

MÉTODOS DE PROJEÇÃO PARA  
PROBLEMAS DE PORTE ENORME

*Luiz Amorim Carlos*



UNICAMP

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

C195m

6062/BC

CAMPINAS - SÃO PAULO  
BRASIL

MÉTODOS DE PROJEÇÃO PARA  
PROBLEMAS DE PORTE ENORME

Este exemplar corresponde a redação  
da tese defendida pelo Sr. LUIZ  
AMORIM CARLOS e aprovada pela comis  
são julgadora.

Campinas, 11 de dezembro 1984.

---

PROFESSOR DR. JOSÉ MÁRIO MARTÍNEZ  
ORIENTADOR

Dissertação apresentada ao Instituto  
de Matemática, Estatística e Ciência  
da Computação, UNICAMP, como requisi  
to parcial para a obtenção do título  
de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA -  
OTIMIZAÇÃO E PESQUISA OPERACIONAL.

12/84

*A Aleca e Talita*

## AGRADECIMENTOS

A meu pai (falecido) e a minha mãe, que sempre me incentivaram.

A Cristiano Mendes, pelo apoio e motivação.

A Martínez, pela orientação.

A UFRN - CAPES/PICD, pelo apoio financeiro.

A Marcus, pelo trabalho de datilografia.

A todos os colegas da UNICAMP que de alguma forma me ajudaram neste trabalho.

## ÍNDICE

1. CAPÍTULO I - O PROBLEMA DA TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA	
1.1 O MODELO LINEAR.....	01
1.2 O MODELO NÃO-LINEAR.....	03
1.3 PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS MODELOS.....	03
1.4 ALGUMAS ABORDAGENS PARA O PROBLEMA.....	04
1.4.1 O PROBLEMA DE FACTIBILIDADE.....	04
1.4.2 O PROBLEMA DE AJUSTE.....	04
2. CAPÍTULO II - O MÉTODO DAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS SUCESSIVAS (SOP)	
2.1 O OPERADOR PROJEÇÃO.....	05
2.2 O MÉTODO SOP.....	08
2.3 O MÉTODO DE KACZMARZ.....	16
2.4 O MÉTODO DA RELAXAÇÃO-(ART III).....	18
2.5 O MÉTODO DA RELAXAÇÃO DE AGMON, MOTZKIN e SCHOENBERG.....	20

3. CAPÍTULO III - O MÉTODO DAS PROJEÇÕES CÍCLICAS DO SUBGRADIENTE - (CSP)	
3.1 PRELIMINARES.....	22
3.2 O MÉTODO CSP.....	23
4. CAPÍTULO IV - UM MÉTODO DO TIPO KACZMARZ PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES	
4.1 O MÉTODO.....	31
4.2 CONVERGÊNCIA LOCAL DO MÉTODO.....	33
5. CONCLUSÃO.....	40
6. BIBLIOGRAFIA.....	41

## INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é oferecer aos iniciantes neste ramo de pesquisa, os elementos básicos com os quais terão que se familiarizar.

Os métodos usualmente utilizados na resolução de sistemas de equações, necessitam do armazenamento de uma fatoração da matriz representativa deste sistema - quando o sistema é não linear, estamos nos referindo à matriz jacobiana. Em consequência deste fato, a utilização destes métodos fica restrita a uma classe de problemas para os quais a capacidade física da máquina a ser utilizada, não é ultrapassada.

Neste trabalho, estamos interessados em métodos que se destinam à resolução de problemas, cuja dimensão exige economia de memória mesmo quando forem utilizadas técnicas que explorem a estrutura do problema. Para exemplificar, iniciamos com a formulação do problema da Tomografia Computadorizada, cuja matriz é da ordem de  $10^5$ .

Os métodos aqui estudados, se destinam à resolução de sistemas e inequações lineares ou não-lineares, (ver [4]).

## CAPÍTULO I

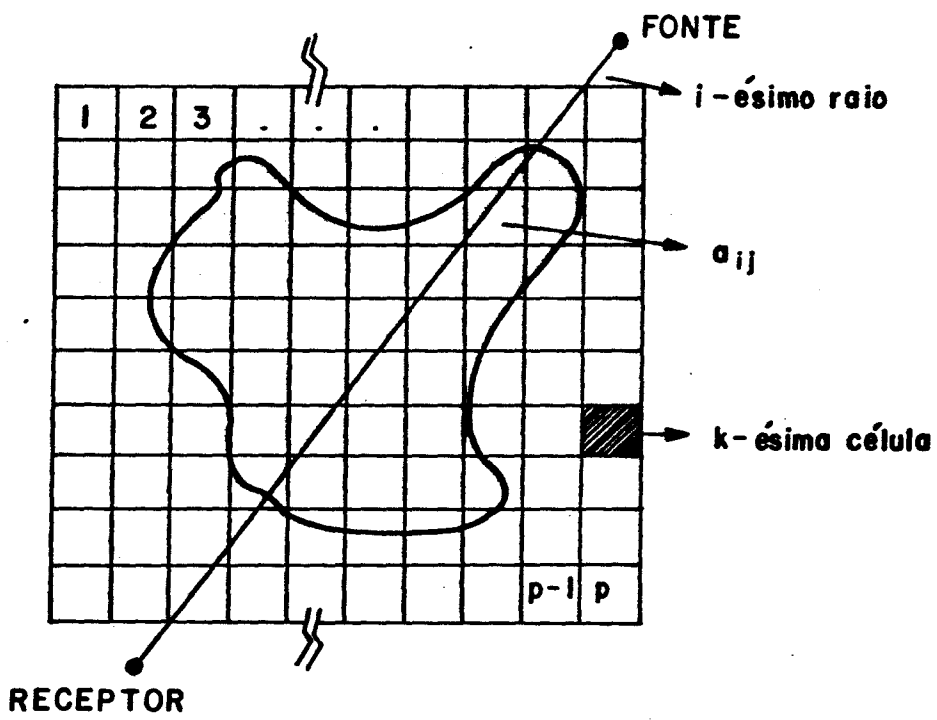
Neste capítulo, apresentamos o problema da Tomografia Computadorizada como forma de motivação à aplicabilidade dos métodos que são objetos de estudos deste trabalho.

Apresentamos inicialmente um modelo Linear e em seguida um modelo não-linear, para o problema em questão. Na terceira parte procuramos identificar as suas principais características e por último, estabelecemos algumas maneiras de abordar o problema, tendo em vista a sua resolução.

### 1.1 O MODELO LINEAR

Suponhamos que o corpo a ser reconstruído se mantenha fixo enquanto uma fonte e um receptor de raio-x, posicionados simetricamente em relação ao corpo, descrevem uma trajetória circular, ao longo da qual serão realizadas as medidas. Sobre o plano determinado por esta trajetória, que corresponde a uma seção transversal do corpo, estabelecemos uma malha constituída de elementos quadrados, que chamamos de células, ordenadas como na figura abaixo.





Assumimos que o coeficiente de atenuação linear do raio é constante em cada célula e que o seu valor na j-ésima célula é  $x_j$ . A interseção do segmento correspondente ao i-ésimo raio com a j-ésima célula, designamos por  $a_{ij}$ . Esta medida expressa a contribuição da j-ésima célula na atenuação total do i-ésimo raio.

Desta forma, obtemos o sistema

$$(1.1) \quad \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

onde  $b_i$  é o valor medido para o i-ésimo raio,  $m$  é o número total de medidas e  $p$  o número total de células.

