivos principais, o primeiro é propor um teorema que garanta a existência de uma região de atração para uma órbita periódica em espaços métricos fuzzy. Este estudo será baseado na extensão de Zadeh aplicada à soluções de EDO, isto é, trataremos de soluções que possuem condição inicial fuzzy. O segundo objetivo é obter condições suficientes que garantam a existência de soluções periódicas em sistemas P-fuzzy. Mostraremos primeiramente como deve ser construído um sistema P-fuzzy que tenha solução única para qualquer condição inicial dada e posteriormente apresentaremos uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para tais sistemas. Todos os resultados propostos serão ilustrados através de modelos conhecidos na biomatemática.

É importante ressaltarmos que o estudo relacionado aos sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy está baseado na Tese de doutorado [9]. Nesta tese, o autor propõe uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para espaços métricos fuzzy, entretanto, nesta versão as hipóteses que garantem a existência de ciclos limites fuzzy são mais restritas, enquanto que o teorema que propomos nesta dissertação é mais abrangente e contempla casos mais gerais. Já o estudo relacionados aos sistemas P-fuzzy será baseado na Tese de doutorado [29]. Nesta tese, o autor desenvolve uma série de estudos relacionados à estabilidade de sistemas P-fuzzy, sendo que em nosso texto, utilizaremos estes resultados para garantir a existência e unicidade de soluções de sistemas P-fuzzy e para propor uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para estes sistemas. Para alcançarmos estes objetivos iremos dividir nosso trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 1 iremos apresentar os principais conceitos da análise qualitativa de EDO que serão fundamentais para embasarmos os argumentos apresentados na dissertação. Entre os conceitos abordados estão a definição e análise de estabilidade de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas e o Teorema da Linearização. Por fim, apresentaremos alguns resultados que serão importantes para a demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson.

No Capítulo 2 apresentaremos o Teorema de Poincaré-Bendixson para o caso clássico e sua demonstração, além disso, serão definidos e demonstrados alguns critérios que garantem a não existência de órbitas periódicas em determinados sistemas autônomos bidimensionais. Por fim, utilizaremos alguns modelos da biomatemática, nos quais é possível aplicar o Teorema de Poincaré-Bendixson para exemplificar a aplicação do mesmo.

No Capítulo 3 iremos introduzir os fundamentos da Teoria de conjuntos fuzzy, além disso, discutiremos algumas definições e resultados da análise qualitativa de sistemas de equações diferenciais para espaços métricos fuzzy, basendo-se em [9]. Por fim, apresentaremos os modelos P-fuzzy e alguns resultados relacionados a estes modelos baseando-se em [29]. Estes três primeiros capítulos, são dedicados a conceitos que serão uteis no embasamento da teoria que iremos apresentar nos próximos dois últimos capítulos.

No Capítulo 4, estudaremos detalhadamente alguns dos resultados obtidos em [9] quanto à soluções periódicas em sistemas dinâmicos cuja condição inicial é fuzzy. Como consequência, iremos propor uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para tais sistemas, garantindo sob certas condições a existência de uma região onde todas as solu-

ções fuzzy iniciadas lá irão convergir para uma órbita periódica ou serão a própria órbita. Por fim, para exemplificar este resultado, iremos utilizar o modelo de Holling-Tanner e o modelo de Gause.

Por fim, no Capítulo 5, proporemos uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy. Para isso, iniciamos o capítulo estudando condições suficientes para garantir que exista solução para determinados sistemas P-fuzzy, dado um ponto inicial qualquer e que esta solução seja única. Para sistemas P-fuzzy que satisfazem as condições de existência e unicidade das soluções, apresentamos uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson, garantindo sob certas condições o comportamento periódico de algumas soluções. Por fim, ilustraremos os conceitos desenvolvidos neste capítulo através de dois modelos P-fuzzy aplicados à Biologia.

Capítulo 1

Sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas

Quando modelamos um fenômeno ou um experimento qualquer, é muito comum obtermos equações que envolvam as “variações” das quantidades (variáveis) presentes e consideradas essenciais. Desta forma, as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações. Quando estas variações são instantâneas, o fenômeno se desenvolve continuamente e as equações matemáticas são denominadas *equações diferenciais* [5].

Os sistemas dinâmicos surgiram com a necessidade de compreender fenômenos que evoluem com o tempo, seguindo regras rígidas pré estabelecidas. Os modelos variacionais, formulados por meio de equações diferenciais ou de diferenças, tornaram-se ferramentas essenciais para o conhecimento e previsão de muitas situações, especialmente de caráter físico ou biológico [8].

O surgimento da modelagem através de equações diferenciais é contemporâneo ao desenvolvimento do cálculo diferencial, portanto, já existe uma vasta gama de teoria relacionada ao estudo e compreensão de tais modelos, como por exemplo, a análise de estabilidade, ciclos limites, etc. Apresentaremos neste capítulo uma pequena, porém importante, fração da teoria já existente sobre o assunto. Tal apresentação é necessária para compreendermos o Teorema de Poincaré-Bendixson e para evidenciar os resultados que apresentaremos posteriormente envolvendo teoria fuzzy.

1.1 Introdução

Segundo [5], não existem métodos sistemáticos que possam resolver qualquer sistema de equações diferenciais de primeira ordem, entretanto, em boa parte das aplicações reais não é necessário conhecer expressões analíticas para as soluções dos sistemas, basta apenas conhecer algumas de suas propriedades. Para conhecer tais propriedades é necessário fazer um estudo qualitativo das soluções, isto é, entender o comportamento das soluções, principalmente quando o tempo tende ao infinito, sem a necessidade de apresentar a expressão analítica da mesma. Como podemos encontrar em [6], a teoria qualitativa de equações diferenciais foi criada por Henri Poincaré(1854-1912), descrita em diversos artigos importantes entre 1880 e 1886.

Neste capítulo apresentaremos os conceitos preliminares sobre sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas, tais conceitos serão necessários para entendermos com clareza o Teorema de Poincaré-Bendixson. Este teorema é um resultado importante da teoria qualitativa, mais especificamente no escopo das soluções periódicas e conjuntos atratores.

O capítulo 1 foi dividido da seguinte forma: na seção 1.2 mostraremos alguns conceitos preliminares e importantes da teoria básica de equações diferenciais ordinárias, na seção 1.3 faremos uma análise qualitativa dos sistemas de equações diferenciais autônomos, abordando especificamente o conceito de plano de fase, ponto de equilíbrio, estabilidade e linearização. Na seção 1.4 abordaremos as principais definições e resultados da teoria de órbitas periódicas e ciclos limites em sistemas autônomos. Por fim, na seção 1.5, apresentaremos alguns resultados importantes da teoria de equações diferenciais autônomas que serão utilizados nos capítulos subsequentes.

1.2 Conceitos preliminares

Como já dissemos, nem sempre é possível obter uma solução analítica para as equações diferenciais ordinárias, porém é interessante compreender algumas características qualitativas dessas soluções, sendo assim, nessa seção iremos introduzir os conceitos fundamentais para a compreensão dos sistemas EDO's autônomas. Mais especificamente, trabalharemos no plano, isto é, com sistemas de EDO's bidimensionais, lembrando que o

Teorema de Poincaré-Bendixson é válido apenas para esse caso.

1.2.1 Sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas

Em Biomatemática nos deparamos com diversos fenômenos cuja variação não depende do tempo. Podemos citar por exemplo a dinâmica populacional entre duas espécies, o comportamento de uma doença contagiosa em uma determinada população, entre outros. A variação em tais fenômenos, depende unicamente dos valores das variáveis de estado. Normalmente, estes fenômenos são modelados através de sistemas de equações diferenciais autônomas. Podemos definir estes sistemas da seguinte forma:

Definição 1.1. *Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

é denominado sistema dinâmico autônomo pois as funções f_i não dependem explicitamente do tempo t . As variáveis x_1, x_2, \dots, x_n são as variáveis de estado do sistema.

Resumidamente podemos escrevê-lo na forma 1.1

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Como colocamos na introdução, trabalharemos basicamente com o caso bidimensional e para facilitar a notação e a descrição de futuros resultados, descreveremos um sistema bidimensional de EDO's autônomas, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

Resolver uma equação diferencial ordinária é encontrar a família de funções $\varphi_t(x, y)$ tais que sua função derivada (vetor velocidade) $\varphi_t'(x, y)$ coincida com as equações do sistema 1.2 para todos valores de t .

Pela unicidade com relação à condição inicial, a solução $\varphi_t(x_0)$ da equação autônoma 1.2 define uma aplicação φ que, para cada par $(t, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times U$, sendo $(U \subset \mathbb{R}^2)$, associa o valor $\varphi_t(x_0)$, ou seja:

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times U \rightarrow U \tag{1.3}$$

$$(t, x_0) \rightarrow \varphi_t(x_0) \tag{1.4}$$

Para todo $x_0 \in U$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$, a aplicação φ assim definida satisfaz as seguintes propriedades:

$$\varphi_0(x_0) = x_0 \tag{1.5}$$

$$\varphi_t(\varphi_s(x_0)) = \varphi_{t+s}(x_0), \tag{1.6}$$

Por esta razão, a família de aplicações $\varphi_t : U \rightarrow U, t \in \mathbb{R}_+$, é frequentemente denominada na literatura como *semifluxo* ou *sistema dinâmico* gerado pela equação autônoma. As equações autônomas também possuem outras importantes propriedades e resultados que serão abordados na próxima subseção.

1.2.2 Equações diferenciais ordinárias lineares

Primeiramente, estudaremos sistemas de EDOs lineares, pois através de um processo de linearização que será apresentado posteriormente, podemos estudar um sistema não linear analisando um sistema linear equivalente, tal equivalência é válida apenas numa vizinhança de um determinado ponto dado. Em resumo, podemos fazer conclusões qualitativas locais sobre o sistema não linear a partir de uma análise de seu sistema linear associado.

Existem vários modelos em biomatemática associados à sistemas de EDOs autônomas, no entanto, para entendermos melhor os resultados de sistemas multivariados, apresentemos primeiramente um dos exemplos mais simples no âmbito da biomatemática, o modelo

de *Malthus*, cuja equação é:

$$\frac{dx}{dt} = Kx \quad (1.7)$$

Através de uma simples integração chegamos a seguinte solução:

$$x(t) = x_0 e^{Kt} \quad (1.8)$$

onde, x_0 é o valor de $x(t)$ quando $t = 0$

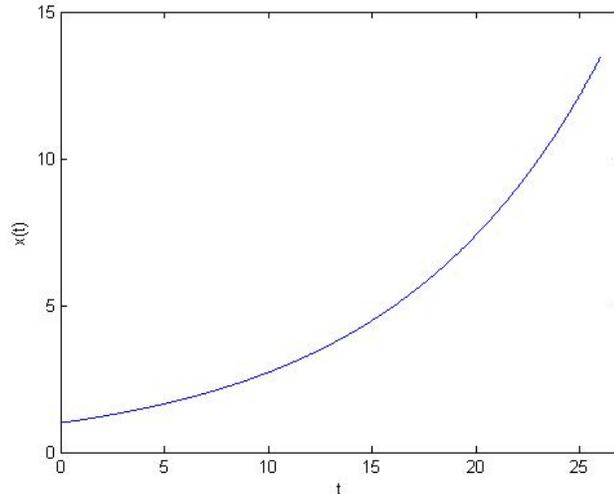


Figura 1.2-1. Gráfico do modelo de Malthus.

A Figura 1.2-1 representa o gráfico da solução do modelo de Malthus para $K = 0.1$ e condição inicial $x_0 = 1$.

Os estudos desta dissertação serão direcionados para teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, no entanto, para entendermos a teoria qualitativa é necessário que conheçamos algumas características das soluções analíticas.

Primeiramente, para um sistema linear com duas EDOs de primeira ordem, vamos utilizar a seguinte representação:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1.9)$$

Podemos escrever o sistema (1.9) com a seguinte notação vetorial:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (1.10)$$

no qual

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Fazendo uma analogia com a solução do modelo (1.7), vamos assumir a princípio que a solução do sistema (1.10) é

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}, \quad (1.11)$$

no qual o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ e a constante $\lambda \in \mathbb{R}$ são desconhecidos. Considerando que o vetor \mathbf{v} possui entradas independentes do tempo, podemos calcular a derivada da equação 1.11 da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \mathbf{v} \lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t}$$

A última igualdade tem que ser satisfeita para que (1.11) seja solução do sistema (1.10), sendo assim, cancelando o fator $e^{\lambda t}$ podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (1.12)$$

Observamos que \mathbf{v} e λ são, respectivamente, autovetor e autovalor de \mathbf{A} . Portanto, podemos escrever a solução do sistema bidimensional de EDO autônomas como a combinação linear de duas soluções linearmente independentes.

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (1.13)$$

Nos quais λ_1 e λ_2 são os autovalores de \mathbf{A} e v_1 e v_2 são seus respectivos autovetores.

Notamos por (1.13) que o sinal dos autovalores serão determinantes para sabermos como será o comportamento assintótico da solução. Por isso o valor desse parâmetro é fundamental para a classificação de pontos de equilíbrio quanto a estabilidade.

Além da possibilidade de obtermos uma expressão geral para solução de sistemas lineares autônomos, uma outra característica fundamental desses sistemas é que a variação em questão é independente do tempo, ou seja, depende apenas dos valores tomados pela própria variável. Esta característica permite que façamos uma representação mais eficiente e condensada do sistema estudado, tal representação será o tema da próxima subseção.

1.2.3 Plano de fase

Como faremos um estudo qualitativo das equações diferenciais, recorreremos frequentemente à geometria para obtenção de resultados. Especialmente em sistemas autônomos definidos em \mathbb{R}^2 , existe uma representação gráfica das soluções que é essencial para a compreensão do comportamento das soluções, o chamado *plano de fase*.

Em EDOs bidimensionais, uma solução deveria ser representada graficamente em \mathbb{R}^3 , entretanto, como já mostramos, em EDOs autônomas o valor da derivada é independente do tempo, sendo assim, tal característica permite que façamos uma representação gráfica da solução suprimindo o eixo do tempo.

Para exemplificar esta afirmação, suponhamos o seguinte sistema de EDOs autônomas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad (1.14)$$

Utilizando a teoria apresentada na subseção anterior, podemos chegar à seguinte ex-

pressão geral da solução:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(t) + y_0 \sin(t) \\ y(t) = y_0 \cos(t) - x_0 \sin(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

nos quais x_0 e y_0 são as condições iniciais. Vale lembrar que neste caso, os autovalores da matriz \mathbf{A} são complexos e por isso foi possível utilizar a relação de Euler: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ para reescrever a solução (1.15).

Para viabilizar a notação dos capítulos posteriores, representaremos a solução por $\varphi_t(x_0, y_0)$, onde $\varphi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, com x_0 e y_0 fixos. A representação gráfica da função φ_t é uma curva em \mathbb{R}^3 , como podemos verificar na Figura 1.2-2. Nesta mesma figura podemos verificar que a derivada das funções $x(t)$ e $y(t)$ são constantes ao longo do tempo, isto é, fixando valores para $x(t)$ e $y(t)$, a derivada sobre a curva φ_t não varia ao longo do tempo. Sendo assim, fazendo uma projeção da solução no plano x vs y , podemos ainda entender o comportamento qualitativo da solução, como mostra a Figura 1.2-3.

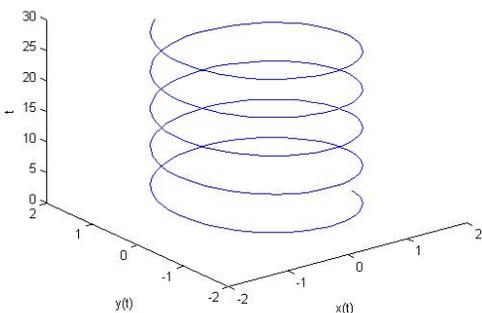


Figura 1.2-2. Curva da hélice no espaço

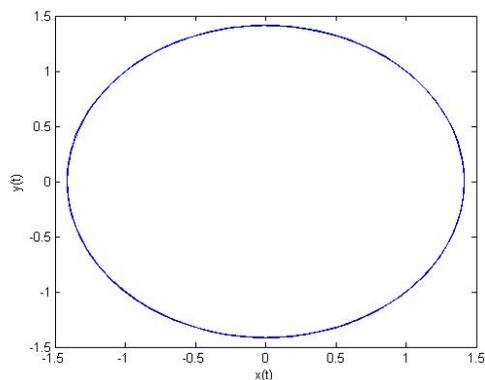


Figura 1.2-3. Projeção da hélice no plano

O plano no qual projetamos a solução é conhecido como *plano de fase* ou *retrato de fase*. Esta representação será muito utilizada neste trabalho, já que o Teorema de Poincaré-Bendixson é válido apenas para sistemas bidimensionais autônomos, os quais podem ser representados em planos de fase. No plano de fase também é possível representar o campo vetorial de qualquer sistemas bidimensional autônomo. A Figura 1.2-4 mostra um campo vetorial, onde cada seta indica a direção da solução naquele ponto. Podemos perceber nesta mesma figura, que existe um ponto central $(0,0)$ de onde todas as setas

“saem”, isso indica que esse ponto é instável (ou repulsor), conceito que apresentaremos na próxima subseção.

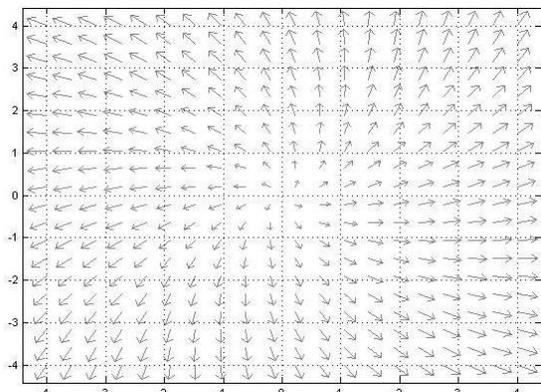


Figura 1.2-4. Campo de direções

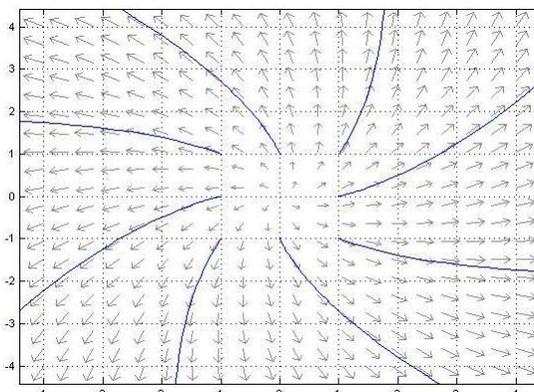


Figura 1.2-5. Campo de direções com solução

Na Figura 1.2-5 é possível verificar algumas soluções deste campo de direções. Observamos que essas soluções seguem as direções das setas.

1.2.4 Pontos de equilíbrio

Um ponto de equilíbrio (x_*, y_*) é aquele no qual as funções têm variação nula, ou seja, as igualdades de (1.16) são satisfeitas.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x_*, y_*) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = G(x_*, y_*) = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Em particular, num sistema linear como (1.10), podemos obter os pontos de equilíbrio resolvendo a seguinte equação:

$$\mathbf{Ax} = 0 \quad (1.17)$$

Para sistemas lineares como (1.17), se a matriz \mathbf{A} for não singular, o único ponto de equilíbrio é o vetor nulo, $(0,0)$ no caso bidimensional). Quando a matriz \mathbf{A} é de posto

incompleto, existem infinitas soluções para o sistema (1.17), sendo o vetor nulo uma delas. Equivalentemente, se a matriz A for de posto incompleto, podemos dizer que as equações não são linearmente independentes.

Nem sempre o sistema oriundo de (1.2) é linear, por isso, pode não existir uma forma analítica de se encontrar os pontos de equilíbrio. Para estes casos é possível aplicar o método numérico de Newton (ou similares) e encontrar esses pontos. De acordo com [27], se (x_*, y_*) é um ponto crítico do sistema (1.2), então as funções constantes

$$x(t) = x_* \quad y(t) = y_* \quad (1.18)$$

satisfazem as equações em (1.1). Uma tal solução constante é chamada de *solução de equilíbrio* do sistema. Note que a trajetória da solução de equilíbrio no plano de fase consiste apenas no ponto (x_*, y_*) . Ainda conforme [27], em algumas situações práticas, estas soluções e trajetórias muito simples são as de maior interesse, já que na realidade podem representar uma situação de equilíbrio, por exemplo de um ecossistema.

Na próxima subseção classificaremos estes pontos quanto ao tipo de estabilidade, além disso, apresentaremos o processo de linearização, que exerce papel importante na análise qualitativa de sistema dinâmicos.

1.2.5 Estabilidade e linearização

Os pontos de equilíbrios definidos anteriormente podem ser classificados de acordo com o comportamento da solução numa vizinhança desse ponto. Tais classificações são necessárias pois em situações reais, sempre existe algum tipo de perturbação (ou incerteza) nos parâmetros ou condição inicial, portanto, é interessante determinar se essas perturbações, quando ocorrem próximas a um ponto de equilíbrio, conduzem a drásticas mudanças na solução ou são irrelevantes. Para esse estudo podemos classificar os pontos de equilíbrio como sendo estáveis, instáveis ou assintoticamente estáveis.

Segundo [27], um ponto de equilíbrio (x_*, y_*) do sistema autônomo (1.2) é dito *estável* desde que, se o ponto inicial (x_0, y_0) está suficientemente próximo de (x_*, y_*) para todo $t > 0$. A Figura 1.2-6 mostra o plano de fase de um sistema que possui um ponto de

equilíbrio estável. Neste caso a órbita não se afasta do ponto e também não é atraída por ele, ou seja, se mantém a uma distância constante do ponto.

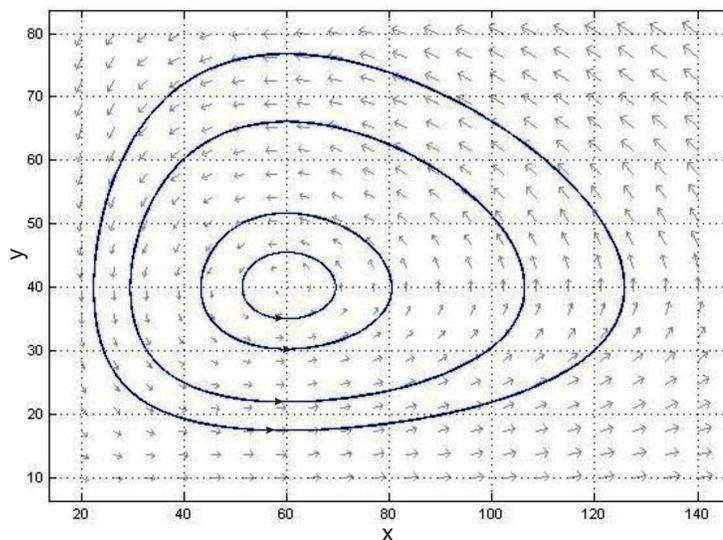


Figura 1.2-6. Órbitas do modelo de Lotka-Volterra.

Ainda segundo [27] dizemos que um ponto é instável quando ele não é estável, isto significa que, ao redor deste ponto o campo de direções se afasta do mesmo, a figura 1.2-5 mostra um campo de direções de um sistema que possui um ponto instável. O ponto crítico (x_*, y_*) é chamado de *assintoticamente estável* se é estável e, mais ainda, toda trajetória que começa suficientemente próxima de (x_*, y_*) também se aproxima de (x_*, y_*) quando $t \rightarrow +\infty$. A Figura 1.2-7 representa bem essa situação.

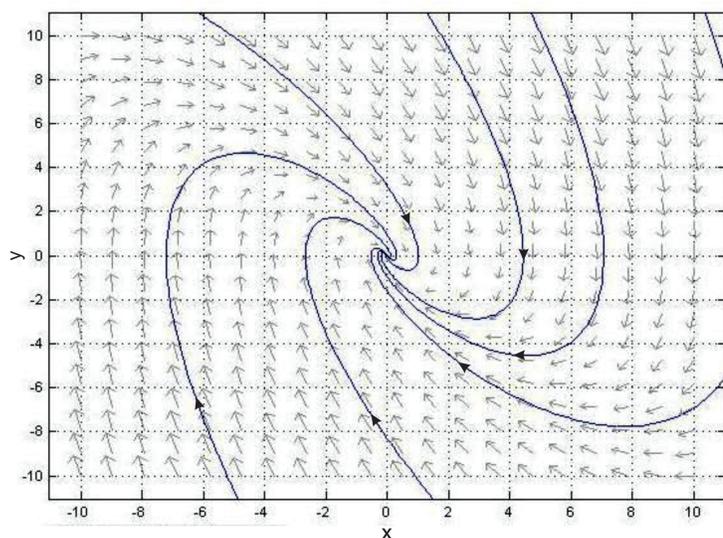


Figura 1.2-7. Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Visualizando os campo de direções de um sistema é possível visualizar o comportamento do campo

O próximo teorema retirado de [27], é uma ferramenta para a classificação dos pontos de equilíbrio quanto a sua estabilidade.

Teorema 1.1. *Sejam λ_1 e λ_2 as raízes da equação característica*

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (1.19)$$

do sistema linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (1.20)$$

com $ab - bc \neq 0$. Então o ponto crítico $(0,0)$ é

1. assintoticamente estável, se as partes reais de λ_1 e λ_2 são ambas negativas;
2. estável, mas não assintoticamente estável, se as partes reais de λ_1 e λ_2 são ambas zero (de modo que λ_1, λ_2 são complexos puros)
3. instável, se λ_1 ou λ_2 tem parte real positiva.

É importante notar que λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz dos coeficientes do sistema 1.20. Temos como hipótese que a matriz dos coeficientes não é singular, pois o determinante $ab - bc \neq 0$, logo o único ponto crítico é $(0,0)$.

Neste caso a solução geral é dada por $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t}$ e portanto, pelo primeiro item do Teorema 1.1, para que a solução seja assintoticamente estável as partes reais de λ_1 e λ_2 devem ser negativas, de fato, considerando $\lambda_1 = -k_1$ e $\lambda_2 = -k_2$ ambos reais, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1\mathbf{v}_1e^{-k_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{-k_2 t}) = 0 \quad (1.21)$$

Caso, $\lambda_1 = -k_1 + mi$ e $\lambda_2 = -k_1 - mi$, com $m \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}_+$ temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 \mathbf{v}_1 e^{(-k_1+mi)t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{(-k_1-mi)t}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 \mathbf{v}_1 e^{-k_1 t} e^{mit} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{-k_1 t} e^{-mit}) = 0 \quad (1.22)$$

A última igualdade de (1.22) justifica-se pois o termo $e^{mit} = \cos(mt) + i \sin(mt)$ é limitado e $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-k_1 t} = 0$, portanto $\lim_{t \rightarrow \infty} c_1 \mathbf{v}_1 e^{-k_1 t} e^{mit} = 0$.

O segundo item do Teorema 1.1 diz que o ponto é estável, mas não assintoticamente estável se $\lambda_1 = mi$ e $\lambda_2 = -mi$, ou seja, as raízes do polinômio característico são complexos puros. Deste modo a solução fica sendo:

$$x(t) = (c_1 \mathbf{v}_1 e^{mit} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{-mit}). \quad (1.23)$$

Utilizando a relação de Euler $e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$, percebemos que solução $x(t)$ é periódica, isto significa que no plano de fase a solução fica “girando” em torno do ponto de equilíbrio, sem se afastar ou se aproximar.

Por fim, o último item do Teorema (1.1) pode ser justificado já que, considerando $\lambda_1 = -k_1 + mi$ e $\lambda_2 = -k_1 - mi$, com $a, m \in \mathbb{R}$, se k_1 for positivo, o limite de (1.21) e (1.22) será ∞ , ou seja, a solução irá se afastar do ponto de equilíbrio.

O Teorema 1.1 funciona como um método para classificar pontos de equilíbrio em sistemas lineares, no entanto, a maioria dos sistemas que trabalharemos não são lineares, para classificar pontos de equilíbrio desses sistemas existe o chamado método de linearização, onde aproximamos um sistema não linear por um sistema linear, essa aproximação é local, ou seja, é válida apenas numa vizinhança de um determinado ponto. Para isso, vamos considerar um sistema de equações diferenciais ordinárias escrita da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (1.24)$$

onde F e G são funções não lineares. Nós assumimos que x_* e y_* são as soluções de equilíbrio, isto é, elas satisfazem

$$F(x_*, y_*) = G(x_*, y_*) = 0$$

Agora, consideremos uma solução próxima à solução de equilíbrio, descrita da seguinte forma:

$$X(t) = x_* + x(t)$$

$$Y(t) = x_* + y(t)$$

Substituindo essa solução em (1.24)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x_* + x) = F(x_* + x, x_* + y) \\ \frac{d}{dt}(x_* + y) = G(x_* + x, x_* + y) \end{cases} \quad (1.25)$$

No lado esquerdo do sistema (1.25), usamos a igualdade entre a derivada da soma e a soma das derivadas, lembrando que por definição $\frac{dx_*}{dt} = 0$ e $\frac{dy_*}{dt} = 0$. No lado direito, nós expandimos F e G em Série de Taylor em torno do ponto x_*, y_* , o que gera o seguinte resultado.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x_*, y_*) + F_x(x_*, y_*)x + F_y(x_*, y_*)y + \text{termos da ordem de } x^2, y^2, xy \text{ e maiores} \\ \frac{dy}{dt} &= G(x_*, y_*) + G_x(x_*, y_*)x + G_y(x_*, y_*)y + \text{termos da ordem de } x^2, y^2, xy \text{ e maiores} \end{aligned}$$

Mais uma vez, por definição $\frac{dx_*}{dt} = 0$ e $\frac{dy_*}{dt} = 0$, portanto, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (1.26)$$

Onde a matriz dos coeficientes

$$\mathbf{J}(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_*, y_*)}$$

é o Jacobiano do sistema (1.24) nos pontos (x_*, y_*) . Portanto, podemos estudar o comportamento qualitativo da solução próximo a um ponto de equilíbrio através de um sistema linear equivalente, este resultado é conhecido como Teorema da Linearização e será exemplificado à seguir.

Exemplo 1.1. *O modelo de Holling-Tanner é muito utilizado na biomatemática e será um exemplo muito importante para essa dissertação, porém, iremos descreve-lo melhor no próximo capítulo. Basicamente, este modelo é descrito pelo seguinte sistema de equações autônomas:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{x+d} \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{\beta y}{x}\right) \end{cases} \quad x > 0 \quad (1.27)$$

De acordo com [7], as variáveis $x(t)$ e $y(t)$ denotam a presa e o predador, respectivamente. Os parâmetros r e a são as razões de crescimento intrínscas. O valor k é a capacidade suporte da presa e γx toma o papel de uma capacidade suporte presa-dependente para o predador. O parâmetro $\gamma = \frac{1}{\beta}$ é uma medida da qualidade da presa como alimento para o predador. A razão na qual o predador remove a presa, $\frac{qx}{x+d}$ é

conhecida como uma resposta do predador Holling tipo 2. O parametro q é o número máximo de presas que podem ser comidas por predador por tempo e o parâmetro d é um valor de saturação; este valor corresponde ao número de presas necessárias para alcançar a metade da razão máxima q .

Para viabilizar o exemplo, escreveremos um modelo particular, isto é, atribuiremos valor para os parâmetros desconhecidos. Sendo assim, o modelo que trabalharemos será:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{200}\right) - \frac{30,625xy}{x+10} \\ \frac{dy}{dt} = 0,3y \left(1 - \frac{22,142y}{x}\right) \end{cases} \quad x > 0 \quad (1.28)$$

Primeiramente, calcularemos os pontos de equilíbrio, para isso devemos calcular os valores de x e y que satisfaçam as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{200}\right) - \frac{30,625xy}{x+10} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0,3y \left(1 - \frac{22,142y}{x}\right) = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Fazendo as devidas manipulações no sistema (1.29), percebemos que o ponto de equilíbrio é dado pela raiz positiva do polinômio:

$$-0,22142x^2 + 11,4448x + 442,84 = 0 \quad (1.30)$$

e pela relação

$$y_* = \frac{x_*}{22,142} \quad (1.31)$$

Obtemos como resultado o ponto $(77.4960, 3.5)$. Portanto, neste ponto o sistema não varia. Se observarmos o sistema (1.28) percebemos que os pontos $(0, 0)$ e $(k, 0)$ são pontos também pontos de equilíbrio, entretanto não vamos analisa-los pois os mesmos não possuem significado biológico relevante.

Observe que o sistema (1.29) é não linear e portanto, nem sempre conseguiremos encontrar analiticamente os pontos que satisfaçam o sistema.

Após obtermos os pontos de equilíbrio, trabalharemos agora na análise de estabilidade dos mesmos, para isso deveremos primeiramente calcular o Jacobiano do modelo em questão.

$$\mathbf{J}(77.4960, 3.5) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{x}{50} - \frac{306.25y}{(x+10)^2} & -\frac{30.625}{x+10} \\ \frac{6.6426y^2}{x^2} & 0.3(1 - \frac{44.284y}{x}) \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Substituindo os valores do ponto de equilíbrio no sistema acima, obtemos a seguinte matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(77.4960, 3.5) = \begin{pmatrix} 0.3100 & -0.3500 \\ 0.0135 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

A matriz 1.33 representa a matriz Jacobiana em torno do ponto de equilíbrio, portanto essa matriz pode ser vista como a matriz dos coeficientes de um sistema linear localmente equivalente ao sistema original. De acordo com o Teorema 1.1, devemos calcular os autovalores da matriz Jacobiana, o que é equivalente à calcular as raízes do polinômio característico

$$\lambda^2 - 0.31\lambda + 0.004725 = 0 \quad (1.34)$$

Calculando as raízes obtemos os seguintes valores

$$\lambda_1 = 0,2939 \quad \lambda_2 = 0.0161$$

Portanto, pelo item 1 do Teorema 1.1 o ponto de equilíbrio $(77.4960, 3.5)$ é instável,

pois ambas as raízes do polinômio característico são reais positivas.

Na figura 1.2-8 plotamos o campo de direções no plano de fase e uma solução cujo ponto inicial é $(90,3.6)$, note que trajetória se afasta do ponto de equilíbrio.

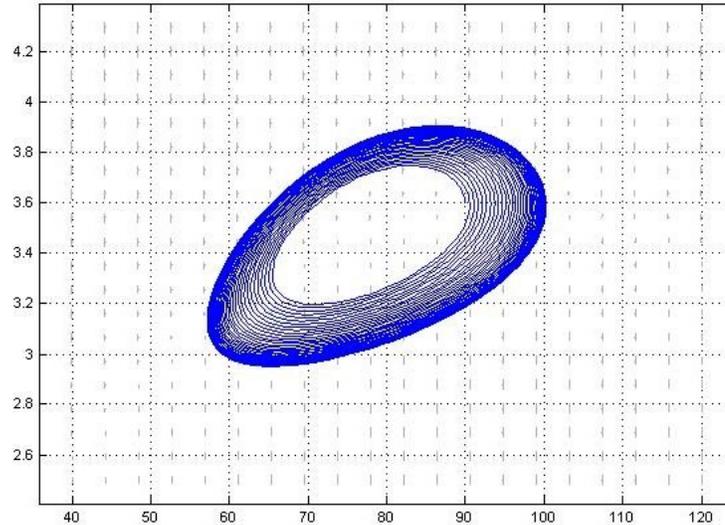


Figura 1.2-8. Ponto de equilíbrio - Modelo de Holling-Tanner

Notamos também que a solução converge para uma determinada região, isto é, apesar dela localmente se afastar do ponto de equilíbrio, ela continua limitada e é atraída para uma órbita periódica, tal fenômeno é a grande excênica do Teorema de Poincaré Bendixson.

1.3 Órbitas periódicas

Nesta seção apresentaremos os conceitos básicos sobre órbitas periódicas, mais especificamente: definição, propriedades e classificação. Tais conceitos serão importantes ferramentas para futuras análises que ocorrerão nos próximos capítulos, tanto no âmbito da teoria clássica, como no âmbito da teoria fuzzy.

Trajetoórias como as apresentadas anteriormente podem possuir algumas propriedades de periodicidade no plano de fase, isto é, uma trajetória que passa por um determinado ponto, poderá retornar a este ponto depois de um certo tempo, este tempo é chamado de período e o ponto será chamado de *ponto periódico*. Segundo [9] um ponto periódico pode ser definido da seguinte forma:

Definição 1.2. Dizemos que $p \in U$ é um ponto periódico de período τ , ou ainda, um ponto τ -periódico, para o fluxo φ_t , quando existe $\tau > 0$ tal que $\varphi_\tau(p) = p$ e $\varphi_t(p) \neq p$ para todo $t < \tau$.

Lembremos que $U \subset \mathbb{R}^2$ é o domínio do sistema autônomo. Como consequência da definição e das propriedades 1.3 e 1.5 sobre sistemas dinâmicos, podemos observar algumas propriedades importantes sobre a periodicidade. Seja a trajetória γ τ -periódica e $y = \varphi_s(p)$, $s < \tau$, então:

$$\varphi_\tau(y) = \varphi_\tau(\varphi_s(p)) = \varphi_{\tau+s}(p) = \varphi_{s+\tau}(p) = \varphi_s(\varphi_\tau(p)) = \varphi_s(p) = y. \quad (1.35)$$

Se tomarmos agora $t > \tau$, podemos decompor $t = n\tau + s$, com $0 \leq s < \tau$ e $n \in \mathbb{N}$, e assim temos

$$\varphi_t(p) = \varphi_{n\tau+s}(p) = \varphi_s(\varphi_{n\tau}(p)) = \varphi_s(p) \quad (1.36)$$

e portanto, y também é um ponto τ -periódico.

Notamos que se uma solução possui um ponto periódico então todos os pontos da solução também serão periódicos. Sendo assim, soluções que possuem pontos periódicos são chamadas de soluções periódicas e a órbita $\gamma(p)$ de um ponto periódico é denominada órbita periódica. A definição de órbita periódica pode ser feita da seguinte forma segundo [11].

Definição 1.3. Dizemos que uma trajetória $\varphi_t : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de f é uma trajetória periódica do campo f se a trajetória não é singular e existem $t_1, t_2 \in I$ tais que $t_1 \neq t_2$ e $\varphi_{(t_1)} = \varphi_{(t_2)}$

em outras palavras, uma trajetória é periódica se o caminho que a define não é constante nem injetor.

Afim de exemplificar as definições anteriores, tomemos o sistema (1.14) como exemplo. Podemos verificar por (1.15) que as soluções são circunferências de raio $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ no plano de fase e período 2π . Portanto, se tomarmos como condição inicial $x_0 = 3$ e $y_0 = 4$, as soluções podem ser escritas como

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) + 4\sin(t) \\ y(t) = 4\cos(t) - 3\sin(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

Projetando a trajetória no plano de fase (Figura 1.3-9) verificamos que a solução é realmente periódica. Portanto, se tomarmos qualquer ponto da trajetória, ou seja, qualquer ponto sobre a circunferência de raio 5, então este ponto será um ponto periódico.

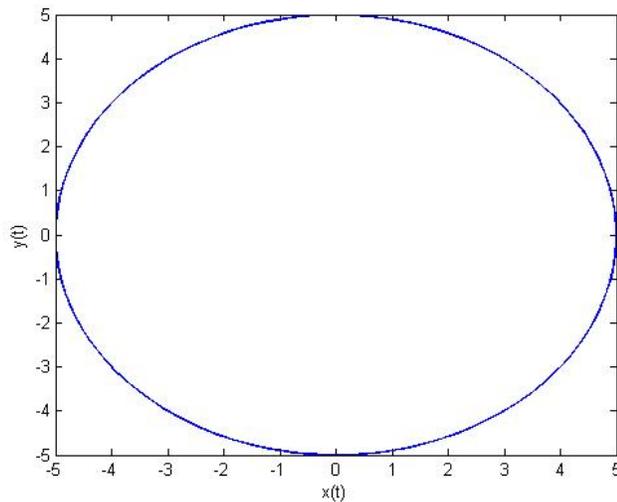


Figura 1.3-9. Órbita periódica

Assim como acontece com os pontos de equilíbrio, as trajetórias periódicas também podem ser classificadas de acordo com suas características de atração ou repulsão. Esta definição é descrita da seguinte forma, como podemos ver em [9]:

Definição 1.4. *Uma órbita periódica $\gamma \subset U$ é estável quando para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(x_0, \gamma) < \delta$, então $\text{dist}(\varphi_t(x_0), \gamma) < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. A órbita é assintoticamente estável quando é estável e existe $r > 0$ tal que $\text{dist}(x_0, \gamma) < r$ implica que $\text{dist}(\varphi_t(x_0), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

dizemos que a órbita é *instável* quando não é estável.

