

THAIS BORGES DAMACENA

A singularidade dobra-dobra e o caos não determinístico

Campinas

2012

Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Thais Borges Damacena

**A singularidade dobra-dobra
e o caos não determinístico**

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica da Unicamp
para obtenção do título de **Mestre em
Matemática**.

Orientador: Marco Antonio Teixeira

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna **Thais
Borges Damacena**, e orientada pelo Prof. Dr. **Marco Antonio Teixeira**.



Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
Orientador

Campinas, 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

D18s Damacena, Thais Borges, 1988-
A singularidade dobra-dobra e o caos não determinístico /
Thais Borges Damacena. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Marco Antonio Teixeira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Singularidades (Matemática). 3.
Campos vetoriais descontínuos. 4. Comportamento caótico nos
sistemas. I. Teixeira, Marco Antonio, 1944-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: The two-fold singularity and the nondeterministic chaos

Palavras-chave em inglês:

Dynamical systems

Singularities (Mathematics)

Discontinuous vector fields

Chaotic behavior in systems

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Marco Antonio Teixeira [Orientador]

Ketty Abaroa de Rezende

Paulo Ricardo da Silva

Data de defesa: 09-03-2012

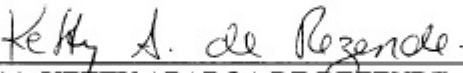
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 09 de março de 2012 e aprovada


Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof. (a). Dr (a). KETTY ABAROA DE REZENDE



Prof. (a). Dr (a). PAULO RICARDO DA SILVA

*Aos meus heróis:
meus pais, Maria (in
memorian) e Edivaldo.*

"Não sei se estou perto ou longe demais, se peguei o rumo certo ou errado. Sei apenas que sigo em frente, vivendo dias iguais de forma diferente. Já não caminho mais sozinha, levo comigo cada recordação, cada vivência, cada lição. E, mesmo que tudo não ande da forma que eu gostaria, saber que já não sou a mesma de ontem me faz perceber que valeu a pena."
(Autor Desconhecido)

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e por todas as oportunidades que tem me dado.

À minha mamãe Maria, que partiu tão precocemente, deixando uma saudade imensa e acima disso deixando um exemplo lindo. Um anjinho, que em tão pouco tempo me ensinou, entre outras coisas, o significado de amor incondicional.

Ao meu papai Edivaldo, por ser durante todos esses anos, pai e mãe. E por nunca ter negado esforços e sacrifícios para que eu pudesse crescer espiritualmente, moralmente e intelectualmente.

Ao meu irmão Igor e sua esposa Mariana, pelo encorajamento e carinho de sempre.

À todos os meus amigos que apesar de distantes, estiveram sempre presentes, encorajando e incentivando durante esses dois anos. Em especial, Kétura, Raiany e Ítalo.

À família, que Deus preparou para mim aqui em Campinas. Pessoas as quais sem me conhecer me acolheram com todo carinho do mundo e fizeram a saudade de casa suportável.

Aos amigos que fiz durante esses dois anos. Estudantes de diversas áreas, que juntos a mim enfrentaram a luta na Unicamp e que estavam sempre dispostos a um almoço, uma conversa, ou simplesmente um abraço. Aqueles que fizeram desse, um momento inesquecível na minha vida. Em especial, Fran, Vaninha, Vítor e Marcos.

Ao professor Marco, por ter aceitado me orientar nesse trabalho, pela atenção que sempre demonstrou e pelos ensinamentos matemáticos.

Aos meus professores de graduação da Universidade Federal de Goiás, em especial à professora Marina, pela iniciação a pesquisa, e por sempre estar disponível para um conselho

ou uma conversa.

Aos meus colegas do IMECC, Wender, Juliana, Felipe, Jesus, Douglas, Douglas Maioli pela companhia e por ter tornado agradável esse período. Agradeço em especial ao Ricardo, pela ajuda imprescindível durante todo o mestrado.

Aos professores e funcionários do IMECC, especialmente ao pessoal da Secretaria de Pós-Graduação, Tânia, Lívia e Ednaldo.

À Capes, pelo apoio financeiro durante o mestrado.

RESUMO

Um campo vetorial descontínuo 3D sobre uma superfície suave de codimensão um, pode ser genericamente tangente a ambos os lados da superfície em um ponto p . Os pontos onde esse fenômeno ocorre são chamados de singularidade dobra-dobra.

Nesse trabalho, estudamos a dinâmica local de um sistema dinâmico suave por partes tri-dimensional em uma dobra-dobra. Vimos que a dinâmica local depende principalmente de um único parâmetro que controla uma bifurcação.

Especificamente no caso onde as dobras são ambas invisíveis, a chamada singularidade Teixeira, encontramos que o sistema pode admitir um fluxo exibindo dinâmica caótica, mas não determinística.

ABSTRACT

A 3D discontinuous vector field on a smooth surface of codimension one, can be generically tangent to both sides of the surface at a point p . The points where this phenomenon occurs are called two-fold singularities.

In this project, we study the local dynamics of a three-dimensional piecewise smooth dynamical systems at a two-fold. We have seen that the local dynamics depends mainly on a single parameter that controls a bifurcation.

Specifically in the case where the folds are both invisibles, the so-called singularity Teixeira, we find that the system can admit a flow exhibiting chaotic but non-deterministic dynamics.

CONTEÚDO

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Campos Vetoriais definidos em variedades com bordo	5
1.2 Campos Vetoriais Descontínuos	9
1.2.1 Convenção de Filippov	9
1.2.2 Singularidades de Z	12
1.2.3 Estratificação de M	13
1.2.4 Estabilidade estrutural	14
2 A singularidade dobra-dobra	16
2.1 O problema dobra-dobra	16
2.2 Singularidade Teixeira	19
2.2.1 Aproximação Local	19
2.2.2 Dinâmica nas Regiões de deslize e de escape	22
2.2.3 Dinâmica nas regiões de costura	27
2.2.4 Dinâmica sobre a singularidade Teixeira	32

2.2.5	Caos não determinístico	33
2.3	A dobra-dobra visível	35
2.4	A dobra-dobra invisível-visível	37
2.5	Observações sobre bifurcações deslizantes	42
2.6	Simulações numéricas	43
3	Singularidade dobra-dobra em sistemas elétricos não suaves	48
3.1	Um circuito com comutação de potência	48
3.2	Um circuito resistivo com memória	50
	Apêndice A	53
	Apêndice B	56
	Apêndice C	57
	Apêndice D	60
	Apêndice E	63
	Apêndice F	65
	Bibliografia	65

INTRODUÇÃO

Um Sistema Dinâmico Suave por Partes é caracterizado por um conjunto finito de equações diferenciais ordinárias,

$$\dot{x} = G^i(x) \quad , \quad x \in R^i \subset \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, k \quad (1)$$

cujo lado direito são campos vetoriais G^i definidos sobre regiões disjuntas R^i e que podem ser estendidas suavemente para o fecho de R^i . Consideraremos o caso quando as regiões R^i são separadas por um conjunto $n - 1$ dimensional M , chamado *conjunto de descontinuidade*. A união de M e dos R^i cobre \mathbb{R}^n .

Estaremos sempre considerando o conjunto de descontinuidade como sendo uma hipersuperfície conexa M e assim podemos falar da variedade como localmente tendo dois lados.

Sistemas suave por partes surgiram ao longo da história dos sistemas dinâmicos como modelo de dispositivos mecânicos e eletrônicos, e mais recentemente, tem tido crescente uso em campos como a ecologia, economia e neurociência (veja por exemplo, [5, 22, 23, 24]).

Seu crescente uso foi também acompanhado pelo interesse em sua matemática genérica e em suas propriedades dinâmicas, a qual tem sido o objeto de inúmeros livros (por exemplo [16, 17, 18]). Um dos maiores desafios tem sido estabelecer de forma consistente definições e convenções.

Numerosas questões fundamentais surgem quando lidamos com sistemas dinâmicos descontínuos. A mais básica dessas questões é a noção de solução.

Consideremos por exemplo um sistema dinâmico da forma

$$\dot{x}(t) = X(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Nos referimos a uma solução continuamente diferenciável $t \mapsto x(t)$ de (2), isto é, uma curva continuamente diferenciável cuja derivada segue a direção do campo vetorial, como *solução clássica*.

Para um campo vetorial descontínuo, no entanto, a existência ou unicidade de uma solução clássica passando por um ponto $p \in M$, não é garantida.

Caratheodory generalizou a definição de soluções clássicas. Grosseiramente falando, soluções de Caratheodory são curvas absolutamente contínuas que satisfazem

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t X(x(s))ds, \quad t > t_0, \quad (3)$$

onde a integral é a integral de Lebesgue.

Soluções de Caratheodory enfraquece a exigência clássica de que a solução deve seguir a direção do campo vetorial para todo tempo, isto é, a equação diferencial (2) não precisa ser satisfeita em um conjunto de medida nula (para maiores detalhes, veja [2]).

Filippov [2], trocou a equação diferencial (2) por uma inclusão diferencial da forma

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{F}(x(t)), \quad (4)$$

onde $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ denota a coleção de certos subconjuntos de \mathbb{R}^n . Em um determinado estado x , em vez de focar no valor do campo vetorial em x , a idéia de soluções de Filippov é introduzir um conjunto de direções que são determinadas pelos valores do campo vetorial X numa vizinhança de x .

Soluções de Caratheodory são empregadas para campos vetoriais que dependem descontinuamente do tempo, tais como sistemas dinâmicos envolvendo impulsos. Como aqui trabalharemos com sistemas autônomos, usaremos a formalização de Filippov [2].

Objetivos

A teoria de singularidades em sistemas suaves por partes tem mostrado ser uma rica fonte de novas dinâmicas, particularmente próximo a pontos onde o campo vetorial é tangente à superfície de descontinuidade, os chamados pontos de “dobras”.

Aqui, discutimos um problema particular da teoria da dinâmica não-suave, pontos onde um campo vetorial é tangente a ambos os lados de uma superfície de descontinuidade em sistemas tri-dimensionais. Esse problema dobra-dobra foi bem definido em [2]. Em [9], Teixeira exibiu um tipo especial de dobra-dobra, que mais tarde seria chamada de singularidade Teixeira. Nesse trabalho, foi estudado algumas propriedades relacionadas à estabilidade estrutural dessa singularidade.

Em [5], a dinâmica próximo a singularidade dobra-dobra foi estudada considerando uma aproximação linear dos campos vetoriais acima e abaixo da variedade de descontinuidade. Nesse trabalho, é mostrado que a dinâmica local depende principalmente de um parâmetro que controla uma bifurcação, e dependendo desse valor é possível determinar se cada órbita cruza a variedade de descontinuidade um número finito ou infinito de vezes.

Um resultado mais forte foi provado recentemente em [26]. De fato, nesse trabalho foi demonstrado que sobre certas condições é possível determinar o número de vezes que a órbita cruza a variedade de descontinuidade antes de entrar para a região de deslize (veja seção (1.2.1) para a definição de região de deslize).

Aqui, analisamos a dinâmica próximo a singularidade Teixeira, considerando o sistema truncado para terceira ordem. Tomamos como referência básica o artigo [1]. Estudamos a dinâmica diretamente, revelando o comportamento explícito que deve ser refletido nas teorias gerais sobre estabilidade estrutural.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

Esse trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No Capítulo 1, definimos alguns dos conceitos que serão úteis no decorrer do texto. Apresentaremos também alguns resultados sobre estabilidade estrutural de campos vetoriais definidos em variedades com bordo e de campos vetoriais suaves por partes.

- No Capítulo 2, nós definimos a singularidade dobra-dobra de campos vetoriais descontínuos tridimensionais e seus quatro tipos. Nós discutimos a primeira delas, a dobra-dobra invisível, ou *singularidade Teixeira*, em detalhes na seção (2.2); Nós analisamos as dinâmicas deslizante e costurante separadamente nas seções (2.2.2)-(2.2.3) e então reconstruímos o sistema completo na seção(2.2.4). Discutimos, mais brevemente, os outros tipos de dobra-dobra nas seções (2.3)-(2.4) e comentamos sobre suas bifurcações na seção (2.5). Na seção (2.2.5), comentamos sobre a propriedade caótica de uma classe de sistemas. Na seção (2.6), simulamos numericamente, algumas dinâmicas particularmente interessantes preditas na seção (2.2).
- No Capítulo 3, apresentamos dois modelos de circuitos elétricos como exemplos de sistemas físicos que possuem genericamente uma singularidade dobra-dobra.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos básicos e definições os quais nos serão úteis no decorrer do texto.

Apresentamos alguns conceitos relacionados a estabilidade estrutural de campos vetoriais definidos em variedades com bordo. Posteriormente introduzimos algumas definições e convenções para campos vetoriais descontínuos, bem como apresentamos alguns resultados sobre estabilidade estrutural de tais campos.

1.1 Campos Vetoriais definidos em variedades com bordo

Consideremos N uma variedade compacta C^∞ orientável de dimensão três com fronteira $\partial N = M$ e $p \in M$.

Definição 1.1.1. *Dados X e Y campos definidos numa vizinhança Q de p em N , defina a seguinte relação de equivalência:*

$$X \sim Y \iff \text{ existe vizinhança } U \text{ de } p \text{ (} U \subset Q \text{) talque } X|_U = Y|_U.$$

As classes dessa relação de equivalência são chamadas **germes em p de campos de vetores**.

Denotemos por χ^r o conjunto de todos os germes em p de campos vetoriais de classe C^r sobre (\mathbb{R}^3, p) dotados com a topologia C^r , com r suficientemente grande.

Por simplicidade vamos considerar N mergulhada em uma variedade tridimensional \tilde{N} sem fronteira.

Um campo de vetores X em N é por definição um representante da classe de campos de vetores tangentes a N , definidos em \tilde{N} . Ele é dito ser de classe C^r se ele tem um representante \tilde{X} de classe C^r sobre \tilde{N} .

Seja $\tilde{\phi}$ o fluxo de um representante \tilde{X} de X . $\tilde{\phi}$ é definido sobre um conjunto $D(\tilde{X}) = \{(x, t) \in \tilde{N} \times \mathbb{R} : t \in \tilde{I}(x)\}$, onde $\tilde{I}(x)$ é um intervalo aberto com extremos $\tilde{\alpha}(x)$ e $\tilde{\beta}(x)$. O fluxo ϕ de X é definido por $\phi(x, t) = \tilde{\phi}(x, t)$ para $x \in N$ e $t \in I(x)$, onde $I(x)$ é o intervalo maximal contendo $t = 0$ ($\phi_X(x, 0) = x$) para o qual $\tilde{\phi}(t, x) \in N$. Nós denotamos por $\alpha(x)$ (resp. $\beta(x)$) o extremo inferior (resp. superior) desse intervalo. Esses extremos podem ser infinito. O fluxo ϕ e seu domínio $D(X)$ não dependem da particular escolha do representante \tilde{X} de X .

A órbita $\gamma(x)$ de X passando por $x \in N$ é por definição a imagem de $I(x)$ pela curva integral $\phi_X(\cdot, x) : t \mapsto \phi_X(t, x)$. Órbitas são orientadas pela orientação induzida por essa aplicação via orientação positiva de $I(x)$.

Definição 1.1.2. *Dois campos de vetores X, Y em N são ditos **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $\xi : N \rightarrow N$ levando órbitas de X em órbitas de Y , preservando a orientação, isto é, dados $p \in N$ e $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que se $0 < t < \delta$ então $\xi(\phi_X(t, p)) = \phi_Y(t', \xi(p))$ para algum $0 < t' < \epsilon$.*

Definição 1.1.3. *Dizemos que $X \in \chi^r$ é **estruturalmente estável** em χ^r se existe uma vizinhança $B \subset \chi^r$ de X tal que para todo $Y \in B$ é equivalente a X .*

Seja $p \in M$ e considere $\Sigma_0 = \Sigma_0(p)$ o conjunto de todos os campos vetoriais estruturalmente estáveis em χ^r .

Por simplicidade, assumiremos que existe uma função C^∞ , $h : (\mathbb{R}^3, p) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, tendo 0 como um valor regular, de forma que M é dada implicitamente pela imagem inversa de h (ou seja, $h^{-1}(0) = M$).

Definição 1.1.4. *Dizemos que $p \in M$ é um ponto **M -singular** (resp. **M -regular**) de X se $\mathcal{L}_X h(p) = 0$ (resp. $\mathcal{L}_X h(p) \neq 0$).*

Denotaremos por S_X o **conjunto singular** de X .

Definição 1.1.5. Dizemos que $p \in M$ é um ponto dobra (resp. cúspide) de X se $\mathcal{L}_X h(p) = 0$ e $\mathcal{L}_X^2 h(p) \neq 0$ (resp. $\mathcal{L}_X h(p) = \mathcal{L}_X^2 h(p) = 0$, $\mathcal{L}_X^3 h(p) \neq 0$ e $\{dh(p), d(\mathcal{L}_X h)(p), d(\mathcal{L}_X^2 h)(p)\}$ é linearmente independente).

Observação 1.1.6. O símbolo $\mathcal{L}_X h$ denota a derivada de Lie ao longo do fluxo de um campo X , dada por $\mathcal{L}_X h = \langle X, \nabla h \rangle$.

Em [10] Sotomayor e Teixeira estudaram o conjunto de bifurcação que ocorre em M . Neste trabalho está caracterizado o conjunto de campos em χ^r que é estruturalmente estável em χ^r .

Teorema 1.1.1. Um campo $X \in \chi^r$ é estruturalmente estável se e somente se

1. $X(p) \neq 0$, para todo $p \in M$;
2. Para toda definição local de h em p , uma das seguintes condições é satisfeita:
 - (a) Caso regular : $(\mathcal{L}_X h)(p) \neq 0$;
 - (b) Caso dobra : $(\mathcal{L}_X h)(p) = 0$ e $(\mathcal{L}_X^2 h)(p) \neq 0$
 - (c) Caso Cúspide: $(\mathcal{L}_X h)(p) = 0 = (\mathcal{L}_X^2 h)(p)$, $(\mathcal{L}_X^3 h)(p) \neq 0$ e o conjunto de vetores $\{dh(p), d(\mathcal{L}_X h)(p), d(\mathcal{L}_X^2 h)(p)\}$ é linearmente independente;

Além disso, fixando $h(x_0, x_1, x_2) = x_2$, as formas normais dos campos de vetores em Σ_0 são dadas por:

1. Caso regular: $X(x_0, x_1, x_2) = (0, 0, 1)$;
2. Caso dobra: $X(x_0, x_1, x_2) = (1, 0, x_0)$;
3. Caso cúspide: $X(x_0, x_1, x_2) = (1, 0, x_0^2 + x_1)$

e Σ_0 é denso em χ^r .