## 1.2 O MODELO NÃO-LINEAR

No modelo Linear,  $b_i$  depende somente de  $x_j$ . Contudo seremos mais realistas se considerarmos que  $b_i$  dependa também da concentração na célula. Feito isto, obtemos o sistema

$$(1.2.1) \quad b_i = g_i(x_j, y_j; (j = 1, \dots, p)) \quad i = 1, \dots, m$$

Daí, se usarmos o modelo físico de emissão de raio-x, na sua forma discretizada [2], chegaremos ao sistema não-Linear

$$(1.2.2) \quad b_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} y_j \exp\left(-\sum_{k=1}^p a_{ik} x_k\right) \quad i = 1, \dots, m$$

onde  $a_{ij}$  é o mesmo usado em (1.1)

## 1.3 PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS MODELOS

Como o objetivo é obter a melhor representação possível para o corpo, fica evidente que a malha necessita ser suficientemente fina e isto equivale a um grande número de variáveis. Ao mesmo tempo, teremos também que realizar um grande número de medidas.

Se olharmos para a figura 1, veremos que cada raio atravessa somente um pequeno número de células e conseqüentemente o sistema é esparso.

#### 1.4 ALGUMAS ABORDAGENS PARA O PROBLEMA

##### 1.4.1 O Problema de Factibilidade

Se desejarmos que o sistema reflita a desconfiança que temos nas medidas e também a imprecisão decorrente da discretização, poderemos relaxar os sistemas (1.1) e (1.2.1) para obtermos

$$(1.4.1) \quad b_i - \epsilon_i \leq \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j \leq b_i + \epsilon_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$(1.4.2) \quad b_i - \epsilon_i \leq \sum_{j=1}^p a_{ij} y_j \exp\left(-\sum_{k=1}^p a_{ik} x_k\right) \leq b_i + \epsilon_i \quad i = 1, \dots, m$$

Chamamos (1.4.1) e (1.4.2) respectivamente de factibilidade de linear e factibilidade côncava-convexa.

##### 1.4.2 O Problema de Ajuste

Quando  $m > p$  em (1.4.1) e  $m > 2p$  em (1.4.2) teremos um problema de ajuste.

## CAPÍTULO II

Iniciamos este capítulo, definindo o operador projeção e em seguida demonstramos duas propriedades básicas deste operador. Na segunda parte, descrevemos o método das projeções ortogonais sucessivas (SOP) e fazemos a demonstração da sua convergência. Os últimos parágrafos tratam de casos particulares deste método.

### 2.1 O OPERADOR PROJEÇÃO

Seja  $Q$  um subconjunto convexo fechado de um espaço de Hilbert  $E$ . Considere o operador  $P_Q : E \rightarrow Q$  tal que

$$(2.1.1) \quad \|x - P_Q(x)\| = \inf_{y \in Q} \|x - y\| = \rho(x, Q)$$

onde  $\|\cdot\|$  provém do produto interno. Chamamos  $P_Q(x)$  de projeção ortogonal de  $x$  sobre  $Q$ .

Para simplificar a notação, sempre que possível, escreveremos  $P(x)$  em lugar de  $P_Q(x)$ .

LEMA 2.1.1 Para qualquer  $y \in Q$  temos,

$$(2.1.2) \quad \langle x - P(x), y - P(x) \rangle \leq 0, \quad x \in E$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica o produto interno definido em  $E$ .

### DEMONSTRAÇÃO

Tome  $y_\alpha = \alpha y + (1 - \alpha)P(x)$  com  $0 < \alpha < 1$  e  $y \in Q$ . Como  $Q$  é convexo  $y_\alpha \in Q$  e por (2.1.1)

$$\|x - P(x)\|^2 \leq \|x - y_\alpha\|^2.$$

Assim

$$\begin{aligned} \langle x - P(x), x - P(x) \rangle &\leq \langle x - P(x) - \alpha(y - P(x)), x - P(x) - \alpha(y - P(x)) \rangle = \\ &= \langle x - P(x), x - P(x) \rangle - 2\alpha \langle x - P(x), y - P(x) \rangle + \alpha^2 \langle y - P(x), y - P(x) \rangle \end{aligned}$$

e daí

$$\langle x - P(x), y - P(x) \rangle \leq \frac{\alpha}{2} \langle y - P(x), y - P(x) \rangle.$$

Fazendo  $\alpha \rightarrow 0$  obtemos

$$\langle x - P(x), y - P(x) \rangle \leq 0.$$

LEMA 2.1.2 O operador  $P$  é uma contração fraca, isto é, quaisquer que sejam  $x, y \in E$

$$(2.1.3) \quad \|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$$

DEMONSTRAÇÃO:

Pelo lema anterior obtemos as desigualdades

$$\langle x - P(x), P(y) - P(x) \rangle \leq 0$$

$$\langle y - P(y), P(x) - P(y) \rangle \leq 0$$

que somadas fornecem

$$\langle x - y, P(y) - P(x) \rangle + \|P(y) - P(x)\|^2 \leq 0.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle x - y, P(y) - P(x) \rangle + \|P(y) - P(x)\|^2 \geq \\ &\geq \|P(y) - P(x)\| (\|P(y) - P(x)\| - \|x - y\|) \end{aligned}$$

logo

$$\|P(y) - P(x)\| \leq \|x - y\|.$$

## 2.2 O MÉTODO SOP

Sejam  $I = \{1, \dots, m\}$  e  $(Q_i)_{i \in I}$  uma família de subconjuntos convexos fechados de  $E$  tal que  $\bigcap_{i \in I} Q_i = Q \neq \emptyset$ .

Estamos interessados em encontrar um ponto  $x \in Q$ . Com este objetivo, o SOP [6] determina uma sequência  $x^0, x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$  que é obtida através dos seguintes passos:

PASSO 1: Toma-se  $x^0 \in E$  arbitrário

PASSO 2: Escolhe-se  $i_k \in I$

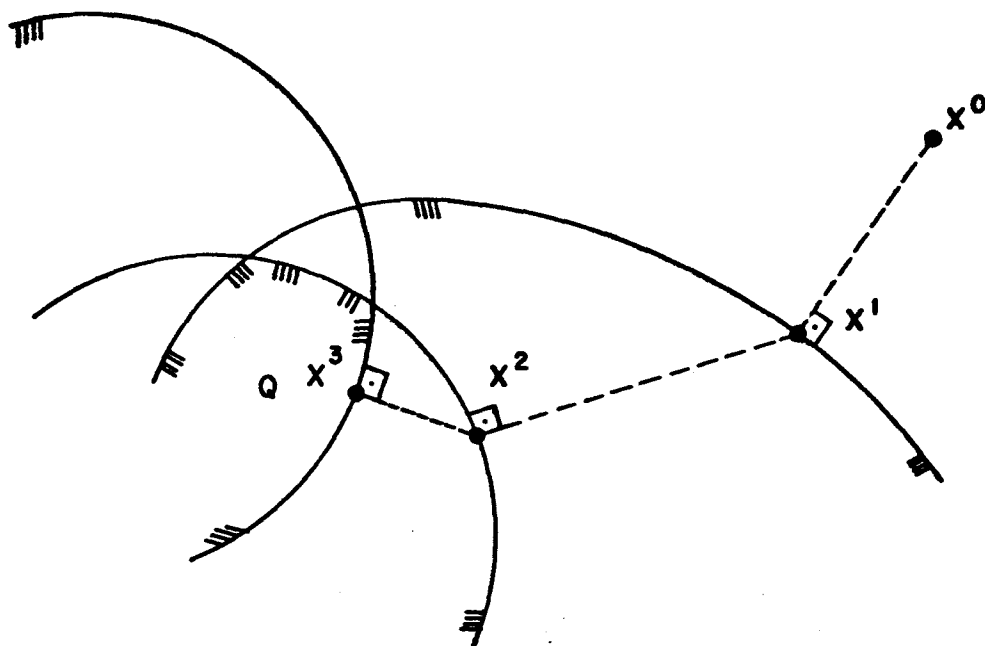
PASSO 3: Calcula-se

$$x^{k+1} = x^k + w_k [P_{Q_{i_k}}(x^k) - x^k]$$

com

$$w_k \in [\delta, 2 - \delta], \quad 0 < \delta < 1.$$

A figura abaixo ilustra o método, para  $w_k = 1$ .