De uma forma intuitiva, uma órbita periódica é estável quando ela não repulsa outras órbitas numa certa vizinhança, isto é, se uma solução se mantém suficientemente próxima da órbita periódica para todo $t > 0$ ela é estável. Em particular, quando essa proximidade tende a 0, dizemos que a órbita periódica é assintoticamente estável.

No exemplo 1.1 podemos perceber que a solução se distancia do ponto de equilíbrio e se aproxima de uma órbita periódica, ver figura 1.2-8, portanto podemos classificar essa órbita periódica como assintoticamente estável.

É possível encontrar sistemas que possuam órbitas semi-estáveis, isto é, são órbitas periódicas que atraem as outras órbitas apenas internamente ou externamente.

Vale lembrar que a distância usada na definição acima é a distância entre ponto e conjunto induzida pela norma em \mathbb{R}^n , isto é, dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e um subconjunto não vazio A

$$dist(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|. \quad (1.38)$$

Usualmente não utilizamos a definição para classificar uma órbita, pois nem sempre conseguimos obter uma expressão analítica para a curva da solução, deste modo, uma estratégia comumente utilizada é mudança de coordenadas, de cartesianas para polar. Tal processo será exemplificado no capítulo 5.

Enfim, todas as definições e propriedades apresentadas anteriormente serão utilizadas para embasar futuros resultados apresentados. Os primeiros desses resultados serão descritos na próxima seção.

1.4 Resultados importantes

Para finalizar este capítulo, apresentaremos alguns resultados importantes acerca das órbitas periódicas em sistemas dinâmicos determinísticos. Segundo [9], os resultados que apresentaremos são válidos para os fluxos gerados por equações diferenciais autônomas.

Quando estudarmos os sistemas dinâmicos fuzzy, seremos conduzidos a analisar os sistemas dinâmicos autônomos, considerando não apenas pontos iniciais, mas sim conjuntos iniciais, sendo assim, se faz necessário apresentamos alguns conceitos relacionados a esse tipo de estudo. O primeiro resultado (Teorema 1.2) descreve o comportamento da solução de uma equação diferencial autônoma em \mathbb{R}^2 quando a condição inicial é um conjunto. Tomemos o sistema da definição 1.24 como referência. O Teorema 1.2 pode ser encontrado

em [9].

Teorema 1.2. [9] *Se A é um subconjunto não vazio de U tal que $\gamma(A)$ está contido em um compacto então $\omega(A)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai A . Além disso, se A é conexo então $\omega(A)$ também é conexo. Se $\omega(A)$ está contido no interior de A então $\omega(A)$ é assintoticamente estável.*

Até o presente momento não definimos o conjunto $\omega(A)$, também conhecido como conjunto ω -limite da solução iniciada em A . A definição formal deste conjunto será feita no próximo capítulo na definição 2.1. Para entendermos o resultado anterior podemos definir informalmente o conjunto $\omega(x_0)$ como sendo o conjunto para o qual a solução iniciada em x_0 irá convergir.

Outro resultado importante da análise qualitativa de Sistemas de equações autônomos é o Teorema 1.3.

Teorema 1.3. [9] *Sejam $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ uma órbita periódica para o fluxo bidimensional e $x_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto não periódico no exterior (interior). Então,*

1. *γ é estável pelo exterior (interior) se, e somente se, $\gamma = \omega(x_0)$ ou, para todo $\epsilon > 0$, existe uma órbita periódica γ_ϵ no exterior(interior) tal que $\text{dist}(\gamma, \gamma_\epsilon) < \epsilon$;*
2. *γ é assintoticamente estável pelo exterior(interior) se, e somente se, $\gamma = \omega(x_0)$*

O Teorema 1.3 relaciona a estabilidade de uma órbita periódica como o conjunto ω -limite desta órbita.

Os resultados anteriores podem parecer descontextualizados, porém serão muito úteis no capítulo 4, onde obteremos resultados para sistemas dinâmicos fuzzy através de resultados conhecidos para Sistemas dinâmicos determinísticos.

1.5 Conclusão

Neste capítulo verificamos a importância das equações diferenciais autônomas no escopo da modelagem matemática, destacando os modelos relacionados a dinâmica populaci-

onal. Vimos também que as equações autônomas podem ser analisadas qualitativamente, e esta análise pode fornecer muitas informações sobre o comportamento da solução, mesmo sem conhecermos a expressão da mesma.

Lembremos que o plano de fase é uma ferramenta muito importante na análise qualitativa de EDOs autônomas bidimensionais, pois representa de forma condensada as soluções e o campo de direções de um determinado sistema. Esta ferramenta será bastante utilizada para exemplificar os resultados que serão estudados

Nossos estudos estão direcionados para sistemas bidimensionais que possuam soluções periódicas ou ciclos limites. Verificamos neste capítulo que não é trivial encontrar ciclos limites ou órbitas periódicas apenas observando as equações diferenciais, entretando, existem resultados que garantem a existência desses ciclo sob certas condições, um dos mais importante resultados desse tipo é o Teorema de Poincaré-Bendixson, o qual será estudado e demonstrado no próximo capítulo.

Capítulo 2

Teorema de Poincaré-Bendixson

2.1 Introdução

Na natureza, frequentemente nos deparamos com fenômenos que se repetem ao longo do tempo, os quais são conhecidos como *fenômenos periódicos* ou *cíclicos*. Como exemplo podemos citar o ciclo das águas, as fases de uma árvore ao longo das estações do ano, a quantidade de peixes em uma determinada região de um rio e muitos outros fenômenos que possuem essa propriedade. Tal periodicidade, muitas vezes se apresenta fortemente estável, ou seja, ela resiste a diversas perturbações externas (*ações do homem ou fortes manifestações da própria natureza*). Já em outros casos, uma pequena mudança no meio provoca a perda dessa característica. É o que acontece por exemplo numa cadeia alimentar, quando uma das espécies é retirada ou apenas afetada por algum evento externo ao meio. É razoável pensar que modelos matemáticos relacionados a tais fenômenos possuam características e propriedades diretamente ligadas com a periodicidade e com a estabilidade desses fenômenos.

Neste capítulo será apresentado o Teorema de Poincaré-Bendixson, que sob certas hipóteses, garante a existência de soluções periódicas em determinados modelos matemáticos baseados em sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas e bidimensionais, tais modelos são frequentemente utilizados para representar diversos fenômenos biológicos.

Trataremos na Seção 2.2.3 da demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson para o

caso determinístico, utilizando-se de diversas ferramentas da análise, alguns dos resultados já vistos no Capítulo 1 sobre equações diferenciais e alguns conceitos simples da geometria. Na Seção 2.3, apresentaremos alguns critérios que garantem a não existência de ciclos limites em um determinados sistemas de equações diferenciais, dos quais se destaca o critério de Dulac. Por fim, na Seção 2.4, exporemos três importantes modelos da ecologia, nos quais identificaremos a existência ou não de ciclos periódicos.

2.2 Teorema de Poincaré-Bendixson

O Teorema de Poincaré-Bendixson é largamente utilizado em matemática aplicada para identificar fenômenos periódicos da natureza. É também muito utilizado na matemática teórica, por exemplo na análise qualitativa de soluções de sistemas dinâmicos autônomos e bidimensionais.

Neste capítulo, trabalharemos com sistemas autônomos, conforme equação (1.2), estes sistemas serão sempre contínuos, além disso, satisfazem as condições de existência e unicidade das soluções, isto é, para cada condição inicial dada, sempre existirá uma única solução que passa por esse ponto. Para sistemas com essa propriedade podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Se para $t \geq t_0$ a trajetória é limitada e não se aproxima de nenhum ponto singular, então esta trajetória é uma órbita periódica fechada, ou se aproxima de uma órbita periódica fechada para $t \rightarrow +\infty$. [17]*

Em outras palavras, se uma órbita estiver contida em uma região fechada após um instante $t = t_0$, e não se aproximar de nenhum ponto de equilíbrio, apenas duas situações podem ocorrer, ou ela é uma órbita fechada, ver Figura 2.2-1 ou, à medida que o tempo aumenta, ela se aproxima de uma órbita fechada, como mostra a Figura 2.2-2.

Na Figura 2.2-1, qualquer órbita é um ciclo fechado, isto é, para qualquer ponto inicial que tomarmos, a trajetória irá periodicamente passar por esse ponto. Já na Figura 2.2-2, todas as órbitas se aproximam de um único ciclo, ou seja, para qualquer ponto inicial, a respectiva órbita converge para este único ciclo, o qual denomina-se *ciclo limite*.

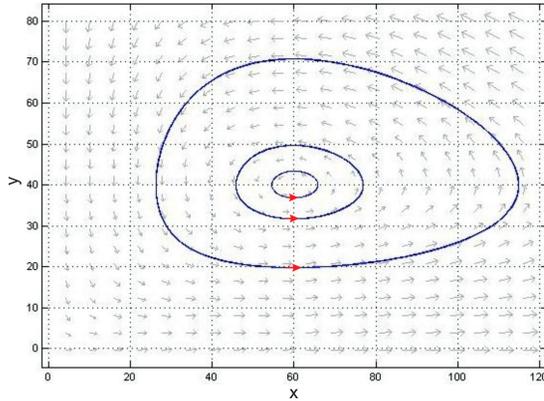


Figura 2.2-1. Órbita fechada 1.

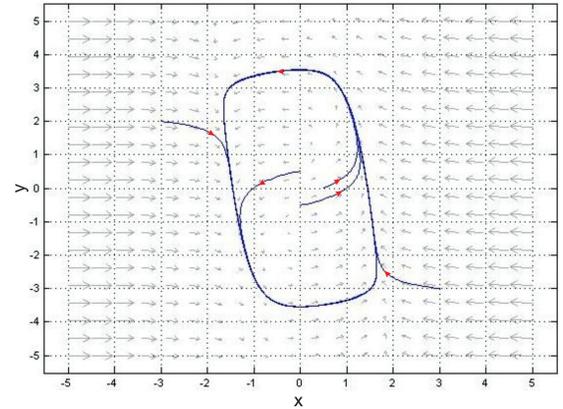


Figura 2.2-2. Órbita fechada 2.

2.2.1 Conceitos preliminares

Apesar do fácil entendimento intuitivo do Teorema de Poincaré-Bendixson, a demonstração do mesmo exige o conhecimento de alguns conceitos preliminares. Primeiramente, definiremos o conjunto ω – *limite* e o conceito de seção transversal. Posteriormente apresentaremos e demonstraremos alguns resultados envolvendo estes conceitos e por fim, utilizaremos estes resultados para provar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Conjunto ω – *limite*

Definição 2.1. Um ponto ω de uma determinada órbita γ , é um ponto z tal que, existe pelo menos uma sequência $\{t_n\} \rightarrow +\infty$ com $x(t_n) \rightarrow z$. Definimos como ω – *limite* o conjunto de todos os pontos ω de uma órbita γ [14].

O conjunto acima definido tem papel fundamental no entendimento do Teorema de Poincaré-Bendixson. Entretanto, apesar da simples definição, nem sempre é trivial reconhecer esse conjunto à partir de sua órbita, muito menos à partir das equações do modelo. O seguinte exemplo representa claramente o conjunto ω – *limite* através do gráfico de uma trajetória no plano de fase.

Exemplo 2.1. Seja o seguinte sistema dinâmico autônomo, conhecido como sistema de equações de Van der Pol

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - y - x^3 \quad \frac{dy}{dt} = x. \quad (2.1)$$

Para $\lambda = 2$ obtemos o seguinte campo vetorial.

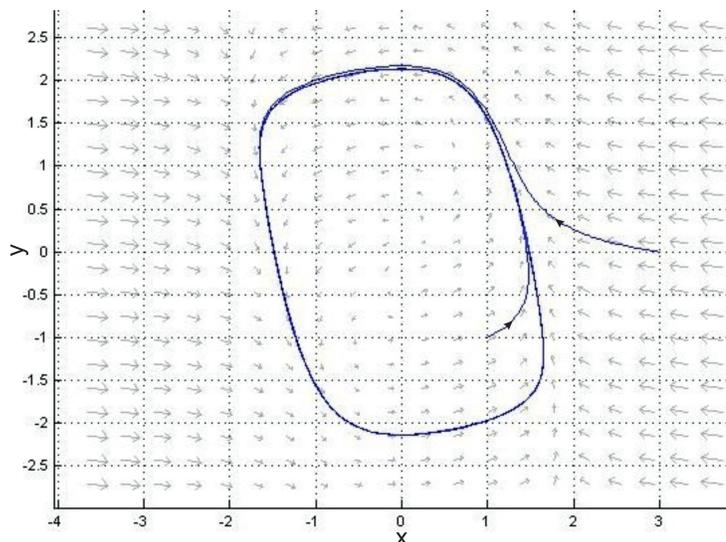


Figura 2.2-3. Órbita fechada.

Na Figura 2.2-3 vemos a trajetória $\gamma_t(p)$ de duas soluções do sistema (2.1), uma delas com valor inicial $(3, 0)$ e a outra com valor inicial $(1, -1)$. Em ambos os casos as trajetórias ficam "presas" em um ciclo fechado depois de um determinado instante. Este ciclo possui um período, isto é, a trajetória leva um certo tempo T para completar um volta no ciclo, sendo assim podemos perceber que para qualquer ponto x^* deste ciclo é possível estabelecer uma sequência t_1, t_2, \dots, t_n , onde $t_2 = t_1 + T$, $t_3 = t_1 + 2T, \dots, t_n = t_1 + (n - 1)T$, tal que $\gamma_{t_n}(p) \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$. Como x^* foi escolhido arbitrariamente, podemos concluir que o ciclo para onde convergem as órbitas mostradas é o conjunto ω -limite dessas trajetórias. Este resultado será apresentado com mais rigor ainda neste capítulo.

É importante deixar claro que essa é apenas uma ideia inicial sobre o conjunto ω -limite, em rigor, a trajetória está sempre se aproximando do ciclo, e nunca chega a tocá-lo. Podemos entender este conjunto como sendo o lugar geométrico do plano de fase para o qual uma determinada solução converge quando $t \rightarrow +\infty$. Basicamente, o conjunto ω -limite pode ser um ponto (ponto de equilíbrio assintoticamente estável) ou um ciclo fechado.

Munidos da definição de ω -limite, podemos apresentar uma outra versão do Teorema de Poincaré-Bendixson, a qual garante o comportamento cíclico do conjunto ω -limite sob determinadas hipóteses. Tanto o Teorema 2.1 quanto o Teorema 2.2 são equivalentes, porém utilizaremos o Teorema 2.2 como base para nossa demonstração, já que o conjunto

ω – limite possui algumas propriedades que viabilizam a demonstração do Teorema.

Teorema 2.2. (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Seja $\gamma_t(p)$ uma trajetória contida em um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$. Se o conjunto ω – limite não conter nenhum ponto de equilíbrio, então ω – limite é um ciclo. Além disso, ou a trajetória $\gamma_t(p)$ intercepta o ciclo ω – limite ou se aproxima deste quando $t \rightarrow +\infty$ [14].*

Brevemente, podemos entender a equivalência entre o Teorema 2.1 e o Teorema 2.2 da seguinte forma: Quando assumimos que a órbita está contida num subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 (Teorema 2.2) é o mesmo que dizer que a órbita está contida em um conjunto fechado e limitado, ou seja, a órbita é limitada (Teorema 2.1). A hipótese do Teorema 2.2 que diz que o conjunto ω – limite não contém nenhum ponto singular é equivalente a dizer que a trajetória não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio (Teorema 2.1), pois se isso acontecesse, este ponto de equilíbrio seria o próprio conjunto ω – limite da trajetória.

Já vimos que as hipóteses são equivalentes. Quanto à tese, o fato do conjunto ω – limite de uma trajetória ser um ciclo (Teorema 2.2), implica que, ou a trajetória é o próprio conjunto ω – limite, ou seja, o ponto inicial é um ponto ω , ou a trajetória se aproxima desse ciclo, pela própria definição de ω – limite, o que é exatamente o que diz o Teorema 2.1.

Propriedades do conjunto ω – limite

O conjunto ω – limite possui algumas propriedades fundamentais para a demonstração do teorema de Poincaré-Bendixson. Uma delas é o fato de ser positivamente invariante, informalmente isso significa que se a órbita intercepta o conjunto ω – limite em um certo instante, ela sempre ficará “presa” à esse conjunto para qualquer instante posterior. A Definição 2.2 formaliza esse conceito.

Definição 2.2. *Um conjunto X é dito positivamente invariante quando, para qualquer $t > t_0$, a órbita $\gamma_t(p) \subset X$ [10].*

É possível mostrar três propriedades fundamentais do conjunto ω – limite.

Teorema 2.3. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial definido num aberto e $\gamma_t(p)$ a trajetória do campo f que passa por p . Se $\gamma_t(p)$ está contida num subconjunto compacto $K \subset U$, então [25]:*

1. $\omega(p) \neq \emptyset$.
2. $\omega(p)$ é fechado.
3. $\omega(p)$ é positivamente invariante com respeito ao conjunto K

Demonstração

1. Fixemos um ponto p qualquer, pertencente ao conjunto compacto K , sejam duas seqüências, $t_n \rightarrow \infty$ e $p_n = \gamma_{t_n}(p)$. Como K é compacto, p_n possui uma subsequência convergente, pela definição de ω – limite, essa subsequência pertence à $\omega(p)$, logo $\omega(p)$ é diferente de vazio [25].
2. Podemos encontrar a demonstração da propriedade 2 em [25] e a da propriedade 3 em [10].

Maiores detalhes sobre a aproximação de uma órbita à um ciclo limite serão apresentados após a definição de seção transversal.

Seção transversal

Também conhecida como reta transversal ou linha transversal, a seção transversal é um recurso muito importante para entendermos algumas propriedades das trajetórias em um campo vetorial e principalmente dos ciclos-limites.

Definição 2.3. *Um segmento de reta fechado S , é chamado seção transversal para $\frac{dx}{dt} = f(x)$, se o campo vetorial definido por f não é tangente a S em nenhum ponto de S [14].*

Apesar da simples definição, duas observações sobre as seções transversais se fazem necessárias.

Observação 1. Se uma trajetória corta uma seção transversal S em mais de um ponto, esse cruzamento acontece em apenas um único sentido. Em outras palavras, o campo vetorial corta a seção transversal em um mesmo sentido. Vamos supor que uma seção transversal fosse cortada pelo campo em sentidos opostos, como mostra a Figura 2.2-4. Nesse caso, entre duas “setas” de sentidos opostos deve existir uma seta paralela com a seção transversal, já que o campo é contínuo, mas isso contradiz a definição de seção transversal. Logo, é impossível, a seção ser cortada em sentidos opostos.



Figura 2.2-4. Reta transversal

Observação 2. Outra propriedade importante é que uma seção transversal nunca cruza um ponto de equilíbrio. Isso acontece porque num ponto de equilíbrio, o campo entra (ou sai) em todas as direções, veja Figura 2.2-5. Logo, qualquer que seja a direção de uma reta transversal que corte um ponto de equilíbrio, sempre vai existir um vetor no campo entrando ou saindo nessa direção e portanto a reta será paralela ao campo, o que contradiz a definição de reta transversal.

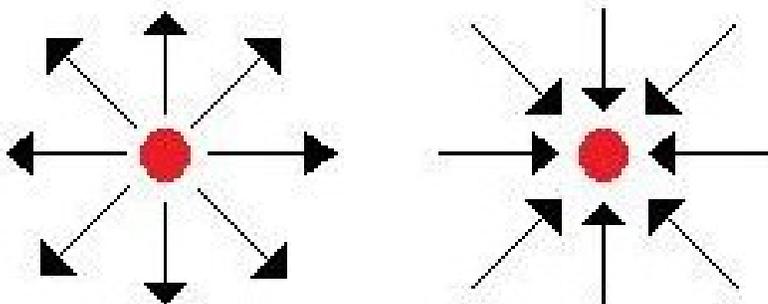


Figura 2.2-5. Campo vetorial saindo e entrando de um ponto de equilíbrio.

A Definição 2.3 e as observações 1 e 2, nos permitem provar algumas propriedades entre as seções transversais e trajetórias em um campo vetorial.

2.2.2 Resultados preliminares à demonstração do Teorema

Com as propriedades de ω -limite e seção transversal bem conhecidas, podemos avançar mais um passo em direção à demonstração do teorema em estudo. Agora mostraremos alguns resultados que relacionam a trajetória de uma solução e uma seção transversal.

Para tratar deste assunto precisamos conhecer a definição e o Teorema das Curvas de Jordan.

Definição 2.4. *Uma curva de Jordan é uma curva fechada simple no plano, onde simple significa que a curva não se auto-intercepta e nem é tangente a si mesma em nenhum ponto da curva.*

Na Figura 2.2-6 podemos observar alguns exemplos de curvas de Jordan, já na Figura 2.2-7 temos alguns exemplos de curvas que não satisfazem a definição 2.4 e portanto não são de Jordan.

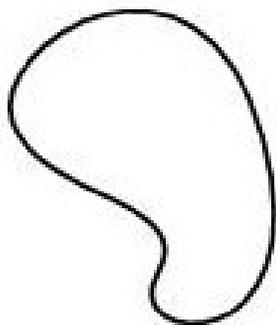


Figura 2.2-6. Curva de Jordan

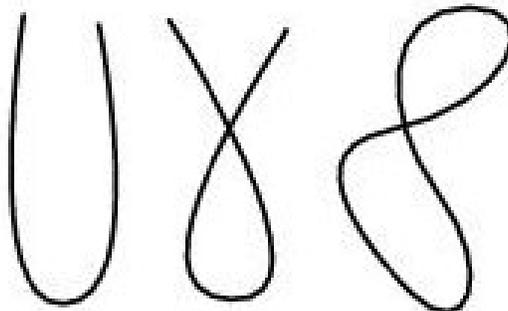
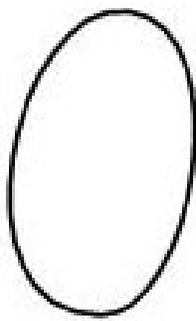


Figura 2.2-7. Não é curva de Jordan

Teorema 2.4. *(Teorema da Curva de Jordan). Se $J \subset \mathbb{R}^2$ for uma curva de Jordan então \mathbb{R}^2 terá duas componentes conexas: o interior da curva J (limitada) e o exterior da curva J (não limitadas). Sendo J a fronteira de ambas.*

Apesar da simplicidade deste teorema, sua demonstração não é trivial. Além disso, o fato dele valer apenas para \mathbb{R}^2 é o grande limitante para a não validade do Teorema de Poincaré-Bendixson fora do plano. Utilizando-se o teorema da Curva de Jordan e os resultados anteriormente apresentados, vamos demonstrar o seguinte Lema.

Lema 2.1. *(Lema das Sequências Monôtonas) Se uma sequência q_1, q_2, \dots, q_n pertence a intersecção de uma seção transversal S com uma trajetória $\gamma_t(p)$ e a sequência é monótona*

em $\gamma_t(p)$, então é monótona em S . Além disso, se a trajetória $\gamma_t(p)$ intercepta a seção transversal em pelo menos dois pontos diferentes, então a órbita não é fechada [12].

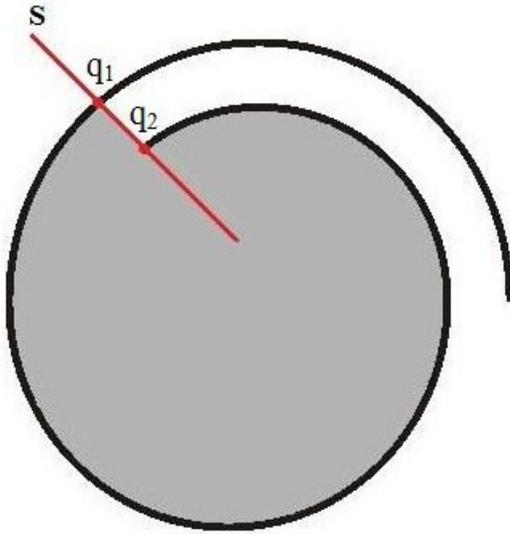


Figura 2.2-8. 2 pontos distintos de S

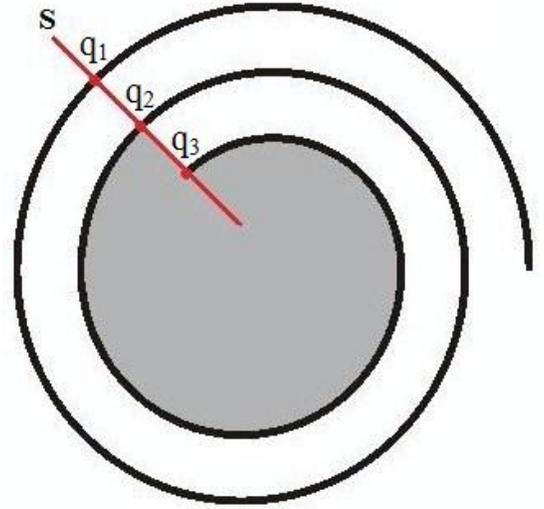


Figura 2.2-9. 3 pontos distintos de S

Demonstração. Primeira parte (monotonocidade): Por hipótese, q_1, q_2, \dots, q_n forma uma sequência monótona em $\gamma_t(p)$, portanto, os tempos t_i nos quais $\gamma_{t_i}(p) = q_i \in S$ formam uma sequência crescente $\{t_n\}$, sendo assim, se o lema não for verdadeiro, existem tempos $t_1 < t_2 < t_3$ e diferentes pontos $q_i = \gamma_{t_i}(p) \in S, i \in \{1, 2, 3\}$, tais que

$$\{q_1, q_2, q_3\} = \gamma_{[t_1, t_3]}(p) \cap S \quad (2.2)$$

com q_3 entre q_1 e q_2 . Veja (Figura 2.2-8) que a união entre o segmento de linha $\overline{q_1 q_2}$ unido com a curva $\gamma_{[t_1, t_2]}(p)$ é uma curva fechada simples no plano, portanto, pelo Teorema das Curvas de Jordan (Teorema (2.4)), existe uma região interna I e uma região externa O . Sem perda de generalização, vamos assumir que o campo f aponta para I em todos os pontos ao longo de $\overline{q_1 q_2}$. Veja que:

$$I \cup \overline{q_1 q_2} \cup \gamma_{[t_1, t_2]}(p)$$

é um conjunto positivamente invariante (ver definição 2.2) como mostra a Figura 2.2-8, sendo assim, em particular este conjunto contém $\gamma_{[t_2, t_3]}(p)$. Mas o fato de que q_3 está entre

q_1 e q_2 implica que $f(t_3)$ aponta em direção à I , então $\gamma_{[t_3-\epsilon]}(p) \in O$ para ϵ pequeno e positivo, mas isso é uma contradição, pois I contém $\gamma_{[t_2, t_3]}(p)$ pela invariância do conjunto I , logo a primeira parte do lema é verdadeira.

Segunda parte: Vamos supor que a trajetória $\gamma_t(p)$ corte a seção transversal S em dois pontos distintos, como mostra a Figura 2.2-8. Se a trajetória $\gamma_t(p)$ for fechada, por definição deve existir um t^* tal que $\gamma_{t_1}(p) = \gamma_{t^*}(p)$, com $t_1 \neq t^*$. Se observarmos a Figura 2.2-8, para que a trajetória passe por $\gamma_{t_1}(p)$ mais uma vez é preciso cortar a seção transversal no sentido oposto ao sentido cortado pela órbita (na direção de O), o que é impossível pela observação 1. Outra possibilidade seria tangenciar a seção em $\gamma_{t_1}(p)$, mas isso também é impossível pela própria definição de seção transversal. Portanto a órbita não é fechada [12].

□

Utilizando o Lema 2.1 podemos provar alguns resultados importantes

Corolário 2.1. *O conjunto ω – limite de uma determinada órbita, corta uma seção transversal S em um único ponto [14].*

Demonstração. Vamos supor que um conjunto ω – limite corte S em dois pontos distintos, primeiro em A e depois em B , então, pelo Lema das sequências monôtonas, a trajetória não cortará S entre A e B , com isso, a órbita não se aproximará mais de A , e portanto esse ponto não poderia ser um ω ponto, logo chegamos num absurdo. □

Lema 2.2. *Um ponto de uma órbita $\gamma_t(p)$ é um ponto ω , se e somente se, a órbita $\gamma_t(p)$ é fechada [14].*

Demonstração. $:(\Leftarrow)$ A volta deste lema é direta, pois se a órbita é fechada, com período T , para qualquer ponto q da órbita, tal que $\gamma_{t_0}(p) = q$, podemos exibir uma sequência $t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \dots, t_0 + nT$. de modo que $\gamma_{t_0+nT}(p)$ converge para q quando n tende à $+\infty$.

(\Rightarrow) Para demonstrar a ida, vamos assumir que q é tanto um ponto ω como é um ponto da órbita $\gamma_t(p)$. Se q é um ponto de equilíbrio, nós temos um caso especial de órbita fechada, a chamada órbita degenerada. Caso q não seja um ponto de equilíbrio, vamos traçar uma seção transversal S através de q . Como $q \in \omega$ – limite, então futuramente,

algum ponto da órbita que passa por q passará suficientemente próximo de q , de modo à cortar S em um ponto que chamaremos de B . Seguindo o mesmo raciocínio do corolário 2.1, se a órbita não é fechada, então $A \neq B$, mas então, qualquer ponto futuro da órbita $\gamma_t(p)$ estará impedido de entrar em uma certa vizinhança de A , o que seria impossível, já que $A \in \omega$. Portanto a órbita $\gamma_t(p)$ é fechada e a demonstração está concluída. \square

Por fim, observamos que o conceito de seção transversal é um artifício fundamental para obtermos resultados relevantes sobre o conjunto $\omega - \text{limite}$ e sobre a classificação de órbitas quanto à serem fechadas ou não. Na próxima subseção iniciaremos efetivamente a demonstração do teorema de Poincaré-Bendixson.

2.2.3 Demonstração do teorema

Finalmente, depois de apresentarmos os resultados da seção anterior, estamos fundamentados para demonstrar o Teorema de Poincaré-Bendixson. É importante ressaltar que utilizaremos o Teorema 2.2 como base para nossa demonstração, sabendo que este é equivalente ao Teorema 2.1, como já foi comentado anteriormente.

Demonstração. Primeiramente, vamos nos concentrar em demonstrar que sob as hipóteses do Teorema 2.2 o conjunto $\omega - \text{limite}$ é um ciclo. Seja $\gamma_t(p)$ uma trajetória arbitrária contida em um conjunto compacto K do domínio e que não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio. Adotemos $\omega(p)$ como o conjunto $\omega - \text{limite}$ de $\gamma_t(p)$. Pelo Teorema 2.3 sabemos que sob as condições anteriormente anunciadas, o conjunto $\omega(p) \neq \emptyset$, como $\gamma_t(p)$ não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio, o conjunto $\omega(p)$ não contém nenhum ponto desta natureza, sendo assim, fixemos um ponto $x^* \in \omega$ e uma seção transversal S que corta x^* .

Caso 1: Se x^* pertence à $\gamma_t(p)$ o Lema 2.2 garante que $\gamma_t(p)$ é uma órbita fechada e como o conjunto $\omega - \text{limite}$ é positivamente invariante, podemos afirmar que qualquer ponto da órbita é um ω ponto e portanto o $\omega - \text{limite}$ é um ciclo, satisfazendo assim um dos resultados do Teorema 2.2.

Caso 2: Se x^* não pertence a órbita $\gamma_t(p)$ então pelo Lema (2.2), esta órbita não é fechada. Porém, vamos mostrar que a órbita que passa por x^* é ainda fechada, lembrando

que x^* é um ponto do conjunto ω – *limite* de $\gamma_t(p)$. Como o conjunto ω – *limite* é positivamente invariante, toda órbita que passa por x^* também faz parte do ω – *limite* de $\gamma_t(p)$, portanto se a órbita que passa por x^* é fechada então o ω – *limite* de $\gamma_t(p)$ também é. Como vimos no primeiro caso, a órbita que passa por x^* é um ciclo fechado, logo podemos concluir que o ω – *limite* de $\gamma_t(p)$ é um ciclo fechado para o segundo caso.

No caso 1 vimos que a órbita intercepta o ω – *limite*, portanto nesse caso a órbita é fechada. No segundo caso, a trajetória não intercepta o seu conjunto ω – *limite*, mas mostramos que esse conjunto é um ciclo, logo, pela própria definição de ω – *limite*, concluímos que esta órbita se aproxima deste ciclo, o qual chamamos de ciclo limite [14].

□

Após obtermos os resultados preliminares, a demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson é relativamente simples, entretanto vale lembrar que este Teorema só é válido para domínios contidos no plano. Em alguns casos, mostrar que determinado sistema dinâmico satisfaz as hipóteses do Teorema é bastante laborioso, sendo assim, para evitar trabalho em vão, existem critérios que quando satisfeitos, garantem a não existência de ciclos limites, ou seja, antes de tentarmos provar a existência de ciclos, podemos testar os critérios e garantir antecipadamente que tais ciclos não existem. Estes critérios serão apresentados na próxima seção.

2.3 Critérios de existência de ciclos limites

Nem sempre é fácil garantir a existência de um ciclo limite para um determinado sistema de equações diferenciais, porém existem dois critérios que quando satisfeitos, garantem a não existência desses ciclos, e por isso são chamados de *critérios negativos*.

Portanto, para apresentar tais critérios vamos considerar o seguinte sistema dinâmico autônomo:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y) \quad (2.3)$$

Podemos assim estabelecer os seguintes critérios:

Critério de Bendixson: Suponha uma região D simplesmente conexa do plano (isto é, D não possui buracos). Se a expressão $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$ não é igual a zero em nenhum ponto de D e também não troca de sinal nessa mesma região, então não existe órbita fechada nessa região [17].

Demonstração. Suponha que C é uma trajetória fechada em uma região simplesmente conexa D . Então, pelo teorema de Green.

$$\int_C F(x, y)dy - G(x, y)dx = \iint_S \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.4)$$

onde S é a região interna à curva C .

Para o sistema de equações (2.3) nos temos a seguinte relação:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)} \quad (2.5)$$

de modo que $G(x, y)dx = F(x, y)dy$.

Sendo assim, a integral do lado esquerdo da equação (2.4) deve ser zero, o que nos leva a concluir que

$$\iint_S \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (2.6)$$

A quantidade $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$ não se anulará sobre S à menos que essa quantidade seja sempre nula ou seja alternadamente positiva e negativa em S . Isto prova o teorema.

□

Critério de Dulac: Suponha uma região D simplesmente conexa do plano e suponha que existe uma função $B(x, y)$, continuamente diferenciável em D , tal que a expressão:

$$\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y} \quad (2.7)$$

não é igual à zero nem troca de sinal em D . Então não existe nenhuma órbita fechada

nessa região. [17]

Demonstração. A demonstração deste critério é similar à demonstração do teorema anterior, bastando substituir F por BF e G por BG . Suponha que C é uma trajetória fechada em uma região simplesmente conexa D . Então, pelo teorema de Green.

$$\int_C B(x, y)F(x, y)dy - B(x, y)G(x, y)dx = \iint_S \left(\frac{\partial BF}{\partial x} + \frac{\partial BG}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_C B(x, y)(F(x, y)dy - G(x, y))dx = \iint_S \left(\frac{\partial BF}{\partial x} + \frac{\partial BG}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.8)$$

onde S é a região interna à curva C .

Para o sistema de equações (2.3) nos temos a seguinte relação:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx/dt}{dy/dt} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)} \quad (2.9)$$

de modo que $G(x, y)dx = F(x, y)dy$.

Sendo assim, a integral do lado esquerdo da equação (2.8) deve ser zero, o que nos leva a concluir que

$$\iint_S \left(\frac{\partial BF}{\partial x} + \frac{\partial BG}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (2.10)$$

A quantidade $\frac{\partial BF}{\partial x} + \frac{\partial BG}{\partial y}$ não se anulará sobre S à menos que essa quantidade seja sempre nula ou seja alternadamente positiva e negativa em S . Isto prova o teorema.

□

O critério de Dulac é uma generalização do critério de Bendixson e se reduz a este quando consideramos $B(x, y) = 1$. Portanto, mesmo que as funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$ não satisfaçam o Critério de Bendixson, ainda assim é possível garantir a não existência de órbitas periódicas através de uma função $B(x, y)$ que satisfaça o critério de Dulac. É

importante ressaltar que esses critérios são utilizados para garantir a não existência de ciclos limites. Critérios que garantam a existência são bem mais complicados de serem estabelecidos. Na próxima seção, mostraremos um exemplo onde é possível garantir a não existência de ciclos limites e um outro onde é possível garantir a existência do ciclo limite.

2.4 Exemplos

Frequentemente, sistemas de EDO's são utilizados para modelar diversos fenômenos biológicos, como por exemplo a reprodução de células, espalhamento de pragas, proliferação de doenças e muitos outros. Nesta seção, apresentaremos 3 modelos clássicos, que foram propostos por matemáticos do século XVIII e XIX e que até hoje são referências no estudo de biomatemática. Além disso, esses modelos exemplificam as variações de comportamento dos conjuntos ω – limite. Lembrando, que nos restringiremos as EDO's autônomas e bidimensionais, já que, apenas para estas é válido o Teorema de Poincaré-Bendixson.

2.4.1 Modelo de Lotka-Volterra

Vamos supor um ambiente onde existam apenas duas espécies, o predador e sua presa. A presa se alimenta de folhas e plantas, enquanto que o predador se alimenta exclusivamente de sua presa. A primeira representação matemática para este cenário (ou equivalentes) foi proposta pelo matemático Italiano V. Volterra. Quase contemporaneamente, A. Lotka, propôs o mesmo modelo, baseando-se em estudos sobre a cinética. O Modelo proposto por estes matemáticos trata da evolução da população de presa e predador, a partir da influência da interrelação de ambas.

O modelo (2.11) é a versão mais simples do modelo de presa-predador. A variável x representa a quantidade de presas no sistema, a variável y representa a quantidade de predadores e os coeficientes a, b, c, d são constantes reais positivas.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \quad (2.11)$$

Observe que na falta do predador ($y=0$), a presa cresce segundo o modelo Malthusiano, o que também acontece com o decréscimo dos predadores na ausência das presas ($x=0$). Essa característica, faz com que o modelo perca fidelidade com a realidade à longo prazo. Vamos analisar o modelo a fim de descobriremos algumas características de suas órbitas.

Primeiramente, fazendo $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$, obtemos os seguintes pontos de equilíbrio.

$$x_1 = (0, 0) \qquad x_2 = (c/d, a/b) \quad (2.12)$$

Fazendo a análise de estabilidade dos pontos, verificamos que x_1 é um ponto de equilíbrio instável, enquanto que x_2 é um ponto de equilíbrio estável.

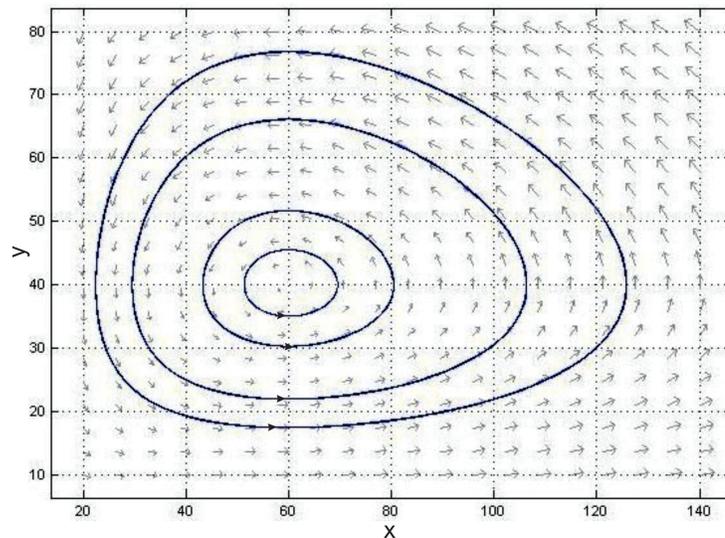


Figura 2.4-10. Órbitas do modelo de Lotka-Volterra.