Considere $\chi_1^r = \chi^r - \Sigma_0$ ($r \geq 3$) o conjunto bifurcação de χ^r e Σ_1 o conjunto dos campos de vetores estruturalmente estáveis em χ_1^r .

Observe que, $\chi_1^r = A \cup B$, onde, $X \in A$ (respectivamente $Y \in B$) se $X(p) = 0$ (respectivamente $X(p) \neq 0$).

Definição 1.1.7. Um M -ponto crítico hiperbólico de X é um ponto crítico hiperbólico $p \in M$ de X tal que:

1. os autovalores de $DX(p)$ são dois a dois distintos e os autovalores correspondentes são transversais à M em p ;
2. cada par de autovalores complexos não conjugados de $DX(p)$ têm parte real distinta.

Denote por $\Sigma_1(a)$ a coleção de campos vetoriais X em A tal que p é um M -ponto crítico hiperbólico de X .

Definição 1.1.8. Chame $\Sigma_1(b)$ o conjunto de campos vetoriais X em B tal que $X(p) \neq 0$, $(\mathcal{L}_X h)(p) = 0$, $(\mathcal{L}_X^2 h)(p) = 0$ e uma das seguintes condições é verdadeira:

1. $(\mathcal{L}_X^3 h)(p) \neq 0$, $\text{rank} \{ Dh(p), D(\mathcal{L}_X h)(p), D(\mathcal{L}_X^2 h)(p) \} = 2$ e a função $(\mathcal{L}_X h)|_M$ tem um ponto crítico não-degenerado em p ;
2. $(\mathcal{L}_X^3 h)(p) = 0$, $(\mathcal{L}_X^4 h)(p) \neq 0$ e p é um ponto regular de $(\mathcal{L}_X h)|_M$

O seguinte resultado está provado em [10].

Teorema 1.1.2. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. $\Sigma_1 = \Sigma_1(a) \cup \Sigma_1(b)$;
2. Σ_1 é uma subvariedade de codimensão 1 de χ^r ;
3. Σ_1 é aberto e denso em χ_1^r na topologia induzida de χ^r ;
4. Para um conjunto residual de curvas suaves $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \chi^r$, γ intercepta Σ_1 transversalmente e $\gamma^{-1}(\chi_2^r) = \emptyset$ onde $\chi_2^r = \chi_1^r - \Sigma_1$.

Observação 1.1.9. Ressaltamos aqui que todos os resultados e definições não dependem da particular escolha da função h .

1.2 Campos Vetoriais Descontínuos

Nessa seção introduziremos algumas definições e resultados acerca de sistemas descontínuos. Nós vamos considerar equações diferenciais cujos termos do lado direito são funções descontínuas. Vamos supor que tais discontinuidades são de primeira espécie e que elas estão concentradas sobre uma superfície C^∞ , bi-dimensional M , contida em \mathbb{R}^3 .

Seja $p \in M$ e $h : (\mathbb{R}^3, M) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ uma representação C^∞ local implícita de M em p com $dh(p) \neq 0$. A superfície M representa a fronteira comum separando os domínios $M^+ = \{h > 0\}$ e $M^- = \{h < 0\}$. Nós podemos assim, via h , dar uma orientação para toda curva em (\mathbb{R}^3, p) cruzando M .

Consideremos G^r o conjunto de todos os germes em p de campos vetoriais de classe C^r , Z , sobre \mathbb{R}^3 satisfazendo:

$$Z(x) = \begin{cases} X(x) & \text{se } x \in M^+ \\ Y(x) & \text{se } x \in M^- \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $X, Y \in \chi^r$.

Podemos considerar $G^r = \chi^r \times \chi^r$ e dotarmos esse conjunto com a topologia produto. Assim nós denotamos todo elemento em G^r por $Z = (X, Y)$.

1.2.1 Convenção de Filippov

Dado $Z = (X, Y)$ em G^r , Filippov (em [2]) descreveu três formas básicas de dinâmica que ocorrem em M , dependendo da orientação do campo vetorial em ambos os lados da superfície M . São elas:

1. **Região de Costura (RC):** Caracterizado por $(\mathcal{L}_X h)(\mathcal{L}_Y h) > 0$. Nesse caso, a componente do campo vetorial normal a M tem a mesma direção sobre ambos os lados. Se um ponto está numa órbita de Z sobre M então ele cruza M para a outra parte do espaço (Figura 1.2a).
2. **Região de Escape (RE):** Caracterizado por $\mathcal{L}_X h > 0$ e $\mathcal{L}_Y h < 0$. A solução através de um ponto $p \in M$ segue a órbita do campo que tem a maior componente normal com respeito a M (Figura 1.2c).

Observação 1.2.1. Observe que nesse caso o campo $Z = (X, Y)$ pode estar indefinido em alguns pontos de M . Assim, se em $q \in M$ as componentes normal de X e Y coincidem, convencionamos que $Z(q) = X(q)$.

3. **Região de Deslize (RD):** Caracterizado por $\mathcal{L}_X h < 0$ e $\mathcal{L}_Y h > 0$. Nesta região definimos um campo vetorial $f^d = f^d(X, Y)$ (chamado campo vetorial deslizante associado a $Z = (X, Y)$) definido da seguinte maneira: Se $p \in RD$, então $f^d(p)$ denota o vetor no cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$ tangente a M (ou ainda, $f^d(p) = m - p$, onde m é o ponto onde o segmento ligando $p + X(p)$ e $p + Y(p)$ é tangente a M). Observe que se $X(p)$ e $Y(p)$ são linearmente dependentes então p é um ponto crítico de f^d (Figuras 1.1 e 1.2b).

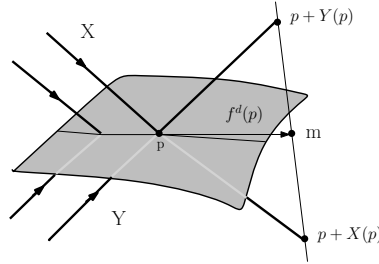


Figura 1.1: O campo vetorial deslizante

Observação 1.2.2. Na região de escape definimos outro campo vetorial f^e por $f^e(p) = (-f^d(-X, -Y))(p)$. Usaremos a mesma notação $f^s(Z)$ para indicar f^d e f^e .

Observação 1.2.3. Se fixarmos um sistema de coordenadas local $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ em uma vizinhança de $p \in RD$ talque a aplicação $h : (\mathbb{R}^3, p) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é dada por $h(x_0, x_1, x_2) = x_0$, então, a expressão do campo deslizante é dada por:

$$f^s = (Y^0 - X^0)^{-1}(0, X^1 Y^0 - X^0 Y^1, Y^0 X^2 - X^0 Y^2), \quad (1.2)$$

onde $X = (X^0, X^1, X^2)$ e $Y = (Y^0, Y^1, Y^2)$.

O campo deslizante é topologicamente equivalente ao campo $\tilde{f}^s = (0, X^1 Y^0 - X^0 Y^1, Y^0 X^2 - X^0 Y^2)$, restrito a região de deslize. Assim, obtemos uma expressão mais simplificada a qual

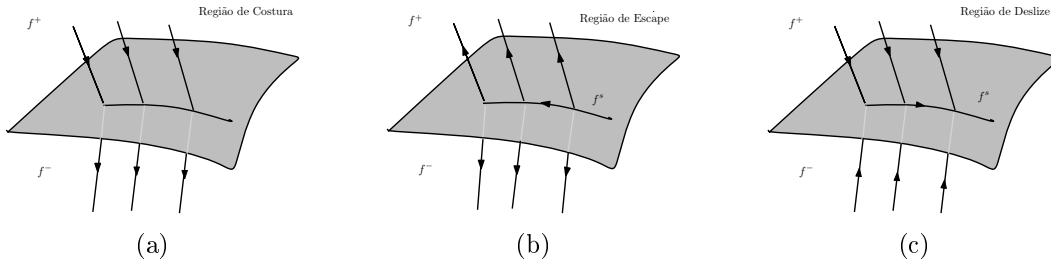


Figura 1.2: Dinâmica na variedade de descontinuidade em um sistema tri-dimensional suave por partes. Uma órbita que encontra a variedade pode: (a) atravessá-la, ou (b) escapar dela em tempo finito, embora possa deslizar sobre a variedade por algum tempo antes de escapar, ou (c) alcançá-la em tempo finito e então seguir o campo vetorial deslizando f^s

possui a mesma dinâmica do campo deslizando e que pode ser C^r estendida a uma vizinhança da origem em M .

Assim, a solução de (1.1) na variedade de descontinuidade incluem todas as soluções da inclusão diferencial

$$\dot{x} \in f := Y + \lambda(X - Y), \tag{1.3}$$

onde $\lambda = 0$ quando $h(x) < 0$, $\lambda = 1$ quando $h(x) > 0$, e $\lambda \in [0, 1]$ quando $h(x) = 0$.

A dinâmica em um sistema suave por partes é então uma composição das dinâmicas de X , Y , e f^s . Faremos as seguintes distinções.

Definição 1.2.4. (*Definição de órbitas e fluxo*)

1. Um **segmento de órbita** orientado é todo caminho suave $x = x(t)$ satisfazendo (1.3), inteiramente contido em uma das regiões $\{x : h(x) > 0\}$, $\{x : h(x) < 0\}$, ou $\{x : h(x) = 0\}$.
2. Uma **órbita** orientada é todo caminho suave por partes $x(t)$ que satisfaz (1.3), formada pela concatenação de segmentos de órbitas.
3. O **fluxo** de (1.3) através de um ponto \hat{x} em um tempo t é dado por todos os pontos $x(t + \tau)$ com $x(\tau) = \hat{x}$ para algum $\tau \in \mathbb{R}$, $x(t)$ satisfazendo (1.3).

Uma importante consequência dessa definição é que o fluxo através de um ponto \hat{x} na região de deslize não é único, pois \hat{x} sempre pertence a uma família a um parâmetro de órbitas (exceto se \hat{x} for um ponto de equilíbrio). Da mesma forma, para pontos na região de escape. (Veja, por exemplo, as figuras (1.2b) e (1.2c)).

1.2.2 Singularidades de Z

Na seção (1.1) definimos os conceitos de **M-singularidades** e singularidades do tipo **dobra** e **cúspide**. A seguir introduziremos o conceito de singularidade genérica para campos vetoriais descontínuos tri-dimensionais, que será utilizada no decorrer do texto. Antes observamos que se p é um ponto crítico de f^s , então p é chamado de **pseudo singularidade** de Z .

Dizemos que $p \in M$ é uma **singularidade genérica** de $Z = (X, Y) \in G^r$ se satisfaz uma das seguintes condições:

1. p pertence a região deslizante e é uma pseudo singularidade hiperbólica de Z ;
2. p é um ponto de dobra ou cúspide de X (respectivamente Y) e ponto regular de Y (respectivamente X).
3. p é um ponto M -singular de ambos os campos vetoriais X e Y satisfazendo:
 - (a) p é um ponto dobra de X e Y e
 - (b) S_X é transversal a S_Y em p .

Devemos dizer mais sobre a última situação. É fácil checar que as curvas S_X, S_Y determinam 4 quadrantes: Q_1 (RD), Q_2 (RE), Q_3 (RC, com a órbita de Z apontando para M^+) e Q_4 (RC, com a órbita de Z apontando para M^-). Além disso, é provado nesse caso que o campo vetorial deslizante pode ser C^1 - extendido para uma vizinhança completa de p em M e que p é um ponto crítico desse campo vetorial.

Devemos adicionar a seguinte hipótese extra nessa situação:

“O ponto p é um ponto crítico hiperbólico de f^s e seus respectivos autoespaços são transversais a S_X e S_Y em p .”

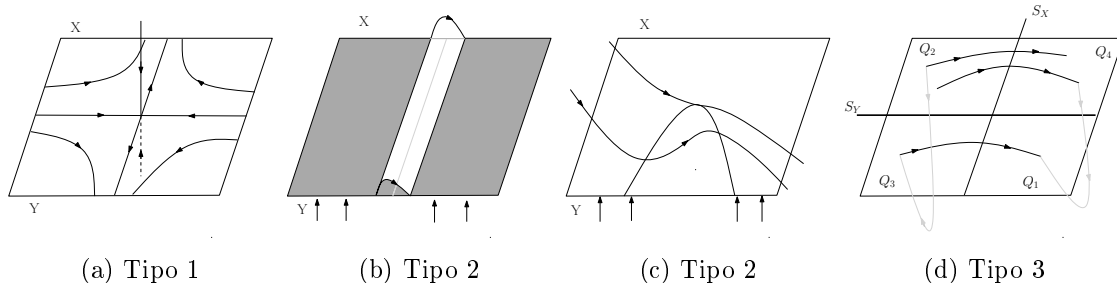


Figura 1.3: Exemplos de campos descontínuos que possuem a origem como uma singularidade genérica

Na figura (1.3) temos representado em:

- (a) a dinâmica de um campo descontínuo onde a origem é um ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante f^s (singularidade genérica do tipo 1);
- (b) um campo descontínuo do tipo dobra-regular (singularidade genérica do tipo 2);
- (c) um campo descontínuo do tipo cúspide-regular (singularidade genérica do tipo 2);
- (d) um campo descontínuo do tipo dobra-dobra (singularidade genérica do tipo 3).

1.2.3 Estratificação de M

Seja $p \in M$ uma singularidade genérica de $Z = (X, Y) \in G^r$. Nessa seção iremos listar algumas subvariedades de M que são distinguidas devido a sua persistência por pequenas perturbações de Z . Além disso, toda equivalência entre Z e \tilde{Z} deve necessariamente preservar as correspondentes tais subvariedades.

Nós separamos os casos:

1. Se p é do tipo 1, distinguimos $\{p\}$ e as separatrizes de sela de f^s .
2. Se p é do tipo 2, ou seja, p é uma singularidade de Z do tipo tangencial e as componentes conexas $C(p)$ do conjunto de todas as singularidades genéricas de Z é uma curva regular (isto é, $C(p)$ é ou S_X ou S_Y), listamos somente $C(p)$.
3. Se p é do tipo 3, listamos $\{p\}$, $S_X - \{p\}$, e $S_Y - \{p\}$. Nós adicionamos nessa lista as separatrizes de sela de f^s se elas estão contidas em RD. Se os autovalores de df_p^s são

reais e tem o mesmo sinal então devemos distinguir a variedade invariante forte de df_p^s se ela está contida em RD.

Em [4] é mostrado que os conjuntos acima são invariantes por equivalência entre campos vetoriais em G^r .

1.2.4 Estabilidade estrutural

Definição 1.2.5. *Sejam $Z, \tilde{Z} \in G^r$. Nós dizemos que Z em p é C^0 equivalente a \tilde{Z} em \tilde{p} se existem vizinhanças abertas V de p e \tilde{V} de \tilde{p} em \mathbb{R}^3 e um homeomorfismo M -invariante $f : V \rightarrow \tilde{V}$ talque $f(p) = \tilde{p}$ e f envia órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .*

Definição 1.2.6. *Dizemos que $Z \in G^r$ é **M -estruturalmente estável**, ou simplesmente **estruturalmente estável**, em p , se existe uma vizinhança U de Z em G^r tal que todo $\tilde{Z} \in U$ é C^0 equivalente a Z em p .*

Definição 1.2.7. *Consideremos os conjuntos*

$$G_0(a) = \{ Z = (X, Y); X, Y \text{ são regulares em } p \in M \} \text{ (caso regular-regular);}$$

$$G_0(b) = \{ Z = (X, Y); X \text{ é dobra e } Y \text{ é regular em } p \in M \text{ (ou vice-versa)} \} \text{ (caso dobra-regular);}$$

$$G_0(c) = \{ Z = (X, Y); X \text{ é cúspide e } Y \text{ é regular em } p \in M \text{ (ou vice-versa)} \} \text{ (caso cúspide-regular);}$$

$$G_0(d) = \{ Z = (X, Y); X, Y \text{ são dobras em } p \in M \text{ e } p \text{ é uma singularidade genérica de } Z \} \text{ (caso dobra-dobra); Nesse caso distinguimos os subconjuntos:}$$

$$\text{- Caso elíptico: } G_0(d.1) = \{ Z \in G_0(d); (\mathcal{L}_X^2 h)(p) < 0 \text{ e } (\mathcal{L}_Y^2 h)(p) > 0 \};$$

$$\text{- Caso parabólico: } G_0(d.2) = \{ Z \in G_0(d); (\mathcal{L}_X^2 h)(p) > 0 \text{ e } (\mathcal{L}_Y^2 h)(p) > 0 \text{ ou } (\mathcal{L}_X^2 h)(p) < 0 \text{ e } (\mathcal{L}_Y^2 h)(p) < 0 \};$$

$$\text{- Caso hiperbólico: } G_0(d.1) = \{ Z \in G_0(d); (\mathcal{L}_X^2 h)(p) > 0 \text{ e } (\mathcal{L}_Y^2 h)(p) < 0 \};$$

Seja, $G_0 = G_0(a) \cup G_0(b) \cup G_0(c) \cup G_0(d)$. Segue do teorema (1.1.1) e das condições de transversalidade que $G_0 \subset G^r$ é um subconjunto aberto e denso de G^r , relativo a topologia de G^r .

No próximo capítulo, estudaremos o conjunto $G_0(d)$, com ênfase em $G_0(d.1)$, conhecida como singularidade Teixeira. Veremos que a dinâmica local depende principalmente de um único parâmetro que controla uma bifurcação e que no caso $G_0(d.1)$ o sistema pode admitir um fluxo exibindo dinâmica caótica, mas não determinística.

CAPÍTULO 2

A SINGULARIDADE DOBRA-DOBRA

Nesse capítulo, estudamos campos vetoriais descontínuos que possuem uma singularidade dobra-dobra em $p \in M$, ou seja, em p o campo vetorial é tangente a ambos os lados da superfície de descontinuidade.