Para realizar o passo 2, necessitamos de um critério de escolha. A seguir definiremos alguns critérios a serem utilizados, os quais chamaremos de controles.

i) Controle quase-cíclico - Dizemos que uma sequência  $(i_k)_{k=1}^{\infty}$  é um controle quase-cíclico sobre  $I$  se  $i_k \in I$  para todo  $k \geq 1$  e existe um inteiro positivo  $M$  tal que

$$I \subseteq \{i_{k+1}, \dots, i_{k+M}\}.$$

Quando  $M = m$  temos o controle cíclico.



ii) Controle cíclico - A sequência  $(i_k)_{k=1}^{\infty}$  é obtida escolhendo-se  $i_k$  tal que  $i_k = k \pmod{m} + 1$ , isto é,  $i_k - 1$  é congruente a  $k$  módulo  $m$ .

iii) Controle do máximo - Neste controle  $i_k \in I$  é tal que

$$\rho(x^k, Q_{i_k}) = \max_{i \in I} \rho(x^k, Q_i)$$

iv) Controle da tolerância - Seja  $(\tau_j)_{j=0}^{\infty}$  uma sequência de números reais positivos que converge para zero e suponha que  $x^k, i_{k-1}$  e  $j_{k-1}$  já foram determinados. Faça  $j_k = j_{k-1}$  e escolha  $i_k$  como sendo o primeiro elemento de

$$S_k = \{i_{k-1}+1, i_{k-1}+2, \dots, m-1, m, 1, 2, \dots, i_{k-1}\}$$

que satisfaz a  $\rho(x^k, Q_{i_k}) \geq \tau_{j_k}$ . Se esta condição não se verifica, faça  $j_k = j_{k-1} + 1$  e repita o procedimento.

**TEOREMA 2.2.1** Se  $E$  tem dimensão finita e  $Q \subset E$  é convexo fechado, então o método SOP converge para  $x^* \in Q$ , com qualquer um dos controles citados acima.

A demonstração deste teorema decorre dos lemas abaixo:

LEMA 2.2.1 Se  $i_k \in I$  é qualquer, temos

$$(2.2.1) \quad \|x^{k+1} - x\| \leq \|x^k - x\| \quad \forall x \in Q$$

### DEMONSTRAÇÃO

Para simplificar, faremos  $P_{Q_{i_k}}(x) = P_{i_k}(x)$ . Pelo passo 3 do método, com  $x \in Q$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x\|^2 &= \|x^k - x + w_k (P_{i_k}(x^k) - x^k)\|^2 = \\ &= \|x^k - x\|^2 + 2w_k \langle x^k - x, P_{i_k}(x^k) - x^k \rangle + w_k^2 \|P_{i_k}(x^k) - x^k\|^2 = \\ &= \|x^k - x\|^2 + w_k^2 \|P_{i_k}(x^k) - x^k\|^2 - 2w_k \|P_{i_k}(x^k) - x^k\|^2 + 2w_k \|P_{i_k}(x^k) - x^k\|^2 + \\ &\quad + 2w_k \langle x^k - x, P_{i_k}(x^k) - x^k \rangle = \\ &= \|x^k - x\|^2 + (w_k^2 - 2w_k) \|P_{i_k}(x^k) - x^k\|^2 + 2w_k \langle P_{i_k}(x^k) - x, P_{i_k}(x^k) - x^k \rangle. \end{aligned}$$

Usando que  $0 < w_k < 2$  e (2.1.2) concluímos que

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \|x^k - x\|.$$

LEMA 2.2.2 Se  $\rho(x, Q) = \|x - P_Q(x)\|$  e  $i_k \in I$  é qualquer então

$$(2.2.2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, Q_{i_k}) = 0$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\rho(x^k, Q) = \|x^k - P_Q(x^k)\| \geq \|x^{k+1} - P_Q(x^k)\|$$

pelo lema anterior, mas por (2.1.1)

$$\|x^{k+1} - P_Q(x^k)\| \geq \|x^{k+1} - P_Q(x^{k+1})\| = \rho(x^{k+1}, Q).$$

Portanto existe  $\rho \geq 0$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, Q) = \rho$ . Além disso

$$\rho^2(x^k, Q) - \rho^2(x^{k+1}, Q) \geq \|x^k - P_Q(x^k)\|^2 - \|x^{k+1} - P_Q(x^k)\|^2$$

e daí, com artifício análogo ao usado no lema 2.2.1 chegamos a

$$\rho^2(x^k, Q) - \rho^2(x^{k+1}, Q) \geq (2w_k - w_k^2) \|P_{i_k}(x^k) - x^k\|^2 = (2w_k - w_k^2) \rho^2(x^k, Q_{i_k}).$$

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, Q) = \rho$  e  $2w_k - w_k^2 > 0$ , segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, Q_{i_k}) = 0.$$

LEMA 2.2.3 Se  $\phi(x^k) = \max_{i \in I} \rho(x^k, Q_i)$  e  $i_k$  é obtido com qualquer um dos controles acima, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x^k) = 0$$

#### DEMONSTRAÇÃO

Controle (i): Pelo lema anterior, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $K$  tal que para todo  $k > K$   $\rho(x^k, Q_{i_k}) < \varepsilon/2m$ . Daí

$$\|x^{k+1} - x^k\| = w_k \|P_{i_k}(x^k) - x^k\| = w_k \rho(x^k, Q_{i_k}) < \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall k > K.$$

Da definição deste controle, qualquer que seja  $1 \leq i \leq m$  existe um inteiro positivo  $\ell < M$  tal que  $i_{k+\ell} = i$  para todo  $k$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} \rho(x^k, Q_i) &= \|x^k - P_i(x^k)\| \leq \|x^k - P_{i_{k+\ell}}(x^{k+\ell})\| \leq \|x^k - x^{k+\ell}\| + \|x^{k+\ell} - P_{i_{k+\ell}}(x^{k+\ell})\| \leq \\ &\leq \|x^k - x^{k+1}\| + \|x^{k+1} - x^{k+2}\| + \dots + \|x^{k+\ell-1} - x^{k+\ell}\| + \|x^{k+\ell} - P_{i_{k+\ell}}(x^{k+\ell})\| < \end{aligned}$$

$$< \frac{\lambda \varepsilon}{M} + \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$$

para todo  $k > K$  . Logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x^k) = 0$$

Controle (ii): Basta fazer  $M = m$  e a demonstração é análoga a anterior

Controle (iii) e (iv): Para estes controles as demonstrações decorrem do lema 2.2.2.

LEMA 2.2.4 Se  $E$  tem dimensão finita e a sequência  $(x^k)_{k=0}^{\infty}$  satisfaz a (2.2.3), então

$$(2.2.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, Q) = 0$$

#### DEMONSTRAÇÃO

Vamos supor que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, Q) = \rho > 0$ , então se  $(x^{k_n})$  é uma subsequência,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^{k_n}, Q) = \rho$ . Mas como a sequência  $(x^k)$  é limitada e  $E$  tem dimensão finita, existe uma outra subsequência  $(x^{k_m})$  que converge para algum ponto  $x^*$ . Além disso

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{km}, Q_i) = 0, \quad \text{por (2.2.3).}$$

Portanto  $x^* \in Q_i$  para todo  $i \in I$ , pois todos os conjuntos  $Q_i$ 's são fechados. Daí  $x^* \in Q$  e contradiz a hipótese.

