



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

FERDINANDO CAÍQUE GENGHINI DANTAS LOBO

NÚMEROS COMPLEXOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES  
ALGÉBRICAS

CAMPINAS  
2017

**FERDINANDO CAÍQUE GENGHINI DANTAS LOBO**

**NÚMEROS COMPLEXOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES  
ALGÉBRICAS**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

**Orientador: Antônio Carlos do Patrocínio**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO FERDINANDO CAÍQUE GENGHINI DANTAS LOBO E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANTÔNIO CARLOS DO PATROCÍNIO.

**CAMPINAS  
2017**

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** Não se aplica.

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

L786n Lobo, Ferdinando Caíque Genghini Dantas, 1989-  
Números complexos, polinômios e equações algébricas / Ferdinando  
Caíque Genghini Dantas Lobo. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Antonio Carlos do Patrocínio.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Números complexos. 2. Polinômios. 3. Matemática (Ensino médio). I.  
Patrocínio, Antonio Carlos do, 1941-. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Complex numbers, polynomials and algebraic equations

**Palavras-chave em inglês:**

Complex numbers

Polynomials

Mathematics (high school)

**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional

**Titulação:** Mestre

**Banca examinadora:**

Antonio Carlos do Patrocínio [Orientador]

Sergio Antonio Tozoni

Ires Dias

**Data de defesa:** 23-02-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 23 de fevereiro de 2017  
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). ANTONIO CARLOS DO PATROCINIO**

**Prof(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI**

**Prof(a). Dr(a). IRES DIAS**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros  
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*Para Bianca Bazani, amor da minha vida.*

## Agradecimentos

Agradeço aos meus avós Alzira e Alcides (in memoriam), por tudo que me ensinaram, além da força e dedicação com que formaram uma família.

A minha namorada Bianca, por ter surgido em minha vida e me dado força em todos os momentos.

Ao meu orientador Prof. Patrocínio, pela paciência e pelos ensinamentos, que me acompanham desde a graduação.

À CAPES, à SBM e ao IMPA, pela criação e manutenção do PROFMAT.

A minha mãe Débora, por sempre se dedicar ao máximo para me fazer feliz.

Aos meus tios Hélio e Ângela, pelos ensinamentos e pela formação do meu caráter.

Ao meu primo Helinho, por ser um grande irmão.

A minha avó Arlette, meu pai José e minha irmã Priscila, por me apoiarem em todos os momentos.

Aos meus tios Valdemar (in memoriam) e Celso (in memoriam), pela dedicação durante minha criação.

Ao meu sogro Chico, sogra Nice, cunhados Thiago e Gustavo, por me acolherem como parte da família.

Aos meus padrinhos Alberto e Neide, pelo apoio durante minha formação.

Ao meu amigo Betinho, por ser um grande parceiro durante o ensino médio e minha graduação.

Ao professor Nivaldo, por ser mais que um professor de karatê, trazendo ensinamentos para a vida.

Aos meus amigos do Interact e Rotaract, que me acompanham há muitos anos e ajudam em meu desenvolvimento pessoal.

Aos meus professores, que foram grandes inspiradores para eu seguir na profissão.

Aos meus alunos e ex-alunos, que me motivam para ser professor e buscar aprender sempre mais a cada dia.

## Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento da teoria dos números complexos em suas formas algébrica e trigonométrica, com ênfase na resolução de exercícios que podem ser aplicados no Ensino Médio. Em seguida, passa-se para o estudo dos polinômios e equações algébricas, baseando-se principalmente na divisão de polinômios pelo Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, nas Relações de Girard e em métodos de pesquisa de raízes de equações. No final, é apresentada uma lista de exercícios resolvidos que podem ser utilizados por professores e alunos do Ensino Médio, visando a fixação desses assuntos.

**Palavras-chave:** Números complexos, Polinômios, Matemática (ensino médio)

## **Abstract**

This work shows the development of Complex Numbers theory in their algebraic and trigonometric forms, with emphasis on the resolution of exercises that can be applied on High School. Then, it passes to the study of polynomials and algebraic equations, basing mainly on the polynomials division using the Ruffini-Horners's method, Relations of Girard and in ways to find roots of equations. In the end, a list of solved exercises which can be used by High School teachers and students is shown with the purpose of memorization of those topics.