Como podemos ver na Figura 2.4-10, qualquer solução é uma órbita fechada, ou também chamada de periódica, portanto, o ω – limite de cada órbita é sua própria órbita. Neste caso, não existem ciclos limites, para cada valor inicial dado, a trajetória é periódica.

Intuitivamente podemos perceber que os conjunto ω – *limite* não se aproximam de nenhum ponto de equilíbrio e que toda trajetória é limitada, sendo assim, as hipóteses do Teorema de Poincarê-Bendixson (Teorema 2.2) são satisfeitas e ocorre um dos casos previstos, a órbita é fechada.

2.4.2 Modelo de Holling-Tanner

O modelo de Holling-Tanner, assim como Lotka-Volterra, também é um modelo para interação entre duas espécies. Entretanto, Holling-Tanner possui algumas propriedades que o torna mais aplicável do que Lotka-Volterra. Uma dessas propriedades é o crescimento logístico da presa e do predador, o que é mais plausível à realidade.

O modelo de Holling-Tanner é determinado pelo sistema de equações (2.13)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{x+d} \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{\beta y}{x}\right) \end{cases} \quad (2.13)$$

onde α, β, m, d, k e r são constantes reais positivas:

Algumas importantes observações relativas a este modelo são:

1. Na ausência do predador, o comportamento populacional da presa segue o modelo logístico, com capacidade suporte k e taxa de reprodução r .
2. O parâmetro d representa a capacidade da presa de evitar o ataque do predador, ou seja, quanto maior o valor de d , maior é a capacidade da presa de escapar do predador.
3. Neste modelo, o predador também cresce segundo o modelo logístico, com taxa de crescimento α e capacidade suporte proporcional a quantidade de presas.

A fim de verificar analiticamente a existência de ciclos limites, mostraremos que as funções $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas e com isso, utilizaremos o Teorema de Poincaré-Bendixson para garantir a existência de ciclos limites, para alguns valores específicos dos parâmetros.

Vamos mostrar que a função $x(t)$ é limitada pela sua capacidade suporte k (no caso, capacidade suporte das presas) ou pela condição inicial x_0 . Para isso, suponhamos que exista t_1 tal que $x(t_1) > m = \max\{x_0, k\}$. Pelo sistema de equações (2.13) vemos que para qualquer $x(t) > k$ temos $x'(t) < 0$, com isso podemos garantir que $x(t)$ atinge seu máximo em $t \in [0, t_1]$. Sendo assim, seja $t_2 \in [0, t_1]$ o ponto no qual $x(t)$ atinge seu máximo, se $t_2 = 0$, temos um absurdo imediato pois por hipótese $x(t_2) \geq x(t_1) > x_0 = x(t_2)$. Se $t_2 \in (0, t_1]$, temos que $x'(t_2) = 0$ pois nesse ponto a função atinge o máximo, mas isso é um absurdo, pois $x(t_2) > k$ e portanto, por (2.13) deveria ser $x'(t_2) < 0$. Sendo assim, mostramos que não existe t_1 tal que $x(t_1) > m = \max\{x_0, k\}$, logo $x(t)$ é limitada pela sua capacidade suporte k ou pela condição inicial x_0 . Através de um raciocínio análogo, podemos verificar que $y(t) \leq \max\{y_0, k/\beta\}$.

Através dos métodos já apresentados anteriormente podemos obter os seguintes pontos de equilíbrio: $(0,0)$, $(k,0)$ e (x^*,y^*) , onde x^* é a raiz positiva de $x^2 + (d - k + \frac{km}{\beta r})x - kd = 0$ e $y^* = \frac{x^*}{\beta}$. Não é viável estudar a existência de ciclos limites ao redor de $(0,0)$ e $(k,0)$, pois se estes existissem, a função $x(t)$ ou $y(t)$ assumiria valor negativo para algum t , o que é biologicamente impossível. Sendo assim, nos resta estudar o ponto (x^*,y^*) . Como provamos que as funções $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas, basta o ponto (x^*,y^*) ser instável (todos os autovalores da matriz Jacobiana (4.18) de (2.13) devem ser negativos), para as hipóteses do Teorema de Poincaré-Bendixson serem satisfeitas e portanto existir um ciclo limite. A instabilidade deste ponto depende dos valores atribuídos aos parâmetros, apresentaremos um exemplo onde o ponto é instável e portanto existe um ciclo limite [8].

As figuras seguintes representam o modelo 2.13 com os seguintes parâmetros: $\alpha = 0.3$, $\beta = 22.142$, $m = 30.625$, $d = 10$, $k = 200$ e $r = 2$.

Na Figura 2.4-11, temos a trajetória de uma solução com valor inicial $(90,3.6)$, à medida que o tempo aumenta, a trajetória se aproxima de um ciclo limite “de dentro para fora”. Já na Figura 2.4-12 temos a trajetória de uma solução com valor inicial $(110, 3.2)$. Nesse caso, a medida que o tempo aumenta a trajetória se aproxima de um ciclo limite “de fora para dentro”. Por fim, a Figura 2.4-13 representa as duas trajetórias descritas

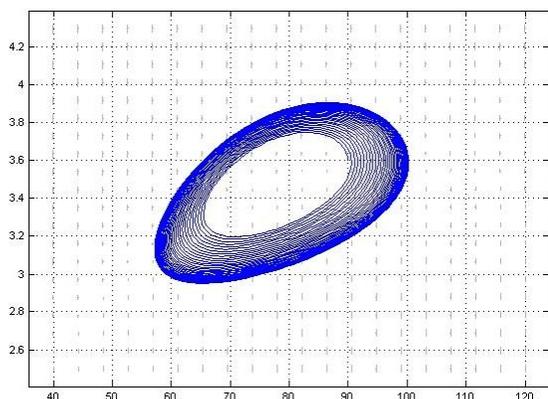


Figura 2.4-11. Holling-Tanner 1.

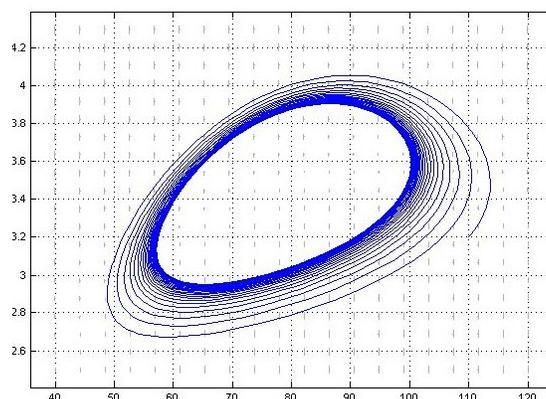


Figura 2.4-12. Holling-Tanner 2.

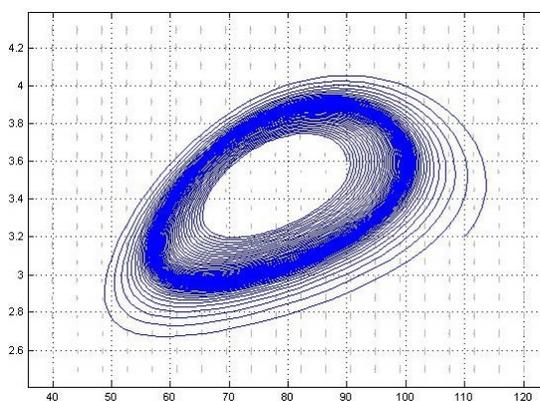


Figura 2.4-13. Holling-Tanner 3.

anteriormente em um mesmo gráfico. Veja que as trajetórias se aproximam de um mesmo círculo, o qual reconhecemos como ciclo limite.

2.4.3 Modelo geral de Volterra

Este último modelo também trata da interação entre duas espécies. Entretanto, se difere por representar uma interação facultativa, ou seja, ambas espécies sobrevivem quando a interação não ocorre.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = r_1 x \frac{k_1 - x - \beta_{12}y}{k_1} \\ \frac{dy}{dt} = r_2 y \frac{k_2 - y - \beta_{21}x}{k_2} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Além da facultatividade das interação entre espécies, o modelo também é flexível quanto à natureza da interação quando esta ocorre, isto é, a interação pode ser do tipo competição, presa-predador ou mutualismo.

No modelo (2.14) os parâmetros β_{12} e β_{21} determinam o tipo de interação representada pelo modelo. Caso ambos sejam positivos, a interação é do tipo *competição*, enquanto que, se os sinais forem contrários então o modelo é do tipo presa-predador. Por fim, se ambos os parâmetros forem negativos, as equações modelam uma interação de mutualismo.

Sabemos que este modelo não possui ciclos limites, para comprovar essa afirmação, vamos aplicar o critério de Dulac escolhendo $\beta(x, y) = \frac{1}{xy}$ ao sistema (2.14):

Considerando $\frac{dx}{dt} = f_1$ e $\frac{dy}{dt} = f_2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \beta(x, y)f_1 &= \frac{r_1 x}{xy} \cdot \frac{k_1 - x - \beta_{12}y}{k_1} = \frac{r_1}{y} - \frac{r_1 x}{yk_1} - \frac{r_1 \beta_{12}}{k_1} \\ \frac{\partial(\beta(x, y)f_1)}{\partial x} &= -\frac{r_1}{k_1 y} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Analogamente, fazemos os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} \beta(x, y)f_2 &= \frac{r_2 y}{xy} \cdot \frac{k_2 - y - \beta_{21}x}{k_2} = \frac{r_2}{x} - \frac{r_2 y}{xk_2} - \frac{r_2 \beta_{21}}{k_2} \\ \frac{\partial(\beta(x, y)f_2)}{\partial y} &= -\frac{r_2}{k_2 x} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Fazendo a soma das derivadas parciais calculadas obtemos:

$$\frac{\partial(\beta(x, y)f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta(x, y)f_2)}{\partial y} = -\frac{r_1}{k_1 y} - \frac{r_2}{k_2 x} < 0 \quad (2.17)$$

Satisfazendo assim o critério de Dulac. Lembrando que $x > 0$ e $y > 0$, já que representam quantidade de espécies em um determinado ecossistema e por isso, valores negativos não fariam sentido prático. Como o critério de Dulac foi satisfeito, podemos concluir que não existem ciclos limites no modelo 2.14.

Analogamente ao que foi feito no exemplo anterior, é possível perceber que quando a interação é do tipo competição ou presa-predador, as trajetórias $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas. Sendo assim, podemos concluir pelo Teorema de Poincaré-Bendixson que as órbitas convergem para um estado de equilíbrio ou são periódicas. Porém, o critério de Dulac elimina a possibilidade de serem periódicas, portanto podemos concluir que convergem para um estado de equilíbrio. Maiores detalhes sobre os exemplos expostos acima podem ser encontrados em [8].

2.5 Conclusão

Neste capítulo apresentamos e demonstramos o Teorema de Poincaré-Bendixson, definimos alguns critérios que garantem a não existência de ciclos limites e por fim, ilustramos estes conceitos através de 3 modelos clássicos da ecologia.

Mais especificamente, definimos na seção 2.2 o conceito de ω – limite e de seção transversal, ainda na mesma seção apresentamos alguns resultados fundamentais à demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson e por fim, utilizamos os conceitos anteriormente apresentados para demonstrar o Teorema. Na seção 2.3, foram apresentados o critério de Bendixson e o critério de Dulac, os quais garantem a não existência de ciclos limites quando satisfeitos. Na seção 2.4, exemplificamos os conceitos estudados através de modelos utilizados na interação entre espécies de um ecossistema. Com o modelo de Lotka-Volterra vimos a existência de órbitas fechada, onde os conjuntos ω – limite são as próprias órbitas. Já através de Holling-Tanner verificamos a existência de ciclos limites para determinados coeficientes do modelo e através do modelo de Volterra, exemplificamos um caso de não existência de ciclo limite garantida pela aplicação do critério de Dulac.

Apesar da inquestionável aplicabilidade da teoria vista neste capítulo, nos deparamos com certas limitações na tentativa de modelar fenômenos da natureza. Por exemplo, num sistema de presa-predador, é muito difícil saber exatamente a população inicial das espécies em questão, entretanto, nos modelos trabalhados nesse capítulo é necessário conhecer um número exato que represente esta quantidade. A fim de amenizar esse problema e outros oriundos da imprecisão dos dados reais, vamos apresentar no próximo capítulo os conceitos básicos de Teoria Fuzzy e utilizar esses conceitos numa versão do Teorema de Poincaré-Bendixson, onde, as incertezas inerentes nos dados reais são levadas em consideração.

Capítulo 3

Teoria fuzzy

A incerteza proveniente da aleatoriedade de eventos está bem desenvolvida e hoje ocupa um lugar de destaque na galeria da Matemática. Porém, diferentemente da aleatoriedade, certas variáveis utilizadas em nosso cotidiano, transmitidas e perfeitamente compreendidas linguisticamente entre interlocutores, permaneceram fora do tratamento matemático tradicional até recentemente. Este é o caso de variáveis linguísticas oriundas da necessidade de se distinguir qualificações por meio de graduações. Para descrever certos fenômenos relacionados ao mundo sensível, temos utilizado graus que representam qualidades ou verdades parciais. Esse é o caso, por exemplo, dos conceitos de *alto*, *fumante*, *infeccioso*, *presa* etc. É precisamente neste tipo de incerteza que a Lógica Fuzzy tem dado suas principais contribuições. Usando uma linguagem conjuntista poderíamos no referir, respectivamente, aos “conjuntos” das pessoas *altas*, *fumantes* ou *infecciosas*. Estes são exemplos típicos de conjuntos cujas fronteiras podem ser consideradas incertas, isto é, definidas por meio de propriedades subjetivas ou atributos imprecisos [4].

Abordaremos neste capítulo os conceitos matemáticos fundamentais que embasam teoricamente a lógica fuzzy e a teoria de conjuntos fuzzy. Além das idéias fundamentais, discutiremos algumas definições e resultados da análise qualitativa de sistemas de equações diferenciais para espaços métricos fuzzy. Por fim, mostraremos uma estratégia de modelagem baseada no controlador de Mamdani, os chamados modelos P-fuzzy. Para tanto, dividiremos este capítulo da seguinte forma: na seção 3.2 apresentaremos as definições básicas sobre os conjuntos fuzzy, em especial, a extensão de Zadeh que será fundamental para nossos futuros estudos. Na seção 3.3 discutiremos algumas definições e

resultados propostos em [9] sobre os sistemas dinâmicos em espaços fuzzy e na seção 3.4 apresentaremos os principais conceitos propostos em [29] sobre estabilidade de sistemas P-fuzzy.

3.1 Introdução

O primeiro matemático a introduzir conceitos similares ao que hoje conhecemos como lógica fuzzy, ou difusa, foi o polonês Jan Lukasiewicz, que em 1920 introduziu conjuntos onde os elementos tinham graus de pertinência 0, $1/2$, 1 e posteriormente, generalizou essa idéia para qualquer número real entre 0 e 1. Porém, a primeira publicação sobre o assunto só veio a ser feita 1965, por Lotfi Adker Zadeh, professor em Berkeley, combinando os conceitos de lógica e a teoria desenvolvida por Lukasiewicz. [32]. Desde então, a utilização da lógica fuzzy tem se tornado cada vez mais comum, principalmente no meio industrial, onde é muito utilizada para controle de processos. A teoria de Zadeh tem se desenvolvido significativamente em diversos segmentos da matemática (teórica e aplicada) e engenharia. Algumas das referências mais conceituadas sobre o assunto são as revista *Fuzzy Sets and Systems*, *Information Sciences* e *Fuzzy Optimization and Decision Making* e *International Journal of Approximate Reasoning*, onde é possível encontrar os mais recentes e relevantes artigos sobre o tema.

Aproveitando-se do potencial da lógica fuzzy em reproduzir as incertezas inerentes à realidade, o grupo de biomatemática do IMECC/UNICAMP foi o pioneiro em mesclar os modelos biológicos clássicos, baseados em equações diferenciais ordinárias (ou parciais), com os conceitos da lógica fuzzy de Zadeh. De forma mais específica, através da lógica fuzzy é possível estudar as influências das incertezas inerentes às condições iniciais ou ao valor dos parâmetros de cada modelo, no comportamento qualitativo do mesmo. Os importantes resultados em tal segmento podem ser verificados em [1], [2], [21], [9], [29], [19].

3.2 Conjuntos fuzzy

A teoria dos conjuntos clássicos é desenvolvida desde os primórdios do pensamento matemático. Ao longo dos anos, essa teoria foi tomando forma e passou por diversas

evoluções e discussões, sendo atualmente um expandido segmento da matemática e um vasto celeiro de definições, teoremas e até mesmo problemas abertos. A teoria de conjuntos fuzzy por sua vez, trabalha com conjuntos mais gerais do que a teoria clássica, isto é, um conjunto clássico é um caso particular de conjuntos fuzzy. Como consequência, muitos resultados da teoria clássica não são válidos na teoria fuzzy, como por exemplo a *lei do terceiro excluído*.

Basicamente, podemos afirmar que a principal diferença entre os conjuntos clássicos e os conjuntos fuzzy está na definição de sua *função característica*, também chamada de *função de pertinência*, a qual define de forma única um conjunto. A função características de um conjunto clássico é definida da seguinte forma:

Definição 3.1. *Seja U um conjunto e $A \subset U$. A função característica de A é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

para todo $x \in U$

Sendo U o domínio da função característica χ_A e o conjunto $\{0, 1\}$ o seu contradomínio. É notável que $\chi_A(x) = 0$ quando $x \notin A$ e $\chi_A(x) = 1$ quando $x \in A$. Portanto, como a própria denominação indica, χ_A caracteriza o conjunto A , mais do que isso, existe uma relação biunívoca entre o conjunto A e sua função característica. Como dissemos, o subconjunto clássico de A determina um subconjunto fuzzy de U que será identificado neste texto, com abuso de notação, por χ_A , estes são os chamados subconjuntos *crisp* de U . Veremos na próxima subseção que a função característica exerce um papel crucial na teoria de conjuntos fuzzy.

3.2.1 Subconjuntos fuzzy

Quando um determinado conjunto possui uma interpretação real (água de um rio, gases da estratosfera, território de uma fazenda e etc.) nem sempre a função característica para conjuntos clássicos permite uma representação correta da realidade, já que na prática, alguns elementos não tem uma pertinência bem definida à determinados conjuntos, ou

seja, não existe uma distinção exata dos elementos que pertencem e dos que não pertencem ao citado conjunto, para ilustrar melhor essa ideia, observe o seguinte exemplo retirado de [4]:

Exemplo 3.1. *Consideremos o seguinte subconjunto:*

“os números reais próximos de 5”

Sendo assim, podemos dizer que 5.001 e 10 pertencem a esse subconjunto? Como a definição do conjunto é incerta, a resposta para essa pergunta também é, ou seja, não podemos afirmar claramente quando um número está próximo de 5.

Para resolver questões similares a anterior foi que Zadeh introduziu a ideia de conjuntos fuzzy, considerando basicamente que a função característica de um conjunto pode tomar valores entre 0 e 1. Segundo [4] definimos a função característica (função de pertinência) para subconjuntos fuzzy como colocado em [4].

Definição 3.2. *Seja U um conjunto (clássico); um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função*

$$\varphi_F(x) : U \rightarrow [0, 1]$$

*pré-fixada, chamada **função de pertinência** do subconjunto fuzzy F .*

Algumas observações relevantes quanto à interpretação da definição 3.2 devem ser feitas. Primeiramente, o valor $\varphi_F(x) \in [0, 1]$ indica o “quanto” o elemento $x \in U$ pertence ao conjunto fuzzy F . Veja que na definição 3.2, expandiu-se o contradomínio da função característica de $\{0, 1\}$ para $[0, 1]$, com isso, podemos afirmar que um conjunto clássico é um caso particular de um conjunto fuzzy, tal afirmação será bastante recorrente e útil no decorrer do presente texto.

Um subconjunto fuzzy F é composto por elementos de um subconjunto clássico U e seus respectivos graus de pertinência a F . Sendo assim, podemos dizer que um subconjunto fuzzy F de U é dado por um conjunto clássico de pares ordenados.

$$F = (x, \varphi_F(x)), \quad \text{onde} \quad x \in U \tag{3.1}$$

Normalmente, uma estratégia bastante satisfatória para demonstrarmos resultados na teoria fuzzy é relacionar, de alguma maneira, esta teoria com a teoria clássica já conhecida. Um artifício frequentemente utilizado é o estudo do *conjunto suporte* definido da seguinte forma:

Definição 3.3. *O subconjunto clássico de U definido por*

$$\text{supp}F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

é denominado suporte de F

Este conjunto tem papel fundamental na interrelação entre as teorias fuzzy e clássica, já que o suporte de um subconjunto fuzzy é um conjunto clássico cujos elementos possuem grau de pertinência a F diferente de 0. Para ilustrar as definições até então apresentadas, tomemos o seguinte exemplo retirado de [4].

Exemplo 3.2. *Considere o subconjunto fuzzy das pessoas altas (em metros) do Brasil, definido por*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1.4 \\ \frac{1}{0.4}(x - 1.4) & \text{se } 1.4 < x \leq 1.8 \\ 1 & \text{se } x > 1.8 \end{cases} \quad (3.2)$$

A Figura 3.2-1 mostra o gráfico da função de pertinência $\varphi_A(x)$.

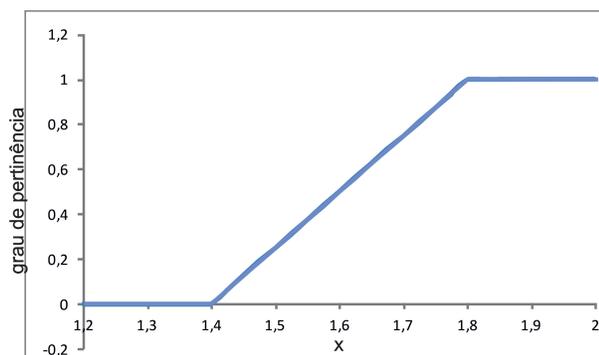


Figura 3.2-1. Função de pertinência.

Podemos verificar no Exemplo 3.2 que o suporte de A pode ser descrito como o conjunto $\text{supp}A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1.4\}$. Por exemplo, se tomarmos a altura como sendo 1.6m,

verificamos pela função de pertinência que $\varphi_A(1.6) = 0.5$ ou seja, segundo a modelagem descrita no Exemplo 3.2, uma pessoa com 1.6m de altura está no conjunto das pessoas altas com grau de pertinência 0.5. Já uma pessoa com 1,85m tem grau de pertinência 1 ao conjunto das pessoas altas.

3.2.2 α - nível e suas propriedades

Assim como o conjunto suporte, uma outra caracterização dos conjuntos fuzzy, muito importante na relação entre a teoria clássica e teoria fuzzy, são os α -níveis. De modo coloquial, um α -nível de um conjunto fuzzy A , é o subconjunto do $suppA$ (portanto um subconjunto clássico) que contem todos os elementos cujo grau de pertinência à A é maior ou igual à α . De modo formal, podemos introduzir a seguinte definição de α -nível:

Definição 3.4. *Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in (0, 1]$. O α - nível de A é o subconjunto clássico de U definido por*

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1$$

Veja que um o α - nível é um conjunto clássico, mais precisamente é um subconjunto clássico de U . A Definição 3.4 não considera o valor de $\alpha = 0$. Utilizamos a notação $[A]^0$ para representar o fecho do $suppA$, isto é, $[A]^0$ é o menor subconjunto fechado de U que contem o $suppA$. Este conjunto é muito útil e será recorrentemente utilizado nesse texto. A seguir apresentamos um exemplo de conjunto fuzzy onde é possível identificar os conceitos anteriormente traçados

Exemplo 3.3. *Seja o seguinte subconjunto fuzzy de \mathbb{R} :*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \text{ ou } x > b \\ y = \frac{2(x-a)}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{2(x-b)}{a-b} & \text{se } \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases} \quad (3.3)$$

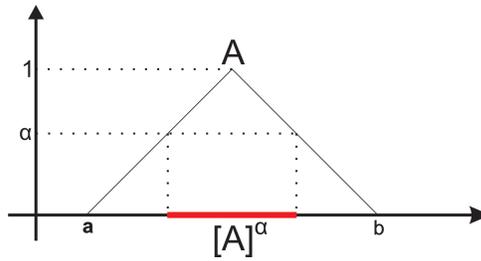


Figura 3.2-2. α -nível.

Neste caso, $[A]^\alpha$ é o intervalo

$$[A]^\alpha = \left[\frac{\alpha(b-a)}{2} + a, \frac{\alpha(a-b)}{2} + b \right] \subset [a, b] = \text{supp}A \quad (3.4)$$

É possível notar pela Figura 3.2-2 que se A fosse um conjunto clássico, o conjunto α -nível seria o mesmo para qualquer valor de α . Maiores detalhes sobre a teoria acima apresentada, podem ser encontrados em [4]

3.2.3 O subespaço $\mathcal{E}(X)$

Para viabilizar a análise dos resultados na próxima subseção, vamos restringir para espaços mais específicos, algumas definições já apresentadas, isto é, direcionaremos nosso estudo aos subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjuntos compactos e não vazios em X , denotaremos este espaço por $\mathcal{E}(X)$.

$$\mathcal{E}(X) = \{A \in \mathcal{F}(X) : \forall \alpha \in [0, 1], [A]^\alpha \text{ é compacto, convexo e não vazio}\} \quad (3.5)$$

onde $\mathcal{F}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos fuzzy com suporte contido em X . Segundo [9], o conjunto $\mathcal{E}(X)$, formado pelos subconjuntos fuzzy de X com suporte compacto, define um espaço métrico com a métrica d_∞ induzida através da *métrica de Pompeiu-Hausdorff* sobre os conjuntos compactos de X , conforme veremos a seguir.

Para que possamos argumentar os resultados que serão apresentados nos capítulos subsequentes, em especial quanto à convergência, é fundamental definirmos uma forma de

medir a distância entre conjuntos fuzzy cujos α -níveis são compactos, ou seja, precisamos estabelecer uma métrica para $\mathcal{E}(X)$.

Sendo $\mathcal{K}(X)$ o conjunto formado pelos subconjuntos compactos não vazios do espaço métrico (X, d) , dados dois elementos A, B de $\mathcal{K}(X)$, então a distância entre eles pode ser definida por :

$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \quad (3.6)$$

Segundo [16], a distância definida conforme (3.6) é uma pseudométrica, pois $dist(A, B) = 0$ se e somente se, $A \subset B$, sem necessariamente serem iguais. A Figura 3.7 ilustra através de diagramas, a distância definida anteriormente. Em especial, notamos que a distância entre dois conjuntos pode ser zero sem a necessidade de serem iguais.

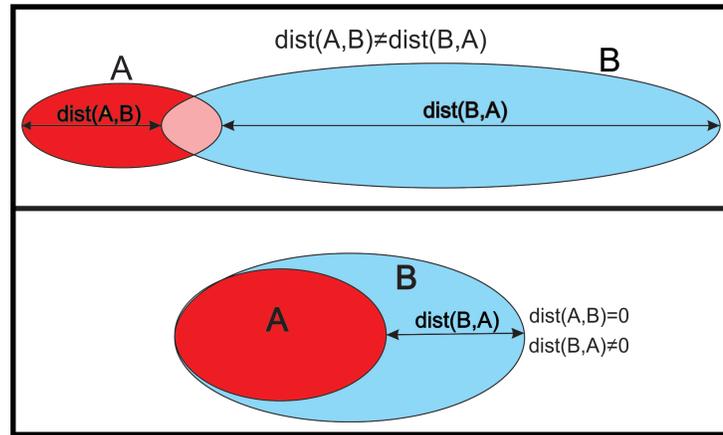


Figura 3.2-3. Pseudométrica entre conjuntos.

Entretando, podemos definir a distância entre $A, B \subset \mathcal{K}(X)$ da seguinte forma:

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\right\} = \max\{dist(A, B), dist(B, A)\} \quad (3.7)$$

essa sim é uma métrica para o conjunto $\mathcal{K}(X)$.

Usualmente, d_H é a chamada *distância de Housdorff*. Através da *métrica de Hausdorff*, podemos definir uma métrica para o conjunto $\mathcal{E}(X)$, que denotaremos aqui por d_∞ ,

seguindo a notação de [9]. Dados dois pontos $\widehat{u}, \widehat{v} \in \mathcal{E}(X)$ a distância entre \widehat{u} e \widehat{v} é definida por

$$d_\infty(\widehat{u}, \widehat{v}) = \left[\sup_{\alpha \in [0,1]} d_H([\widehat{u}]^\alpha, [\widehat{v}]^\alpha) \right] \quad (3.8)$$

É fácil verificar que d_∞ satisfaz as propriedades de métrica e portanto, $(\mathcal{E}(X), d_\infty)$ é um espaço métrico. Tendo em mãos uma forma de medir a distância entre conjuntos fuzzy, poderemos estudar a convergência de uma função cuja imagem é fuzzy. No capítulo 5, utilizaremos este fato em diversas demonstrações.

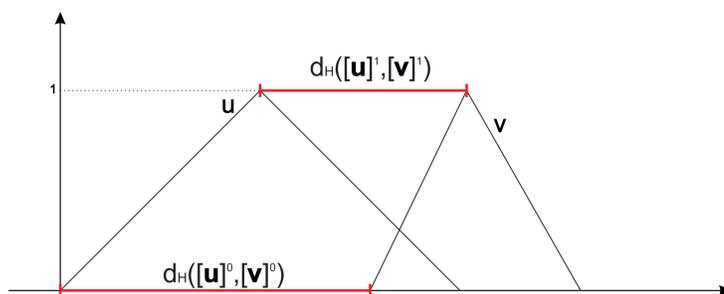


Figura 3.2-4. Métrica de Hausdorff para cada α -nível.

3.2.4 Extensão de Zadeh

Como já dissemos, é fundamental traduzir ideias e conceitos conhecidos da teoria de conjuntos clássicos para teoria de conjuntos fuzzy. O princípio de extensão de Zadeh é umas das metodologias utilizadas para conhecermos a imagem de uma determinada função, quando seu domínio é constituído de subconjuntos fuzzy. Em [4] podemos encontrar a seguinte definição para o Princípio de Extensão de Zadeh.

Definição 3.5. (*Princípio de Extensão de Zadeh*). *Seja a função $f : X \rightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é a função \widehat{f} que, aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de Z cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x=f^{-1}(z)} \mu_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

onde $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$ é a pré-imagem de z .

A Figura 3.2-5 ilustra o Princípio de Extensão de Zadeh para uma função f . É possível notar pela figura que a imagem de um α -nível do conjunto fuzzy de entrada é o mesmo α -nível da imagem fuzzy.

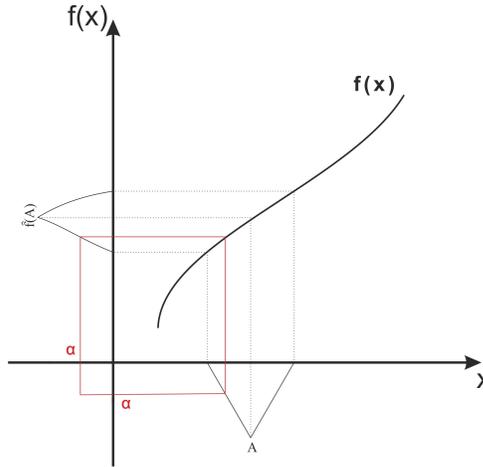


Figura 3.2-5. Imagem de um subconjunto fuzzy a partir do Princípio de Extensão de Zadeh para uma função f .

O seguinte teorema retirado de [4] é de fundamental importância na relação entre os α -níveis da imagem e os α -níveis do domínio.

Teorema 3.1. (Teorema de Nguyen) [22] *Sejam $f : X \rightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X . Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$ vale*

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha). \quad (3.9)$$

De acordo com [1] o Teorema de Nguyen também é válido quando $X = \mathbb{R}^n$. Como trabalharemos no espaço métrico $\mathcal{E}(X)$, apresentaremos o próximo teorema que, de acordo com [9], garante a validade do Teorema de Nguyen para espaços topológicos de Hausdorff.

Teorema 3.2. *Sejam X e Y espaços de Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\widehat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ esta bem definida e vale*

$$[\widehat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha) \quad (3.10)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$

Ainda segundo [4], este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis pela função crisp (clássica), ver Figura 3.2-5. O seguinte exemplo ilustra o princípio de extensão apresentado.

Exemplo 3.4. Vamos supor uma função $f_x(p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, onde,

$$f_x(p) = x^3 + p. \quad (3.11)$$

Podemos perceber que para cada valor de p fixo, obtemos uma curva em função de x . A Figura 3.2-6 exemplifica algumas dessas curvas, especificamente, para $p = -5$, $p = 0$ e $p = 5$.

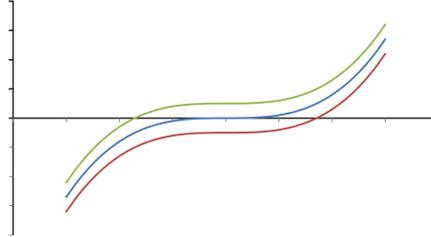


Figura 3.2-6. Curvas para valores diferentes de p .

Consideremos agora $p \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, isto é, p é um número fuzzy, cujo suporte está em \mathbb{R} . Isto é, $\widehat{f}_x(p) : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Notamos que f é uma função contínua em relação a p , conforme será mostrado pelo Teorema 5.1. Portanto, fixando x , à medida que p varia, f varia continuamente. Sendo assim, pelo Teorema 3.1, podemos escrever a seguinte relação

$$[\widehat{f}_x(p)]^\alpha = f_x([p]^\alpha). \quad (3.12)$$

Na Figura 3.2-7 representamos uma extensão da função $f_x(p) = x^3 + p$. É importante notar que para cada $p \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ obtemos um conjunto fuzzy de funções, isto é, teremos um conjunto fuzzy cujos elementos do suporte são funções dependentes de x .

Para esclarecer, tomemos a função do exemplo anterior e $p = [-20, 0, 20]$, p é o número fuzzy triangular, cuja função de pertinência é representada na Figura 3.2-8:

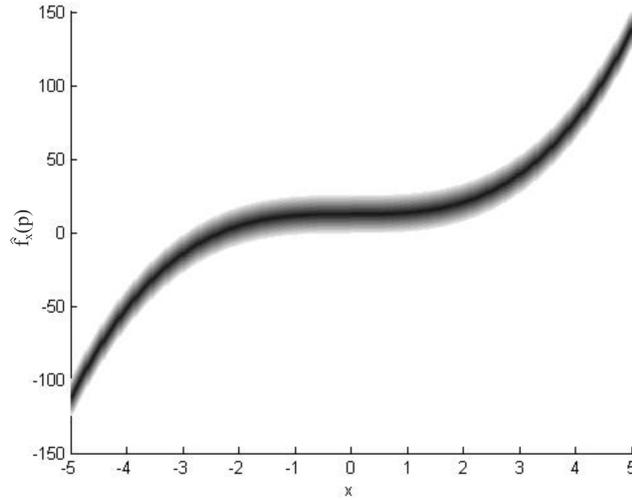


Figura 3.2-7. Gráfico de $\widehat{f}_x(p)$.

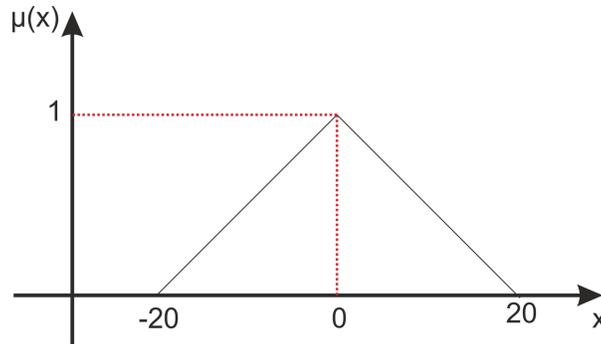


Figura 3.2-8. Função de pertinência do número fuzzy p .

Sendo assim, a extensão da função $f(x)$, ou seja, \widehat{f}_x pode ser representado pela Figura 3.2-7. Neste gráfico, as curvas mais escuras possuem grau de pertinência maior ao conjunto fuzzy das funções, enquanto que as curvas mais claras possuem grau de pertinência menor. Esta representação será frequentemente utilizada durante o texto.

Por fim, fixando $x = 1$ e aplicando a extensão de Zadeh à $f_1(p)$ em relação à p , temos como imagem $\widehat{f}_1(p) = 1^3 + [-20, 0, 20]$. Utilizando o Teorema 3.1, podemos escrever a imagem em termos de seus α -níveis.

$$[\widehat{f}_1(p)]^\alpha = f_1([p]^\alpha) = 1 + [20\alpha - 20, -20\alpha + 20] = [-20\alpha - 19, -20\alpha + 21] \quad (3.13)$$

De forma geral, podemos escrever em função de x da seguinte forma:

$$[\widehat{f}_x(p)]^\alpha = [20\alpha - 19 + x^3, -20\alpha + 21 + x^3]. \quad (3.14)$$

Na próxima seção utilizaremos o mesmo raciocínio empregado acima em funções que representam a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

3.2.5 Extensão do fluxo determinístico

Utilizando-se do Princípio de Extensão de Zadeh, vamos estudar os sistemas de EDO nos quais existe incerteza sobre o valor de uma determinada informação de entrada. Mais especificamente, nos concentraremos no caso em que a condição inicial é fuzzy. Basicamente, encontraremos a solução determinística de um sistema clássico e aplicaremos o Princípio de Extensão de Zadeh nesta solução.

Consideremos o sistema de equações autônomas (3.15).

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} . \quad (3.15)$$

Vamos supor que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, satisfaça os critérios necessários para existência e unicidade de solução. Neste caso, segundo [8], a solução $x(t)$ do sistema (3.15) é unicamente determinada pela condição inicial. Para enfatizar isto, vamos representar tal solução por

$$\varphi_t(x_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ou seja, $\varphi_0(x_0) = x_0$ e $\varphi'_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0))$; a solução $\varphi_t(x_0)$ é denominada fluxo gerado pelo campo vetorial f .

Vamos admitir que a condição inicial seja incerta, ou seja, $x(0) = \widehat{x}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, então temos um sistema fuzzy associado.

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Neste caso, a solução depende de uma condição inicial fuzzy. A solução *fuzzy* ou *fluxo fuzzy* para o sistema associado (3.16), por esta abordagem, é definida como sendo a função obtida pela aplicação do Princípio de Extensão de Zadeh ao fluxo determinístico $\varphi_t(x_0)$, obtemos assim:

$$\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0) : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \quad (3.17)$$

Pela continuidade de $\varphi_t(x_0)$ com relação à condição inicial x_0 , a igualdade

$$[\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)]^\alpha = \varphi_t([\widehat{x}_0]^\alpha) \quad (3.18)$$

é satisfeita para todo $\alpha \in [0, 1]$ segundo o Teorema 3.1. Portanto, a trajetória determinada por $\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)$, consiste de uma família de trajetórias determinísticas dadas por φ_t . Para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, o grau de pertinência da trajetória $\varphi_t(\bar{x})$ em $\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)$ é igual ao grau de pertinência de \bar{x} em \widehat{x}_0 pois, pelo Princípio de Extensão de Zadeh.

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)}(\varphi_t(\bar{x})) = \sup\{\mu_{\widehat{x}_0}(\tau) : \varphi_t(\tau) = \varphi_t(\bar{x})\} \quad (3.19)$$

A igualdade $\varphi_t(\tau) = \varphi_t(\bar{x})$ vale em particular para $t = 0$, ou seja, $\tau = \bar{x}$. Logo, o supremo é tomado em um conjunto unitário e, portanto.

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\widehat{x}_0)}(\varphi_t(\bar{x})) = \mu_{\widehat{x}_0}(\bar{x}) \quad (3.20)$$

Enfim, segundo [9], podemos definir os sistemas dinâmicos fuzzy através da Extensão de Zadeh da seguinte forma:

Definição 3.6. *Seja $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)$, $X \subset \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}_+$, uma família de aplicações contínuas. Se*

- $\widehat{\varphi}_0 = I$
- $\widehat{\varphi}_t \circ \widehat{\varphi}_s = \widehat{\varphi}_{t+s}, \forall t, s \in \mathbb{R}_+$

então dizemos que a família de aplicações $\widehat{\varphi}_t$ é um sistema dinâmico fuzzy (ou fluxo fuzzy).

