

Hector Flores Callisaya<sup>†</sup>

EMPACOTAMENTO  
EM  
QUADRÁTICAS

Campinas  
2012

<sup>†</sup> Este trabalho teve apoio financeiro da CAPES.



Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica  
Departamento de Matemática Aplicada

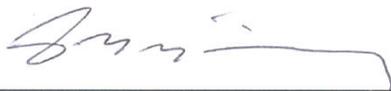
**Hector Flores Callisaya**

## **EMPACOTAMENTO EM QUADRÁTICAS**

TESE de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

**Orientador: José Mario Martínez Pérez**

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Hector Flores Callisaya e orientada pelo Prof. Dr. José Mario Martínez Pérez.



---

**Prof. Dr. José Mario Martínez Pérez**

**Campinas, 2012**

Flores Callisaya, Hector, 1980-  
F663e Empacotamento em quadráticas / Hector Flores Callisaya. –  
Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: José Mario Martínez Pérez.  
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Empacotamento de esferas. 2. Teoria dos reticulados.  
3. Equações quadráticas. 4. Programação não-linear.  
5. Lagrange, Funções de. I. Martínez Pérez, José Mario, 1948-  
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Packing on quadrics

**Palavras-chave em inglês:**

Packing spheres

Lattice theory

Quadratic equations

Nonlinear programming

Lagrangian functions

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutor em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

José Mario Martínez Pérez [Orientador]

Ernesto Julián Goldberg Birgin

Gabriel Haeser

Lúcio Tunes dos Santos

Sandra Augusta Santos

**Data de defesa:** 16-03-2012

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 16 de março de 2012 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof(a). Dr(a). JOSÉ MARIO MARTÍNEZ PÉREZ**



---

**Prof(a). Dr(a). ERNESTO JULIÁN GOLDBERG BIRGIN**



---

**Prof(a). Dr(a). GABRIEL HAESER**



---

**Prof(a). Dr(a). LÚCIO TUNES DOS SANTOS**



---

**Prof(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS**



## Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Ramona C., meu pai Luis E., por todo o apoio que me deram nessa jornada, mesmo que eu não esteja com eles.

Ao meu orientador, J. M. Martínez, pelas excelentes ideias que transmitiu ao longo desses anos.

Aos coautores de partes desse trabalho, Ernesto, Henrique, e Martínez novamente.

À Sandra por ter lido cuidadosamente a versão preliminar desse texto e feito inúmeras correções e comentários que melhoraram infinitamente a qualidade desse trabalho.

Agradeço aos meus irmãos, Favio, Eduarda, Dora, a meus sobrinhos.

Aos meus amigos de curso, em especial Kelly e Roberta.

Finalmente, á CAPES, pelo apoio financeiro fundamental para a realização deste trabalho.



---

# Resumo

---

Neste trabalho, serão propostos modelos matemáticos para problemas de empacotamento não reticulado de esferas em regiões limitadas por quadráticas no plano e no espaço.

Uma técnica para construir representações ou parametrizações será introduzida, mediante à qual será possível encontrar um sistema de desigualdades que determinam o empacotamento de um número fixo de esferas. Desta forma, resolvemos o problema de empacotamento de esferas através de uma sequência de sistemas de desigualdades.

Finalmente, para obter resultados eficientes, minimizaremos a função de sobreposição, usando o método do Lagrangiano Aumentado.

**Palavras-chave:** Empacotamento de esferas, Teoria de reticulados, Equações quadráticas, Programação não linear, Funções de Lagrange.



---

# Abstract

---

In this work, we will propose mathematical models for not latticed packing of spheres problems in regions bounded by quadratic in the plane and in the space.

A technique to construct representations or parameterizations will be introduced, by which it will be possible to find a system of inequalities which determine the packing of a fixed number of spheres. Thus, we solve the problem of packing spheres through a sequence of systems of inequalities.

Finally, to obtain effective results, we will minimize the overlay function using the Augmented Lagrangian Method.

**Key-words:** Packing spheres, Lattice theory, Quadratic equations, Nonlinear programming, Lagrangian functions.



---

# SUMÁRIO

---

Resumo	vii
Abstract	ix
Introdução	1
<b>1 Empacotando Bolas em Regiões Arbitrárias</b>	<b>3</b>
1.1 Problema. . . . .	3
1.2 Conceitos Fundamentais. . . . .	4
1.3 Algoritmo para encontrar uma solução . . . . .	9
1.4 $r$ -Núcleo de uma região. . . . .	11
1.5 Exemplos. . . . .	13
1.6 Empacotamento esférico reticulado . . . . .	20
1.7 Limitante inferior para $n_p(R, r)$ . . . . .	22
<b>2 Empacotando em Secções Cônicas</b>	<b>25</b>
2.1 No Plano $\mathbb{R}^2$ . . . . .	28
2.1.1 Elipse . . . . .	28
2.1.2 Intersecção de Elipses . . . . .	36
2.1.3 Parábola . . . . .	39
2.2 No espaço $\mathbb{R}^3$ . . . . .	46
2.2.1 Cone . . . . .	47
2.2.2 Elipsóide . . . . .	52

2.2.3	Parabolóide . . . . .	58
2.3	Minimizando o Contêiner . . . . .	62
2.3.1	Minimizando a área da elipse . . . . .	63
2.3.2	Menor elipse de focos fixos que contém $n_p$ discos . . . . .	65
2.3.3	Minimizando a tampa da parábola . . . . .	66
2.3.4	Minimizando a altura do cone . . . . .	68
2.3.5	Minimizando a altura do cilindro com base elipsoidal . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Resultados Computacionais e Aplicações</b>	<b>71</b>
3.1	Método Numérico . . . . .	71
3.2	Métodos para resolver factibilidade . . . . .	73
3.2.1	Método 1 (Met-1) . . . . .	74
3.2.2	Método 2 (Met-2) . . . . .	75
3.2.3	Reinícios (MS-T) . . . . .	75
3.3	Empacotando num contêiner fixo . . . . .	76
3.4	Testes numéricos . . . . .	78
3.4.1	Elipse . . . . .	79
	<b>Conclusões</b>	<b>91</b>

---

# Introdução

---

Neste trabalho, o principal objetivo é resolver o problema de empacotamento de bolas sem sobreposição num contêiner arbitrário. Almejamos encontrar a posição dos centros das bolas que garante que estejam contidas no contêiner.

Nos problemas de empacotamento clássico, os contêineres são polítopos ou esferas. Existem muitos algoritmos e heurísticas para encontrar o maior número de itens que se podem colocar dentro destes contêineres. Apresentamos neste trabalho modelos matemáticos para empacotar itens num contêiner irregular, por exemplo: elipse, parábola, interseção de elipses, elipsoide, cone, etc.

No capítulo um, são estudados os conceitos básicos de empacotamento, empacotamento esférico, número de empacotamento, e o núcleo de um contêiner, este último é muito importante nos problemas de empacotamento de círculos (esferas) em regiões arbitrárias, pois determinar este conjunto por meio de equações algébricas resolve o problema de empacotamento de discos (esferas).

No capítulo dois, apresentamos o conceito de função representação ou parametrização, que é um auxiliar para calcular a distância de um ponto à fronteira. Consideramos regiões que se podem formar a partir das secções cônicas: elipse, parábola, intersecção de elipses, etc.

Finalmente no capítulo três determinamos as vantagens e desvantagens dos métodos apresentados nos capítulos um e dois, fazendo os experimentos numéricos.

Os gráficos apresentadas no trabalho são feitos usando os softwares *Algencan* [ABMS07] e *Pov Ray* [POV].

## Lista de Notações

Aqui incluímos uma lista de notações usadas ao longo deste trabalho

- $\mathbb{N}$  — o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{R}$  — o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{R}^n$  — o espaço euclidiano de dimensão  $n$  (com produto interno euclidiano e a norma correspondente);
- $\#(I)$  — cardinalidade do conjunto  $I$ ;
- $x_1, \dots, x_n$  — coordenadas do elemento  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- $\langle x, y \rangle$  — produto interno euclidiano entre  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^n$ , i.e.,  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ;
- $|x|$  — norma euclideana de  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- $|x|_\infty$  — norma-infinito de  $x \in \mathbb{R}^n$ , definida pelo máximo dos valores absolutos de coordenadas de  $x$ , i.e.,  $|x|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ ;
- $B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| \leq r\}$ ;
- $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$ ;
- $S[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| = r\}$ ;
- $d(x, X) = \inf_{y \in X} |x - y|$ ;
- $\text{int}(X)$  — o interior do conjunto  $X$ ;
- $\partial X$  — fronteira do conjunto  $X$ ;
- $n_{cpu}$  — tempo em segundos para empacotar  $n_c$  itens;
- $cp_{tot}$  — tempo total em segundos;
- $cp_{usr}$  — tempo usado em segundos para encontrar o número de itens do reticulado contidos no contêiner.

# Empacotando Bolas em Regiões Arbitrárias

---

---

Este capítulo é dedicado à contextualização e apresentação da teoria de empacotamento. Citaremos a importância e os conceitos básicos. Existem muitos trabalhos nesta área por exemplo: [T64, Zon99, Sto83, Pac, MM03, Cen, BS08].

## 1.1 Problema.

O problema de empacotamento de objetos consiste em distribuir objetos em um contêiner  $R$ , isto é num subconjunto  $R$  do espaço, de modo que:

- dois itens quaisquer deste arranjo não podem ocupar o mesmo espaço;
- este arranjo de objetos ocupe o maior espaço possível de  $R$ .

O caso onde os itens são retângulos de mesmo tamanho e  $R$  um contêiner convexo descrito por desigualdades foi estudado em [BL10, BMMR06], e o caso onde os itens são discos ou bolas e  $R$  um contêiner circular ou retangular foi estudado em [T64, BS08, Xav07]. Nosso objetivo é empacotar discos ou esferas em contêiners arbitrários, para isto formalizaremos o conceito de contêiner.

## 1.2 Conceitos Fundamentais.

Adotamos a linguagem usada em [Lim81] para descrever os conceitos de empacotamento. Definimos formalmente o conceito de contêiner como:

**Definição. 1.2.1.** Seja  $R \subset \mathbb{R}^n$ , dizemos que  $R$  é uma região se satisfaz as seguintes condições:

1.  $R$  é fechado e limitado,
2.  $R$  possui  $\text{int}(R)$  conexo.

Os problemas de empacotamento consistem em reconhecer se um objeto pode ser introduzido em um contêiner, respeitando o espaço que ocupam os demais objetos e a parede do contêiner, esta ideia pode ser formalizada da seguinte maneira.

**Definição. 1.2.2.** Um empacotamento numa região  $R \subset \mathbb{R}^n$  é uma família  $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de subconjuntos  $B_\lambda \subset \mathbb{R}^n$  compactos integráveis tais que:

1.  $\text{int}(B_\alpha) \cap \text{int}(B_\beta) = \emptyset$  para todo  $\alpha, \beta \in \Lambda$ ,  $\alpha \neq \beta$
2.  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \subset R$ .

onde  $\Lambda$  é um conjunto de índices.

O conjunto  $B_\lambda$  é chamado de componente da família, item ou objeto. A figura 1.1 ilustra um empacotamento.

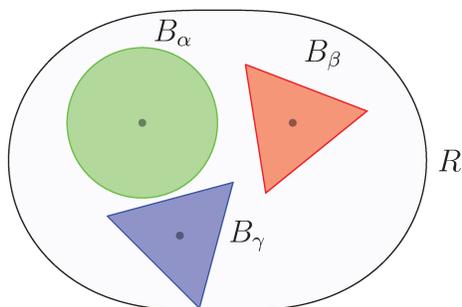


Figura 1.1: Empacotamento em  $R$ .

Consideremos a condição de sobreposição no empacotamento, isto é;

$$\text{int}(B_\alpha) \cap \text{int}(B_\beta) = \emptyset, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda. \quad (1.1)$$

Suponhamos que

$$A(B_\alpha) = \int_{B_\alpha} dA > 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda, \quad (1.2)$$

então (1.1) pode ser descrito em termos da área de interseção dos itens  $B_\alpha$  e  $B_\beta$ , isto é

$$\text{int}(B_\alpha) \cap \text{int}(B_\beta) = \emptyset \iff A(B_\alpha \cap B_\beta) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda. \quad (1.3)$$

De fato: ( $\Leftarrow$ ) Dados  $\alpha$  e  $\beta$ , suponhamos que  $\text{int}(B_\alpha) \cap \text{int}(B_\beta) \neq \emptyset$ , então existe  $p \in \text{int}(B_\alpha) \cap \text{int}(B_\beta)$ , logo existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $B(p, \delta_1) \subset B_\alpha$  e  $\delta_2 > 0$  tal que  $B(p, \delta_2) \subset B_\beta$ . Seja  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , então  $B(p, \delta) \subset B_\alpha \cap B_\beta$ , conseqüentemente

$$0 < \int_{B(p, \delta)} dA \leq \int_{B_\alpha \cap B_\beta} dA \neq 0. \quad (1.4)$$

( $\Rightarrow$ ) Reciprocamente, suponhamos  $A(B_\alpha \cap B_\beta) > 0$  então existe um bloco  $S$  em  $B_\alpha \cap B_\beta$  com volume não zero  $A(S) \neq 0$ , então existe  $p \in \text{int}(S)$ . Assim  $\text{int}(B_\alpha) \cap \text{int}(B_\beta) \neq \emptyset$ .

A equivalência (1.3) é muito importante pois se pode determinar a sobreposição de dois itens calculando a área da interseção dos itens, ver figura 1.2

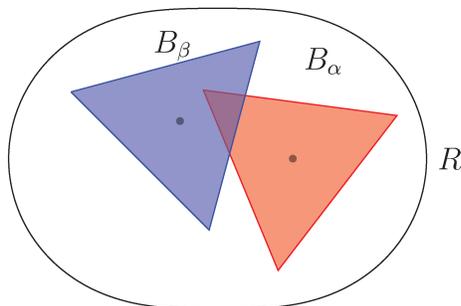


Figura 1.2: Sobreposição de triângulos em  $R$ ,  
 $A(B_\alpha \cap B_\beta) > 0$ .

Suponhamos que  $B_\alpha \cap (\mathbb{R}^n - R)$  seja integrável para cada  $\alpha$ , então

$$A(B_\alpha \cap (\mathbb{R}^n - R)) = 0 \iff B_\alpha \subset R. \quad (1.5)$$

**Definição. 1.2.3.** Seja  $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  um empacotamento na região  $R$ . O empacotamento é chamado de empacotamento rígido se para cada  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\Lambda$  existe uma transformação rígida  $T_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$T_{\alpha,\beta}(B_\alpha) = B_\beta. \quad (1.6)$$

A transformação  $T_{\alpha,\beta}$  também é conhecida como deslocamento, pois geometricamente representa o deslocamento do objeto  $B_\alpha$  em  $B_\beta$ , isto é,  $B_\beta$  é uma cópia de  $B_\alpha$ . Portanto todos os objetos têm a mesma forma: retangular, circular, etc., contidas na região  $R$ . A figura 1.3 ilustra um empacotamento rígido.

Consideremos o problema de empacotar discos ou esferas em uma região arbitrária. A este tipo de problema chamamos de empacotamento esférico, mais formalmente temos:

**Definição. 1.2.4.** Seja  $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  um empacotamento rígido em  $R$ , se cada componente da família é uma bola fechada, o empacotamento é chamado de empacotamento esférico em  $R$ .

O problema de empacotamento esférico consiste em distribuir o maior número possível esferas de mesmo raio  $r$  em  $R$ . A figura 1.3 ilustra um empacotamento esférico.

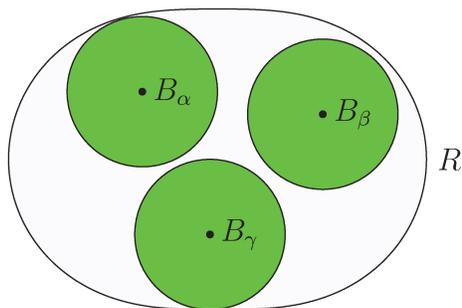


Figura 1.3: Empacotamento esférico  $R$ .

Uma transformação rígida é a composição de uma translação e uma transformação ortogonal, isto é:

$$T(x) = x^1 + Ux, \quad (1.7)$$

onde  $U$  é uma matriz  $n \times n$  que satisfaz;  $U^t U = I_n$  e  $x^1 \in \mathbb{R}^n$ , daí obtemos que:

$$T(B[x, r]) = B[T(x), r]. \quad (1.8)$$

Seja  $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  um empacotamento esférico, então pela definição de empacotamento temos que

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \text{int}(B_\lambda) \subset R; \quad (1.9)$$

então

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} A(\text{int}(B_\lambda)) \leq \int_R dA \quad (1.10)$$

por (1.8) temos que  $A(B_\alpha) = A(B_\beta) = A(B_{\lambda_0})$ ; daí obtemos

$$\#(\Lambda) A(B_{\lambda_0}) \leq \int_R dA, \quad (1.11)$$

para  $\lambda_0$  fixo, logo

$$\#(\Lambda) \leq \frac{A(R)}{A(B_{\lambda_0})}. \quad (1.12)$$

Daí concluímos que se  $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  é um empacotamento esférico na região  $R$  que contém um número finito de objetos, então o empacotamento pode ser escrito como uma família finita de subconjuntos de  $R$ . Nas seguintes seções serão estudadas técnicas para encontrar um empacotamento com cardinalidade  $\#(\Lambda)$  máxima.

Dada uma região  $R$ , desejamos caracterizar os centros das bolas por meio de funções reais tais que elas satisfaçam as condições de empacotamento. Primeiro, a distância do centro da bola à fronteira da região é maior que o raio da bola, se e somente se a bola está contida na região. Isto pode ser formalizado no seguinte lema.

**Lema. 1.2.1.** Seja  $R$  uma região e  $r > 0$ , então

$$B_\alpha[x_\alpha, r] \subset R \iff d(x_\alpha, \partial R) \geq r \text{ e } x_\alpha \in R. \quad (1.13)$$

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Suponhamos que  $B_\alpha = B(x_\alpha, r) \subset R$ , então por definição  $x_\alpha \in R$ . Para provar que  $d(x_\alpha, \partial R) \geq r$ , provemos por contradição, isto é suponhamos que  $d(x_\alpha, \partial R) < r$ . Como  $R$  é compacto então a fronteira  $\partial R$  de  $R$  também é compacto, daí existe um  $y \in \partial R$  tal que  $|x_\alpha - y| = |d(x_\alpha, \partial R)| < r$  logo  $y \in \text{int}(B_\alpha)$  daí  $y \in \text{int}(R)$ . Absurdo! pois  $\text{int}(R) \cap \partial R = \emptyset$ .

( $\impliedby$ ) Suponhamos também por absurdo, que  $x_\alpha \in R$ ,  $d(x_\alpha, \partial R) \geq r$  e  $B_\alpha \not\subset R$ . Então existe um ponto  $x \in B_\alpha$  tal que  $x \notin R$ . Como  $R$  é fechado temos que  $x \in$

$int(\mathbb{R}^n - R)$ . Seja  $[x_\alpha, x]$  o segmento que une  $x_\alpha$  com  $x$ , naturalmente o segmento de reta  $[x_\alpha, x]$  é conexo.

Seja  $\omega_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\omega_R(z) = d(z, R) - d(z, (\mathbb{R}^n - R)). \quad (1.14)$$

Note que  $\omega_R$  é contínua, em particular no segmento  $[x_\alpha, x]$ , e

$$\omega_R(x_\alpha) = d(x_\alpha, R) - d(x_\alpha, (\mathbb{R}^n - R)) = -d(x_\alpha, (\mathbb{R}^n - R)) \leq 0, \quad (1.15)$$

pois  $x_\alpha \in R \Leftrightarrow d(x_\alpha, R) = 0$ .

$$\omega_R(x) = d(x, R) - d(x, (\mathbb{R}^n - R)) = d(x, R) > 0, \quad (1.16)$$

pois por hipótese temos que  $x \in (\mathbb{R}^n - R) \Leftrightarrow d(x, \mathbb{R}^n - R) = 0$ . Pela conexidade do segmento  $[x_\alpha, x]$ , por (1.15), (1.16), e aplicando o teorema do valor intermediário temos que existe  $y \in [x_\alpha, x]$  tal que  $\omega_R(y) = 0$ , logo  $d(y, R) = d(y, (\mathbb{R}^n - R)) = 0$ . Isto acontece se e somente se  $y \in \partial R$ , e  $y \neq x$  pois  $x \in int(\mathbb{R}^n - R)$ . Daí

$$r \leq d(x_\alpha, \partial R) \leq d(x_\alpha, y) < d(x_\alpha, x) \leq r.$$

que é absurdo. Logo concluímos que  $B[x_\alpha, r] \subset R$ . □

A segunda condição, muito importante num empacotamento é: “dois objetos não podem ocupar o mesmo espaço”, a qual pode ser descrita por uma desigualdade, mostrada no seguinte lema:

**Lema. 1.2.2.** Seja  $R$  uma região,  $m \in \mathbb{N}$  e  $(B_\alpha)_{\alpha=1}^m$  um empacotamento esférico de raio  $r$  em  $R$ , então temos a seguinte equivalência

$$int(B_\alpha) \cap int(B_\beta) = \emptyset \iff |x_\alpha - x_\beta| \geq 2r, \quad \alpha \neq \beta. \quad (1.17)$$

*Demonstração.* Provemos a contra recíproca isto é:

$$int(B_\alpha) \cap int(B_\beta) \neq \emptyset \iff |x_\alpha - x_\beta| < 2r. \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} |x_\alpha - x_\beta| < 2r &\iff \frac{|x_\alpha - x_\beta|}{2} < r \\ &\iff \left| x_\alpha - \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right| < r \text{ e } \left| x_\beta - \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \right| < r \\ &\iff x_m = \frac{x_\alpha + x_\beta}{2} \in B_\alpha \cap B_\beta \\ &\iff int(B_\alpha) \cap int(B_\beta) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

□

**Observação. 1.2.1.** Também podemos obter o mesmo resultado usando (1.3), isto é

$$A(B(x_\alpha, r) \cap B(x_\beta, r)) = 0 \iff |x_\alpha - x_\beta| \geq 2r, \quad \forall \alpha \neq \beta. \quad (1.19)$$

Conhecendo que uma bola  $B_\alpha$  é completamente determinada por seu centro e raio, e usando (1.13) e (1.17), podemos caracterizar as equações que determinam o empacotamento em  $R$ .

### 1.3 Algoritmo para encontrar uma solução

Até agora mostramos que qualquer empacotamento esférico é uma família finita de subconjuntos de  $R$ . Pelos lemas 1.2.1 e 1.2.2 o problema de empacotar num contêiner é equivalente a encontrar soluções de um sistema não linear de desigualdades.

Dados uma região  $R$  e  $r > 0$ , definimos a seguinte sequência de conjuntos;

$$\Omega_1(R, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; x \in R, \quad d(x, \partial R) \geq r\}. \quad (1.20)$$

e para  $k = 2, 3, 4, \dots$

$$\Omega_k(R, r) = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{nk} \left| \begin{array}{l} x^i \in R, \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ d(x^i, \partial R) \geq r, \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ d(x^i, x^j) \geq 2r, \quad i < j. \end{array} \right. \right\}. \quad (1.21)$$

Por simplicidade denotamos por  $\Omega_k$  o conjunto  $\Omega_k(R, r)$ .

Cada elemento de  $\Omega_k$  determina um empacotamento de  $k$  componentes ou itens na região  $R$ . Isto motiva o seguinte esquema iterativo, no qual cada iteração consiste na resolução, para cada  $k > 0$ , do sistema que determina  $\Omega_k$ .

Definiremos um algoritmo bastante geral para encontrar um empacotamento na região  $R$ ,

**Algoritmo. 1.3.1.** Dados  $R$  uma região em  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ), e  $r > 0$ .

1. Faça  $k = 1$ .
2. Se  $\Omega_k(R, r) = \emptyset$  parar. Em caso contrário, calcular  $x^k \in \Omega_k(R, r)$ .
3. Tomar  $k := k + 1$  e retornar ao passo 2.

**Teorema. 1.3.1.** O algoritmo 1.3.1 está bem definido.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\Omega_k \neq \emptyset$ , então existe uma sequência finita de pontos  $(x^1, x^2, \dots, x^k)$  que pertence a  $\Omega_k$ , cujas componentes satisfazem às equações:

$$x^i \in R \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\} \quad (1.22)$$

$$d(x^i, \partial R) \geq r \text{ para todo } \forall i \in \{1, \dots, k\} \quad (1.23)$$

$$d(x^i, x^j) \geq 2r \text{ para todo } i < j \in \{1, \dots, k\} \quad (1.24)$$

As equações (1.22) e (1.23), pela proposição são 1.2.1 é o mesmo que dizer que a bola  $B(x^i, r)$  está contida na região  $R$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . A equação (1.24) pela proposição (1.2.2), diz que a interseção  $B(x^i, r) \cap B(x^j, r) = \emptyset$ . Daí concluímos que a família de bolas  $B(x^1, r), \dots, B(x^k, r)$  forma um empacotamento. Para mostrar que é um empacotamento rígido esférico, definimos  $T_{i,j}(x) = x + (x^j - x^i)$  que satisfaz  $T(B(x^i, r)) = B(x^j, r)$ . Isto mostra que a sequência gerada pelo algoritmo 1.3.1 é um empacotamento rígido esférico. Pela equação (1.12) temos que só existe um número finito de pontos  $x^i$  gerados pelo algoritmo.  $\square$

Como a sequência gerada pelo algoritmo é finita, denotamos o número máximo de pontos  $x^i$  gerado pelo algoritmo por  $n_p(R, r)$ , o qual é determinado pelo contêiner  $R$  e pelo raio da esfera  $r$ .