**Keywords:** Complex numbers, Polynomials, Mathematics (high school)



# Lista de Ilustrações

|      |                                                            |    |
|------|------------------------------------------------------------|----|
| 3.1  | Plano de Argand-Gauss com o afixo de $z = a + bi$          | 21 |
| 3.2  | Módulo de $z$                                              | 22 |
| 3.3  | Região do Plano Complexo limitada por $ z - i + 1  \leq 2$ | 23 |
| 3.4  | Circunferência de raio $r$ e centro $(a; b)$               | 23 |
| 3.5  | Argumento de $z$                                           | 24 |
| 3.6  | Argumento de $z = 1 - i$                                   | 25 |
| 3.7  | Módulo e Argumento                                         | 25 |
| 3.8  | Multiplicação na forma trigonométrica                      | 26 |
| 3.9  | Divisão na forma trigonométrica                            | 27 |
| 3.10 | Raízes cúbicas de $z = -8i$                                | 31 |
| 3.11 | Raízes quadradas, cúbicas e sextas da unidade              | 32 |
| 4.1  | Dispositivo Prático de Briot-Ruffini                       | 41 |
| 4.2  | $(x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 1) \div (x - 2)$                | 41 |
| 4.3  | $(2x^3 + x^2 - 5x + 4) \div (2x - 1)$                      | 42 |
| 4.4  | $(x^4 - 1000x^3 - 2003x^2 - 1003x + 1000) \div (x - 1002)$ | 43 |
| 5.1  | $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \div (x - 1)$                      | 49 |
| 5.2  | $(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x - 2)$                        | 53 |
| 5.3  | $(x^3 - 12x^2 + 44x - 48) \div (x - 4)$                    | 53 |
| 5.4  | $(x^3 + 7x^2 - 21x - 27) \div (x - 3)$                     | 54 |
| 5.5  | Divisão por $(x - i)$ e por $(x + i)$                      | 57 |
| 5.6  | Gráfico de $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$                     | 59 |
| 5.7  | Gráfico de $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$                      | 60 |
| 5.8  | Gráfico de $p(x) = 4x^4 - 21x^3 + 18x^2 + 19x - 6$         | 61 |
| 5.9  | $(4x^4 - 21x^3 + 18x^2 + 19x - 6) \div (x - 2)$            | 61 |
| 5.10 | $(4x^3 - 13x^2 - 8x + 3) \div (x - \frac{1}{4})$           | 62 |
| 5.11 | $(4x^3 - 13x^2 - 8x + 3) \div (x + \frac{3}{4})$           | 62 |
| 6.1  | $(x^3 - 3x + 2) \div (x - 1)$                              | 63 |
| 6.2  | $(x^3 - 3x + 52) \div (x + 4)$                             | 64 |
| 6.3  | Módulo de $z = 2 + 3i$                                     | 64 |
| 6.4  | $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$                              | 65 |
| 6.5  | $(2x^3 - 6x^2 + 3x + 2) \div (x - 2)$                      | 65 |
| 6.6  | Estudo do sinal de $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$           | 65 |
| 6.7  | $(x^3 - x^2 + 3x + 5) \div (x + 1)$                        | 66 |
| 6.8  | Representação de $z = \sqrt{3} + i$ no Plano Complexo      | 67 |

|      |                                                                     |    |
|------|---------------------------------------------------------------------|----|
| 6.9  | $a^2 + b^2 = 9$ . . . . .                                           | 68 |
| 6.10 | $(16x^5 - 48x^4 - 40x^3 + 120x^2 + 9x - 27) \div (x - 3)$ . . . . . | 69 |

# Sumário

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                | <b>13</b> |
| <b>2</b> | <b>Das equações aos complexos</b>                                | <b>15</b> |
| <b>3</b> | <b>Números Complexos</b>                                         | <b>18</b> |
| 3.1      | Definição e forma algébrica . . . . .                            | 18        |
| 3.2      | Igualdade . . . . .                                              | 18        |
| 3.3      | Potências de $i$ . . . . .                                       | 18        |
| 3.4      | Operações na forma algébrica . . . . .                           | 20        |
| 3.5      | Plano de Argand-Gauss . . . . .                                  | 21        |
| 3.6      | Módulo de um número complexo . . . . .                           | 22        |
| 3.7      | Argumento de um número complexo . . . . .                        | 23        |
| 3.8      | Forma trigonométrica de um número complexo . . . . .             | 25        |
| 3.9      | Operações na forma trigonométrica . . . . .                      | 26        |
| 3.9.1    | Multiplicação . . . . .                                          | 26        |
| 3.9.2    | Divisão . . . . .                                                | 27        |
| 3.9.3    | Potenciação . . . . .                                            | 28        |
| 3.9.4    | Radiciação . . . . .                                             | 30        |
| 3.9.5    | Expoente racional . . . . .                                      | 31        |
| 3.10     | Raízes da unidade . . . . .                                      | 32        |
| <b>4</b> | <b>Polinômios</b>                                                | <b>33</b> |
| 4.1      | Definição . . . . .                                              | 33        |
| 4.2      | Valor numérico e raiz . . . . .                                  | 33        |
| 4.3      | Polinômios identicamente nulos . . . . .                         | 34        |
| 4.4      | Adição, subtração e multiplicação de polinômios . . . . .        | 35        |
| 4.4.1    | Adição e subtração . . . . .                                     | 35        |
| 4.4.2    | Multiplicação . . . . .                                          | 36        |
| 4.5      | Polinômios idênticos . . . . .                                   | 37        |
| 4.6      | Divisão de polinômios . . . . .                                  | 37        |
| 4.6.1    | Método de Descartes . . . . .                                    | 38        |
| 4.6.2    | Método da chave . . . . .                                        | 39        |
| 4.6.3    | Divisão por $(x - a)$ e o dispositivo de Briot-Ruffini . . . . . | 40        |
| 4.7      | Teorema do Resto . . . . .                                       | 42        |