**LEMA 2.2.5** Se  $Q \subset E$  é convexo fechado e a sequência  $(x^k)_{k=0}^{\infty}$  satisfaz a (2.2.1) e (2.2.4), então  $(x^k)$  converge para  $x^* \in Q$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

$$\text{Considere } S_n = \bigcap_{k=0}^n \bar{B}(P_Q(x^k), \rho(x^k, Q))$$

onde  $\bar{B}(x, \rho)$  representa a bola fechada de centro  $x$  e raio  $\rho$ .

O conjunto  $S_n$  é convexo fechado e não vazio. Assim, seja  $x^* = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_k$ , logo  $x^* \in \bar{B}(P_Q(x^k), \rho(x^k, Q))$  e daí

$$\|x^k - x^*\| \leq \|x^k - P_Q(x^k)\| + \|P_Q(x^k) - x^*\| \leq 2\rho(x^k, Q).$$

Pelo lema 2.2.4 concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| = 0. \text{ Isto completa a demonstração do teorema.}$$

COROLÁRIO 2.2.1 Se os conjuntos são semi-espacos, isto é

$$Q_i = \{x \in E \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}$$

para todo  $i \in I = \{1, \dots, m\}$ , então o método SOP também converge.

DEMONSTRAÇÃO

Seja  $V$  o espaço gerado por  $\{a_1, \dots, a_m\}$ . Considere a variedade de  $V + x^0$ , onde  $x^0$  é o ponto inicial. Pelo passo 3 do método,  $x^k$  é múltiplo de  $a_{k-1} \in \{a_1, \dots, a_m\}$ , para todo  $k$ . Com isto, vemos que tudo ocorre no espaço de dimensão menor ou igual a  $m$ .

### 2.3 O MÉTODO DE KACZMARZ

Considere o sistema (1.1) na forma

$$\langle a_i, x \rangle = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

e vamos supor que o mesmo tem solução. Kaczmarz [8] sugeriu encontrar tal solução com o método abaixo:

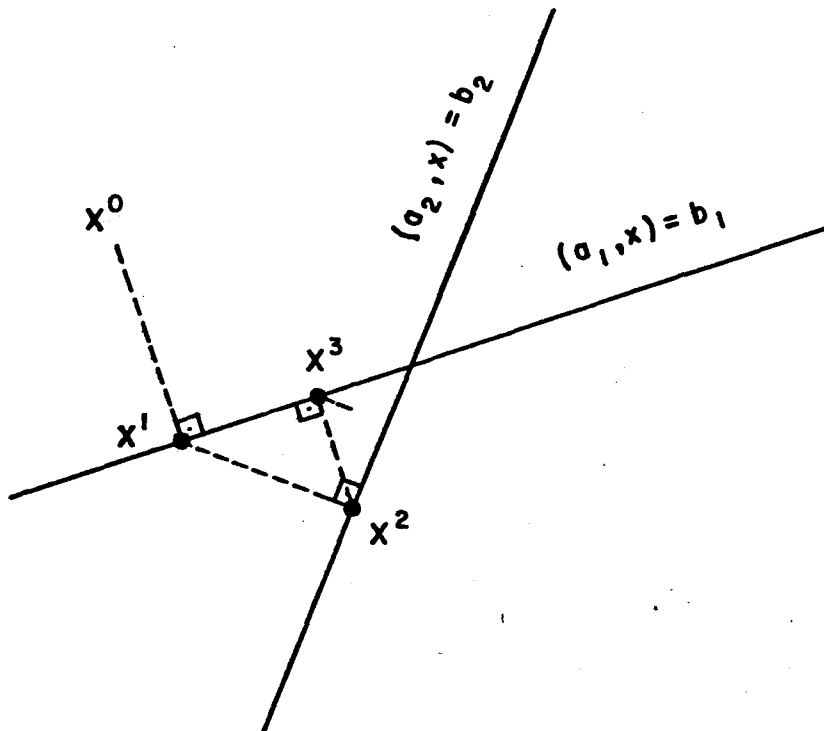
PASSO 1: Toma-se  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  arbitrário

PASSO 2: Escolhe-se  $i_k \in I$  - Controle cíclico

PASSO 3: Calcula-se

$$x^{k+1} = x^k + w_k \frac{b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x^k \rangle}{\|a_{i_k}\|^2} a_{i_k}, \text{ com } w_k \in (0, 2)$$

A interpretação geométrica do método, com  $w_k = 1$ , é dada pela figura abaixo:





## 2.4 O MÉTODO DA RELAXAÇÃO - (ART III)

Agora estamos interessados no problema de factibilidade Linear (1.4.1).

O ART III (Algebraic Reconstruction Technique) [7], foi utilizado com sucesso, por Robb et al [13], no campo de radiologia médica.

Este método consiste em:

PASSO 1: Toma-se  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  arbitrário

PASSO 2: Escolhe-se  $i_k \in I$  - Controle cíclico

PASSO 3: Calcula-se

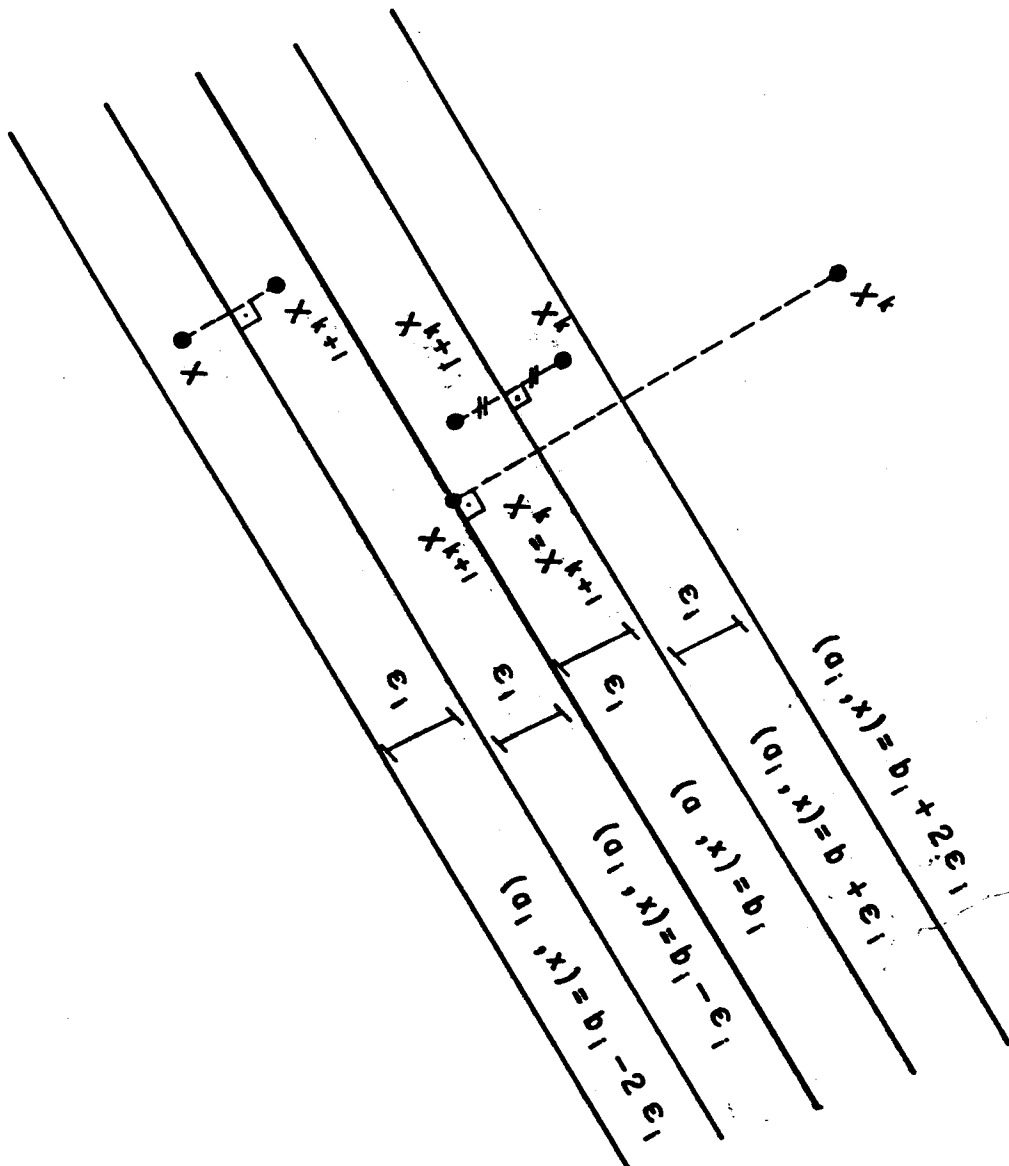
$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{se } |b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x^k \rangle| \leq \epsilon_{i_k} \\ b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x^k \rangle & \text{se } |b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x^k \rangle| \geq 2\epsilon_{i_k} \\ 2(b_{i_k} + \epsilon_{i_k} - \langle a_{i_k}, x^k \rangle) & \text{se } b_{i_k} + \epsilon_{i_k} < \langle a_{i_k}, x^k \rangle < b_{i_k} + 2\epsilon_{i_k} \\ 2(-b_{i_k} + \epsilon_{i_k} + \langle a_{i_k}, x^k \rangle) & \text{se } b_{i_k} - 2\epsilon_{i_k} < \langle a_{i_k}, x^k \rangle < b_{i_k} - \epsilon_{i_k} \end{cases}$$