**Definição. 1.3.1.** Chama-se número de empacotamento ao número máximo  $k$  tal que  $\Omega_k(R, r) \neq \emptyset$  para a região  $R$  e denotamos por  $n_p(R, r)$ .

O número de empacotamento tem a seguinte propriedade:

$$\Omega_{n_p(R,r)} \neq \emptyset \text{ e } \Omega_{n_p(R,r)+i} = \emptyset, \text{ para todo } i = 1, \dots \quad (1.25)$$

e pela equação (1.12), temos

$$n_p(R, r) \leq \frac{A(R)}{A(B_{\lambda_0})}. \quad (1.26)$$

A relação (1.26) é muito importante, pois nos dá uma cota superior para o número de empacotamento  $n_p(R, r)$ . Esta propriedade pode ser usada para melhorar nosso algoritmo 1.3.1.

Achar  $n_p(R, r)$  é difícil, pois não é fácil verificar computacionalmente quando o conjunto  $\Omega_k(R, r)$  é vazio, uma vez que  $n_p(R, r)$  é solução do problema de otimização

$$\max k \quad \text{sujeito a} \quad \Omega_k(R, r) \neq \emptyset, \quad (1.27)$$

Note-se que se  $x^* \in \mathbb{R}^{n \cdot k}$  é uma solução do problema (1.28).

$$\min_x F = \sum_{i=1}^k \max\{0, r^2 - d(x^i, \partial R)^2\}^2 \quad (1.28)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} x^i &\in R, \quad i = 1, \dots, k \\ 4r^2 - d(x^i, x^j)^2 &\leq 0, \quad i < j. \end{aligned}$$

com  $F(x^*) = 0$ , então  $x^* \in \Omega_k(R, r)$ . Porém, a função objetivo  $F$  em (1.28) não é explícita, pois (1.28) contém o problema de calcular  $d(x^i, \partial R)$ , o qual não permite o cálculo do gradiente de  $F$ , mas pode ser resolvido usando métodos sem derivada como: [EMP11, Pow09, NM65].

## 1.4 $r$ -Núcleo de uma região.

Seja  $B[x, r]$  uma bola centrada em  $x$  de raio  $r > 0$ , no algoritmo geral 1.3.1. Precisamos calcular a distância do centro da bola à fronteira da região  $R$  para determinar se a bola está contida em  $R$ . Mas isso é resolver outro problema de minimização, isto é:

$$\min_{y \in \partial R} d(x, y), \quad (1.29)$$

e verificar que a solução  $y^*$  de (1.29) satisfaz à desigualdade:

$$d(x, y^*) \geq r, \quad (1.30)$$

Note no algoritmo geral 1.3.1, que não é fundamental determinar a solução do problema (1.29). Por exemplo, se  $R$  for um retângulo no plano, isto  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ , o problema de empacotamento na região  $R$  é equivalente a encontrar uma distribuição (uniforme) de pontos no retângulo

$$[a + r, b - r] \times [c + r, d - r] \subset \mathbb{R}^2,$$

como se mostra na figura 1.4.

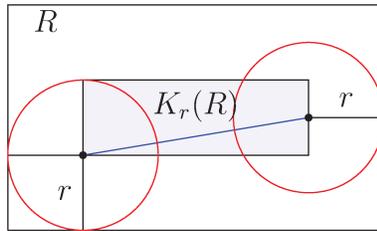


Figura 1.4:  $R = [a, b] \times [c, d]$ ,  $K_r(R) = [a + r, b - r] \times [c + r, d - r]$ .

Assim como no caso do quadrado, podemos determinar primeiro um subconjunto de  $R$  cujos elementos têm distância à fronteira maior que  $r$ .

**Definição. 1.4.1.** Seja  $R \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) uma região, chamamos de  $r$ -Núcleo de  $R$  ao conjunto

$$K_r(R) = \{x \in R \mid d(x, \partial R) \geq r\}. \quad (1.31)$$

Portanto  $\Omega_k(R, r)$  pode ser descrito por:

$$\Omega_k(R, r) = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{kn} \mid \begin{array}{l} x^i \in K_r(R), \quad \forall i = 1, \dots, k \\ d(x^i, x^j) \geq 2r, \quad i < j \end{array} \right\}. \quad (1.32)$$

Determinando primeiro o núcleo de uma região  $R$  por meio de inequações, podemos reduzir as inequações que determinam o empacotamento em  $R$ .

## 1.5 Exemplos.

Apresentamos exemplos nos quais podemos determinar de forma explícita o conjunto  $K_r(R)$  para algumas regiões simples.

**Exemplo. 1.5.1. (Esferas numa esfera).** Um exemplo clássico e muito estudado é o problema de empacotar círculos em um círculo [Pac, Sto83]. Deseja-se encontrar o número máximo de círculos num círculo maior, neste caso é possível calcular o  $r$ -núcleo para empacotar círculos de raio  $r$ . De fato; seja  $R = B[x^0, \rho]$ , isto é uma bola fechada centrada no ponto  $x^0$  e raio  $\rho$ , que naturalmente é compacto com fronteira  $\partial R = S[x^0, \rho]$ . Pela definição de  $r$ -núcleo temos que determinar o conjunto:

$$K_r = \{x \in B[x^0, \rho] \mid d(x, S[x^0, \rho]) \geq r\}. \quad (1.33)$$

**Caso.- 1** Suponhamos que  $0 \leq r \leq \rho$ , então

$$K_r = \{x \in B[x^0, \rho] \mid |x - x^0| \leq \rho - r\}.$$

De fato, seja  $x \in K_r$  e  $x \neq x^0$  então  $x \in B[x^0, \rho]$  e  $d(x, S[x^0, \rho]) \geq r$ , consideremos o ponto  $y^0 = x^0 + \rho \frac{x - x^0}{|x - x^0|}$ . Como  $|y^0 - x^0| = \rho$  temos que  $y^0 \in S[x^0, \rho]$ , também temos que os pontos  $x^0, x$  e  $y^0$  são colineares, logo pela desigualdade triangular temos

$$\rho = |y^0 - x^0| = |y^0 - x| + |x - x^0|. \quad (1.34)$$

Seja  $y \in S[x^0, \rho]$  então

$$|y - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| \text{ para todo } y \in S[x^0, \rho], \quad (1.35)$$

mas  $|y - x^0| = \rho$  para todo  $y \in S[x^0, \rho]$ , então

$$\rho \leq |y - x| + |x - x^0| \text{ para todo } y \in S[x^0, \rho].$$

Usando a definição de  $d(x, S[x^0, \rho])$  temos

$$\rho \leq d(x, S[x^0, \rho]) + |x - x^0| \quad (1.36)$$

Como  $y^0$  é um ponto da fronteira que satisfaz a igualdade (1.34) e a relação (1.36) concluímos que

$$\rho = d(x, S[x^0, \rho]) + |x - x^0| \quad (1.37)$$

daí

$$\rho = r + |x - x^0|$$

se e somente se  $\rho - r \geq |x - x^0|$ . Logo  $x \in B[x^0, \rho - r]$  ou  $K_r \subset B[x^0, \rho - r]$ .

Reciprocamente, seja  $x \in B[x^0, \rho - r]$ . Fazendo a mesma análise temos que  $\rho = d(x, S[x^0, \rho]) + |x - x^0|$  e por hipótese temos que  $|x - x^0| \leq \rho - r$ , então

$$\begin{aligned} \rho &= d(x, S[x^0, \rho]) + |x - x^0| \\ &\leq d(x, S[x^0, \rho]) + \rho - r \end{aligned}$$

isto é

$$r \leq d(x, S[x^0, \rho]).$$

Finalmente temos

$$K_r = B[x^0, \rho - r].$$

O raciocínio é representado na figura 1.5.

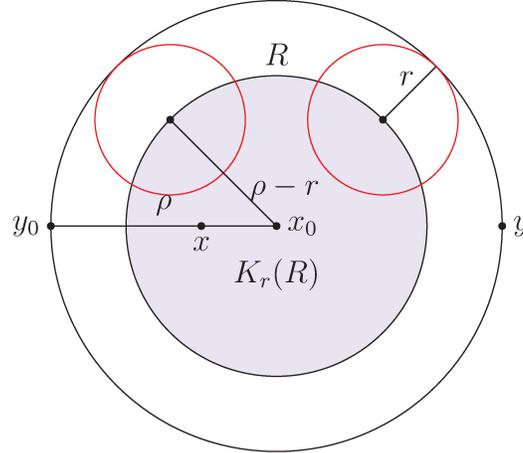


Figura 1.5:  $R = B[x^0, \rho]$ ,  $K_r(R) = B[x^0, \rho - r]$ .

**Caso.- 2** Suponhamos que  $r > \rho$  e  $K_r \neq \emptyset$ , então existe  $x \in B[x^0, \rho]$  tal que a bola  $B[x, r] \subset B[x^0, \rho]$ . mas isto é absurdo, pois se  $y^1 = x^0 + r \frac{x - x^0}{|x - x^0|}$  então  $y^1 \in B[x^0, r]$  e  $y^1 \notin B[x^0, \rho]$ . Concluimos que

$$K_r = \emptyset$$

Deste modo  $\Omega_k$  pode ser descrito por um número finito de desigualdades:

$$\Omega_k = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{kn} \left| \begin{array}{l} d(x^i, x^0) \leq \rho - r, \quad \forall i, \\ d(x^i, x^j) \geq 2r, \quad i < j, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\} \end{array} \right. \right\}. \quad (1.38)$$

Lembrando a equivalência  $0 < a \leq b \iff a^2 \leq b^2$ ,  $\Omega_k$  pode escrito da seguinte forma

$$\Omega_k = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{kn} \left| \begin{array}{l} |x^i - x^0|^2 \leq (\rho - r)^2, \quad \forall i, \\ |x^i - x^j|^2 \geq (2r)^2, \quad i < j, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\} \end{array} \right. \right\}. \quad (1.39)$$

Se  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$  e raio  $r = 1$ , o número de empacotamento é  $n_p \approx 19$ , com a configuração ilustrada na figura 1.6.

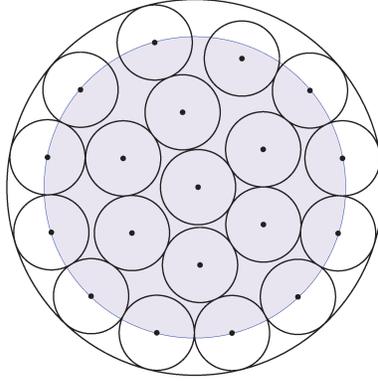


Figura 1.6:  $\rho = 5$ ,  $r = 1$ ,  $n_p \approx 19$ .

**Exemplo. 1.5.2. (Esferas num politopo).** Outro caso muito estudado [BMR05, MFP03] é quando é  $R$  um poliedro convexo e limitado, isto é, um politopo. Suponhamos que  $R$  é descrito como a seguinte região

$$R = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \langle a^i, x \rangle \leq b_i \\ \forall i \in I_m = \{1, \dots, m\} \end{array} \right. \right\}. \quad (1.40)$$

Afirmamos que o núcleo  $K_r(R)$ , é:

$$K_r(R) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \langle a^i, x \rangle \leq b_i - r |a^i| \\ \forall i \in I_m = \{1, \dots, m\} \end{array} \right. \right\}. \quad (1.41)$$

De fato, seja  $x \in K_r$ , então  $d(x, \partial R) \geq r$ . Como  $R$  é um politopo, podemos calcular a projeção  $P_i(x)$  onde  $P_i$  é a projeção no hiperplano  $\langle x, a^i \rangle = b_i$ . Definimos a curva  $\alpha_i(s) = x + s \frac{a^i}{|a^i|}$ , como  $a^i$  é perpendicular ao hiperplano, então a curva intercepta perpendicularmente o hiperplano, e existe  $s_i$  tal que  $\alpha_i(s_i) = P_i(x)$  isto é:

$$\begin{aligned} b_i &= \langle \alpha_i(s_i), a^i \rangle \\ &= \langle x + s_i \frac{a^i}{|a^i|}, a^i \rangle \\ &= \langle x, a^i \rangle + s_i \langle \frac{a^i}{|a^i|}, a^i \rangle \\ &= \langle x, a^i \rangle + s_i |a^i| \\ &\geq \langle x, a^i \rangle + r |a^i| \end{aligned}$$

pois a curva é parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Finalmente concluímos que  $x$  tem que satisfazer a desigualdade

$$\langle x, a^i \rangle \leq b_i - r |a^i| \text{ para todo } i = 1, \dots, m. \quad (1.42)$$

Para a recíproca, é suficiente observar que os hiperplanos  $\langle x, a^i \rangle = b_i - r |a^i|$  e  $\langle x, a^i \rangle = b_i$  são paralelos, e a distância entre eles é  $r$ .

Deste modo  $\Omega_k$  neste caso pode ser descrito por um número finito de desigualdades.

$$\Omega_k = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{kn} \left| \begin{array}{l} \langle x^i, a^p \rangle \leq b_i - r |a^p|, \\ d(x^i, x^j) \geq 2r, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \\ \forall p \in I_m = \{1, \dots, m\}. \end{array} \right. \right\}. \quad (1.43)$$

Lembrando a equivalência  $0 < a \leq b \iff a^2 \leq b^2$ ,  $\Omega_k$  pode ser escrito da seguinte forma

$$\Omega_k = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{kn} \left| \begin{array}{l} \langle x^i, a^p \rangle \leq b_i - r |a^p|, \\ |x^i - x^j|^2 \geq (2r)^2, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \\ \forall p \in I_m = \{1, \dots, m\}. \end{array} \right. \right\}. \quad (1.44)$$

Consideremos o caso específico de um polítopo de 5 lados, descrito por

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 3x \leq 15, \\ \frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{5y}{\sqrt{2}} \leq 15, \\ -\frac{3\sqrt{3}x}{2} + \frac{5y}{2} \leq 15, \\ \frac{3x}{2} - \frac{5\sqrt{3}y}{2} \leq 15, \\ \frac{3\sqrt{3}x}{2} - \frac{5y}{2} \leq 15, \end{array} \right\}, \quad (1.45)$$

e ilustrado na figura 1.7.

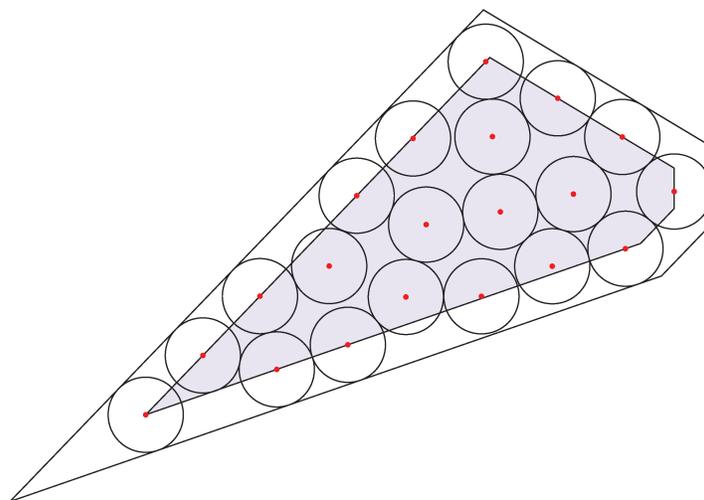


Figura 1.7:  $R$ ,  $r = 1$ ,  $n_p \approx 20$ .

**Exemplo. 1.5.3. O Cilindro circular.-** Dados  $\rho > 0$  e  $L > 0$ , definimos o conjunto

$$R = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq \rho^2, \\ 0 \leq x_3 \leq L, \end{array} \right\}. \quad (1.46)$$

Usando os mesmos argumentos dos exemplos 1.5.1 e 1.5.2 podemos mostrar que o  $r$ -núcleo de  $R$  dado em (1.46) é o seguinte conjunto

$$K_r(R) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq (\rho - r)^2, \\ r \leq x_3 \leq L - r, \end{array} \right\}. \quad (1.47)$$

O  $r$ -núcleo de  $R$  é ilustrada na figura 1.8.

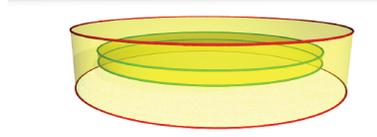


Figura 1.8:  $R$ ,  $K_r(R)$ .

Então, o conjunto  $\Omega_k$  pode ser escrito da seguinte forma

$$\Omega_k = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{3k} \left| \begin{array}{l} (x_1^i)^2 + (x_2^i)^2 \leq (\rho - r)^2, \\ r \leq x_3^i \leq L - r, \\ |x^i - x^j|^2 \geq (2r)^2, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \end{array} \right. \right\}. \quad (1.48)$$

Para  $\rho = 2$  e  $L = 7$  o número de empacotamento para  $r = 1$  é  $n_p \approx 8$  com a representação gráfica ilustrada na figura 1.9.

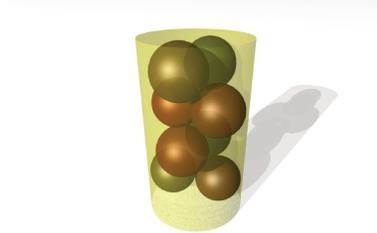


Figura 1.9:  $R : \rho = 2, \quad L = 7 \quad r = 1, \quad n_p \approx 8$ .

Para  $\rho = 5$  e  $L = 2$  o número de empacotamento para  $r = \frac{4}{5}$  é  $n_p \approx 30$  com a seguinte representação gráfica ilustrada na figura 1.10.

**Exemplo. 1.5.4. Elipse.-** Seja  $a \geq b$ , definimos  $R$  como a região com fronteira  $\partial R = \mathcal{E}$ , onde  $\mathcal{E}$  é uma elipse.

$$R = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \left| \frac{(x_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2)^2}{b^2} \leq 1, \right. \right\}. \quad (1.49)$$

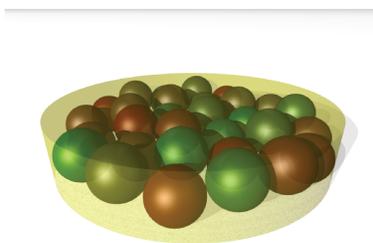


Figura 1.10:  $R : \rho = 5, \quad L = 2, \quad r = \frac{4}{5}, \quad n_p \approx 30$ .

Calcular o  $r$ -núcleo neste caso não é fácil, pois o  $r$ -núcleo de uma elipse não é uma elipse, mas  $\partial R$  é suave, e  $R$  é convexa. Isto nos permite aproximar  $\partial R$  por retas tangentes obtendo um polítopo com infinitos lados. Pelo exemplo 1.5.2 podemos determinar o núcleo de  $R$  usando infinitas retas, isto é:

$$R = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2)^2}{b^2} \leq 1, \right\}, \quad (1.50)$$

$$= \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} x_1 b \cos(t) + a \sin(t) x_2 \leq a b \\ \forall t \in [0, 2\pi], \end{array} \right\}. \quad (1.51)$$

Daí o núcleo de  $R$  pode ser calculado usando o desenvolvimento do exemplo 1.5.2, logo

$$K_r(R) = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} b \cos(t) x_1 + a \sin(t) x_2 \leq \\ a b - r \sqrt{(b \cos(t))^2 + (a \sin(t))^2}, \\ \forall t \in [0, 2\pi], \end{array} \right\}. \quad (1.52)$$

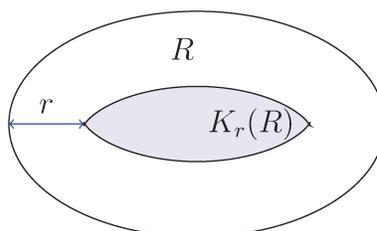


Figura 1.11:  $R, \quad K_r(R)$ .

O conjunto  $\Omega_k$  pode ser escrito como:

$$\Omega_k = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{3k} \left| \begin{array}{l} b \cos(t) x_1^i + a \sin(t) x_2^i \leq \\ a b - r \sqrt{(b \cos(t))^2 + (a \sin(t))^2}, \\ \forall t \in [0, 2\pi], \\ |x^i - x^j|^2 \geq (2r)^2, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \end{array} \right. \right\}. \quad (1.53)$$

Para reconhecer se um ponto está no  $r$ -núcleo temos que avaliar infinitas desigualdades, mas computacionalmente isto é impossível. No capítulo dois construiremos uma representação do plano que permita calcular o  $r$ -núcleo explicitamente.

## 1.6 Empacotamento esférico reticulado

O problema do empacotamento esférico em reticulados procura basicamente os reticulados que proporcionam a maior densidade em suas dimensões. Embora este problema tenha sido estudado por vários matemáticos, até agora, só se conhece o resultado para dimensões até 8 e para dimensão 24 [CS99].

**Definição. 1.6.1.** Seja  $\mathcal{B} = \{u^1, \dots, u^m\}$  um conjunto linearmente independente de vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Um reticulado no  $\mathbb{R}^n$  com gerador  $\mathcal{B}$ , consiste do conjunto das combinações inteiras desses  $m$  vetores, ou seja

$$L^m(0) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u = s_1 u^1 + \dots + s_m u^m, \quad s_i \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.54)$$

Notemos que o reticulado é um conjunto discreto no subespaço de dimensão  $m$  gerado por  $\mathcal{B}$ . Dizemos também que  $L^m$  é um reticulado de dimensão  $m$  contido em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição. 1.6.2.** Dados um reticulado  $L^m$  no  $\mathbb{R}^n$  com conjunto de geradores  $\mathcal{B}$ , o conjunto de pontos  $\sum_{i=1}^m s_i u^i \in \mathbb{R}^n$  para os quais  $0 \leq s_i \leq 1$  é chamado de domínio fundamental do reticulado  $L$  associado ao conjunto de geradores  $\mathcal{B}$ .

**Definição. 1.6.3.** Dados um reticulado  $L^m$  no  $\mathbb{R}^n$  com conjunto de geradores  $\mathcal{B}$  e  $o_L$  um ponto no  $\mathbb{R}^n$ , o reticulado afim é o conjunto:

$$L^m(o_L) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u = o_L + s_1 u^1 + \dots + s_m u^m, \quad s_i \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.55)$$

**Exemplo. 1.6.1.** Consideremos o reticulado padrão do plano, ou seja  $L^2 = \mathbb{Z}^2$ . Temos vários geradores para tal reticulado. Por exemplo  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  é um conjunto de geradores para  $L^2$ .

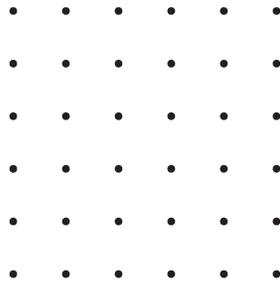


Figura 1.12:  $L^2 = \mathbb{Z}^2$ .

**Exemplo. 1.6.2.** Para o caso  $n = 2$  o teorema de Lagrange e Thue [Zon99] afirma que o reticulado hexagonal gerado por  $\mathcal{B}_r = \{2r(1, 0), r(1, \sqrt{3})\}$ , o qual denotamos por  $L_r^2(0, 0)$ , é o que proporciona o mais denso empacotamento de esferas de raio  $r$  (reticulado e não reticulado) em  $\mathbb{R}^2$ , ilustrado nas figuras 1.13 e 1.14.

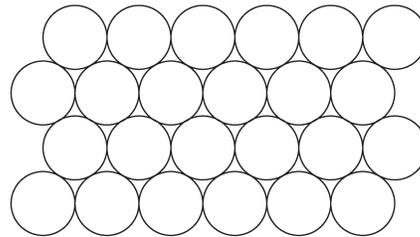
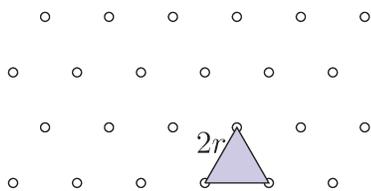


Figura 1.13: Reticulado  $L_r^2$  gerado por  $\mathcal{B}_r$ . Figura 1.14: Empacotamento Reticulado em  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo. 1.6.3.** Em 1611, J. Kepler fez a conjectura de que o mais denso empacotamento de esferas (reticulado e não reticulado) em  $\mathbb{R}^3$  tem densidade de centro  $1/\sqrt{32}$ . Carl F. Gauss em 1831 provou parcialmente a conjectura mostrando que esse é o maior valor para densidade de centro quando se considera apenas empacotamentos reticulados. Em 1998, Thomas Hales anunciou uma prova da conjectura de Kepler pelo método de

exaustão, que envolve verificação de muitos casos individuais usando cálculos computacionais complexos. A prova de Hales foi avaliada como 99% correta. Para maiores detalhes sobre a conjectura de Kepler ver [Zon99].

O reticulado gerado por  $\mathcal{B}_r = \{\sqrt{2}r(1, 1, 0), \sqrt{2}r(0, 1, 1), \sqrt{2}r(1, 0, 1)\}$ , o qual denotamos por  $L_r^3$ , é ilustrado nas figuras 1.15 e 1.16

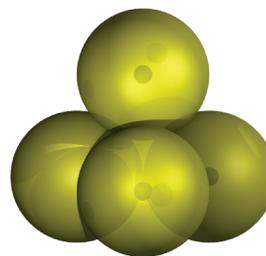
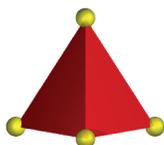


Figura 1.15: Reticulado  $L_r^3$  gerado por  $\mathcal{B}_r$ .  
Figura 1.16: Empacotamento reticulado em  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.7 Limitante inferior para $n_p(R, r)$

Na prática, começar empacotando desde  $k = 1$  ( $k$  número de itens) no algoritmo 1.3.1 não é uma boa escolha computacionalmente, pois é mais razoável tentar construir um limitante inferior. Para isto aproveitamos os empacotamentos reticulados com maior densidade: no plano  $\mathbb{R}^2$  e no espaço  $\mathbb{R}^3$ .