|          |                                                      |           |
|----------|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Equações Algébricas</b>                           | <b>45</b> |
| 5.1      | Definição . . . . .                                  | 45        |
| 5.1.1    | Raiz de uma equação algébrica . . . . .              | 45        |
| 5.1.2    | Conjunto Solução . . . . .                           | 45        |
| 5.2      | Resolução de equações algébricas . . . . .           | 45        |
| 5.2.1    | Polinômio Identicamente Nulo . . . . .               | 46        |
| 5.2.2    | Polinômio Constante . . . . .                        | 46        |
| 5.2.3    | Polinômio do 1º Grau . . . . .                       | 46        |
| 5.2.4    | Polinômio do 2º Grau . . . . .                       | 46        |
| 5.2.5    | Polinômios de 3º e 4º Graus . . . . .                | 47        |
| 5.2.6    | Polinômios de grau $\geq 5$ . . . . .                | 48        |
| 5.3      | Reduzindo o grau de uma equação algébrica . . . . .  | 48        |
| 5.4      | Teorema Fundamental da Álgebra . . . . .             | 49        |
| 5.5      | Teorema da Decomposição . . . . .                    | 49        |
| 5.5.1    | Raízes múltiplas . . . . .                           | 50        |
| 5.6      | Relações de Girard . . . . .                         | 51        |
| 5.6.1    | Polinômios de grau 2 . . . . .                       | 51        |
| 5.6.2    | Polinômios de grau 3 . . . . .                       | 51        |
| 5.6.3    | Polinômios de grau 4 . . . . .                       | 51        |
| 5.6.4    | Polinômios de grau n . . . . .                       | 52        |
| 5.7      | Equações algébricas com coeficientes reais . . . . . | 55        |
| 5.7.1    | Raízes complexas . . . . .                           | 55        |
| 5.7.2    | Raízes irracionais . . . . .                         | 56        |
| 5.7.3    | Raízes reais . . . . .                               | 56        |
| 5.7.4    | Raízes racionais . . . . .                           | 56        |
| 5.7.5    | Gráficos de funções polinomiais reais . . . . .      | 58        |
| <b>6</b> | <b>Exercícios de Aplicação</b>                       | <b>63</b> |
| <b>7</b> | <b>Considerações Finais</b>                          | <b>72</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                    | <b>74</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

Ao longo desses 7 anos que tenho trabalhado com o ensino de matemática, vejo muitos alunos que se encantam com a teoria de números complexos, polinômios e equações algébricas. No currículo brasileiro, o estudo desses tópicos é realizado, geralmente, no 3º ano do ensino médio, ou seja, no final do ciclo do ensino básico.

Para seguirem estudando numa universidade, há a necessidade de passarem pela prova do vestibular, fazendo com que tenham que revisar praticamente tudo que estudaram até esse momento em todas as matérias do currículo escolar. Como grande parte dos alunos estão nesse momento de decisão sobre o que fazer quando esse ciclo terminar, muitas vezes, o aprendizado desses conceitos ficam limitados ao que "cai no vestibular" e são ensinados muito rapidamente, já que estão sendo vistos pela primeira vez e não como revisão.

Nessa dissertação, busco fazer um estudo detalhado dos números complexos, polinômios e equações algébricas, com o foco para a utilização de teorias do ensino médio, aliado a utilização dos recursos computacionais e a visualização dinâmica de alguns resultados. A utilização dos computadores será vinculada, principalmente, ao estudo da formação de gráficos de funções polinomiais e à procura de raízes de equações algébricas.

No Capítulo 2, faço uma breve introdução histórica dos assuntos que serão trabalhados, partindo do Egito Antigo, passando pelo desenvolvimento das equações algébricas, pelo surgimento dos números complexos e pelos fatos que desencadearam na demonstração do teorema fundamental da álgebra.

No Capítulo 3, introduzo o conceito dos números complexos na forma algébrica, passando pela representação em pares ordenados e a forma trigonométrica. Há um detalhamento das operações nas formas algébricas e trigonométricas, terminando com ênfase na interpretação geométrica dos conceitos estudados.

Nos Capítulos 4 e 5, desenvolvo a teoria de polinômios e equações algébricas. São apresentadas as definições e propriedades dos polinômios, bem como as operações definidas entre eles. Há um destaque para a divisão de polinômios com a apresentação do Método de Descartes, do Método da Chave e do Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, além de algumas aplicações do Teorema do Resto. Ao trabalhar com equações algébricas, mostro métodos para achar suas raí-

zes, enfatizando a redução do grau de uma equação algébrica através da divisão de polinômios. Também apresento o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema da Decomposição (este primeiro, sem demonstração), bem como as relações entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes, conhecidas como Relações de Girard. Ao final, mostro alguns resultados importantes para polinômios com coeficientes reais e aplicações gráficas.

Para complementar o estudo, no Capítulo 6, resolvo exercícios que podem ser usados por professores e alunos interessados no aprofundamento dos três capítulos anteriores, sendo exercícios dos exames vestibulares de acesso para diversas universidades brasileiras. Encerro, no Capítulo 7, com as considerações finais sobre os assuntos discutidos e uma reflexão sobre o ensino de matemática no ensino médio.

## Capítulo 2

# Das equações aos complexos

Durante muitos séculos, boa parte do desenvolvimento da matemática se baseou no interesse pela resolução de equações e métodos que pudessem generalizar a busca por suas soluções.

Vejamos um problema retirado do papiro de Rhind<sup>1</sup> e que data de cerca de 1650 a.C.:

*Uma quantidade; sua metade e seu terço são adicionados a ela. Ela se torna 10.*

Atualmente, com o desenvolvimento da álgebra, isso se torna um problema de fácil resolução, que nos dá como solução a "quantidade" de  $\frac{60}{11}$ :

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10 \Rightarrow 6x + 3x + 2x = 60 \Rightarrow 11x = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{11}.$$

Várias equações quadráticas, associadas a diversos métodos de resolução, também surgiram ao longo dos anos. O problema a seguir consta em um livro árabe escrito pelo matemático árabe Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi (780-850) por volta do ano 825:

*Um quadrado e dez raízes dele são iguais a trinta e nove dirhems<sup>2</sup>. Quer dizer, quanto deve ser o quadrado, o qual, quando aumentado por dez de suas próprias raízes, é igual a trinta e nove?*

Novamente, utilizando uma notação atual, chamaremos o quadrado do número desconhecido de  $x^2$ , dez raízes<sup>3</sup> dele serão  $10x$  e o problema se traduz a  $x^2 + 10x = 39$ , que apresenta como soluções  $x = 3$  ou  $x = -13$ . De fato,

$$x^2 + 10x = 39 \Rightarrow x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \Rightarrow (x + 5)^2 = 64,$$

de onde tiramos que  $x + 5 = 8$  ou  $x + 5 = -8$ , ou seja,  $x = 3$  ou  $x = -13$ .