Ao longo desta dissertação, iremos estudar algumas ferramentas para a análise qualitativa de fluxos fuzzy definidos no espaço $\mathcal{E}(U)$. Os fluxos fuzzy que iremos trabalhar são aqueles oriundos da extensão de Zadeh de soluções determinísticas de EDO's autônomas. Sendo assim, é essencial para nosso estudo a seguinte definição de solução fuzzy retirada de [9].

Definição 3.7. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_0 \in U$. Dizemos que $\widehat{\varphi}_{t_n} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$, $t \in \mathbb{R}_+$, é uma solução fuzzy para a Equação 3.21 quando $\widehat{\varphi}_t(\chi_{x_0}) = \chi_{\varphi_t(x_0)}$, onde $\varphi_t : U \rightarrow U$ é a solução da equação autônoma*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (3.21)$$

Em particular, trabalharemos essencialmente com $U \subset \mathbb{R}^2$. Portanto, sendo $\varphi_t : U \rightarrow U$ o fluxo gerado pela equação 3.21, a aplicação obtida através da extensão de Zadeh de φ_t é $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$. Como estamos interessados em desenvolver uma análise assintótica da solução fuzzy, consideraremos fluxos definidos para todo $t \geq 0$. O teorema que será apresentado revela a dependência contínua de $\widehat{\varphi}_t$ com relação à condição inicial. Tal fato será bastante útil em análises posteriores.

Teorema 3.3. *Seja $\widehat{\varphi}_{t_n} : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ a solução fuzzy de 3.21. Para todo \mathbf{x}_0 e \mathbf{y}_0 em $\mathcal{E}(U)$ vale*

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \widehat{\varphi}_t(\mathbf{y}_0)) \leq d_\infty(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)e^{Kt} \quad (3.22)$$

para alguma constante $k > 0$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [9].

Os modelos variacionais fuzzy podem comportar vários tipos de incerteza (*fuzziness*), traduzidas por coeficientes, condições iniciais ou pelas próprias variáveis de estado. Se a

subjetividade vem na variável de estado temos *fuzziness demográfica*, se a subjetividade vem nos parâmetros temos *fuzziness ambiental*. Uma metodologia para estudar a evolução de sistemas dinâmicos em que as variáveis são incertas é fornecida pelos sistemas P-fuzzy [4] cuja teoria será apresentada a seguir.

3.3 Sistemas P-fuzzy

Ao utilizarmos modelos clássicos em situações práticas, nos deparamos com algumas dificuldades, dentre as quais podemos citar a obtenção dos valores exatos dos parâmetros e da condição inicial. Normalmente, esses valores são obtidos através de algum tipo de inferência estatística, o que pode demandar muito trabalho ou até mesmo ser inviável. Nesta seção, introduziremos o modelo P-fuzzy que além de modelar situações similares às anteriores, podem ser usados para estimar os valores dos parâmetros e da condição inicial dos sistemas determinísticos.

Antes de falarmos efetivamente dos sistemas P-fuzzy, necessitamos apresentar os sistemas baseados em Regras fuzzy (SBRF), os quais são largamente utilizados na engenharia em sistemas de controle e podem ser aplicados na modelagem em biomatemática, conforme mostraremos a seguir.

3.3.1 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

No cotidiano, as ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Cada indivíduo funciona como uma “caixa-preta”: recebe informações que são interpretadas segundo seus parâmetros e então decide qual atitude tomar. O controle e a execução de tarefas devem seguir uma sequência de “ordens” linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras, capazes de serem decodificadas pelo controlador [4].

Os sistemas baseados em regras fuzzy agem como aplicações, de modo que, para cada variável de entrada (antecedentes) existe uma variável de saída (consequentes) correlacionada. Esta correlação é feita através das regras. Além disso, as variáveis de entrada e saída são chamadas de variáveis linguísticas, pois assumem valores literais como *baixo*,

quente, médio. Para entendermos melhor o SBRF, vamos observar o seguinte exemplo:

Exemplo 3.5. Vamos supor que o governo deseje oferecer um *auxílio medicamento* para cada cidadão e este auxílio será proporcional à necessidade de cada pessoa. Supondo que a necessidade é medida unicamente através da idade de cada cidadão, as seguintes relações podem ser feitas.

1. Se o cidadão é uma **criança** então o auxílio é **alto**.
2. Se o cidadão é um **jovem** então o auxílio é **baixo**.
3. Se o cidadão é um **adulto** então o auxílio é **médio**.
4. Se o cidadão é um **idoso** então o auxílio é **alto**.

As relações apresentadas acima são as chamadas **regras**, de uma forma geral, as regras são escritas da seguinte forma:

Se “estado” Então “resposta”.

As regras apresentadas no exemplo são coerentes conforme o conhecimento prévio que temos sobre a situação, porém não é fácil estabelecer o limiar, por exemplo, entre a idade de uma pessoa que é “criança” e de outra que é “jovem”, ou seja, a fronteira entre as variáveis linguísticas deste exemplo são incertas. Para resolver este problema, podemos representar cada variável através de um *número fuzzy*, sendo assim, podemos representar as funções de pertinência de cada variável linguística da seguinte forma:

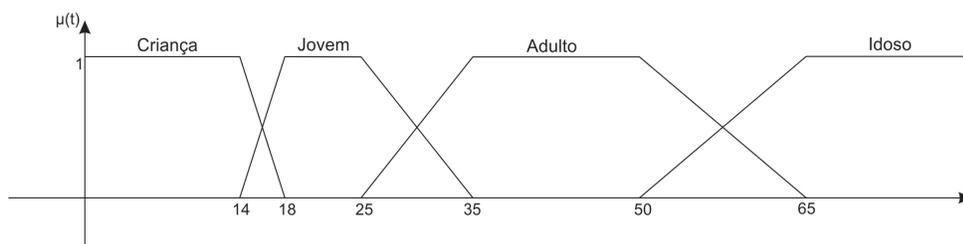


Figura 3.3-9. Função de pertinência dos antecedentes.

Da maneira análoga, podemos adotar o mesmo procedimento para os consequentes, associando a cada variável linguística o seguinte conjunto fuzzy.

Portanto, as regras anteriormente apresentadas relacionam número fuzzy à números fuzzy. Segundo [4], em geral, para um sistema fuzzy qualquer, a cada entrada fuzzy faz-se corresponder uma saída fuzzy. Os controladores fuzzy também têm essa característica. No entanto, se a entrada for crisp (ponto de \mathbb{R}), espera-se que a saída também seja crisp (ponto de \mathbb{R}). Neste caso o sistema fuzzy é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} . O procedimento para obtenção desse tipo de sistema fuzzy pode ser resumido através do diagrama da Figura 3.3-11

Segundo [4], o módulo de Fuzzificação é o estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. É nele que justifica-se a grande importância da participação de especialistas no processo de modelagem de um determinado fenômeno. Baseadas no conhecimento dos especialistas, as funções de pertinência são formuladas para cada conjunto envolvido no processo. Mesmo que a entrada seja *crisp*, essa será fuzzificada por meio de sua função característica.

O controlador usualmente utilizado é o chamado controlador de Mamdani. Sua estrutura pode ser vista com detalhes em [4]. Seguindo o exemplo 3.5, se tomarmos uma

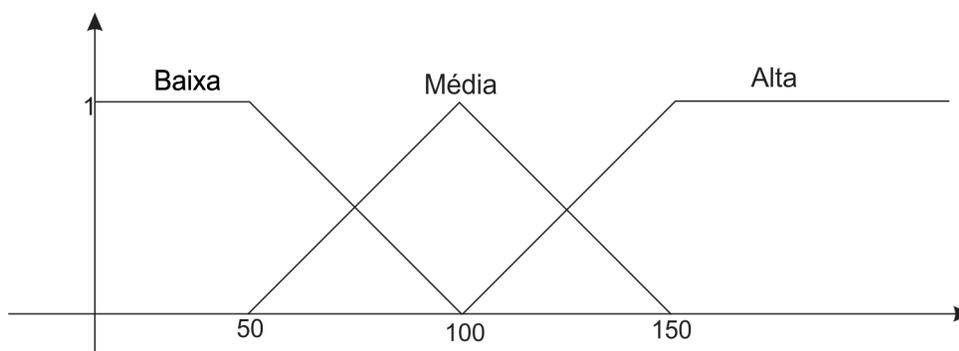


Figura 3.3-10. Função de pertinência dos consequentes.

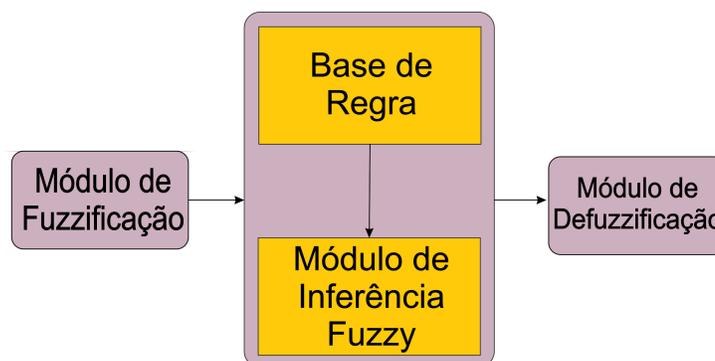


Figura 3.3-11. Arquitetura de um Sistema Baseado em Regras fuzzy

pessoa com 30 anos, ela terá 0,5 de grau de pertinência ao conjunto fuzzy dos jovens e 0,5 de grau de pertinência ao conjunto fuzzy dos adultos.

Por fim, ainda segundo [4], na teoria dos conjuntos fuzzy, a defuzzificação é um processo que permite representar um conjunto fuzzy por um valor *crisp* (número real). Em nosso texto, utilizaremos sempre o centro de massa como método de defuzzificação, já que este é o mais usual. Aplicando a idade de 30 anos à entrada do SBRF do exemplo 3.5, e seguindo o processo ilustrado na Figura 3.3-11, obtemos 68.4 como valor de saída. O gráfico da Figura 3.3-12 mostra o comportamento da saída do SBRF em função da entrada.

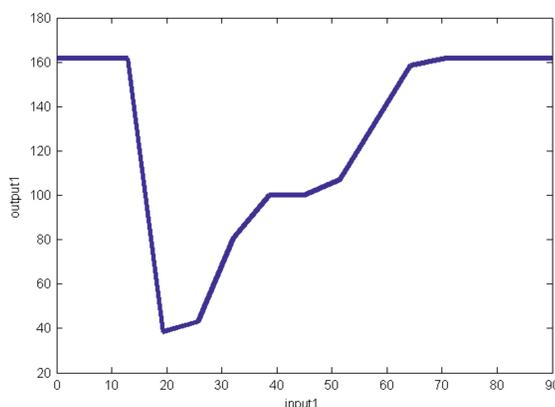


Figura 3.3-12. Idade vs Auxílio medicamento

3.3.2 Modelos unidimensionais P-fuzzy

Nesta dissertação trabalharemos apenas com modelos de equações diferenciais autônomas, portanto, são modelos cuja variação das variáveis dependem exclusivamente do valor das próprias variáveis. Sendo assim, os chamados modelos P-fuzzy são aqueles que utilizam o SBRF para associar à cada variável o valor de sua variação. Iniciaremos esta subseção apresentando os modelos P-fuzzy que possuem apenas uma variável de entrada, ou seja, unidimensionais. Entretanto toda teoria apresentada para esses modelos pode ser estendida para modelos multivariados.

Segundo [4], os modelos P-fuzzy unidimensionais têm a seguinte forma.

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n) \\ X_0 = x(t_0) \end{cases} \quad (3.23)$$

onde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função $F(x) = x + \Delta x$ e Δx é a saída defuzzificada, dada por um controlador fuzzy para a entrada X . Conforme já colocamos, nos modelos apresentados nesse texto, o método de inferência utilizado é o de Mamdani.



Figura 3.3-13. Arquitetura de um sistema P-fuzzy.

A Figura 3.3-13 ilustra de forma resumida o funcionamento de um modelo P-fuzzy.

O processo iterativo apresentado na Figura 3.3-13 é análogo e pode ser visto como a aplicação de um método numérico para resolução de equações diferenciais, portanto, no bloco “método numérico” poderíamos utilizar qualquer método numérico com essa finalidade, por exemplo, Euler, Euler aprimorado, Runge-Kutta ou qualquer outro. Em nossas simulações utilizamos sempre o método de Euler, pois produz resultados satisfatórios e não demanda muito esforço computacional.

Para ilustrar o processo apresentado anteriormente, vamos apresentar um modelo P-fuzzy que representa o modelo de Malthus.

Exemplo 3.6. *Modelo P-fuzzy (Malthus)*

As funções de pertinência da entrada e saída estão dispostas conforme a Figura 3.3-14

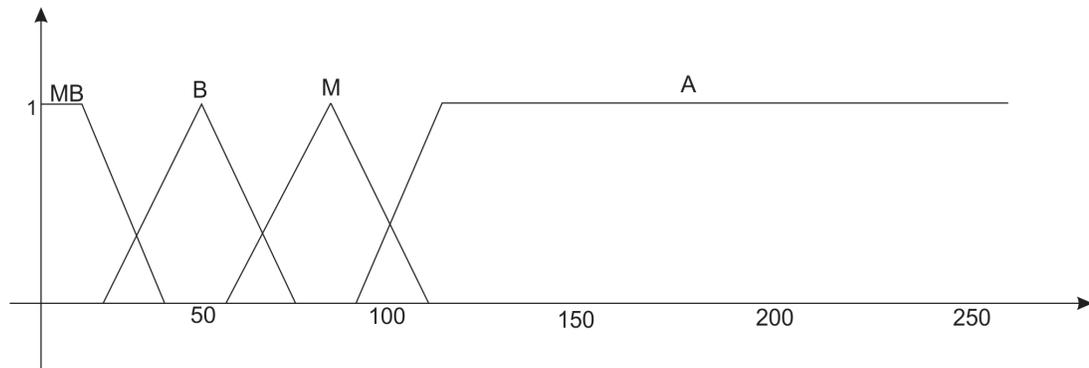


Figura 3.3-14. Entradas do sistema P-fuzzy para o modelo de Malthus.

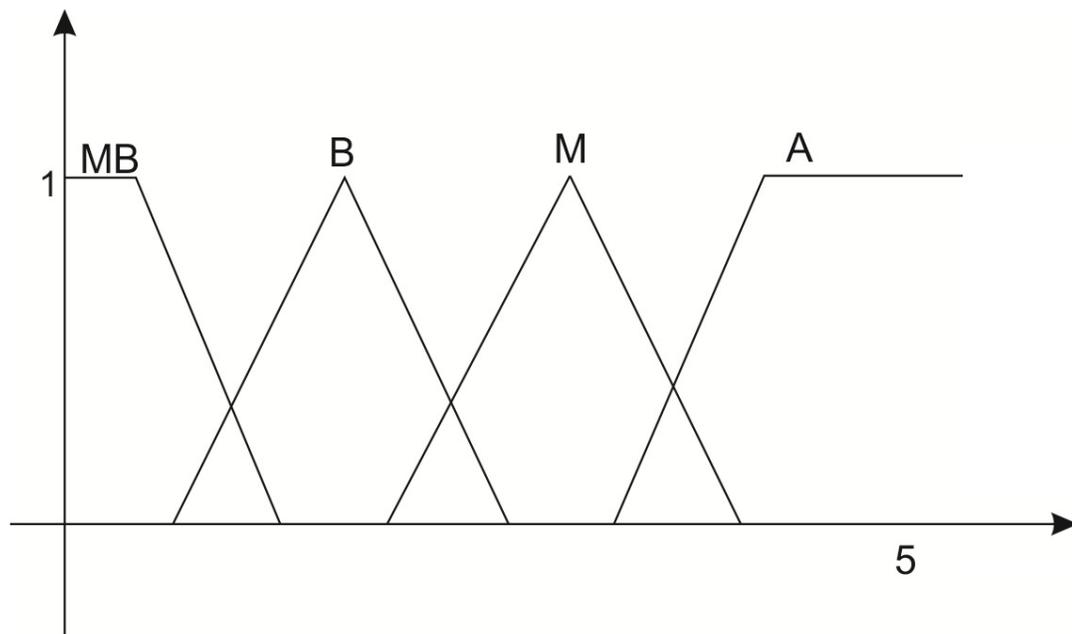


Figura 3.3-15. Saídas do sistema P-fuzzy para o modelo de Malthus.

As variáveis de entrada representam a quantidade de uma determinada espécie enquanto que a saída representam a variação dessas variáveis. O número fuzzy “MB” significa uma quantidade “Muito baixa” da espécie, assim como “B - Baixa”, “M - Média” e “A - Alta”.

As regras utilizadas para associar as variáveis de entrada com as de saída são as seguintes

1. R_1 : Se XMB então ΔXMB
2. R_2 : Se XB então ΔXB

3. R_3 : Se XM então ΔXM

4. R_4 : Se XA então ΔXA

Portanto, utilizando-se um processo iterativo como descrito na Figura 3.3-13, obtemos o gráfico conforme Figura 3.3-16.

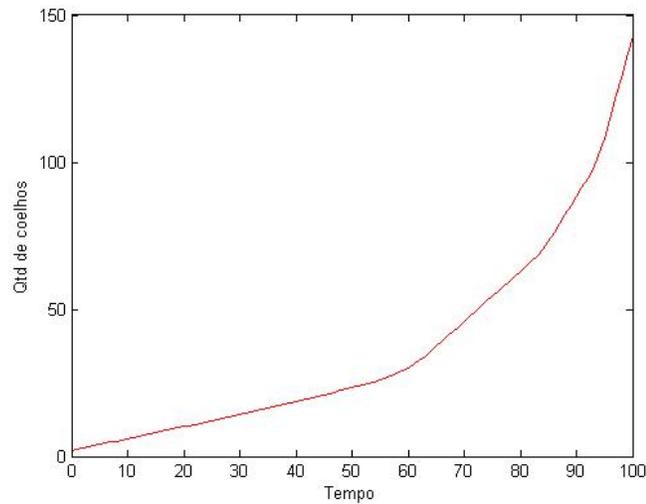


Figura 3.3-16. Gráfico do sistema P-fuzzy para o modelo de Malthus com condição inicial $x_0 = 1$

É notável que o comportamento do sistema P-fuzzy apresentado é muito parecido com o modelo de Malthus clássico, ou seja, obtemos um modelo similar ao determinístico sem a necessidade de utilizarmos equações. É importante ficar claro que este não é o único modelo P-fuzzy para Malthus, algumas modificações nas funções de pertinência (quantidade ou forma) podem preservar as características do modelo.

Para evidenciar ainda mais a capacidade dos modelos P-fuzzy, no próximo exemplo, apresentaremos o modelo logístico. Neste caso, o raciocínio para construção do modelo deve levar em consideração a inibição da quantidade de população.

Exemplo 3.7. O modelo logístico pode ser construído com as seguintes entradas e saídas:

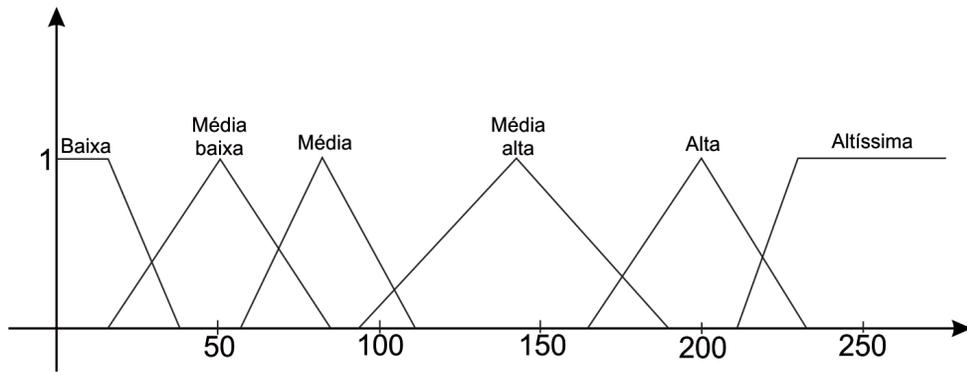


Figura 3.3-17. Entrada do sistema P-fuzzy para o modelo logístico.

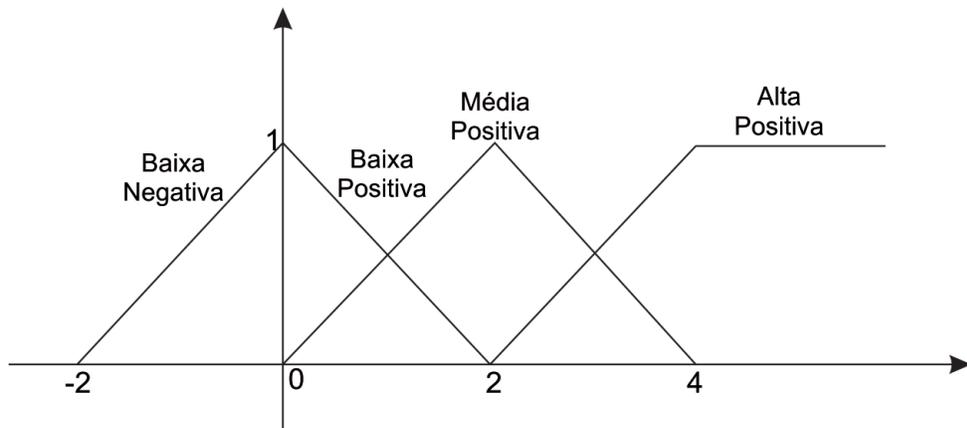


Figura 3.3-18. Saída do sistema P-fuzzy para o modelo logístico.

As regras utilizadas pelo controlador fuzzy são as seguintes:

1. R_1 : Se X Baixa então ΔX Baixa Positiva
2. R_2 : Se X Média Baixa então ΔX Média Positiva
3. R_3 : Se X Média então ΔX Alta Positiva
4. R_4 : Se X Média Alta então ΔX Média Positiva
5. R_5 : Se X Alta então ΔX Baixa Positiva
6. R_6 : Se X Altíssima então ΔX Baixa Negativa

Assim como fizemos para o modelo Malthusiano, utilizando um processo iterativo como descrito na Figura 3.3-13 obtemos o gráfico da Figura 3.3-19 como saída. É notável que

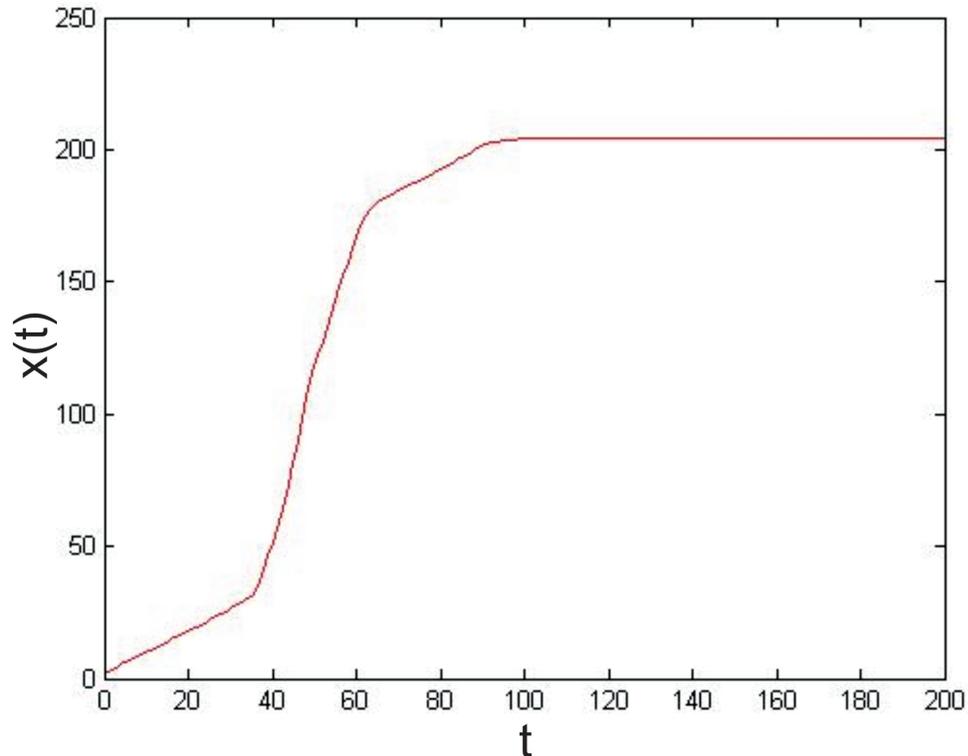


Figura 3.3-19. Gráfico do sistema P-fuzzy para o modelo Logístico.

o gráfico da Figura 3.3-19 tem o comportamento bastante similar ao gráfico do modelo logístico clássico.

Os modelos apresentados anteriormente podem ser utilizados por exemplo, para determinar os parâmetros desconhecidos dos modelos determinísticos através de um ajuste de curva, deste modo, os parâmetros seriam estimados segundo o conhecimento de um especialista sobre o assunto modelado. Além disso, a compreensão do modelo P-fuzzy é mais acessíveis para pesquisadores de outras áreas do que as próprias equações diferenciais.

3.3.3 Pontos de equilíbrio para sistemas P-fuzzy

Como vimos no primeiro capítulo, os modelos baseados em EDOs podem ser analisados qualitativamente e uma das principais características a ser analisada é a existência de pontos de equilíbrio e suas classificações. Este assunto possui uma teoria elaborada e um pouco laboriosa em suas demonstrações, no entanto, vamos apresentar uma idéia

superficial sobre tal conteúdo. Detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em [29].

Ordenação das regras

Para um estudo analítico de estabilidade em sistemas P-fuzzy é necessário estabelecer algumas condições para construção da base de regras, tais condições são listadas abaixo.

Definição 3.8. *Uma base de regras é dita “Bem ordenada” se satisfazer as seguintes condições:*

1. Os universos devem ser intervalos limitados de \mathbb{R} .
2. Os conjuntos fuzzy da base de regras devem ser números fuzzy
Lembrando que um subconjunto fuzzy A é chamado de *número fuzzy* quando o conjunto universo no qual sua função de pertinência está definida, é o conjunto dos números reais e satisfaz às seguintes condições:
 - (a) todos os α -níveis de A são não vazios, com $0 \leq \alpha \leq 1$;
 - (b) todos os α -níveis de A são intervalos fechados de \mathbb{R} ;
 - (c) o $suppA = x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0$ é limitado.
3. No máximo duas regras devem ser ativadas de cada vez, isto é, cada elemento do universo deve ter pertinência não nula a no máximo dois antecedentes.
4. Os elementos de pertinência máxima (igual a 1) pertencem somente a um dos números fuzzy da base de regras, isto é, têm grau de pertinência nula aos demais números fuzzy das regras;
5. A base de regras deve ser ordenada monotonicamente (crescente ou decrescente), isto é, os qualificadores dos antecedentes devem ser “ordenados”. Formalmente isso significa que o maior elemento do suporte do antecedente da regra R_i deve ser menor que o maior elemento do suporte do antecedente da regra seguinte R_{i+1} .

Sendo assim, todos os resultados que apresentaremos nesse texto consideram as regras construídas conforme as condições acima. Além da boa ordenação, precisamos ainda definir o conceito de oposição semântica para estudarmos os pontos de equilíbrio em sistemas P-fuzzy.

Oposição semântica

Segundo [4], se a base de regra é bem ordenada, dizemos que a oposição semântica é caracterizada pela alternância de sinais nas variações (consequentes). O exemplo seguinte ajudará na compreensão desta definição.

Exemplo 3.8. *Vamos supor um sistema P-fuzzy com as entradas e saídas dadas na Figura 3.3-20*

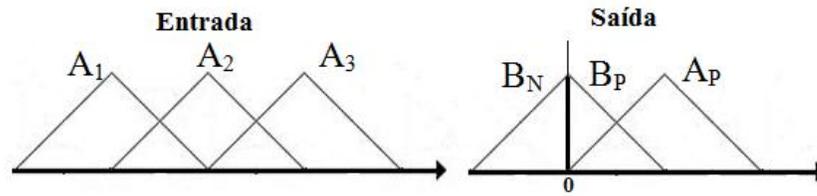


Figura 3.3-20. Sistema P-fuzzy com oposição semântica.

Vamos considerar as seguintes regras:

1. R_1 : Se XA_1 então ΔXA_P
2. R_2 : Se XA_2 então ΔXB_P
3. R_3 : Se XA_3 então ΔXB_N

Neste caso a oposição semântica ocorre entre as regras R_2 e R_3 , pois a regra R_2 associa um conjunto fuzzy a um consequente positivo enquanto que a regra R_3 associa um conjunto fuzzy a um consequente negativo. Para a existência da oposição semântica é necessário que o suporte do consequente negativo esteja contido em \mathbb{R}_- e o suporte do consequente positivo esteja contido em \mathbb{R}_+ . A existência de oposição semântica está diretamente relacionada com a existência de pontos de equilíbrio.

Existência dos pontos de equilíbrio

Como vimos, os sistemas P-fuzzy não possuem equações explícitas em sua estrutura, por isso, uma pergunta pertinente seria. Como encontrar ou pelo menos, garantir a existência de pontos de equilíbrio em sistemas P-fuzzy? O Teorema 3.4 proposto por [29] vem responder essa questão.

Teorema 3.4. *Suponha uma base de regra bem ordenada e que os números fuzzy A_i e A_{i+1} tenham funções de pertinência contínuas e que as regras R_i e R_{i+1} com antecedentes A_i e A_{i+1} , apresentam oposição semântica nos consequentes B_i e B_{i+1} . Nessas condições o intervalo.*

$$I^* = \text{supp}A_i \cap \text{supp}A_{i+1} \neq \emptyset \quad (3.24)$$

possui pelo menos um equilíbrio do sistema.

Se observarmos no exemplo 3.7 notamos que existe oposição semântica entre as regras R_5 e R_6 . Podemos notar que o modelo P-fuzzy logístico, possui uma base de regra bem ordenada e as funções de pertinência dos números fuzzy dos antecedentes são contínuas, portanto satisfaz as condições do Teorema 3.4, e assim o intervalo em destaque na Figura 3.3-21 possui pelo menos um ponto de equilíbrio do sistema.

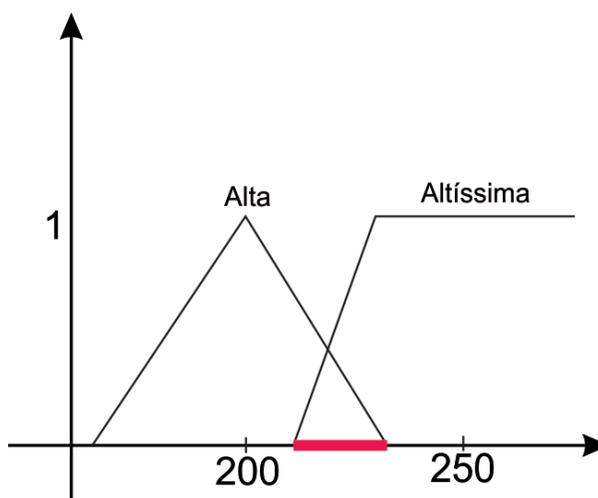


Figura 3.3-21. Intervalo viável de equilíbrio.

Não foi possível identificar qual é o ponto de equilíbrio, mas apenas a região onde existe pelo menos um ponto. Além disso, sabemos que para o modelo logístico, o ponto de equilíbrio encontrado é estável, porém, assim como ocorre no caso clássico, existe uma forma de classificar os pontos de equilíbrio quanto ao tipo de estabilidade (estável ou instável). A teoria de tal procedimento exige a averiguação de diversos casos distintos, o que a torna inviável para ser inserida neste texto, deste modo, estudaremos nos capítulos posteriores apenas os casos que forem de nosso interesse, detalhes sobre a classificação de pontos de equilíbrio P-fuzzy podem ser encontrados com riqueza de detalhes em [29].

3.3.4 Sistemas P-fuzzy bidimensionais

Os sistemas P-fuzzy podem ser utilizados para modelar problemas que envolvem mais de uma variável, um exemplo são os modelos de interação entre espécies em um ecossistema. O mais simples desses modelos são os bidimensionais, isto é, aqueles que envolvem a interação entre apenas duas espécies. Podemos definir sistema bidimensional P-fuzzy da seguinte forma, conforme [29]:

Definição 3.9. *Sejam x e y duas variáveis de estado, um sistema dinâmico P-fuzzy bidimensional é um sistema de equações de diferenças, dado por*

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + \Delta_1(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = Y_n + \Delta_2(X_n, Y_n) \end{cases} \quad (3.25)$$

onde $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é a condição inicial e $\Delta(X_n, Y_n)$ é obtido por meio de um sistema baseado em regras fuzzy.

Para entendermos melhor o funcionamento de um sistema P-fuzzy bidimensional, apresentaremos um exemplo onde existem duas entradas no sistema. A dinâmica do sistema P-fuzzy bidimensional ainda segue a arquitetura apresentada na Figura 3.3-13, diferenciando-se apenas pelo fato de trabalhar com duas variáveis simultaneamente.

Exemplo 3.9. Não nos atentaremos para uma interpretação biológica detalhada deste modelo, mas apenas para sua estrutura matemática. Todavia, este sistema P-fuzzy representa uma situação bastante interessante no contexto da ecologia, conforme veremos nos capítulos posteriores.

A Figura 3.3-22 consegue representar basicamente todo um sistema P-fuzzy. As funções de pertinência das variáveis de entrada estão descritas sobre o eixo horizontal e vertical, sendo que no eixo horizontal, a variável representa a quantidade de presas em um determinado ecossistema enquanto que no eixo vertical, a variável representa a quantidade de predadores. Este modelo representará a interação entre ambas espécies, entretanto, maiores detalhes sobre a interpretação biológica serão comentados futuramente.

A única informação que não consta no diagrama da Figura 3.3-22 são as funções

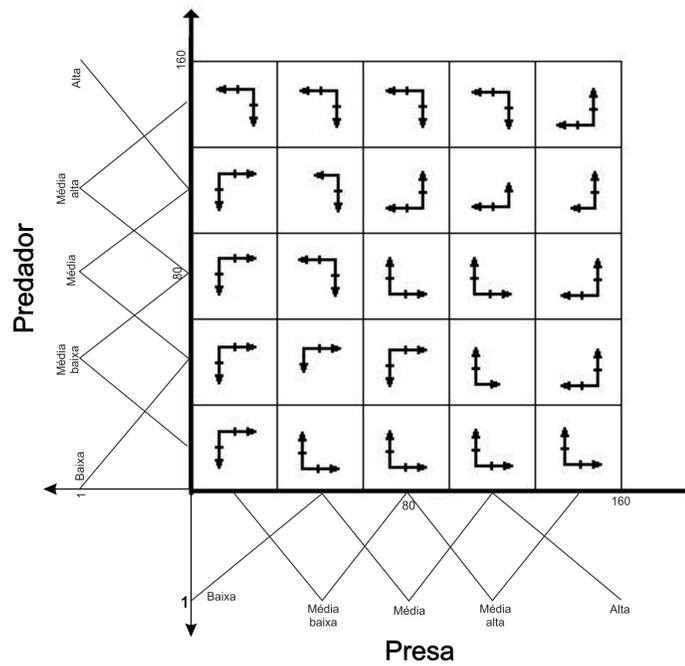


Figura 3.3-22. Entradas de um sistema P-fuzzy bidimensional.

de pertinência dos consequentes (saída) que, por sua vez, estão representadas na Figura 3.3-23. Ambas as variáveis de saída representam a variação da presa e do predador, respectivamente.

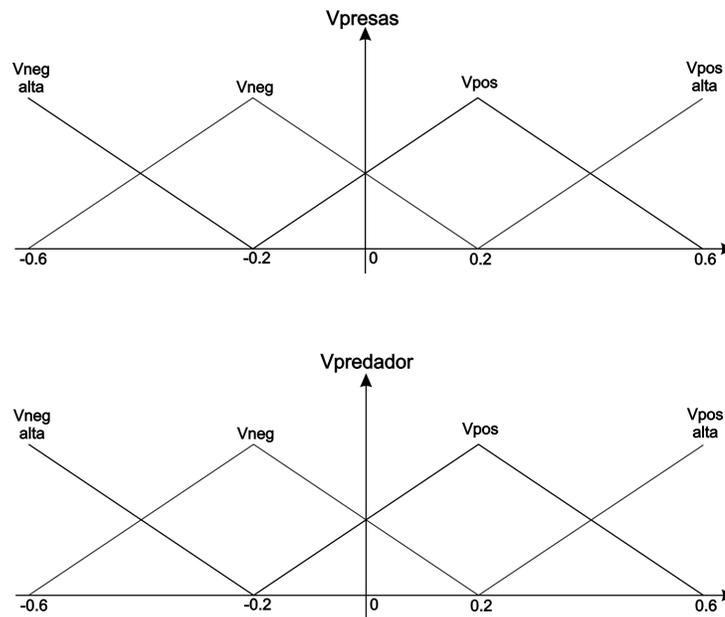


Figura 3.3-23. Saída de um sistema P-fuzzy bidimensional.

As regras destes modelos P-fuzzy também são representadas sucintamente através do diagrama da Figura 3.3-22. Cada quadrado do diagrama representa uma regra e em cada um existem duas setas, uma horizontal e outra vertical, representando respectivamente a variação das presas e dos predadores. Vamos tomar por exemplo o quadrado mais próximo da origem, ele representa a seguinte regra:

R: **Se Presa é Baixa e Predador é Baixa então Variação da presa é Alta positiva e Variação do predador é Alta negativa.**

O sentido da seta representa o sinal da variação enquanto que o tamanho representa a intensidade. O diagrama da Figura 3.3-22 pode ser visto como uma síntese do campo de direções do sistema P-fuzzy em questão, tornando possível um bom entendimento prévio sobre o comportamento da saída no plano de fase do sistema P-fuzzy. Por exemplo, tomando como ponto inicial (150,100), obtemos a trajetória da Figura 3.3-24 seu em plano de fase.

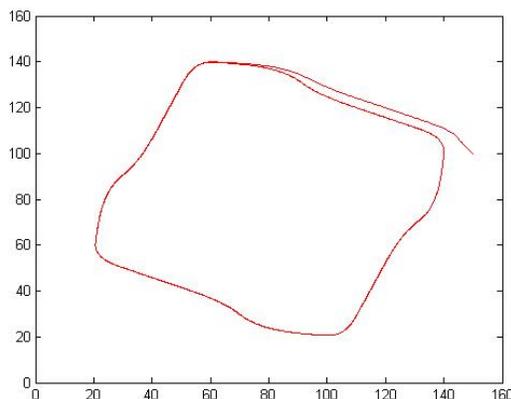


Figura 3.3-24. Projção no plano x vs y de uma solução do sistema P-fuzzy bidimensional

Assim como podemos perceber pela Figura 3.3-24, o modelo P-fuzzy representa uma situação em que para qualquer condição inicial, a solução converge para uma órbita periódica. Este fato será de grande relevância no último capítulo deste texto.

3.3.5 Conjunto viável de equilíbrio para sistemas bidimensionais

O Teorema 3.4 que garante a existência de pontos de equilíbrio em um determinado intervalo, pode ser estendido para o caso bidimensional e até mesmo para dimensões

maiores. Segundo [29], para o caso bidimensional, o teorema pode ser colocado da seguinte forma:

Teorema 3.5. *Sejam $\{A_i\}_{1 \leq i \leq K_1}$ e $\{B_j\}_{1 \leq j \leq K_2}$, famílias de subconjuntos fuzzy, respectivamente sucessivas, associados às variáveis linguísticas X e Y , respectivamente. Se $\text{supp}(A^*)$ e $\text{supp}(B^*)$ são conjuntos viáveis de equilíbrio, então dizemos que $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$ é uma **região viável de equilíbrio** para o sistema P-fuzzy.*

A Figura 3.3-25 ilustra o teorema anterior. Assim como ocorre no caso unidimensional, uma região viável de equilíbrio possui pelo menos um ponto de equilíbrio.

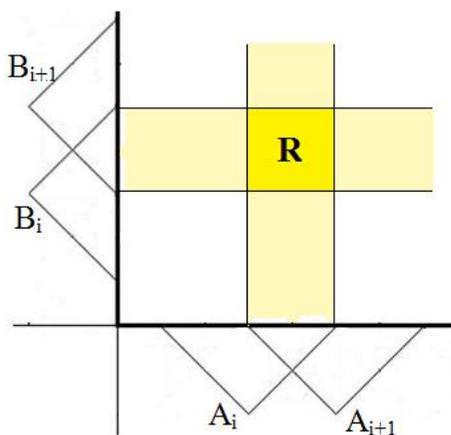


Figura 3.3-25. Conjunto viável.