Sejam  $R$  um contêiner e  $r > 0$ , definimos

$$n_{\#}(R, r, o_L) = \#(L_r^n(o_L) \cap K_r(R)). \quad (1.56)$$

Isto é, o número de discos do reticulado  $L_r^n$  que estão contidos no contêiner  $R$ , logo pela definição de número de empacotamento temos

$$0 \leq n_{\#}(R, r, o_L) \leq n_p(R, r). \quad (1.57)$$

Daí o algoritmo 1.3.1 pode ser melhorado como:

**Algoritmo. 1.7.1.** Dados  $R$  uma região em  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ),  $o_L \in \mathbb{R}^n$ , e  $r > 0$ .

1. Calcular  $n_{\#}(R, r, o_L)$ .
2. Faça  $k = n_{\#}(R, r, o_L) + 1$ .
3. Se  $\Omega_k(R, r) = \emptyset$  parar. Em caso contrário, calcular  $x^k \in \Omega_k(R, r)$ .
4. Tomar  $k := k + 1$  e retornar ao passo 3.

Ilustramos na seguinte sequencia os passos do algoritmo nas figuras: 1.17, 1.18, 1.19, 1.20.

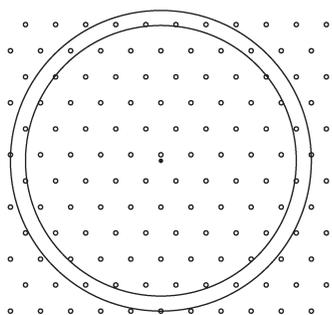


Figura 1.17: Reticulado  $L_{1/2}^2(o_L)$  gerado por  $\mathcal{B}_{1/2}$ .

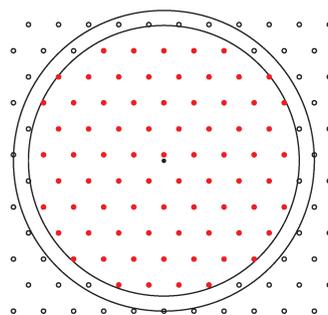


Figura 1.18: Número de pontos do reticulado no núcleo  $n_{\#} = 75$ .

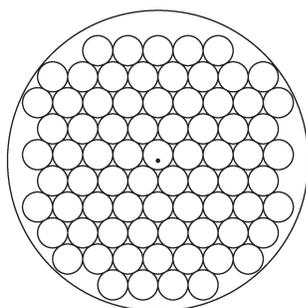


Figura 1.19:  $R = B[0, 5]$ ,  $n_{\#} = 75$ .

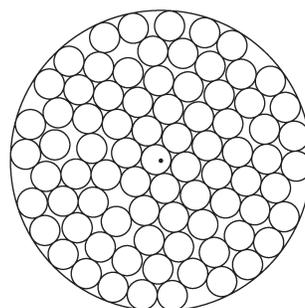


Figura 1.20:  $n_p \approx 80$ .



# Empacotando em Secções Cônicas

O problema de empacotamento pode ser formulado como um problema de otimização, e em alguns casos como um sistema de inequações explícitas, por exemplo quando o contêiner é um círculo 1.5.1 ou politopo 1.5.2. Mas se o contêiner for uma elipse o modelo matemático não é trivial, pois é preciso representar o plano maneira que seja fácil calcular a distância do centro da bola ao bordo do contêiner.

Para calcular o número máximo de itens (discos ou esferas) que o contêiner admite usamos o algoritmo 1.7.1, mas neste algoritmo precisamos verificar a desigualdade

$$d(x, \partial R) \geq r, \quad (2.1)$$

a qual se reduz a resolver outro problema de otimização, daí a dificuldade de formular tudo como um só problema de otimização.

No caso de empacotamento esférico numa região poliedral limitada ou esférica, o problema resolve-se calculando todos os pontos de  $R$  que satisfazem (2.1), isto é calculando o núcleo da região.

Em particular, se a região é dada por

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}, \quad (2.2)$$

onde  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação diferenciável, então a fronteira de  $R$  é o conjunto

$$\partial R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}. \quad (2.3)$$

**Definição. 2.0.1.** Seja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, dizemos que  $c \in \mathbb{R}$  é um valor regular de  $g$  quando não existem pontos críticos de  $g$  no nível  $c$ , ou seja,  $\nabla g(x) \neq 0$  para todo  $x \in g^{-1}(c)$ . Quando  $c$  é um valor regular de  $g$ , diz-se que o nível  $c$  é regular. Quando existem pontos críticos  $x$  tais que  $\nabla g(x) = 0$ , dizemos que  $c$  é um nível crítico de  $g$ .

Suponhamos que 0 seja um valor regular de  $g$ , então o teorema de função implícita garante que  $g^{-1}(0)$  é uma superfície (se  $n \geq 3$ ), ou uma curva (se  $n = 2$ ).

Pelo lema 1.2.1 temos que a bola  $B_\alpha$  centrada em  $x_\alpha$  e de raio  $r$ , está contida na região  $R$  se e somente se a relação (2.1) é satisfeita. Como a região  $R$  é compacta então sua fronteira  $\partial R = g^{-1}(0)$  é compacta, logo existe  $y_\alpha \in \partial R$  tal que satisfaz as equações de Lagrange

$$x_\alpha - y_\alpha = \lambda \nabla g(y_\alpha), \quad (2.4)$$

$$g(y_\alpha) = 0. \quad (2.5)$$

O vetor  $\nabla g(y_\alpha)$  é perpendicular ao conjunto de nível  $g^{-1}(0) = \partial R$ , onde  $y_\alpha$  é tal que  $g(y_\alpha) = 0$ . De fato, seja  $\eta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow g^{-1}(0)$  tal que  $\eta(0) = y_\alpha$  e  $\eta(t) \in g^{-1}(0) = \partial R$ , para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Então

$$0 = (g \circ \eta)'(0) = dg(\eta(0)) \eta'(0) = \langle \nabla g(y_\alpha), \eta'(0) \rangle, \quad (2.6)$$

ver figura 2.1.

Pelas equações (2.4) e (2.5), podemos calcular  $x_\alpha$  conhecendo  $y_\alpha$  e  $\lambda$  usando a fórmula (2.4) sob certas condições para  $R$ , isto é, podemos representar cada ponto de  $R$  por  $(y_\alpha, \lambda)$ .

Na realidade, desejamos representar os pontos de  $R$ , em algum sistema referencial onde seja fácil calcular a distância do ponto  $x_\alpha$  à fronteira.

**Definição. 2.0.2.** Sejam  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  e  $H : U \rightarrow \mathcal{R}$  uma aplicação contínua. Dizemos que o par  $(H, U)$  é uma representação do conjunto  $\mathcal{R}$  se  $H$  é sobrejetora, isto é,

$$H(U) = \mathcal{R}.$$

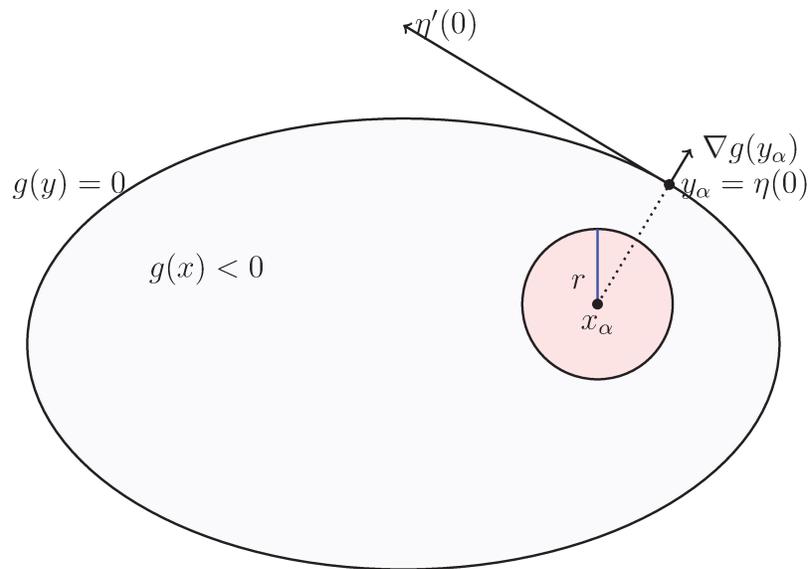


Figura 2.1: Região  $R : g(x) \leq 0$ .

**Exemplo. 2.0.1.** Seja  $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  o disco unitário, isto é  $\mathcal{R} = B[0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ , então as aplicações:

$$\begin{aligned} \phi : U = [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & \phi(t, s) &= (s \cos(t), s \sin(t)), & \text{(polar)} \\ H : U = S[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & H(q, s) &= sq \end{aligned}$$

são representações de  $\mathcal{R}$ , pois

$$\phi([0, 2\pi] \times [0, 1]) = B[0, 1],$$

$$H(S[0, 1] \times [0, 1]) = B[0, 1].$$

Ilustramos estas ideias na figura 2.2.

Logo, com este novo sistema de coordenadas é fácil calcular a distância de um ponto da  $B[0, 1]$  à fronteira  $S[0, 1]$ . No caso, se  $p \in B[0, 1]$  então existe  $(q, s) \in S[0, 1] \times [0, 1]$  tal que  $p = H(q, s)$ , pois  $H$  é sobrejetora, logo a distância é dada por:  $d(p, S[0, 1]) = d(H(q, s), q) = |q(1 - s)|$

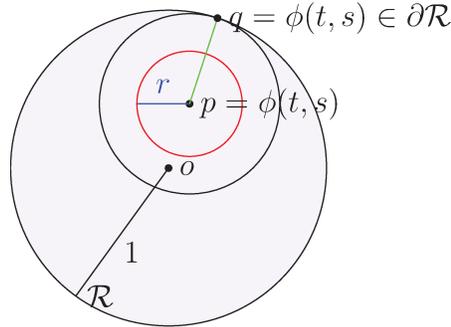


Figura 2.2: Região  $R : g(x) \leq 0$ .

## 2.1 No Plano $\mathbb{R}^2$

Nesta secção analisamos o problema de empacotamento esférico numa região plana, cuja fronteira é uma secção cônica, isto é: elipse, círculo, parábola ou uma combinação destas secções cônicas. Calcular a distância de um ponto à fronteira ainda nestes casos não é trivial, mas para cada região é possível construir uma representação ou um sistema de coordenadas onde seja fácil calculá-la.

A ideia geométrica é deformar um ponto  $q \in \partial R$  em  $p \in R$  tal que  $d(q, p) = d(p, \partial R)$ , isto pode ser feito usando um conceito semelhante à homotopia.

### 2.1.1 Elipse

**Definição. 2.1.1.** Uma elipse,  $\mathcal{E}$ , de focos  $f_1$  e  $f_2$  é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos  $p$  cuja soma das distâncias a  $f_1$  e  $f_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$ , maior do que a distância entre os focos  $2c \geq 0$ .

No caso, em que  $f_1 = (-c, 0)$ ,  $f_2 = (c, 0)$  e  $p = (x, y)$  obtemos a equação da elipse:  $\mathcal{E} : b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ , onde  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Neste caso a equação é conhecida como forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $x$ .

Seja  $E$  a região definida por:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 \leq 0\}, \quad (2.7)$$

a qual tem como fronteira a elipse  $\mathcal{E}$ , isto é:  $\partial E = \mathcal{E}$ .

Para  $(x, y) \in \partial E$ , definimos as aplicações  $o : \partial E \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $r : \partial E \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$o(x, y) = \left( \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x, 0 \right) \quad (2.8)$$

e

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 \frac{b^4}{a^4} + y^2}. \quad (2.9)$$

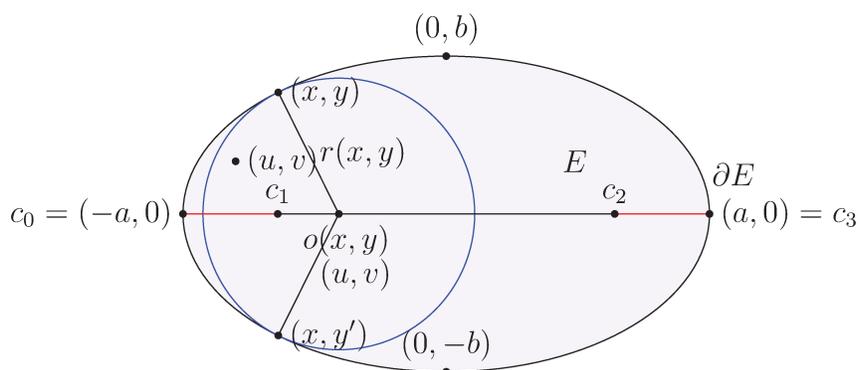


Figura 2.3: Região  $E$ .

Na figura 2.3 é possível acompanhar graficamente as aplicações definidas em (2.8) e (2.9), onde a primeira representa o centro e a segundo o raio de um disco contido em  $E$ , como se observa na figura.

O seguinte lema é muito importante, pois será utilizado para construir as equações que descrevem um empacotamento esférico em  $E$ , isto é, para garantir as condições sob as quais os discos estão contidos na região  $E$ .

**Lema. 2.1.1.** Seja  $(x, y) \in \partial E$ , então

1.  $B[o(x, y), r(x, y)] \subset E$ ,
2.  $o(x, y) = o(x', y') \Rightarrow x = x', y = \pm y'$ .

*Demonstração.* Seja  $(u, v) \in B[o(x, y), r(x, y)]$  então

$$d((u, v), o(x, y)) \leq r(x, y)$$

$\Updownarrow$

$$d((u, v), o(x, y))^2 \leq r(x, y)^2$$

$$\left( u - x \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] \right)^2 + v^2 \leq x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + y^2,$$

$$u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^2 + v^2 \leq x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + y^2,$$

$$u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 - 2x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + v^2 \leq x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + y^2,$$

$$u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 - 2x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + v^2 \leq y^2,$$

$$u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 - x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + v^2 \leq x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + y^2,$$

$$u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 \leq b^2,$$

$$u^2 + (x^2 - 2ux) \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 \leq b^2,$$

$$u^2 + (x^2 - 2ux) \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + u^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] - u^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 \leq b^2,$$

$$u^2 - u^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + (x^2 - 2ux) \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + u^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 \leq b^2,$$

$$u^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + (x^2 - 2ux + u^2) \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 \leq b^2,$$

$$u^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + (x - u)^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 \leq b^2,$$

$$u^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + v^2 \leq b^2,$$

finalmente

$$u^2b^2 + v^2a^2 \leq a^2b^2.$$

Daí concluímos que  $(u, v) \in E$ , isto é:

$$B[o(x, y), r(x, y)] \subset E.$$

□

Apresentamos agora uma função representação para a elipse, em que cada ponto  $p$  da região  $E$  é representado por três números reais  $(x, y, s)$ , onde  $(x, y) \in \mathcal{E}$  e  $s \in [0, 1]$  é um parâmetro que indica o grau de afastamento do ponto  $(x, y)$  à fronteira  $\partial E$ .

Seja a aplicação  $H : \partial E \times [0, 1] \longrightarrow E$  definida por

$$H(x, y; s) = (\sigma(s)x, sy), \quad (2.10)$$

onde  $\sigma(s) = \left(1 + (s-1) \frac{b^2}{a^2}\right)$ .

A aplicação  $H$  é uma representação da região  $E$ . De fato, pela definição  $H$  é polinomial logo uma função contínua, assim só falta mostrar que  $H$  é sobrejetora.

Seja  $(u, v) \in E$ . Temos que mostrar que existe  $(x_0, y_0, s_0) \in \partial E \times [0, 1]$  tal que  $H(x_0, y_0, s_0) = (u, v)$ . Isto é, temos que resolver o sistema de equações

$$\sigma(s)x = u, \quad (2.11)$$

$$sy = v, \quad (2.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.13)$$

nas variáveis  $x, y$  e  $s$ .

Sem perda de generalidade, suporemos  $a > b$ .

**Caso. 1.** Suponhamos e  $v \neq 0$  então  $s \neq 0$  e  $y \neq 0$ , daí substituindo as equações (2.11),(2.12) em (2.13) obtemos

$$(bus)^2 + (av\sigma(s))^2 = (abs\sigma(s))^2, \quad (2.14)$$

ou

$$-\frac{b^2s^2(a^2 + b^2(s-1))^2}{a^2} + \frac{v^2(a^2 + b^2(s-1))^2}{a^2} + b^2s^2u^2 = 0. \quad (2.15)$$

Resolver diretamente (2.15) é muito difícil pois é um polinômio de grau 4 em  $s$ . Usaremos o teorema de valor intermediário para garantir que o sistema (2.11)-(2.13), tem pelo menos uma solução.

Seja  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como

$$\phi(s) = (b u s)^2 + (a v \sigma(s))^2 - (a b s \sigma(s))^2. \quad (2.16)$$

A aplicação  $\phi$  é contínua no seu domínio e tem as seguintes propriedades

1.  $\phi(0) = 1 - \frac{b^2}{a^2} > 0$ ,
2.  $\phi(1) = (b u)^2 + (a v) - (a b)^2 \leq 0$ .

pelo teorema do valor intermediário concluímos que existe  $s_0 \in (0, 1]$  tal que  $\phi(s_0) = 0$ . Para obter  $x, y$  basta substituir  $s$  por  $s_0$  nas equações (2.11) e (2.12).

**Caso. 2.** Suponhamos que  $a(1 - \frac{b^2}{a^2}) \leq u \leq a$  e  $v = 0$ , isto é o ponto se localiza no segmento  $[c_2, c_3]$  (ver figura 2.3). Então o ponto  $(u, 0)$  pertence ao segmento de reta que liga os pontos  $(a(1 - \frac{b^2}{a^2}), 0)$  e  $(a, 0)$ , e  $H(a, 0, s)$  é uma curva que liga estes pontos, logo existe  $s_0 \in [0, 1]$ . Similarmente se  $c_0 = -a \leq u \leq -a(1 - \frac{b^2}{a^2}) = c_1$ , neste caso basta considerar  $H(-a, 0, s)$ .

**Caso. 3.** Suponhamos  $-a(1 - \frac{b^2}{a^2}) \leq u \leq a(1 - \frac{b^2}{a^2})$  e  $v = 0$ , isto é o ponto se localiza no segmento  $[c_1, c_2]$ , (ver figura 2.3) então  $-a\sigma(0) \leq u \leq a\sigma(0)$  se e somente se  $-a \leq \frac{u}{\sigma(0)} \leq a$  se e somente se  $\frac{u^2}{\sigma(0)^2} \leq a^2$ ,

$$\sigma(0) x = u, \quad (2.17)$$

$$0 y = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.17) na equação (2.19) obtemos

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left( a^2 - \frac{u^2}{\sigma(0)^2} \right). \quad (2.20)$$

Por hipótese  $a^2 - \frac{u^2}{\sigma(0)^2}$  é sempre positivo, daí podemos obter os valores para  $x$  e

$y$ .

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{u}{\sigma(0)}, \\ y_0 &= \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} \left( a^2 - \frac{u^2}{\sigma(0)^2} \right)}, \\ s_0 &= 0. \end{aligned}$$

Na figura 2.4, ilustramos geometricamente que a distância entre  $p \in E$  e  $\partial E$  pode ser calculada usando a representação  $H$ , pois  $p = H(q, s)$  para algum  $(q, s) \in \partial E \times [0, 1]$ . Observamos que a bola  $B[p, d(p, q)] \subset E$  e  $q \in \partial E$ , daí  $d(p, \partial E) = d(H(q, s), q)$ , isto é, podemos descrever o ponto  $p$  em termos da fronteira de  $E$  mais um parâmetro adicional  $s$ , o qual permite calcular  $d(p, \partial E)$ .

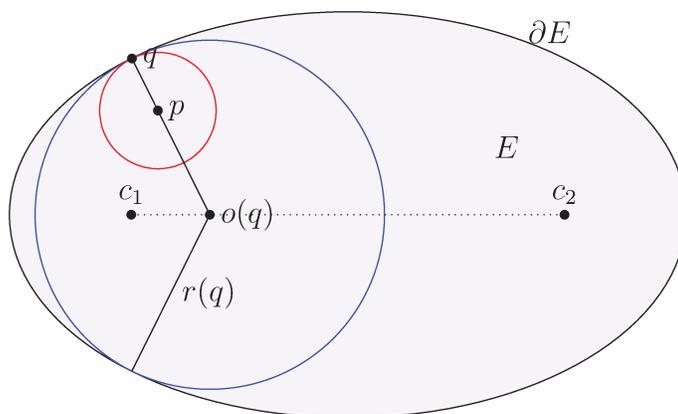


Figura 2.4:  $d(p, \partial E) = d(H(q, s), \partial E) = d(H(q, s), q)$ .

**Corolário. 2.1.1.** Seja  $p \in E$ , então existe  $(q, s) \in \partial E \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$  e  $d(p, q) = d(p, \partial E)$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in E$ . Como a aplicação  $H$  é sobrejetora, então existe  $(q, s) \in \partial E \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$ . Pelo lema 2.1.1 temos que  $B[o(q), r(q)] \subset E$ , daí pelo lema 1.2.1 temos que

$$o(q) \in E, \quad d(o(q), \partial E) \geq r(q).$$

Pela definição de  $H$ , temos que  $p$  é um ponto no segmento de reta que liga os pontos  $q$  e  $o(q)$ , isto é  $q, p, o(q)$  são colineares, logo

$$d(o(q), p) + d(p, q) = r(q), \tag{2.21}$$

então

$$B[p, d(p, q)] \subset B[o(q), r(q)] \subset E.$$

Daí

$$B[p, d(p, q)] \subset E \iff p \in E, \quad d(p, \partial E) \geq d(p, q),$$

o ponto  $q \in \partial E$  portanto

$$d(p, q) = d(p, \partial E). \quad (2.22)$$

□

Do corolário 2.1.1 podemos obter uma fórmula para calcular a distância de um ponto  $p \in E$  à fronteira  $\partial E$ . Isto resolve o problema de empacotar discos de mesmo raio numa elipse.

O problema de empacotamento esférico pode ser descrito por um sistema finito de equações não lineares, diferenciáveis usando as novas coordenadas  $(x, y, s)$ .

Na desigualdade

$$d(p, \partial E) \geq r$$

usando a função de representação  $H$ , substituímos  $p$  por  $H(q, s)$ , isto é

$$d(H(q, s), \partial E) = d(H(q, s), q) \quad (2.23)$$

e assim obtemos um método para calcular a distância à fronteira da região  $E$ , a qual permite calcular o núcleo de  $E$ .

$$H(q, s) \in K_r(E) \iff \begin{cases} q \in \partial E \\ 0 \leq s \leq 1, \\ d(q, H(q, s)) \geq r. \end{cases} \quad (2.24)$$

Daí

$$\Omega_k = \left\{ (H(q^1, s_1), \dots, H(q^k, s_k)) \in \mathbb{R}^{k3} \left| \begin{array}{l} q \in \partial E, \\ d(H(q^i, s_i), q^i) \geq r, \\ d(H(q^i, s_i), H(q^j, s_j)) \geq 2r, \quad i \neq j \\ 0 \leq s_i \leq 1, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \end{array} \right. \right\}. \quad (2.25)$$

Para simplificar definimos o conjunto

$$\Omega_k = \left\{ H((x^i, y^i, s_i))_j^k \in \mathbb{R}^{k3} \left| \begin{array}{l} b^2(x^i)^2 + a^2(y^i)^2 = a^2b^2, \\ (s_i - 1)^2 \left[ (x^i)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y^i)^2 \right] \geq r^2, \\ (\sigma(s_i)x^i - \sigma(s_j)x^j)^2 + (s_i y^i - s_j y^j)^2 \geq (2r)^2 \\ 0 \leq s_i \leq 1, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \\ \sigma(s) = \left(1 + (s - 1) \left(\frac{b}{a}\right)^2\right). \end{array} \right. \right\}. \quad (2.26)$$

**Exemplo. 2.1.1.** Seja  $r = 1$ , e

$$E_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\} \quad (2.27)$$

Usando o *solver* algencan [ABMS07], calculamos o número de empacotamento  $n_p$  obtendo  $n_p \approx 11$ . A configuração obtida é ilustrada na figura 2.5.

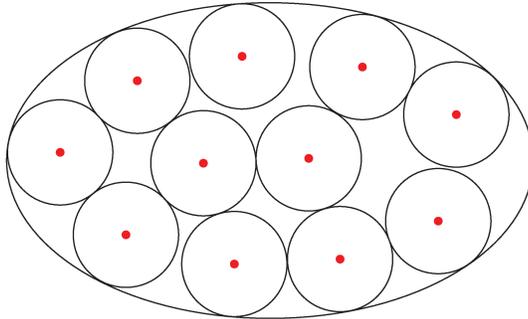


Figura 2.5:  $r = 1$ ,  $n_p \approx 11$ .

Para  $r = \frac{1}{2}$  e  $E_1$  calculamos o número de empacotamento  $n_p$  obtendo  $n_p \approx 47$  e a configuração obtida é ilustrada na figura 2.6.

Para  $r = 1$ , e

$$E_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\} \quad (2.28)$$

obtivemos  $n_p \approx 11$  com a seguinte configuração da figura 2.7.