---

<sup>1</sup>Uma coleção de problemas provavelmente utilizada para treinar jovens escribas no Egito Antigo. O nome faz referência ao arqueólogo A. Henry Rhind, que o levou para a Inglaterra no século XIX.

<sup>2</sup>Moeda árabe no final do século IX.

<sup>3</sup>Na notação da época, o que se entende por raiz é a raiz quadrada positiva.

No livro, somente a solução  $x = 3$  é apresentada. Como ocorre nesse problema envolvendo dinheiro, em que não fazia sentido uma quantia negativa, as soluções negativas eram descartadas por muitos anos e chamadas de soluções falsas, devido a não aplicabilidade na contagem e medição de coisas. Exceção a essa regra foram os chineses, que trabalhavam com quantias negativas, tendo registros nos "Nove Capítulos da Arte Matemática" datando de cerca de 200 a.C.

A notação que utilizamos atualmente decorre da junção de diversos símbolos e métodos utilizados ao longo da história. Matemáticos indianos já utilizavam abreviações para representar incógnitas, símbolos para adição e subtração já eram utilizados desde o Egito Antigo, matemáticos árabes já utilizavam símbolos para representar potências das incógnitas em vez de palavras, mas faltava unir todas as diversas formas de notação numa fórmula que relacionasse as operações, as incógnitas e os símbolos com o que chamamos hoje de coeficientes da equação. Esse passo crucial foi dado pelo matemático francês François Viète (1540-1603), que permitiu uma generalização do estudo das equações a partir de "casos", como equações quadráticas que citamos anteriormente.

No século XVI, época do Renascimento na Europa, o polímata italiano Girolamo Cardano (1501-1576) publicou em seu livro, *Ars Magna* (A Grande Arte), uma descrição completa de como resolver qualquer equação cúbica. O matemático italiano Rafael Bombelli aplicou a famosa fórmula apresentada no livro de Cardano para resolver a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , chegando à seguinte solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Mesmo sem haver uma fundamentação teórica bem definida pra isso, Bombelli operava livremente com os radicais de números negativos, criando algumas regras para as operações. Com isso, ele mostrou que, através da fórmula de Cardano, essa solução correspondia a  $x = 4$ , o que, de fato, é solução da equação dada.

Após a publicação dos métodos de resolução de qualquer cúbica, o matemático italiano Lodovico Ferrari (1522-1565), aluno de Cardano, publicou um método de resolução das equações de quarto grau, as quárticas.

No século XVII, o filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650), em seu *Discurso do Método*, dava início ao Teorema Fundamental da Álgebra, afirmando que "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes, são imaginárias." Devido a isso, utilizamos até hoje as nomenclaturas de "números imaginários" e "unidade imaginária". Para facilitar a notação, o matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o símbolo  $i$  para substituir  $\sqrt{-1}$  e aprofundou a teoria de números complexos, relacionando-a com a de funções exponenciais e trigonométricas.

No século XIX, o livreiro e matemático amador francês Jean-Robert Argand (1768-1822) publicou um trabalho com a representação geométrica dos números complexos, e, alguns anos depois, o matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) utilizou a representação geométrica em suas publicações, mostrando grande aplicabilidade desses "novos números" que estavam surgindo. Gauss, em sua tese de doutorado, publicou uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra. Ela foi considerada correta por muitos anos, mas



apresentava alguns problemas que só seriam resolvidos pelo matemático ucraniano Alexander Markowich Ostrowski em 1920.

Em 1821, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) achava ter conseguido uma fórmula para a resolução das equações do quinto grau, as quárticas. Após cair em contradição ao tentar usá-la em alguns exemplos, Abel provou, três anos depois, paralelamente com o matemático francês Évariste Galois (1811-1832), que não seria possível a existência de fórmulas para a resolução de equações de grau maior ou igual a cinco.

Isso revolucionou a matemática na época, pois muitos matemáticos passaram a buscar outros métodos para trabalhar com as equações, como trabalhar com a relação entre raízes e coeficientes ou ainda métodos numéricos. Um gigantesco impulso veio com a invenção dos computadores e o desenvolvimento da matemática aplicada. O estudo de números complexos, polinômios e equações algébricas se mostrou muito importante, já que surgiram aplicações relacionadas com engenharia elétrica, engenharia de controle e automação, aerodinâmica, em várias teorias físicas e em muitos outros campos que são usadas até hoje.

## Capítulo 3

# Números Complexos

### 3.1 Definição e forma algébrica

Sendo  $i = \sqrt{-1}$  a unidade imaginária, com  $i^2 = -1$ , define-se um número complexo como sendo uma expressão da forma  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . A parte real de  $z$  será denotada por  $\text{Re}(z) = a$  e a parte imaginária de  $z$  será denotada por  $\text{Im}(z) = b$ . Se  $b = 0$ ,  $z$  será um número real. Se  $a = 0$  e  $b \neq 0$ ,  $z$  será um número imaginário puro.