com  $\epsilon_i > 0$

PASSO 4: Calcula-se

$$x^{k+1} = x^k + c_k \frac{a_{i_k}}{\|a_{i_k}\|^2} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Interpretação geométrica:



## 2.5 O MÉTODO DA RELAXAÇÃO DE AGMON, MOTZKIN E SCHOENBERG

A fim de encontrar  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\langle a_i, x \rangle \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

onde  $a_i \in \mathbb{R}^n$  e  $b_i$  é um número, Agmon [1], Motzkin e Schoenberg [11], publicaram em 1954 o seguinte método:

PASSO 1: Toma-se  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  qualquer

PASSO 2: Escolhe-se  $i_k \in I$  - Controle cíclico

PASSO 3: Calcula-se

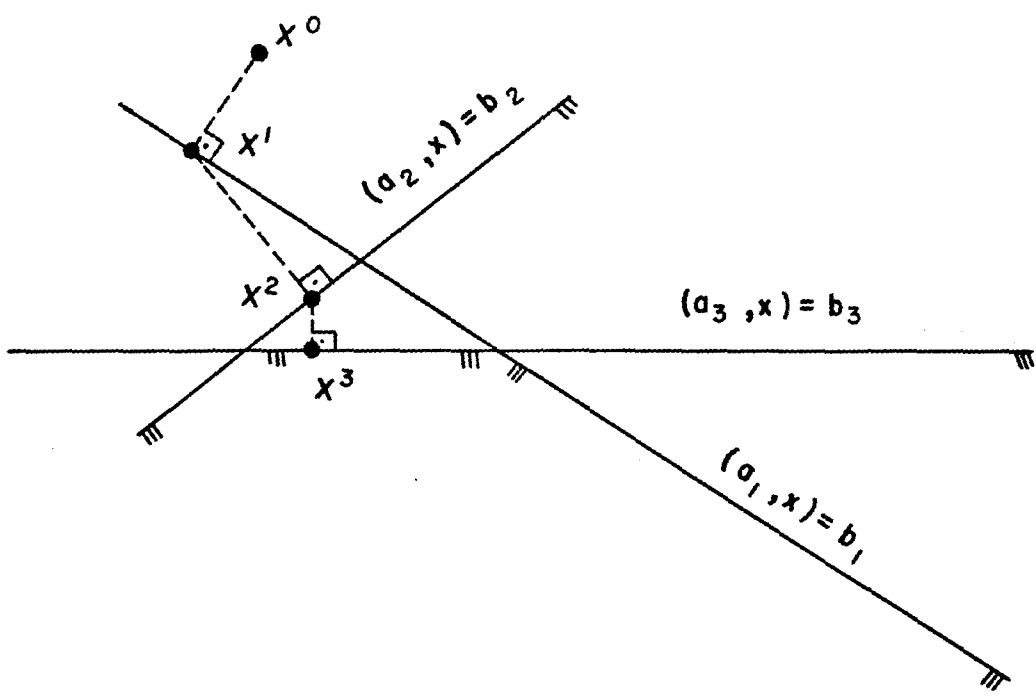
$$c_k = \min \left( 0, w_k \frac{b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x^k \rangle}{\|a_{i_k}\|^2} \right)$$

com  $0 < w_k < 2$

PASSO 4: Calcula-se

$$x^{k+1} = x^k + c_k a_{i_k} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Interpretação geométrica, para  $w_k = 1$ :



### CAPÍTULO III

Para o problema de factibilidade convexa não Linear, o método do SOP, em geral, não é aconselhável, pois cada passo implica em resolver uma minimização a fim de se obter a projeção. Para contornar tal dificuldade, Y. Censor and A. Lent em [3], sugeriram o método das projeções cíclicas do subgradiente. Em [2] este método foi adaptado para o problema da factibilidade côncava-convexa (1.4.2).

#### 3.1 PRELIMINARES

DEFINIÇÃO: Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Diremos que  $u \in \mathbb{R}^n$  é um subgradiente de  $g$  em  $x$ , se satisfaz a

$$\langle u, y - x \rangle + g(x) \leq g(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Em todos os pontos  $x$  para os quais  $g$  é finita, existe pelo menos um subgradiente, ou seja, o conjunto

$$\partial g(x) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, y - x \rangle + g(x) \leq g(y) \forall y \in \mathbb{R}^n\} \neq \emptyset \text{ e}$$

quando  $g$  é diferenciável em  $x$ ,  $u = \nabla g(x)$ , ver [14].

Seja  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$G(x) = \max \{0, g(x)\}.$$

É fácil ver que

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid G(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}.$$

### 3.2 O MÉTODO - (CSP)

Considere a família de funções convexas,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $i \in I = \{1, \dots, m\}$ . Seja

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$$

e  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo fechado tal que  $R \cap S = Q \neq \emptyset$ .