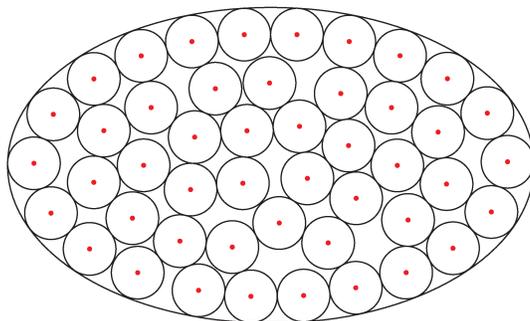


Figura 2.6:  $r = \frac{1}{2}$ ,  $n_p \approx 47$ .

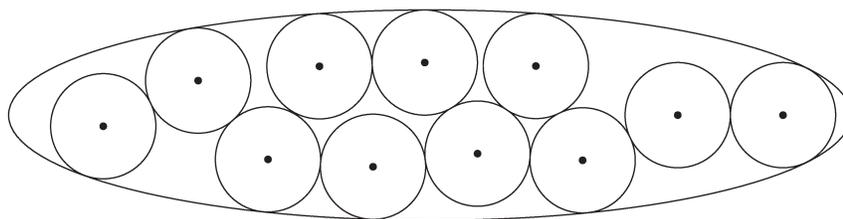


Figura 2.7:  $r = 1$ ,  $n_p \approx 11$ .

### 2.1.2 Intersecção de Elipses

Consideremos o problema de empacotar discos num contêiner formado pela intersecção de duas ou mais elipses. Para resolver o problema podemos usar duas funções auxiliares construídas sob o mesmo raciocínio da seção anterior.

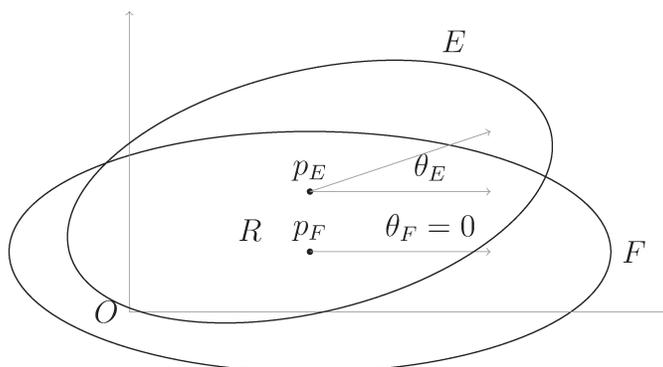
Sejam  $E$  e  $F$  duas elipses centradas nos pontos  $p_E$  e  $p_F$ , com ângulo de rotação  $\theta_E$  e  $\theta_F$  com respeito ao eixo  $x$  respectivamente, como se mostra na figura 2.8.

Para construir uma representação, isto é, uma função auxiliar, definimos explicitamente a aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:

$$T(p) = p_0 + G(\theta) p \quad (2.29)$$

onde  $G$  é a matriz de rotação no sentido anti-horário, definida por:

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Figura 2.8:  $R = E \cap F$ .

Suponhamos conhecida a equação canônica  $E'$  e  $F'$  das elipse  $E$  e  $F$ , então podemos definir as representações  $\bar{H}_E : \partial E' \times [0, 1] \rightarrow E$  e  $\bar{H}_F : \partial F' \times [0, 1] \rightarrow F$  de  $E$  e  $F$  respectivamente, dadas como

$$\bar{H}_E(q_{E'}, s_{E'}) = p_{E'} + G(\theta_{E'})H_{E'}(q_{E'}, s_{E'}), \quad \bar{H}_F(q_{F'}, s_{F'}) = p_F + G(\theta_{F'})H_{F'}(q_{F'}, s_{F'}).$$

As aplicações  $\bar{H}_E$  e  $\bar{H}_F$  são sobrejetoras, pois  $T$  é uma aplicação bijetora e  $H_E, H_F$  é sobrejetora.

Seja  $p \in E \cap F$ , então existem  $(q_{E'}, s_{E'}) \in \partial E' \times [0, 1]$  e  $(q_{F'}, s_{F'}) \in \partial F' \times [0, 1]$  tais que:

$$\bar{H}_E(q_{E'}, s_{E'}) = p \tag{2.31}$$

e

$$\bar{H}_F(q_{F'}, s_{F'}) = p. \tag{2.32}$$

Então, pelas equações (2.31) e (2.32), obtemos a seguinte igualdade:

$$\bar{H}_E(q_{E'}, s_{E'}) = \bar{H}_F(q_{F'}, s_{F'}). \tag{2.33}$$

A equação (2.33) obriga o ponto  $p$  a ficar na interseção das elipses  $E$  e  $F$ , logo será adicionada em nosso sistema de equações que determinam o empacotamento na interseção.

Finalmente, descrevemos as equações que determinam o empacotamento, neste caso um ponto  $p$  é descrito em função de quatro variáveis  $(q_{E'}, s_{E'}, q_{F'}, s_{F'})$  :

$$\Omega_k = \left\{ \left( \bar{H}_E(q_{E'}^i, s_{E'}^i) \right)_{i=1}^k \in \mathbb{R}^{k^2} \left| \begin{array}{l} q_{E'}^i \in \partial E', \\ d(\bar{H}_E(q_{E'}^i, s_{E'}^i), q_{E'}^i) \geq r, \\ d(\bar{H}_E(q_{E'}^i, s_{E'}^i), \bar{H}_E(q_{E'}^i, s_{E'}^i)) \geq 2r, \\ 0 \leq s_{E'}^i \leq 1, \\ q_{F'}^i \in \partial F', \\ d(\bar{H}_F(q_{F'}^i, s_{F'}^i), q_{F'}^i) \geq r, \\ 0 \leq s_{F'}^i \leq 1, \\ \bar{H}_E(q_{E'}^i, s_{E'}^i) = \bar{H}_F(q_{F'}^i, s_{F'}^i), \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \end{array} \right. \right\}. \quad (2.34)$$

Supondo que as equações canônicas das elipses  $E$  e  $F$  sejam:

$$E' : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad F' : \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} \leq 1, \quad (2.35)$$

podemos reescrever o sistema (2.34) , onde  $a \geq b$  e  $c \geq d$  :

$$\Omega_k = \left\{ H((x^i, y^i, s_i)_j^k \left| \begin{array}{l} b^2(x_{E'}^i)^2 + a^2(y_{E'}^i)^2 = a^2b^2, \\ (s_{E'}^i - 1)^2 \left[ (x_{E'}^i)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y_{E'}^i)^2 \right] \geq r^2, \\ (\sigma(s_{E'}^i)x_{E'}^i - \sigma(s_{E'}^j)x_{E'}^j)^2 + (s_{E'}^i y_{E'}^i - s_{E'}^j y_{E'}^j)^2 \geq (2r)^2 \\ 0 \leq s_{E'}^i \leq 1, \\ d^2(x_{F'}^i)^2 + c^2(y_{F'}^i)^2 = d^2c^2, \\ (s_{F'}^i - 1)^2 \left[ (x_{F'}^i)^2 \left(\frac{d}{c}\right)^4 + (y_{F'}^i)^2 \right] \geq r^2, \\ 0 \leq s_{F'}^i \leq 1, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \\ \sigma_{E'}(s_{E'}^i)x_{E'}^i - \sigma_{F'}(s_{F'}^i)x_{F'}^i \cos(\theta_{E'} - \theta_{F'}) - \\ s_{F'}^i y_{F'}^i \sin(\theta_{E'} - \theta_{F'}) = \cos(\theta_{E'}) (y_F^0) + \sin(\theta_{E'}) (y_F^0), \\ s_{E'}^i y_{E'}^i - \sigma_{F'}(s_{F'}^i)x_{F'}^i \sin(\theta_{E'} - \theta_{F'}) - \\ s_{F'}^i y_{F'}^i \cos(\theta_{E'} - \theta_{F'}) = -\sin(\theta_{E'}) (y_F^0) + \cos(\theta_{E'}) (y_F^0), \end{array} \right. \right\}. \quad (2.36)$$

onde  $\sigma_E(s) = \left(1 + (s-1) \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)$  e  $\sigma_{F'}(s) = \left(1 + (s-1) \left(\frac{d}{c}\right)^2\right)$ .

**Exemplo. 2.1.2.** Sejam as elipses  $E$  e  $F$ , centradas em  $p_E = (3, 2)$  e  $p_F = (3, 1)$  com equações canônicas  $E' : \frac{x^2}{(\sqrt{17})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$  e  $F' : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ , e rotação  $\theta_E = \arctan \frac{1}{4}$  e  $\theta_F = 0$  respectivamente, logo as matrizes de rotação são:

$$G_E(\theta_E) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}, \quad G_F(\theta_F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

A configuração para  $r = \frac{1}{2}$  é mostrada na figura 2.9.

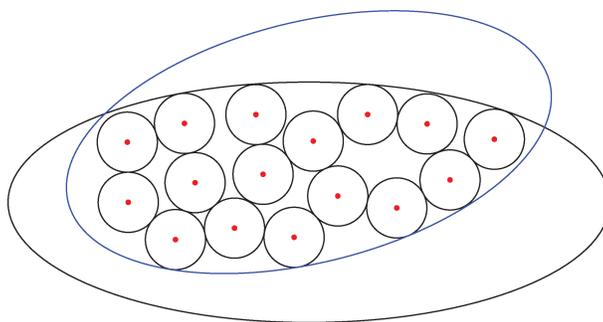


Figura 2.9:  $r = \frac{1}{2}$ ,  $n_p \approx 16$ .

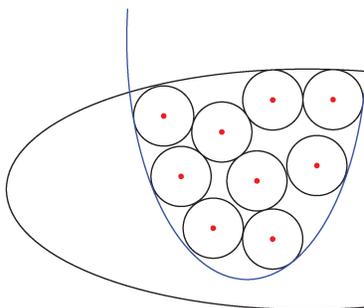
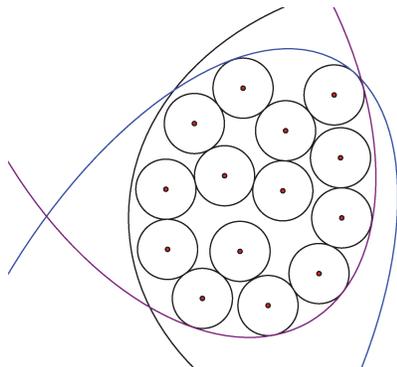
**Exemplo. 2.1.3.** Sejam as elipses  $E$  e  $F$ , centradas em  $p_E = (2, \frac{7}{2})$  e  $p_F = (3, 1)$  com equações canônicas  $E' : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$  e  $F' : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ , e rotação  $\theta_E = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta_F = 0$  respectivamente, neste caso o número de empacotamento é aproximadamente  $n_p \approx 9$ . A configuração é mostrada na figura 2.10.

Usando as equações (2.36), podemos empacotar discos de mesmo raio numa interseção de  $n$  elipses arbitrárias. Mostramos isto no seguinte exemplo.

**Exemplo. 2.1.4.** Sejam as elipses  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , centradas em  $p_{E_1} = (0, 3)$ ,  $p_{E_2} = (-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$  e  $p_{E_3} = (-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$  com equações canônicas  $E'_1 : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$  e  $E'_2 : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$  e  $E'_3 : \frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ , e rotação  $\theta_{E_1} = 0$ ,  $\theta_{E_2} = \frac{2\pi}{3}$  e  $\theta_{E_3} = \frac{4\pi}{3}$  respectivamente. Daí o número de empacotamento é  $n_p \approx 14$ , com a configuração da figura 2.11.

### 2.1.3 Parábola

Nesta subseção consideramos o problema de empacotamento esférico numa região plana limitada inferiormente por uma parábola, e limitada superiormente por uma reta. Pri-

Figura 2.10:  $r = \frac{1}{2}$ ,  $n_p \approx 9$ .Figura 2.11:  $r = \frac{1}{2}$ ,  $n_p \approx 14$ .

meiro definimos formalmente uma parábola.

**Definição. 2.1.2.** Sejam  $l$  uma reta no plano e  $f$  um ponto no plano não pertencente a  $l$ . A parábola,  $P$ , de diretriz  $l$  e foco  $f$  é o conjunto que consiste de todos pontos  $p$  do plano que são equidistantes do ponto  $f$  e da reta  $l$ .

$$P = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, f) = d(p, l)\}. \quad (2.38)$$

O número  $2\rho = d(f, l)$  é o parâmetro da parábola. A forma canônica da parábola em relação ao sistema de coordenadas  $oxy$  é a equação

$$P : 4\rho y = x^2,$$

e o contêiner será descrito por:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 4\rho y \geq x^2, \\ xa + by \leq c \end{array} \right\}. \quad (2.39)$$

Para resolver o problema do empacotamento esférico definimos o conjunto auxiliar

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4\rho y \leq x^2\},$$

cujas fronteira é uma parábola, e aplicação  $o : \partial\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como:

$$o(x, y) = (0, y + 2\rho).$$

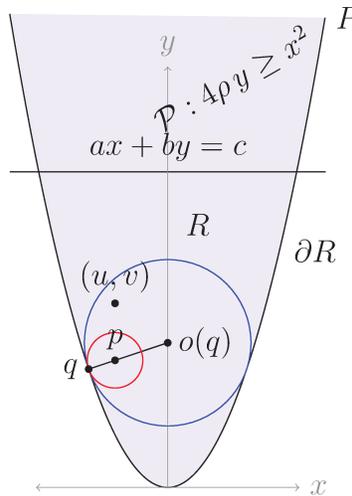


Figura 2.12:  $R$  descrita em (2.39)

Na figura 2.12 observa-se que o disco centrado em  $o(q)$  e raio  $d(q, o(q))$  está contido no conjunto  $\mathcal{P}$  e intercepta a fronteira no ponto  $q$ . Isto mostra que a distância entre  $o(q)$  e  $\partial\mathcal{P}$  é exatamente  $d(q, o(q))$ . Um disco com centro  $p$  no segmento  $\overline{qo(q)}$  e raio menor que  $d(q, p)$  está contido no conjunto  $\mathcal{P}$ . Mais formalmente temos:

**Lema. 2.1.2.** Seja  $q \in \partial\mathcal{P}$  então

1.  $B[o(q), d(q, o(q))] \subset \mathcal{P}$ .

2. Se  $o(x, y) = o(x', y')$  então  $y = y'$  e  $x = \pm x'$ .

*Demonstração.* Sejam  $q = (x, y)$  e  $(u, v) \in B[o(q), d(q, o(q))]$ , então

$$d((u, v), o(q)) \leq d(q, o(q))$$

se e somente se

$$\begin{aligned} d((u, v), o(q))^2 &\leq d(q, o(q))^2, \\ u^2 + (v - (y + 2\rho))^2 &\leq x^2 + (y - (y + 2\rho))^2, \\ u^2 + v^2 - 2v(y + 2\rho) + (y + 2\rho)^2 &\leq x^2 + (2\rho)^2, \\ u^2 + v^2 - 2v(y + 2\rho) + y^2 + 4\rho y + (2\rho)^2 &\leq x^2 + (2\rho)^2. \end{aligned}$$

Como  $q \in \partial\mathcal{P}$  então  $4\rho y = x^2$ , e assim

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2vy - 4v\rho + y^2 &\leq 0 \\ u^2 - 4v\rho + (v^2 - 2vy + y^2) &\leq 0 \\ u^2 - 4v\rho + (v - y)^2 &\leq 0 \\ u^2 - 4v\rho &\leq 0, \end{aligned} \tag{2.40}$$

pois  $(v - y)^2 \geq 0$ . Finalmente a desigualdade (2.40) mostra que

$$B[o(q), d(q, o(q))] \subset \mathcal{P}.$$

□

Gostaríamos de ter um sistema de coordenadas, pelo menos do contêiner, que nos permitisse o cálculo da distância de um ponto  $p$  à fronteira  $\partial\mathcal{P}$ , para determinar se um disco está nele ou não. Usando o lema 2.1.2, isto é possível, pois dado um ponto  $p \in \mathcal{P}$  este pode ser escrito em função de três parâmetros  $(x, y, s)$  onde  $(x, y) \in \partial\mathcal{P}$  e  $s \in [0, 1]$ .

Seja

$$H : \partial\mathcal{P} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{P}, \tag{2.41}$$

definida como

$$H(x, y; s) = (sx, y + 2\rho(1 - s)), \tag{2.42}$$

A aplicação  $H$  é uma representação do conjunto  $\mathcal{P}$ . De fato  $H$  é uma aplicação contínua e é sobrejetora.

Seja  $(u, v) \in \mathcal{P}$ . Mostremos que existe  $(x_0, y_0, s_0) \in \partial\mathcal{P} \times [0, 1]$  tal que  $H(x_0, y_0, s_0) = (u, v)$ . Isto é equivalente a resolver o sistema:

$$s x = u, \quad (2.43)$$

$$y + 2\rho(1 - s) = v, \quad (2.44)$$

$$x^2 = 4\rho y. \quad (2.45)$$

A equação (2.43) é equivalente a

$$s^2 x^2 = u^2. \quad (2.46)$$

Substituindo (2.45) em (2.46) obtemos

$$s^2 4\rho y = u^2, \quad (2.47)$$

isolando  $y$  da equação (2.44) e substituindo em (2.47) obtemos

$$s^2 4\rho(v - 2\rho(1 - s)) = u^2. \quad (2.48)$$

Novamente para mostrar que existe um número real no intervalo  $[0, 1]$ , fazemos uso do teorema do valor intermediário.

Seja a função auxiliar  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\phi(s) = s^2 4\rho(v - 2\rho(1 - s)) - u^2, \quad (2.49)$$

a função  $\phi$  é contínua e satisfaz:

1.  $\phi(0) = -u^2 \leq 0$ ,
2.  $\phi(1) = 4\rho v - u^2 \geq 0$ ,

pois, por hipótese  $(u, v) \in \mathcal{P}$ . Logo concluímos pelo teorema de valor intermediário que existe  $s_0 \in [0, 1]$  tal que  $\phi(s_0) = 0$ . Obtido o valor de  $s$  substituímos em (2.43), (2.44) ou (2.45) para calcular os valores de  $x_0$  e  $y_0$ .

**Corolário. 2.1.2.** Seja  $p \in \mathcal{P}$ , então existe  $(q, s) \in \partial\mathcal{P} \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$  e  $d(p, q) = d(p, \partial\mathcal{P})$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in \mathcal{P}$ , como a aplicação  $H$  é sobrejetora temos que existe  $(q, s) \in \partial\mathcal{P} \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$ . Pelo lema 2.1.2 temos que  $B[o(q), r(q)] \subset \mathcal{P}$ , onde  $r(q) = d(q, o(q))$ . Daí pela lema 1.2.1 temos que

$$o(q) \in \mathcal{P} \quad d(o(q), \partial\mathcal{P}) \geq r(q).$$

Pela definição de  $H$ ,  $p$  é um ponto no segmento de reta que liga os pontos  $q$  e  $o(q)$ , isto é  $q, p, o(q)$  são colineares, assim

$$d(o(q), p) + d(p, q) = r(q), \quad (2.50)$$

então

$$B[p, d(p, q)] \subset B[o(q), r(q)] \subset \mathcal{P},$$

daí

$$B[p, d(p, q)] \subset \mathcal{P} \iff p \in \mathcal{P}, \quad d(p, \partial) \geq d(p, q).$$

O ponto  $q \in \partial\mathcal{P}$  então

$$d(p, q) = d(p, \partial\mathcal{P}). \quad (2.51)$$

□

O corolário 2.1.2 proporciona um método para calcular a distância de um ponto  $p = H(H(q, s))$  à fronteira do conjunto  $\mathcal{P}$ , o qual resolve o problema de empacotamento esférico:

$$d(H(q, s), \partial\mathcal{P}) = d(H(q, s), q). \quad (2.52)$$

Nossa região  $R$  tem fronteira formada por uma parte de  $\partial\mathcal{P}$  e a reta  $L : ax + by = c$ . Suponhamos  $r > 0$ , então o ponto  $p \in K_r(R)$  se e só se  $d(p, \partial\mathcal{P}) \geq r$  e  $d(p, L) \geq r$ . O ponto  $p$  na nova representação é descrito por  $p(q, s) = H(q, s)$ , um ponto  $q \in \partial\mathcal{P}$  e um parâmetro  $s$ .

Daí

$$H(q, s) \in K_r(R) \iff \begin{cases} q \in \partial\mathcal{P}, \\ 0 \leq s \leq 1, \\ d(q, H(q, s)) \geq r, \\ \langle H(q, s), (a, b) \rangle \leq c - r\sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \quad (2.53)$$

Logo podemos escrever as equações que caracterizam um empacotamento de  $n_p$  discos na região  $R$  usando a equivalência (2.53):

$$\Omega_k = \left\{ (H(x^i, y^i; s_i))_i^k \left| \begin{array}{l} (x_i)^2 = 4\rho y_i, \\ a s_i x_i + (y_i + 2\rho(1 - s_i)) b \leq c - r\sqrt{a^2 + b^2}, \\ r^2 \leq (1 - s_i)^2((x_i)^2 + (2\rho)^2), \\ (2r)^2 \leq [(s_i x_i - s_j x_j)^2 + (y_i - y_j + 2\rho(s_j - s_i))^2], \quad i < j \\ 0 \leq s_i \leq 1. \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\} \end{array} \right. \right\}. \quad (2.54)$$

O conjunto  $\Omega_k$  descrito em (2.54) determina um empacotamento de  $k$  discos em  $R$ . Para encontrar o número máximo de discos em  $R$  determinamos a sequência de conjuntos  $\Omega_k$  para  $k = 1, \dots$  até encontrar  $\Omega_k = \emptyset$ .

**Exemplo. 2.1.5.** Sejam  $\rho = \frac{1}{4}$  e  $a = 1, b = 0$  e  $c = 7$ , então, resolvendo o sistema (2.54) para  $k = 1, \dots$  podemos calcular o número de empacotamento  $n_p$  para a região  $R$ . Primeiro para  $r = 1$  o número de empacotamento é  $n_p \approx 4$ , (ver figura 2.13) e para  $r = \frac{1}{2}$  o número de empacotamento é  $n_p \approx 22$  (ver figura 2.14).

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} y \geq x^2, \\ y \leq 7 \end{array} \right. \right\} \quad (2.55)$$

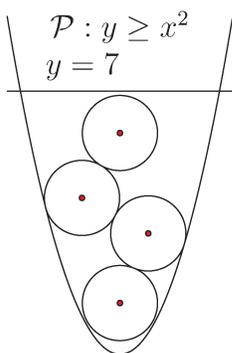


Figura 2.13:  $r = 1$ ,  $n_p \approx 4$

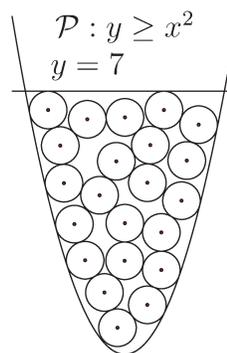


Figura 2.14:  $r = \frac{1}{2}$ ,  $n_p \approx 22$

**Exemplo. 2.1.6.** O contêiner não necessariamente tem que ser convexo, no seguinte exemplo a região  $R$  é não convexa, neste exemplo a parte superior da região é parte de uma circunferência. No capítulo 1 mostramos que é fácil calcular a distância de um ponto a uma curva esférica ou reta. Seja a região  $R$  dada por:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y \geq x^2, \\ y \leq 9, \\ x^2 + y^2 \geq 9 \end{array} \right\}. \quad (2.56)$$

Para  $r = \frac{1}{2}$  o número de empacotamento é  $n_p \approx 19$ , ver figura 2.15.

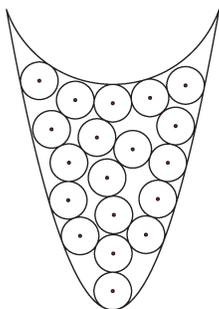


Figura 2.15:  $r = \frac{1}{2}$ ,  $n_p \approx 19$ .

## 2.2 No espaço $\mathbb{R}^3$

Nesta seção nosso objetivo é resolver o problema de empacotamento esférico num contêiner tridimensional  $R$ , não necessariamente poliedral ou esférico, isto é, dadas  $k$  esferas gostaríamos de saber se é possível empacotar em  $R$  as  $k$  esferas.

Seja  $R$  uma região em  $\mathbb{R}^3$  definida por uma função  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciável, isto é:

$$R = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid g(q) \leq 0\}.$$

Suponhamos que a bola  $B[p, r]$  está contida em  $R$ , e intercepta  $\partial R$  pelo menos num ponto  $q_0$ , então  $q_0$  é uma solução para o problema,

$$\min_{q \in \partial R} |q - p|.$$

Daí o vetor gradiente  $\nabla g(q_0)$  é perpendicular à superfície  $\partial R$ , e paralelo ao vetor  $q_0 - p$ . Logo é razoável construir um sistema de coordenadas em  $R$ , onde seja possível aproximar sua fronteira transversalmente e onde seja fácil calcular a distância do ponto  $p$  à fronteira.

### 2.2.1 Cone

Um cone é um sólido geométrico formado por todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto  $V$  (vértice) em comum e a outra extremidade em um ponto qualquer de uma mesma região plana  $\Pi$  (delimitada por uma curva suave, a base).

Consideremos

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \left| \begin{array}{l} \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 \leq \beta^2 z^2, \\ a x + b y + c z \leq d, \\ a' x + b' y + c' z \geq d', \end{array} \right. \right\}. \quad (2.57)$$

O problema de empacotamento esférico em  $R$  pode ser resolvido usando dois métodos: calculando explicitamente o núcleo de  $R$ , ou construindo um sistema de coordenadas onde seja fácil calcular a distância de um ponto do sólido à fronteira dele.

Definimos o conjunto auxiliar

$$\mathcal{C} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 \leq \beta^2 z^2 \}. \quad (2.58)$$

Seja a aplicação  $o : \partial\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como

$$o(x, y, z) = (0, 0, z\gamma) \quad (2.59)$$

onde  $\gamma = \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right)$ .