Na Figura 3.3-25 mostramos como identificar graficamente uma região viável de equilíbrio. Na Figura 3.3-26, apresentamos uma configuração da base de regra que resulta em um ponto de equilíbrio. É importante ressaltar que essa não é a única configuração que resulta neste tipo de ponto, segundo [29] existem ainda outros 7 tipos de configuração das setas que garante a existência de um ponto de equilíbrio. Também em [29] é feito um estudo detalhado para casos específicos de números fuzzy de entrada e de saída, além disso é feito um estudo detalhado sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio encontrados, neste texto, iremos apresentar apenas alguns fragmentos deste estudo conforme a necessidade exigida nas futuras análises.

Em resumo, apresentamos de forma sucinta a teoria de sistemas P-fuzzy, cuja característica fundamental é o poder de modelagem através do conhecimento de um especialista, sem a necessidade de estudos estatísticos e com equações. Outra característica importante é que a modelagem através de sistemas P-fuzzy é bastante recente e portanto, existem

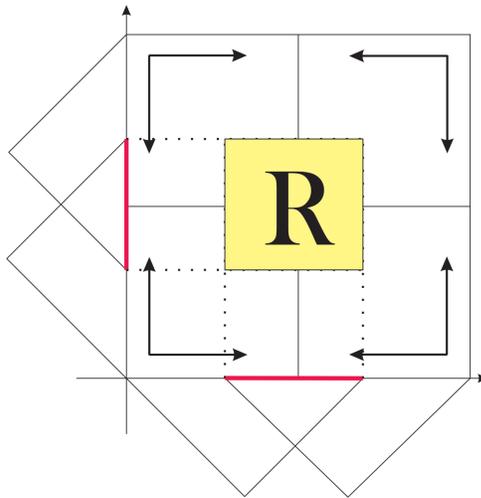


Figura 3.3-26. Conjunto viável.

muitas conclusões e resultados a serem explorados. Este assunto será novamente abordado no capítulo 5, onde faremos um estudo a cerca dos ciclos limites em sistemas P-fuzzy bidimensionais.

3.4 Conclusão

A teoria fuzzy nos permite incorporar as incertezas existentes num processo de modelagem ao modelo estudado, tornando-o assim, mais coerente com determinados fenômenos. Através da Extensão de Zadeh, obtemos modelos que possuem incerteza quanto ao valor da condição inicial ou até mesmo, quanto ao valor de um determinado parâmetro. Já os modelos P-fuzzy, nos permitem fazer uma modelagem mais “rústica”, baseando-se em informações incertas (a incerteza não é acerca da veracidade, mas sim sobre a exatidão de um determinado valor) e até mesmo vagas. Vimos que os modelos que envolvem fuzzy também são passíveis de serem analisados qualitativamente e que esta análise é de suma importância para o entendimento do mesmo.

Em resumo, os três capítulos anteriores formam uma rápida abordagem de importantes conceitos envolvidos na modelagem matemática, em especial, na biomatemática. Dentre estes conceitos, mostramos como extrair informações qualitativas de sistemas de EDOs autônomas e estudamos o Teorema de Poincaré-Bendixson, que garante a existência de ciclos limites em sistemas bidimensionais sob determinadas condições. Por fim, vimos a

teoria fuzzy e como incorporá-la à modelagem matemática análoga àquela feita através das EDOs autônomas.

Os próximos dois capítulos são os objetivos principais dessa dissertação. No primeiro, estudaremos uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas dinâmicos em $\mathcal{E}(U)$. Já no segundo, abordaremos este teorema para modelos P-fuzzy, estabelecendo assim, condições sobre a base de regras para existência de órbitas periódicas.

Capítulo 4

Teorema de Poincaré-Bendixson em espaços métricos fuzzy

O Teorema de Poincaré-Bendixson é amplamente utilizado na análise qualitativa de sistemas bidimensionais de EDOs autônomas, seja no escopo da matemática aplicada (Exemplo: controle de sistemas automatizados) ou seja na própria teoria matemática, como estratégia para encontrar pontos de equilíbrio e órbitas periódicas, tal fato justifica a importância e a relevância de analisá-lo num contexto fuzzy, isto é, verificaremos a validade do Teorema de Poincaré-Bendixson em modelos que incorporam as incertezas dos dados obtidos no processo de modelagem, sendo esta verificação o objetivo principal deste capítulo. Para alcançar tal objetivo, apresentaremos algumas definições e resultados propostos em [9] que servirão para uma discussão aprofundada sobre o Teorema de Poincaré-Bendixson em espaços métricos fuzzy.

Basicamente, na seção 4.2, definiremos o conceito de ponto periódico fuzzy e de órbita periódica fuzzy, em seguida, apresentaremos resultados demonstrados em [9] que relacionam propriedades dos sistemas determinísticos com propriedades do sistema fuzzy (via extensão de Zadeh). Na seção 4.3, discutiremos alguns resultados propostos em [9] que se aproximam do Teorema de Poincaré-Bendixson para espaços métricos fuzzy, além disso, propomos um resultado mais geral que o apresentado em [9] e exemplificaremos a teoria anteriormente discutida através do modelo presa-predador de Holling-Tanner e do modelo presa-predador de Gause.

4.1 Introdução

Já observamos que a teoria de Poincaré-Bendixson está diretamente relacionada com o comportamento periódico do conjunto ω -limite de uma determinada solução. Já observamos também que modelos com soluções periódicas representam eventos da natureza que se repetem com determinada frequência e conhecer as condições para que este processo repetitivo ocorra pode ser crucial na solução de alguns problemas práticos. No entanto, uma pergunta pertinente para essa altura do texto, seria: “Qual é a influência das incertezas inerentes num processo de modelagem no comportamento periódico da solução de um determinado modelo?” Ou em outras palavras, “quais seriam as consequências de se considerar determinadas incertezas no comportamento qualitativo da solução obtida”

Tais perguntas motivam um estudo mais aprofundado sobre o comportamento das soluções dos sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy, mais especificamente, motivam um estudo sobre o Teorema de Poincaré-Bendixson nesse contexto.

4.2 Órbitas periódicas em espaços métricos fuzzy

Assim como fizemos no capítulo 3, vamos introduzir conceitos essenciais para o estudo de sistemas dinâmicos em fluxos fuzzy, no entanto, nos concentraremos naquilo que se refere às órbitas periódicas e ciclos limites. Um estudo detalhado sobre tal assunto pode ser encontrado em [9].

O primeiro conceito que se faz necessário introduzir é o de ponto periódico fuzzy, já que a partir deste, poderemos definir órbita periódica fuzzy e discutir os resultados obtidos sobre tais definições. A definição de ponto periódico pode ser encontrada em [9] da forma que segue.

Definição 4.1. *Dizemos que um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto θ -periódico para o fluxo fuzzy quando*

$$\widehat{\varphi}_\theta(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \quad e \quad \widehat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p} \quad se \quad t \in (0, \theta).$$

Ainda podemos definir os pontos periódicos fuzzy através de seus α -níveis, ou seja,

$\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto θ -periódico se

$$\varphi_\theta([\mathbf{p}]^\alpha) = [\mathbf{p}]^\alpha \quad e \quad \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) \neq [\mathbf{p}]^\alpha \quad t \in (0, \theta) \quad (4.1)$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Observação 3. Como dissemos no capítulo anterior, um ponto determinístico é um caso particular de ponto fuzzy. Em relação aos pontos periódicos essa “regra” continua valendo, isto é, todo ponto periódico clássico é um ponto periódico fuzzy, portanto a existência de pontos periódicos clássicos garante a existência de pontos periódicos fuzzy.

A definição de ponto periódico fuzzy se faz necessária para definirmos as órbitas periódicas fuzzy. Entretanto, antes de discutirmos tal definição, devemos fazer algumas considerações a cerca dos pontos periódicos fuzzy e suas órbitas.

Por exemplo, o modelo 2.11 (Lotka-Volterra) possui pontos periódicos do ponto de vista clássico, esses pontos são no entanto, casos particulares de números fuzzy, logo são pontos periódicos fuzzy. Por outro lado, existem pontos fuzzy A que não são periódicos para o modelo de Lotka-Volterra, isso acontece quando $\text{supp}(A)$ contém pelo menos dois pontos de período distinto. Este último caso pode ser observado na Figura 4.2-1, onde o ponto inicial fuzzy é “desconfigurado” com a evolução do tempo, ou seja, este ponto fuzzy não é periódico.

Assim como acontece no caso determinístico, se $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U)$ também pertencer à órbita fuzzy $\gamma(\mathbf{x}_0)$, sendo \mathbf{x}_0 um ponto fuzzy θ -periódico, então \mathbf{x} é um ponto periódico com o mesmo período de \mathbf{x}_0 . De fato, podemos considerar $\mathbf{x} = \widehat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0)$ para algum $s \in (0, \theta)$, sendo assim, escrevendo os números fuzzy em termos de α -níveis podemos obter o seguinte resultado através das propriedades do fluxo determinístico.

$$\varphi_\theta([\mathbf{x}]^\alpha) = \varphi_\theta(\varphi_s([\mathbf{x}_0]^\alpha)) = \varphi_s(\varphi_\theta([\mathbf{x}_0]^\alpha)) = \varphi_s([\mathbf{x}_0]^\alpha) = [\mathbf{x}]^\alpha.$$

Vale ressaltar que na primeira igualdade utilizamos o fato de que $[\mathbf{x}]^\alpha = [\widehat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0)]^\alpha = \varphi_s([\mathbf{x}_0]^\alpha)$. Se considerarmos $t > \theta$, podemos escrever para algum $s \in [0, \theta)$ que $t = n\theta + s$, com $n \in \mathbb{N}$ e assim, desenvolvemos os seguintes cálculos:

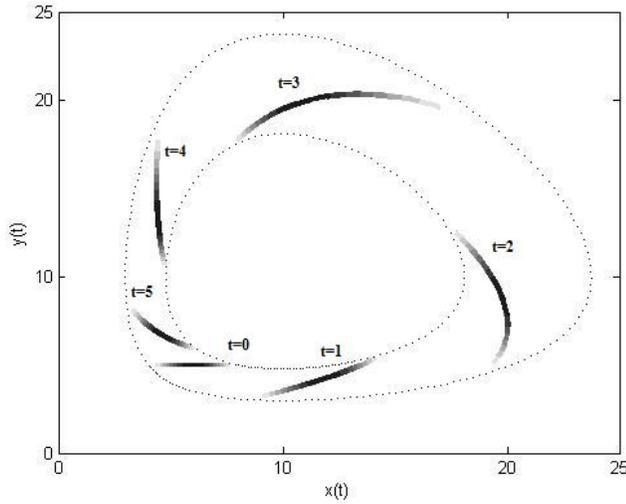


Figura 4.2-1. Modelo de Lotka-Volterra com ponto inicial fuzzy.

$$\varphi_t([\mathbf{x}_0]^\alpha) = \varphi_{n\theta+s}([\mathbf{x}_0]^\alpha) = \varphi_s(\varphi_{n\theta}([\mathbf{x}_0]^\alpha)) = \varphi_s([\mathbf{x}_0]^\alpha)$$

Os dois cálculos anteriores são muito importantes pois nos levam as seguintes conclusões: numa órbita $\gamma(\mathbf{x}_0)$ com período θ , para qualquer $t \in \mathbb{R}_+$ sempre vai existir um $s \in [0, \theta)$, com $\theta > 0$, tal que $\widehat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0) = \widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ e a igualdade $\widehat{\varphi}_{t+\theta}(\mathbf{x}_0) = \widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ sempre é verificada.

Enfim, apresentaremos a definição de órbita periódica fuzzy conforme encontrada em [9].

Definição 4.2. A órbita γ da solução fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x})$, onde \mathbf{x} é um ponto periódico fuzzy é chamada de órbita periódica fuzzy no conjunto $\mathcal{E}(U)$, sendo

$$\gamma = \{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}) : t \geq 0\}$$

A Figura 4.2-2 ilustra um caso de órbita periódica fuzzy não determinística. Podemos observar que o ponto inicial é periódico, com período igual à 2π . Neste caso, todos os pontos do suporte da condição inicial fuzzy são periódicos e possuem mesmo período.

Em resumo, definimos até então o conceito de ponto periódico fuzzy e órbita periódica

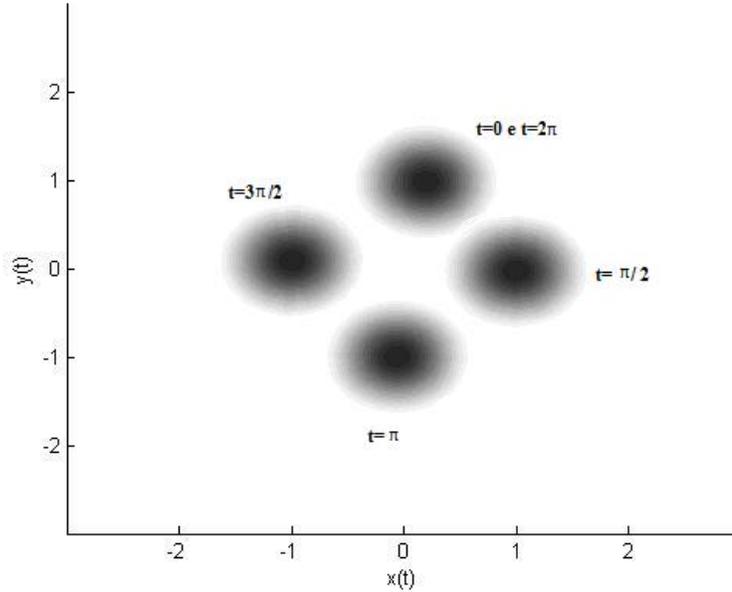


Figura 4.2-2. Sistema com soluções de mesmo período.

fuzzy. É importante observar que no segundo exemplo, Figura 4.2-2, temos de fato, uma órbita periódica fuzzy. Já no primeiro exemplo, Figura 4.2-1, todas as órbitas periódicas fuzzy são idênticas as órbitas determinísticas, já que cada órbita periódica determinística possui períodos distintos, portanto podemos concluir que a existência de órbitas periódicas fuzzy implica na existência de órbitas periódicas determinísticas e o contrário também é verdadeiro, já que qualquer órbita periódica determinística também é fuzzy.

A seguir, definiremos o conceito de ω -limite para o contexto fuzzy.

Definição 4.3. [9] *Seja $y \in \mathcal{E}(U)$ e $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$, dizemos que \mathbf{y} é um ω -ponto de $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ se existir uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que:*

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}) \rightarrow 0$$

Conseqüentemente, o conjunto ω -limite de uma solução fuzzy pode ser definido da seguinte forma:

Definição 4.4. [9] *O conjunto ω -limite da solução $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$, isto é, $\omega(\mathbf{x}_0)$ é o conjunto de todos os ω -pontos de $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$.*

Na próxima subseção mostraremos alguns resultados referentes às órbitas periódicas fuzzy.

4.2.1 Resultados preliminares quanto às órbitas periódicas fuzzy

Nessa subseção enunciaremos diversos resultados que são utilizados na demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson através da extensão de Zadeh, lembrando que maiores detalhes sobre o assunto abordado poderá ser encontrado em [9].

O primeiro resultado se refere à existência de números fuzzy periódicos a partir da periodicidade de um conjunto de pontos determinísticos. Segue o Teorema:

Teorema 4.1. [9] *Sejam $A \subset U$ tal que todo $x \in A$ é θ -periódico e $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U)$. Se $[\mathbf{x}]^0 \subset A$, então \mathbf{x} é θ -periódico.*

Demonstração. Podemos usar a caracterização de pontos periódicos por α -níveis. Desde que $[\mathbf{x}]^\alpha \subset A$, então

$$\varphi_\theta([\mathbf{x}]^\alpha) = \{\varphi_\theta(x) : x \in [\mathbf{x}]^\alpha\} \quad (4.2)$$

$$= \{x : x \in [\mathbf{x}]^\alpha\} \quad (4.3)$$

O Teorema do ponto fixo de Brouwer assegura que se a função $f : C \rightarrow C$, $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto e convexo, é contínua então f possui um ponto fixo. Isto é, existe $c \in C$ tal que $f(c) = c$ [28]. Portanto, se $[\mathbf{x}]^\alpha$ é convexo para algum $\alpha \in [0, 1]$, então a igualdade $\varphi_t([\mathbf{x}]^\alpha) = [\mathbf{x}]^\alpha$ para $t \in (0, \theta)$ implicaria na existência de um ponto $x \in [\mathbf{x}]^\alpha$ tal que $\varphi_t(x) = x$. Mas isso contraria a hipótese de $x \in [\mathbf{x}]^\alpha \subset A$ ser θ -periódico. \square

Basicamente, o Teorema 4.1 afirma que sob certas condições, se todos os pontos do suporte de um determinado número fuzzy forem de mesmo período então o número fuzzy em questão também tem esse período.

A teoria de equações diferenciais ordinárias possui ferramentas que nos permite classificar uma órbita periódica determinística quanto a sua estabilidade, isto é, a órbita

pode ser identificada como atratora, repulsora ou semi-atratora. Sendo assim, seria importante conhecermos algumas ferramentas que possibilitem tal classificação para órbitas periódicas fuzzy. Como ocorre normalmente, existe uma relação entre a estabilidade de uma órbita determinísticas γ e a estabilidade de uma órbita fuzzy γ , esta relação será apresentada pelo Teorema 4.2.

Teorema 4.2. [9] *Sejam γ uma órbita periódica para φ_t com período $\theta > 0$ e*

$$\gamma = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma \} \quad (4.4)$$

o conjunto periódico fuzzy determinado por γ . Então:

- a) γ é estável para φ_t se, e somente se, γ é estável para $\widehat{\varphi}_t$;
- b) γ é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, γ assintoticamente estável para $\widehat{\varphi}_t$.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada com riqueza de detalhes em [9]

□

Quando dizemos que γ é assintoticamente estável para $\widehat{\varphi}_t$ significa que para qualquer \mathbf{x}_0 pertencente a região de atração de γ que denotaremos por $A(\gamma)$, $d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Apesar de aparentemente simples, o Teorema 4.2 possui um papel muito importante na teoria de estabilidade de ciclos limites em espaços métricos fuzzy, pois relaciona propriedades de estabilidade das órbitas determinísticas com as órbitas fuzzy.

Teorema 4.3. [9] *Suponha que o conjunto periódico fuzzy γ seja assintoticamente estável para $\widehat{\varphi}_t$ com período θ . Então existe uma vizinhança $\mathbf{V} \subset \mathcal{E}(U)$ contendo γ tal que cada ponto de \mathbf{V} possui período assintótico θ .*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada com riqueza de detalhes em [9]

□

O Teorema 4.3 garante a existência de uma região de atração para órbita γ . Observando os dois teoremas anteriores, podemos perceber que a existência de uma órbita periódica assintoticamente estável determinística, garante a existência de uma região de atração para órbita γ , tal fato será bastante útil nos resultados subsequentes.

No Teorema 4.4, o termo $A(\gamma)$ simboliza a região de atração de γ , em outras palavras, $A(\gamma)$ é a região no plano de fase onde qualquer trajetória que ali esteja é atraída para γ .

$$A(\gamma) = \{x_0 \in U : \text{dist}(\varphi_t(x_0), \gamma) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\}.$$

A distância anteriormente citada segue a definição 3.6 e as distâncias d_H utilizadas no teorema abaixo seguem a definição 3.7.

Teorema 4.4. [9] *Sejam γ uma órbita periódica determinística assintoticamente estável e $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$. Se $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\gamma)$ então $\omega(\mathbf{x}_0) \subset \gamma$ é uma órbita periódica fuzzy.*

Demonstração. Como $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\gamma)$, pelo Teorema 4.2, $d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e então, $\omega(\mathbf{x}_0) \subset \gamma$. Vamos mostrar que $\omega(\mathbf{x}_0)$ é uma órbita periódica fuzzy, isto é, $\omega(\mathbf{x}_0) = \gamma(\mathbf{y})$ para algum ponto periódico $\mathbf{y} \in \gamma$.

Seja $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x}_0)$. Pela definição 4.4, existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que $d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}) \rightarrow 0$. Para simplificar a notação, seja $\mathbf{x}_n = \widehat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_0)$. Como \mathbf{y} é um ponto periódico, dado $\epsilon > 0$, existem $N > 0$ e $\eta > 0$ tal que se $n > N$ então $d_\infty(\widehat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}) \leq \epsilon$ para todo $s \in (t_n - \eta, t_n + \eta)$ e $d_\infty(\widehat{\varphi}_s(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}) \geq \epsilon$ para todo $s \in (t_n + \eta, t_{n+1} - \eta)$.

Agora, pela desigualdade triangular temos

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_0), \widehat{\varphi}_{t_n + \theta}(\mathbf{x}_0)) \leq d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}) + d_\infty(\mathbf{y}, \widehat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_0)) + d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_0), \widehat{\varphi}_{t_n + \theta}(\mathbf{x}_0))$$

Pelo Teorema 4.3, $d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_n}(\mathbf{x}_0), \widehat{\varphi}_{t_n + \theta}(\mathbf{x}_0)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, existe $N_0 > 0$ tal que $d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_0), \widehat{\varphi}_{t_n + \theta}(\mathbf{x}_0)) < \frac{\epsilon}{2}$ de modo que

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_n + \theta}(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}) + d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_n + \theta}(\mathbf{x}_0), \widehat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_0)) + d_\infty(\widehat{\varphi}_{t_{n+1}}(\mathbf{x}_0), \mathbf{y}) < \epsilon$$

Portanto, temos que $t_n + \theta \in (t_{n+1} - \eta, t_{n+1} + \eta)$, isto é, $t_{n+1} - t_n \leq \theta + \eta$ para todo $n > N_0$. Pela continuidade do fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$ com relação à condição inicial, mais precisamente pela

desigualdade 3.22 no Teorema 3.3, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_\infty(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_\infty(\widehat{\varphi}_s(\mathbf{x}_n), \widehat{\varphi}_s(\mathbf{y})) < \epsilon, \quad \forall s \leq \theta + \eta.$$

Consideremos $N > 0$ tal que $d_\infty(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) < \delta$ e $t > t_N$. Tomemos $n > N$ tal que $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Então, como $t - t_n \leq \theta + \eta$,

$$\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \gamma(\mathbf{y})) \leq d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \widehat{\varphi}_{t-t_n}(\mathbf{y})) \quad (4.5)$$

$$= d_\infty(\widehat{\varphi}_{t-t_n}(\mathbf{x}_n), \widehat{\varphi}_{t-t_n}(\mathbf{y})) < \epsilon \quad (4.6)$$

□

De modo mais informal, se existe um ciclo limite atrator determinístico e um ponto inicial fuzzy qualquer que tenha o suporte contido na região de atração do ciclo, então este ponto inicial terá o seu conjunto ω -limite contido em uma órbita periódica fuzzy. Mais uma vez, a órbita periódica fuzzy em questão, coincide com a órbita periódica determinística.

4.3 Teorema de Poincaré-Bendixson

Como vimos no Capítulo 3, o Teorema de Poincaré-Bendixson garante que sob certas condições, o conjunto $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica para qualquer x_0 . Porém, quando queremos estudar o ω - limite de um subconjunto A , isto é, $\omega(A)$ não podemos fazer tal afirmação. De fato, de acordo com a Proposição 1.2, quando o conjunto $\gamma(A)$ está contido em um conjunto compacto, então $\omega(A)$ é um compacto, não vazio, invariante e atrai A . Porém não é possível garantir que $\omega(A)$ será uma órbita periódica, o que torna limitadas as conclusões para $\omega(\mathbf{x}_0)$, com $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$. O exemplo seguinte ilustra exatamente uma situação em que para determinados pontos iniciais fuzzy \mathbf{x}_0 podemos garantir a periodicidade de $\omega(\mathbf{x}_0)$, já para outros, não podemos fazer tal conclusão.

Exemplo 4.1. *Seja o seguinte sistema bidimensional de equações diferenciais ordinárias:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(1+r)y + x(r^2 - 1)(4 - r^2), & x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = (1+r)x + y(r^2 - 1)(4 - r^2), & y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$,

O modelo descrito pelo sistema de equações (4.7) possui duas órbitas periódicas, mais especificamente, são elas as circunferências de raio 1 e 2, ambas centradas na origem. Definimos tais órbitas periódicas da seguinte forma:

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}; \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$$

Na Figura 4.3-3 podemos identificar os conjuntos descritos acima no plano de fase, além disso, também é possível visualizar o campo vetorial gerado pelo sistema (4.7). Através do campo e do sentido da curva traçada, percebemos que γ_1 é um ciclo limite instável e γ_2 é um ciclo limite assintoticamente estável em ambos os sentidos (externo e interno).

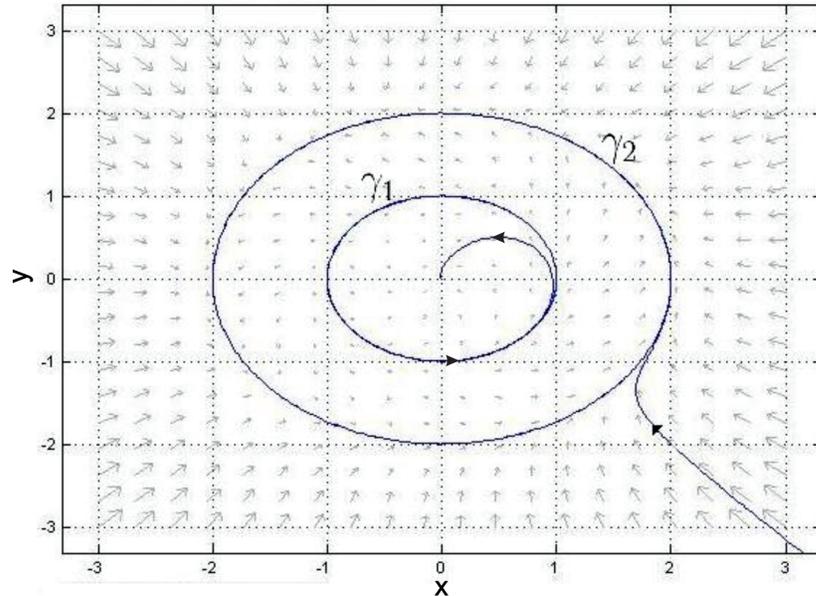


Figura 4.3-3. Sistema com dois ciclos limites

Tais classificações podem ser verificadas através dos seguintes cálculos:

Inicialmente, vamos transformar o sistema de equações (4.7) que está em coordenadas cartesianas, em um sistema de equações equivalentes em coordenadas polares, isto é, fazemos a seguinte mudança de variável.

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{e} \quad y = r\sin(\theta) \quad (4.8)$$

Multiplicando $\frac{dx}{dt}$ por x , $\frac{dy}{dt}$ por y no sistema (4.7) e somando as equações obtemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} &= -(1+r)yx + x^2(r^2-1)(4-r^2) + (1+r)xy + y^2(r^2-1)(4-r^2) \\ x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} &= r^2(r^2-1)(4-r^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sendo assim, aplicando a regra da cadeia em $r^2 = x^2 + y^2$ podemos obter a seguinte expressão para $\frac{dr}{dt}$.

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \quad (4.10)$$

Substituindo em 4.9, obtemos

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2-1)(4-r^2) \quad (4.11)$$

É fácil verificar pela equação (4.11) e pelo gráfico da Figura 4.3-4 que $r = 0$, $r = 1$ e $r = 2$ são os pontos de equilíbrio para $\frac{dr}{dt}$. Além disso, é possível concluir que, se $0 < r < 1$ então $\frac{dr}{dt} < 0$, isto significa que para qualquer ponto contido na região interna da circunferência de raio 1, a variação do raio é negativo, em outras palavras, a trajetória se afasta da circunferência de raio unitário e se aproxima do ponto (0,0). Se $1 < r < 2$ então $\frac{dr}{dt} > 0$, nesse caso, para pontos entre ambas as circunferências a variação do raio é positiva, aproximando a trajetória da circunferência de raio 2. Por fim, se $r > 2$ então $\frac{dr}{dt} < 0$, portanto a trajetória também se aproxima da circunferência de raio 2.

Portanto, existem dois ciclos limites, a circunferência de raio igual à 1 instável e

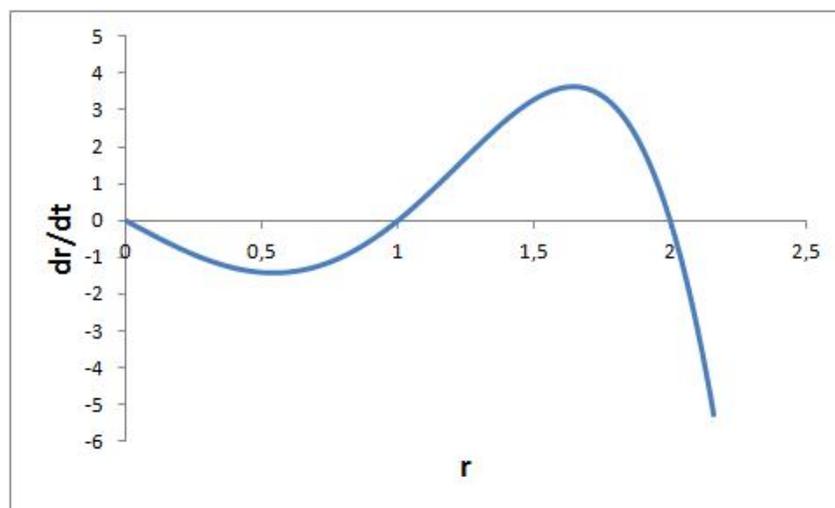


Figura 4.3-4. Comportamento da variação do raio.

a circunferência de raio igual à 2 estável. Observamos que o gráfico da Figura 4.3-4 considera apenas valores de raio positivos, já que não é coerente trabalharmos com raios negativos.

Para obtermos uma expressão para variação do θ , podemos fazer os seguintes cálculos:

Multiplicando $\frac{dx}{dt}$ por y , $\frac{dy}{dt}$ por x em (4.7) e subtraindo as equações obtemos a seguinte igualdade:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -(1+r)y^2 + xy(r^2 - 1)(4 - r^2) - (1+r)x^2 - yx(r^2 - 1)(4 - r^2) \quad (4.12)$$

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -(1+r)r^2 \quad (4.13)$$

Calculando $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ das equações (4.8), vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade da equação (4.13) é $-r^2 \frac{d\theta}{dt}$. Sendo assim, obtemos o seguinte sistema em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1)(4 - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = (1 + r) \end{cases} \quad (4.14)$$

Podemos verificar através do sistema (4.14) que a variação do ângulo é sempre positiva, já que $r > 0$, portanto, garantimos o sentido anti-horário de qualquer trajetória.

Podemos mostrar também que o ponto $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, ou seja, podemos escrever $\mathbf{x}_e = \chi_{(0,0)}$ como ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável e os conjuntos:

$$\gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma_1\} \quad e \quad \gamma_2 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma_2\}$$

Como conhecemos a classificação das órbitas γ_1 e γ_2 quanto a sua estabilidade, podemos usar o Teorema 4.2 e concluir que γ_1 é um conjunto periódico instável enquanto que γ_2 é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy.

Pelos cálculos anteriores e pela Figura 4.3-5 podemos verificar que $A(\mathbf{x}_e) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ é a região de atração para o ponto de equilíbrio \mathbf{x}_e . Portanto, se $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ é tal que $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\mathbf{x}_e)$ então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_e$ quando $t \rightarrow \infty$, isto é, $\omega(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_e$.

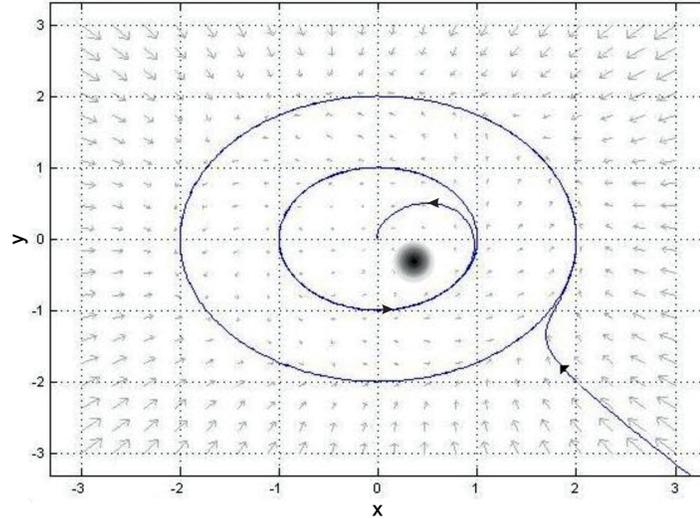


Figura 4.3-5. Condição inicial na área de atração do ponto de equilíbrio.

Podemos utilizar o Teorema de Poincaré-Bendixson para o caso clássico e concluir que $A(\gamma_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ é a região de atração de γ_2 , ou seja, para qualquer ponto do conjunto $A(\gamma_2)$ a órbita é atraída para γ_2 , portanto, se $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ é tal que $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\gamma_2)$ então $d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \gamma_2) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Sendo assim, como γ_1 é uma órbita assintoticamente estável, podemos afirmar pelo Teorema 4.4 que $\omega(\mathbf{x}_0)$ é uma órbita periódica fuzzy, ver Figura 4.3-6.

No entanto, existem casos em que a trajetória oriunda de uma determinada condição inicial não possui um comportamento de convergência. Suponha que \mathbf{x}_0 é tal que $[x_0]^0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$. Para viabilizar a análise, suponha uma condição inicial conforme a Figura 4.3-7. Como $\widehat{\varphi}_t([\mathbf{x}_0]^0)$ é limitado, então, pela proposição 1.2, $\omega([\mathbf{x}_0]^0)$ é não vazio, compacto e atrai $[\mathbf{x}_0]^0$. Entretanto, podemos notar que $\omega([\mathbf{x}_0]^0)$ não é nenhuma das órbitas periódicas γ_1 e γ_2 .

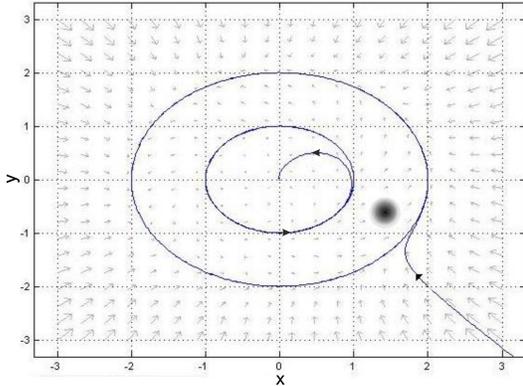


Figura 4.3-6. Condição inicial em $A(\gamma_2)$.

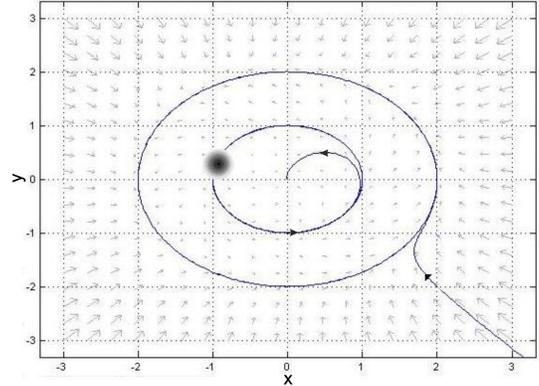


Figura 4.3-7. $[x_0]^0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$.

Através de uma simulação computacional, percebemos que a condição inicial fuzzy se “move” ao longo do plano de fase expandindo-se, isto é, aumentando o seu suporte. Na Figura 4.3-8 notamos que a condição inicial é um número fuzzy, chamaremos de \mathbf{x}_0 , e a incerteza está apenas sobre a coordenada y , como $\gamma_1 \cap [\mathbf{x}_0]^0 \neq \emptyset$ e $[\mathbf{x}_0]^0 \not\subseteq \gamma_1$ então apesar da limitação da solução fuzzy, não podemos fazer nenhuma afirmação quanto a periodicidade de $\omega(\mathbf{x}_0)$. Uma solução fuzzy, é um conjunto infinito de solução determinísticas, de tal forma que cada solução determinística tenha seu grau de pertinência ao conjunto fuzzy das soluções, portanto o suporte desse conjunto fuzzy são funções. Se tomarmos qualquer solução cuja condição inicial não esteja em γ_1 ela se afastará dessa órbita, desse modo o suporte se “expande”, provocando o efeito ilustrado na Figura 4.3-8.

Notamos também que as trajetórias mais externas, isto é, aquelas que possuem menor grau de pertinência ao conjunto fuzzy das soluções, aproximam-se mais rapidamente das órbitas periódicas. Além disso, no decorrer do tempo, o número fuzzy torna-se mais “escuro”, isso significa que o conjunto fuzzy das funções vai se aproximando cada vez mais de um conjunto clássico. Isto ocorre porque o elemento de $[\mathbf{x}_0]^0$ com grau de pertinência 1 está sobre a órbita γ_1 , caso isso não ocorresse, não existiria essa tendência de transforma-se em um conjunto clássico.

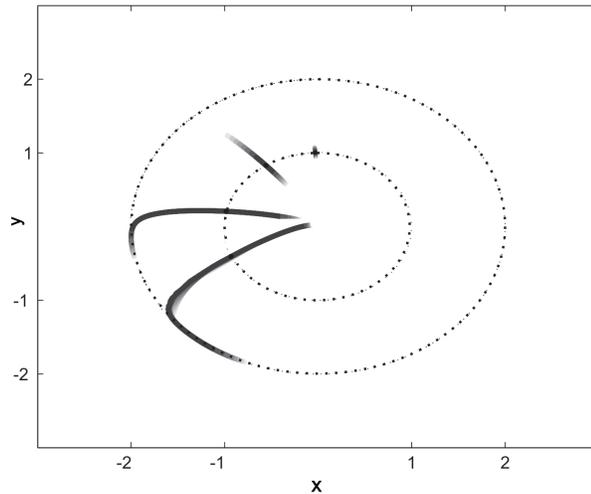


Figura 4.3-8. Trajetória aumentando ao longo do plano de fase.

Nas Figuras 4.3-9 e 4.3-10 tomamos uma condição inicial fuzzy com incerteza em ambas as coordenadas, tomemos por exemplo, um número fuzzy cuja função de pertinência é um parabolóide positivo, com concavidade para baixo e altura 1. Para tal caso, podemos fazer as seguintes análises

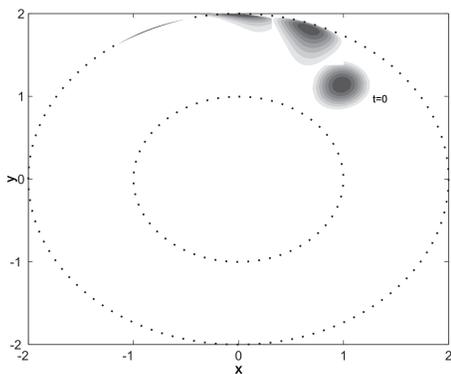


Figura 4.3-9. Condição inicial em $A(\gamma_2)$.

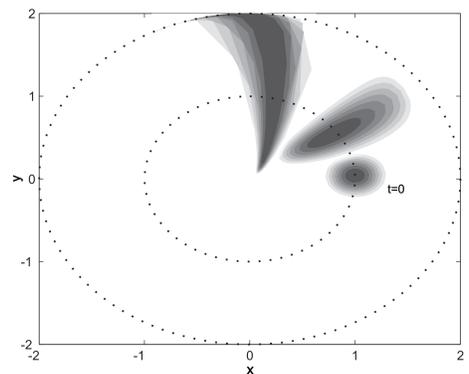


Figura 4.3-10. $[x_0]^0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$.

Na Figura 4.3-9 a condição inicial x_0 tem o seu suporte contido na região de atração da órbita periódica γ_2 , portanto conforme o caso anterior, $\omega(x_0) \subset \gamma_2$. Já na Figura 4.3-10 apresentamos uma condição inicial cujo suporte possui elementos tanto na região de atração de γ_2 quanto na região de atração do ponto x_e e portanto, não é possível concluir aspectos periódicos em relação ao seu ω -limite.

Não é possível formular um teorema análogo ao Teorema 2.2 que garanta a periodi-

cidade de $\omega(\mathbf{x}_0)$ para qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$, entretanto, podemos obter alguns resultados quanto a existência de regiões de atração para órbitas periódicas fuzzy, conforme veremos na seguinte subseção.