Estudamos a dinâmica em torno da singularidade caracterizando seu comportamento local. Como antecipamos na introdução, estudaremos a dinâmica diretamente, abordando os aspectos qualitativos do espaço de fase.

Afim de facilitarmos a notação, passaremos a denotar os campos X e Y por f^+ e f^- respectivamente.

2.1 O problema dobra-dobra

Seja Z representado por um sistema tri-dimensional suave por partes de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x) & \text{quando } h(x) > 0, \\ f^-(x) & \text{quando } h(x) < 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de estado $x = (x_0, x_1, x_2)$, $h(x)$ é uma função regular escalar talque $M = \{x \in \mathbb{R}^3; h(x) = 0\}$ (ver seção [1.2]) e f^+ , f^- são campos vetoriais suaves.

Definição 2.1.1. Um ponto $p \in M$ é uma singularidade do tipo dobra-dobra de $Z \in G^r$ se

$$\mathcal{L}_{f^+}h(p) = \mathcal{L}_{f^-}h(p) = 0 \quad e \quad \mathcal{L}_{f^+}^2h(p) \neq 0, \mathcal{L}_{f^-}^2h(p) \neq 0, \quad (2.2)$$

ou seja, se p é uma dobra para ambos os campos f^+ e f^- .

O sinal da segunda derivada de Lie ($\mathcal{L}_{f^+}^2h$) determina se uma dobra é:

- visível, se $\mathcal{L}_{f^+}^2h(p) > 0$ ou $\mathcal{L}_{f^-}^2h(p) < 0$ (significando que o campo vetorial se curva afastando da singularidade, veja figura (2.1));
- invisível, se $\mathcal{L}_{f^+}^2h(p) < 0$ ou $\mathcal{L}_{f^-}^2h(p) > 0$ (significando que o campo vetorial se curva em direção a superfície de descontinuidade, veja figura (2.2)).

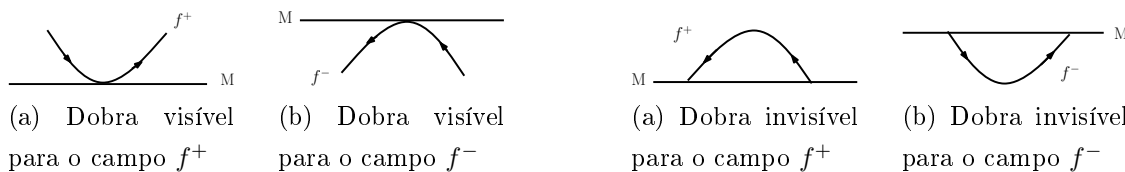


Figura 2.1: Singularidade dobra visível

Figura 2.2: Singularidade dobra invisível

Assim, existem 4 tipos possíveis de singularidade dobra-dobra, dependendo do sinal de ($\mathcal{L}_{f^+}^2h$) e de ($\mathcal{L}_{f^-}^2h$). Esses 4 tipos são mostrados na figura (2.3).

Por simplicidade colocaremos $h(x) = x_0$, pois todo sistema suave por partes, em uma região onde $h(x) = 0$ define uma variedade M , por uma mudança de variável apropriada tem essa forma. Então, $M = h^{-1}(0) = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3; x_0 = 0\}$.

Assim, o sistema (2.1) fica

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x) & \text{quando } x_0 > 0, \\ f^-(x) & \text{quando } x_0 < 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Seguindo a definição de Filippov [2], (2.3) admite uma solução que mora na variedade M e satisfaz o sistema dado por:

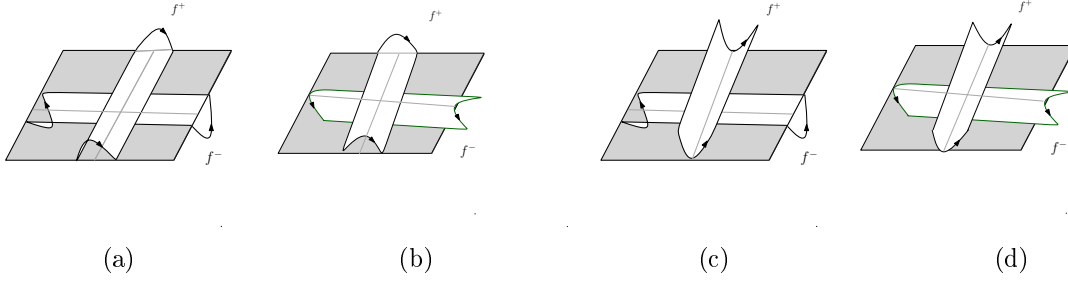


Figura 2.3: Tipos de singularidade dobra-dobra: (a) dobra-dobra invisível-invisível, quando $(\mathcal{L}_{f^+}^2 h) < 0$ e $(\mathcal{L}_{f^-}^2 h) > 0$, (b) dobra-dobra invisível-visível, quando $(\mathcal{L}_{f^+}^2 h) < 0$ e $(\mathcal{L}_{f^-}^2 h) < 0$, (c) dobra-dobra visível-invisível, quando $(\mathcal{L}_{f^+}^2 h) > 0$ e $(\mathcal{L}_{f^-}^2 h) > 0$ e (d) dobra-dobra visível-visível, quando $(\mathcal{L}_{f^+}^2 h) > 0$ e $(\mathcal{L}_{f^-}^2 h) < 0$.

$$\dot{x} = f^s(x) \quad \text{quando} \quad x_0 = 0 \quad (2.4)$$

onde o campo vetorial deslizante, f^s , é definido por:

$$f^s = f^- + \frac{\mathcal{L}_{f^-} h}{\mathcal{L}_{f^-} h - \mathcal{L}_{f^+} h} (f^+ - f^-), \quad (2.5)$$

No que segue, assumiremos que:

- ambos os campos f^+ e f^- tenham contato quadrático com a variedade na origem, isto é,

$$\mathcal{L}_{f^+} h(0) = \mathcal{L}_{f^-} h(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{f^+}^2 h(0) \neq 0 \quad , \quad \mathcal{L}_{f^-}^2 h(0) \neq 0 \quad (2.6)$$

- f^+ e f^- não tem equilíbrios próximos da origem, isto é,

$$f^+(0) \neq 0 \quad \text{e} \quad f^-(0) \neq 0 \quad (2.7)$$

- e que o par de curvas dado por $\mathcal{L}_{f^+} h = 0$ e $\mathcal{L}_{f^-} h = 0$ sobre $h = 0$ se intersecta transversalmente na origem, isto é,

$$\det(dh(0), d\mathcal{L}_{f^+} h(0), d\mathcal{L}_{f^-} h(0)) \neq 0. \quad (2.8)$$

Ou seja, estamos assumindo que $p = 0$ é uma singularidade genérica (dobra-dobra) do campo $Z = (f^+, f^-)$.

Observação 2.1.2. Podemos escolher coordenadas (x_0, x_1, x_2) em \mathbb{R}^3 de forma que

$$S^+ = \{x \in M; x_1 = 0\} \quad \text{e} \quad S^- = \{x \in M; x_2 = 0\} \quad (2.9)$$

sejam os conjuntos M -singulares de f^+ e f^- , respectivamente. Nas próximas seções, fixaremos este sistema de coordenadas.

2.2 Singularidade Teixeira

Nessa seção vamos estudar a dinâmica do sistema (2.3) quando $\mathcal{L}_{f^+}^2 h(0) < 0$ e $\mathcal{L}_{f^-}^2 h(0) > 0$, ou seja, quando a origem é uma dobra-dobra invisível-invisível, conhecida como singularidade Teixeira (veja figura (2.4)).

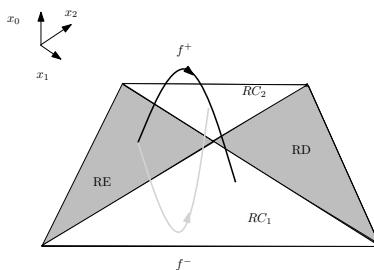


Figura 2.4: Dinâmica próximo a uma singularidade Teixeira. Órbitas fora da variedade de descontinuidade se curvam ao longo das dobras e cruzam a variedade em RC_1 e RC_2 .

2.2.1 Aproximação Local

Para determinar o itinerário e destino das órbitas na vizinhança da singularidade, obtemos uma aproximação local para os campos vetoriais.

Como tangências cúbicas locais em M estão proibidas (pelas condições $\mathcal{L}_{f^+}^2 h(0) < 0$ e $\mathcal{L}_{f^-}^2 h(0) > 0$) e estamos assumindo que não existe equilíbrio local (ou seja, $f^+(0) \neq 0$ e $f^-(0) \neq 0$),

0 , $f^-(0) \neq 0$) numa vizinhança suficientemente pequena da singularidade, a projeção dos campos vetoriais sobre a superfície M é aproximadamente constante. Isto é, por uma expansão de Taylor linear na direção x_0 e de ordem 0 nas direções x_1 e x_2 , podemos expressar o campo vetorial próximo da origem como:

$$f^+ = \begin{pmatrix} -x_1 + O(x_0, \|x_1, x_2\|^2) \\ 1 + O(\|x\|) \\ V^+ + O(\|x\|) \end{pmatrix}, \quad (2.10a)$$

$$f^- = \begin{pmatrix} x_2 + O(x_0, \|x_1, x_2\|^2) \\ V^- + O(\|x\|) \\ 1 + O(\|x\|) \end{pmatrix}, \quad (2.10b)$$

onde V^\pm são constantes reais.

Para mais detalhes sobre essa troca de coordenadas veja Apêndice A.

Geometricamente, V^+ (respectivamente V^-), mede a cotangente do ângulo θ^+ (respectivamente θ^-) entre o campo vetorial f^+ (respectivamente f^-) e sua linha dobra $\mathcal{L}_{f^+h}|_{x_0=0}$ ($\mathcal{L}_{f^-h}|_{x_0=0}$). Estes, podem ser recuperados para um campo vetorial geral em uma singularidade Teixeira de

$$V^+ = \cot \theta^+ = \frac{\mathcal{L}_{f^+} \mathcal{L}_{f^-} h}{\sqrt{-(\mathcal{L}_{f^+}^2 h)(\mathcal{L}_{f^-}^2 h)}}, \quad (2.11a)$$

$$V^- = \cot \theta^- = \frac{-\mathcal{L}_{f^-} \mathcal{L}_{f^+} h}{\sqrt{-(\mathcal{L}_{f^+}^2 h)(\mathcal{L}_{f^-}^2 h)}}, \quad (2.11b)$$

avaliado em pontos do conjunto singular.

A dinâmica de (2.10) é ilustrada na figura (2.4). O fluxo de f^+ aplica pontos da região $\{x_0 = 0, x_1 < 0\}$ para a região $\{x_0 = 0, x_1 > 0\}$, afetando uma reflexão ϕ^+ no plano $x_1 = 0$ ao longo da direção $(0, 1, V^+) + O(\|x\|)$. Do mesmo modo, o fluxo de f^- aplica pontos da região $\{x_0 = 0, x_2 < 0\}$ para a região $\{x_0 = 0, x_2 > 0\}$, afetando uma reflexão ϕ^- no plano $x_2 = 0$ ao longo da direção $(0, V^-, 1) + O(\|x\|)$.

Como visto na seção (1.2.2), a variedade de descontinuidade é dividida em quadrantes consistindo de **região de deslize** $\{x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0\}$ (RD), **região de escape** $\{x_0 = 0, x_1 < 0, x_2 < 0\}$ (RE) e **regiões de costura** $\{x_0 = 0, x_1 > 0 \text{ e } x_2 < 0\}$ (RC_1) e $\{x_0 = 0, x_1 < 0 \text{ e } x_2 > 0\}$ (RC_2), separadas pela dobra.

Nas regiões de costura, $CR_{1,2}$, a dinâmica pode ser analisada por uma aplicação “segundo retorno”, a composição dos mapas reflexão ϕ^+ e ϕ^- (veja figura (2.5)). A sequência de costuras será finita se esta aplicar para a região de deslize RD (ou seja, para a região onde f^+ e f^- apontam na direção da variedade de descontinuidade). Além disso, essa aplicação tem pontos iniciais na região de escape RE (ou seja, na região onde ambos os campos vetoriais apontam para fora da variedade).

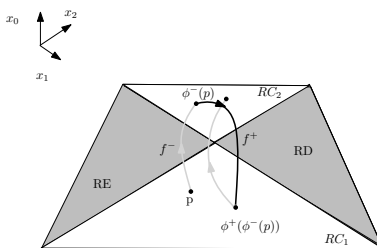


Figura 2.5: A aplicação $\phi^+ \circ \phi^-$. Um ponto $p \in RC_1$ é aplicado para RC_2 pelo fluxo do campo f^- e então pode voltar a RC_1 pelo fluxo do campo f^+

Através das regiões de costura o fluxo é contínuo e inversível. Na região de deslize uma órbita é definida unicamente no futuro, mas existirá um número infinito de órbitas chegando de M^+ e M^- no passado. Na região de escape o fluxo é definido unicamente no passado, mas no futuro não o é, gerando uma infinidade de órbitas que escapam para M^+ e M^- .

Vamos estudar as órbitas sobre a singularidade em termos de dois sistemas dinâmicos sobre a variedade de descontinuidade:

1. um sistema dinâmico de tempo contínuo nas regiões de escape e de deslize ($\dot{x} = f^s(x)$), cujas soluções são órbitas deslizantes que moram na variedade de descontinuidade, e
2. um sistema dinâmico de tempo discreto ($x \mapsto \phi^+ \circ \phi^-(x)$), cujas soluções são órbitas costurantes, que envolvem a singularidade induzindo um mapa retorno sobre a variedade de descontinuidade.

Nas duas próximas seções [2.2.2 - 2.2.3], analisamos essas dinâmicas separadamente e então remontamos a dinâmica tridimensional na seção [2.2.4]. Na seção [2.6] apresentamos algumas simulações numéricas feitas no software Matlab.

2.2.2 Dinâmica nas Regiões de deslize e de escape

Avaliando (2.10) em $x_0 = 0$ e substituindo em (2.5) o campo vetorial deslizante é:

$$f^s = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V^-x_1+x_2+O(\|x_1,x_2\|^2)}{d(x)} \\ \frac{x_1+V^+x_2+O(\|x_1,x_2\|^2)}{d(x)} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

onde $d(x) = x_1 + x_2 + O(\|x_1, x_2\|^2)$.

Esse campo vetorial é indefinido na origem, pois como f^+ e f^- são ambos tangentes a variedade em 0, todos os vetores nas suas combinações convexas são tangentes a variedade M .

Assim, para que possamos estudar o campo vetorial deslizante numa vizinhança da origem, definimos um campo vetorial planar regularizado \tilde{f}^s , multiplicando f^s por $d(x)$ e omitindo a componente trivial x_0 ,

$$\tilde{f}^s = \begin{pmatrix} V^- & 1 \\ 1 & V^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x_1, x_2\|^2) \quad (2.13)$$

Observe que $d(x) > 0$ para $x \in \text{RD}$ e $d(x) < 0$ para $x \in \text{RE}$, assim, \tilde{f}^s e f^s tem o mesmo retrato de fase na região de deslize (RD) e o mesmo retrato de fase com tempo invertido na região de escape (RE). Além disso, como $d(0) = 0$, temos que \tilde{f}^s tem um equilíbrio na origem, onde f^s não é bem definido.

Dessa forma, além do tempo invertido na região de escape (observado acima), a outra diferença entre o campo vetorial deslizante e o campo vetorial deslizante regularizado é que enquanto as órbitas de \tilde{f}^s que chegam a singularidade, a alcançam em tempo infinito, as mesmas órbitas para f^s alcançarão a singularidade em tempo finito. É importante ter isso em mente para traduzirmos as dinâmicas de \tilde{f}^s para o campo vetorial original f^s .

Na origem, \tilde{f}^s tem autovalores

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2}(V^+ + V^- \pm \sqrt{(V^+ - V^-)^2 + 4}) \quad (2.14)$$

e os autovetores associados são:

$$\begin{pmatrix} \mu_{\pm} - V^+ \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Se o autovalor μ_{\pm} tem parte real negativa (positiva), nós dizemos que ele, e seu autovalor associado são estáveis (instáveis).

Observe que os dois autovalores são reais, pois $((V^+ - V^-)^2 + 4) \geq 0$.

Chame $k_{\pm} = \mu_{\pm} - V^+$, então k_{\pm} representa a tangente do ângulo que o autovetor associado ao autovalor μ_{\pm} faz com o eixo x_2 .

Observe que $k_+k_- = (\mu_+ - V^+)(\mu_- - V^+) = -1$, assim os autovetores são ortogonais, ou seja, um autovetor está sempre nas regiões de deslize e de escape, e o outro está sempre nas regiões de costura. Os autovetores nunca podem ser tangentes a uma das dobras, pois isso corresponderá a uma tangência cúbica de f^+ ou f^- na origem (chamado um ponto cúspide), excluído por (2.6).

Em particular, temos que $k_- < 0 < k_+$ e

1. se $V^+, V^- > 0$ e $V^+V^- > 1$, temos que $0 < \mu_- < \mu_+$.
2. se $V^+V^- < 1$, temos que $\mu_- < 0 < \mu_+$;
3. se $V^+, V^- < 0$ e $V^+V^- > 1$, temos que $\mu_- < \mu_+ < 0$;

Ou seja, o autovetor associado com o autovalor μ_+ está sempre em RD, e

1. se $V^+, V^- > 0$ e $V^+V^- > 1$, ambos os autovetores são instáveis.
2. se $V^+V^- < 1$, o autovetor de RD \setminus RE é instável e o outro é estável;

3. se $V^+, V^- < 0$ e $V^+V^- > 1$, ambos os autovetores são estáveis;

Logo, quando o autovetor em $RD \setminus RE$ é estável, ele é associado com o autovalor estável fraco, assim segmentos de órbitas deslizantes são assintoticamente atraídas para o autovetor aproximando da singularidade. Os diferentes casos estão ilustrados na figura (2.6).