A fim de encontrar um ponto  $x \in Q$ , apresentamos o método abaixo:

PASSO 1: Toma-se  $x^0 \in S$  arbitrário

PASSO 2: Escolhe-se  $i_k \in I$

PASSO 3: Calcula-se

$$\bar{x}^{k+1} = x^k - w_k \frac{G_{i_k}(x^k)}{\|u^k\|^2} u^k \quad \text{onde}$$

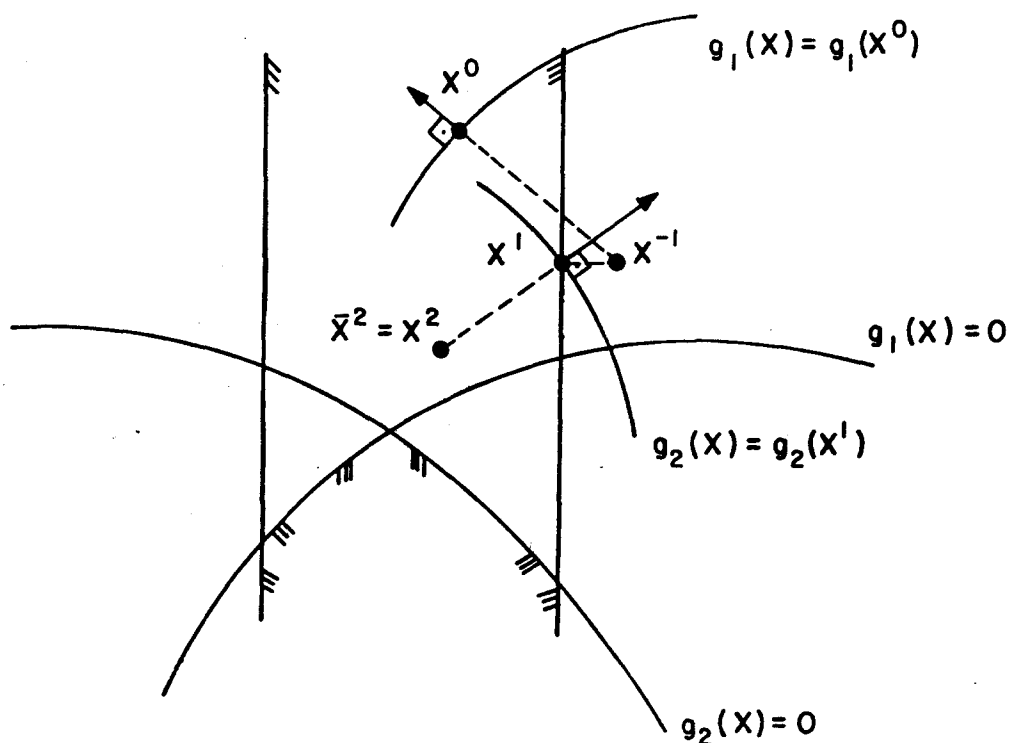
$$u^k \in \partial G_{i_k}(x^k), \quad w_k \in [\delta, 2-\delta] \quad \delta > 0 \quad \text{e} \quad G_i(x) = \max\{0, g_i(x)\}$$

PASSO 4: Calcula-se

$$x^{k+1} = P_S(\bar{x}^{k+1}).$$

O conjunto  $S$  é obtido pelas restrições que proporcionam uma fácil projeção. Como exemplo, citamos as restrições do tipo canalização.

Interpretação geométrica:



TEOREMA 3.2.1 Se  $g_i(x)$  para todo  $i \in I$  é contínua convexa e o conjunto  $\partial G_i(x)$ , para todo  $i \in I$ , é limitado em todos os pontos  $x \in S \cap \bar{B}(\bar{X}, \rho)$ , onde  $\bar{B}(\bar{X}, \rho)$  é a bola fechada de centro  $\bar{x} \in Q$  e raio  $\rho = \|x^0 - \bar{x}\|$ , então a sequência  $(x^k)_{k=0}^{\infty}$ , obtida pelo método acima, converge para  $x^* \in Q$ .

A demonstração deste teorema decorre dos lemas abaixo:

LEMA 3.2.1 Se  $x \in Q$  então

$$(3.2.1) \quad \|x^{k+1} - x\| \leq \|x^k - x\| \quad \forall k \geq 0$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\|x^{k+1} - x\|^2 = \|P_S(\bar{x}^{k+1}) - P_S(x)\|^2 \leq \|\bar{x}^{k+1} - x\|^2$$

pelo lema 2.1.2.

Assim, para

$$\alpha_k = w_k \frac{G_{i_k}(x^k)}{\|u^k\|^2}$$

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x\|^2 &\leq \|x^k - \alpha_k u^k - x\|^2 = \|x^k - x\|^2 + \alpha_k^2 \|u^k\|^2 - 2\alpha_k \langle u^k, x^k - x \rangle \leq \\ &\leq \|x^k - x\|^2 + \alpha_k^2 \|u^k\|^2 - 2\alpha_k G_{i_k}(x^k), \end{aligned}$$



pela definição de subgradiente.

Substituindo-se o valor de  $\alpha_k$ , obtemos

$$\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|x^k - x\|^2 + (w_k^2 - 2w_k) \frac{[G_i(x^k)]^2}{\|u^k\|^2}.$$

Como  $w_k^2 - 2w_k < 0$  conclui-se que

$$\|x^{k+1} - x\| \leq \|x^k - x\|$$

LEMA 3.2.2 Se o conjunto  $\partial G_i(x)$  é limitado, para todo  $i \in I$  e para todo  $x \in S \cap \bar{B}(\bar{x}, \rho)$ , e vale o lema 3.2.1, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_i(x^k) = 0$$

DEMONSTRAÇÃO

Pelo lema 3.2.1 a sequência  $(\|x^k - x\|)_{k=0}^{\infty}$ , com  $x \in Q$ , é monotona decrescente, logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x\| = \rho > 0.$$

Mas como

$$w_k \in [\delta, 2-\delta] \quad 0 < \delta < 1,$$

$$0 \leq (2w_k - w_k^2) \frac{[G_{i_k}(x^k)]^2}{\|u^k\|^2} \leq \|x^k - x\| - \|x^{k+1} - x\|.$$

Assim

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{[G_{i_k}(x^k)]^2}{\|u^k\|^2} = 0.$$

Além disso,  $x^k \in S \cap \bar{B}(\bar{x}, \rho)$ , para todo  $k \geq 0$ . Por hipótese existe uma constante  $K > 0$  tal que  $\|u^k\| \leq K$ , logo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_{i_k}(x^k) = 0$$

LEMA 3.2.3 Se vale o lema 3.2.2, então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+j} - x^k\| = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &= \|P_S(\bar{x}^{k+1}) - P_S(x^k)\| \leq \|\bar{x}^{k+1} - x^k\| = \\ &= w_k^2 \frac{[G_{i_k}(x^k)]^2}{\|u^k\|^2}. \end{aligned}$$

Usando o lema anterior

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0.$$

Fazendo indução sobre  $k$  obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+j} - x^k\| = 0 \quad \forall_j = 1, 2, \dots$$

LEMA 3.2.4 Para todo  $i \in I$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_i(x^k) = 0$$

DEMONSTRAÇÃO

Para todo  $i \in I$  existe um número positivo  $r < M$  tal que  $i = i_{k+r}$ , onde  $M$  é a constante do controle quase-cíclico. Por outro lado, para todo  $i \in I$

$$|G_i(x^k)| \leq |G_i(x^k) - G_i(x^{k+r})| + |G_{i_{k+r}}(x^{k+r})|.$$

Como  $G_i$  é contínua, segue que  $G_i$ , restrita a  $\bar{B}(\bar{x}, \rho)$ , é uniformemente contínua e portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |G_i(x^k) - G_i(x^{k+r})| = 0.$$

Além disso, pelo lema 3.2.2  $\lim_{k \rightarrow \infty} G_{i_{k+r}}(x^{k+r}) = 0.$

Logo  $\lim_{k \rightarrow \infty} G_i(x^k) = 0 \quad \forall i \in I$

LEMA 3.2.5 Se  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  é fechado, então.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^* \in S$$

#### DEMONSTRAÇÃO

Como  $\{x^k\} \subset \bar{B}(\bar{x}, \rho)$  e  $\bar{B}$  é um compacto, existe uma subsequência  $(x^{k_m})$  que converge para algum  $x^* \in S$ , pois  $S$  é fechado. Com isto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{k_m} - x^*\| = 0$$

que juntamente com

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x\| = d$$

chegamos a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| = 0,$$

o que completa a demonstração do teorema.

CAPÍTULO IV

Neste capítulo estamos interessados em resolver o sistema (1.2.1), com  $m = n$ . Para resolver este problema, apresentamos um método do tipo Kaczmarz para sistemas não-lineares, e em seguida fazemos a demonstração da convergência local do mesmo. Quando  $m < n$  ver [10].