Seja  $r : \partial\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$r(x, y, z) = \sqrt{\eta(\eta + 1)} |z|, \quad (2.60)$$

onde  $\eta = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$ .

As ideias geométricas para construir uma parametrização na qual seja fácil calcular o núcleo de  $R$  são similares aos casos anteriores: elipse e parábola.

O lema seguinte é muito importante, pois é muito útil para obter uma fórmula para calcular a distância de um ponto do sólido à fronteira.

**Lema. 2.2.1.** Seja  $q \in \partial\mathcal{C}$ , então

$$B[o(q), r(q)] \subset \mathcal{C}.$$

*Demonstração.* Seja  $p = (u, v, w) \in B[o(q), r(q)]$ , então

$$d(p, o(q))^2 \leq r(q)^2, \quad (2.61)$$

$$u^2 + v^2 + (w - z\gamma)^2 \leq \eta(\eta + 1)|z|^2,$$

$$u^2 + v^2 + (w - z(1 + \eta))^2 \leq \eta|z|^2 + \eta^2|z|^2,$$

$$u^2 + v^2 + (w - z)^2 - 2w\eta z + 2z^2\eta + (\eta z)^2 \leq \eta|z|^2 + \eta^2|z|^2,$$

como  $(w - z)^2 \geq 0$ , e simplificando obtemos

$$u^2 + v^2 - 2w\eta z + z^2\eta \leq 0,$$

$$u^2 + v^2 + w^2\eta - 2w\eta z + z^2\eta \leq w^2\eta,$$

$$u^2 + v^2 + (w - z)^2 - w^2\eta \leq 0,$$

finalmente como  $(w - z)^2 \geq 0$ , então

$$u^2 + v^2 - w^2\eta \leq 0,$$

se, e só se,

$$\alpha^2 u^2 + \alpha^2 v^2 - \beta^2 w^2 \leq 0,$$

pois  $\eta = \frac{\beta}{\alpha}$ . □

Definimos  $H : \partial\mathcal{C} \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}$  por

$$H(x, y, z, s) = (sx, sy, z(\gamma + s(1 - \gamma))). \quad (2.62)$$

A aplicação  $H$  é contínua, e afirmamos que  $H$  é uma representação do conjunto  $\mathcal{C}$  definido em (2.58) pois é sobrejetora, De fato; seja  $(u, v, w) \in \mathcal{C}$ . Mostremos que existe  $(x_0, y_0, z_0, s_0) \in \partial\mathcal{C} \times [0, 1]$  tal que  $H(x_0, y_0, z_0, s_0) = (u, v, w)$ . Isto é equivalente a mostrar que o sistema a seguir sempre tem pelo menos uma solução

$$sx = u, \quad (2.63)$$

$$sy = v, \quad (2.64)$$

$$(\gamma + s(1 - \gamma))z = w, \quad (2.65)$$

$$\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \beta^2 z^2. \quad (2.66)$$

Multiplicando a equação (2.66) por  $s^2$  obtemos

$$\alpha^2 (x s)^2 + \alpha^2 (y s)^2 = \beta^2 (z s)^2. \quad (2.67)$$

Substituindo as equações (2.63), (2.64) na equação (2.67) obtemos

$$\alpha^2 u^2 + \alpha^2 v^2 = \beta^2 z^2 s^2. \quad (2.68)$$

Multiplicando a equação (2.68) por  $(\gamma + s(1 - \gamma))^2$  temos

$$(\gamma + s(1 - \gamma))^2 (\alpha^2 u^2 + \alpha^2 v^2) = \beta^2 ((\gamma + s(1 - \gamma)) z)^2 s^2. \quad (2.69)$$

Usando a equação (2.65) na equação (2.69), obtemos um polinômio em  $s$ ,

$$(\gamma + s(1 - \gamma))^2 (\alpha^2 u^2 + \alpha^2 v^2) = \beta^2 w^2 s^2. \quad (2.70)$$

Mostremos que existe um número real  $s$  no intervalo  $[0, 1]$  que satisfaça a equação (2.70). A existência de  $s$  é garantida pelo teorema do valor intermediário, da seguinte forma:

Seja  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\phi(s) = (\gamma + s(1 - \gamma))^2 (\alpha^2 u^2 + \alpha^2 v^2) - \beta^2 w^2 s^2. \quad (2.71)$$

A função  $\phi$  é contínua no seu domínio e satisfaz:

1.  $\phi(0) = \gamma^2 (\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2) \geq 0$ ,
2.  $\phi(1) = \alpha^2 u^2 + \alpha^2 v^2 - w^2 \beta^2 \leq 0$ , pois  $(u, v, w) \in \mathcal{C}$ .

Pelo teorema do valor intermediário concluímos que existe  $s_0 \in [0, 1]$  tal que  $\phi(s_0) = 0$ .

Note que  $\xi(s) = \gamma + s(1 - \gamma) \neq 0$  para todo  $s \in [0, 1]$ , pois  $\xi(s)$  é uma função decrescente, e  $\xi(0) = \gamma \geq \xi(1) = 1$ .

Se  $s = 0$  então  $0 = u, 0 = v$  e  $z = \frac{w}{\xi(0)}$ . Se  $s \neq 0$  então

$$\begin{aligned} s &= s_0, \\ x_0 &= \frac{u}{s_0}, \\ y_0 &= \frac{v}{s_0}, \\ z_0 &= \frac{w}{(\gamma + s(1 - \gamma))}. \end{aligned}$$

Logo a função  $H$  é sobrejetora.

Usando a representação  $H$  podemos obter uma fórmula para calcular a distância de um ponto  $p \in \mathcal{C}$  à fronteira  $\partial \mathcal{C}$ .

**Corolário. 2.2.1.** Seja  $p \in \mathcal{C}$ , então existe  $(q; s) \in \partial\mathcal{C} \times [0, 1]$  tal que  $H(q; s) = p$  e  $d(p, q) = d(p, \partial\mathcal{C})$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in \mathcal{C}$ , como a aplicação  $H$  é uma aplicação sobrejetora existe  $(q, s) \in \partial\mathcal{P} \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$ . Pelo lema 2.2.1 temos que  $B[o(q), r(q)] \subset \mathcal{C}$ . Pela definição de  $H$ ,  $p$  é um ponto no segmento de reta que liga os pontos  $q$  e  $o(q)$ , isto é  $q, p, o(q)$  são colineares, então

$$d(o(q), p) + d(p, q) = r(q), \quad (2.72)$$

e

$$B[p, d(p, q)] \subset B[o(q), r(q)] \subset \mathcal{C}.$$

Daí pelo lema 1.2.1 temos

$$B[p, d(p, q)] \subset \mathcal{C} \iff p \in \mathcal{C}, \quad d(p, \partial\mathcal{C}) \geq d(p, q).$$

O ponto  $q \in \partial\mathcal{C}$ , então

$$d(p, q) = d(p, \partial\mathcal{C}). \quad (2.73)$$

□

O corolário 2.2.1 dá um método para calcular o núcleo de  $R$ , isto é, dado um ponto  $p$  podemos escrevê-lo como  $H(q, s)$ . Assim pelo corolário 2.2.1 obtemos

$$d(H(q, s), \partial\mathcal{C}) = d(H(q, s), q). \quad (2.74)$$

Daí

$$H(q, s) \in K_r(R) \iff \begin{cases} q \in \partial\mathcal{C}, \\ 0 \leq s \leq 1, \\ d(q, H(q, s)) \geq r, \\ \langle H(q, s), (a, b, c) \rangle \leq d - r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \\ \langle H(q, s), (a', b', c') \rangle \leq d' - r\sqrt{(a')^2 + (b')^2 + (c')^2}. \end{cases} \quad (2.75)$$

A quarta e quinta relações em (2.75) dizem que o ponto  $H(q, s)$  está a uma distância maior ou igual a  $r$  aos planos  $ax + by + cz = d$  e  $a'x + b'y + c'z = d'$ .

Lembrando a definição de  $H$  podemos escrever o conjunto  $\Omega_k$  como

$$\Omega_k = \left\{ (H(x^i, y^i; s_i))_i^k \left| \begin{array}{l} \alpha^2 (x_i^2 + y_i^2) = (\beta z_i)^2, \\ (1 - s_i)^2 ((x_i)^2 + (y_i)^2) + (z_i)^2 (\eta + s_i \Gamma)^2 \geq r^2, \\ ax_i s_i + by_i s_i + cz_i (\gamma + s_i (1 - \gamma)) \leq d - r \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \\ a' x_i s_i + b' y_i s_i + c' z_i (\gamma + s_i (1 - \gamma)) \geq d' - r \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}, \\ (s_i x_i - s_j x_j)^2 + (s_i y_i - s_j y_j)^2 + \\ ((\eta + s_i \Gamma) z_i - (\eta + s_j \Gamma) z_j)^2 \geq (2r)^2, \quad i < j \\ 0 \leq s_i \leq 1. \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\} \end{array} \right. \right\}. \quad (2.76)$$

onde  $\Gamma = 1 - \gamma$ .

**Exemplo. 2.2.1.** Sejam  $\alpha = \beta = 1$ ,  $a = a' = b = b' = d' = 0$ ,  $c = 1 = c'$  e  $d = 5$ , então

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq z^2, \\ z \leq 5, \\ z \geq 0, \end{array} \right. \right\}. \quad (2.77)$$

Usando o *solver* algencan [ABMS07], calculamos o número de empacotamento  $n_p$  para  $r = 1$ . Neste caso obtivemos  $n_p \approx 11$  com a configuração ilustrada na figura 2.16.

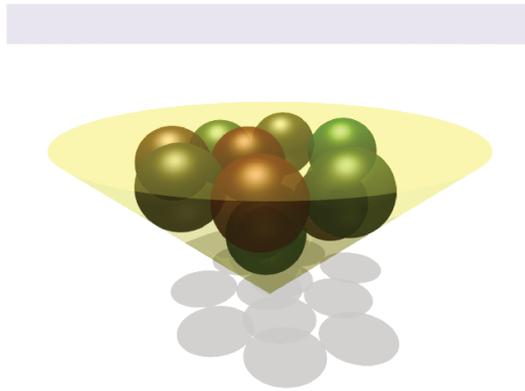


Figura 2.16:  $n_p \approx 11$ .

**Exemplo. 2.2.2.** Sejam  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $a = a' = b = b' = 0$ ,  $c = 1 = c'$  e  $d = 10$  e

$d' = 0$ . Então

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} 25x^2 + 25y^2 \leq z^2, \\ z \leq 10, \\ z \geq 0, \end{array} \right. \right\}. \quad (2.78)$$

Calculamos o número de empacotamento  $n_p$  para  $r = \frac{1}{2}$ . Neste caso obtivemos  $n_p \approx 37$  com a configuração ilustrada na figura 2.17:

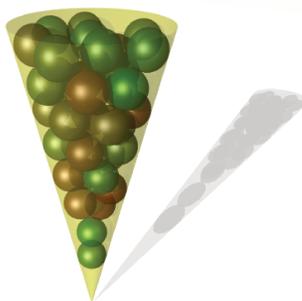


Figura 2.17:  $n_p \approx 37$ .

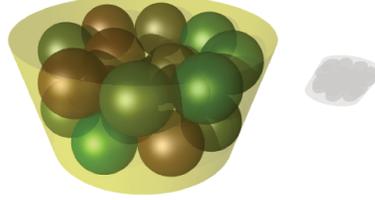
**Exemplo. 2.2.3.** Sejam  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 1$ ,  $a = a' = b = b' = 0$ ,  $c = 1 = c'$  e  $d = 10$  e  $d' = 5$ . Então

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} 25x^2 + 25y^2 \leq z^2, \\ z \leq 10, \\ z \geq 5, \end{array} \right. \right\}. \quad (2.79)$$

Calculamos o número de empacotamento  $n_p$  para  $r = \frac{1}{2}$ . Neste caso obtivemos  $n_p = 18$  com a configuração ilustrada na figura 2.18.

## 2.2.2 Elipsóide

Um elipsóide é um sólido que resulta da rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos. Um esferóide é uma superfície quádrlica em três dimensões obtida através da rotação de uma elipse ao redor de um de seus eixos principais. Se a elipse for rotacionada ao redor de seu eixo principal, esta superfície é chamada de esferóide oval (similar ao formato de uma bola de futebol americano). Se o eixo menor for escolhido, a superfície é chamada de esferóide achatado (similar ao formato do planeta Terra ou de uma abóbora).

Figura 2.18:  $n_p \approx 18$ .

Seja  $a \geq b$ , definimos a região por

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}. \quad (2.80)$$

O problema de empacotamento esférico tridimensional pode ser resolvido usando os mesmos argumentos que no caso bidimensional, isto é, definimos uma representação da região  $R$ .

Seja a função  $o : \partial E \rightarrow E$  definida como

$$o(x, y, z) = \left( \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x, 0, 0 \right) \quad (2.81)$$

e seja  $r : \partial E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $r(q) = d(q, o(q))$ .

**Lema. 2.2.2.** Seja  $(x, y, z) \in \partial E$ , então

$$B[o(x, y, z), r(x, y, z)] \subset E.$$

*Demonstração.* Seja  $(u, v, w) \in B[o(x, y, z), r(x, y, z)]$ , então

$$d((u, v, w), o(x, y, z)) \leq r(x, y, z)$$

$$\Updownarrow$$

$$d((u, v, w), o(x, y, z))^2 \leq r(x, y, z)^2$$

$$\begin{aligned}
& \left( u - x \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] \right)^2 + v^2 + w^2 \leq x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + y^2 + z^2, \\
& u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right]^2 + v^2 + w^2 \leq x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + y^2 + z^2, \\
& u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 - 2x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + v^2 + w^2 \leq x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^4 + y^2 + z^2, \\
& u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 - 2x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + v^2 + w^2 \leq y^2 + z^2, \\
& u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 - x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + v^2 + w^2 \leq x^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + y^2 + z^2, \\
& u^2 - 2ux \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + x^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 + w^2 \leq b^2, \\
& u^2 + (x^2 - 2ux) \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 + w^2 \leq b^2, \\
& u^2 + (x^2 - 2ux) \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + u^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] - u^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 + w^2 \leq b^2, \\
& u^2 - u^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + (x^2 - 2ux) \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + u^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 + w^2 \leq b^2, \\
& u^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + (x^2 - 2ux + u^2) \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 + w^2 \leq b^2, \\
& u^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + (x - u)^2 \left[ 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] + v^2 + w^2 \leq b^2, \\
& u^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + v^2 + w^2 \leq b^2,
\end{aligned}$$

finalmente

$$u^2 b^2 + v^2 a^2 + w^2 a^2 \leq a^2 b^2.$$

Daí concluímos que  $(u, v, w) \in E$ , isto é  $B[o(x, y, z), r(x, y, z)] \subset E$ . □

Consideremos a função  $H : \partial E \times [0, 1] \longrightarrow E$ , definida por

$$H(x, y, z, s) = (\sigma(s)x, sy, sz), \quad (2.82)$$

onde  $\sigma(s) = \left(1 + (s-1) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right)$ . A função  $H$  é sobrejetora. De fato: dado  $(u, v, w) \in E$ , então satisfazem a equação

$$u^2b^2 + v^2a^2 + w^2a^2 \leq a^2b^2. \quad (2.83)$$

Temos que mostrar que existe  $(x, y, z, s) \in \partial E \times [0, 1]$  tal que

$$H(x, y, z, s) = (u, v, w), \quad (2.84)$$

isto é, que o sistema

$$\sigma(s)x = u, \quad (2.85)$$

$$sy = v, \quad (2.86)$$

$$sz = w, \quad (2.87)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (2.88)$$

admite pelo menos uma solução.

**Caso 1.** Suponhamos que  $w \neq 0$ , se e só se,  $s \neq 0$  e  $z \neq 0$ . Logo isolando  $x, y, z$  em (2.85),(2.86),(2.87) e substituindo em (2.88) obtemos a equação

$$(bus)^2 + (av\sigma(s))^2 + (aw\sigma(s))^2 = (abs\sigma(s))^2. \quad (2.89)$$

Seja  $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\phi(t) = (but)^2 + (av\sigma(t))^2 + (aw\sigma(t))^2 - (abt\sigma(t))^2. \quad (2.90)$$

Os valores nos extremos do intervalo são:

$$1. \phi(0) = (av(1 - \frac{b^2}{a^2}))^2 + (aw)^2(1 - \frac{b^2}{a^2}) \geq 0,$$

$$2. \phi(1) = u^2b^2 + v^2a^2 + w^2a^2 - a^2b^2 \leq 0.$$

Daí, pelo teorema do valor intermediário existe  $t_0 \in [0, 1]$  tal que  $\phi(t_0) = 0$ , definimos  $s_0 = t_0$ . Usando as equações (2.85),(2.86),(2.87) podemos obter os valores para  $x, y, z$ .

**Caso 2.** Se  $(1 - \frac{b^2}{a^2})a \leq u \leq a$ , então  $(u, 0, 0)$  está na imagem de  $H(a, 0, 0, s)$ .

**Caso 3.** Se  $s = 0$  então  $-(1 - \frac{b^2}{a^2})a \leq u \leq (1 - \frac{b^2}{a^2})a$ . Podemos supor  $y = 0$ , daí se reduz ao caso 2 no problema de empacotar discos em elipse.

A representação  $H$  de  $E$  nos permite calcular o núcleo da região  $R$ , pois no seguinte corolário obtemos uma fórmula para isto.

**Corolário. 2.2.2.** Seja  $p \in E$ , então existe  $(q, s) \in \partial E \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$  e  $d(p, q) = d(p, \partial E)$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in E$ , como a aplicação  $H$  é uma aplicação sobrejetora temos que existe  $(q, s) \in \partial E \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$ .

Pela definição de  $H$  temos que  $p$  é um ponto no segmento de reta que liga os pontos  $q$  e  $o(q)$ , isto é, os pontos  $q, p, o(q)$  são colineares, então

$$d(o(q), p) + d(p, q) = r(q), \quad (2.91)$$

então, pelo lema 2.2.2 temos

$$B[p, d(p, q)] \subset B[o(q), r(q)] \subset E,$$

daí

$$B[p, d(p, q)] \subset E \iff p \in E, \quad d(p, \partial) \geq d(p, q).$$

O ponto  $q \in \partial \mathcal{P}$  então

$$d(p, q) = d(p, \partial E), \quad (2.92)$$

e a demonstração fica completa.  $\square$

Portanto, todo ponto  $p$  pode escrito em função de  $(q, s)$  usando a representação  $H$ . Aproveitando a equação (2.92) calculamos o núcleo de  $R$ .

$$H(q, s) \in K_r(E) \iff \begin{cases} q \in \partial E, \\ 0 \leq s \leq 1, \\ d(q, H(q, s)) \geq r. \end{cases} \quad (2.93)$$

Daí, as equações que determinam o empacotamento em  $R$  dadas em (1.21), podem ser escritas em termos da nova representação  $H$ .

$$\Omega_k = \left\{ (H(q^i; s_i))_i^k \in \mathbb{R}^{k^2} \left| \begin{array}{l} H(q^i; s_i) \in K_r(R), \\ d(H(q^i; s_i), H(q^j; s_j)) \geq 2r \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\} \end{array} \right. \right\}.$$

Isto é:

$$\Omega_k = \left\{ (H(x_i, y_i, z_i; s_i))_{j=1}^k \left| \begin{array}{l} b^2(x_i)^2 + a^2(y_i)^2 + a^2(z_i)^2 = a^2b^2, \\ (s_i - 1)^2 \left[ (x_i)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y_i)^2 + (z_i)^2 \right] \geq r^2, \\ (\sigma(s_i)x_i - \sigma(s_j)x_j)^2 + (s_i y_i - s_j y_j)^2 + \\ (s_i z_i - s_j z_j)^2 \geq (2r)^2 \\ 0 \leq s_i \leq 1, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \\ \sigma(s) = \left(1 + (s - 1) \left(\frac{a}{b}\right)^2\right). \end{array} \right. \right\}. \quad (2.94)$$

**Exemplo. 2.2.4.** Sejam as elipsoides  $E_1$  e  $E_2$  definidos por

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right. \right\}, \quad E_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right. \right\}.$$

Os números de empacotamento são  $n_p(E_1, 1) \approx 22$  e  $n_p(E_2, 1) \approx 11$ , com as representações gráficas ilustradas nas figuras 2.19 e 2.20.

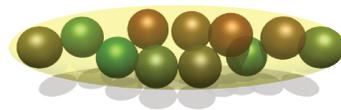
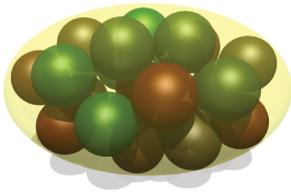


Figura 2.19: Dado  $E_1$ . Se  $\rho = 1/4$ ,  $a = 5$ ,  $b = 3$ ,  $r = 1$  então  $n_p \approx 22$ .

Figura 2.20: Dado  $E_2$ . Se  $a = 8$ ,  $b = 2$ ,  $r = 1$  então  $n_p \approx 11$ .

### 2.2.3 Parabolóide

Um parabolóide é uma quádrlica, um tipo de superfície em três dimensões, descrito pela equação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 2z = 0, \quad (\text{parabolóide elíptico}),$$

ou

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 + z = 0, \quad (\text{parabolóide hiperbólico}).$$

Existem dois tipos de parabolóides: elíptico e hiperbólico. O parabolóide elíptico possui um formato semelhante a uma tigela e pode possuir um ponto de máximo ou de mínimo. O parabolóide hiperbólico possui um formato semelhante a uma sela e pode possuir um ponto crítico chamado de ponto de sela.

Com  $a = b$  um parabolóide elíptico é um parabolóide de revolução: uma superfície obtida através da rotação de uma parábola ao redor de seu eixo. Este é o formato do refletor parabólico utilizado nos espelhos, antenas e objetos semelhantes. Esta superfície é também chamada de parabolóide circular.

Consideremos o conjunto definido por

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4\rho z \leq 0, \\ ax + by + cz \leq d \end{array} \right\}. \quad (2.95)$$

Para resolver o problema do empacotamento esférico definimos o conjunto auxiliar,

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 4\rho z \leq 0 \right\}. \quad (2.96)$$

e a aplicação  $o : \partial\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$o(x, y, z) = (0, 0, 2\rho + z). \quad (2.97)$$

Seja  $r : \partial\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida por  $r(q) = d(q, o(q))$ .

O lema seguinte é importante para mostrar quando uma bola está contido no conjunto  $\mathcal{P}$ .

**Lema. 2.2.3.** Seja  $(x, y, z) \in \partial\mathcal{P}$ , então

$$B[o(x, y, z), r(x, y, z)] \subset \mathcal{P}.$$

*Demonstração.* Seja  $(u, v, w) \in B[o(x, y, z), r(x, y, z)]$ , então

$$\begin{aligned} d((u, v, w), o(x, y, z))^2 &\leq r(x, y, z)^2, \\ u^2 + v^2 + (w - (z + 2\rho))^2 &\leq 4\rho z + 4\rho^2, \\ u^2 + v^2 + 4\rho^2 - 4\rho w + 4\rho z + w^2 - 2wz + z^2 &\leq 4\rho z + 4\rho^2. \end{aligned}$$

Simplificando obtemos

$$u^2 + v^2 - 4\rho w + w^2 - 2wz + z^2 \leq 0,$$

agrupando

$$u^2 + v^2 - 4\rho w + (w - z)^2 \leq 0,$$

como  $(w - z)^2 \geq 0$  temos

$$u^2 + v^2 - 4\rho w \leq 0,$$

daí

$$B[o(x, y, z), r(x, y, z)] \subset \mathcal{P}.$$

□

Seja  $H : \partial\mathcal{P} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$ , definida por

$$H(x, y, z, s) = (sx, sy, z + 2\rho(1 - s)). \quad (2.98)$$

A aplicação  $H$  é uma representação do conjunto  $\mathcal{P}$ . De fato, seja  $(u, v, w) \in \mathcal{P}$ . Temos que mostrar que existe  $(x_0, y_0, z_0, s_0) \in \partial\mathcal{P} \times [0, 1]$  tal que  $H(x_0, y_0, z_0, s_0) = (u, v)$ , o que é equivalente a mostrar que o sistema tem solução:

$$sx = u, \quad (2.99)$$

$$sy = v, \quad (2.100)$$

$$z + 2\rho(1 - s) = w, \quad (2.101)$$

$$x^2 + y^2 = 4\rho z. \quad (2.102)$$

Isolando  $z$  da equação (2.101) e substituindo na equação (2.102), obtemos

$$x^2 + y^2 = 4\rho(w - 2\rho(1 - s)). \quad (2.103)$$

Multiplicando a equação (2.103) por  $s^2$  temos,

$$(sx)^2 + (sy)^2 = 4\rho(w - 2\rho(1 - s))s^2. \quad (2.104)$$

Substituindo (2.99), e (2.100) em (2.104), obtemos

$$u^2 + v^2 = 4\rho(w - 2\rho(1 - s))s^2. \quad (2.105)$$

A equação (2.105) é um polinômio em  $s$  de grau 3. Mostremos que tem uma raiz no intervalo  $[0, 1]$

Seja  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\phi(t) = u^2 + v^2 - 4\rho(w - 2\rho(1 - t))t^2, \quad (2.106)$$

a função  $\phi$  é contínua e satisfaz:

1.  $\phi(0) = u^2 + v^2 \geq 0$ ,
2.  $\phi(1) = u^2 + v^2 - 4\rho w \leq 0$ , por hipótese.