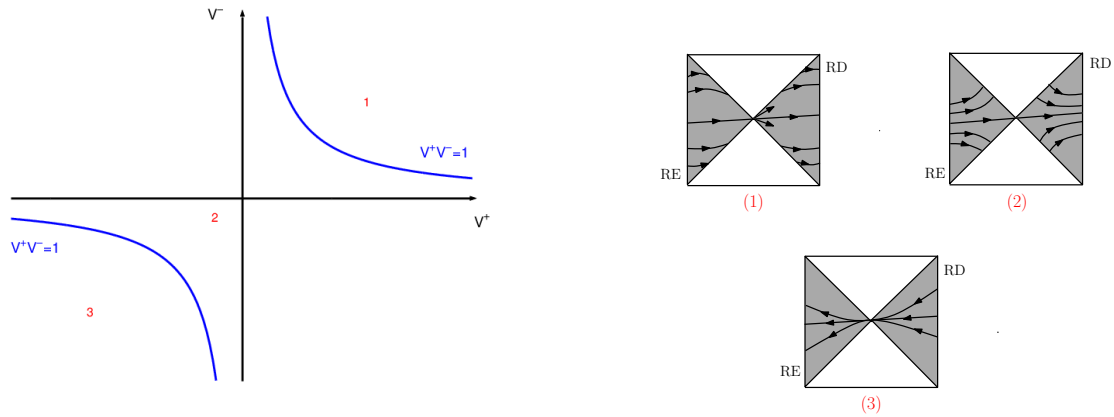


Figura 2.6: Diagrama de bifurcação e retratos de fase da dinâmica deslizante.

Referindo as definições de órbitas e fluxo na seção [1.2] (definição (1.2.4)), os retratos de fase ilustrados na figura (2.6), implicam que no caso (3), órbitas cruzam a singularidade de RD para RE em tempo finito, enquanto nos casos (1)-(2) elas cruzam de RE para RD. Observe que na origem o campo vetorial deslizante f^s não é único, quando $V^+V^- > 1$, $V^+, V^- < 0$ (Região (3) na figura (2.6)). Nesse caso, uma família a um parâmetro de órbitas se intersectam na origem ao longo de uma única direção (um autovetor de \tilde{f}^s). Nos outros casos, somente uma única órbita intersecta a singularidade.

No caso (3), órbitas com condições iniciais longe da descontinuidade pode entrar na região de deslize e evoluir para a singularidade (Figura 2.7), onde sua evolução futura é multivaluada. Tais órbitas alcançam a singularidade em tempo finito, e ao cruzá-la, todas as informações sobre suas condições iniciais é perdida. Assim, unicidade no futuro é perdida para órbitas que convergem para a singularidade.

Podemos estudar a estabilidade estrutural de f^s considerando \tilde{f}^s . E é o que faremos a seguir.

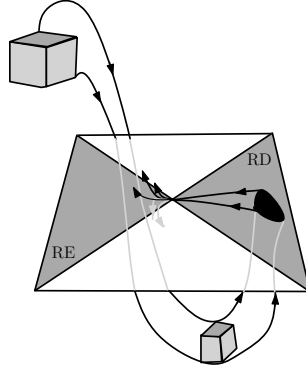


Figura 2.7: Não-determinismo da singularidade Teixeira: Órbitas com condições iniciais longe da descontinuidade podem entrar para a região de deslize e então seguir a órbita deslizando aproximando da singularidade. Dessa forma, a órbita alcança a singularidade em tempo finito e entra na região de escape. A partir daí, uma família a um parâmetro de órbitas partem da região de escape.

A Jacobiana de (2.13) em 0 é singular quando $V^+V^- = 1$, e uma rápida inspeção de (2.10a) e (2.10b), mostra que isso corresponde a f^+ e f^- serem antiparalelos (se $V^+, V^- < 0$) ou paralelos (se $V^+, V^- > 0$) na origem (de fato, $f^+(0, 0, 0) = V^+f^-(0, 0, 0)$ se $V^+V^- = 1$).

O autovetor $(-V^+, 1)$ associado com $\mu_- = 0$, sempre aponta para a região deslizando se $V^+, V^- < 0$, e para uma das regiões de costura se $V^+, V^- > 0$. Dessa forma somente o caso quando $V^+, V^- < 0$ resulta em um retrato de fase estruturalmente instável do campo vetorial deslizando, quando $V^+V^- = 1$.

Para $V^+, V^- < 0$ e $V^+V^- \approx 1$ o comportamento das órbitas de \tilde{f}^s ao redor da origem é capturada pela dinâmica na variedade central unidimensional com expansão de Taylor

$$\dot{u} = (V^+V^- - 1)u + a_2u^2 + O(u^3) \quad (2.16)$$

que exibe uma bifurcação transcritical em $V^+V^- = 1$ (detalhes sobre essa forma normal são dadas no Apêndice B). Observe que, para f^s , isso significa que existe um único equilíbrio que cruza a singularidade quando $V^+V^- = 1$, trocando a estabilidade no processo.

Observe que (2.16) tem 2 equilíbrios:

$$u = 0 \quad , \quad (2.17a)$$

$$u = -\frac{(V^+V^- - 1)}{a_2} \quad (2.17b)$$

Mas $u = 0$ corresponde a origem nas coordenadas (x_1, x_2) e portanto (2.17a) não é um pseudoequilíbrio de f^s . Dessa forma, analisaremos apenas (2.17b).

Temos que:

1. Se $a_2 > 0$ e

(a) se $V^+V^- - 1 > 0$, então (2.17b) é um nó estável para (2.16) e está no semi-eixo negativo de u .

(b) se $V^+V^- - 1 < 0$, então (2.17b) é um nó instável para (2.16) e está no semi-eixo positivo de u .

2. Se $a_2 < 0$ e

(a) se $V^+V^- - 1 > 0$, então (2.17b) é um nó estável para (2.16) e está no semi-eixo positivo de u .

(b) se $V^+V^- - 1 < 0$, então (2.17b) é um nó instável para (2.16) e está no semi-eixo negativo de u .

Dessa forma, assumindo que o semieixo positivo u está em RD, o pseudoequilíbrio de f^s é:

- (s1) se $a_2 > 0$ em (2.16), uma sela em RE para $V^+V^- > 1$ e $V^+, V^- < 0$, e um nó estável em RD quando $V^+V^- < 1$ ou $V^+, V^- > 0$,
- (s2) se $a_2 < 0$ em (2.16), uma sela em RD para $V^+V^- > 1$ e $V^+, V^- < 0$, e um nó instável em RE quando $V^+V^- < 1$ ou $V^+, V^- > 0$.

Isso é ilustrado na figura (2.8).

2.2.3 Dinâmica nas regiões de costura

Nas regiões costurantes, órbitas de f^+ e f^- induz aplicações ϕ^+ e ϕ^- da variedade M nela mesma, através das dobras.

Os campos vetoriais (2.10a) e (2.10b) truncados para primeira ordem são facilmente integrados obtendo

$$\tilde{\phi}^+ : \mathbb{R}^- \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2V^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x_1, x_2\|^2), \quad (2.18)$$

e

$$\tilde{\phi}^- : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \begin{pmatrix} 1 & -2V^- \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x_1, x_2\|^2). \quad (2.19)$$

As aplicações completas ϕ^+ e ϕ^- , cujas expansões de Taylor para a terceira ordem é reportada no Apêndice C, são então recuperadas como perturbações genéricas desses, impondo que eles preservem a correspondente linha dobra, e que eles sejam involuções. Essa última exigência segue, pela teoria de singularidades de aplicações, e do fato das linhas $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ serem dobras das aplicações ϕ^+ e ϕ^- (veja, por exemplo [19]).

Para entender as dinâmicas das órbitas que enrolam sobre a singularidade, costurando através de RC_1 e RC_2 , podemos estudar a aplicação de Poincaré de uma região costurante (RC_1 ou RC_2) nela mesmo. Essa aplicação é obtida como a composição de ϕ^+ e ϕ^- . Qualquer ordem para essa composição irá descrever completamente a dinâmica do campo.

Nós consideraremos a aplicação $\phi = \phi^+ \circ \phi^-$ (argumentos similares seguem se considerarmos a composição $\phi^- \circ \phi^+$).

O domínio de ϕ é o conjunto $D \subseteq RC_1$ tal que $\phi^-(D) \subseteq RC_2$. Órbitas com condição inicial em D cruzam RC_2 e retornam para RC_1 ou RD . O complemento de D em RC_1 consiste de condições iniciais que são aplicadas em RD por ϕ^- . Isso implica que D está entre o eixo negativo x_2 e a pré-imagem do eixo positivo x_2 pelo mapa ϕ^- . Como ϕ^- é uma involução, a pré-imagem é uma curva dada por $\phi^-(x_1 = 0, x_2 > 0)$.

A aplicação de Poincaré assim obtida é:

$$\phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2V^- \\ -2V^+ & (-1 + 4V^+V^-) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x_1, x_2\|^2). \quad (2.20)$$

Essa aplicação tem um ponto fixo na origem, com autovalores

$$\lambda_{\pm} = (2V^+V^- - 1) \pm 2\sqrt{V^+V^-(V^+V^- - 1)} \quad (2.21)$$

Os autovalores são reais quando $V^+V^- > 1$ ou $V^+V^- < 0$, e complexos caso contrário.

Mais do que isso, temos que:

1. se $V^+V^- > 1$ ou $V^+V^- < 0$ o ponto fixo é do tipo sela;
2. se $0 < V^+V^- < 1$ o ponto fixo é do tipo elíptico, sendo do tipo centro para a parte linear, com autovalores conjugados complexos sobre o círculo unitário.

Os autovetores correspondentes são

$$\begin{pmatrix} 2V^- \\ 1 + \lambda_{\pm} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

O seguinte resultado está provado em [5]:

Teorema 2.2.1. *Para um sistema dinâmico (2.3) onde os campos vetoriais f^+ , f^- estão na forma (2.10) temos que:*

1. *Se $V^+V^- > 1$ e $V^+, V^- < 0$, toda órbita de (2.3) cruza M um número infinito de vezes. Existe um par de superfícies invariantes que se interceptam na singularidade.*
2. *Se $V^+V^- < 1$ ou $V^+ > 0$ ou $V^- > 0$, toda órbita de (2.3) cruza M um número finito de vezes.*

Uma bifurcação toma lugar em $V^+V^- = 1$ para $V^+, V^- < 0$. Além disso,

1. *Se $V^+V^- > 1$ e $V^+, V^- < 0$, uma das superfícies invariantes é assintoticamente atratora, e encerra a região de escape RE dentro do domínio de repulsão da singularidade; a outra superfície é assintoticamente repulsora e encerra a região deslizante RE dentro do domínio de atração da singularidade.*
2. *Se $V^+V^- < 1$ ou $V^+ > 0$ ou $V^- > 0$, órbitas deslizantes são repelidas da singularidade,*
e

- (a) se $V^+ > 0$, toda órbita cruza M no máximo uma vez de M^- para M^+ ,
- (b) se $V^- > 0$, toda órbita cruza M no máximo uma vez de M^+ para M^- , e
- (c) se $0 < V^+V^- < 1$ e $V^+, V^- < 0$, toda órbita cruza M no mínimo uma vez antes de entrar na região de deslize.

Uma bifurcação da dinâmica costurante ocorre quando $V^+V^- = 1$ e $V^+, V^- < 0$. Na bifurcação, o Jacobiano da aplicação de Poincaré na origem é não-diagonalizável, e tem 2 autovalores iguais a 1. Como uma consequência de ϕ^+ e ϕ^- serem involuções, isso corresponde a uma bifurcação degenerada 1-1 do mapa.

Próximo a bifurcação, a aplicação pode ser reduzida a forma normal

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto u_1 + u_2 + O(\|u\|^4) \\ u_2 &\mapsto 4pu_1 + (1 + 4p)u_2 + B_{11}u_1u_2 + B_{30}u_1^3 + B_{21}u_1^2u_2 + B_{03}u_2^3 + O(\|u\|^4) \end{aligned} \quad (2.23)$$

com

$$p = V^+V^- - 1, \quad (2.24)$$

através de uma série de trocas de variáveis e parâmetros que são reportadas no apêndice D.

Na bifurcação e na origem, o eixo u_1 fica ao longo do vetor direção $(1, \frac{1}{\sqrt{-}})$, o autovetor singular do Jacobiano de ϕ , e a direção positiva de u_1 aplica para dentro de (RC_2) , enquanto o eixo u_2 é tangente ao eixo x_1 nas coordenadas originais.

A forma normal tem um ponto fixo na origem para todos os valores de p , enquanto mais dois pontos fixos, localizados em

$$u_1 = \pm 2\sqrt{\frac{-p}{B_{30}}}, \quad u_2 = 0 \quad (2.25)$$

surgem quando $\frac{-p}{B_{30}}$ é positivo.

A positividade dos autovalores (2.21) implica que o eixo u_1 negativo intersecta RC_1 , e fica dentro do domínio do mapa de Poincaré ϕ , implicando que o ponto fixo em $u_1 = -2\sqrt{\frac{-p}{B_{30}}}$ corresponde a uma órbita periódica costurante próxima a singularidade.

Os autovalores desse ponto fixo são

$$1 - B_{11} \sqrt{\frac{-p}{B_{30}}} \pm \sqrt{\frac{-p}{B_{30}} (8B_{30} + B_{11}^2)} + O(p) \quad (2.26)$$

Dependendo dos valores de B_{11} e B_{30} temos que:

- (c1) Se $B_{30} > 0$, os autovalores são reais, 1 positivo e 1 negativo;
- (c2) Se $B_{30} < 0$, e $|8B_{30}| < B_{11}^2$, ambos os autovalores são reais, e estão dentro do círculo unitário se $B_{11} > 0$, ou fora do círculo, caso contrário;
- (c3) Se $B_{30} < 0$ e $|8B_{30}| > B_{11}^2$, os autovalores são conjugados complexos, e estão dentro do círculo unitário se $B_{11} > 0$ e fora caso contrário.

As órbitas da aplicação (2.23) são aproximadas para $p = 0$, pela substituição de um fluxo tempo-unitário que é equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1 + O(\|v\|^4) \\ \dot{v}_2 &= B_{11}v_1v_2 + B_{30}v_1^3 + \left(\frac{B_{11}^2}{2} + B_{21} - 3B_{30}\right)v_1^2v_2 + O(\|v\|^4) \end{aligned} \quad (2.27)$$

como explicado no apêndice E.

Assim, os casos (c1), (c2), (c3) origina os seguintes cenários de bifurcação da dinâmica costurante numa vizinhança da origem:

- (c1) Para $p > 0$ a singularidade é um ponto sela do mapa ϕ . Para $p < 0$ um ciclo sela emerge da singularidade, e a singularidade é um centro do mapa ϕ .
- (c2) Para $p < 0$ a singularidade é um ponto fixo do tipo elíptico do mapa ϕ . Para $p > 0$ um ciclo nó emerge da singularidade, e a singularidade é uma sela do mapa ϕ . Em $p = 0$ o mapa costurante na singularidade pode exibir um setor elíptico (uma região para a qual toda órbita converge para a singularidade em tempo passado e futuro).
- (c3) Para $p < 0$ a singularidade é um centro do mapa ϕ . Para $p > 0$ um ciclo foco surge da singularidade, e a singularidade é uma sela do mapa ϕ .

Os retratos de fase de cada tipo são mostrados na figura (2.8)

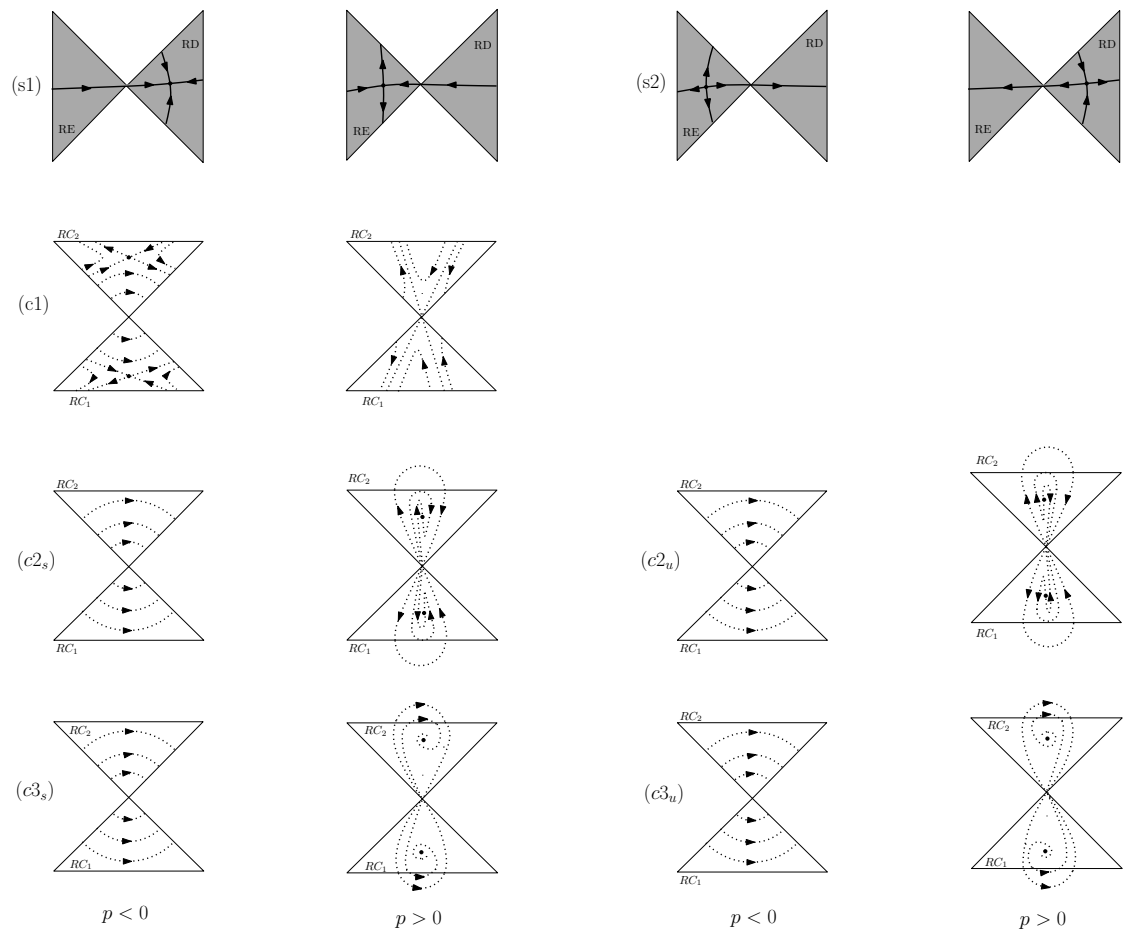


Figura 2.8: O catálogo completo da dinâmica local sobre a singularidade Teixeira, quando $p = V^+V^- - 1 \approx 0$, é obtida compondo um dos possíveis retratos de fase deslizante (s1), (s2) com um dos retratos de fase costurante (c1), (c2_{s,u}) ou (c3_{s,u}).