Todos os números da forma  $z = a + bi$  formarão o conjunto dos números complexos, que será denotado por  $\mathbb{C}$ . Como no número complexo  $z = a + bi$ , ao tomarmos  $b = 0$ , temos o número real  $z = a$ , o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, ou seja,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

### 3.2 Igualdade

Os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , com  $a, b, c$  e  $d$  reais, são iguais se, e somente se, suas partes reais forem iguais e suas partes imaginárias também forem iguais, isto é,

$$z = w \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

### 3.3 Potências de $i$

Calculando as potências de  $i$  com expoentes naturais, percebemos uma sequência interessante:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$\begin{aligned}
i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1 \\
i^9 &= i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i \\
i^{10} &= i^8 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \\
i^{11} &= i^8 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i
\end{aligned}$$

Ou seja, o resultado das potências se repete a cada 4 valores consecutivos. Podemos generalizar, tomando  $n, k \in \mathbb{N}$ :

- Se  $n = 4k$ , temos  $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$ ;
- Se  $n = 4k + 1$ , temos  $i^n = i^{4k+1} = (i^4)^k \cdot i = 1^k \cdot i = 1 \cdot i = i$ ;
- Se  $n = 4k + 2$ , temos  $i^n = i^{4k+2} = (i^4)^k \cdot i^2 = 1^k \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$ ;
- Se  $n = 4k + 3$ , temos  $i^n = i^{4k+3} = (i^4)^k \cdot i^3 = 1^k \cdot (-i) = 1 \cdot (-i) = -i$ .

Deste modo, temos que  $i^n \in \{1, i, -1, -i\}$ , com  $i^n = i^r$ , onde  $r$  é o resto da divisão de  $n$  por 4.

**Exemplo 3.1.** Calcule  $i^{1234567890}$ .

**Resolução:** Pelo resultado acima, basta verificarmos o resto da divisão do número 1234567890 por 4. Como o critério de divisibilidade por 4 nos diz que um número natural é divisível por 4 se o número formado pelos dois últimos algarismos for divisível por 4, basta verificar o resto da divisão de 90 por 4. Sabendo-se que  $90 = 4 \cdot 22 + 2$ , o resto da divisão é 2, ou seja,  $i^{1234567890} = i^2 = -1$ .

**Exemplo 3.2.** Calcule

$$\sum_{k=0}^{2016} i^k + \prod_{k=0}^{2016} i^k$$

**Resolução:** Sendo  $\sum_{k=0}^{2016} i^k = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{2012} + i^{2013} + i^{2014} + i^{2015} + i^{2016} = 1 + i + (-1) + (-i) + \dots + 1 + i + (-1) + (-i) + 1 = 1$ , pois percebemos que, a cada 4 potências com expoentes consecutivos, a soma dá zero.

Sendo  $\prod_{k=0}^{2016} i^k = i^0 \cdot i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{2016} = i^{0+1+2+3+\dots+2016}$ , os expoentes estão em progressão aritmética cuja soma vale  $1 + 2 + 3 + \dots + 2016 = \frac{(1+2016) \cdot 2016}{2} = 2033136$ , o que nos leva a  $i^{0+1+2+3+\dots+2016} = i^{2033136} = i^0 = 1$ . Assim, chegamos a:

$$\sum_{k=0}^{2016} i^k + \prod_{k=0}^{2016} i^k = 1 + 1 = 2$$

**Exemplo 3.3.** Calcule  $(1 + i)^{12}$ .

**Resolução:**  $(1 + i)^{12} = ((1 + i)^2)^6 = (1 + 2i + i^2)^6 = (1 + 2i - 1)^6 = (2i)^6 = 2^6 \cdot i^6 = 64 \cdot (-1) = -64$ .

### 3.4 Operações na forma algébrica

Sejam  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Para somar ou subtrair dois números complexos, basta somar ou subtrair as respectivas partes reais e partes imaginárias:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Para multiplicar dois números complexos, utilizamos a propriedade distributiva:

$$z.w = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Definimos o conjugado de  $z = a + bi$  como  $\bar{z} = a - bi$ . Note que:

$$z.\bar{z} = (a + bi).(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.$$

Para efetuarmos  $z \div w$ , com  $w \neq 0$ , utilizaremos o conjugado de  $w$ :

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad + bc}{c^2 + d^2}i.$$

**Exemplo 3.4.** Sendo  $z = 2 - 3i$  e  $w = 4 + i$ , efetue  $z + w$ ,  $z - w$ ,  $z.w$  e  $z \div w$ .

**Resolução:**

$$z + w = (2 - 3i) + (4 + i) = 6 - 2i,$$

$$z - w = (2 - 3i) - (4 + i) = -2 - 4i,$$

$$z.w = (2 - 3i).(4 + i) = 8 + 2i - 12i - 3i^2 = 11 - 10i,$$

$$z \div w = \frac{2 - 3i}{4 + i} = \frac{(2 - 3i)}{(4 + i)} \cdot \frac{(4 - i)}{(4 - i)} = \frac{8 - 2i - 12i + 3i^2}{16 + 1} = \frac{5}{17} - \frac{14}{17}i.$$

Utilizando a divisão entre números complexos, podemos estender as potências de  $i$  para expoentes inteiros, que também será limitada ao conjunto  $\{1, i, -1, -i\}$ .