4.3.1 Teoremas equivalentes

O Teorema 4.5 apresenta condições suficientes para a existência de uma órbita periódica fuzzy. É importante lembrar que uma órbita periódica determinística é um caso particular de órbita fuzzy. O seguinte teorema foi retirado de [9].

Teorema 4.5. [9] *Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto e invariante pelo fluxo determinístico. Se K não contém pontos de equilíbrio então o conjunto*

$$\mathbf{K} = \{ \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}]^0 \subset K \} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \quad (4.15)$$

contém uma órbita periódica fuzzy.

Demonstração. Sendo K um conjunto compacto, invariante e que não contém pontos de equilíbrio então o Teorema de Poincaré-Bendixson garante que $\omega(x_0)$, com $x_0 \in K$ é uma órbita periódica determinística contida em K . A existência de órbitas periódicas fuzzy é uma consequência imediata do Teorema 4.1. De fato, como $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica, se $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{K}$ possui α -níveis convexos e $[\mathbf{x}_0]^0 \subset \omega(x_0)$ então \mathbf{x}_0 é um ponto periódico. Assim, a órbita $\varphi(\mathbf{x}_0)$ gerada por \mathbf{x}_0 através do fluxo fuzzy é uma órbita periódica fuzzy e está contida em \mathbf{K} , o que prova a afirmação. \square

Tomemos o sistemas de EDO do exemplo 4.1. Seja K um conjunto fechado, limitado por uma circunferência de raio $1+\epsilon$ e por γ_2 , conforme Figura 4.3-11.

Como K é um subconjunto de \mathbb{R}^2 , fechado e limitado, então K é compacto, além disso, é invariante, pois para qualquer ponto inicial, a órbita irá convergir para γ_2 sem sair do conjunto K . Por fim, sabemos que K não possui pontos de equilíbrio, logo, pelo teorema anterior, possui uma órbita periódica fuzzy, que neste caso, coincide com a órbita periódica determinística γ_2 .

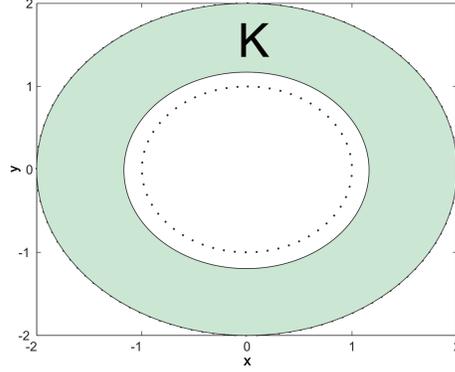


Figura 4.3-11. Trajetória aumentando ao longo do plano de fase

É importante perceber que as hipóteses do Teorema 4.5 garantem a existência de uma órbita periódica determinística por aplicação direta do Teorema de Poincaré-Bendixson. Como uma órbita determinística é um caso particular de órbita fuzzy, a existência de uma órbita periódica determinística implica a existência de uma órbita periódica fuzzy, este fato é garantido pelo Teorema 4.1. Como dissemos, o Teorema 4.5 mostra condições suficientes para existência de órbitas periódicas fuzzy mas não diz nada sobre o comportamento de uma solução $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x})$, sendo \mathbf{x} uma condição inicial fuzzy qualquer.

O Teorema 4.6 é o que poderíamos chamar de uma versão fuzzy aproximada do Teorema de Poincaré-Bendixson. Podemos perceber que este teorema garante a existência de uma região tal que para qualquer condição inicial fuzzy cujo suporte esteja contido nessa região, a solução irá convergir para uma órbita periódica fuzzy.

Teorema 4.6. [9] *Sejam $K \subset U$ um conjunto compacto e invariante, x_e o único ponto de equilíbrio em K e $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$. Se x_e é instável então existe uma região $A \subset K$ tal que para $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$, $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para uma órbita periódica fuzzy.*

Demonstração. Por hipótese, o conjunto compacto K é invariante e possui um único ponto de equilíbrio instável. Desta forma, o Teorema de Poincaré-Bendixson garante a existência de ao menos um ciclo limite, digamos γ , contido em K . Além disso, o Teorema 1.3 garante que γ é assintoticamente estável pelo interior ou exterior. Seja então A a região de atração de γ , isto é, $A = A(\gamma)$. O Teorema 4.2 garante então que o conjunto periódico fuzzy γ é assintoticamente estável e atrai os pontos $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ cujos α -níveis estão em $A(\gamma)$. Como consequência, pelo Teorema 4.4 podemos afirmar que se $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$, então $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para uma órbita periódica fuzzy contida em γ . Logo, está provada

a afirmação. □

Observamos que a convergência somente acontece se $[x_0]^0 \subset A$, ou seja, apenas se o ponto inicial estiver com o seu suporte contido na região de atração da órbita periódica. Não podemos fazer uma generalização para um ponto inicial qualquer, pois K pode possuir uma órbita periódica instável conforme mostramos no exemplo 4.1.

Atentando-se ao exemplo 4.1, podemos perceber que o Teorema 4.6 não garante a existência da órbita periódica fuzzy γ_2 , já que o ponto de equilíbrio da região K é assintoticamente estável e não instável conforme a hipótese do teorema em questão.

Sendo assim, a fim de generalizarmos ainda mais o teorema anterior e torná-lo de certa forma, mais próximo do Teorema de Poincaré-Bendixson, podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

Teorema 4.7. *Seja $K \subset U$ um conjunto compacto e invariante e $x_0 \in K$. Se $\varphi_t(x_0)$ não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio então existe uma região $A \subset K$ tal que para $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A$, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ é uma órbita periódica fuzzy ou se aproxima de uma.*

Demonstração. Por hipótese, o conjunto compacto K é invariante e a solução $\varphi_t(x_0)$ não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio, portanto, o Teorema de Poincaré-Bendixson garante que a solução $\varphi_t(x_0)$ se aproxima de um ciclo limite γ ou é o próprio γ , em outras palavras, $\omega(x_0)$ é um ciclo. Se $\varphi_t(x_0)$ for igual ao ciclo γ então $x_0 \in \omega(x_0)$, logo como consequência do Teorema 4.1, para qualquer \mathbf{x}_0 , tal que $[\mathbf{x}_0]^0 \subset \omega(x_0) = A$, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ é uma órbita periódica fuzzy.

Se $\varphi_t(x_0)$ se aproxima de γ , então γ possui uma região de atração que chamaremos de $A(\gamma)$, isto é, γ é assintoticamente estável pelo interior e/ou pelo exterior. O Teorema 4.2 garante então que o conjunto periódico fuzzy γ é assintoticamente estável e atrai os pontos $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(U)$ cujos α -níveis estão em $A(\gamma)$. Como consequência, pelo Teorema 4.4 podemos afirmar que se $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\gamma)$, então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para uma órbita periódica fuzzy contida em γ . Logo, está provada a afirmação. □

Segundo o Teorema 4.7, se existe uma trajetória que satisfaz as condições do Teorema de Poincaré-Bendixson para o caso clássico então vai existir uma região A , tal que, para

qualquer condição inicial fuzzy cujo suporte estiver contido em A a trajetória fuzzy é periódica ou se aproxima de uma trajetória periódica.

Podemos notar que a tese do Teorema 4.7 é análoga à tese do Teorema de Poincaré-Bendixson para o caso clássico e assim como ocorre no caso determinístico, não é necessário que o ponto de equilíbrio seja instável. Para exemplificar, utilizaremos o Modelo presa-predador de Holling-Tanner, pois este possui algumas características periódicas relevantes em relação ao conteúdo estudado.

4.3.2 Modelo de Holling-Tanner

O modelo de Holling-Tanner já foi previamente discutido no capítulo 3, no entanto, utilizaremos este modelo para exemplificarmos as situações descritas pela teoria até então discutida.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{x+d} \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y\left(1 - \frac{\beta y}{x}\right) \end{cases} \quad (4.16)$$

onde $\beta = \frac{1}{\gamma}$.

Pelo sistema (4.16), podemos verificar que $\frac{dy}{dt}$ é indeterminada, portanto, para facilitar a análise, iremos considerar $x > 0$.

Como vimos no Capítulo 2, página 43, os pontos de equilíbrio para o modelo de Holling-Tanner são $x_e = (0, 0)$, $y_e = (k, 0)$ e $z_e = (z, z/\beta)$, onde z é a raiz positiva da equação. Não iremos trabalhar com o ponto x_e já que iremos considerar $x > 0$.

$$z^2 + \left(d - k + \frac{km}{\beta r}\right)z - kd = 0 \quad (4.17)$$

O sistema de EDO (4.16) é não linear, portanto, para analisarmos a estabilidade de seus pontos de equilíbrio devemos aplicar o teorema da linearização, para isso, obtemos a

matriz do Jacobiano do sistema.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} r - \frac{2xr}{k} - \frac{myd}{(x+d)^2} & -\frac{mx}{x+d} \\ \frac{a\beta y^2}{x^2} & a - \frac{2a\beta y}{x} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Para viabilizar a análise dos pontos, vamos tomar os seguintes valores de parâmetros: $r = 0.2$, $k = 100$, $m = 0.03$, $d = 20$, $a = 0.02$ e $\beta = 0.155$, onde $\beta = 1/\gamma$. Sendo assim, o Jacobiano no ponto $y_e = (k, 0)$ é a seguinte matriz (4.19), essa matriz é diagonal superior, portanto, seus autovalores estão na diagonal. Como um dos autovalores é positivo, então o ponto $y_e = (k, 0)$ é instável. Não analisaremos a existência de órbitas periódicas em torno deste ponto, já que tal fato, levaria a variável y a tomar valores negativos, o que é biologicamente inviável.

$$J(k, 0) = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.025 \\ 0 & 0.02 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

O ponto de equilíbrio z_e possui maior relevância biológica e complexidade matemática. Para determiná-lo, necessitaremos calcular a raiz positiva do seguinte polinômio

$$z^2 + 16.77z - 2000 = 0 \quad (4.20)$$

sua raiz positiva é 37.11 e portanto $z_e = (37.11, 239.45)$

Substituindo o ponto de equilíbrio no Jacobiano 4.18 obtemos.

$$J(37.11, 239.45) = \begin{pmatrix} 0.0075 & -0.0195 \\ 0.129 & -0.0200 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Utilizando o Matlab, verificamos que $-0.0063 + 0.0482i$ e $-0.0063 - 0.0482i$ são os

autovalores do Jacobiano. Portanto, como ambos os autovalores são complexos, com parte real negativa, podemos concluir que o ponto é assintoticamente estável. Uma solução com condição inicial (31,255), pode ser vista no plano de fase conforme a Figura 4.3-12.

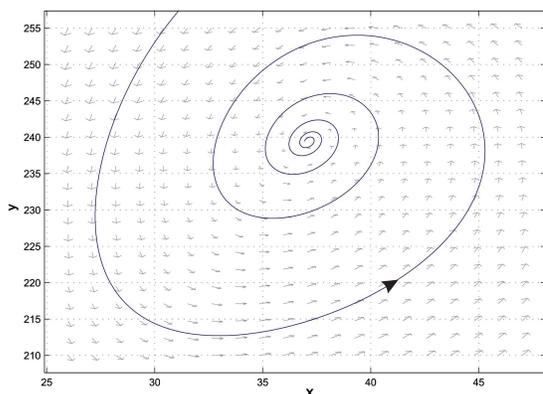


Figura 4.3-12

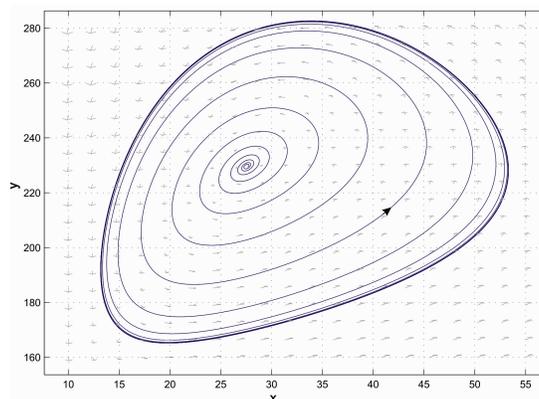


Figura 4.3-13

Como dissemos, algumas mudanças nos parâmetros podem causar alterações no comportamento da solução e até mesmo na estabilidade do ponto z_e . Vamos agora considerar o seguinte valor $\beta = 0.12$. Sendo assim, o polinômio que devemos resolver é:

$$z^2 + 45z - 2000 = 0 \quad (4.22)$$

cuja raiz positiva é 27.56, portanto o novo ponto de equilíbrio é $z_e = (27.56, 229.66)$. Substituindo em 4.18 encontramos a seguinte matriz Jacobiana para o ponto z_e .

$$J(27.56, 229.66) = \begin{pmatrix} 0.0288 & -0.0174 \\ 0.1667 & -0.0200 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Utilizando o Matlab, verificamos que $0.0044+0.048i$ e $0.0044-0.048i$ são os autovalores da matriz Jacobiana. Portanto, como pelo menos um dos autovalores é complexo com parte real positiva, podemos concluir que o ponto z_e é instável e da mesma forma como foi feito no capítulo 3, podemos verificar que a órbita é limitada para os valores de parâmetros usados, sendo assim, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, existe uma órbita periódica. Tomando (28, 230) como condição inicial, obtemos a trajetória da Figura 4.3-13.

Todas as conclusões que fizemos para o caso clássico, serão fundamentais para obtermos

resultados para solução fuzzy. Vamos considerar agora o Modelo de Holling-Tanner com condição inicial fuzzy, ou seja, $x_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$.

Consideremos agora o fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}_+^2)$ gerado a partir da extensão de Zadeh da solução do modelo. É válido lembrar que a extensão está sendo feita em relação a condição inicial. Primeiramente, vamos considerar uma condição inicial fuzzy \mathbf{x}_0 , cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{\mathbf{x}_0}(x, y) = \max\{1 - 0.05(x - 30) - 0.01(y - 220), 0\} \quad (4.24)$$

Para $\beta = 0.155$, vimos que o ponto de equilíbrio $z_e = (37.11, 229.66)$ é assintoticamente estável, portanto, segundo [9], podemos concluir que uma condição inicial fuzzy \mathbf{x}_0 , tal que, $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(x_e)$ a solução $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ é atraída pelo ponto de equilíbrio $z_e = (37.11, 229.66)$. A evolução de cada coordenada ao longo do tempo está expressa nos gráficos das Figuras 4.3-14 e 4.3-15.

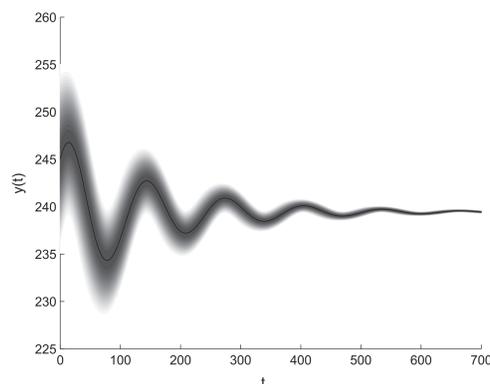
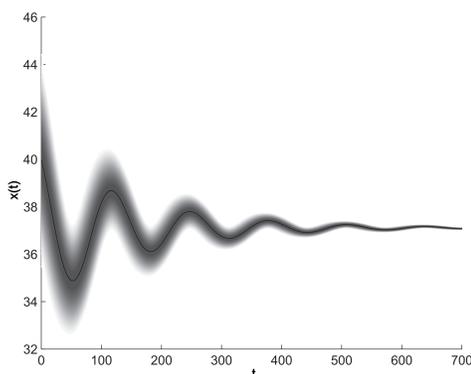


Figura 4.3-14. Convergência para ponto de equilíbrio. **Figura 4.3-15.** Convergência para ponto de equilíbrio.

No caso onde $\beta = 0.12$, o ponto de equilíbrio z_e é instável, e existe uma órbita periódica que chamaremos de γ . Conforme os cálculos realizados no capítulo 3, verificamos que as hipóteses do Teorema de Poincaré-Bendixson são satisfeitas. Como existe um único ponto de equilíbrio assintoticamente instável, pelo Teorema 4.6 é possível garantir a existência de uma região $A(\gamma)$ no plano de fase, onde para qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ tal que $[\mathbf{x}_0]^0 \subset A(\gamma)$ a solução fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0)$ converge para γ . Podemos denotar $\mathcal{E}(A(\gamma))$ como sendo a região de atração de γ . As Figuras 4.3-16 e 4.3-17 mostram o comportamento de cada coordenada da solução fuzzy ao longo do tempo.

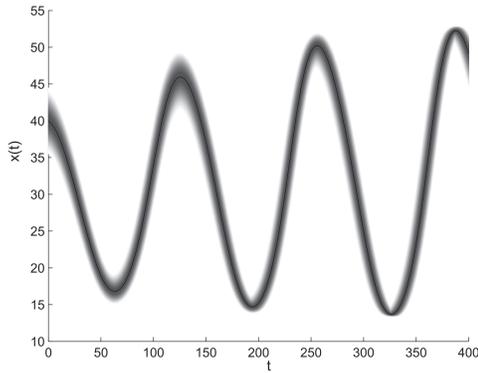


Figura 4.3-16. Solução periódica no plano x vs t.

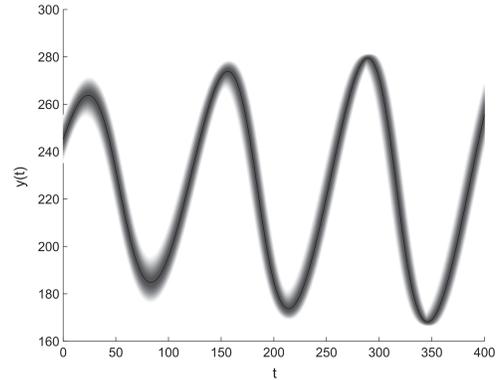


Figura 4.3-17. Solução periódica no plano y vs t.

A existência da região de atração para γ também é garantida pelo Teorema 4.7, já que tomando como condição inicial o ponto $(28, 230)$ vimos que a solução não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio e portanto fica garantida a existência de uma região de atração. Além disso, o Teorema 4.2 garante que essa região de atração é $A(\gamma)$.

4.3.3 Modelo de Gause

Este exemplo foi baseado no artigo [24], segundo os autores, no modelo presa-predador do tipo Gause, a equação mais comum que descreve o efeito Allee para uma única espécie é o sistema de equação diferenciais autônomas 4.25:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m)x - \frac{qx^2}{x^2 + a}y \\ \frac{dy}{dt} = \left(\frac{px^2}{x^2 + a} - c\right)y \end{cases} \quad (4.25)$$

Os parâmetros da equação (4.25) possuem o seguinte significado ecológico: r é a taxa intrínseca de crescimento per capita da presa, K é a capacidade suporte ambiental da presa, m é a população mínima de presas capaz de se reproduzir, também conhecido como limiar do Efeito Allee, q é a máxima taxa de consumo per capita do predador, \sqrt{a} é a quantidade de presa cuja taxa de predação é máxima, p é a eficiência de conversão de uma presa consumida em um novo predador e c é a taxa de morte natural do predador quando ocorre ausência de presa.

Para viabilizar os cálculos, através de uma mudança de variável (ver [24]) podemos obter o sistema simplificado de EDOs (4.26).

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = ((1-u)(u-M)(A-u^2))v \\ \frac{dv}{dt} = B(u^2 - C^2)v \end{cases} \quad (4.26)$$

O sistema acima possui os seguintes pontos de equilíbrio.

$$O = (0, 0) \quad Q_1 = (1, 0) \quad Q_2(M, 0) \quad Q_e = (C, L)$$

onde definimos como sendo:

$$L = \frac{1}{C}(1-C)(C-M)(A+C^2) \quad (4.27)$$

Os pontos O , Q_1 e Q_2 não serão analisados pois representam a ausência do predador e não possuem características relevantes para o nosso estudo. O ponto Q_e é biologicamente viável apenas se $0 < M < C < 1$, isto é, Q_e pertence ao primeiro quadrante apenas se a desigualdade $0 < M < C < 1$ for satisfeitas.

Tomando como valores dos parâmetros $A = 0.42$, $B = 0.1$, $C = 0.15$ e $M = 0.01$, o ponto de equilíbrio $Q_e = (C, L) = (0.15, 0.35)$ é assintoticamente estável e é interior à 2 ciclos limites, isto é, $Q_e \in \overset{\circ}{\gamma}_1 \subset \overset{\circ}{\gamma}_2$, sendo γ_1 instável e γ_2 assintoticamente estável, ver [24].

Considerando $M > 0$, podemos enunciar o seguinte resultado, cuja demonstração está em [24]:

Proposição 4.1. *O conjunto $\bar{A} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ é uma região invariante e as soluções são limitadas.*

Sendo assim, vamos aplicar o Teorema 4.7 para garantir que existe uma região A tal que, qualquer órbita fuzzy iniciada em A irá convergir para uma órbita periódica fuzzy ou será uma órbita periódica fuzzy.

Na Figura 4.3-18, apresentamos uma trajetória $\varphi_t(u_0)$, tal que $u_0 \in \bar{A}$, sendo assim, segundo a proposição 4.1, esta trajetória pertencerá à \bar{A} para todo instante de tempo t , já que \bar{A} é invariante, além disso, a mesma proposição garante que a trajetória é limitada e por fim, verificamos que esta não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio, logo, pelo Teorema 4.7, existe uma região A onde qualquer órbita fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$ com $[\mathbf{u}_0]^0 \subset A$ é atraída por uma órbita periódica, neste exemplo, a órbita periódica é γ_2 , tal fato é ilustrado na Figura 4.3-19. Esta região A é o conjunto de pontos entre γ_1 e γ_2 , isto é, $A = \overset{\circ}{\gamma}_2 - \overset{\circ}{\gamma}_1$. Para este exemplo não podemos aplicar o Teorema 4.6, pois não existe um ponto de equilíbrio instável na região limitada por γ_2 .

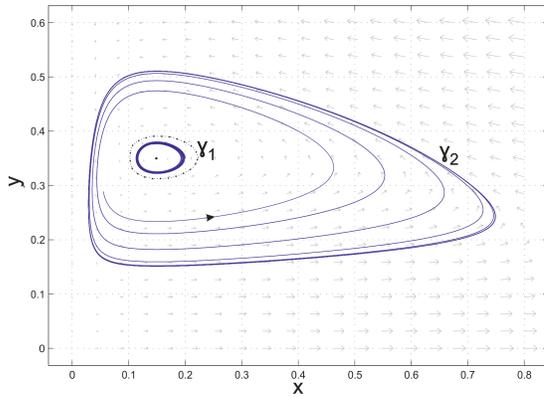


Figura 4.3-18. Modelo de Gause Clássico

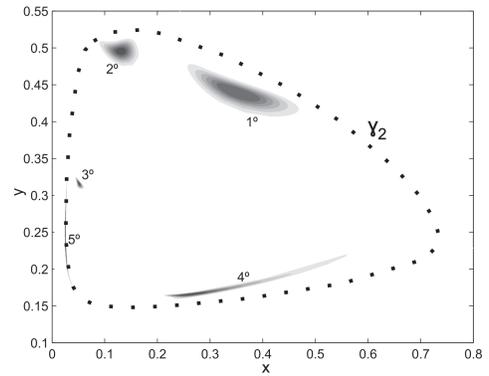


Figura 4.3-19. Órbita fuzzy sendo atraída

Na Figura 4.3-19, ilustramos um caso onde tomamos como condição inicial o número fuzzy \mathbf{u}_0 , neste caso $\mathbf{u}_0 \in A(\gamma_2)$, portanto, pelo Teorema 4.7 podemos garantir que a solução é uma órbita periódica fuzzy ou será atraída por uma órbita periódica fuzzy. Neste caso, a Figura 4.3-19 mostra que a solução converge para γ_2 .

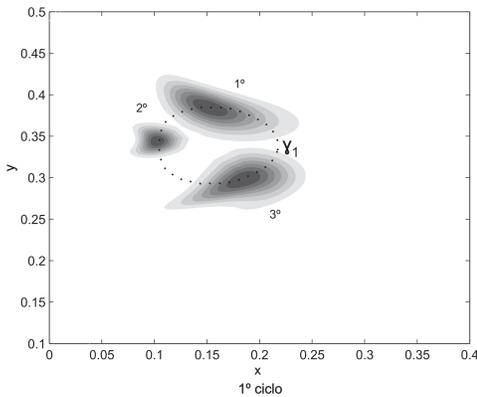


Figura 4.3-20. Órbita fuzzy expandindo - 1

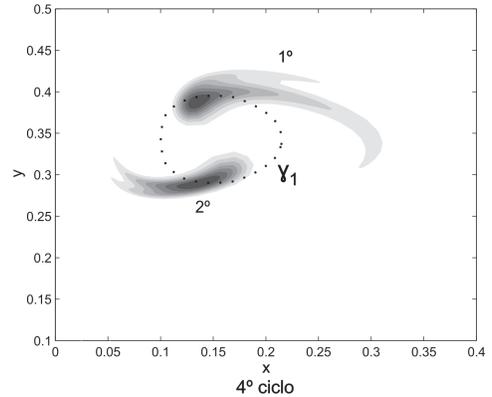


Figura 4.3-21. Órbita fuzzy expandindo - 2

Como este modelo possui um ciclo limite instável, ele torna-se propício para ilustramos

a necessidade de $[\mathbf{u}_0]^0 \subset A(\gamma_2)$ para que ocorra a convergência da solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{u}_0)$ para uma órbita periódica. Tomemos uma condição inicial \mathbf{u}_0 tal que $[\mathbf{u}_0]^0 \cap \gamma_1 \neq \emptyset$ e $[\mathbf{u}_0]^0 \not\subset \gamma_1$. Neste caso, a órbita é limitada e não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio, porém $[\mathbf{u}_0]^0 \not\subset A(\gamma_2)$, tal fato faz com que o conjunto fuzzy se expanda de tal forma que não possua nenhuma característica periódica (este evento está ilustrado nas Figuras 4.3-20 e 4.3-21). Nestas figuras mostramos o comportamento da condição inicial em seu primeiro ciclo e no seu quarto ciclo respectivamente, percebemos que ocorre uma “deformação” da condição inicial, fazendo com que esta não se aproxime de nenhum ciclo periódico.

Biologicamente, é muito comum termos incertezas em relação à quantidade de indivíduos no instante inicial. Este fato, é muitas vezes contornado utilizando-se uma aproximação ou uma média dos possíveis valores, entretanto, verificamos através das Figuras 4.3-20 e 4.3-21 que pequenas incertezas na condição inicial podem afetar drasticamente uma previsão para uma escala de tempo longa.

4.4 Conclusão

Em resumo, apresentamos diversos resultados obtidos em [9] sobre as órbitas periódicas fuzzy. Em destaque, discutimos o Teorema de Poincaré-Bendixson, tomando a condição inicial do sistema dinâmico como um número fuzzy. Dentro desta discussão, abordamos o caso em que a condição inicial fuzzy possui suporte inteiramente contido na região de atração do ciclo limite e o caso em que a intersecção da condição inicial com um ciclo limite repulsor é não vazio.

Propomos o Teorema 4.7 que garante a existência de uma região de atração para determinadas soluções fuzzy, a partir do comportamento de uma solução determinística, não impondo condições sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio.

Apesar da reconhecida representatividade dos modelos determinísticos e dos modelos fuzzy obtidos através da Extensão de Zadeh, estes modelos são baseados em parâmetros que nem sempre são fáceis de serem obtidos. Uma estratégia para encontrar esses parâmetros pode ser a utilização de modelos P-fuzzy, cuja estrutura, em geral, é baseada no conhecimento de um especialista. Além disso, os modelos P-fuzzy se destacam por conside-

rar variáveis de estado incertas e pela fácil compreensão intuitiva. Como consequência, é notável a importância de obtermos resultados para órbitas periódicas de sistemas P-fuzzy. Tal assunto, será o tema do próximo capítulo.

Capítulo 5

Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy contínuos

Neste último capítulo, discutiremos algumas propriedades dos campos de direções gerados por sistemas P-fuzzy contínuos. Em nosso estudo, consideraremos a expressão de saída de um sistema P-fuzzy como sendo um sistema de EDO's, e a partir disso, faremos um estudo qualitativo de tais sistemas. Em destaque, mostraremos como deve ser contruído um sistema P-fuzzy contínuo que tenha solução única, para cada condição inicial dada. Utilizando tais sistemas, iremos propor uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy bidimensionais, isto é, apresentaremos condições para construção do sistema P-fuzzy que sejam suficientes para garantir a existência de órbitas periódicas. Por fim, ilustraremos os estudos realizados através de dois exemplos de sistema P-fuzzy, o primeiro representa o modelo logístico e o segundo um modelo tipo presa-predador.

5.1 Introdução

Como já dissemos, os sistemas de equações diferenciais ordinárias são frequentemente utilizados para modelar fenômenos da natureza. Para esse tipo de modelagem são requeridas diversas informações sobre o fenômeno, estas por sua vez, nem sempre estão facilmente disponíveis ou acessíveis, é o caso, por exemplo, da taxa de sucesso de um

predador capturar sua presa quando ocorre um encontro. Esta dificuldade pode ser ainda maior, quando o comportamento do fenômeno é parcialmente conhecido, isto é, os quantificadores das variáveis são termos linguísticos como “frio”, “quente”, “muito grande” e outros.

Com esse tipo de informação não é possível montar um modelo baseado em EDO's da maneira usual, entretanto, por meio dos sistemas P-fuzzy é possível construir um modelo utilizando apenas informações incertas como as apresentadas anteriormente.

Se considerarmos a saída de um sistema P-fuzzy como sendo a variação instantânea de uma determinada variável, podemos assumir que a expressão de saída do sistema P-fuzzy é um sistema de EDO's autônomo, isto é, a expressão de saída pode ser vista como sendo o campo de direções de uma EDO: $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Neste texto denotaremos por F_p a expressão de saída de um sistema P-fuzzy. Obviamente que a continuidade e outras propriedades de F_p vão depender das funções de pertinência utilizadas para construir o sistema fuzzy em questão. Para o caso P-fuzzy, a expressão de saída é bastante complexa e inviabiliza a obtenção analítica de uma solução, porém este fato também ocorre com os modelos clássicos de EDO's, o que não impede um estudo qualitativo do mesmo.

Em suma, verificaremos que é possível obter uma expressão equivalente à uma EDO autônoma usando apenas informações imprecisas e subjetivas como por exemplo “alto”, “baixo”, “quente” ou “frio”. Além disso, mostraremos alguns resultados que permitirão um estudo qualitativo dos sistemas P-fuzzy. Este fato permitirá que enunciemos o Teorema de Poincaré-Bendixson para estes sistemas.

Na seção 5.2 mostraremos algumas condições para que um sistema P-fuzzy gere um campo de direções contínuo, além disso, verificaremos que para cada condição inicial dada, será garantida a existência e unicidade da solução. Na seção 5.3, apresentaremos uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy contínuos bidimensionais. Na seção 5.4, apresentaremos alguns exemplos que ilustram os resultados da seção 5.3, finalmente, na seção 5.5, faremos uma conclusão sobre este capítulo.

5.1.1 Revisitando os sistemas P-fuzzy

No Capítulo 3 desta dissertação, definimos os chamados modelos P-fuzzy ou também conhecidos como sistemas P-fuzzy, os quais são utilizados para modelar eventos que possuem incertezas em suas variáveis de estado. Na figura 3.3-11, apresentamos a estrutura de um sistema P-fuzzy. É notável que nessa estrutura, o sistema baseado em regras fuzzy, faz o papel de uma equação diferencial autônoma, isto é, a cada variável de entrada é associada a sua variação instantânea.

De acordo com [4], em um sistema P-fuzzy contínuo autônomo, as regras relacionam as entradas, que são as variáveis de estado, com suas taxas de variações que são as variáveis de saída. No caso bidimensional, podemos olhar para o sistema P-fuzzy contínuo, como sendo o campo vetorial de um sistema de equações autônomas. A figura 5.1-1 representa um sistema P-fuzzy contínuo bidimensional.



Figura 5.1-1. Sistema P-fuzzy bidimensional contínuo

No decorrer desta dissertação estudamos apenas os sistemas de EDO's autônomas, isso também acontecerá com os sistemas P-fuzzy, isto é, estudaremos apenas sistemas P-fuzzy onde o tempo não aparece explicitamente nas regras adotadas.

5.2 Existência e unicidade para Sistemas P-fuzzy contínuos

Nesta seção vamos propor condições suficientes para garantir a existência e unicidade das soluções de um sistema P-fuzzy contínuo, para isso, dividiremos nossas atenções para dois casos, no primeiro vamos trabalhar com sistemas P-fuzzy unidimensionais e posteriormente trabalharemos com os casos bidimensionais. Afim de alcançarmos nosso objetivo,

definiremos os sistemas P-fuzzy lipschitzianos e utilizaremos o Teorema de Picard, para garantir a existência e unicidade da solução de um sistema P-fuzzy contínuo.

5.2.1 Existência e unicidade para sistemas unidimensionais

Seguindo a notação de [13], denotaremos o conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e o conjunto de todas as funções diferenciáveis com derivada primeira contínua por $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. O Teorema 5.1 relaciona a existência e unicidade da solução de uma EDO autônoma com a continuidade da mesma e de sua derivada.

Teorema 5.1. *(Teorema da existência e unicidade das soluções) [13]*

1. Se $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo (possivelmente infinito) $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ contendo $t_0 = 0$ e uma solução $\varphi_t(x_0)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

definido para todo $t \in I_{x_0}$, satisfazendo a condição inicial $\varphi_0(x_0) = x_0$

2. Se, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $\varphi_t(x_0)$ é única em I_{x_0} e $\varphi_t(x_0)$ é contínua em (t, x_0) juntamente com sua derivada parcial, isto é, $\varphi_t(x_0)$ é uma função de classe C^1 .

Observação: Em algumas situações a função f pode não ter sentido prático ou mesmo não ser definida em todo \mathbb{R} . Uma situação comum é $f \in C^1(\mathbb{U}, \mathbb{R})$, onde \mathbb{U} é um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R} , neste caso, as conclusões do teorema 5.1 são as mesmas.

Em geral, uma das formas mais comuns de garantir a existência da solução de uma EDO é mostrar que esta equação é contínua. Para assegurar a unicidade deve-se verificar que a equação diferencial é de Classe C^1 , entretanto, esta não é uma condição necessária, uma outra maneira de se garantir a unicidade da solução de uma EDO é pelo Teorema de Picard, sendo que neste caso, basta mostrar que a equação é lipschitziana, o que é uma condição mais fraca do que ser de Classe C^1 . Sendo assim, verificaremos a existência da solução pela continuidade da mesma, enquanto que a unicidade será verificada pela condição de Lipschitz.

De fato, para garantir a unicidade, trabalharemos com o Teorema 5.2 que é uma consequência do Teorema de Picard. Faremos isso pois o Teorema 5.2 se adequa melhor ao nosso propósito.

Teorema 5.2. *(Teorema de existência e unicidade) [30] Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = [a, b] \times \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$. Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução de f em $I = [a, b]$*

A prova do Teorema 5.2 pode ser encontrada em [30]. Segundo o Teorema 5.2, se um sistema de equações diferenciais f for contínuo e lipschitziano, então terá solução única no intervalo de tempo onde f é definida. Como já dissemos, neste texto trabalharemos sempre com sistemas P-fuzzy autônomos, portanto, não existe restrição do domínio de f quanto ao tempo. Antes de aplicarmos o teorema 5.2 aos sistemas P-fuzzy, vamos definir o que são funções lipschitzianas e apresentar alguns resultados sobre essas funções.

Definição 5.1. *Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se Lipschitziana quando existe $k > 0$ (constante de Lipschitz de f) tal que, para qualquer $x, y \in X$, tem-se*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|. \quad (5.2)$$

Exemplo 5.1. *Vamos mostrar que uma função triangular arbitrária, definida num intervalo fechado dos reais é uma função lipchitziana. Tal função pode ser definida da seguinte forma:*

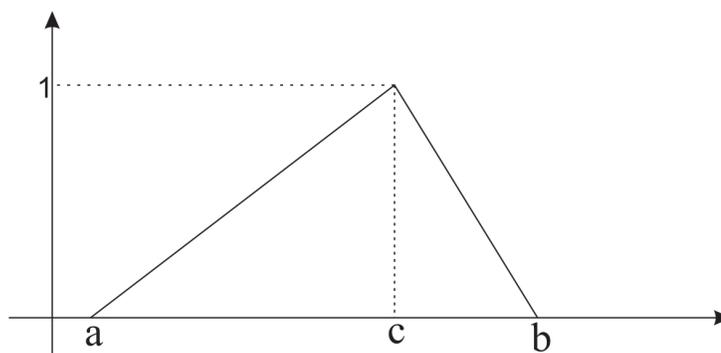


Figura 5.2-2. Função triangular genérica

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{c-a} = & \text{se } a \leq x \leq c \\ \frac{b-x}{b-c} = & \text{se } c \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases} \quad (5.3)$$

Demonstração. Primeiramente, nota-se que esta função não é diferenciável no ponto “c”. Sendo assim, dividiremos nossa demonstração em duas partes, primeiramente vamos fazer a demonstração para x e $y \in [a, c]$, posteriormente vamos considerar o caso em que cada variável pertence a domínios distintos, em particular $x \in [a, c]$ e $y \in [c, b]$.

Para x e $y \in [a, c]$ temos:

$$|\mu(x) - \mu(y)| = \left| \frac{x-a}{c-a} - \frac{y-a}{c-a} \right| \quad (5.4)$$

$$= \left| \frac{x-y}{c-a} \right| \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{|c-a|} |x-y| \quad (5.6)$$

Logo, para x e $y \in [a, c]$ a função é lipschitziana. Para o caso em que x e $y \in [c, b]$ a demonstração é análoga. Vamos considerar agora que $x \in [a, c]$ e $y \in [c, b]$, neste caso $x \leq c \leq y$. Nota-se que a seguinte relação é verdadeira.

$$|x-y| = |x-c| + |c-y| \quad (5.7)$$

$$|\mu(x) - \mu(y)| = |\mu(x) - \mu(c) + \mu(c) - \mu(y)| \quad (5.8)$$

$$\leq |\mu(x) - \mu(c)| + |\mu(c) - \mu(y)| \quad (5.9)$$

Como a função é lipschitziana nos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$, podemos escrever

$$|\mu(x) - \mu(c)| + |\mu(c) - \mu(y)| \leq \frac{1}{|c - a|} |x - c| + \frac{1}{|b - c|} |c - y| \quad (5.10)$$

Considerando $M = \max \left\{ \frac{1}{|c - a|}, \frac{1}{|b - c|} \right\}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|c - a|} |x - c| + \frac{1}{|b - c|} |c - y| &\leq M |x - c| + M |c - y| \\ &\leq M(|x - c| + |c - y|) \end{aligned}$$

Pela equação 5.7, temos a seguinte igualdade:

$$M(|x - c| + |c - y|) = M |x - y|$$

Portanto, temos:

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq M |x - y|$$

Portanto, mostramos que a função triangular é lipschitziana. □

É importante fazermos as seguintes observações [20]:

- Toda função lipschitziana é contínua.
- Ser ou não lipschitziana independe das normas (em \mathbb{R}^n ou espaços finitos).
- Toda função de Classe C^1 é lipschitziana.

Além disso, vamos apresentar três importantes proposições relacionadas às funções lipschitzianas:

Proposição 5.1. *A soma de duas funções lipschitziana é uma função lipschitziana.*

Demonstração. Seja $h(x) = f(x) + g(x)$, onde f e g são Lipschitz

$$|h(x) - h(y)| = |f(x) + g(x) - (f(y) + g(y))| = |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

Como f e g são Lipschitz, temos que:

$$|h(x) - h(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq K_1|x - y| + K_2|x - y| \leq K|x - y|$$

onde $K = K_1 + K_2$, portanto $h(x) = f(x) + g(x)$ é Lipschitz. □

Proposição 5.2. *Dado $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, sejam as aplicações $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitzianas, então a função $F(X) = (f(X), g(X))$ é lipschitziana.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|F(X) - F(Y)\| &= \|(f(X), g(X)) - (f(Y), g(Y))\| \\ &= \|(f(X) - f(Y), g(X) - g(Y))\| \end{aligned}$$

Utilizando a norma $|(x,y)| = |x| + |y|$, temos :

$$\|(f(X) - f(Y), g(X) - g(Y))\| = \|f(X) - f(Y)\| + \|g(X) - g(Y)\|$$

Como as funções f e g são de Lipschitz, então podemos escrever

$$\begin{aligned} \|f(X) - f(Y)\| + \|g(X) - g(Y)\| &\leq M_1\|X - Y\| + M_2\|X - Y\| \\ &= M\|X - Y\| \end{aligned}$$

onde $M = M_1 + M_2$. Portanto a função $F(X)$ é Lipschitz. □

Proposição 5.3. *Seja $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$. Tomemos o conjunto finito $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{U}$, tal que, $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ e $\mathbb{U} = \bigcup_{i=1}^n [a_{i-1}, a_i]$. Se f satisfaz a condição de Lipschitz em $[a_{i-1}, a_i]$ para qualquer $i \in \{1, \dots, n\}$ então f satisfaz a condição de Lipschitz para qualquer $x, y \in \mathbb{U}$*

Demonstração. Tomemos arbitrariamente $x, y \in \mathbb{U}$. Se ambos, x e y pertencerem a algum

intervalo $[a_{i-1}, a_i]$, então por hipótese, a função f satisfaz a condição de Lipchitz para esses valores de x e y .