2.2.4 Dinâmica sobre a singularidade Teixeira

Uma vez que as dinâmicas das regiões de deslize, de escape e de costura foram estudadas, elas podem ser “coladas” para obter o retrato global de órbitas sobre a singularidade.

A dinâmica em RD foi completamente descrita na seção [2.2.2] e pode ser somente de 2 tipos, (s1) e (s2) na figura (2.8), dependendo do sinal do parâmetro a_2 em (2.16).

A dinâmica em RC_1 e RC_2 foram derivadas diretamente da aplicação (2.23). A troca de variáveis que dá lugar a aplicação de Poincaré genérico (2.20) na forma (2.23) garante que, para p suficientemente próximo de 0, o eixo positivo u_1 permanece completamente dentro do domínio D do mapa ϕ . Assim, a origem e a solução negativa de (2.25) são pontos fixos do mapa de Poincaré. Em particular, em termos das dinâmicas do sistema (2.1), a origem é um ponto limite (tempo passado ou futuro) das órbitas costurantes, enquanto a solução (2.25) corresponde a um ciclo costurante cujo tipo (foco/nó/sela, estável/instável) depende, como nós vimos na seção [2.2.3], dos coeficientes B_{30} e B_{11} da forma normal. Dessa forma, podemos esboçar as órbitas costurantes do sistema (2.1), ou mais precisamente, suas interseções com a variedade de descontinuidade, como os casos (c1)-(c3) na figura (2.8). Os retratos de fase descritos são obtidos tomando as dinâmicas do mapa (2.23), restritas a CR_1 , e refletida na linha $x_1 = x_2$. Nos casos (c2) e (c3) o mapa contém um nó ou foco, que pode ser estável ((c2s) e (c3s)) ou instável ((c2u) e (c3u)).

A dinâmica completa em torno da singularidade Teixeira é obtida então, “colando” um dos retratos (s1), (s2) para a dinâmica deslizante, com um dos retratos (c1)-(c3) para a dinâmica costurante. Dessa forma, temos um total de 10 retratos de fase qualitativamente diferentes, (veja, por exemplo a figura(2.9)). Observamos que não foram encontradas condições que proibam alguma das 10 combinações desses retratos. De fato, em [1] foi exibido exemplos de cada um dos 10 possíveis retratos de fase. Na seção (2.6), apresentamos esses exemplos.

Características qualitativas interessantes das dinâmicas podem ser diretamente deduzidas da Figura (2.8).

Por exemplo, para $p < 0$, a dinâmica nos setores costurantes próximo da singularidade é similar em cada caso (c1)-(c3). Aqui, um número finito de costuras levam órbitas de RE para RD. Uma vez que elas chegam em RD, os campos vetoriais em (s1)-(s2) entram em

cena. Nesse caso, todas as órbitas desenvolvem-se afastando da singularidade, convergindo em direção de um pseudo-nó em (s1), ou deixando a vizinhança local em (s2).

Para $p > 0$ entretanto, (c1) é fundamentalmente diferente de (c2) e (c3). Em (c1), órbitas costurantes deixam a vizinhança da singularidade no passado ou no futuro, e portanto não existem localmente órbitas costurantes que passam de RE para RD. Em (c2) e (c3), sempre existem órbitas costurantes que podem localmente passar de RE para RD. O mapa costurante contém um ponto fixo do tipo nó ou foco. Se o ponto fixo é estável ((c2s) ou (c3s)), então todas as órbitas costurantes que surgem de RE suficientemente próxima da singularidade convergem para o ponto fixo. Se o ponto fixo é instável ((c2u) ou (c3u)), então todas as órbitas costurantes suficientemente próximas da singularidade irão alcançar RD em tempo finito.

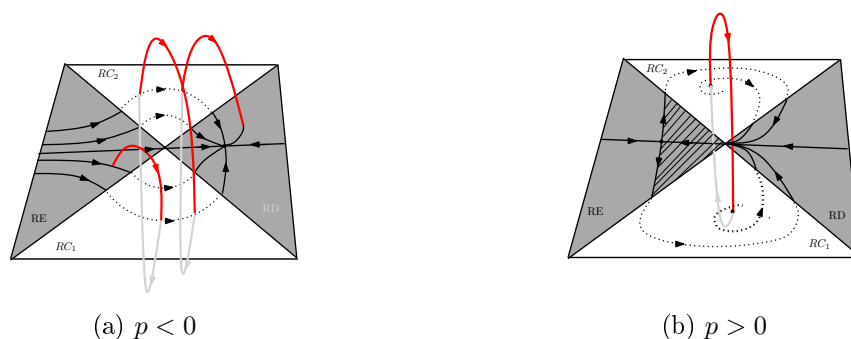


Figura 2.9: Composição do retrato deslizante (s1) e o retrato costurante (c3u) da figura(2.8). (a) Para $p < 0$ todas as órbitas alcançam a região deslizante, e uma órbita costurante é mostrada. (b) Para $p > 0$ esse sistema tem um conjunto invariante próximo a singularidade, gerado pela evolução futura da região hachurada de RE. O ciclo limite é mostrado em vermelho.

2.2.5 Caos não determinístico

Um caso particularmente interessante é revelado se nós tomarmos os retratos costurantes ($c2_u$) ou ($c3_u$) e combina-lo com o retrato (s1), como exemplificado na figura (2.9). Segue o resultado.

Proposição 2.2.1. *Se um sistema exibe uma singularidade Teixeira com retratos costurantes $(c2_u)$ ou $(c3_u)$ com $p > 0$, e o retrato deslizante $(s1)$, então localmente:*

- *todas as órbitas costurantes alcançam RD , com exceção do ciclo limite instável,*
- *todas as órbitas deslizantes alcançam RE via a singularidade, e além disso*
- *todas as órbitas visitam a singularidade recorrentemente.*

A evolução no futuro da singularidade não é única, e portanto não determinística. Nós podemos caracterizar esse comportamento dizendo que o sistema exibe uma forma não determinística do caos.

O termo “caos não determinístico” apareceu anteriormente em [20] em uma colocação um pouco diferente, embora que referindo a uma similar perda de unicidade na qual uma infinidade de órbitas recorrentemente passam através de um único ponto em tempo finito.

Para definir essa noção não familiar, comecemos definindo caos determinístico disponível em muitos textos usuais. A definição que daremos a seguir foi dada em [21].

Definição 2.2.2. *Um fluxo ψ é caótico sobre um conjunto compacto invariante A se ψ é transitiva e exibe sensibilidade em relação às condições iniciais em A .*

De fato, o sistema descrito na proposição (2.2.1) tem um conjunto invariante A , próximo da singularidade, gerado pela evolução futura da região em RE limitada pelas dobras e pela variedade instável da pseudosela (incluindo a pseudosela; veja região hachurada na figura(2.9b)).

A seguir damos as definições de transitividade e sensibilidade às condições iniciais para fluxos de sistemas não determinístico. Primeiramente, como em [21], dizemos que:

Definição 2.2.3. *Um fluxo ψ é topologicamente transitivo sobre um conjunto invariante A se para todo par de conjuntos não-vazios, abertos, U e V em A , existe um $t > 0$ talque $\psi_t(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Isso é satisfeito pelo sistema descrito na proposição (2.2.1), pois todo ponto $x \in U$ alcança a singularidade em tempo finito quando sua evolução futura gera o conjunto A .

E, finalmente, a definição de sensibilidade em relação às condições iniciais em [21] foi adaptada para ser aplicada no nosso caso como segue.

Definição 2.2.4. *Seja $B_\epsilon(x)$ uma bola de raio ϵ centrado em x . Um fluxo multivaluado ψ exibe sensibilidade sobre um conjunto invariante A se existe um r fixado tal que para cada $x \in A$ e todo $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $y \in B_\epsilon(x) \cap A$ tal que o diâmetro de $\psi_t(x) \cup \psi_t(y)$ é maior do que r para algum $t \geq 0$.*

A única diferença entre essa definição e a em [21] é que essa usa o diâmetro de $\psi_t(x) \cup \psi_t(y)$ no lugar da distância $\|\psi_t(x) - \psi_t(y)\|$. As duas definições coincidem para fluxos no sentido usual, fazendo com que essa seja uma extensão natural.

Para nosso fluxo, a evolução futura de algum ponto em A gera todo o conjunto invariante, depois costurando a singularidade, assim o fluxo na proposição (2.2.1) exibe dependência sensível em relação às condições iniciais, e A é um conjunto caótico não-determinístico.

A seguir, nas duas próximas seções descreveremos brevemente os outros possíveis tipos de singularidade dobra-dobra.

2.3 A dobra-dobra visível

Um campo vetorial intersectando transversalmente dobras visíveis genericamente satisfaz (2.6)-(2.8), com $\mathcal{L}_f^- h < 0 < \mathcal{L}_f^+ h$ na singularidade. Isso é ilustrado na Figura (2.10) e tem forma normal

$$f^+ = \begin{pmatrix} -x_1 + O(x_0, \|x_1, x_2\|^2) \\ -1 + O(\|x\|) \\ -V^+ + O(\|x\|) \end{pmatrix}, \quad (2.28a)$$

$$f^- = \begin{pmatrix} x_2 + O(x_0, \|x_1, x_2\|^2) \\ -V^- + O(\|x\|) \\ -1 + O(\|x\|) \end{pmatrix}. \quad (2.28b)$$

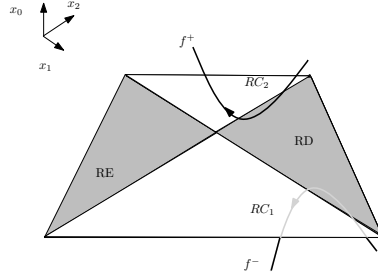


Figura 2.10: Dinâmica próximo a uma singularidade dobra-dobra visível

Assim como para a singularidade Teixeira, geometricamente, os parâmetros V^\pm , mede a cotangente do ângulo θ^\pm entre o campo vetorial f^\pm e sua linha dobra. Eles podem ser recuperados para um campo vetorial geral com uma dobra-dobra visível por

$$V^+ = \frac{-\mathcal{L}_{f^+}\mathcal{L}_{f^-}h}{\sqrt{-(\mathcal{L}_{f^+}^2h)(\mathcal{L}_{f^-}^2h)}}, \quad (2.29a)$$

$$V^- = \frac{\mathcal{L}_{f^-}\mathcal{L}_{f^+}h}{\sqrt{-(\mathcal{L}_{f^+}^2h)(\mathcal{L}_{f^-}^2h)}}. \quad (2.29b)$$

Dinâmicas costurantes nesse caso são triviais, pois em dobras visíveis, órbitas costurantes se afastam da vizinhança da singularidade (veja figura (2.10)).

Dinâmica deslizante pode ser entendida da mesma maneira da seção [2.2.2]. A expressão explícita para o campo vetorial deslizante é:

$$f^s = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-V^-x_1 - x_2 + O(\|x_1, x_2\|^2)}{d(x)} \\ \frac{-x_1 - V^+x_2 + O(\|x_1, x_2\|^2)}{d(x)} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

onde $d(x) = x_1 + x_2 + O(\|x_1, x_2\|^2)$.

Como foi feito na seção [2.2.2], tomemos um campo vetorial planar regularizado, \tilde{f}^s , multiplicando f^s por $d(x)$ e omitindo a componente trivial x_0 ,

$$\tilde{f}^s = \begin{pmatrix} -V^- & -1 \\ -1 & -V^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x_1, x_2\|^2) \quad (2.31)$$

O equilíbrio na origem de \tilde{f}^s tem autovalores

$$\mu_{\pm} = -\frac{1}{2}(V^+ + V^- \pm \sqrt{(V^+ - V^-)^2 + 4}) \quad (2.32)$$

(o negativo de 2.14) enquanto os autovetores associados são:

$$\begin{pmatrix} \mu_{\pm} + V^+ \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

(o mesmo como (2.15)).

Assim, a dinâmica deslizante é a mesma da singularidade Teixeira, mas com tempo invertido (veja figura 2.11).

Esse tempo invertido tem uma importante implicação para a complexidade da dinâmica local. Similarmente a singularidade Teixeira, um pseudoequilíbrio cruza entre RD e RE quando $V^+V^- = 1$, com $V^+, V^- < 0$. Entretanto, considerando que em uma singularidade Teixeira uma família a uma parâmetro de órbitas em RD podem intersectar a singularidade, em uma dobra-dobra visível somente uma única órbita em RD pode intersectar a singularidade. Em todos os casos, todas as trajetórias desenvolvem afastando da singularidade para os campos vetoriais superior ou inferior, partindo da variedade de descontinuidade ou de uma dobra visível ou de RE.

Dessa forma, existem somente duas classes topológicas estruturalmente estáveis na origem para o sistema (2.28a)-(2.28b), especificado pelas inequações:

1. $V^+V^- > 1, V^+, V^- < 0$
2. $V^+V^- < 1$ ou $V^- \geq 0$

A estabilidade estrutural foi provada em [2]. Para sistemas com $V^+V^- = 1, V^- < 0$, existe arbitrariamente próximo, sistemas que pertencem a qualquer uma dessas duas classes.

2.4 A dobra-dobra invisível-visível

Um campo vetorial intersectando transversalmente dobras visível e invisível genericamente satisfaz (2.6)-(2.8), com $(\mathcal{L}_{f^-}^2 h)(\mathcal{L}_{f^+}^2 h) > 0$ na singularidade, sendo denominada uma

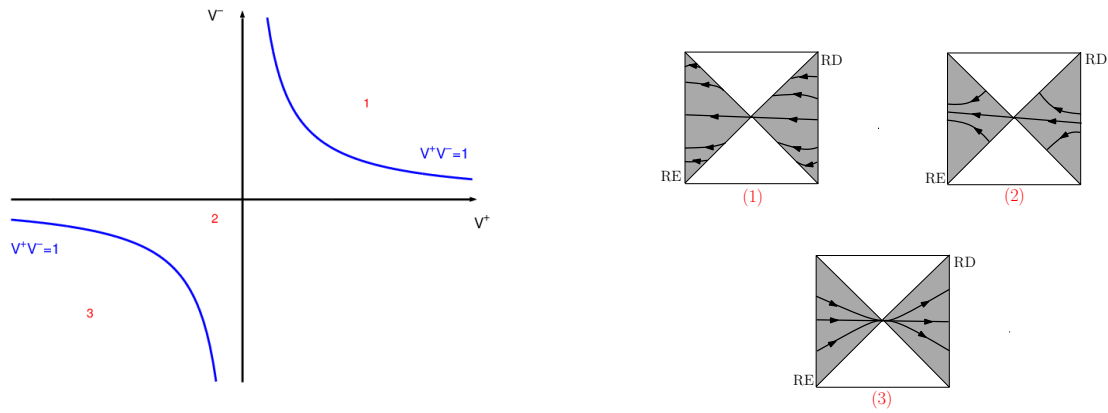


Figura 2.11: Diagrama de bifurcação e retratos de fase da dinâmica deslizante de uma singularidade dobra-dobra visível.

dobra-dobra visível-invisível (se $\mathcal{L}_{f^+}^2 h > 0$ e $\mathcal{L}_{f^+}^2 h > 0$) ou invisível-visível (se $\mathcal{L}_{f^+}^2 h < 0$ e $\mathcal{L}_{f^-}^2 h < 0$). Isso é ilustrado na figura (2.12).

Consideraremos o caso quando $\mathcal{L}_{f^+}^2 h < 0$ e $\mathcal{L}_{f^-}^2 h < 0$. (O caso $\mathcal{L}_{f^+}^2 h > 0$, $\mathcal{L}_{f^-}^2 h > 0$, é reduzido a esse trocando x_0, x_2, x_1 por $-x_0, x_1, x_2$).

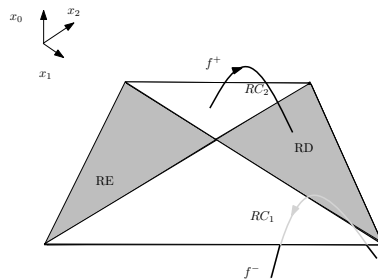


Figura 2.12: Dinâmica próximo a uma singularidade invisível-visível

Esse caso tem forma local:

$$f^+ = \begin{pmatrix} -x_1 + O(x_0, \|x_1, x_2\|^2) \\ 1 + O(\|x\|) \\ V^+ + O(\|x\|) \end{pmatrix}, \quad (2.34a)$$

$$f^- = \begin{pmatrix} x_2 + O(x_0, \|x_1, x_2\|^2) \\ -V^- + O(\|x\|) \\ -1 + O(\|x\|) \end{pmatrix}, \quad (2.34b)$$

Os parâmetros V^\pm podem ser recuperados para um campo vetorial geral com uma dobra-dobra invisível-visível de

$$V^+ = \frac{\mathcal{L}_{f^+} \mathcal{L}_{f^-} h}{\sqrt{(\mathcal{L}_{f^+}^2 h)(\mathcal{L}_{f^-}^2 h)}}, \quad (2.35a)$$

$$V^- = \frac{\mathcal{L}_{f^-} \mathcal{L}_{f^+} h}{\sqrt{(\mathcal{L}_{f^+}^2 h)(\mathcal{L}_{f^-}^2 h)}}. \quad (2.35b)$$

O campo vetorial deslizante regularizado \tilde{f}^s nesse caso é:

$$\tilde{f}^s = \begin{pmatrix} -V^- & 1 \\ -1 & V^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x_1, x_2\|^2) \quad (2.36)$$

O equilíbrio de \tilde{f}^s na origem tem autovalores

$$\mu_\pm = \frac{1}{2}(V^+ - V^- \pm \sqrt{(V^+ + V^-)^2 - 4}) \quad (2.37)$$

enquanto os autovetores associados são:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mu_\pm + V^- \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Seja $k_\pm = \mu_\pm + V^-$ e observe que $k_+ k_- = 1$.