4.1 O MÉTODO

Considere o operador  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $D$  um conjunto convexo aberto. O sistema (1.2.1), com  $m = n$ , pode ser escrito na forma

$$F(x) = 0$$

onde  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$  com  $f_i(x) = b_i - g_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Podemos também, reescrever  $F(x) = 0$  como

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 0 \\ &\vdots \\ F_r(x) &= 0 \end{aligned}$$

onde  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , indica um agrupamento de  $f_i$ 's, sendo que em cada bloco  $F_j$ , não há repetição.

O jacobiano de  $F(F_j)$  será representado por  $J(J_j)$ .

Seja  $x^*$  tal que  $F(x^*) = 0$ . Assumimos que  $J(x^*)$  é não-singular e que as linhas de  $J_j(x^*)$  são linearmente independentes, para todo  $j = 1, \dots, r$ .

A fim de encontrar  $x^*$ , J.M. Martínez em [9] sugeriu o seguinte método:

PASSO 1: Tome  $x^0 \in D$  arbitrário

PASSO 2: Para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$

i) Faça  $x^k = x^{k,0}$

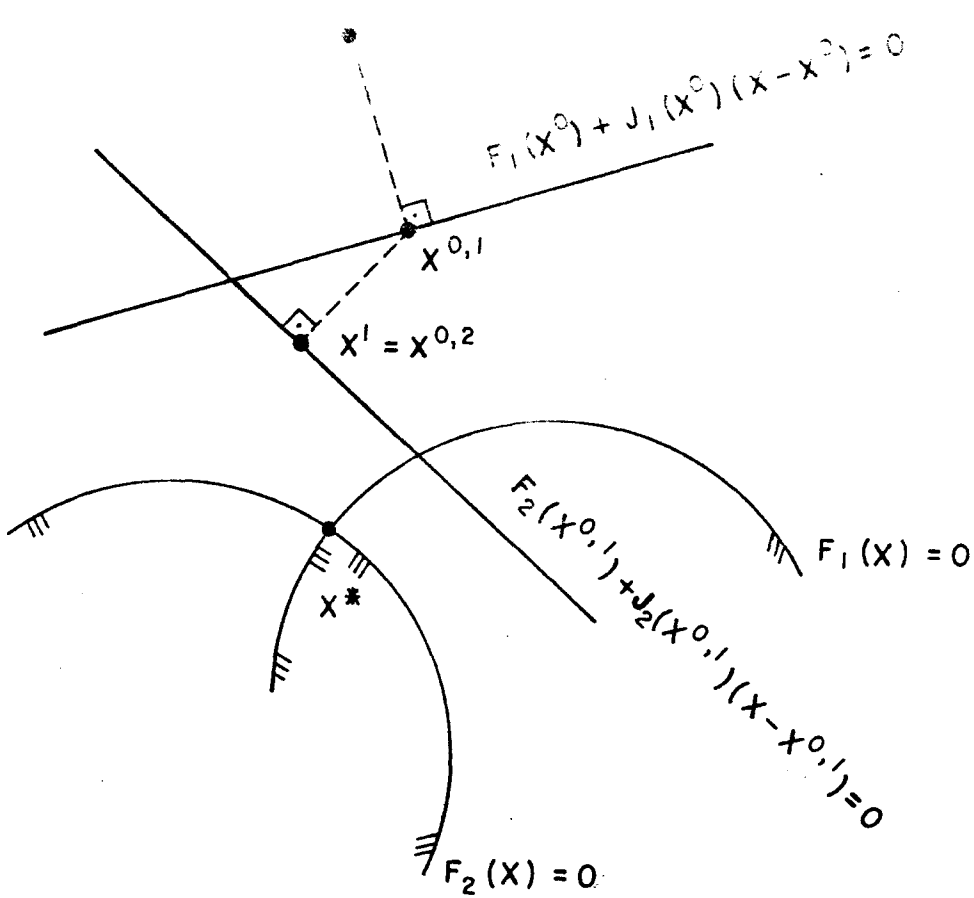
ii) Faça  $x^{k,j+1} = x^{k,j} - w_{j+1}^k J_{j+1}(x^{k,j})^+ F_j(x^{k,j})$

para  $j = 1, \dots, r - 1$  e

iii) Faça  $x^{k+1} = x^{k,r}$

onde  $J_j(x)^+ = J_j(x)^T [J_j(x)J_j(x)^T]^{-1}$  e  $w_1, \dots, w_r \in (0, 2)$ .

A interpretação geométrica do método com dois blocos e  $w=1$ , é dada pela figura abaixo:



#### 4.2 CONVERGÊNCIA LOCAL DO MÉTODO

Antes de iniciarmos a demonstração da convergência do método, apresentamos algumas definições e Lemas, dos quais faremos uso.

Seja  $P(w, j): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um operador definido por

$$P(w, j)u = [I - wJ_j(x^*) + J_j(x^*)]u \quad (1)$$

onde  $0 < w < 2$ .

Observe que  $P(1, j)u$  é a projeção ortogonal de  $u$  sobre



$N[J_j(x^*)]$ , onde  $N[J_j(x^*)]$  representa o núcleo de  $J_j(x^*)$ .

LEMA 4.2.1 Para  $u \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\|P(w, j)u\| \leq \|u\| \quad (2)$$

e a igualdade ocorre se e somente se  $u \in N[J_j(x^*)]$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Como  $P(w, j)$  é Linear, basta usar o Lema 2.1.3, com  $u = x - y$ .

LEMA 4.2.2 Se  $P(w) = P(w_r, r) \cdot P(w_{r-1}, r-1) \cdot \dots \cdot P(w_1, 1)$ ,

com  $w_1, \dots, w_r \in [\delta, 2-\delta]$   $0 < \delta < 1$  e as linhas de  $J_j(x^*)$  são linearmente independentes, então

$$\max \{ \|P(w)\|; w_1, \dots, w_r \in (0, 2) \} = \alpha < 1 \quad (3)$$

DEMONSTRAÇÃO:

Como  $P(w, j)$ , para todo  $j = 1, \dots, r$ , é contínuo e a composição preserva a continuidade, temos que  $P(w)$  é contínuo. Além disso, usando a independência Linear das linhas de  $J_j(x^*)$ , vemos

que para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \neq 0$ ,

$$\|P(w)u\| = \|P(w_r, r) \cdot \dots \cdot P(w_1, 1)u\| < \|u\|.$$

Portanto no compacto  $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\| = 1\}$  temos  $\|P(w)\| < 1$ .

Analogamente

$$\max \{\|P(w)\|, w_1, \dots, w_r \in [\delta, 2-\delta]\} = \alpha < 1$$

LEMA 4.2.3 Se  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ ,  $J(x^*)$  é não-singular e existem constantes  $K, p > 0$  tais que

$$\|J(x) - J(x^*)\| \leq K \|x - x^*\|^p \quad \forall x \in D,$$

então

$$\|F(v) - F(u) - J(x^*)(v - u)\| \leq K \max\{\|v - x^*\|, \|u - x^*\|\} \|v - u\|$$

(4)

$$\forall u, v \in D.$$

DEMONSTRAÇÃO: ver [12], pg. 70

TEOREMA 4.2.1 Com os lemas acima, existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $\|x^0 - x^*\| < \varepsilon$  a sequência  $(x^k)$  converge para  $x^*$  e além disso se  $x^k \neq x^*$  para todo  $k = 0, 1, 2, \dots$ , temos

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} \leq \alpha < 1.$$

#### DEMONSTRAÇÃO

Aqui  $B(x, \varepsilon)$  [ $\bar{B}(x, \varepsilon)$ ] significa a bola aberta [fechada] de centro  $x$  e raio  $\varepsilon$ .