**Exemplo 3.5.** Escreva  $i^{-11}$  na forma algébrica.

**Resolução:**  $i^{-11} = \frac{1}{i^{11}} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{1} = i.$

**Exemplo 3.6.** Determine  $z$ , tal que  $z^2 = i$ .

**Resolução:** Seja  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Temos

$$z^2 = i \rightarrow (a + bi)^2 = i \rightarrow a^2 + 2abi + b^2i^2 = i \rightarrow a^2 - b^2 + 2abi = i.$$

Pela igualdade entre números complexos, temos que:

$$a^2 - b^2 = 0, \tag{3.4.1}$$

$$2ab = 1. \tag{3.4.2}$$

De (3.4.1), sabemos que  $a = \pm b$ .

Supondo  $a = b$  e substituindo em (3.4.2), chegamos em:

$$2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Supondo  $a = -b$  e substituindo em (3.4.2), chegamos em:

$$-2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \nexists a, b \in \mathbb{R}.$$

Assim, as soluções são  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$  ou  $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .

**Exemplo 3.7.** Encontre os valores de  $z$ , que satisfazem a equação do 2º grau  $z^2 - 4z + 5 = 0$ .

**Resolução:** Sabemos que:

$$az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ou seja,

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \Rightarrow z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \Rightarrow z = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}.$$

Como  $2i \cdot 2i = -4$ , podemos substituir  $\sqrt{-4} = 2i$ , chegando às soluções  $z = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$ . Assim,

$$S = \{2 + i; 2 - i\}.$$

### 3.5 Plano de Argand-Gauss

Considerando um sistema de coordenadas ortogonais, sendo o eixo das abscissas denominado "eixo real" (Re) e o eixo das ordenadas "eixo imaginário" (Im), podemos representar todo número complexo neste plano.

Este plano será denominado Plano de Argand-Gauss ou Plano Complexo. O ponto  $(a; b)$  será o afixo ou a imagem de  $z = a + bi$ , cuja abscissa corresponde à parte real e a ordenada à parte imaginária de  $z$ .

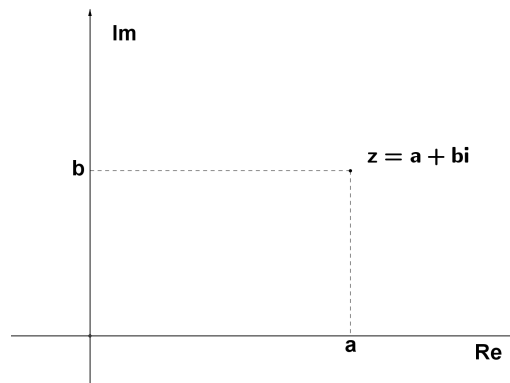


Figura 3.1: Plano de Argand-Gauss com o afixo de  $z = a + bi$

### 3.6 Módulo de um número complexo

O módulo de um número complexo  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , será representado por  $|z|$  ou pela letra grega  $\rho$ , sendo definido como a distância do afixo de  $z$  até o ponto  $(0; 0)$ , ou seja, até a origem do plano complexo.

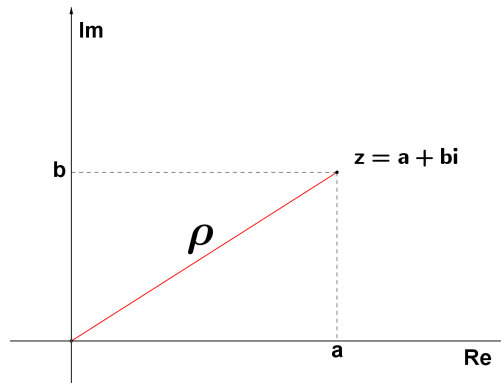


Figura 3.2: Módulo de  $z$

Utilizando o Teorema de Pitágoras, podemos verificar que  $\rho^2 = a^2 + b^2$ , ou seja,  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Exemplo 3.8.** *Mostre que  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ .*

**Resolução:** Sendo  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  temos  $\bar{z} = a - bi$ . Logo,

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

**Exemplo 3.9.** *Dar o lugar geométrico dos afixos dos números complexos  $z$ , tais que  $|z - i + 1| \leq 2$ .*

**Resolução:** Seja  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ . Então,

$$|a + bi - i + 1| \leq 2 \Rightarrow |(a + 1) + (b - 1)i| \leq 2 \Rightarrow \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 1)^2} \leq 2.$$

Como  $\sqrt{(a + 1)^2 + (b - 1)^2} \geq 0$ , temos que:

$$(a + 1)^2 + (b - 1)^2 \leq 4.$$

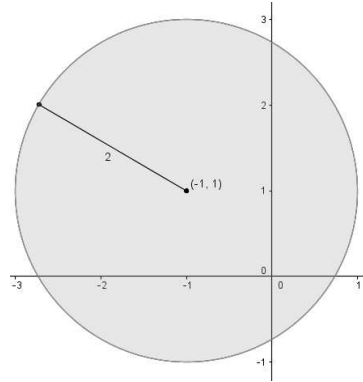


Figura 3.3: Região do Plano Complexo limitada por  $|z - i + 1| \leq 2$

Seja  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(a + 1)^2 + (b - 1)^2 \leq 4$  representa um círculo de raio 2 centrado no ponto  $(-1, 1)$ .

**Exemplo 3.10.** Dados  $z_0 = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , e  $r \in \mathbb{R}_+$ , mostre que o lugar geométrico dos afixos dos números complexos  $z$ , tais que  $|z - z_0| = r$  é uma circunferência de raio  $r$ , centrada no ponto  $(a; b)$ .

**Resolução:** Sendo  $z = x + yi$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$  temos que:

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r &\Rightarrow |(x + yi) - (a + bi)| = r \Rightarrow \\ |(x - a) + (y - b)i| = r &\Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \Rightarrow \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

que representa uma circunferência de raio  $r$  e centro  $(a; b)$ .