Os autovalores são imaginários quando $|V^+ + V^-| < 2$ e reais caso contrário. Além disso:

1. Se $|V^+ + V^-| < 2$ então não existem direções nas quais trajetórias podem chegar na singularidade.
2. Se $|V^+ + V^-| \geq 2$, $V^+V^- < 1$ e $V^+ - V^- > 0$, então os autovalores são positivos e os dois autovetores estão em RD/RE ($\mu_+ > \mu_- > 0$ e $0 < k_- < 1 < k^+$). Dessa forma, a origem é um nó instável.
3. Se $|V^+ + V^-| \geq 2$, $V^+V^- < 1$ e $V^+ - V^- < 0$, então os autovalores são negativos e os dois autovetores estão em RD/RE ($\mu_- < \mu_+ < 0$ e $0 < k_- < 1 < k^+$). Dessa forma, a origem é um nó estável.
4. Se $|V^+ + V^-| > 2$ e $V^+V^- > 1$, então um autovalor é negativo e o outro é positivo e ambos os autovetores estão em RD/RE ($\mu_- < 0 < \mu_+$ e $0 < k_- < 1 < k^+$). Dessa forma, a origem é um sela.

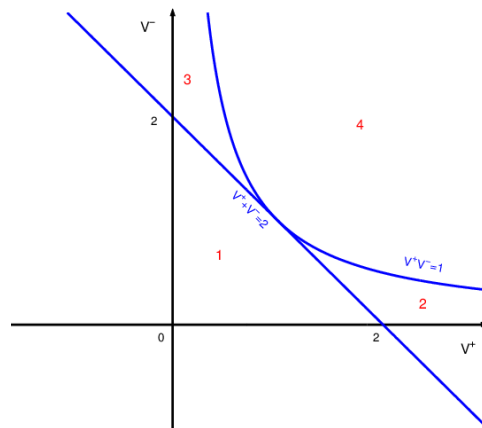


Figura 2.13: Diagrama de bifurcação da dinâmica deslizante de uma singularidade dobra-dobra invisível-visível.

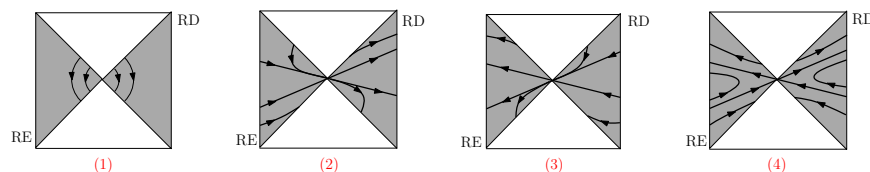


Figura 2.14: Retratos de fase da dinâmica deslizante.

Quando $V^+V^- = 1$, um autovalor vai a 0. Nesse caso, \tilde{f}^s tem uma variedade central uni-dimensional (veja Apêndice F) com dinâmica

$$\dot{u} = (V^+V^- - 1)u + a_2u^2 + O(u^3) \quad (2.39)$$

Com V^+V^- passando através da unidade com $V^+, V^- > 0$, um pseudoequilíbrio cruza a singularidade ao longo do autovetor singular.

Como a origem é uma singularidade dobra invisível para f^+ , temos que próximo à origem, as trajetórias da região $x_0 > 0$ vão de $RC_1 = \{x_0 = 0, x_1 < 0, x_2 > 0\}$ para $RD = \{x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Podemos então definir uma aplicação primeiro retorno $\phi^+ : RC_1 \rightarrow RD$ dada por:

$$\phi^+ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2V^+ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x_1, x_2\|^2), \quad (2.40)$$

Observe que o fato da origem ser uma dobra visível para f^- previne o início da dinâmica costurante recorrente (figura 2.12). No entanto, devemos observar também que a classe topológica de trajetórias na região $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 < \delta^2$ depende não somente da combinação de trajetórias no plano $x_0 = 0$, mas sim de combinações de trajetórias e de suas imagens pelo mapa ϕ^+ . Dessa formas devemos estudar a imagem da aplicação ϕ^+ .

Em uma vizinhança pequena da origem, ϕ^+ aplica uma linha $y = \psi(x)$ com $\frac{dy}{dx} = k$ sobre uma linha $y = \psi_1(x)$ com

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{2V^+k - 1} + O(1) \quad \text{se } 2V^+k \neq 0, \quad \text{e } \frac{dx}{dy} = O(1) \quad \text{se } 2V^+k = 0 \quad (2.41)$$

Assim as imagens dos eixos x_1 e de trajetórias entrando na origem com inclinações k_+ e k_- são curvas entrando na origem com inclinações

$$k^* = \frac{1}{2V^+} \quad , \quad k_+^1 = \frac{k_+}{2V^+k_+ - 1} = \frac{1}{2V^+ - k_-} \quad , \quad k_-^1 = \frac{1}{2V^+ - k_+} \quad (2.42)$$

Consequentemente, a classe topológica depende da combinação dos números $k_+, k_-, k^*, k_+^1, k_-^1$.

Assim, nós iremos encontrar os valores de bifurcação dos parâmetros V^+, V^- .

1. Colocando $k^* = k_+ > 0$, nós temos $2V^+ = \frac{1}{k_+} = k_- > 0$ e portanto $2V^+(V^+ - V^-) = -1$, $V^+ > 0$.
2. Colocando $k^+ = k_- > 0$ nós temos $V^+ + V^- = 2$.
3. Colocando $k^+ = k_+^1 > 0$ nós temos $k_- = \frac{1}{k_+} = 2V^+ - k_+ > 0$ e portanto $V^+V^- = 1$.
4. Colocando $k^+ = k_-^1 > 0$ nós temos $k_- = \frac{1}{k_+} = 2V^+ - k_- > 0$ e portanto $V^+ - V^- = 0$, $V^+ > 0$.

As relações obtidas definem as linhas que separam o plano dos parâmetros V^+, V^- em 11 regiões de dinâmicas estruturalmente diferentes (figura 2.15). A estabilidade estrutural dos sistemas dessas 11 classes e a ausência de outros sistemas estruturalmente estável está provado em [2].

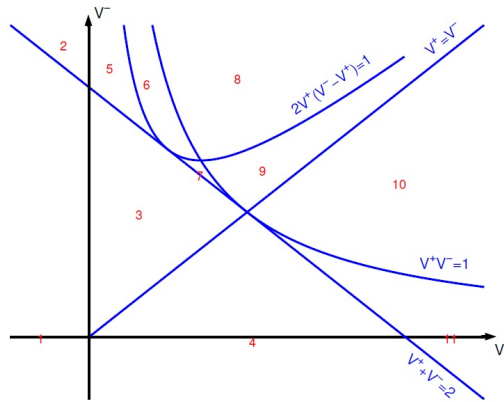


Figura 2.15: Diagrama de bifurcação de uma dobra-dobra invisível-visível

2.5 Observações sobre bifurcações deslizantes

Embora o comportamento local de dobra-dobra visível e invisível-visível ser menos complexo do que o da singularidade Teixeira, eles podem ter implicações surpreendentes para a dinâmica global.

Vimos nas figuras (2.10), (2.12) que não existem órbitas costurando a dobra-dobra da região deslizante para a região escapante. Assim, localmente todas as órbitas eventualmente

partem da vizinhança da dobra-dobra, deixando a variedade de descontinuidade via uma dobra visível.

No entanto, isso significa que as dinâmicas deslizantes locais interagem com a dinâmica global. Dessa forma, famílias a um parâmetro de órbitas podem sofrer bifurcações deslizantes assim chamadas catastróficas. Nessas bifurcações, por exemplo, órbitas periódicas podem ser subitamente destruídas através de um encontro com uma dobra visível ou invisível-visível. Isso ocorre quando elas cruzam a dobra-dobra de RD para RE, de modo que a geometria local é dada pelos campos vetoriais nas seções (2.4)-(2.3). Em alguns casos, por exemplo em uma dobra-dobra invisível-visível com $V^+V^- < 1$, $V^+ + V^- > 2$, $V^+ < V^-$, essas bifurcações são provavelmente associadas com dinâmica caótica não determinística sobre uma escala global.

2.6 Simulações numéricas

Como vimos na seção (2.2.4), um caso particularmente interessante é quando tomamos na figura (2.8) os retratos (s1) para a dinâmica deslizante e $(c3_u)$ para a dinâmica costurante. Tais retratos são obtidos tomando (2.5) e (2.20) com coeficientes $B_{11} > 0$, $B_{30} < 0$, $|8B_{30}| > B_{11}^2$, e $a_2 > 0$.

Um exemplo numérico desse caso é dado pelo sistema:

$$f^+ = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ V^+ \end{pmatrix}, \quad (2.43a)$$

$$f^- = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V^- \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.43b)$$

com a variedade de descontinuidade sendo $x_0 = 0$.

As formas normais deslizante e costurante (2.5) e (2.20) para esse sistema tem coeficientes $B_{11} = -16$, $B_{30} = -1666,93$, $a_2 = 61.4$, quando $V^+ = -5$ e $V^- = -1/5$, e portanto, estamos no caso (s1) – $(c3_u)$ da singularidade Teixeira.

Na figura (2.16), simulamos o sistema usando o software Matlab, com um integrador suave por partes introduzido por [13], com $V^+ = -5.01$, $V^- = -0.2$. Nesse exemplo,

$p = V^+V^- - 1 = 0.002 > 0$. Tomamos a condição inicial $(10^{-20}, -10^{-6}, -10^{-6})$. Assim, a condição inicial está próximo da bifurcação e portanto os campos vetoriais abaixo e acima da variedade de descontinuidade são aproximadamente antiparalelos na origem.

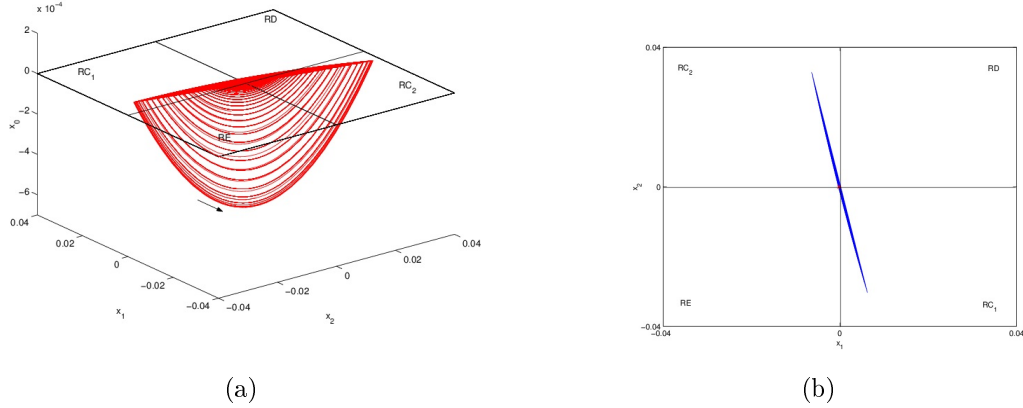


Figura 2.16: Simulação do sistema (2.43) com $V^+ = -5.01$ e $V^- = -0.2$, exibindo um pseudoequilíbrio (mostrado em vermelho) em RD e um ciclo foco instável. Na figura (b) é mostrada interseções da órbita com a variedade de descontinuidade. O pseudoequilíbrio em RE está mostrado em vermelho.

Para uma melhor visualização do comportamento da órbita ampliamos a figura (2.16), obtendo (2.17). Observamos que após a última costura, a órbita alcança a região de deslize (no ponto superior em RD). Depois, segue a órbita do campo vetorial deslizante (via uma caminho aproximadamente reto, como mostrado na figura). A órbita então segue para a singularidade e a alcança após um tempo $t \approx 0.48$. Nesse tempo o integrador falha, o que é coerente com os resultados obtidos teoricamente, pois nesse tempo a órbita está entrando em RE, onde sua evolução futura não é única.

Trocando V^+ para -4.99 no sistema (2.43), teremos que $p = V^+V^- - 1 = -0.002$. Simulamos esse sistema na figura (2.18). As órbitas se curvam ao longo da singularidade um número finito de vezes e alcançam RD. Nesse caso, (como vemos na figura (2.18b)), a órbita deslizante se afasta da singularidade sobre um caminho reto. A órbita termina em um pseudoequilíbrio (ponto verde na figura (2.18)).

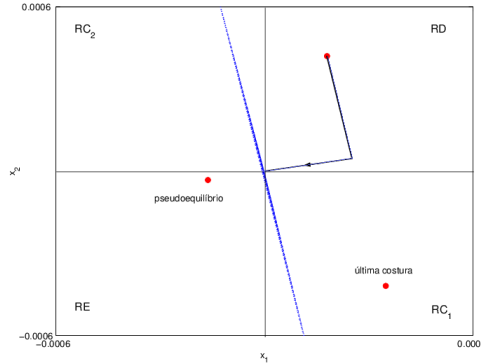


Figura 2.17: Ampliação da figura (2.16). Uma única órbita originando próximo de RE, com condições iniciais $(10^{-20}, -10^{-6}, -10^{-6})$ enrola sobre a singularidade e atinge RD, e então é atraída para a singularidade e volta a RE.

Observamos que trajetórias do sistema truncado para primeira ordem em (2.10) são curvas $(x_0(t), x_1(t), x_2(t))$ cujas coordenadas satisfaz

$$(V^+V^- - 1)|x_0| = \begin{cases} (\frac{1}{2V^-}x_1^2 + \frac{1}{2V^+}x_2^2 - x_1x_2 + c)V^- & \text{se } x_0 > 0 \\ (\frac{1}{2V^-}x_1^2 + \frac{1}{2V^+}x_2^2 - x_1x_2 + c)V^+ & \text{se } x_0 < 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

onde a constante c fixa a altura que a órbita alcança ao longo do eixo x_0 .

Quando $V^+V^-(1 - V^+V^-) > 0$, essas equações definem um par de paraboloides, um acima e um abaixo da variedade de descontinuidade, unidos não diferencialmente, formando uma bola com o equador achatado. Quando $V^+V^-(1 - V^+V^-) < 0$, eles definem um par de superfícies acima e abaixo da variedade, cada um dos quais faz parte de uma sela, novamente unidas não diferencialmente.

Se $c = 0$, as superfícies formam um duplo cone não suave através da singularidade, que sofre uma bifurcação, quando $p = 0$, veja por exemplo figura (2.19).

Afim de exemplificar cada um dos 10 retratos de fase diferentes da figura (2.8), consideremos o sistema (2.43), trocando a Jacobiana de f^+ para

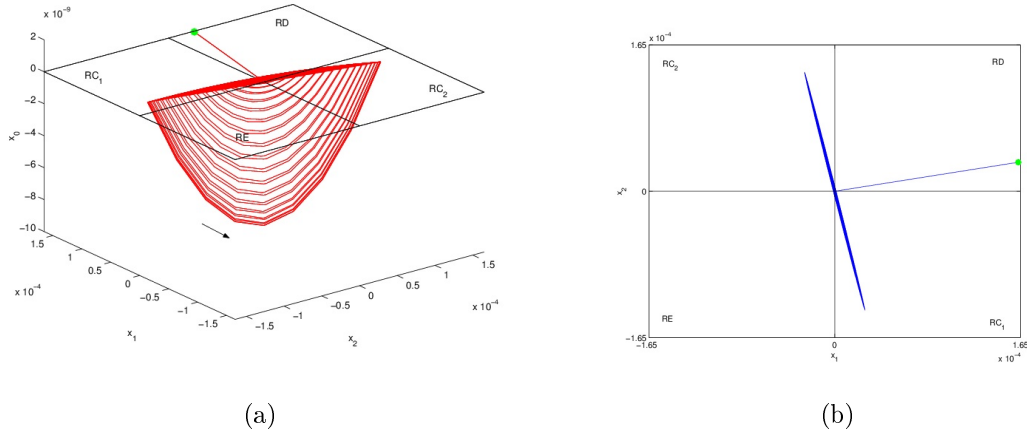


Figura 2.18: Simulação do sistema (2.43) com $V^+ = -4.99$ e $V^- = -0.2$. Uma única órbita, com condições iniciais $(10^{-20}, -10^{-6}, -10^{-6})$, enrola sobre a singularidade e alcança RD, e então é repelida da singularidade por uma pseudo singularidade (ponto verde).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & a_{32} & -2 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Assumindo os valores da Tabela (2.1) para os parâmetros a_{11} , a_{32} , V^+ e V^- , nós obtemos um exemplo de cada cenário predito.

Retrato	a_{11}	a_{32}	V^+	V^-
$s1-c1$	-3	1	-1/20	-20
$s1-c2_s$	-3	1	-1/5	-5
$s1-c2_u$	100	0	-20	-1/20
$s1-c3_s$	-3	1	-1	-1
$s1-c3_u$	-3	1	-5	-1/5
$s2-c1$	-3	10	-1/2	-2
$s2-c2_s$	-3	10	-2/3	-3/2
$s2-c2_u$	100	100	-5	-1/5
$s2-c3_s$	-3	10	-1	-1
$s2-c3_u$	-3	100	-5	-1/5

Tabela 2.1: Lista de valores dos parâmetros a_{11} , a_{32} , V^+ , e V^- usados para obter exemplos de todos os retratos descritos na figura (2.8)

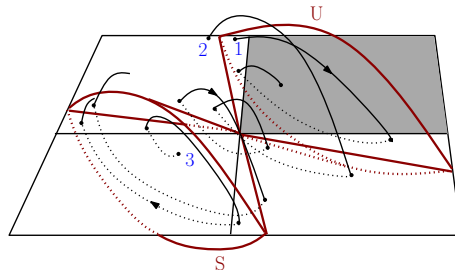


Figura 2.19: Variedades Invariantes próximo a uma singularidade dobra-dobra. Os três tipos qualitativamente diferentes de órbitas são mostradas. 1) Uma órbita começando próximo de U (pelo lado de dentro), espirala em direção da singularidade e atinge a região deslizante (região hachurada). 2) Uma órbita começando próximo a variedade U (pelo lado de fora) inicialmente espirala em direção da singularidade e então espirala se afastando da singularidade, e tende assintoticamente para S. 3) Uma órbita espirala para fora da região de escape se afastando da singularidade, aproximando assintoticamente de S.