Seja  $\bar{B}(x^*, \varepsilon_1) \subset D$  tal que, para todo  $x \in \bar{B}(x^*, \varepsilon_1)$ , as matrizes  $J_1(x), \dots, J_r(x)$  tem linhas linearmente independentes. Portanto as funções  $\phi_j$ , definidas por

$$\phi_j(x) = J_j(x)^+, \quad j = 1, \dots, r$$

são contínuas em  $\bar{B}(x^*, \varepsilon_1)$ . Logo, para cada  $j = 1, \dots, r$ , existe  $M = \max \|\phi_j(x)\|$  em  $\bar{B}(x^*, \varepsilon_1)$ . Daí, usando o lema 4.2.3 temos

$$\|w J_i(x)^+ [F_j(x) - J_j(x^*)(x - x^*)]\| \leq 2MK \|x - x^*\|^{p+1} \quad (5)$$

para todo  $j=1, \dots, r$  e  $0 < w < 2$ . Por outro lado, dado  $\theta \in (0, 1)$ , podemos tomar  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$  tal que, para todo  $x \in B(x^*, \varepsilon_2)$  e  $w \in (0, 2)$ , tenhamos

$$\| [I - w J_j(x)^+ J_j(x^*)] - [I - w J_j(x^*)^+ J_j(x^*)] \| < \theta/2 \quad (6)$$

$$e \quad 2MK \| x - x^* \|^P < \theta/2. \quad (7)$$

Agora considere

$$\bar{x} = x - w J_j(x)^+ F_j(x)$$

$$\text{com } x \in B(x^*, \varepsilon_2), w \in (0, 2) \quad e \quad 1 \leq j \leq r.$$

$$\text{Assim } \bar{x} - x^* = x - x^* - w J_j(x)^+ F_j(x) =$$

$$= x - x^* - w J_j(x)^+ F_j(x) - w J_j(x)^+ J_j(x^*) (x - x^*) + w J_j(x)^+ J_j(x^*) (x - x^*)$$

$$= [I - w J_j(x)^+ J_j(x^*)] (x - x^*) - w J_j(x)^+ [F_j(x) - J_j(x^*) (x - x^*)] =$$

$$= [I - w J_j(x)^+ J_j(x^*)] (x - x^*) - w J_j(x^*)^+ J_j(x^*) (x - x^*) + w J_j(x^*)^+ J_j(x^*) (x - x^*) -$$

$$- w J_j(x)^+ [F_j(x) - J_j(x^*) (x - x^*)] =$$

$$= P(w, j) (x - x^*) + \varphi(x) \quad \text{onde}$$

$$\varphi(x) = \{I - wJ_j(x)^+ J_j(x^*)\} - \{I - wJ_j(x^*)^+ J_j(x^*)\} (x - x^*) - wJ_j(x)^+ [F_j(x) - F_j(x^*) (x - x^*)]$$

$$\text{e portanto} \quad \|\varphi(x)\| \leq \theta \|x - x^*\| \quad (8)$$

por (5), (6) e (7).

Agora suponhamos que  $x^k \in B(x^*, \varepsilon)$ , com  $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon_2}{(1 + \theta)^r}$ .

Desta forma

$$\|x^{k,j} - x^*\| = P(w, j) (x^{k,j-1} - x^*) + \bar{\varphi}_1(x^{k,j-1}) \quad \text{e}$$

$$\|x^{k,j} - x^*\| \leq (1 + \theta) \|x^{k,j-1} - x^*\| \quad \text{por (2) e (8)}.$$

Portanto, para todo  $j = 1, \dots, r$

$$\|x^{k,j} - x^*\| \leq \frac{\varepsilon_2}{(1 + \theta)^{r-j}} \leq \varepsilon_2.$$

Além disso, aplicando (8) recursivamente, obtemos

$$x^{k+1} - x^* = P(w) (x^k - x^*) + \varphi_1$$

onde

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\| &\leq \theta [\|x^k - x^*\| + \|x^{k,1} - x^*\| + \dots + \|x^{k,r-1} - x^*\|] \leq \\ &\leq \theta \|x^k - x^*\| [1 + (1+\theta) + \dots + (1+\theta)^{\bar{r}-1}]. \end{aligned}$$

Como  $\theta \in (0,1)$  temos:

$$\|\varphi_1\| \leq \theta (2^{\bar{r}} - 1) \|x^k - x^*\|.$$

Portanto, usando (3) obtemos

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq [\alpha + \theta (2^{\bar{r}} - 1)] \|x^k - x^*\|.$$

Mas  $\theta (2^{\bar{r}} - 1)$  é um número suficientemente pequeno. Agora, basta usar induções sobre  $K$  para completar a demonstração.

## CONCLUSÃO

Acreditamos que alguns esforços devam ser desenvolvidos no sentido de se obter para os métodos de projeção, uma melhora na taxa de convergência. Em [5] encontramos uma versão acelerada para o método de Kaczmarz.

O método CSP tem se mostrado uma eficiente ferramenta quando aplicado ao problema de factibilidade convexa. Contudo, alguns melhoramentos deverão ocorrer, a fim de torná-lo mais eficiente para o problema de factibilidade côncava-convexa.

Uma outra linha de pesquisa que surge para os métodos de projeção é a programação paralela; em [15] encontramos uma versão do CSP onde o autor usa essa estratégia.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Agmon, *The relaxation method for linear inequalities*, Cand.J.Math., 6 (1954), pp.382-392.
- [2] Y. Censor, D.E. Gustafson, A. Lent and H. Tuy, *A new approach to the emission computerized tomography problem: Simultaneous of attenuation and activity coefficients*, IEEE Trans.Nucl.Sci., NS-26 (1979), pp.2775-2779.
- [3] Y. Censor and A. Lent, *A cyclic subgradient projections method for the convex feasibility problem*. Technical Report, University of Haifa, 1980.
- [4] Y. Censor, *Row-action methods for huge and sparse systems and their applications*, Siam Review (1981), 23,4, pp. 444-466.
- [5] A. De Pierro, *Métodos de projeção para sistemas lineares e quadrados mínimos*, Tese de Doutorado, Instituto de Matemática, UFRJ, 1982.
- [6] L.G. Gubin, B.T. Polyak and E.V. Raik, *The method of projections for finding the common point of convex sets*, USSR Comp.Math.Math.Phys., 7 (1967), pp.1-24.
- [7] G.T. Herman, *A relaxation method for reconstructing objects from noisy x-rays*, Math.Programming, 8 (1975), pp.01-19.



- [8] S. Kaczmarz, *Angenaherte Auflösung von Systemes Linearer Gleichungen*, Bull.Acad.Polon.Sci.Lett. A, 35(1937), pp. 355-357.
- [9] J.M. Martínez, *The method of successive orthogonal projections for solving nonlinear simultaneous equations*, a ser publicado.
- [10] K.H. Meyn, *Solution of underdetermined nonlinear equations by stationary iteration methods*, Numer.Math., 42(1983), pp. 161-172.
- [11] T.S. Motzkin and Schoenberg, *The relaxation method for linear inequalities*, Cand.J.Math., 6(1954), pp.393-404.
- [12] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [13] R.A. Robb, J.F. Greenleaf, E.L. Ritman, S.A. Johnson, J. D. Sjostrand, G.T. Herman and E.H. Wood, *Three-dimensional visualization of the intact thorax and contents : A technique for cross sectional reconstruction from multiplanar x-ray views*, Computers and Biomedica Research, 7(1974) pp.395-419.
- [14] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

- [15] L.T. Santos, *Métodos de Projeção de Subgradiente para o Problema de Factibilidade Convexa*, IMECC-UNICAMP.