Daí, pelo teorema de valor intermediário existe  $s_0 \in [0, 1]$  tal que  $\phi(s_0) = 0$ . Se  $s_0 \neq 0$  obtemos os valores para  $x, y, z$  substituindo  $s_0$  nas equações (2.99), (2.100) e (2.101). Se  $s_0 = 0$  então  $u = 0, v = 0$  e  $0 \leq w$ , consideremos  $0 \leq w \leq 2\rho$  logo  $(0, 0, w)$  está no segmento que liga  $H(0, 0, 0, s)$  ao  $(0, 0, 0)$ . Se  $2\rho \leq w$  então sempre existem  $x, y$  tais que  $x^2 + y^2 = 4\rho(w - 2\rho)$ , pois  $4\rho(w - 2\rho) \geq 0$ .

A aplicação  $H$  permite escrever qualquer ponto  $p \in \mathcal{P}$  em função de  $q$  e  $s$ , e nessa representação é fácil calcular o núcleo de  $R$ .

**Corolário. 2.2.3.** Seja  $p \in \mathcal{P}$ , então existe  $(q, s) \in \partial\mathcal{P} \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$ , e  $d(p, q) = d(p, \partial\mathcal{P})$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in \mathcal{P}$ . Como a aplicação  $H$  é uma aplicação sobrejetora temos que existe  $(q, s) \in \partial\mathcal{P} \times [0, 1]$  tal que  $H(q, s) = p$ . Pela definição de  $H$ ,  $p$  é um ponto no segmento de reta que liga os pontos  $q$  e  $o(q)$ , isto é  $q, p, o(q)$  são colineares, então

$$d(o(q), p) + d(p, q) = r(q). \quad (2.107)$$

Pelo lema 2.2.3 temos a seguinte sequência de inclusões,

$$B[p, d(p, q)] \subset B[o(q), r(q)] \subset \mathcal{P}.$$

Daí

$$B[p, d(p, q)] \subset \mathcal{P} \iff p \in \mathcal{P}, \quad d(p, \partial\mathcal{P}) \geq d(p, q).$$

O ponto  $q \in \partial\mathcal{P}$ , então

$$d(p, q) = d(p, \partial\mathcal{P}). \quad (2.108)$$

e a demonstração fica completa.  $\square$

Nosso sólido  $R$  tem fronteira formada por; uma parte de  $\partial\mathcal{P}$  e o plano  $L : ax + by + zc = d$ , suponhamos  $r > 0$ , então o ponto  $p \in K_r(R)$  se e só se  $d(p, \partial\mathcal{P}) \geq r$  e  $d(p, L) \geq r$ . O ponto  $p$  na nova representação é descrito por  $(q, s)$ , onde  $q \in \partial\mathcal{P}$  e um parâmetro  $s \in [0, 1]$ .

Daí

$$H(q, s) \in K_r(R) \iff \begin{cases} q \in \partial\mathcal{P}, \\ 0 \leq s \leq 1, \\ d(q, H(q, s)) \geq r, \\ \langle H(q, s), (a, b, c) \rangle \leq d - r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{cases} \quad (2.109)$$

Finalmente podemos escrever o problema de empacotamento esférico em  $R$  em termos de  $x, y, z, s$ , isto é uma descrição por desigualdades de  $\Omega_k$ , onde  $k$  representa o número de bolas que se deseja empacotar.

$$\Omega_k = \left\{ (H(x_i, y_i, z_i; s_i))_{j=1}^k \in \mathbb{R}^{k3} \left| \begin{array}{l} x_i^2 + y_i^2 - 4p z_i = 0 \\ (1 - s_i)^2 (z_i + 4p) 4p \geq r^2 \\ (s_i x_i - s_j x_j)^2 + (s_i y_i - s_j y_j)^2 + \\ (z_i - z_j + 2p(s_j - s_i))^2 \geq (2r)^2 \\ a s_i x_i + b s_i y_i + c(z_i + 2p(1 - s_i)) \leq \\ d - r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ 0 \leq s_i \leq 1, \\ \forall i, j \in I_k = \{1, \dots, k\}, \end{array} \right. \right\}. \quad (2.110)$$

A seguir apresentamos alguns exemplos deste tipo de contêiner, para diferentes valores de  $\rho$  e  $a, b, c, d$ .

**Exemplo. 2.2.5.** Sejam

$$R_1 = \left\{ (x, y, z) \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 - z \leq 0, \\ z \leq 9 \end{array} \right. \right\}.$$

$$R_2 = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 4z \leq 0, \\ z \leq 4 \end{array} \right\}.$$

dois contêiners, o número de empacotamento  $n_p(R_1, 1) \approx 13$ , com a configuração ilustrada na figura 2.21 e e para  $n_p(R_{2,1/2}) \approx 99$ , veja a figura 2.22.

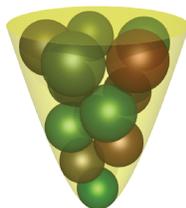


Figura 2.21: Dado  $R_1$ . Se  $\rho = 1/4, a = b = 0, c = 1, d = 9, r = 1$  então  $n_p \approx 13$ .

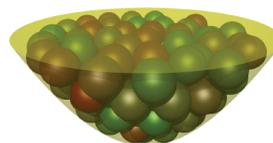


Figura 2.22: Dado  $R_2$ . Se  $\rho = 1, a = b = 0, c = 1, d = 4, r = 1/2$  então  $n_p \approx 99$ .

## 2.3 Minimizando o Contêiner

Nesta seção, a variante estudada dentre todas apresentadas para problemas de empacotamento será a que busca minimizar as dimensões de um objeto que comporte em seu interior um dado número de itens circulares, sem que haja sobreposição. Desta formulação obtemos naturalmente o seguinte modelo matemático.

$$\min \quad \text{as dimensões do objeto} \quad \text{s.j.} \quad \text{comportar os itens sem sobreposições.} \quad (2.111)$$

Sejam  $c^i \in \mathbb{R}^2$  e  $r_i \in \mathbb{R}$  o centro e o raio, respectivamente, do  $i$ -ésimo item considerado, para  $i = 1, \dots, n_p$ . Denotemos por  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a métrica euclidiana de  $\mathbb{R}^2$ . As restrições que concernem a proibição de sobreposições entre os item empacotados

dependem apenas de sua forma e, por estar essa definida como circular traduzem-se no seguinte conjunto de inequações:

$$d(c^i, c^j) \geq r_i + r_j, \quad \forall i < j. \quad (2.112)$$

O restante das restrições associadas a essa modelagem cuidam da não violação dos limites do contêiner, portanto dependem diretamente de sua forma. Do mesmo modo, a função objetivo informalmente definida em (2.111) varia conforme o tipo de objeto.

### 2.3.1 Minimizando a área da elipse

Consideremos o seguinte problema: encontrar a elipse de menor área que contem  $n_p$  discos de raios  $r_1, \dots, r_{n_p}$  sem sobreposição. Além disso, todos os itens que estiverem completamente contidos em seu interior satisfazem à inequação (2.26) onde  $a \geq b > 0$ . Neste caso cada  $c^i = H(x^i, y^i, s_i)$  para algum  $(x^i, y^i, s_i) \in \partial E \times [0, 1]$ , é possível expressar (2.111) como:

$$\begin{aligned} & \min \pi a b \\ & \text{Sujeito a} \\ & b^2(x^i)^2 + a^2(y^i)^2 = a^2b^2, \quad i = 1, \dots, k, \\ & (s_i - 1)^2 \left[ (x^i)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y^i)^2 \right] \geq r_i^2, \quad i = 1, \dots, k, \\ & (\sigma(s_i, a, b)x^i - \sigma(s_j, a, b)x^j)^2 + (s_i y^i - s_j y^j)^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad i \neq j, \\ & s_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, k, \\ & 0 \leq s_i, \quad i = 1, \dots, k, \\ & b \leq a, \\ & 0 \leq b, \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\text{onde } \sigma(s, a, b) = \left(1 + (s - 1) \left(\frac{b}{a}\right)^2\right).$$

Como  $a$  e  $b$  são positivos, então  $\pi a b$  também é positivo logo é limitado por zero

inferiormente. Daí minimizar  $\pi a b$  é equivalente a minimizar  $(\pi a b)^2$ .

$$\min (\pi a b)^2$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} b^2(x^i)^2 + a^2(y^i)^2 &= a^2b^2, & i = 1, \dots, k, \\ (s_i - 1)^2 \left[ (x^i)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y^i)^2 \right] &\geq r_i^2, & i = 1, \dots, k, \\ (\sigma(s_i, a, b)x^i - \sigma(s_j, a, b)x^j)^2 + (s_i y^i - s_j y^j)^2 &\geq (r_i + r_j)^2, & i \neq j, \\ s_i &\leq 1, & i = 1, \dots, k, \\ 0 &\leq s_i, & i = 1, \dots, k, \\ b &\leq a, \\ \max r_i &\leq b, \end{aligned} \tag{2.114}$$

onde  $\sigma(s, a, b) = \left(1 + (s - 1) \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$ . Neste problema o número de variáveis é  $n = 3n_p + 2$  e o número de restrições é  $m = 4n_p + \frac{n_p(n_p-1)}{2} + 2$ .

O ponto inicial é gerado por

$$\begin{aligned} x^{0i} &= \alpha \cos(2\pi \mathbf{X}_i) \\ y^{0i} &= \beta \sin(2\pi \mathbf{X}_i) \\ s_{0i} &= \frac{1}{2} \mathbf{X}_i \\ a^0 &= \alpha \beta + 5 \\ b^0 &= \alpha \beta + 3 \end{aligned} \tag{2.115}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  é escolhido tal que os discos tenham sobreposição parcial e  $\mathbf{X}_i$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , [Sch79]. Na tabela 2.1 obtemos alguns resultados numéricos, onde se considera o tempo em segundos que demora em calcular uma solução deste problema e que é não necessariamente a solução global usando algencan [ABMS07, Alg].

Tabela 2.1: Elipse

$n_p = 2$					
$r_1$	$r_2$	$a$	$b$	cpu-t	iter
1	1	2.12132038507139	1.22474484725625	0.02	2
1	0.9	2.01534286072964	1.16984993694193	0.05	2
1	0.8	1.91062682355360	1.12772368711496	0.02	2
1	0.7	1.80993482970096	1.09688357697535	0.06	2
1	0.5	1.57735010914240	1.07457004273781	0.54	4
1	0.3	1.34160260376452	1.05193346946134	0.04	2
0.3	0.3	0.636396084272321	0.367423449679447	1.06	4
0.7	0.3	1.04475720051301	0.747117537832273	0.09	2

### 2.3.2 Menor elipse de focos fixos que contém $n_p$ discos

Sejam  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F = (0, c)$  os focos de uma elipse  $E$ , consideremos o problema de encontrar a elipse com  $a$  mínimo tal que contém  $n_p$  discos. Isto é equivalente a minimizar  $b^2$  pois  $c$  é fixo.

min  $b^2$

Sujeito a

$$\begin{aligned}
b^2(x^i)^2 + (c^2 + b^2)(y^i)^2 &= (c^2 + b^2)b^2, & i = 1, \dots, k, \\
(s_i - 1)^2 \left[ (x^i)^2 \left( \frac{b^2}{c^2 + b^2} \right)^2 + (y^i)^2 \right] &\geq r_i^2, & i = 1, \dots, k, \\
(\sigma(s_i, b)x^i - \sigma(s_j, b)x^j)^2 + (s_i y^i - s_j y^j)^2 &\geq (r_i + r_j)^2, & i \neq j, \\
s_i &\leq 1, & i = 1, \dots, k, \\
0 &\leq s_i, & i = 1, \dots, k, \\
b &\leq a, \\
\max r_i &\leq b,
\end{aligned} \tag{2.116}$$

onde  $\sigma(s, b) = \left( 1 + (s - 1) \left( \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right) \right)$ .

O ponto inicial é gerado usando a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}
 x^{0i} &= (\beta + 1) \cos(2\pi \mathbf{X}_i) \\
 y^{0i} &= \beta \sin(2\pi \mathbf{X}_i) \\
 s_{0i} &= \frac{1}{2} \mathbf{X}_i \\
 b^0 &= \beta + 3
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

Tabela 2.2: Elipse

$F = (-c, 0) F = (0, -c)$ ,					
$c$	$\vec{r}$	$a$	$b$	$cpu - t$	iter
1	(0.6,0.7,0.8,0.9,1)	2.25687318619028	2.02323418776588	2.47	9
2	(0.6,0.7,0.8,0.9,1)	2.66179737085843	1.75646384634265	1.30	6
3	$\{r_i\}_i^{10} = \{0.5 + i \frac{0.5}{10}\}$	3.76862403473951	2.28090488955947	1.69	2
5	$\{r_i\}_i^3 = \{0.5 + i \frac{0.5}{3}\}$	5.09901951359456	1.00000000000907	0.01	2
0	$\{r_i\}_i^5 = \{0.5 + i \frac{0.5}{5}\}$	2.15526357289525	2.15526357289525	17.66	57

### 2.3.3 Minimizando a tampa da parábola

Suponhamos  $\rho$  fixo, daí a parábola fixada, só permite a minimização da outra variável designada por  $c$ , isto é, a tampa da parábola.

min  $c$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
 (x_i)^2 &= 4\rho y_i, & i = 1, \dots, n_p \\
 (y_i + 2\rho(1 - s_i)) + r_i &\leq c, & i = 1, \dots, n_p \\
 (1 - s_i)^2((x_i)^2 + (2\rho)^2) &\geq r_i^2, & i = 1, \dots, n_p \\
 (s_i x_i - s_j x_j)^2 + (y_i - y_j + 2\rho(s_j - s_i))^2 &\geq (r_i + r_j)^2, & i < j, \\
 s_i &\leq 1, & i = 1, \dots, n_p, \\
 0 &\leq s_i, & i = 1, \dots, n_p.
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

Neste caso o número de variáveis é  $n = 3n_p + 1$ , e o número de restrições é  $m = 5n_p + \frac{n_p(n_p-1)}{2}$ . Nos exemplos seguintes o ponto inicial é gerado com a seguinte fórmula

$$\begin{aligned} x^{0i} &= a \mathbf{X}_i - \frac{a}{2} \\ y^{0i} &= \left(a \mathbf{X}_i - \frac{a}{2}\right)^2 \\ s_{0i} &= \mathbf{X}_i \end{aligned} \tag{2.119}$$

Tabela 2.3: Parábola

$\rho = \frac{1}{2}$ , Figura 2.23				
$n_p$	$\vec{r}$	$c$	cpu-t	iter
20	$\{r_i\}_{i=1}^{20} = \{0.5 + i \frac{0.5}{20}\}$	9.04445041004578	1.61	2
10	$\{r_i\}_{i=1}^{10} = \{0.5 + i \frac{0.5}{10}\}$	6.02620047720237	0.90	2
7	$\{r_i\}_{i=1}^7 = \{0.5 + i \frac{0.5}{7}\}$	4.78658021036127	0.56	2
25	$\{r_i\}_{i=1}^{25} = \{0.5 + i \frac{0.5}{25}\}$	10.3439566982818	33.08	4

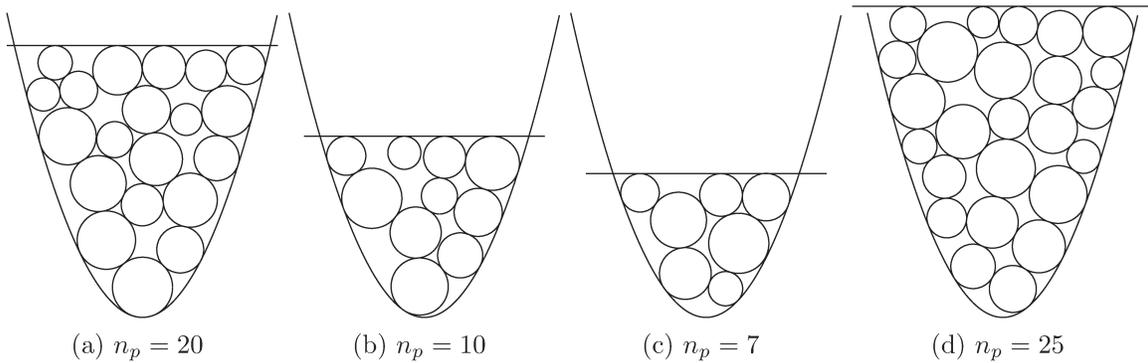


Figura 2.23:  $R : x^2 \leq 4 \frac{1}{2} y$

### 2.3.4 Minimizando a altura do cone

Suponhamos  $\alpha$  e  $\beta$  fixas, consideremos problema de minimização da altura, designada por  $d$ .

min  $d$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 (x_i^2 + y_i^2) &= (\beta z_i)^2, & i = 1, \dots, n_p \\
(1 - s_i)^2 ((x_i)^2 + (y_i)^2) + (z_i)^2 (\eta + s_i \Gamma)^2 &\geq r^2, & i = 1, \dots, n_p \\
z_i (\gamma + s_i (1 - \gamma)) + r_i &\leq d, & i = 1, \dots, n_p \\
z_i (\gamma + s_i (1 - \gamma)) + r_i &\geq 0, & i = 1, \dots, n_p \\
(s_i x_i - s_j x_j)^2 + (s_i y_i - s_j y_j)^2 + & & \\
((\eta + s_i \Gamma) z_i - (\eta + s_j \Gamma) z_j)^2 &\geq (r_i + r_j)^2, & i < j \\
s_i &\leq 1. & i = 1, \dots, n_p \\
0 &\leq s_i & i = 1, \dots, n_p
\end{aligned} \tag{2.120}$$

onde  $\Gamma = 1 - \gamma$ .

Neste caso cada ponto do espaço é representado por quatro números  $(x, y, z, s)$  daí o problema tem  $n = 4n_p + 1$  variáveis e o número de restrições é  $m = 6n_p + \frac{n_p(n_p-1)}{2}$ .

Nos exemplos seguintes o ponto inicial é gerado com a seguinte fórmula

$$\begin{aligned}
x^{0i} &= \alpha \cos(\mathbf{X}_i) \\
y^{0i} &= \alpha \sin(\mathbf{X}_i) \\
z^{0i} &= \alpha \beta \mathbf{X}_i + \frac{\beta}{2} \\
s_{0i} &= \mathbf{X}_i
\end{aligned} \tag{2.121}$$

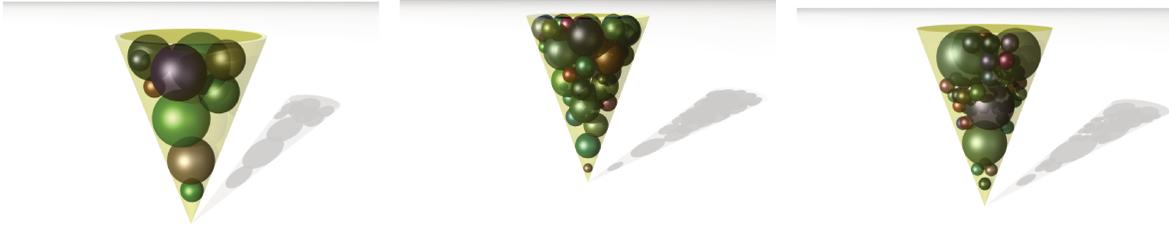
com  $d^0 = 5\alpha\beta$ , neste caso o objetivo é construir um ponto  $x^0$  tal que represente uma configuração de bolas com sobreposição parcial.

### 2.3.5 Minimizando a altura do cilindro com base elipsoidal

Outro problema interessante é minimizar a altura de um cilindro elipsoidal, para isto podemos usar as equações (2.26) para descrever os pontos do plano e representados a

Tabela 2.4: Cone

$R : 100(x^2 + y^2) \leq 9z^2$ , Figura 2.24				
$n_p$	$\vec{r}$	Altura	cpu-t	iter
10	$\{r_i\}_{i=1}^{10} = \{0.2 + \frac{i \cdot 0.8}{10}\}$	7.13087589818837	1.45	2
50	$\{r_i\}_{i=1}^{50} = \{0.2 + \frac{i \cdot 0.8}{50}\}$	11.2168179517366	69.39	2
50	$\{r_i\}_{i=1}^{45} = \{0.3\} \{r_i\}_{i=46}^{50} = \{1\}$	8.32910396270333	43.57	2

(a)  $n_p = 10$ (b)  $n_p = 50$ (c)  $n_p = 50$ Figura 2.24:  $R : 100(x^2 + y^2) \leq 9z^2$ 

altura por  $z$ , isto é: cada ponto do espaço pode ser representado por  $(x, y, s, z)$ .

min  $z$

Sujeito a

$$\begin{aligned}
 b^2(x^i)^2 + a^2(y^i)^2 &= a^2b^2, & i = 1, \dots, k, \\
 (s_i - 1)^2 \left[ (x^i)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y^i)^2 \right] &\geq r_i^2, & i = 1, \dots, k, \\
 (\sigma(s_i)x^i - \sigma(s_j)x^j)^2 + (s_i y^i - s_j y^j)^2 &\geq (r_i + r_j)^2, & i \neq j, \\
 s_i &\leq 1, & i = 1, \dots, k, \\
 0 &\leq s_i, & i = 1, \dots, k, \\
 z_i + r_i &\leq z, & i = 1, \dots, k, \\
 r_i &\leq z_i, & i = 1, \dots, k, \\
 \max r_i &\leq z,
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

onde  $\sigma(s) = \left(1 + (s - 1) \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$ .

**Exemplo. 2.3.1.** Sejam  $a = 4, b = 2$  e  $n_p = 30$ , suponhamos que 5 bolas tem raio  $r = 1$ , e o restante tem  $r = 1/2$ . Neste caso a altura mínima para o cilindro elipsoidal é  $z = 2.80763281426027$ . A configuração ilustrada na figura 2.25.

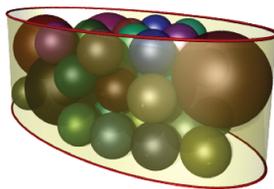


Figura 2.25: Altura mínima do cilindro elipsoidal,  $z = 2.80763281426027$

# Resultados Computacionais e Aplicações

Neste capítulo estudamos o comportamento numérico dos modelos apresentados no capítulo dois para diferentes tipos de contêiner  $R$ , com ênfase nas elipses.

## 3.1 Método Numérico

Tendo em vista que utilizamos o pacote *Algencon* [ABMS07, Alg] para implementar nossa abordagem ao problema de empacotamento, descrevemos muito brevemente como é seu funcionamento. Existem outros programas que podem ser usados para resolver os problemas em questão por exemplo [MF94, Neu04, AAF98]

*Algencon* é um pacote projetado para resolver problemas de otimização não lineares (continuamente diferenciáveis) do tipo:

$$\min f(x) \text{ sujeito a } h^1(x) = 0, g^1(x) \leq 0, h^2(x) = 0, g^2(x) \leq 0, \quad (3.1)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, h^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{l_1}, g^1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}, h^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{l_2}, g^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ . Suponhamos que  $f, h_1, g_1, h_2, g_2$  sejam diferenciáveis com derivada contínua.

Definimos

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | h^1(x) = 0, g^1(x) \leq 0\} \quad (3.2)$$

e

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | h^2(x) = 0, g^2(x) \leq 0\} \quad (3.3)$$

Para todo  $x \in \mathbb{R}^n, \rho > 0, \lambda \in \mathbb{R}^{l_1}, \mu \in \mathbb{R}_+^{m_1}$  definimos o Lagrangiano aumentado em  $D_1$  como:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu, \rho) = f(x) + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{l_1} \left( h_i^1(x) + \frac{\lambda_i}{\rho} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{m_1} \left( \max \left\{ 0, g_i^1(x) + \frac{\mu_i}{\rho} \right\} \right)^2 \quad (3.4)$$

Os parâmetros  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  e  $\mu_i \geq 0$  se chamam multiplicadores.

**Algoritmo. 3.1.1.** Seja  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto inicial arbitrário. Os parâmetros algorítmicos a serem definidos são:  $\tau \in [0, 1), \gamma > 1, \rho > 0, -\infty < \lambda_i^{min} \leq \lambda_i^{max} < \infty \quad \forall i = 1, \dots, m_1, 0 \leq \mu_i^{max} < \infty \quad \forall i = 1, \dots, l_1, \lambda_i^1 \in [\lambda_i^{min}, \lambda_i^{max}] \quad \forall i = 1, \dots, m_1, \mu_i^1 \in [0, \mu_i^{max}] \quad \forall i = 1, \dots, l_1, \{\epsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$ .

1. Inicialização

Fazer  $k = 1$ . Para  $i = 1, \dots, l_1$  calcular  $\sigma_i^0 = \max\{0, g_i(x^0)\}$ .

2. Resolução do subproblema

Encontrar  $x^k \in \mathbb{R}^n$  tal que existam  $\lambda^{2,k}$  e  $\mu^{2,k}$  satisfazendo

$$|\nabla \mathcal{L}(x^k, \lambda^{1,k}, \mu^{1,k}, \rho_k) + \sum_{i=1}^{m_2} \lambda^{2,k} \nabla h_i^2(x^k) + \sum_{i=1}^{l_2} \mu^{2,k} \nabla g_i^2(x^k)| \leq \epsilon_k$$

$\mu_i^{2,k} \geq 0$  e  $g_i^2(x^k) \leq \epsilon_k$  para  $i = 1, \dots, l_2$ ,

$g_i^2(x^k) \leq -\epsilon_k \Rightarrow \mu_i^{2,k} = 0$ , para  $i = 1, \dots, l_2$ ,

$|h^2(x^k)| \leq \epsilon_k$ .