CAPÍTULO 3

SINGULARIDADE DOBRA-DOBRA EM SISTEMAS ELÉTRICOS NÃO SUAVES

Modelos não suaves são amplamente usados em engenharia elétrica e eletrônica para capturar a dinâmica de um grande número de circuitos e dispositivos.

Nesse capítulo mostraremos que a singularidade dobra-dobra, mais precisamente a singularidade Teixeira pode aparecer em sistemas elétricos não suaves. Para isso, apresentaremos dois exemplos de circuitos elétricos que com escolhas adequadas dos parâmetros, possuem genericamente a singularidade Teixeira.

3.1 Um circuito com comutação de potência

Como um primeiro exemplo nós consideraremos o circuito da figura (3.1), onde a fonte de energia à esquerda (u_a, R_a) é selecionada quando v_2 é negativo, e o da direita (u_b, R_b) é selecionada quando v_2 é positivo.

O modelo é um sistema suave por partes cujas equações são:

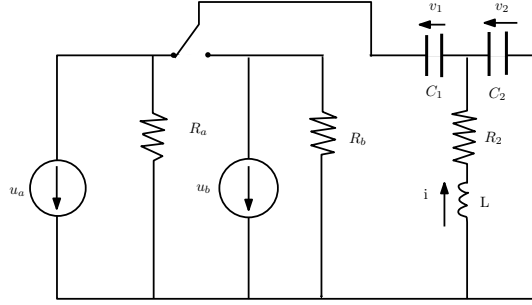


Figura 3.1: Um circuito elétrico com uma fonte de força descontínua. A força da direita (u_b , R_b) é selecionada quando v_2 é positivo, enquanto a força da esquerda (u_a , R_a) é selecionada quando v_2 é negativo

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_b}{C_2} - \frac{v_1+v_2}{R_b C_2} + \frac{i}{C_2} \\ -\frac{u_b}{C_1} - \frac{v_1+v_2}{R_b C_1} + \frac{i}{C_1} \\ -\frac{v_2}{L} - \frac{i R_2}{L} \end{pmatrix} \text{ se } v_2 > 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u_a}{C_2} - \frac{v_1+v_2}{R_a C_2} + \frac{i}{C_2} \\ -\frac{u_a}{C_1} - \frac{v_1+v_2}{R_a C_1} + \frac{i}{C_1} \\ -\frac{v_2}{L} - \frac{i R_2}{L} \end{pmatrix} \text{ se } v_2 < 0 \quad (3.2)$$

Aqui, $M = \{v_2 = 0\}$ é a variedade de descontinuidade e portanto podemos tomar $h(v_2, i, v_1) = v_2$ como a função tal que $h^{-1}(0) = M$.

Temos então que as linhas de tangência $(\mathcal{L}_f + h|_{v_2=0}) = 0$ e $(\mathcal{L}_f - h|_{v_2=0}) = 0$ dos 2 campos vetoriais sobre o plano M tem equações:

$$i = u_b + \frac{v_1}{R_b} \text{ se } v_2 > 0 \quad \text{e} \quad i = u_a + \frac{v_1}{R_a} \text{ se } v_2 < 0 \quad (3.3)$$

Essas linhas se intersectam em uma singularidade dobra-dobra em

$$i = \frac{u_a R_a - u_b R_b}{R_a - R_b}, \quad v_1 = (u_b - u_a) \frac{R_a R_b}{R_b - R_a}. \quad (3.4)$$

Observe que na singularidade:

$$\mathcal{L}_{f^+}^2 h = \frac{(u_b R_b - u_a R_a)(L - R_2 R_b C_1)}{C_2 R_b (R_b - R_a) C_1 L} \quad (3.5a)$$

$$\mathcal{L}_{f^+}^2 h = \frac{(u_b R_b - u_a R_a)(L - R_2 R_a C_1)}{C_2 R_a (R_b - R_a) C_1 L} \quad (3.5b)$$

Assim, a dobra-dobra é uma singularidade Teixeira se as duas seguintes condições são satisfeitas:

$$\frac{u_a R_a - u_b R_b}{R_a R_b C_1 C_2} < 0, \quad \text{e} \quad \frac{C_1 R_2 R_a R_b - R_b L}{C_1 R_2 R_a R_b - R_a L} < 0. \quad (3.6)$$

Tomemos, por exemplo, $R_a = 0.1$, $R_b = 10$, $R_2 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $L = 1$, $u_a = 1$, $u_b = 2$.

3.2 Um circuito resistivo com memória

Circuito elétrico resistivo com memória é um circuito elétrico que além da tríade de elementos fundamentais (o resistor, o capacitor e o indutor), possui um quarto elemento elétrico que é chamado de “memristor” ou resistor com memória. Na prática, esse quarto elemento atua como um resistor cujo valor de resistência elétrica pode variar segundo a corrente elétrica que passa por ele, e que o mesmo se lembraria do valor da corrente mesmo depois dela ter cessado.

O próximo exemplo é uma leve modificação do oscilador memristor canônico de terceira ordem estudado em ([25]). O circuito está esquematizado na figura (3.2).

A dinâmica do circuito pode ser descrita pelo modelo:

$$\begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{C} - \frac{W(\varphi, v)}{C} v \\ \frac{Ri}{L} - \frac{v}{L} \\ v \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

onde nós definimos $\sigma(v, \varphi) := c_0 + c_1 v + \varphi$ e

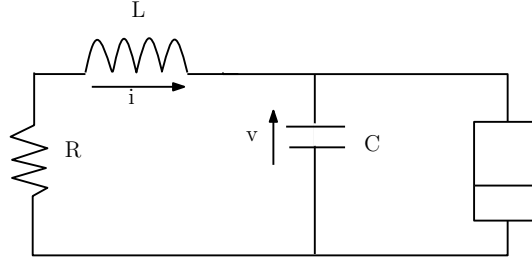


Figura 3.2: Um oscilador memristive canônico de terceira ordem

$$W(\varphi, v) = \begin{cases} a^+ \varphi & \text{se } \sigma(v, \varphi) > 0 \\ a^- \varphi & \text{se } \sigma(v, \varphi) < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Assim, a variedade de descontinuidade nesse caso é $M = \{(v, i, \varphi); c_0 + c_1 v + \varphi = 0\}$ e $h(v, i, \varphi) = \sigma(v, \varphi)$.

Observe que:

$$\mathcal{L}_{f+h} = \frac{c_1}{C} i - \frac{a^+ c_1}{C} \varphi v + v \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{f-h} = \frac{c_1}{C} i - \frac{a^- c_1}{C} \varphi v + v \quad (3.9)$$

Assim, as linhas de tangência $(\mathcal{L}_{f+h}|_{\sigma=0}) = 0$ e $(\mathcal{L}_{f-h}|_{\sigma=0}) = 0$ dos 2 campos vetoriais sobre o plano M tem equações:

$$i = \frac{v}{c_1} (a^+ c_1^2 v + a^+ c_1 c_0 - C) \quad \text{se } \sigma(v, \varphi) > 0, \quad (3.10a)$$

$$i = \frac{v}{c_1} (a^- c_1^2 v + a^- c_1 c_0 - C) \quad \text{se } \sigma(v, \varphi) < 0 \quad (3.10b)$$

Essas curvas se intersectam nos pontos

$$p_1 = (0, 0, -c_0)$$

$$p_2 = \left(\frac{-c_0}{c_1}, \frac{c_0 C}{c_1^2}, 0 \right)$$

Agora,

$$\mathcal{L}_{f+h}^2 = \left(-\frac{a^+ c_1}{C} \varphi + 1 \right) \left(\frac{1}{C} i - \frac{a^+}{C} \varphi v \right) + \frac{c_1}{C} \left(\frac{R}{L} i - \frac{1}{L} v \right) - \frac{a^+ c_1}{C} v^2 \quad (3.11)$$

$$\mathcal{L}_{f-h}^2 = \left(-\frac{a^- c_1}{C} \varphi + 1 \right) \left(\frac{1}{C} i - \frac{a^-}{C} \varphi v \right) + \frac{c_1}{C} \left(\frac{R}{L} i - \frac{1}{L} v \right) - \frac{a^- c_1}{C} v^2 \quad (3.12)$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{f^+}^2 h(p_1) = 0 = \mathcal{L}_{f^-}^2 h(p_1) \quad (3.13)$$

e

$$\mathcal{L}_{f^+}^2 h(p_2) = \frac{c_0(CL + RCc_1 + c_1^2 - a^+c_1c_0L)}{LCc_1^2} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{L}_{f^-}^2 h(p_2) = \frac{c_0(CL + RCc_1 + c_1^2 - a^-c_1c_0L)}{LCc_1^2} \quad (3.15)$$

Dessa forma o primeiro ponto não é uma singularidade dobra-dobra, enquanto o segundo por uma escolha adequada de parâmetros é. Mais precisamente, podemos escolher valores de parâmetros de forma que p_2 seja uma singularidade Teixeira.

De fato, nesse caso, se $T = (dh(p_2), d(\mathcal{L}_{f^+})(p_2), d(\mathcal{L}_{f^-})(p_2))$ então

$$\det(T) = \frac{c_1^2 c_0}{c^2} (a^- - a^+) \quad (3.16)$$

e, portanto se $c_1, c_0 \neq 0$, temos que a condição de transversalidade ($\det(T) \neq 0$) é satisfeita.

Assim, p_2 corresponderá uma singularidade Teixeira se os parâmetros do circuito são tais que:

$$a^- < \frac{CL + c_1 RC + c_1^2}{c_0 c_1 L} < a^+ \quad (3.17)$$

assumindo que $c_0 > 0$ e $c_0 c_1 L > 0$.

APÊNDICE A - UMA EXPRESSÃO EXPLÍCITA PARA OS CAMPOS VETORIAIS

Para encontrar a forma normal (2.10), observamos primeiramente que na singularidade a componente x_0 de ambos os campos vetoriais se anulam, e localmente nós podemos expandir para primeira ordem nas coordenadas, dando:

$$f^+(x) = f^+(0) + Df^+(0)x + O(2) \quad \text{e} \quad f^-(x) = f^-(0) + Df^-(0)x + O(2), \quad (3.18)$$

onde,

$$f^+(0) = (0, c_1^+, c_2^+) \quad \text{e} \quad f^-(0) = (0, c_1^-, c_2^-) \quad (3.19)$$

$$Df^+(0) = (a_{i,j}^+) \quad \text{e} \quad Df^-(0) = (a_{i,j}^-) \quad (3.20)$$

Assim,

$$\mathcal{L}_{f^+}^2 h(0) = a_{12}^+ c_1^+ + a_{13}^+ c_2^+ \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{f^-}^2 h(0) = a_{12}^- c_1^- + a_{13}^- c_2^-.$$

Observe que se $c^\pm = (c_1^\pm, c_2^\pm)$ forem paralelos, $f^\pm(0)$ também serão e como estamos

interessados somente em tangências quadráticas, vamos então assumir que $c^\pm = (c_1^\pm, c_2^\pm)$ não são paralelos.

Da mesma forma a transversalidade dos conjuntos S^\pm exige que $a^\pm = (a_{12}^\pm, a_{13}^\pm)$ não são paralelos. De fato, se $a^\pm = (a_{12}^\pm, a_{13}^\pm)$ forem paralelos teremos que $a_{12}^+ a_{13}^- = a_{12}^- a_{13}^+$. No entanto, por (2.8) $\det\{dh(0), d\mathcal{L}_{f^+}h(0), \mathcal{L}_{f^+}h(0)\} = a_{12}^+ a_{13}^- - a_{12}^- a_{13}^+ \neq 0$.

Agora faremos uma troca de coordenadas de forma que S^\pm tome a forma (2.9).

Primeiro, observe que existem únicos (a menos de sinal) vetores unitários $(0, s^\pm)$ normais a S^\pm .

Os vetores s^\pm satisfazem

$$s^\pm \cdot a^\pm = 0,$$

e a escolha de coordenadas dando (2.9) é,

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0 a_{11}^+ - x_1 a_{12}^+ - x_2 a_{13}^+ \\ x_2 &= x_0 a_{11}^- + x_1 a_{12}^- + x_2 a_{13}^- \end{aligned}$$

Essa é uma transformação de coordenadas diferenciável dada a condição

$$\begin{vmatrix} s^+ \cdot a^+ & s^+ \cdot a^- \\ s^- \cdot a^+ & s^- \cdot a^- \end{vmatrix} \neq 0.$$

A análise depois aplica-se numa vizinhança da singularidade satisfazendo:

$$s^+ \cdot (x_0 a_{21}^\pm + x_1 a_{22}^\pm + x_2 a_{23}^\pm, x_0 a_{31}^\pm + x_1 a_{32}^\pm + x_2 a_{33}^\pm) \ll c_1^\pm,$$

$$s^- \cdot (x_0 a_{21}^\pm + x_1 a_{22}^\pm + x_2 a_{23}^\pm, x_0 a_{31}^\pm + x_1 a_{32}^\pm + x_2 a_{33}^\pm) \ll c_2^\pm.$$

Escrevendo,

$$f^+ \approx (-x_1, c_1^+, c_2^+) \quad \text{e} \quad f^- \approx (x_2, c_1^-, c_2^-),$$

podemos reescalonar o tempo separadamente acima e abaixo da variedade de descontinuidade, isso troca as velocidades das trajetórias de f^+ e f^- mas preserva seus retratos de fase e também o de f^s .

Façamos então $t \mapsto \frac{t}{c_1^+}$ para $x_0 > 0$ e $t \mapsto \frac{t}{c_2^-}$ para $x_0 < 0$, resultando em

$$f^+ \approx (-x_1, 1, V^+) \quad \text{e} \quad f^- \approx (x_2, V^-, 1).$$

APÊNDICE B - FORMA NORMAL DE REDUÇÃO DO CAMPO VETORIAL DESLIZANTE DE UMA SINGULARIDADE TEIXEIRA

A forma normal (2.16) é obtida multiplicando (2.13) pela quantidade $(V^+ + \frac{1}{V^+})$, e então tomando a dinâmica sobre a direção $(-V^+, 1)$ do autovetor singular, definindo $x = pu$ e $\dot{u} = q\tilde{f}^s(pu)$, com p e q respectivamente os autovetores da direita e da esquerda da jacobiana de \tilde{f}^s na origem, quando $V^+V^- = 1$ e $V^+, V^- < 0$. Chamando $a_{i,j}^+$ e $a_{i,j}^-$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, os coeficientes da Jacobiana de f^+ e f^- , para essa transformação nós obtemos $\dot{u} = (V^+V^- - 1)u + a_2u^2 + O(u^3)$, com

$$a_2 = a_{22}^+V^+ - a_{23}^+ - a_{32}^+ + \frac{a_{33}^+}{V^+} - a_{22}^-(V^+)^2 + a_{23}^-V^+ + a_{32}^-V^+ - a_{33}^-.$$

APÊNDICE C - PERTUBAÇÃO GENÉRICA DA APLICAÇÃO DE POINCARÉ

Assumindo analiticidade das aplicações retorno, ϕ^+ pode ser expandida em torno da singularidade produzindo

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto -x_1 + \alpha_{20}x_1^2 + \alpha_{11}x_1x_2 + \alpha_{02}x_2^2 + \alpha_{30}x_1^3 + \alpha_{21}x_1^2x_2 + \alpha_{12}x_1x_2^2 + \alpha_{03}x_2^3 + O(\|x_1, x_2\|^4), \\ x_2 &\longmapsto -2V^+x_1 + x_2 + \beta_{20}x_1^2 + \beta_{11}x_1x_2 + \beta_{02}x_2^2 + \beta_{30}x_1^3 + \beta_{21}x_1^2x_2 + \beta_{12}x_1x_2^2 + \beta_{03}x_2^3 + \\ &O(\|x_1, x_2\|^4), \end{aligned}$$

enquanto ϕ^- é igual a

$$\begin{aligned} x_1 &\longmapsto x_1 - 2V^-x_2 + \gamma_{20}x_1^2 + \gamma_{11}x_1x_2 + \gamma_{02}x_2^2 + \gamma_{30}x_1^3 + \gamma_{21}x_1^2x_2 + \gamma_{12}x_1x_2^2 + \gamma_{03}x_2^3 + \\ &O(\|x_1, x_2\|^4), \\ x_2 &\longmapsto -x_2 + \delta_{20}x_1^2 + \delta_{11}x_1x_2 + \delta_{02}x_2^2 + \delta_{30}x_1^3 + \delta_{21}x_1^2x_2 + \delta_{12}x_1x_2^2 + \delta_{03}x_2^3 + O(\|x_1, x_2\|^4), \end{aligned}$$

Entretanto, os possíveis valores dos coeficientes das aplicações são restritos, pois as duas aplicações são involuções e o fluxo induzido é quadraticamente tangente aos eixos x_1 e x_2 .