Agora, se $x \in [a_{r-1}, a_r]$ e $y \in [a_{s-1}, a_s]$, com $r < s$ e $r, s \in \{1, \dots, n\}$ então podemos escrever:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(a_r) + f(a_r) - f(a_{r+1}) + f(a_{r+1}) + \dots + f(a_{s-1}) - f(y)|$$

Pela desigualdade triangular e pela hipótese de f ser lipschitziana nos intervalos descritos então temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(a_r)| + |f(a_r) - f(a_{r+1})| + \dots + |f(a_{s-1}) - f(y)| \\ &\leq k_1|x - a_r| + k_2|a_r - a_{r+1}| + \dots + k_t|a_{s-1} - y| \end{aligned}$$

Seja $K = \max\{K_1, \dots, K_t\}$, podemos escrever:

$$|f(x) - f(y)| \leq k(|x - a_r| + |a_r - a_{r+1}| + \dots + |a_{s-1} - y|)$$

Como $a_r < a_{r+1} < \dots < a_{s-1}$, temos a seguinte desigualdade:

$$|f(x) - f(y)| \leq k(|x - a_r + a_r - a_{r+1} + \dots + a_{s-1} - y|) = K|x - y|$$

Como x, y são arbitrários, provamos que f satisfaz a condição de Lipschitz para qualquer $x, y \in \mathbb{U}$ □

Por fim, temos a seguinte definição:

Definição 5.2. Chamaremos de “Sistema P-fuzzy Lipschitziano”, qualquer sistema P-fuzzy contínuo cuja função de saída seja lipschitziana.

Construção da função F_p

Para estudarmos a continuidade dos sistemas P-fuzzy e a unicidade de suas soluções, trabalharemos apenas com base de regras bem ordenadas (seção 3.3.3), sendo assim, cada elemento do domínio terá grau de pertinência diferente de zero à apenas dois conjuntos fuzzy dos antecedentes.

Consideraremos um sistema P-fuzzy unidimensional genérico, com um número finito

de conjuntos fuzzy nos antecedentes e nos consequentes. Este sistema está definido em $(a, b) = \mathbb{U} \subset \mathbb{R}$.

Apresentar uma função $F_p(x)$ que represente a saída desse sistema P-fuzzy para qualquer valor de $x \in (a, b)$ seria muito complexo e tornaria o desenvolvimento dos cálculos algo muito laborioso. Todavia, estamos interessados basicamente em saber se F_p é contínua e se satisfaz a condição de Lipschitz. Como mostramos na proposição 5.3, se mostrarmos que F_p satisfaz a condição de Lipschitz para intervalos fechados do domínio e que a união desses intervalos seja o próprio domínio, então podemos garantir que a função é lipchitziana. Sendo assim, iremos definir a função $F_p(x)$ apenas para $x \in [\bar{a}, \bar{b}] \subset (a, b)$ conforme a figura 5.2-3.

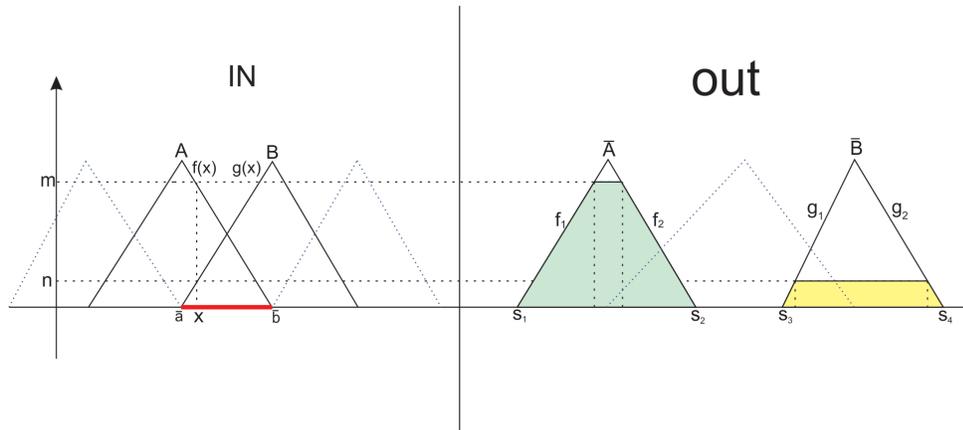


Figura 5.2-3. Fuzificação do sistema P-fuzzy Unidimensional com saída disjunta

Por exemplo, na figura 5.2-3 estamos considerando duas regras arbitrárias estabelecidas da seguinte forma:

- R_i : Se X é A então $\frac{dX}{dt}$ é \bar{A} .
- R_{i+1} : Se X é B então $\frac{dX}{dt}$ é \bar{B}

As associações feitas pelas regras anteriores são genéricas e portanto não particularizam os cálculos que obteremos. Baseando-se na figura 5.2-3. A saída de um sistema P-fuzzy que utiliza o controlador de Mamdani e realiza a defuzzificação através do centro de massa, pode ser dada pela função $F_p : [\bar{a}, \bar{b}] \rightarrow \mathbb{R}$, cuja expressão é

$$\frac{dX}{dt} = F_p(x) = \frac{h_1(m) + h_2(n)}{A(m, n)} \quad (5.11)$$

onde, $m = f(x)$ e $n = g(x)$, sendo

$$h_1(m) = \int_{s_1}^{f_1^{-1}(m)} t f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(m)}^{f_2^{-1}(m)} m t dt + \int_{f_2^{-1}(m)}^{s_2} t f_2(t) dt \quad (5.12)$$

$$h_2(n) = \int_{s_3}^{g_1^{-1}(n)} t g_1(t) dt + \int_{g_1^{-1}(n)}^{g_2^{-1}(n)} n t dt + \int_{g_2^{-1}(n)}^{s_4} t g_2(t) dt \quad (5.13)$$

$$A(m, n) = \int_{s_1}^{f_1^{-1}(m)} f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(m)}^{f_2^{-1}(m)} m dt + \int_{f_2^{-1}(m)}^{s_2} f_2(t) dt \quad (5.14)$$

$$+ \int_{s_3}^{g_1^{-1}(n)} g_1(t) dt + \int_{g_1^{-1}(n)}^{g_2^{-1}(n)} n dt + \int_{g_2^{-1}(n)}^{s_4} g_2(t) dt \quad (5.15)$$

onde, $A(m, n)$ é a área total abaixo das funções de pertinência dos consequentes.

Como dissemos, a equação 5.11 representa a saída do sistema P-fuzzy para $x \in [\bar{a}, \bar{b}]$, se x não estiver neste intervalo, a função de saída poderá envolver outros conjuntos fuzzy do antecedentes e dos consequentes, entretanto, as propriedades que garantirão a continuidade de $F_p(x)$ e que assegurarão que esta função é lipschitziana serão mantidas conforme veremos nos cálculos subsequêntes, portanto, poderemos estender os resultados obtidos para $x \in (a, b)$.

Continuidade de F_p

Para estudarmos a continuidade, vamos considerar que as funções de pertinência dos antecedentes, representadas por f e g , são lipschitzianas. Nos consequentes, as funções de pertinência são definidas por partes, por exemplo a função de pertinência do conjunto fuzzy \bar{A} é definida como sendo f_1 para a parte crescente e f_2 para a parte decrescente, essas funções deverão ser lipchitzianas e com inversa lipschitziana. Por fim, como já dissemos, o sistema P-fuzzy utilizado está definido no intervalo aberto $\mathbb{U} = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Sendo que os pontos a e b devem ter grau de pertinência igual à 1 ao conjunto fuzzy que estiver

associado.

Verificaremos se a função $F_p(x)$, construída conforme as condições anteriormente colocadas, satisfaz as hipóteses do primeiro item do teorema 5.1, garantindo assim a existência da solução para qualquer ponto inicial dado. Pela equação 5.11, para garantirmos que $F_p(x)$ é contínua, precisamos mostrar que $h_1(f(x))$, $h_2(g(x))$ e $A(f(x), g(x))$ são contínuas e que $A(f(x), g(x))$ não se anula. Iniciemos nosso estudo com o termo $h_1(f(x))$ e chamaremos de $H_{11}(f(x))$ o primeiro termo da equação 5.12:

$$H_{11}(f(x)) = \int_{s_1}^{f_1^{-1}(f(x))} t f_1(t) dt \quad (5.16)$$

Como estamos interessados em estudar a continuidade de 5.12, é viável simplificar a equação anterior considerando $v(t) = t f_1(t)$, claramente $v(t)$ é contínua pois o produto entre funções contínuas é uma função contínua. Além disso, usando a continuidade da composição entre funções contínuas, podemos garantir que $f_1^{-1}(m) = f_1^{-1}(f(x)) = u(x)$ é contínua. Portanto, para viabilizar a análise da continuidade, podemos simplificar a equação 5.16 da seguinte forma:

$$H_{11}(x) = \int_{s_1}^{u(x)} v(t) dt = V(u(x)) - V(s_1) \quad (5.17)$$

onde $V(x)$ é a primitiva de $v(x)$. Como a integral definida de uma função contínua é contínua [3], então, $V(x)$ é contínua, o que garante que a composição $V \circ u$ seja contínua. Portanto $H_{11}(x)$ é contínua. Analogamente, aplicando o mesmo raciocínio, podemos concluir que os termos

$$H_{12}(m) = \int_{f_1^{-1}(m)}^{f_2^{-1}(m)} m t dt \quad \text{e} \quad H_{13}(m) = \int_{f_2^{-1}(m)}^{s_2} t f_2(t) dt \quad (5.18)$$

são contínuos, logo $h_1(m)$ é contínua.

Para demonstrar que $h_2(n)$ é contínuo, basta empregar o mesmo raciocínio utilizado anteriormente. Da mesma forma, também podemos mostrar que $A(m, n)$ é contínua, já que $A(m, n)$ é formado por uma soma de termos do tipo

$$\int_{w(x)}^{u(x)} v(t) dt = V(u(x)) - V(w(x)) \quad (5.19)$$

onde w , u e v são funções contínuas.

Finalmente, para mostrar que $A(m, n)$ não se anula, consideremos o fato de que para qualquer x tomado, sempre irá existir pelo menos um conjunto fuzzy nos antecedentes, para o qual x terá grau de pertinência maior que zero, este fato é garantido pois estamos trabalhando com base de regras bem ordenadas. Portanto, a área abaixo do gráfico dos consequentes (ver figura 5.2-3) nunca será igual à zero, logo $A(m, n)$ nunca se anulará. Sendo assim, concluímos que a equação 5.11 é contínua, este fato garante a existência da solução do sistema P-fuzzy contínuo, conforme o teorema 5.1.

Como dissemos anteriormente, para mostrar a unicidade da solução para sistemas P-fuzzy contínuos iremos nos basear no Teorema 5.2. Como consequência direta desse teorema, podemos garantir que os sistemas P-fuzzy lipschitzianos possuem solução única. Portanto, torna-se necessário sabermos como garantir que um sistema P-fuzzy é lipschitziano, isto será feito no seguinte Teorema:

Teorema 5.3. *Seja $F_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, com $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}$, a função de saída de um sistema P-fuzzy unidimensional, com regras Bem-Ordenadas. Se todas as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy que formam os antecedentes forem lipchitzianas e as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy que forma os consequentes, definidas conforme a figura 5.2-3, forem lipchitzianas e com inversa lipchitzianas, então o sistema P-fuzzy é lipchitziano.*

Demonstração. Mostraremos que a função 5.20 é lipchitziana:

$$\frac{dX}{dt} = F_p(x) = \frac{h_1(f(x)) + h_2(g(x))}{A(f(x), g(x))} \quad (5.20)$$

Primeiramente, notamos pela equação 5.12 que o termo $h_1(f(x))$ é constituído de uma soma de funções da forma:

$$H(x) = \int_{f_1^{-1}(f(x))}^{f_2^{-1}(f(x))} v(t) dt \quad (5.21)$$

Onde $v(t)$ é uma função limitada no intervalo de integração. Podemos escrever

$$|H(x) - H(y)| = \left| \int_{f_1^{-1}(f(x))}^{f_2^{-1}(f(x))} v(t) dt - \int_{f_1^{-1}(f(y))}^{f_2^{-1}(f(y))} v(t) dt \right| \quad (5.22)$$

$$= \left| \int_{f_1^{-1}(f(x))}^{f_2^{-1}(f(x))} v(t) dt + \int_{f_2^{-1}(f(y))}^{f_1^{-1}(f(y))} v(t) dt \right| \quad (5.23)$$

$$\leq \int_{f_1^{-1}(f(x))}^{f_2^{-1}(f(x))} |v(t)| dt + \int_{f_2^{-1}(f(y))}^{f_1^{-1}(f(y))} |v(t)| dt \quad (5.24)$$

Como a função $v(t)$ é limitada, podemos majorá-la pelo seu supremo e escrever a seguinte desigualdade

$$\int_{f_1^{-1}(f(x))}^{f_2^{-1}(f(x))} |v(t)| dt + \int_{f_2^{-1}(f(y))}^{f_1^{-1}(f(y))} |v(t)| dt \leq M \int_{f_1^{-1}(f(x))}^{f_2^{-1}(f(x))} dt + M \int_{f_2^{-1}(f(y))}^{f_1^{-1}(f(y))} dt \quad (5.25)$$

$$\leq M(f_2^{-1}(f(x)) - f_1^{-1}(f(x))) + M(f_1^{-1}(f(y)) - f_2^{-1}(f(y))) \quad (5.26)$$

$$= M[(f_2^{-1}(f(x)) - f_2^{-1}(f(y))) + (f_1^{-1}(f(y)) - f_1^{-1}(f(x)))] \quad (5.27)$$

$$\leq M[|(f_2^{-1}(f(x)) - f_2^{-1}(f(y)))| + |(f_1^{-1}(f(y)) - f_1^{-1}(f(x)))|] \quad (5.28)$$

$$\leq M[|(f_2^{-1}(f(x)) - f_2^{-1}(f(y)))| + |(f_1^{-1}(f(y)) - f_1^{-1}(f(x)))|] \quad (5.29)$$

Por hipótese, f , f_1^{-1} e f_2^{-1} são lipschitziana, logo podemos escrever.

$$\begin{aligned} |H(x) - H(y)| &\leq M[|(f_2^{-1}(f(x)) - f_2^{-1}(f(y)))| + |(f_1^{-1}(f(y)) - f_1^{-1}(f(x)))|] \\ &\leq M[M_1 |f(x) - f(y)| + M_2 |f(y) - f(x)|] \\ &\leq K |x - y| \end{aligned}$$

Portanto a função $H(x)$ é lipschitziana. Como $H(x)$ é um termo arbitrário da soma que forma $h_1(x)$, então pela Proposição 5.1 podemos garantir que $h_1(x)$ é lipschitziano. Para mostrarmos que $h_2(g(x))$ e $A(f(x), g(x))$ também satisfazem a condição de Lipschitz,

basta adotarmos o mesmo procedimento descrito anteriormente. Portanto, para concluirmos nossa demonstração, resta apenas mostrar que o quociente $\frac{h_1(f(x)) + h_2(g(x))}{A(f(x), g(x))}$ é lipschitziano:

Para isso, vamos utilizar o seguinte Teorema:

Teorema 5.4. *Sejam $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável por partes. Se $\left| \frac{df(x)}{dx} \right| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{U}$ então, para quaisquer $x, y \in \mathbb{U}$, temos $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.*

Portanto, pelo Teorema 5.4, devemos mostrar que a derivada de $F_p(x)$ é limitada para garantir que esta função é lipschitziana, pois $F_p(x)$ será sempre definida num intervalo convexo. A derivada de $F_p(x)$ é dada por:

$$\frac{dF_p(x)}{dx} = \frac{(h_1(m) + h_2(n))'A(m, n) - A(m, n)'(h_1(m) + h_2(n))}{(A(m, n))^2} \quad (5.30)$$

A função $A(m, n)$ é limitada superiormente pois representa a área da saída dos conjuntos fuzzy na figura 5.2-3 e é limitada inferiormente pois, pela definição de base de regra bem ordenada, todo x pertencente ao domínio do sistema P-fuzzy tem grau de pertinência diferente de zero à pelo menos um conjunto fuzzy dos consequentes. Seja M o ínfimo de $A(m, n)$, portanto temos:

$$\frac{dF_p(x)}{dx} = \frac{(h_1(m) + h_2(n))'A(m, n) - A(m, n)'(h_1(m) + h_2(n))}{(A(m, n))^2} \quad (5.31)$$

$$\leq \frac{(h_1(m) + h_2(n))'A(m, n) - A(m, n)'(h_1(m) + h_2(n))}{M} \quad (5.32)$$

Como $(h_1(m) + h_2(n))$ e $A(m, n)$, são funções lipschitziana, então a derivada dessas funções também são limitadas [20], portanto, basta mostrar que $(h_1(m) + h_2(n))$ é limitada. Como dissemos, essas funções são formadas por uma soma de integrais de uma função $v(t)$ limitada no intervalo de integração, como a integral definida de uma função limitada é limitada então $(h_1(m) + h_2(n))$ é limitada. Deste modo mostramos que $\frac{dF_p(x)}{dx}$ é limitada, portanto, pelo Teorema 5.4 podemos garantir que a função $F_p(x)$ é lipschitziana.

□

Sendo assim, concluímos que a função $F_p(x)$ é lipschitziana, e portanto, pelo Teorema 5.2, tais sistemas possuem solução única em seu domínio. Na próxima subseção estudaremos a existência e unicidade da solução de sistemas P-fuzzy contínuos bidimensionais. Neste caso, o estudo envolve cálculos um pouco mais laboriosos mas que seguem a mesma ideia anteriormente apresentada.

5.2.2 Existência e unicidade para sistemas P-fuzzy bidimensionais

Na seção anterior, apresentamos o teorema 5.1 que garante a existência e unicidade da solução de um PVI unidimensional mediante a continuidade da função f e de sua derivada. Este resultado pode ser estendido para dimensões maiores, conforme o teorema 5.5

Teorema 5.5. [13] *Seja $\mathbf{f} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde \mathbb{U} é um conjunto aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (5.33)$$

1. *Se $f \in C^0(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)$ então existe uma solução $\varphi_t(t_0, \mathbf{x}_0)$ do problema de valor inicial para todo t no intervalo maximal de existência.*
2. *Se $f \in C^k(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)$ com $k \geq 1$, então existe uma única solução $\varphi_t(t_0, \mathbf{x}_0)$ do problema de valor inicial definida no intervalo maximal de existência; além disso, φ é C^k em (t, t_0, \mathbf{x}_0)*

Assim como fizemos para o caso unidimensional, garantiremos a existência da solução de um sistema P-fuzzy através da continuidade do mesmo e mostraremos a unicidade da solução desse sistema pelo Teorema de Picard, isto é, verificando se a expressão de saída do sistema P-fuzzy satisfaz a condição de Lipschitz.

Como o teorema de Poincaré-Bendixson que é nosso objeto de estudo, está definido apenas para o plano, vamos utilizar o teorema acima apenas para funções $\mathbf{f} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

onde $\mathbb{U} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^2 . Analogamente ao que foi feito na seção anterior, apresentaremos uma expressão $F_p(x, y)$ que representa a saída do sistema P-fuzzy para valores de x e y em um subconjunto fechado do domínio do sistema P-fuzzy. Verificaremos que este resultado poderá ser estendido para todo o domínio do sistema P-fuzzy.

Os conjuntos fuzzy dos consequentes de um sistema P-fuzzy bidimensional arbitrário pode ser representado conforme a figura 5.2-4:

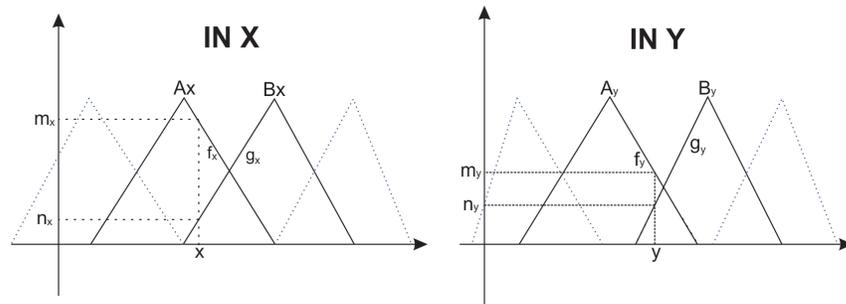


Figura 5.2-4. Conjuntos de entrada do sistema P-fuzzy bidimensional

Como estamos trabalhando com conjuntos fuzzy “bem ordenados”, cada ponto do domínio está associado a no máximo dois conjuntos fuzzy dos antecedentes, sendo assim a figura 5.2-4 representa bem uma situação arbitrária para qualquer valor de x e y , pertencente ao domínio do campo.

Consideraremos no estudo a seguir que as funções f_x , g_x , f_y e g_y são lipschitzianas, lembrando que essas funções representam respectivamente o grau de pertinência das coordenadas de um determinado elemento $(x, y) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, aos conjuntos fuzzy A_x , B_x , A_y e B_y . A figura 5.2-5 representa os conjuntos fuzzy dos consequentes associados, pela base de regra, aos conjuntos fuzzy dos antecedentes A_x , B_x , A_y e B_y .

Conforme a estruturação do módulo de inferência de Mamdani, os valores de α_1 , α_2 , α_3 e α_4 na figura 5.2-5 são definidos pela função mínimo da seguinte forma:

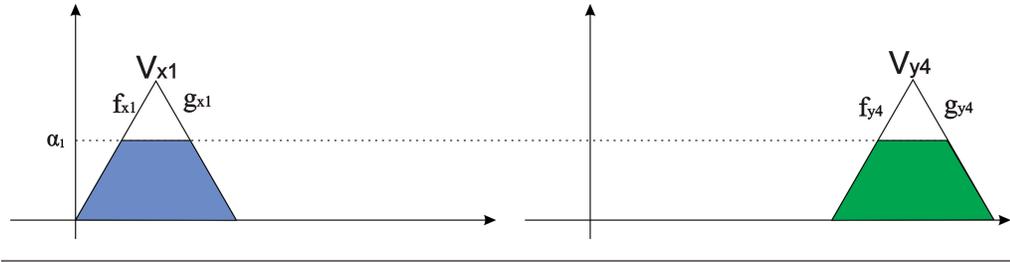
$$\alpha_1 = \min\{m_x, m_y\}$$

$$\alpha_2 = \min\{m_x, n_y\}$$

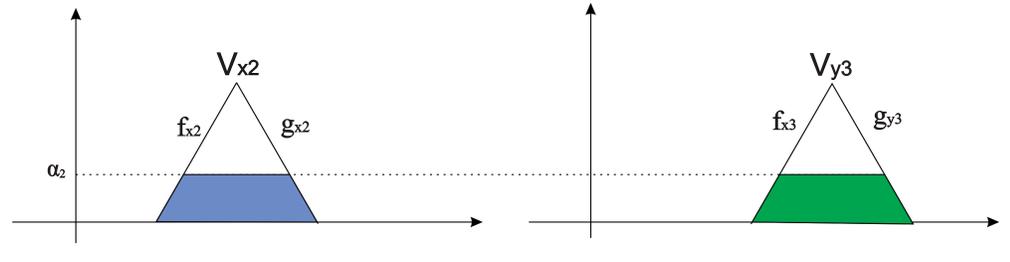
$$\alpha_3 = \min\{n_x, m_y\}$$

$$\alpha_4 = \min\{n_x, n_y\}$$

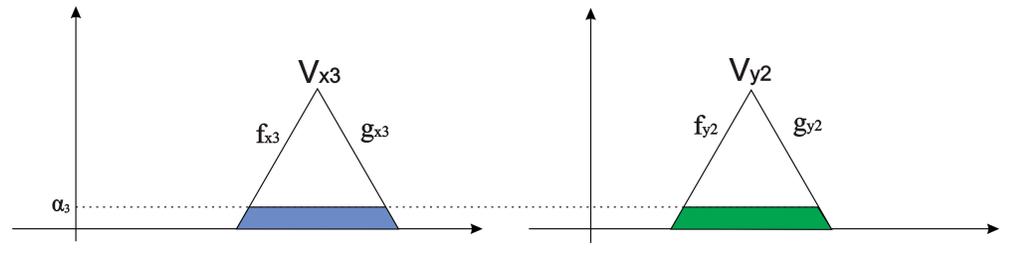
Se X é A_x e Y é A_y então dX/dt é V_{x1} e dY/dt é V_{y4}



Se X é A_x e Y é B_y então dX/dt é V_{x2} e dY/dt é V_{y3}



Se X é B_x e Y é A_y então dX/dt é V_{x3} e dY/dt é V_{y2}



Se X é B_x e Y é B_y então dX/dt é V_{x4} e dY/dt é V_{y1}

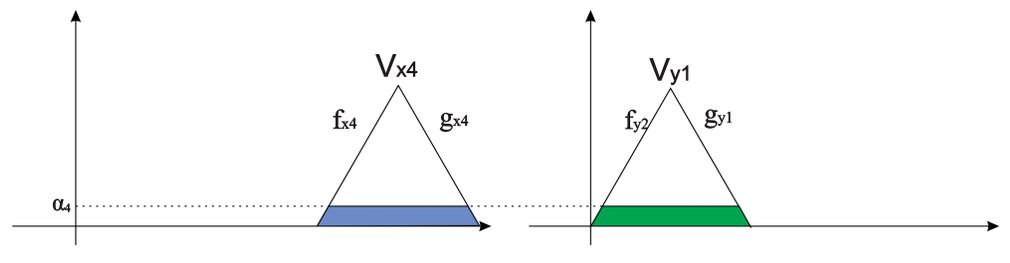


Figura 5.2-5. Fuzzificação do sistema P-fuzzy Bidimensional

Baseando-se na figura 5.2-5, vamos considerar que as funções f_{xi} , g_{xi} , f_{yi} e g_{yi} , com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, são todas lipschitzianas e com inversa lipschitziana. A figura 5.2-6 representa o conjunto fuzzy de saída da coordenada x . Ele é obtido pela união entre os conjuntos fuzzy dos consequentes que foram acionados.

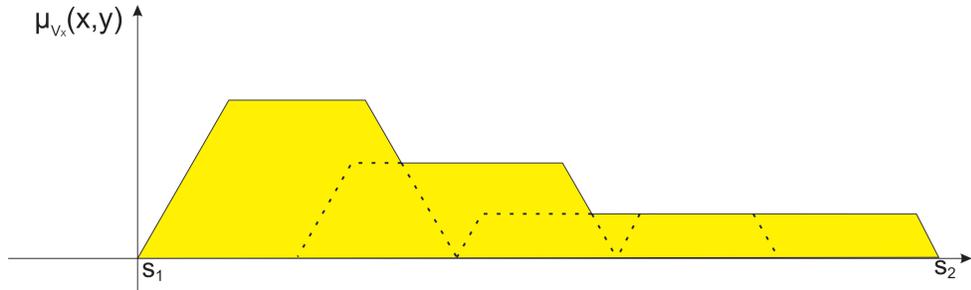


Figura 5.2-6. Defuzzificação do sistema P-fuzzy Bidimensional

É importante notar que estamos representando através das figuras 5.2-5 e 5.2-6 o caso onde a base de regra foi contruída de tal forma que os conjuntos fuzzy A_x , B_x , A_y e B_y estão associados a conjuntos distintos de saída, portanto estaremos trabalhando com o caso mais abrangente possível. Sendo assim, os cálculos que serão apresentados contemplam casos mais reitados de sistemas P-fuzzy.

Faremos nosso estudo apenas para uma variável de saída, já que as duas componentes de saída têm expressões análogas e pela Proposição 5.2, basta mostrar que as componentes são lipschitzianas para garantir que a F_p é lipschitziana. Sendo assim, a expressão para variação de x pode ser dada da seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = F_x(x, y) = \frac{H_x(x, y)}{A_x(x, y)} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} H_x(x, y) = & \int_{s_1}^{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1)} t f_{x_1}(t) dt + \int_{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1)}^{g_{x_1}^{-1}(\alpha_1)} t \alpha_1 dt + \int_{g_{x_1}^{-1}(\alpha_1)}^{g_{x_1}^{-1}(\alpha_2)} t g_{x_1}(t) dt \\ & + \int_{g_{x_1}^{-1}(\alpha_2)}^{g_{x_2}^{-1}(\alpha_2)} t \alpha_2 dt + \int_{g_{x_2}^{-1}(\alpha_2)}^{g_{x_2}^{-1}(\alpha_3)} t g_{x_2}(t) dt + \int_{g_{x_2}^{-1}(\alpha_3)}^{g_{x_4}^{-1}(\alpha_3)} t \alpha_3 dt \\ & + \int_{g_{x_4}^{-1}(\alpha_3)}^{s_2} t g_{x_4}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_x(x, y) = & \int_{s_1}^{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1)} f_{x_1}(t)dt + \int_{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1)}^{g_{x_1}^{-1}(\alpha_1)} \alpha_1 dt + \int_{g_{x_1}^{-1}(\alpha_1)}^{g_{x_1}^{-1}(\alpha_2)} g_{x_1}(t)dt \\
& + \int_{g_{x_1}^{-1}(\alpha_2)}^{g_{x_2}^{-1}(\alpha_2)} \alpha_2 dt + \int_{g_{x_2}^{-1}(\alpha_2)}^{g_{x_2}^{-1}(\alpha_3)} g_{x_2}(t)dt + \int_{g_{x_2}^{-1}(\alpha_3)}^{g_{x_4}^{-1}(\alpha_3)} \alpha_3 dt \\
& + \int_{g_{x_4}^{-1}(\alpha_3)}^{s_2} g_{x_4}(t)dt
\end{aligned}$$

Mais uma vez, essa expressão representa a saída do sistema P-fuzzy para um intervalo fechado contido em \mathbb{U} . Para outros pontos de \mathbb{U} que estiverem fora deste intervalo, as variáveis de entrada x e y irão acionar outros conjuntos fuzzy nos antecedentes e consequentes, entretanto, a expressão de saída manterá as mesmas propriedades utilizadas para demonstrar que F_p é contínua e que satisfaz a condição de Lipschitz.

Inicialmente, nos basearemos no primeiro item do Teorema 5.5 para garantir a existência da solução do sistema P-fuzzy descritos acima. Para tanto devemos mostrar que F_p é contínua, isto é, pela equação 5.34, devemos mostrar que $H_x(x, y)$ e $A_x(x, y)$ são contínuas e que $A_x(x, y)$ não se anula. Iniciemos a análise por $H_x(x, y)$, o qual é composto por uma soma de integrais. Tomemos a primeira destas integrais e chamemos de $H_1(m_x, n_x)$.

$$H_1(m_x, n_x) = \int_a^{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1)} t f_{x_1}(t) dt \quad (5.35)$$

A função composta $f_{x_1}^{-1}(\alpha_1) = f_{x_1}^{-1}(\min\{m_x, m_y\}) = f_{x_1}^{-1}(\min\{f_x(x), f_y(y)\})$, como f_x e f_y são contínuas então a função $\min\{f_x(x), f_y(y)\}$ também é contínua e como $f_{x_1}^{-1}$ é contínua, então a composição $f_{x_1}^{-1}(\alpha_1)$ é contínua. Assim como fizemos para o caso unidimensional, chamemos de $v(t) = t f_{x_1}(t)$, sendo $v(t)$ uma função contínua e limitada no intervalo de integração, portanto podemos escrever:

$$H_1(m_x, n_x) = \int_a^{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1)} v(t) dt = V(f_{x_1}^{-1}(\alpha_1)) - V(a) \quad (5.36)$$

A integral definida de uma função contínua é uma função contínua, logo concluímos que $H_1(m_x, n_x)$ é contínua. Vamos repetir o mesmo argumento para a segunda componente

da soma de $H_x(x, y)$, o qual chamaremos de $H_2(m_x, n_x)$

$$H_2(m_x, n_x) = \int_{f_{x1}^{-1}(\alpha_1)}^{g_{x1}^{-1}(\alpha_1)} t\alpha_1 dt \quad (5.37)$$

As funções $g_{x1}^{-1}(\alpha_1)$ e $f_{x1}^{-1}(\alpha_1)$ são contínuas, podemos reescrever a integral da seguinte forma :

$$H_2(m_x, n_x) = \frac{\alpha_1}{2} ((g_{x1}^{-1}(\alpha_1))^2 - (f_{x1}^{-1}(\alpha_1))^2) \quad (5.38)$$

Baseando-se em argumentos similares aos utilizados para mostrar a continuidade de $H_1(m_x, n_x)$, podemos concluir que $H_2(m_x, n_x)$ é uma função contínua. Da mesma forma, concluímos que os outros termos da soma que forma $H_x(x, y)$ e os termos de $A_x(x, y)$ também são contínuos. Por fim, sabemos que $A_x(x, y)$ não se anula, pois como já dissemos, esta função representa a área do gráfico de 5.2-6 que nunca será igual a zero. Portanto, pelo Teorema 5.5, a continuidade de $F(F_x(x, y), F_y(x, y))$ garante a existência da solução do sistema P-fuzzy no domínio em que está definido.

Unicidade

Claramente, a função $F_p(x, y)$ não é de Classe C^1 pois possui em sua estrutura a função *min*, o que impede a aplicação do teorema 5.5, entretanto isto não elimina a possibilidade da solução ser única, já que o fato de $F_p(x, y)$ ser de classe C^1 é apenas uma condição suficiente, mas não necessária para garantir a unicidade da solução.

Da mesma forma como fizemos para o caso unidimensional, aplicaremos o Teorema 5.2 para garantir a unicidade da solução, isto é, verificaremos se a expressão de saída $F_p(x, y)$ satisfaz a condição de Lipschitz. Portanto, para garantir a unicidade da solução é importante sabermos quais são as condições suficientes para que um sistema P-fuzzy seja lipschitziano. Tais condições serão descritas no Teorema 5.6, que é um dos teoremas originais deste trabalho.

Teorema 5.6. *Seja $F_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$, com $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^2$, a função de saída de um sistema P-fuzzy bidimensional, com regras Bem Ordenadas. Se todas as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy que formam os antecedentes forem lipchitzianas e as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy que forma os consequentes, definidas conforme a figura 5.2-6, também*

forem lipchitzianas e com inversa lipchitzianas, então o sistema P -fuzzy é lipchitziano.

Demonstração. Pela Proposição 5.2, se $\frac{H_x(x, y)}{A_x(x, y)}$ e $\frac{H_y(x, y)}{A_y(x, y)}$ forem funções lipchitzianas, então $F_p(x, y) = \left(\frac{H_x(x, y)}{A_x(x, y)}, \frac{H_y(x, y)}{A_y(x, y)} \right)$ também é lipchitziana.

Iniciemos nosso estudo com a componente $\frac{H_x(x, y)}{A_x(x, y)}$. Primeiramente vamos mostrar que $H_x(x, y)$ é lipchitziana. Pela Proposição 5.1, se todos os termos de uma soma forem lipchitzianos, então esta soma também é. Sendo assim, iniciemos nosso estudo pelo termo $H_{x1}(x, y)$ denotado da seguinte forma:

$$H_{x1}(x, y) = \int_{s_1}^{f_{x1}^{-1}(\min\{f_x(x), f_y(y)\})} t f_{x1}(t) dt \quad (5.39)$$

Para viabilizar os cálculos, faremos $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$, além disso, $\alpha_1(X) = \min\{f_x(x_1), f_y(x_2)\}$. Para mostrar que H_{x1} é lipchitziana, podemos proceder com os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned} |H_{x1}(X) - H_{x1}(Y)| &= \left| \int_{s_1}^{f_{x1}^{-1}(\alpha_1(X))} t f_{x1}(t) dt - \int_{s_1}^{f_{x1}^{-1}(\alpha_1(Y))} t f_{x1}(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{f_{x1}^{-1}(\alpha_1(Y))}^{f_{x1}^{-1}(\alpha_1(X))} t f_{x1}(t) dt \right| \\ &\leq \int_{f_{x1}^{-1}(\alpha_1(Y))}^{f_{x1}^{-1}(\alpha_1(X))} |t f_{x1}(t)| dt \end{aligned}$$

A função $f_{x1}(t)$ é limitada e a função t também é limitada no domínio de integração adotado, portanto o produto entre as duas funções também é uma função limitada, denotemos por $v(t) = t f_{x1}(t)$. Como $v(t)$ é limitada então existe um K_1 tal que $K_1 = \sup_{t \in \mathbb{D}} \{v(t)\}$, onde \mathbb{D} é o intervalo de integração de $v(t)$, portanto podemos escrever a seguinte desigualdade.

$$\int_{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(Y))}^{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(X))} |tf_{x_1}(t)| dt \leq \int_{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(Y))}^{f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(X))} K_1 dt = K_1(f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(X)) - f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(Y)))$$

Como $f_{x_1}^{-1}$ é lipschitziana temos:

$$\begin{aligned} K_1(f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(X)) - f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(Y))) &\leq |K_1| |(f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(X)) - f_{x_1}^{-1}(\alpha_1(Y)))| \\ &\leq |K_1 K_2| |\alpha_1(X) - \alpha_1(Y)| \end{aligned}$$

Sabemos que $\alpha_1(X) = \min\{f(x_1), g(x_2)\}$ e considerando $K = K_1 K_2$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} |K| |\alpha_1(X) - \alpha_1(Y)| &= |K_1| |\min\{f(x_1), g(x_2)\} - \min\{f(y_1), g(y_2)\}| \\ &= |K| \left| \frac{f(x_1) + g(x_2) - |f(x_1) - g(x_2)|}{2} - \frac{f(y_1) + g(y_2) - |f(y_1) - g(y_2)|}{2} \right| \\ &= K |f(x_1) + g(x_2) - |f(x_1) - g(x_2)|| - f(y_1) - g(y_2) - |f(y_1) - g(y_2)|| \\ &= K |f(x_1) - f(y_1) + g(x_2) - g(y_2) + |f(y_1) - g(y_2)| - |f(x_1) - g(x_2)|| \\ &\leq K (|f(x_1) - f(y_1) + g(x_2) - g(y_2)| + ||f(y_1) - g(y_2)| - |f(x_1) - g(x_2)||) \\ &\leq K (|f(x_1) - f(y_1)| + |g(x_2) - g(y_2)| + |f(x_1) - f(y_1)| + |g(x_2) - g(y_2)|) \end{aligned}$$

Como as funções f e g satisfazem a condição de Lipschitz, podemos escrever:

$$K(M_1 |x_1 - y_1| + M_2 |x_2 - y_2|) \leq C \cdot (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) \quad (5.40)$$

Considerando a norma $|(x, y)| = |x| + |y|$, temos que:

$$C(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) = C |(x_1 - y_1, x_2 - y_2)| = C |X - Y| \quad (5.41)$$

Portanto

$$|H_{x_1}(X) - H_{x_1}(Y)| \leq C \cdot |X - Y| \quad (5.42)$$

Portanto o termo $H_{x_1}(x, y)$ é lipschitziano. Agora precisamos realizar os mesmos cálculos para os termos restantes de $H_x(x, y)$, entretanto, as expressões são bastante similares no que concerne ao fato da função ser lipschitziana. Apenas para efeito de esclarecimento, vamos mostrar que o termo $H_{x_3}(x, y)$ é lipschitziano.

$$H_{x_3}(x, y) = \int_{g_{x_1}(\alpha_1)}^{g_{x_1}(\alpha_2)} tg_{x_1}(t) dt$$

$$|H_3(X) - H_{x_3}(Y)| = \left| \int_{g_{x_1}(\alpha_1(X))}^{g_{x_1}(\alpha_2(X))} tg_{x_1}(t) dt - \int_{g_{x_1}(\alpha_1(Y))}^{g_{x_1}(\alpha_2(Y))} tg_{x_1}(t) dt \right| \quad (5.43)$$

$$= \left| \int_{g_{x_1}(\alpha_1(X))}^{g_{x_1}(\alpha_2(X))} tg_{x_1}(t) dt + \int_{g_{x_1}(\alpha_2(Y))}^{g_{x_1}(\alpha_1(Y))} tg_{x_1}(t) dt \right| \quad (5.44)$$

$$\leq \int_{g_{x_1}(\alpha_1(X))}^{g_{x_1}(\alpha_2(X))} |tg_{x_1}(t)| dt + \int_{g_{x_1}(\alpha_2(Y))}^{g_{x_1}(\alpha_1(Y))} |tg_{x_1}(t)| dt \quad (5.45)$$

Pela Proposição 5.1, basta mostrarmos que cada termo da última soma é lipschitziano, para isso, devemos aplicar o mesmo raciocínio empregado à $H_{x_1}(x, y)$. Além disso, para mostrar que $A_x(x, y)$ é lipschitziano, também basta aplicar da mesmo procedimento, já que os termos da soma que formam $A_x(x, y)$ também são similares aos apresentados anteriormente.