3. Atualização das estimativas para os multiplicadores

Para  $i = 1, \dots, m_1$  calcular  $\lambda_i^{k+1} = \min\{\max\{\lambda_i^{1,k} + \rho_k h_i(x^k), \lambda_i^{min}\}\}$

Para  $i = 1, \dots, l_1$  calcular  $\mu_i^{1,k+1} = \min\{\max\{0, \mu_i^{1,k} + \rho_k g_i(x^k)\}, \mu_i^{max}\}$ ,

Para  $i = 1, \dots, l_1$  calcular  $\sigma_i^k = \max\{g_i(x^k), -\frac{\mu_i^{1,k}}{\rho_k}\}$ .

4. Atualização do parâmetro de penalidade

Se  $\max\{|h(x^k)|, |\sigma^k|\} \leq \tau \max\{|h(x^{k-1})|, |\sigma^{k-1}|\}$ , definir  $\rho_{k+1} = \rho_k$ . Caso contrário, definir  $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$ .

## 5. Nova iteração externa

Fazer  $k \leftarrow k + 1$ , Voltar ao item 2.

O seguinte teorema trata do status dos pontos limites em relação à factibilidade. Ele nos diz que um ponto limite que satisfaz uma condição de qualificação em relação a  $D_2$  é factível ou ao menos ponto estacionário de uma medida de infactibilidade.

**Teorema. 3.1.1.** Seja  $x^*$  ponto limite de uma sequência  $\{x^k\}$  gerada pelo algoritmo 3.1.1. Se a sequência de parâmetros de penalidade  $\{\rho_k\}$  é limitada, então  $x^*$  é factível. Caso contrário uma das duas possibilidades é verificada:

- $x^*$  é um ponto *KKT* do problema

$$\min \sum_{i=1}^{m_1} (h_i^1(x))^2 + \sum_{i=1}^{l_1} (\max\{0, g_i^1(x)\})^2 \text{ sujeito a } x \in D_2, \quad (3.5)$$

- não satisfaz a condição *CPLD* associada a  $D_2$ .

*Demonstração.* Conforme teorema 4.1 de [ABMS07]. □

**Teorema. 3.1.2.** Seja  $\{x^k\}$  uma sequência gerada pelo algoritmo 3.1.1, Suponhamos que  $x^*$  é um ponto limite factível que satisfaz *CPLD* com respeito a todas as restrições do problema original. Então,  $x^*$  é um ponto *KKT* do problema Original.

*Demonstração.* Conforme teorema 4.2 de [ABMS07]. □

## 3.2 Métodos para resolver factibilidade

Para resolver os problemas de empacotamento esférico num contêiner fixo  $R$ , em muitos casos o problema se reduz a resolver um sistema de inequações da forma

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} H_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m_1, \\ G_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \dots, l_1, \end{array} \right\}. \quad (3.6)$$

Encontrar um elemento de  $\Omega$  definido em (3.6), não é uma tarefa fácil, pois é equivalente a resolver o sistema não linear indeterminado. Porém o problema pode ser escrito como um problema de otimização global (3.7)

$$\min F(x) = \sum_{i=1}^{m_1} (H_i(x))^2 + \sum_{i=1}^{l_1} (\max\{0, G_i(x)\})^2 \quad \text{sujeito a } x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.7)$$

Um minimizador  $x^*$  do problema (3.7) com valor ótimo 0 é um elemento de  $\Omega$  definido em (3.6), por tanto nosso objetivo será resolver o problema (3.7).

Encontrar um elemento  $x^* \in \Omega$  numericamente não é possível, já que um número real é representado computacionalmente por um número finito de dígitos, daí a necessidade de relaxar o problema de encontrar uma solução do sistema indeterminado (3.6).

Seja  $\epsilon_f > 0$ , definimos o conjunto

$$\Omega(\epsilon_f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} |H_i(x)| \leq \epsilon_f, \quad \forall i = 1, \dots, m_1, \\ G_i(x) \leq \epsilon_f, \quad \forall i = 1, \dots, l_1, \end{array} \right\}. \quad (3.8)$$

Naturalmente o conjunto  $\Omega \subset \Omega(\epsilon_f)$ . Se um minimizador  $x^*$  do problema (3.7) satisfaz  $|F(x^*)| \leq \epsilon_f$ , então  $x^* \in \Omega(\epsilon_f)$ .

### 3.2.1 Método 1 (Met-1)

Para usar o algoritmo 3.1.1 precisamos de uma função objetivo  $f$  a qual podemos definir como:

$$f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.9)$$

pois (3.9) é de classe  $C^1$ . Seja  $D_1 = \Omega$ . Como o nosso contêiner  $R$  é compacto, então existe uma caixa tal que  $R$  está contida nela, então podemos definir  $D_2 = C$  onde

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \bar{a}_i \leq x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ x_i \leq \bar{b}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{array} \right\}. \quad (3.10)$$

Seja  $x^*$  uma solução encontrada pelo algoritmo 3.1.1, então pelo teorema 3.1.1,  $x^*$  é factível ou  $x^*$  é um ponto *KKT* do problema

$$\min \sum_{i=1}^{m_1} (H_i(x))^2 + \sum_{i=1}^{l_1} (\max\{0, G_i(x)\})^2 \quad \text{sujeito a } x \in C \subset \mathbb{R}^n,$$

Se  $x^*$  for fatível, então  $x^* \in \Omega$ , logo  $x^* \in \Omega(\epsilon_f)$ . Se  $x^*$  for um ponto *KKT* de (3.5) verificamos se  $x^* \in \Omega(\epsilon_f)$ , isto é

$$(H_i(x^*))^2 + \sum_{i=1}^{l_1} (\max\{0, G_i(x^*)\})^2 \leq \epsilon_f, \quad (3.11)$$

caso contrario  $x^*$  não é uma solução de (3.8).

### 3.2.2 Método 2 (Met-2)

Outra forma de resolver inequações, é definir uma função objetivo  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m_1} (H_i(x))^2 + \sum_{i=1}^{l_1} (\max\{0, G_i(x)\})^2 \quad (3.12)$$

No algoritmo 3.1.1 definimos  $D_1 = \mathbb{R}^n$  e  $D_2 = C$  como em (3.10). Seja  $x^*$  um ponto estacionário do problema

$$\min F(x) \text{ sujeito a } x \in C, \quad (3.13)$$

Então, pelo teorema 3.1.2 temos que  $x^*$  é factível ou é um ponto *KKT* do problema (3.12). Neste caso para verificar se  $x^*$  é factível com respeito a  $\Omega(\epsilon_f)$ , avaliamos  $x^*$  na função objetivo  $F$ , isto é

$$F(x^*) = (H_i(x^*))^2 + \sum_{i=1}^{l_1} (\max\{0, G_i(x^*)\})^2. \quad (3.14)$$

Se  $F(x^*) \leq \epsilon_f$ , então  $x^* \in \Omega(\epsilon_f)$ , caso contrario  $x^*$  não é uma solução de (3.8).

### 3.2.3 Reinícios (MS-T)

Como ocorre com todos os métodos de otimização local, o ponto inicial pode ter grande influência na solução encontrada pelo algoritmo. Além disso, ainda precisamos lidar com os casos previstos na teoria nos quais o Método 1 e Método 2 baseados no algoritmo 3.1.1 não encontram uma solução viável. Podemos contornar esses problemas de uma forma bem simples, através da utilização da estratégia de reinícios (*multistart*). Essa estratégia consiste em executar o algoritmo diversas vezes para resolver o mesmo problema, partindo de pontos distintos, e uniformemente distribuídos sobre a região viável do problema, de forma a aumentar a chance de encontrar uma solução global. Essa estratégia pode ser aplicada juntamente com um dos procedimentos a seguir:

1. fixamos um número máximo de vezes que um mesmo subproblema será resolvido e guardamos a melhor solução entre todas as encontradas;
2. estabelecemos um número máximo  $T$  de tentativas em função do contêiner  $R$  e o raio  $r$  das esferas, e nos contentamos com a primeira solução viável encontrada.

Caso uma solução viável não seja encontrada em  $T$  tentativas, declaramos o problema como inviável.

Nos problemas seguintes o numero de tentativas é definida como

$$T(R, B, \delta) = \left\lceil \delta \frac{A(R)}{A(B)} \right\rceil, \quad (3.15)$$

onde  $\delta \in [0, 1]$ .

### 3.3 Empacotando num contêiner fixo

Dados  $R$  um contêiner e  $r > 0$ , nosso principal objetivo

$$\max k \quad \text{sujeito a} \quad \Omega_k(R, r) \neq \emptyset, \quad (3.16)$$

onde

$$\Omega_k(R, r) = \left\{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^{kn} \left| \begin{array}{l} x^i \in R, \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ d(x^i, \partial R) \geq r, \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ d(x^i, x^j) \geq 2r \quad i \neq j. \end{array} \right. \right\}. \quad (3.17)$$

A função objetivo em (3.16) é monótona crescente, “fácil”, o conjunto viável é descrito por (3.17), é “difícil”.

Consideremos as três condições que determinam o conjunto  $\Omega_k$ .

A condição

$$x^i \in R, \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad (3.18)$$

em geral é caracterizada por aplicações  $g_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $l = 1, \dots, m_1$  tais que:

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_l(x) \leq 0, \quad \forall l = 1, \dots, m_1, \}. \quad (3.19)$$

Daí, se  $x^i \in R$ , então  $\max\{0, g_l(x^i)\} = 0$  para todo  $l = 1, \dots, m_1$ .

A desigualdade

$$d(x^i, \partial R) \geq r, \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad (3.20)$$

é satisfeita se  $x \in K_r(R)$ , logo  $\max\{0, r^2 - d(x, \partial R)^2\} = 0$ .

Finalmente consideremos as desigualdades

$$d(x^i, x^j) \geq 2r \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (3.21)$$

Seja  $S_k : K_r(R)^k \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (\max\{4r^2 - |x^i - x^j|^2, 0\})^2.$$

Então a aplicação  $S_k$  tem as seguintes propriedades:

1.  $S_k$  é diferenciável com derivadas parciais contínuas, isto é  $C^1$ ,
  2.  $S_k$  é limitada,
- $$0 \leq S_k(x) \leq \frac{k(k-1)}{2} (2r)^2,$$
3.  $S_k$  é uma aplicação par, isto é,  $S_k(-x) = S_k(x)$ .

Seja  $\phi_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$\phi_k(t) = S_k(tx^0)$$

onde  $x^0 \in K_r(R)^k \subset \mathbb{R}^{kn}$ , então

$$\phi_k(0) = \frac{k(k-1)}{2} (2r)^2.$$

e a derivada em  $t$  é:

$$\phi'_k(t) = - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (\max\{0, (2r)^2 - t^2|x^{0i} - x^{0j}|^2\}) t|x^{0i} - x^{0j}|^2.$$

Como  $t$  é sempre positivo, temos que

$$\phi'_k(t) \leq 0. \quad (3.22)$$

Escolhendo  $x^0$  tal que  $|x^{0i} - x^{0j}|^2 \neq 0$  sempre podemos garantir a existência de uma direção de descida para  $S_k$ . Em termos de discos ou esferas, sempre é possível separar discos com sobreposição com um modelo do tipo (3.1).

Daí  $\phi_k$  é uma aplicação não crescente, e

$$|\phi'_k(t)| \leq |t| \frac{k(k-1)}{2} (2r)^2 M \quad (3.23)$$

onde  $M \geq \text{diam}(K_r(R))$

Da equação (3.23) podemos dizer que se o diâmetro do contêiner não for muito grande, isto é  $\text{diam}(K_r(R)) \leq M$ , então uma direção de descida tem comprimento limitado, o que é muito bom para algoritmos que usam a condição do Armijo para calcular o comprimento de passo.

O problema de empacotar itens num contêiner fixo não é fácil. De fato, é um problema de decisão do tipo *NP*. No capítulo 1 apresentamos o algoritmo 1.7.1 para resolver o problema, mas o critério de parada, embora esteja bem definido, não é algebricamente calculável, isto é, o algoritmo pára se  $\Omega_k(R, r) = \emptyset$ . Na matemática teórica é costume mostrar que um conjunto é vazio por contradição ou redução ao absurdo, mas na prática isto não é viável.

O problema se reduz a determinar o valor de  $k$  tal que o conjunto  $\Omega_k(R, r)$  seja vazio. No capítulo 1 também mostramos que  $n_p$  é limitado por

$$n_{\#}(R, r, o_L) \leq n_p(R, r) \leq \frac{A(R)}{A(B[0, r])}. \quad (3.24)$$

### 3.4 Testes numéricos

O critério de parada usado nos problemas seguintes é o número de tentativas, isto é, tentamos encontrar um elemento de  $\Omega_k(R, r)$  usando  $T(R, B, \delta)$  pontos iniciais, este método é conhecido como *multi-start*.

A estratégia geral para encontrar a solução com maior número de itens é descrita na figura 3.1. O problema de viabilidade é resolvido primeiramente para  $k = n_{\#}(R, r, o_L) + 1$ , isto é, encontramos um elemento  $x$  em  $\Omega_k(R, r)$ . Quando é possível encontrar uma solução viável, passamos a resolver um novo problema com um item a mais, até atingir a inviabilidade em  $T(R, B, \delta)$  tentativas ( $\Omega_k(R, r) = \emptyset$ ).

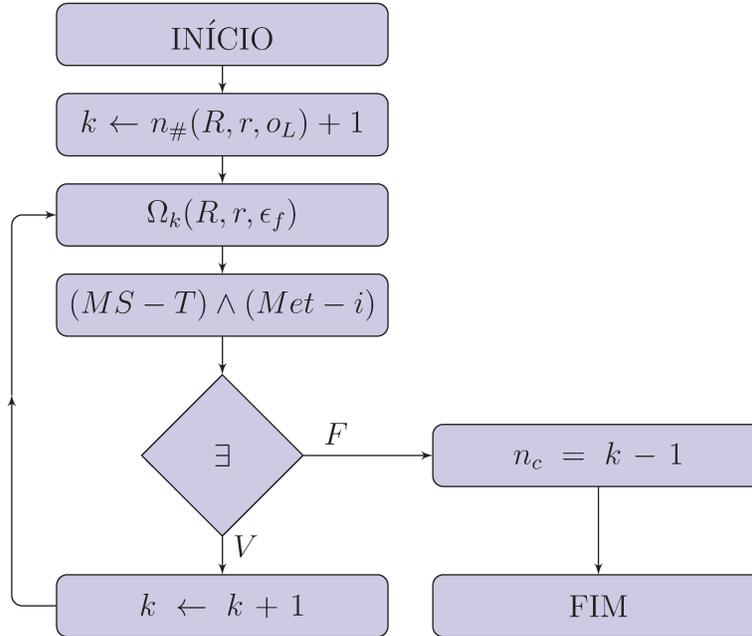


Figura 3.1: Estrategia Geral.  $(MS - T) \wedge (Met - i)$ : Multistart com  $T$  tentativas com o método 1 ( $Met - 1$ ) 3.2.1 ou 2 ( $Met - 2$ ) 3.2.2.

Nos seguintes problemas os parâmetros são:  $\epsilon_f = 10^{-4}$  e  $\delta = 1/4$ , isto é, queremos resolver os problemas de empacotamento com uma precisão de  $\epsilon_f = 10^{-4}$  e o número de tentativas não supera  $T(R, r, 1/4)$  definido em (3.15). Os resultados obtidos para elipses, parábolas, cones, elipsoides, paraboloides, etc. não puderam ser comparados devido à falta de dados de referência disponíveis para os problemas considerados.

Todos os testes foram executados em uma máquina INTEL CORE 4, 2.6 GHz com 2GB de memória RAM e sistema operacional GNU/LINUX. Além disso, o código foi compilado pelo GNU FORTRAN (gfortran-4.2).

### 3.4.1 Elipse

Resolver o problema de empacotamento esférico na elipse, isto é, determinar um elemento do conjunto  $\Omega_k(E, r, \epsilon_f)$ , se reduz a resolver o seguinte sistema de equações e desigualdades

não lineares, já estudado no capítulo 2.

$$\begin{cases} b^2(x^i)^2 + a^2(y^i)^2 & = a^2b^2, & i = 1, \dots, k, \\ (s_i - 1)^2 \left[ (x^i)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + (y^i)^2 \right] & \geq r^2, & i = 1, \dots, k, \\ (\sigma(s_i)x^i - \sigma(s_j)x^j)^2 + (s_i y^i - s_j y^j)^2 & \geq (2r)^2, & i < j, \\ s_i & \leq 1, & i = 1, \dots, k, \\ 0 & \leq s_i, & i = 1, \dots, k, \end{cases} \quad (3.25)$$

onde  $\sigma(s) = \left(1 + (s - 1) \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$ .

### Estratégia 1 (E1)

O sistema (3.25) tem  $n = 3k$  variáveis e  $m = 4k + \frac{k(k-1)}{2}$  relações ( $=, \leq, \geq$ ). O ponto inicial nos seguintes exemplos é gerado por

$$\begin{aligned} x^{0i} &= a \cos(\mathbf{Y}_i), & i = 1, \dots, k \\ y^{0i} &= b \sin(\mathbf{Y}_i), & i = 1, \dots, k \\ s_{0i} &= 1/10 + \Delta s_i \mathbf{Y}_i, & i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{Y}_i$  é uma variável aleatória definida como

$$\mathbf{Y}_i = \begin{cases} \tau + 2 \mathbf{X}_i(\pi - 2\tau) & \text{se } 0 \leq \mathbf{X}_i \leq 1/2, \\ \pi + \tau + 2(\mathbf{X}_i - 1/2)(\pi - 2\tau) & \text{se } 1/2 \leq \mathbf{X}_i \leq 1, \end{cases} \quad (3.27)$$

A variável  $\mathbf{X}_i$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ ,  $\tau = (1 - b^2/a^2)/2$ , e  $\Delta s_i = \frac{1}{2}$ , geometricamente representam pontos com distribuição aleatória contidos na elipse, (veja figura 3.4).

Este ponto inicial (3.26) é só uma alternativa, o objetivo é começar a sequência com um ponto inicial correspondente a uma configuração de discos uniformemente distribuídos com sobreposição contidos na elipse, o que pode ser feito de muitas formas.

### Estratégia 2 (E2)

Uma outra alternativa é aproveitar uma solução anterior, isto é: dado  $(x^1, \dots, x^k) \in \Omega_k(E, r, \epsilon_f)$  e gerar o centro  $x^{k+1}$  de um disco aleatório usando as formulas definidas em (3.26), para determinar uma solução  $(x^1, \dots, x^k, x^{k+1})$  de  $\Omega_{k+1}(E, r, \epsilon_f)$

Em nossos experimentos para gerar  $\mathbf{X}_i$  usamos o método descrito em [Sch79], na a qual usa distribuição uniforme.

Estratégias diferentes podem ser encontradas em [LM85, Xav07]

Nas tabelas 3.1-3.3, apresentamos os resultados numéricos obtidos usando os métodos descritos neste capítulo. Consideramos uma família  $E_i(a_i, b_i)$ 's para  $i = 1, \dots, 40$  elipses, onde  $a_i$  e  $b_i$  são obtidos usando a formula

$$E_i : \begin{cases} a_i = a_{i-1} + 3\epsilon_1, & i = 2, \dots, 40 \\ b_i = b_{i-1} - 2/5\epsilon_1, & i = 2, \dots, 40 \end{cases} \quad (3.28)$$

onde  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = 5$  e  $\epsilon_1 = 1/4$ . Ilustramos na figura 3.2 a familia de elipses.

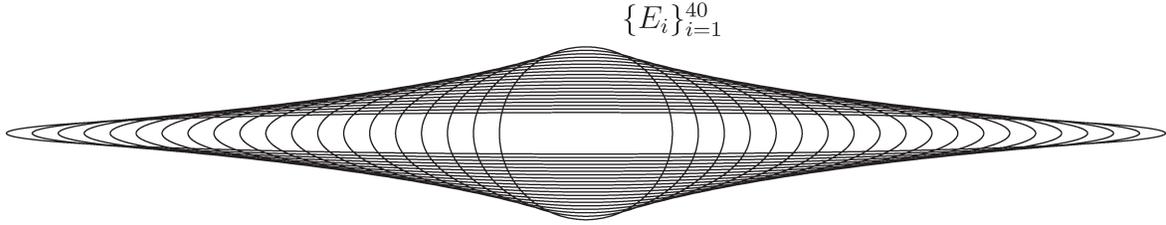


Figura 3.2:  $E_i = E(a_i, b_i)$

O centro do reticulado é definido como

$$o_L = \begin{cases} x_0 = r(n_h - 1) \\ y_0 = m_h r \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (3.29)$$

onde  $n_h = \lfloor a/r \rfloor + 1$  e  $m_h = 2 \lfloor 4br/\sqrt{3} \rfloor + 2$ .

Para poder usar o método dos reinícios (MS-T, *MultiStart*), o número de pontos iniciais para as elipses  $E(a_i, b_i)$  é definido por:

$$T(a_i, b_i, r, 1/4) = \left\lceil \frac{a_i b_i}{4r^2} \right\rceil. \quad (3.30)$$

Neste caso considerarmos  $\delta = 1/4$  na definição (3.15).

Nas figuras 3.3 - 3.8, ilustramos graficamente o problema  $E_{10}$  apresentado nas tabelas 3.1-3.3. Na primeira figura 3.3 ilustramos os discos do reticulado afim  $L_r^2(o_L)$  que estão contidos na elipse  $E_{10}$ . Isto é feito resolvendo o sistema 2.11-2.13 para todo  $(u, v)$

Tabela 3.1:  $(MS - T) \wedge (Met - 1) \wedge E1 \wedge r = 1/2$ 

$E_i$	$a_i$	$b_i$	$n_{\#}$	$it$	$n_c$	$n_c cput$	$cputt$	$cputr$	$T$
1	5.00	5.00	73	4	80	299.11	930.04	0.02	26
2	5.75	4.90	84	6	91	254.92	989.05	0.01	29
3	6.50	4.80	88	9	101	586.94	1411.85	0.01	32
4	7.25	4.70	101	1	110	148.41	1113.89	0.03	35
5	8.00	4.60	107	3	119	261.74	1538.92	0.03	37
6	8.75	4.50	120	4	127	501.10	2301.14	0.02	40
7	9.50	4.40	126	15	136	1408.09	3214.56	0.01	42
8	10.25	4.30	140	4	143	309.90	2871.87	0.01	45
9	11.00	4.20	146	13	151	1133.16	3733.56	0.04	47
10	11.75	4.10	147	4	157	784.87	3661.11	0.01	49
11	12.50	4.00	153	11	164	1349.84	3883.93	0.02	51
12	13.25	3.90	150	28	168	2662.56	5540.13	0.02	52
13	14.00	3.80	156	8	174	2956.40	5806.03	0.02	54
14	14.75	3.70	163	13	178	2235.18	5197.12	0.03	55
15	15.50	3.60	169	12	182	1629.08	4661.39	0.01	56
16	16.25	3.50	168	49	185	4689.79	8179.04	0.02	57
17	17.00	3.40	171	8	188	1668.94	5145.99	0.02	58
18	17.75	3.30	178	7	191	2062.74	5901.37	0.03	59
19	18.50	3.20	172	22	194	5894.52	9544.42	0.01	60
20	19.25	3.10	163	31	193	3419.65	7103.82	0.01	60
21	20.00	3.00	165	6	192	2610.21	6338.52	0.04	61
22	20.75	2.90	166	32	194	6542.98	10055.60	0.04	61
23	21.50	2.80	168	4	194	2219.07	6350.21	0.02	61
24	22.25	2.70	169	23	193	3981.33	8030.55	0.02	61
25	23.00	2.60	171	35	189	3796.91	7703.97	0.02	60
26	23.75	2.50	169	6	189	1619.60	5387.13	0.02	60
27	24.50	2.40	161	3	188	1642.34	5283.59	0.01	59
28	25.25	2.30	156	18	185	2728.48	6208.63	0.02	59
29	26.00	2.20	132	24	178	3911.83	7066.31	0.00	58
30	26.75	2.10	131	36	173	4927.47	7950.39	0.05	57
31	27.50	2.00	133	10	171	3834.98	7103.70	0.02	56
32	28.25	1.90	132	3	165	1903.94	4839.63	0.03	54
33	29.00	1.80	130	25	159	2818.13	4499.38	0.03	53
34	29.75	1.70	126	19	150	2205.98	3886.45	0.02	51
35	30.50	1.60	120	34	146	2947.19	4407.56	0.02	49
36	31.25	1.50	111	4	139	924.11	2118.47	0.02	47
37	32.00	1.40	87	8	131	1362.69	2142.52	0.00	45
38	32.75	1.30	60	16	116	714.11	1325.05	0.02	43
39	33.50	1.20	60	31	108	843.00	1389.47	0.02	41
40	34.25	1.10	61	37	102	801.39	1339.61	0.02	38