Impondo então que ϕ^+ e ϕ^- preservam os eixos x_2 e x_1 , respectivamente, temos que:

$$\alpha_{02} = \alpha_{03} = \beta_{02} = \beta_{03} = \gamma_{20} = \gamma_{30} = \delta_{20} = \delta_{30} = 0$$

Pela condição de involução, podemos impor que $\phi^+ \circ \phi^+$ e $\phi^- \circ \phi^-$, truncados para terceira ordem, é a identidade. Daí concluímos que:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \delta_{11} = \delta_{21} = 0$$

$$\alpha_{30} = -(\alpha_{20}^2 + \alpha_{21}V^+)$$

$$\beta_{21} = \frac{1}{2}(-\alpha_{20}\beta_{11} + \beta_{11}^2) + (\alpha_{21} - 2\beta_{12})V^+$$

$$\beta_{20} = (\alpha_{20} - \beta_{11})V^+$$

$$\gamma_{02} = (\delta_{02} - \gamma_{11})V^-$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2}(-\delta_{02}\gamma_{11} + \gamma_{11}^2) + (\delta_{12} - 2\gamma_{21})V^-$$

$$\delta_{03} = -(\delta_{02}^2 + \delta_{12}V^-)$$

Assim, reduzimos o número de coeficientes independentes de cada mapa de 15 para 6, produzindo:

$$x_1 \longmapsto -x_1 + \alpha_{20}x_1^2 + \alpha_{21}x_1^2x_2 - (\alpha_{20}^2 + \alpha_{21}V^+)x_1^3 + O(\|(x_1, x_2)\|^4),$$

$$x_2 \longmapsto x_2 - 2V^+x_1 + \beta_{11}x_1x_2 + (\alpha_{20} - \beta_{11})V^+x_1^2 + \beta_{12}x_1x_2^2 + \left(\frac{1}{2}(-\alpha_{20}\beta_{11} + \beta_{11}^2) + (\alpha_{21} - 2\beta_{12})V^+\right)x_1^2x_2 + \beta_{30}x_1^3 + O(\|(x_1, x_2)\|^4)$$

para ϕ^+ e

$$x_1 \longmapsto x_1 - 2V^-x_2 + \gamma_{11}x_1x_2 + (\delta_{02} - \gamma_{11})V^-x_2^2 + \gamma_{21}x_1^2x_2 + \left(\frac{1}{2}(-\delta_{02}\gamma_{11} + \gamma_{11}^2) + (\delta_{12} - 2\gamma_{21})V^-\right)x_1x_2^2 + \gamma_{03}x_2^3 + O(\|(x_1, x_2)\|^4),$$

$$x_2 \longmapsto -x_2 + \delta_{02}x_2^2 + \delta_{12}x_1x_2^2 - (\delta_{02}^2 + \delta_{12}V^-)x_2^3 + O(\|(x_1, x_2)\|^4)$$

para ϕ^- .

Finalmente, compondo $\phi^- \circ \phi^+$, nós obtemos a expansão de terceira ordem geral da aplicação de Poincaré ϕ :

$$x_1 \longmapsto -x_1 + 2V^-x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 + O(\|(x_1, x_2)\|^4),$$

$$x_2 \longmapsto -2V^+x_1 + (-1 + 4V^+V^-)x_2 + b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 + O(\|(x_1, x_2)\|^4),$$

com

$$a_{20} = \alpha_{20},$$

$$a_{11} = -\gamma_{11} - 4\alpha_{20}V^-,$$

$$a_{02} = V^-(-\delta_{02} + \gamma_{11} + 4\alpha_{20}V^-),$$

$$a_{30} = -(\alpha_{20}^2 + \alpha_{21}V^+),$$

$$a_{21} = 2\alpha_{20}\gamma_{11} - \gamma_{21} + 6\alpha_{20}^2V^- + \alpha_{21}(-1 + 6V^-V^+),$$

$$a_{12} = -\frac{\gamma_{11}^2}{2} - 6\alpha_{20}\gamma_{11}V^- + \frac{\delta_{02}}{2}(\gamma_{11} + 4\alpha_{20}V^-) - V^-(-4\alpha_{21} + \delta_{12} - 2\gamma_{21} + 12\alpha_{20}^2V^- + 12\alpha_{21}V^+V^-),$$

$$a_{03} = -\gamma_{03} + 4(V^-)^2(\alpha_{20}(-\delta_{02} + \gamma_{11} + 2\alpha_{20}V^-) + \alpha_{21}(-1 + 2V^-V^+)),$$

$$b_{20} = (-\beta_{11} + \alpha_{20}V^+),$$

$$b_{11} = -2(\gamma_{11} + 2\alpha_{20}V^-)V^+ + \beta_{11}(-1 + 4V^+V^-),$$

$$b_{02} = \delta_{02} - 2\delta_{02}V^+V^- + 2V^-(\beta_{11} - 2\beta_{11}V^+V^- + (\gamma_{11} + 2\alpha_{20}V^-)V^+),$$

$$b_{30} = \beta_{30},$$

$$b_{21} = -\frac{\beta_{11}^2}{2} - 6\beta_{30}V^- - \alpha_{21}V^+ + 2\beta_{12}V^+ - 2\beta_{11}\gamma_{11}V^+ - 2\gamma_{21}V^+ + \frac{\alpha_{20}}{2}(\beta_{11} + 4\gamma_{11}V^+),$$

$$b_{12} = \beta_{12} + \delta_{12} + 2\beta_{11}^2V^- + 12\beta_{30}(V^-)^2 + \delta_{02}\gamma_{11}V^+ - \gamma_{11}^2V^+ + 4\alpha_{21}V^-V^+ - 8\beta_{12}V^-V^+ + 2\alpha_{20}\delta_{02}V^-V^+ - 2\delta_{12}V^-V^+ - 6\delta_{20}\gamma_{11}V^-V^+ + 4\gamma_{21}V^-V^+ + \beta_{11}(\delta_{02} - \gamma_{11} - 2\alpha_{20}V^- - 2\delta_{02}V^-V^+ + 6\gamma_{11}V^-V^+),$$

$$b_{03} = -\delta_{02}^2 - 2\beta_{12}V^- - 3\beta_{11}\delta_{02}V^- - \delta_{12}V^- + \beta_{11}\gamma_{11}V^- + 2\alpha_{20}\beta_{11}(V^-)^2 - 2\beta_{11}^2(V^-)^2 - 8\beta_{30}(V^-)^3 - 2\gamma_{03}V^+ - 4\alpha_{21}(V^-)^2V^+ + 8\beta_{12}(V^-)^2V^+ - 4\alpha_{20}\delta_{02}(V^-)^2V^+ + 4\beta_{11}\delta_{02}(V^-)^2V^+ + 4\alpha_{20}\gamma_{11}(V^-)^2V^+ - 4\beta_{11}\gamma_{11}(V^-)^2V^+.$$

APÊNDICE D - FORMA NORMAL DA APLICAÇÃO DE POINCARÉ

Quando

$$p := V^+V^- - 1 = 0,$$

a aplicação de Poincaré tem um ponto fixo, na singularidade, com uma linearização não-semisimples duplo 1.

Isso pode ser colocado em uma forma normal de ressonância 1 : 1 que é simétrica, devido às restrições impostas pelo pressuposto de involução (veja Apêndice C).

A forma normal da aplicação (2.20) é encontrada, através de uma transformação linear seguida por uma sequência de transformações próxima a identidade, eliminando os termos não ressonantes de diferentes graus iterativamente.

Primeiro, a parte linear da aplicação (2.20) é simplificada através de uma troca de variáveis dependendo dos parâmetros

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4V^+V^- & 1 \\ -2V^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

tornando-se

$$\begin{aligned} \xi_1 &\mapsto \xi_1 + \xi_2 \\ \xi_2 &\mapsto 4p\xi_1 + (1 + 4p)\xi_2 \end{aligned}$$

Isso corresponde a forma de Jordan do sistema linearizado quando $p = 0$.

Nas coordenadas (x_1, x_2) e na bifurcação, o eixo coordenado ξ_1 aponta na direção do autovetor singular $(-1, V^+)$ de $\phi|_{p=0}$, enquanto o eixo ξ_2 aponta na direção x_1 . Assim, a troca de coordenadas alinha o autovetor singular com a direção ξ_1 , e nas novas coordenadas o eixo ξ_1 está estritamente dentro da região costurante. Isso é uma observação importantes, pois os mapas costurantes está definido somente nas regiões escapante e costurantes.

Agora, a troca de variáveis de segunda ordem, próximo a identidade

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \mu_1 + c_{20}\mu_1^2, \\ \xi_2 &= \mu_2 + d_{20}\mu_1^2 + d_{11}\mu_1\mu_2 + d_{02}\mu_2^2,\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}c_{20} &= -\frac{b_{20}+2b_{02}(V^+)^2+b_{11}V^+-a_{20}V^+}{V^+(12p+16p^2+2)}, \\ d_{20} &= \frac{16b_{20}p+4b_{20}+16b_{20}p^2+4b_{02}(V^+)^2+4b_{11}V^++8V^+b_{11}p}{2V^+}, \\ d_{11} &= -\frac{6b_{20}+4b_{02}(V^+)^2+4b_{11}V^+-2a_{20}V^++32b_{20}p+80b_{20}p^2+64b_{20}p^3+12V^+b_{11}p+16V^+b_{11}p^2}{V^+(12p+16p^2+2)}, \\ d_{02} &= \frac{-4b_{02}(V^+)^2-2b_{11}V^++2a_{20}V^++12b_{20}p+16b_{20}p^2}{2V^+(12p+16p^2+2)}\end{aligned}$$

simplifica os termos quadráticos, obtendo

$$\begin{aligned}\mu_1 &\mapsto \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 &\mapsto 4p\mu_1 + (1 + 4p)\mu_2 + B_{20}\mu_1^2 + B_{11}\mu_1\mu_2\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}B_{20}|_{p=0} &= 4(a_{20} - b_{11} - b_{20}V^- + a_{11}V^+ - b_{02}V^+ + a_{02}(V^+)^2) \\ B_{11}|_{p=0} &= -4b_{02}V^+ - 2b_{11} - 2a_{11}V^+ - 4a_{20}\end{aligned}$$

Devido a condição de involução, o termo B_{20} é identicamente nulo próximo a $p = 0$, e essa expansão em segunda ordem é estruturalmente instável. Para obter a forma topológica da aplicação de Poincaré, a expansão em terceira ordem deve ser considerada.

Mais uma vez, através de uma transformação próxima a identidade

$$\begin{aligned}\mu_1 &\mapsto u_1 + e_{30}u_1^3 + e_{21}u_1^2u_2 \\ \mu_2 &\mapsto u_2 + f_{30}u_1^3 + f_{21}u_1^2u_2 + f_{03}u_2^3\end{aligned}$$

nós simplificamos os termos de grau 3 na expansão da aplicação, obtendo a forma normal

$$\begin{aligned}u_1 &= u_1 + u_2 + O(\|u\|^4), \\ u_2 &= 4pu_1 + (1 + 4p)u_2 + B_{11}u_1u_2 + B_{30}u_1^3 + B_{21}u_1^2u_2 + B_{03}u_2^3 + O(\|u\|^4).\end{aligned}$$

APÊNDICE E - APROXIMAÇÃO POR UM FLUXO

Um fluxo cujo shift tempo-unitário aproxima a aplicação (2.23) é facilmente encontrada por meio de sucessivas iterações de Picard. Para $p = 0$, isto é

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 - \frac{B_{11}}{2}u_1u_2 + \frac{B_{11}}{3}u_2^2 + C_{30}u_1^3 + C_{21}u_1^2u_2 + C_{12}u_1u_2^2 + C_{03}u_2^3 \\ u_2 &= B_{11}u_1u_2 - \frac{B_{11}}{2}u_2^2 + D_{30}u_1^3 + D_{21}u_1^2u_2 + D_{12}u_1u_2^2 + D_{03}u_2^3 \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} C_{30} &= -\frac{B_{30}}{2}, \quad C_{21} = \frac{B_{11}^2}{3} - \frac{B_{21}}{2} + B_{30}, \quad C_{12} = -\frac{2B_{11}^2}{3} + \frac{2B_{21}}{3} - \frac{B_{30}}{2}, \\ C_{03} &= -\frac{B_{03}}{2} + \frac{3B_{11}^2}{10} - \frac{B_{21}}{6} + \frac{B_{30}}{30}, \quad D_{30} = B_{30}, \quad D_{21} = -\frac{B_{11}^2}{2} + B_{21} - \frac{3B_{30}}{2}, \\ D_{12} &= \frac{5B_{11}^2}{6} - B_{21} + \frac{B_{30}}{2}, \quad D_{03} = B_{03} - \frac{B_{11}^2}{3} + \frac{B_{21}}{6}. \end{aligned}$$

Os termos quadráticos podem ser simplificados seguindo a redução à forma normal genérica de Bogdanov-Takens, definindo

$$\begin{aligned} u_1 &= \xi_1 \\ u_2 &= \xi_2 + \frac{B_{11}}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{B_{11}}{30}\xi_2^2, \end{aligned}$$

multiplicando o fluxo resultante por uma função escalar $1 + B_{11}\xi_1$, e então definindo

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mu_1, \\ \xi_2 &= \mu_2 - B_{11}\xi_1\xi_2. \end{aligned}$$

Então os termos cúbicos não ressonantes são eliminados definindo

$$\begin{aligned}\mu_1 &= v_1 + \frac{1}{36}(2B_{11}^2 - 12B_{21} + 15B_{30})v_1^3 + \frac{1}{12}(6B_{03} - 5B_{11}^2 + 5B_{21} - 3B_{30})v_1^2v_2, \\ \mu_2 &= v_2 + \frac{B_{30}}{2} + \frac{1}{12}(13B_{11}^2 - 6B_{21} + 3B_{30})v_1^2v_2 + \frac{1}{6}(6B_{03} - 4B_{11}^2 + B_{21})v_1v_2^2 + \\ &\quad \frac{1}{90}(45B_{03} - 7B_{11}^2 + 15B_{21} - 3B_{30})v_2^3.\end{aligned}$$

O fluxo resultante tem equações

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_1 + O(\|v\|^4), \\ \dot{v}_2 &= B_{11}v_1v_2 + B_{30}v_1^3 + \left(\frac{B_{11}^2}{2} + B_{21} - 3B_{30}\right)v_1^2v_2 + O(\|v\|^4).\end{aligned}$$

APÊNDICE F - FORMA NORMAL DE REDUÇÃO DO CAMPO VETORIAL DESLIZANTE DE UMA DOBRA-DOBRA VISÍVEL-INVISÍVEL

A forma normal (2.39) é obtida da mesma maneira do Apêndice B, multiplicando \tilde{f}^s pela quantidade $(V^+ - \frac{1}{V^+})$, e então tomando a dinâmica sobre a direção $(V^+, 1)$ do autovetor singular. O coeficiente do termo de segunda ordem em (2.39) é

$$a_2 = -a_{22}^+ V^+ - a_{23}^+ + a_{32}^+ + \frac{a_{33}^+}{V^+} - a_{22}^- (V^+)^2 - a_{23}^- V^+ + a_{32}^- V^+ + a_{33}^-.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. COLOMBO AND M.R. JEFFREY, *Nondeterministic Chaos, and the Two-fold Singularity in Piecewise Smooth Flows*, SIAM J. Applied Dynamical Systems **vol. 10(2)**, 423-451, (2011).
- [2] A. F. FILIPPOV, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer (1988).
- [3] M. A. TEIXEIRA, *Local and Simultaneous Structural Stability of Certain Diffeomorphisms*, Lectures Notes in Mathematics, **898**, 361–371, Springer-Verlag, Berlin/New York, (1982).
- [4] M. A. TEIXEIRA, *Generic bifurcation in manifolds with boundary*, J. Differential Equations **25**, 65-89, (1977).
- [5] M. R. JEFFREY AND A.COLOMBO, *The two-fold singularity of discontinuous vector fields*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **8**, 624-640, (2009).
- [6] Y. A. KUZNETSOV, *Practical computation of normal forms on center manifolds at degenerate Bogdanov-Takens bifurcations*, International Journal of Bifurcations and Chaos, **15**, 3535-3546, (2005).
- [7] Y. A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, (2004)

- [8] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE, J. SOTOMAYOR, AND H. ZOLADEK, *Bifurcation of Planar Vector Fields: Nilpotent Singularities and Abelian Integrals*, Springer-Verlag, (1991).
- [9] M.A. TEIXEIRA, *Stability Conditions for Discontinuous Vector Fields*, JDE **v.88**, 15–29, (1990).
- [10] M.A. TEIXEIRA AND J. SOTOMAYOR, *Vector fields near the boundary of a 3-manifold*, Lect. Notes in Math., **331**, 169-195, Springer Verlag, (1988).
- [11] D.J. TONON, *Sistemas de Filippov em variedades tridimensionais*, Tese de Doutorado , IMECC-UNICAMP, (2010).
- [12] J. MURDOK, *Normal Forms and Unfolding for Local Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, (2003).
- [13] P. T. PIIRONEN, Y. A. KUZNETSOV, *An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions*, ACM Trans. Math. Software, **34**, (2008), article 13.
- [14] M.A. TEIXEIRA , *Perturbation Theory for Non-smooth Systems*, In Meyers, Robert (Ed.) - A Encyclopedia of Complexity and Systems Science **22**, Springer, New York, (2009).
- [15] M. DI BERNARDO, A. COLOMBO, E. FOSSAS, *Two-fold singularity in nonsmooth electrical systems*, International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS) , 2713–2716, (2011).
- [16] M. DI BERNARDO, C.J. BUDD, A.R. CHAMPNEYS, AND P. KOWALCZYK, *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin , (2008).
- [17] M. KUNZE, *Non-Smooth Dynamical Systems*, Lecture Notes in Math. 1744, Springer-Verlag, Berlin, (2000).
- [18] D.M.W. LEENAERTS AND W.M.G.VAN BOKHOVEN, *Piecewise Linear Modelling and Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, (1998).

- [19] V.I. ARNOLD, V.V.GORYUNOV, O.V. LYASHKO, AND V.A. VASILIEV, *Dynamical Systems VI: Singularity Theory I. Local and Global Theory*, Encyclopaedia Math. Sci. 6, Springer-Verlag, Berlin, (1993).
- [20] E. CONTE, A. FEDERICI, AND J.P. ZBILUT, *On a simple case of possible non-deterministic chaotic behavior in compartment theory of biological observables*, Chaos Solitons Fractals, 22, pp.277-284, (2004).
- [21] J.D. MEISS, *Differential Dynamical Systems*, SIAM Monogr. Math. Comput. 14, Philadelphia, (2007).
- [22] A.A. ANDRONOV, S.E.KHAIKIN AND A.A. VITT, *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, Oxford, UK, (1965).
- [23] R. CASEY, H. DE JONG, AND J.L. GOUZE, *Piecewise-linear models of generic regulatory networks: Equilibria and their stability*, J. Math. Biol.,52, pp. 27-56, (2006).
- [24] J.Y. HUNG, W.B. GAO, AND J.C. HUNG, *Variable structure control-a survey*, IEEE TRans. Industrial Eletronics, 40, pp. 2-22, (1993).
- [25] M. ITOH AND L. CHUA, *Memristive oscillators*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 18(11), pp. 3183-3206, (2008).
- [26] S. FERNÁNDEZ-GARCÍA, D. ANGULO GARCÍA, G. OLIVAR TOST, M. DI BERNARDO, M. R. JEFFREY, *Structural stability of the two-fold singularity*, (2012).