Como já mostramos, $H_x(x, y)$ e $A_x(x, y)$ são funções lipschitzianas, além disso, $A_x(x, y)$ é limitada, portanto, vamos utilizar estes fatos para mostrar que a componente $F_x(x, y)$ é lipschitziana, lembrando que pela proposição 5.2, se as componentes de uma função satisfazem a condição de Lipschitz, então a função também é lipschitziana.

Nos nossos problemas, trabalharemos sempre em domínios retangulares contidos em \mathbb{R}^2 e portanto convexos, sendo assim, pelo teorema 5.4, se a derivada de uma função é limitada, então a função satisfaz a condição Lipschitz. Portanto precisamos mostrar que as derivadas parciais de $F_p(x, y)$ são limitadas. Iniciemos nosso estudo pela derivada em relação à x .

$$\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \frac{H_x(x, y)}{A_x(x, y)}}{\partial x} = \frac{\frac{\partial H_x(x, y)}{\partial x} A_x(x, y) - \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial x} H_x(x, y)}{(A(x, y))^2}$$

Como $H_x(x, y)$ é lipschitziano então o termo $\frac{\partial H_x(x, y)}{\partial x}$ é limitado, da mesma forma o termo $\frac{\partial A_x(x, y)}{\partial x}$ é limitado. Como já colocamos $A_x(x, y)$ é limitado, já que representa a área abaixo do gráfico da figura 5.2-6. Portanto, para concluir que $\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x}$ é limitada, falta mostrar que $H_x(x, y)$ é limitada. De uma forma geral, $H_x(x, y)$ é formado por uma soma de integrais de funções limitadas, portanto $H_x(x, y)$ também é limitada.

Por fim, precisaremos mostrar que $\frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y}$ também é limitada, todavia, o raciocínio é exatamente análogo ao apresentado anteriormente. Portanto, garantimos que a expressão $F_p(x, y)$ é lipschitziana.

□

Este resultado é importante, pois possibilita que façamos diversas análises qualitativas para sistemas P-fuzzy lipschitzianos. Deste modo, usaremos o Teorema 5.6 para propor uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy contínuos.

5.3 Teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy

O Teorema de Poincaré-Bendixson para o caso clássico é enunciado apenas para sistemas de EDO's que possuem solução única para qualquer valor inicial dado. Por isso, dedicamos as seção 5.2 para obtermos uma maneira de contruímos um sistema P-fuzzy contínuo que para qualquer valor inicial dado, possua apenas uma única solução.

Como vimos na seção anterior, uma consequência direta do Teorema 5.2, é assegurar que um sistema P-fuzzy lipschitziano possui solução única em seu domínio. Além disso, vimos pelo Teorema 5.6, como é possível contruir um sistema P-fuzzy que seja lipchitziano. Tais fatos, permitem que enunciemos o Teorema de Poincaré-Bendixson para esses

sistemas da seguinte forma:

Teorema 5.7. (Poincaré-Bendixson para sistemas P-fuzzy) *Seja F_p um Sistema P-fuzzy bidimensional lipschitziano, se para $t \geq t_0$ a trajetória é limitada e não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio, então esta trajetória é uma órbita periódica, ou se aproxima de uma órbita periódica para $t \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. A função F_p de saída de um sistema P-fuzzy lipschitziano é equivalente a um sistema de EDO contínuo que satisfaz a condição de Lipschitz. Pelo Teorema 5.2, tais sistemas possuem solução única para cada ponto do domínio. Sendo assim, a demonstração do Teorema 5.7 é exatamente igual à demonstração apresentada no capítulo 2 para o Teorema de Poincaré-Bendixson clássico. \square

Assim como ocorre no caso clássico, a maior dificuldade de se aplicar o Teorema 5.7 é garantir que uma trajetória (solução) é limitada. No entanto, para os sistemas P-fuzzy, podemos utilizar sua representação em plano de fase (ver figura 5.3-7) para verificar tal fato. Tomemos um sistema P-fuzzy lipchitziano que possui uma região invariante, isto é, qualquer solução que entra nessa região fica limitada à ela em qualquer instante de tempo subsequente, portanto, mostraremos como identificar essa região.

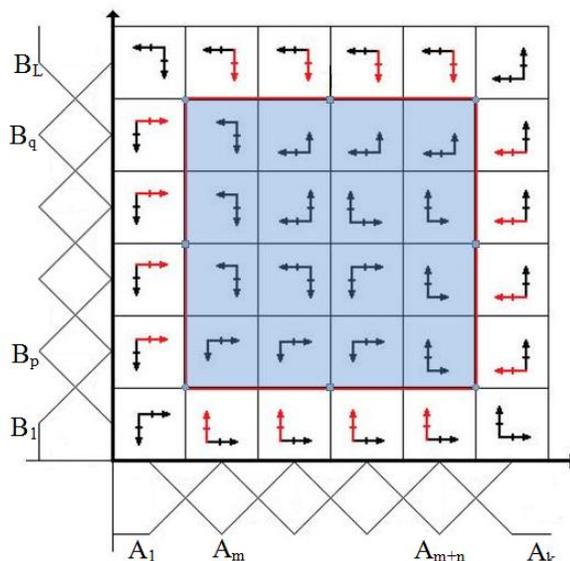


Figura 5.3-7. Diagrama de setas para o modelo P-fuzzy

O sentido das setas do diagrama da figura 5.3-7 representa o sentido da variação da solução e o tamanho das setas representa sua intensidade. Nota-se pela figura 5.3-7 que existe um conjunto de setas (vermelhas) que apontam para uma região fechada (região destacada em azul), isto nos leva a acreditar que as soluções que iniciem dentro da região em destaque são limitadas por essa região. Vamos mostrar que isso ocorre através de um argumento geométrico.

Na figura 5.3-8 temos o campo de direções do sistema P-fuzzy apresentado na figura 5.3-7, nesta figura traçamos um conjunto de segmentos de retas transversais que unidos, formam uma curva fechada. Podemos garantir que todas os segmentos de retas traçados são transversais pois não são paralelos ao campo em nenhum ponto, além disso, o campo de direções corta essa curva fechada em uma única direção, neste caso, de dentro para fora, o que nos leva a concluir que a solução é limitada por essa curva fechada, pois para solução “sair” desta região, necessitaria cortar alguma reta transversal em sentido contrário ao campo, o que é impossível.

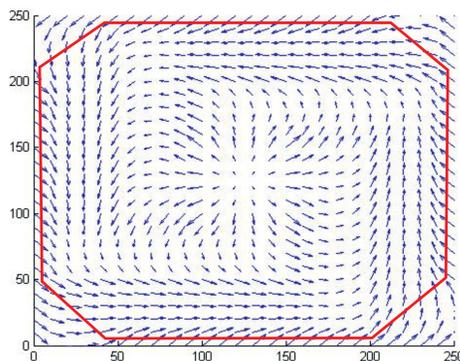


Figura 5.3-8. Campo de direções para o modelo P-fuzzy

Portanto, se existe uma região A no diagrama de setas para a qual as setas apontam sempre para o seu interior, então existe uma região (provavelmente contida em A) tal que a solução do sistema P-fuzzy será sempre limitada. Adicionalmente, podemos verificar que essa região é um conjunto compacto, já que é um subconjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^2 . Um exemplo desta região A está ilustrado na figura 5.3-7 por um retângulo azul, enquanto que as setas que apontam para o interior desta região estão destacada em vermelho nesta mesma figura.

Outra hipótese do teorema 5.7 é que a solução não se aproxime de nenhum ponto de equilíbrio. Uma abordagem mais completa sobre pontos de equilíbrio em sistemas P-

fuzzy pode ser consultada no capítulo 4, onde verificamos que através das setas é possível garantir a existência ou não de pontos de equilíbrio, baseando-se em [29]. Ainda pelo diagrama da figura 5.3-7, podemos verificar que existe um único ponto de equilíbrio dentro da região limitada pela curva transversal fechada e este ponto é instável conforme [29], portanto podemos aplicar o Teorema 5.7 e garantir que uma solução que inicie num ponto (a menos do ponto de equilíbrio) pertencente à região limitada ou é uma órbita periódica ou se aproxima de uma órbita periódica.

Na figura 5.4-17 apresentamos o plano de fase do sistema que estamos trabalhando, nesta figura traçamos também uma solução que converge para uma órbita periódica.

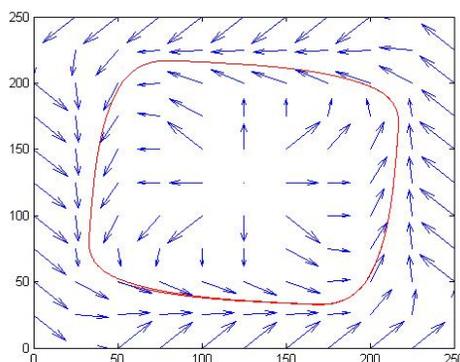


Figura 5.3-9. Campo de direções para o modelo P-fuzzy

É importante observar que obtivemos através do Teorema 5.7 um resultado para análise qualitativa das soluções de sistemas P-fuzzy, isto é, podemos fazer conclusões sobre o comportamento da solução de um modelo construído com base em informações incertas ou imprecisas. Para concluir este capítulo, exemplificaremos os resultados obtidos através de modelos P-fuzzy utilizados na biomatemática.

5.4 Exemplos de aplicações

Nesta seção, ilustraremos através de exemplos, a aplicação do estudo de existência e unicidade da solução de sistemas P-fuzzy unidimensionais e bidimensionais. Além disso, aplicaremos a versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para sistema P-fuzzy em um sistema bidimensional tipo presa-predador.

5.4.1 Modelo logístico unidimensional

Utilizaremos o modelo logístico para exemplificar o estudo de existência e unicidade da solução de sistemas P-fuzzy unidimensionais lipschitzianos. Como mostramos no capítulo 4, podemos montar um sistema P-fuzzy contínuo para o modelo logístico com as seguintes funções de pertinência de entrada e de saída.

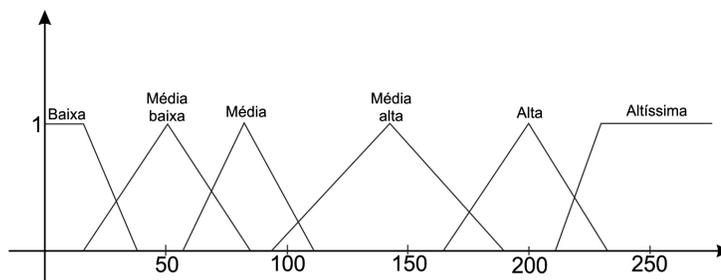


Figura 5.4-10. Entrada do sistema P-fuzzy para o modelo logístico

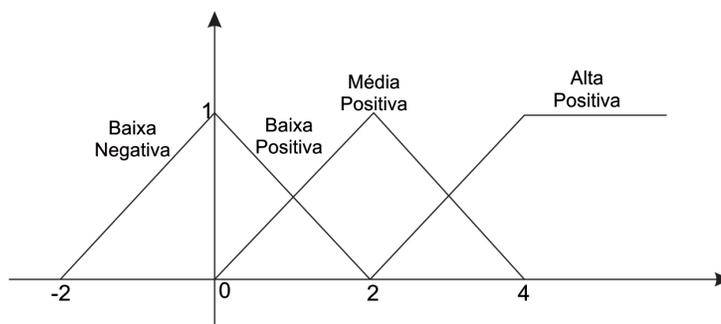


Figura 5.4-11. Saída do sistema P-fuzzy para o modelo logístico

As regras que relacionam as variáveis de entrada e saída são :

1. R_1 : Se X é Baixa então $\frac{df(x)}{dx}$ é Baixa Positiva.
2. R_2 : Se X é Média Baixa então $\frac{df(x)}{dx}$ é Média Positiva.
3. R_3 : Se X é Média então $\frac{df(x)}{dx}$ é Alta Positiva.
4. R_4 : Se X é Média Alta então $\frac{df(x)}{dx}$ é Média Positiva.
5. R_5 : Se X é Alta então $\frac{df(x)}{dx}$ é Baixa Positiva.

6. R_6 : Se X é Altíssima então $\frac{df(x)}{dx}$ é Baixa Negativa.

A primeira constatação que devemos fazer para garantir a existência e unicidade do sistema P-fuzzy acima é verificar que este seja Bem-Ordenado.

Primeiramente, o universo deve ser um intervalo limitado de \mathbb{R} . No modelo acima, tomaremos como universo o intervalo $[0, 250]$. Pelas figuras 5.4-10 e 5.4-11, verificamos também que todos os conjuntos fuzzy que representam as variáveis de entrada e saída são números fuzzy, isto é, todos os α -níveis são intervalos não vazios de \mathbb{R} . Outro detalhe importante é que cada elemento x da entrada tem grau de pertinência diferente de zero a no máximo dois conjuntos fuzzy, em outras palavras, cada elemento aciona, no máximo, duas regras. Além disso, todo elemento $x \in [0, 250]$ que tenha grau de pertinência 1 a um conjunto fuzzy de entrada, tem grau de pertinência zero aos outros conjuntos fuzzy. Por fim, notamos pela construção das regras que estas são ordenadas monotonicamente, portanto, garantimos que o sistema P-fuzzy que estamos trabalhando é bem ordenado.

Pela figura 5.4-10, verificamos que as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy dos antecedentes são lipschitzianas, além disso, as funções que formam os consequentes são todas retas, e portanto são lipschitzianas e possuem inversa lipschitziana. A expressão de saída deste sistema P-fuzzy para um determinado ponto x , pode ser dada da seguinte forma:

$$F_p(x) = \frac{dx}{dt} = \frac{h_1(m) + h_2(n)}{A(m, n)} \quad (5.46)$$

$$h_1(m) = \int_a^{f_1^{-1}(m)} t f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(m)}^{f_2^{-1}(m)} m t dt + \int_{f_2^{-1}(m)}^b t f_2(t) dt \quad (5.47)$$

$$h_2(n) = \int_c^{g_1^{-1}(n)} t g_1(t) dt + \int_{g_1^{-1}(n)}^{g_2^{-1}(n)} n t dt + \int_{g_2^{-1}(n)}^d t g_2(t) dt \quad (5.48)$$

$$A(m, n) = \int_a^{f_1^{-1}(m)} f_1(t) dt + \int_{f_1^{-1}(m)}^{f_2^{-1}(m)} m dt + \int_{f_2^{-1}(m)}^b f_2(t) dt \quad (5.49)$$

$$+ \int_c^{g_1^{-1}(n)} g_1(t) dt + \int_{g_1^{-1}(n)}^{g_2^{-1}(n)} n dt + \int_{g_2^{-1}(n)}^d g_2(t) dt \quad (5.50)$$

onde, $A(m, n)$ é a área total abaixo das funções de pertinência da saída.

Lembremos que as função f e g representam as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy dos antecedentes acionadas por x enquanto que f_1 , f_2 , g_1 e g_2 são as funções que formam as funções de pertinência dos consequentes relacionados pela base de regras, aos conjuntos fuzzy acionados por x nos antecedentes.

Pelo teorema 5.2, para garantir a unicidade da solução necessitamos mostrar que a função F_p é lipschitziana. Como dissemos, as funções que estamos trabalhando são triangulares, e portanto lipschitzianas, como vimos no exemplo 5.1. Além disso, as funções que formam os consequentes são lipschitzianas e possuem inversa lipschitziana, pois são retas, logo, pelo Teorema 5.6 podemos garantir que o sistema é lipschitziano e portanto, pelo Teorema 5.2, podemos garantir a unicidade da solução para o sistema P-fuzzy apresentado acima. Se tomarmos por exemplo $x = 2$ como condição inicial, obtemos a solução dada na figura 5.4-12:

É importante lembrar que obtemos este gráfico aplicando um método numérico (método de Euler) para resoluções de EDO, portanto, este é o gráfico de uma solução numérica, ou em outras palavras, aproximada. Nosso estudo garantiu a unicidade da solução analítica, mesmo sem podermos obter uma expressão explícita para esta.

Na prática, o modelo P-fuzzy logístico é muito importante quando temos apenas informações vagas sobre o comportamento da dinâmica populacional de uma determinada espécie. Poderíamos também utilizar o modelo acima para descobrir através de um ajuste de curva, os valores dos parâmetros do modelo logístico clássico ou de outro que possua o mesmo comportamento.

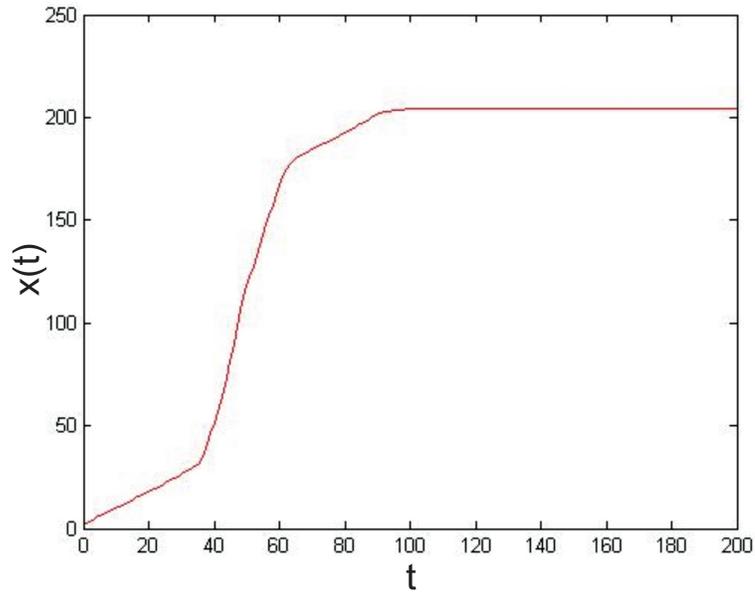


Figura 5.4-12. Gráfico da solução do sistema P-fuzzy para o modelo Logístico

5.4.2 Modelo P-fuzzy para presa-predador

Nesta subseção, apresentaremos um modelo P-fuzzy do tipo presa-predador. Um dos primeiros textos sobre o assunto pode ser encontrado em [26]. Analisaremos este modelo, afim de obtermos garantias sobre a existência e unicidade da solução do mesmo, além disso, vamos garantir através do Teorema 5.7, que este sistema P-fuzzy possui uma órbita periódica. As funções de pertinência dos antecedentes são apresentadas na figura 5.4-13:

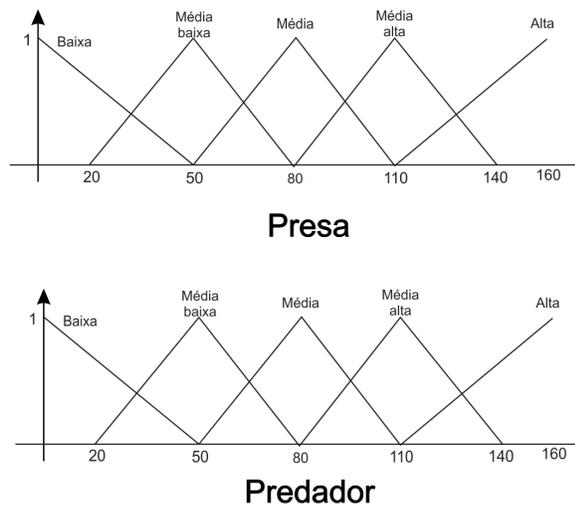


Figura 5.4-13. Funções de pertinência dos antecedentes

As funções de pertinência dos consequentes são dadas na figura 5.4-14:

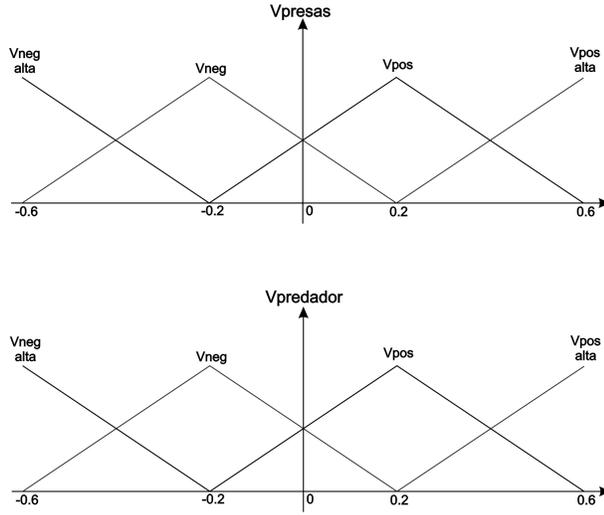


Figura 5.4-14. Funções de pertinência dos consequentes

Neste sistema P-fuzzy temos 25 regras, portanto, apresentá-las numa lista, como fizemos para o caso logístico, é massante e não agregaria muitas informações ao texto. Entretanto, podemos apresentá-las pelo diagrama de setas da figura 5.4-15. Neste sistema existem duas variáveis de entrada, sendo que cada uma destas pode tomar 5 valores diferentes de estado fuzzy. Aplicando um raciocínio análogo ao apresentado no exemplo anterior é fácil verificar que este sistema P-fuzzy é Bem-Ordenado.

Os conjuntos fuzzy de entrada são números fuzzy triangulares, por exemplo, a função de pertinência do conjunto fuzzy “Média” é dada pela expressão 5.51:

$$\mu_{\text{média}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 50 \\ \frac{x - 50}{30} = & \text{se } 50 \leq x < 80 \\ \frac{x - 110}{-30} = & \text{se } 80 \leq x \leq 110 \\ 0 & \text{se } x > 110 \end{cases} \quad (5.51)$$

Conforme o exemplo 5.1, funções desta forma são lipschitzianas, portanto, todas as funções de pertinência dos antecedentes, dada pela figura 5.4-13 são lipchitzianas.

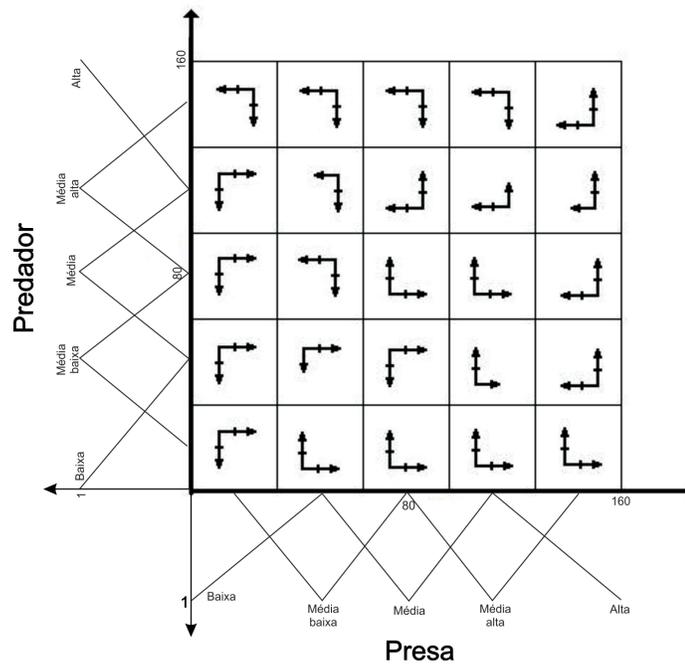


Figura 5.4-15. Entradas de um sistema P-fuzzy bidimensional

Além disso, as funções que formam os consequentes são lipchitzianas e possuem inversa lipchitziana, sendo assim satisfazem as condições do Teorema 5.6 e portanto garantimos que este sistema P-fuzzy é lipschitziano, portanto, pelo Teorema 5.2, podemos garantir que para cada ponto do domínio, existe apenas uma solução. Alguns exemplos de soluções podem ser vistos na figura 5.4-16.

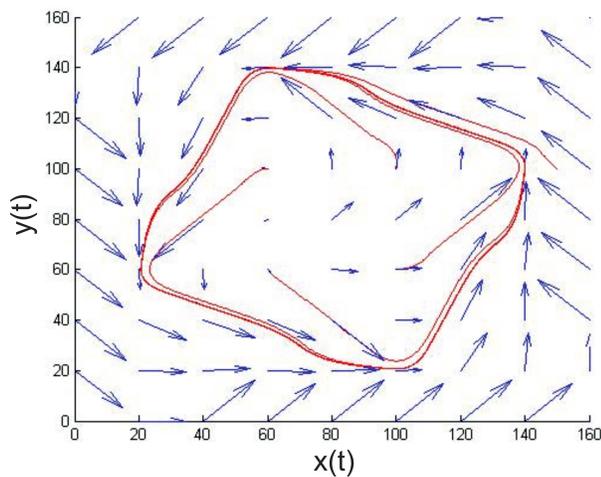


Figura 5.4-16. Diversas soluções do sistemas P-fuzzy bidimensional

Na figura 5.4-16, apresentamos 5 soluções distintas, tendo os respectivos pontos iniciais: $(150, 100)$, $(60, 100)$, $(100, 100)$, $(100, 60)$ e $(60, 60)$. Percebemos que todas as soluções convergem para uma mesma órbita e permanecem nessa órbita ao longo de todo o intervalo de tempo estudado.

Um caminho para demonstrarmos que existe uma região que limita a solução seria a utilização das propriedades de fluxo do sistema P-fuzzy. Na figura 5.4-17 mostramos o campo de direções do sistema P-fuzzy anteriormente apresentado.

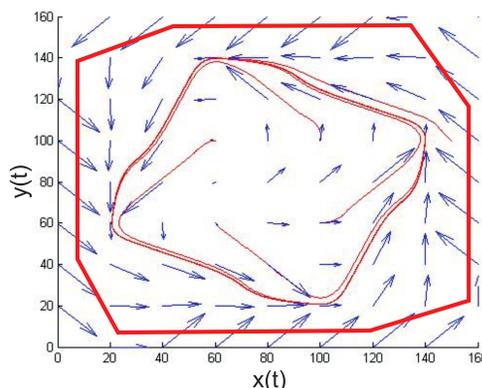


Figura 5.4-17. Campo de direções para o modelo P-fuzzy

Na figura 5.4-17 foi possível limitar com segmentos de retas transversais, uma região onde todas as setas do campo de direções apontassem para o interior, isso nos leva a concluir que uma solução que entra nessa região não sairá mais dela.

É possível também utilizarmos o argumento apresentado na seção anterior, já que na figura 5.4-18, percebemos que no diagrama de setas, existe uma região para a qual as setas apontam para o seu interior (esta região está destacada em verde), isto significa que apenas observando o diagrama de setas já poderíamos garantir a existência de uma região que limita a solução do sistema P-fuzzy.

Por fim, o ponto de equilíbrio que existe dentro da região delimitada é instável segundo (ver [29]), logo, pelo Teorema 5.7, concluímos que qualquer solução iniciada na região destacada na figura 5.4-18, ou é uma órbita periódica ou irá convergir para uma, neste caso especificamente, podemos ver pela figura 5.4-17 que existe um ciclo limite, para o qual as soluções irão convergir.

Notamos também pela figura 5.4-15 que estamos trabalhando com um sistema onde o predador é especialista, isto é, ele não tem outra fonte de alimento que não seja a

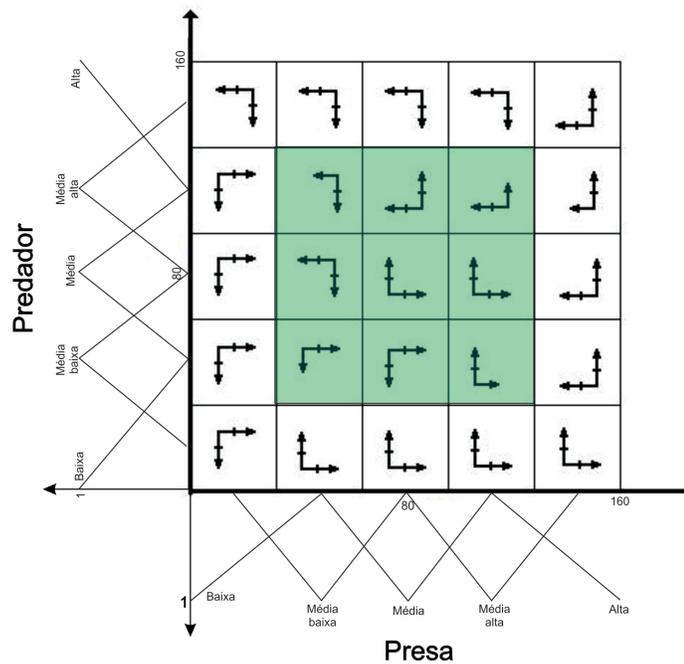


Figura 5.4-18. Diversas soluções do sistemas P-fuzzy bidimensional

presa. Ainda pela mesma figura, notamos que quando existe pouca presa, a quantidade de predadores também decresce. Por outro lado, a presa tem o crescimento desinibido, assim como o modelo de Malthus, sendo assim, quando existe pouco predador, a presa tem a tendência de crescer infinitamente. Obviamente que neste exemplo, o sistema P-fuzzy é válido apenas para uma quantidade máxima de 160 presas ou predador.

5.5 Conclusão

Apresentamos neste capítulo um estudo analítico sobre modelos P-fuzzy unidimensionais e bidimensionais. Adotamos a expressão $F_p(x)$ gerada pelo processo de defuzzificação do controlador de mamdani como sendo uma EDO e, a partir disso, verificamos as propriedades dessa expressão. Primeiramente, trabalhamos com sistemas unidimensionais, garantindo a existência da solução desses sistemas através da continuidade da expressão $F_p(x)$. Posteriormente, através do Teorema 5.3, verificamos que sistemas P-fuzzy que possuem as funções de pertinência dos antecedentes e consequentes lipschitzianas sendo que as funções dos consequentes tenham inversa lipschitziana, satisfazem a condição de

Lipschitz segundo o teorema 5.3 e portanto, possuem solução única para qualquer ponto do domínio de $F_p(x)$.

Da mesma forma, para os sistemas P-fuzzy bidimensionais, mostramos que se as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy dos antecedentes e consequentes satisfazem as mesmas condições anteriores, então o sistema também é lipschitziano, e portanto, pelo Teorema 5.2, conseguimos garantir a existência e unicidade da solução destes sistemas.

Para sistemas P-fuzzy que satisfazem as condições de existência e unicidade citadas acima, isto é, para sistemas P-fuzzy lipschitzianos, enunciamos o Teorema de Poincaré-Bendixson, que garante, para tais sistemas, a existência de pelo menos uma órbita periódica quando a solução é limitada e não se aproxima de nenhum ponto de equilíbrio. Por fim, apresentamos dois exemplos, o primeiro é um modelo P-fuzzy unidimensional que representa o comportamento do modelo logístico, para esse modelo a existência e unicidade da solução foi garantida pelo Teorema 5.3. O segundo exemplo foi um sistema P-fuzzy bidimensional que representa a interação presa-predador entre duas espécies, neste exemplo, utilizamos funções de pertinência lipschitzianas e através do Teorema 5.7 garantimos a existência e unicidade da solução do mesmo. Além disso, no segundo exemplo aplicamos a versão do Teorema de Poincaré-Bendixson para garantir a existência de uma região, A onde todas as soluções iniciadas em A , irão convergir para uma órbita periódica.

Conclusão

Dedicamos os 3 primeiros capítulos deste texto à apresentação dos conceitos fundamentais da análise qualitativa de EDO, do Teorema de Poincaré-Bendixson e da teoria fuzzy. Em destaque, no capítulo 1 foram definidos os sistemas de EDO's autônomos e a estabilidade de pontos de equilíbrio de órbitas periódicas. No capítulo 2, estudamos o teorema de Poincaré-Bendixson, apresentando sua demonstração e exemplos de aplicações. Por fim, no capítulo 3, definimos os conjuntos fuzzy, o subespaço $\mathcal{E}(X)$, o princípio de extensão de Zadeh e as principais características dos sistemas P-fuzzy.

No capítulo 4, com o intuito de estabelecermos um resultado análogo ao Teorema de Poincaré-Bendixson em espaços métricos $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ apresentamos dois Teoremas. O Teorema 4.6, proposto em [9], garante a existência de uma região de atração para uma órbita periódica fuzzy, se esta estiver em um conjunto compacto e invariante e se nesse conjunto existir um único ponto de equilíbrio instável. Um exemplo de aplicação deste teorema pode ser visto no modelo de Holling-Tanner. O teorema 4.7 é mais geral e afirma que se existir uma órbita determinística que satisfaça as condições do Teorema de Poincaré-Bendixson então existe uma região A , na qual qualquer órbita fuzzy iniciada em A é periódica ou é atraída para uma órbita periódica fuzzy. Nota-se que não existe a necessidade de haver um ponto de equilíbrio instável. Os modelos de Holling-Tanner e de Gause ilustram a aplicação deste teorema. Em ambos os teoremas é necessário que o fecho do suporte da condição inicial esteja contido em uma determinada região A , sendo A a região de atração de uma órbita periódica assintoticamente estável ou um subconjunto de uma órbita periódica estável. Um exemplo deste fato foi mostrado no modelo de Gause. É notável, portanto, que os exemplos apresentados justificam a aplicabilidade dos teoremas propostos em modelos de Biomatemática e ilustram estes resultados.

No capítulo 5, estudamos a continuidade dos sistemas P-fuzzy e verificamos que se

nestes sistemas as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy que formam os antecedentes e consequentes forem lipschitziana, e as que formam os consequentes possuam inversa lipschitziana, então o sistema P-fuzzy é contínuo e para cada ponto inicial dado, existe uma única solução que passa por esse ponto. O estudo da existência e unicidade foi feito apenas para sistemas P-fuzzy unidimensionais e bidimensionais. Para sistemas P-fuzzy bidimensionais que possuem solução única, enunciamos o Teorema de Poincaré-Bendixson de maneira análoga àquela feita para o caso clássico. A importância deste resultado está em se poder garantir a existência de órbitas periódica em modelos P-fuzzy, sendo que estes são construídos apenas com informações incertas. Para exemplificar os resultados propostos, utilizamos um modelo P-fuzzy unidimensional que possui o mesmo comportamento do modelo logístico clássico e utilizamos um modelo P-fuzzy bidimensional que reproduz o comportamento de um modelo Presa-Predador.

Trabalhos futuros

No decorrer da estruturação deste texto, percebemos algumas oportunidades de novos estudos que complementariam o conteúdo desta dissertação. São estas:

- Apresentar um critério similar ao de Dulac para órbitas que possuem condição inicial fuzzy.
- O estudo do efeito Alle para sistemas de EDO com condição inicial Fuzzy.
- Generalizar o Teorema de existência e unicidade de soluções para sistema P-fuzzy de dimensão n .
- Estudar critérios para classificar a estabilidade de uma órbita periódica em um sistema P-fuzzy.
- Aplicar métodos numéricos aos modelos P-fuzzy propostos para obter os valores dos parâmetros de um modelo clássico conhecido que tenha o mesmo comportamento.

Referências Bibliográficas

- [1] Barros, L.C., Bassanezi, R.C., e Tonelli, P.A. , *On the continuity of the zadeh's extension.* in “Seventh IFSA World Congress”, Vol. II, Praga, 1997.
- [2] Barros, L.C., *Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Teoria e Aplicações.* Tese de doutorado, IMECC-UNICAMP. 1997.
- [3] Bartle, R.G., *The Elements of Real Analysis*, Wiley, 1ª edição, 1964.
- [4] Bassanezi, R.C. e Barros, L.C. Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática, Coleção IMECC: textos didáticos, volume 5, 2006.
- [5] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações.* HARBRA, São Paulo, 1988.
- [6] Boyce, W.E e DiPrima, R.C., *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* LCT. oitava edição, 1995.
- [7] Braza. P. A., *The Bifurcation structure of the Holling-Tanner model for predator-prey interactions using two-timing.* SIAM J. APPL. MATH., vol. 63, No.3, pp. 889-904. 2003.
- [8] Cecconello, M. S., Bassanezi, R.C., *Sistemas dinâmicos Fuzzy: Modelagens alternativas para sistemas biológicos*, Notas em matemática aplicada, volume 50, XXXIII CNMAC, 2010.
- [9] Cecconello, M. S., *Sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy - Aplicações em Biomatemática*, Tese de doutorado, IMECC - UNICAMP, 2010.
- [10] Demuner, D.P. *Teorema de Poincaré-Bendixson para campos vetoriais contínuos na garrafa de Klein*, Tese de Doutorado, USP - São Carlos, dezembro de 2008.

- [11] Doering, C. I. e Lopes, A.O. *Equações diferenciais ordinárias*. IMPA. Coleção matemática universitária, 2ed. Rio de Janeiro, 2007.
- [12] Grant, *Poncaré-Bendixson Theorem*, Brigham Young University, Lecture 39, Math 624, 1999.
- [13] Hale, J. e Koçak, H. *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, 1º edição, New York, 1991
- [14] H, Harald *The Poincaré-Bendixson theorem*, Norwegian University of Science and Technology ,2007
- [15] Knill, O. *The Poincaré Bendixson Theorem*, Harvard, Mathematics 118r Dynamical Systems, Spring 2005.
- [16] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classic Library, 1989
- [17] Leah, E. , *Mathematical Models in Biology*, 1ª edição, SIAM, New York, 1988.
- [18] Ledesma, A. C. e Garduño, F. S. *Teorema de Poncaré-Bendixson*, Notas de Aula, Universidad de la Ciudad del Mexico, 2010.
- [19] Leite, J. C. *Sistemas Dinâmicos Fuzzy Aplicados a Processos Difusivos*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, 2011.
- [20] Lima, E.L., *Curso de análise*, volume 2, Projeto Euclides, décima primeira edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [21] Mizukoshi, M.T., *Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy*. Tese de doutorado, IMECC-UNICAMP, 2004.
- [22] Nguyen, H. T. *A note on the extension principle for fuzzy sets*. Journal of mathematical analysis and applications, 64:369-380,(1978).
- [23] Oliveira E. P. D, *Ciclos Limites de Campos de Vetores Polinomiais Cúbicos e Quadráticos*, Dissertação de mestrado, Unesp - São José do Rio Preto, 2009.
- [24] E. G. Olivares e A. R. Palma, *Multiple Limit Cycles in a Gause Type Predator-Prey Model with Holling Type III Functional Response and Allee Effect on Prey* , *Bull. Math. Biol.*, 73 (2011) 1378-1397.

- [25] Palis, J. e Melo, J. , *Introdução aos sistemas dinâmicos* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 1978.
- [26] Peixoto, M. , *Um Modelo Presa-Predador e a Morte Súbita dos Cítrós*, IMECC - UNICAMP, Biomatemática 15 53-66, 2005.
- [27] Penney, D. E. e Edwards, C. H., *Equações Diferenciais Elementares*. University of Georgia, terceira edição, 1995.
- [28] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*. MacGraw - Hill, New York, 3rd edition, 1964.
- [29] Silva, J. D. M. *Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos P-fuzzy com aplicações em biomatemática.*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, 2005.
- [30] Sotomayor, J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [31] <http://en.wikipedia.org/wiki/Poincaré-Bendixson-theorem>, 11 de abril de 2011, 00h 35min
- [32] PUCSP. Pontíficia Universidade Católica de São Paulo. **Lógica Fuzzy**: .Disponível em: <<http://www.pucsp.br/logica/Fuzzy.htm>>. Acesso: 20 jan. 2011.