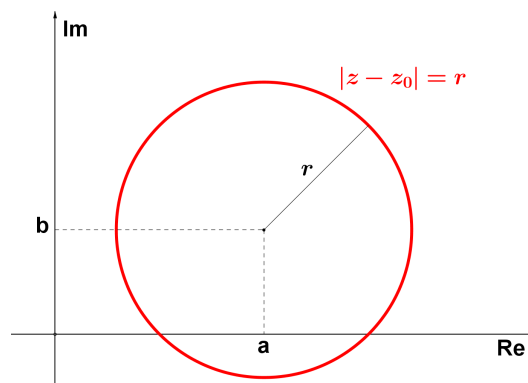


Figura 3.4: Circunferência de raio  $r$  e centro  $(a; b)$

### 3.7 Argumento de um número complexo

Seja  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $z \neq 0$  e  $|z| = \rho$ . O argumento de  $z$ , representado por  $\arg z$  é definido por:

$$\arg z = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\rho}, \\ \sin \theta = \frac{b}{\rho}, \\ 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Se tomarmos  $\theta$  fora do intervalo  $0 \leq \theta < 2\pi$ , faremos a correspondência com o ângulo da primeira volta do ciclo trigonométrico.

Sendo  $P = (a; b)$  o afixo de  $z$  e  $O$  a origem do Plano Complexo, o argumento pode ser interpretado como o ângulo formado no sentido anti-horário entre o semieixo real positivo e o segmento  $\overline{OP}$ .

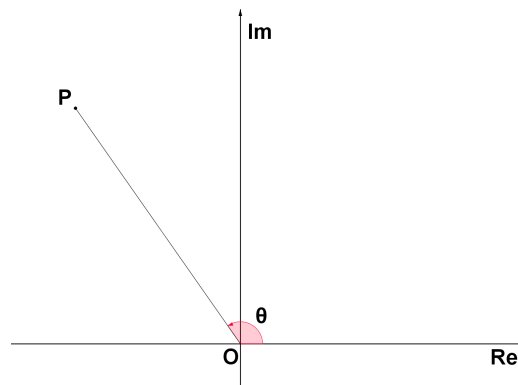


Figura 3.5: Argumento de  $z$

**Exemplo 3.11.** Calcular o argumento de  $z = 1 - i$ .

**Resolução:** Temos:

$$\rho^2 = 1^2 + (-1)^2 \Rightarrow \rho^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



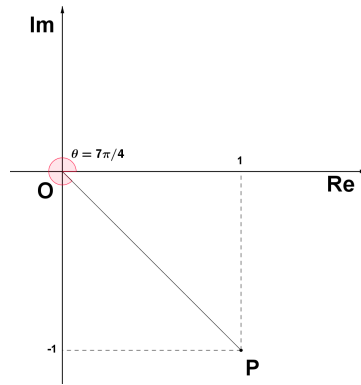


Figura 3.6: Argumento de  $z = 1 - i$

Como  $0 \leq \theta < 2\pi$ , temos que  $\theta = \arg z = \frac{7\pi}{4}$ .

### 3.8 Forma trigonométrica de um número complexo

Seja um número complexo na forma algébrica  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $z \neq 0$ , módulo  $\rho$  e argumento  $\theta$ .

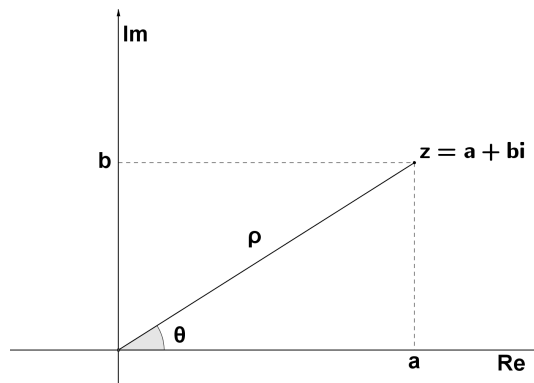


Figura 3.7: Módulo e Argumento

Pela definição, temos que  $\cos \theta = \frac{a}{\rho}$  e  $\sin \theta = \frac{b}{\rho}$ , ou seja,  $a = \rho \cos \theta$  e  $b = \rho \sin \theta$ . Substituindo esses valores na forma algébrica, temos:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= (\rho \cos \theta) + (\rho \sin \theta)i \\ &= \rho(\cos \theta + i \cdot \sin \theta). \end{aligned}$$

Chamaremos  $z = \rho(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$  de "forma trigonométrica" do número complexo  $z$ . A "forma trigonométrica" também poderá ser chamada de "forma polar".

**Observação 3.12.** *Dois números complexos com mesmo módulo e argumentos que diferem em  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  serão iguais.*

**Observação 3.13.** *As três formas a seguir são equivalentes para a representação de um número complexo:*

$$\underbrace{a + bi}_{\text{Forma algébrica}} = \underbrace{(a; b)}_{\text{Par ordenado}} = \underbrace{\rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta)}_{\text{Forma trigonométrica}}.$$

## 3.9 Operações na forma trigonométrica

Vamos analisar as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de números complexos na forma trigonométrica.

### 3.9.1 Multiplicação

**Teorema 3.14.** *Dados os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , tais que*

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1), \\ z_2 &= \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2), \end{aligned}$$

*o produto de  $z_1$  por  $z_2$  será dado por*

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

**Demonstração:** Utilizando a propriedade distributiva, temos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \text{sen } \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cdot \cos \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2 + i \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i^2 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 \underbrace{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2)}_{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + i \cdot \underbrace{(\cos \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_2)}_{\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Assim, completamos a demonstração. □

Ou seja, na multiplicação de dois números complexos na forma trigonométrica, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Isso é ilustrado geometricamente na figura 3.8.