Tabela 3.2:  $(MS - T) \wedge (Met - 2) \wedge E1 \wedge r = 1/2$ 

$E_i$	$a_i$	$b_i$	$n_{\#}$	$it$	$n_c$	$n_c cput$	$cputt$	$cputr$	$T$
1	5.00	5.00	73	0	73	0.00	115.15	0.02	26
2	5.75	4.90	84	0	84	0.00	559.17	0.02	29
3	6.50	4.80	88	0	88	0.00	543.99	0.02	32
4	7.25	4.70	101	0	101	0.00	683.44	0.02	35
5	8.00	4.60	107	0	107	0.00	876.76	0.01	37
6	8.75	4.50	120	0	120	0.00	1238.10	0.03	40
7	9.50	4.40	126	0	126	0.00	1444.11	0.03	42
8	10.25	4.30	140	0	140	0.00	2016.21	0.02	45
9	11.00	4.20	144	0	144	0.00	2487.02	0.01	47
10	11.75	4.10	147	0	147	0.00	2597.18	0.05	49
11	12.50	4.00	151	0	151	0.00	2664.56	0.05	51
12	13.25	3.90	150	0	150	0.00	2727.39	0.05	52
13	14.00	3.80	155	0	155	0.00	2909.63	0.03	54
14	14.75	3.70	163	0	163	0.00	3742.39	0.02	55
15	15.50	3.60	169	0	169	0.00	4520.48	0.07	56
16	16.25	3.50	168	0	168	0.00	4620.21	0.05	57
17	17.00	3.40	171	0	171	0.00	4686.72	0.03	58
18	17.75	3.30	178	0	178	0.00	5826.54	0.05	59
19	18.50	3.20	172	0	172	0.00	4906.65	0.06	60
20	19.25	3.10	163	0	163	0.00	3973.72	0.06	60
21	20.00	3.00	165	0	165	0.00	4106.09	0.04	61
22	20.75	2.90	166	0	166	0.00	4316.44	0.07	61
23	21.50	2.80	168	0	168	0.00	4511.01	0.05	61
24	22.25	2.70	169	0	169	0.00	5208.70	0.05	61
25	23.00	2.60	171	0	171	0.00	5604.48	0.03	60
26	23.75	2.50	169	0	169	0.00	5690.95	0.03	60
27	24.50	2.40	161	0	161	0.00	5003.43	0.05	59
28	25.25	2.30	156	0	156	0.00	5092.34	0.02	59
29	26.00	2.20	132	0	132	0.00	2287.30	0.04	58
30	26.75	2.10	131	0	131	0.00	2457.72	0.04	57
31	27.50	2.00	133	0	133	0.00	3235.09	0.07	56
32	28.25	1.90	132	0	132	0.00	3940.75	0.02	54
33	29.00	1.80	130	0	130	0.00	4382.23	0.03	53
34	29.75	1.70	126	0	126	0.00	5174.84	0.02	51
35	30.50	1.60	120	0	120	0.00	5971.93	0.01	49
36	31.25	1.50	111	2	112	122.42	7733.26	0.00	47
37	32.00	1.40	87	2	126	6987.95	10217.46	0.02	45
38	32.75	1.30	60	31	111	2933.39	3963.30	0.00	43
39	33.50	1.20	60	24	104	2199.80	3038.78	0.02	41
40	34.25	1.10	61	3	94	862.34	2026.56	0.02	38

Tabela 3.3:  $(MS - T) \wedge (Met - 1) \wedge E2 \wedge r = 1/2$ 

$E_i$	$a_i$	$b_i$	$n_{\#}$	$it$	$n_c$	$n_c cput$	$cputt$	$cputr$	$T$
1	5.00	5.00	72	8	80	320.50	654.52	0.00	26
2	5.75	4.90	84	1	90	63.31	633.88	0.00	29
3	6.50	4.80	88	3	100	165.08	948.76	0.00	32
4	7.25	4.70	101	3	109	154.67	1132.06	0.01	35
5	8.00	4.60	106	2	119	289.54	1580.89	0.08	37
6	8.75	4.50	119	1	127	195.28	1982.51	0.01	40
7	9.50	4.40	126	37	136	2331.98	4260.87	0.02	42
8	10.25	4.30	140	1	143	314.37	3231.67	0.04	45
9	11.00	4.20	146	5	151	919.62	3839.85	0.01	47
10	11.75	4.10	147	2	157	920.07	4229.88	0.03	49
11	12.50	4.00	152	24	164	2456.83	5866.86	0.03	51
12	13.25	3.90	150	38	169	4322.66	8041.03	0.01	52
13	14.00	3.80	156	49	174	5250.98	9308.20	0.02	54
14	14.75	3.70	163	16	179	3420.29	7924.86	0.03	55
15	15.50	3.60	169	1	183	3328.30	7344.92	0.02	56
16	16.25	3.50	168	10	186	2369.62	6071.22	0.00	57
17	17.00	3.40	171	55	189	8419.00	12527.74	0.04	58
18	17.75	3.30	178	17	191	3755.16	9820.58	0.02	59
19	18.50	3.20	172	31	193	5069.28	11106.70	0.02	60
20	19.25	3.10	163	22	194	7086.31	11489.14	0.05	60
21	20.00	3.00	165	3	181	1663.28	6240.27	0.01	61
22	20.75	2.90	166	11	193	2579.88	5802.07	0.02	61
23	21.50	2.80	168	13	191	5574.36	9948.22	0.03	61
24	22.25	2.70	169	4	187	987.17	4637.39	0.02	61
25	23.00	2.60	171	1	186	3672.50	7214.89	0.03	60
26	23.75	2.50	169	16	187	1914.50	4574.72	0.00	60
27	24.50	2.40	161	1	188	3400.94	5379.30	0.03	59
28	25.25	2.30	156	45	180	4064.38	6943.11	0.02	59
29	26.00	2.20	132	3	170	1127.55	2603.06	0.03	58
30	26.75	2.10	131	47	168	3674.81	4965.70	0.00	57
31	27.50	2.00	133	9	163	2660.66	4079.55	0.02	56
32	28.25	1.90	132	18	156	1350.08	2646.11	0.00	54
33	29.00	1.80	130	4	153	1802.78	2852.58	0.03	53
34	29.75	1.70	126	16	144	725.03	1578.39	0.02	51
35	30.50	1.60	120	31	144	1026.34	1641.73	0.02	49
36	31.25	1.50	111	11	138	723.59	1208.22	0.03	47
37	32.00	1.40	87	28	134	1319.45	1652.86	0.02	45
38	32.75	1.30	60	40	111	427.75	585.92	0.00	43
39	33.50	1.20	60	35	101	501.69	624.38	0.03	41
40	34.25	1.10	61	11	84	213.81	300.05	0.02	38

Tabela 3.4:  $(MS - T) \wedge (Met - 2) \wedge E2 \wedge r = 1/2$ 

$E_i$	$a_i$	$b_i$	$n_{\#}$	$it$	$n_c$	$n_{cput}$	$cputt$	$cputr$	$T$
1	5.00	5.00	73	22	80	230.95	618.58	0.02	26
2	5.75	4.90	84	6	90	225.44	926.10	0.03	29
3	6.50	4.80	88	1	100	367.85	1154.19	0.04	32
4	7.25	4.70	101	6	109	211.39	1130.17	0.05	35
5	8.00	4.60	107	7	119	381.43	1416.02	0.03	37
6	8.75	4.50	120	7	127	1028.39	2608.60	0.04	40
7	9.50	4.40	126	11	135	1388.77	2481.36	0.04	42
8	10.25	4.30	140	6	143	427.84	2360.01	0.04	45
9	11.00	4.20	144	25	151	1868.82	4873.19	0.08	47
10	11.75	4.10	147	14	156	5561.91	9386.81	0.03	49
11	12.50	4.00	151	14	161	3471.95	7799.97	0.07	51
12	13.25	3.90	150	7	170	3619.40	8320.34	0.03	52
13	14.00	3.80	156	20	173	6265.28	12270.27	0.05	54
14	14.75	3.70	163	10	172	2076.98	8508.09	0.05	55
15	15.50	3.60	169	37	182	13147.93	20742.91	0.05	56
16	16.25	3.50	168	40	183	14080.44	29114.08	0.06	57
17	17.00	3.40	171	33	184	22862.27	40431.41	0.07	58
18	17.75	3.30	178	26	191	10527.38	20485.63	0.05	59
19	18.50	3.20	172	8	194	13955.28	20140.67	0.02	60
20	19.25	3.10	163	38	192	21686.20	36310.56	0.11	60
21	20.00	3.00	165	41	190	15980.98	28294.05	0.09	61
22	20.75	2.90	166	9	188	4614.31	9668.13	0.11	61
23	21.50	2.80	168	2	185	2492.53	8263.34	0.09	61
24	22.25	2.70	169	5	191	16753.16	29614.16	0.19	61
25	23.00	2.60	171	57	188	9389.69	16055.88	0.09	60
26	23.75	2.50	169	19	186	15054.59	24199.59	0.09	60
27	24.50	2.40	161	29	185	10381.88	16765.22	0.09	59
28	25.25	2.30	156	4	183	12758.88	18557.66	0.09	59
29	26.00	2.20	132	8	176	13759.22	15657.34	0.09	58
30	26.75	2.10	131	27	167	4812.53	9032.44	0.13	57
31	27.50	2.00	133	19	159	6517.19	7731.53	0.09	56
32	28.25	1.90	132	9	157	4289.22	5548.19	0.13	54
33	29.00	1.80	130	40	153	9525.72	11172.56	0.03	53
34	29.75	1.70	126	5	149	2754.91	4206.56	0.06	51
35	30.50	1.60	120	1	140	1883.22	2940.13	0.03	49
36	31.25	1.50	111	17	136	3099.56	3664.19	0.03	47
37	32.00	1.40	87	36	128	1724.81	2178.41	0.03	45
38	32.75	1.30	60	3	115	549.56	773.88	0.06	43
39	33.50	1.20	60	21	100	804.88	984.63	0.03	41
40	34.25	1.10	61	28	90	412.34	522.72	0.03	38

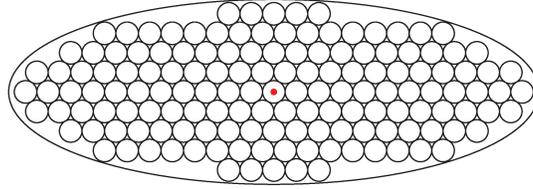


Figura 3.3:  $E_{10}$ :  $n_{\#} = \#[L_r^2(x_0, y_0) \cap K_r(E_{10})] = 147$ .

que pertence a  $E_{10}$ , assim obtemos pontos  $(x, y, s) \in \partial E_{10} \times [0.1]$ , os quais testamos em (3.25).

Na figura 3.4 ilustramos o ponto inicial usado na estratégia  $E1$ .

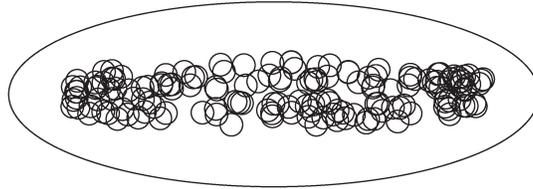


Figura 3.4:  $E_{10}$ : Representação do ponto inicial gerado por (3.26).

Na figura 3.5 ilustramos a solução obtida usando o método 1, e os postos iniciais descritos em  $E1$ . Pontos iniciais são gerados 49 vezes, isto é com  $T(a_{10}, b_{10}, r, \delta) = 49$ .

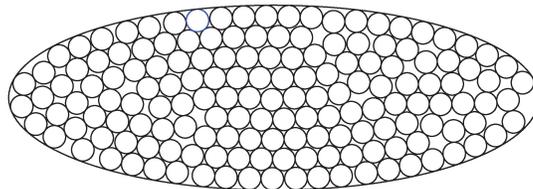


Figura 3.5:  $E_{10}$ :  $(MS - 49) \wedge (Met - 1) \wedge E1$ ,  $n_c = 157$

Na figura 3.6 ilustramos a solução obtida pelo método 1 ( $Met - 1$ ) e usando a estratégia  $E2$ , com  $T = 49$ .

Na figura 3.7 ilustramos a solução obtido pelo método 2 ( $Met - 2$ ) com pontos iniciais gerados pela estratégia  $E1$ . Observamos que não se consegue empacotar mais de 147 discos em 49 tentativas.

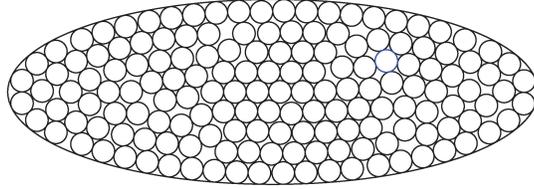


Figura 3.6:  $E_{10}$ :  $(MS - 49) \wedge (Met - 1) \wedge E2$ ,  $n_c = 157$

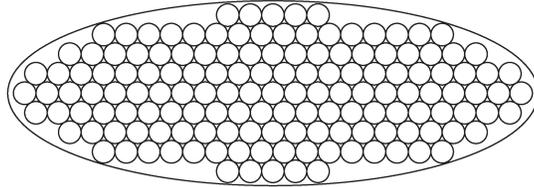


Figura 3.7:  $E_{10}$ :  $(MS - 49) \wedge (Met - 2) \wedge E1$ ,  $n_c = 147$

Na figura 3.8 ilustramos a solução obtida pelo método 2 ( $Met-2$ ) com a estratégia  $E2$ , os resultados são melhores com relação a  $Met - 2$  com  $E1$ .

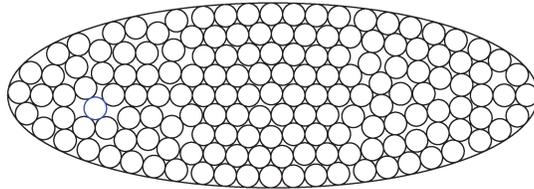


Figura 3.8:  $E_{10}$ :  $(MS - 49) \wedge (Met - 2) \wedge E2$ ,  $n_c = 156$

Na figura 3.9, fazemos uma comparação numérica entre os métodos usados para estimar o valor de  $n_p$ , usando a mesma semente para gerar a variável aleatória  $\mathbf{X}$ . Comparando as tabelas 3.1 e 3.2, observamos que o método 1, nas 40 elipses, consegue empacotar mais esferas que o método 2 usando em ambos a estratégia  $E1$ . Porém quando usamos a estratégia  $E2$  nos dois métodos, notamos que o método 1 consegue empacotar em 47.5% dos problemas mais esferas que o método 2, e em 25% dos problemas os dois métodos empatam. Finalmente o método 2 empacota em 27.5% dos problemas mais esferas que o método 1. O método 1 utilizando a estratégia  $E1$  em 85% dos problemas empacota mais esferas que o método 2 utilizando a estratégia  $E2$ , em 12.5% empata e em 2.5% supera ao método 1 utilizando a estratégia 1.

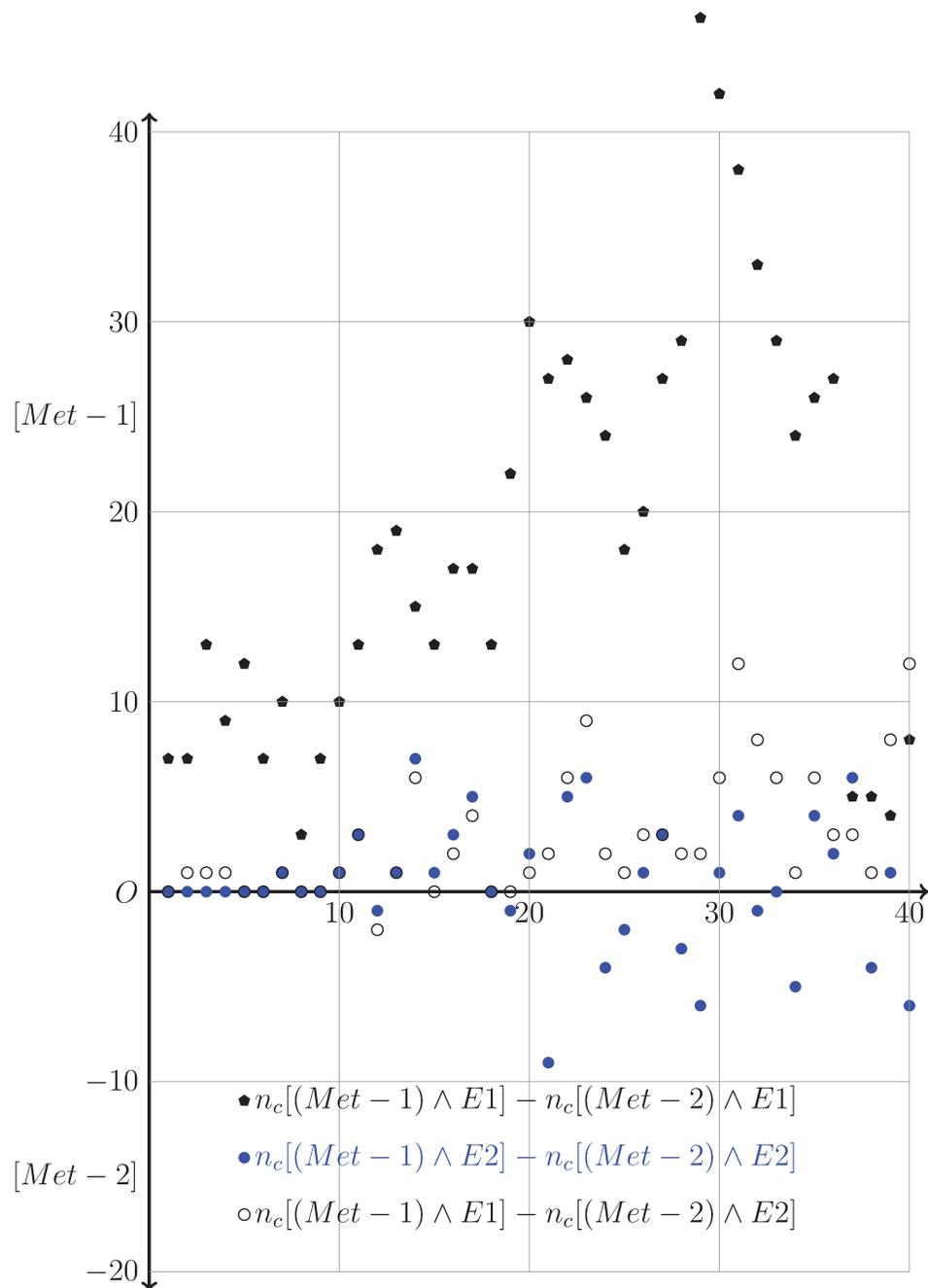


Figura 3.9: Comparação Numérica entre  $Met - 1$  e  $Met - 2$  com respeito ao  $n_c$

Tabela 3.5: O tempo total usado para empacotar itens nos 40 elipses e numero de itens

$E(a_i, b_i)$ e $T(a_i, b_i, 0.5, 0.4)$ $i = 1, \dots, 40$				
	$E1$		$E2$	
	<i>dias</i>	itens	<i>dias</i>	itens
$Met - 1$	2.15458	6 294	2.16985	6 193
$Met - 2$	1.70257	5 546	5.17256	6 178

Na tabela 3.5 mostramos o tempo total usado para empacotar nos 40 elipses discos de raio  $1/4$ , obtendo o melhor resultado com o método  $Met - 1$  e estratégia  $E1$ , em obter maior número de itens e menor tempo computacional.

Figura 3.10:  $T(a_{40}, b_{40}, 0.5, 0.4) = 38$ ,  $n_c = 102$ 

Os resultados mostrados nas tabelas 3.1-3.3 podem ser melhorados aumentando o número de iterações. Na tabela 3.6 mostramos os resultados obtidos para  $\delta = 1$  em (3.15).

Tabela 3.6: Aumentando o número de reinícios  $T'_i$ s para empacotar na família  $E_i(a_i, b_i)$ 

$E(a_i, b_i)$ e $T(a_i, b_i, 0.5, 1)$ $i = 1, \dots, 40$				
	$E1$		$E2$	
	<i>dias</i>	itens	<i>dias</i>	itens
$Met - 1$	6.2124	6 316	7.07882	6 254
$Met - 2$	6.55082	5 552	13.0633	6 205

Figura 3.11:  $T(a_{40}, b_{40}, 0.5, 1) = 151$ ,  $n_c = 103$



---

# Conclusões

---

Neste trabalho, estudamos as técnicas e modelos para problemas de empacotamento de esferas em regiões limitadas e demos contribuições importantes sobre esses temas.

Propusemos vários modelos e métodos e analisamos suas propriedades teóricas. Resolvemos problemas específicos com essas propostas e fornecemos exemplos ilustrativos. Para resolver os problemas, usamos o método do Lagrangiano Aumentado.

Apresentamos os conceitos principais para tratar problemas de empacotamento de itens em regiões limitadas (contêineres arbitrários) tendo como objetivo maximizar o número de itens. A estrutura deste problema de otimização é diferente da estrutura padrão de programação não linear.

No Capítulo 1, introduzimos o conceito de núcleo de uma região (contêiner) que é fundamental para determinar um limitante inferior e para calcular o número máximo de itens no contêiner. Para isto, aproveitamos alguns resultados da teoria de reticulados sobre empacotamentos mais densos no plano e no espaço.

Introduzimos algoritmos para calcular o número máximo de discos no contêiner. Mostramos que o núcleo de uma elipse não é uma elipse, e nem sempre é possível caracterizá-lo por meio de desigualdades algébricas nas representações cartesiana e polar.

No Capítulo 2, apresentamos uma técnica para construir novas representações (parametrizações) do plano e do espaço, na qual calculamos o núcleo algebricamente por meio de um sistema de desigualdades para alguns contêineres irregulares, por exemplo: elipses, interseção de elipses, parábola com tampa, cone com tampa, parabolóide com tampa e elipsoide. Observamos que sempre é possível empacotar na interseção destes contêineres. Uma vez obtidas as desigualdades para empacotar, consideramos o problema de minimizar alguma dimensão do contêiner, por exemplo, a tampa, o volume etc.

No Capítulo 3, estudamos alguns métodos e estratégias para resolver sistemas de desigualdades e usamos o método do Lagrangiano Aumentado para calcular os pontos estacionários da inviabilidade e para minimizar de forma direta a inviabilidade ao quadrado. O melhor resultado foi obtido quando calculamos os pontos estacionários da

inviabilidade. Abordamos duas estratégias: na primeira, começamos com discos com sobreposição, e na segunda, aproveitamos uma solução anterior e tentamos empacotar mais um disco. O melhor resultado foi obtido com a primeira estratégia, isto é, minimizar a função de sobreposição de esferas.

Nos trabalhos futuros, pretendemos melhorar os resultados obtidos, escrever modelos matemáticos para empacotar outros tipos de itens como, por exemplo, poliedros, elipsoides etc. Para melhorar o método numérico, vamos construir um algoritmo para minimizar o quadrado da inviabilidade, pois uma solução com valor zero é uma solução do sistema.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [AAF98] C. S. Adjiman, I. P. Androulakis, and C. A. Floudas. A global optimization method, alpha - bb, for general twice - differentiable constrained nlp - ii. *Theoretical Advances, Computers & Chemical Engineering*, 22:1159 – 1179, 1998.
- [ABMS07] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt. On augmented lagrangian methods with general lower-level constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 18:1286–1309, 2007.
- [Alg] Algencan. <http://www.ime.usp.br/~egbirgin/tango/codes.php>.
- [BL10] E. G. Birgin and R. D. Lobato. Orthogonal packing of identical rectangles within isotropic convex regions. *Computers & Industrial Engineering*, 59:595–602, 2010.
- [BMMR06] E. G. Birgin, J. M. Martínez, W. F. Mascarenhas, and D. P. Ronconi. Method of sentinels for packing item within arbitrary convex regions. *Journal of the operational research society*, 57:735–746, 2006.
- [BMR05] E. G. Birgin, J. M. Martínez, and D. P. Ronconi. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach. *European Journal of Operational Research*, 160:19–33, 2005.
- [BS08] E. G. Birgin and F. N. C. Sobral. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems. *Computers and Operations Research*, 35:2357–2375, 2008.
- [Cen] Erich’s Packing Center. <http://www2.stetson.edu/~efriedma/packing.html>.
- [CS99] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Spheres Packing, Lattices and Groups*. Springer-Verlag, 1999.

- [EMP11] Diniz Ehrhardt, J. M. Martinez, and L. G. Pedroso. Derivative-free methods for nonlinear programming with general lower-level constraints. *Computational & Applied Mathematics*, 1:19–52, 2011.
- [Lim81] E. L. Lima. *Análise Real Volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 1981.
- [LM85] A. V. Levy and A. Montalvo. The tunneling algorithm for the global minimization of functions. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 6:15 – 29, 1985.
- [MF94] C. D. Maranas and C. A. Floudas. Global minimum potencial energy conformations for small molecules. *Journal of Global Optimization*, 4:135 – 170, 1994.
- [MFP03] C. D. Maranas, C. A. Floudas, and P. M. Pardalos. New results in the packing of equal circle in a square. *Discrete Mathematics*, 142:819–825, 2003.
- [MM03] J. M. Martínez and L. Martínez. Packing optimization for automated generation of complex system’s initial configurations for molecular dynamics and docking. *Journal of Computational Chemistry*, 30:819–825, 2003.
- [Neu04] A. Neumaier. Complete search in continuous global optimization and constraints satisfaction. *Acta Numerica*, 13:271–369, 2004.
- [NM65] J. A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal* 7, 7:308 – 313, 1965.
- [Pac] Packomania. <http://www.packomania.com/>.
- [POV] POV-Ray. <http://www.povray.org/>.
- [Pow09] M. D. J. Powell. Algorithm for bound constrained optimization without derivatives. Technical report, University of Cambridge, 2009.
- [Sch79] L. Schrage. A more portable fortran random number generator. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 5:132–138, 1979.
- [Sto83] Yu. G. Stoyan. Mathematical methods for geometric design. *Advances in CAD/CAM*, 82:67–86, 1983.

- [T64] L. F. Tóth. *Regular Figures. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics*. Macmillan, 1964.
- [Tei98] Ralph Costa Teixeira. *Curvature Motions, Medial Axes and Distance Transforms*. PhD thesis, Harvard University, 1998.
- [Xav07] L. O. Xavier. Desempenho de algoritmos de região de confiança para problemas de empacotamento de cilindros. Master's thesis, IMECC-Unicamp, 2007.
- [Zon99] C. Zong. *Spheres Packing*. Springer - Verlag New York, Inc, 1999.