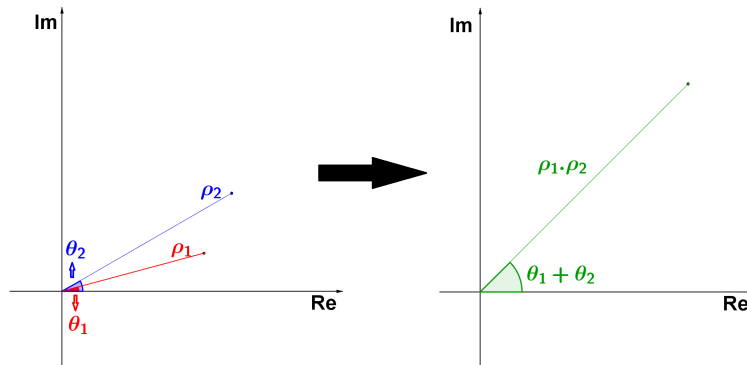


Figura 3.8: Multiplicação na forma trigonométrica

### 3.9.2 Divisão

**Teorema 3.15.** *Dados os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , com  $z_2 \neq 0$ , tais que*

$$\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1), \\ z_2 &= \rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2), \end{aligned}$$

*o quociente de  $z_1$  por  $z_2$  será dado por*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)).$$

**Demonstração:** Efetuando-se a divisão, temos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1)}{(\cos \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \cdot \operatorname{sen} \theta_2)} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i \cdot \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + i \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - i^2 \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)}{\underbrace{\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2}_1} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left( \underbrace{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2}_{\cos(\theta_1 - \theta_2)} + i \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2)}_{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)} \right) \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

Assim, completamos a demonstração. □

Ou seja, na divisão de dois números complexos na forma trigonométrica, dividem-se os módulos e subtraem-se os argumentos. Isso é ilustrado geometricamente na figura 3.9.

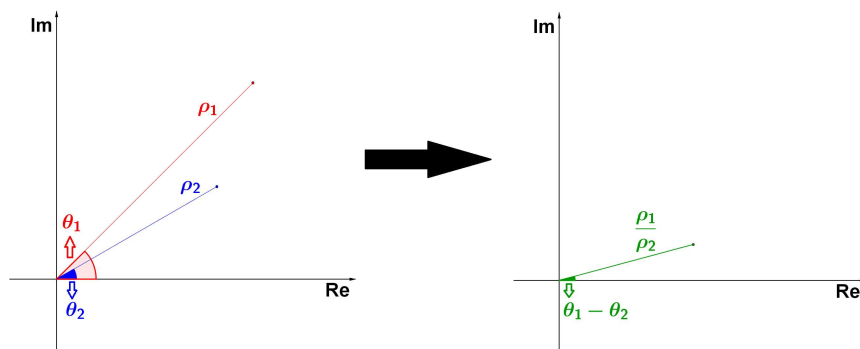


Figura 3.9: Divisão na forma trigonométrica

**Exemplo 3.16.** *Considere os números complexos:*

$$z_1 = 8 \left( \cos \left( \frac{5\pi}{12} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{12} \right) \right),$$

$$z_2 = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{12} \right) \right).$$

Efetue  $z_1 \cdot z_2$  e  $z_1 \div z_2$ , escrevendo o produto e o quociente na forma algébrica.

**Resolução:** Pela fórmula da multiplicação, temos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 8 \cdot 2 \left( \cos \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) \right) \\ &= 16 \left( \cos \left( \frac{6\pi}{12} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{6\pi}{12} \right) \right) \\ &= 16 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 16(0 + i \cdot 1) \\ &= 16i. \end{aligned}$$

Pela fórmula da divisão, temos:

$$\begin{aligned} z_1 \div z_2 &= \frac{8}{2} \left( \cos \left( \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) \right) \\ &= 4 \left( \cos \left( \frac{4\pi}{12} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{4\pi}{12} \right) \right) \\ &= 4 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= 4 \left( \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 + 2\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $z_1 \cdot z_2 = 16i$  e  $z_1 \div z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ .

### 3.9.3 Potenciação

**Teorema 3.17.** Esta fórmula é conhecida como 1ª fórmula de De Moivre<sup>4</sup>. Dados o número complexo  $z = \rho(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)).$$

**Demonstração:** Vamos fazer a demonstração por indução.

- Para  $n = 0$  e  $n = 1$ , o resultado é imediato.  
Para  $n = 2$ , temos  $z^2 = z \cdot z = \rho(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta) \cdot \rho(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$ , que, de acordo com a fórmula de multiplicação, é igual a  $\rho^2(\cos(2\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(2\theta))$ . Deste modo, verificamos a validade da fórmula para  $n = 0$ ,  $n = 1$  e  $n = 2$ .
- Assumindo que a fórmula seja válida para  $n = k$ , vamos mostrar a sua validade para  $n = k + 1$ . Assim, assumimos  $z^k = \rho^k(\cos(k\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(k\theta))$  como nossa hipótese de indução (H.I.)

---

<sup>4</sup>Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francês.

Queremos mostrar que  $z^{k+1} = \rho^{k+1}(\cos((k+1)\theta) + i \cdot \text{sen}((k+1)\theta))$ . Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
 z^{k+1} &= z^k \cdot z = \underbrace{\rho^k(\cos(k\theta) + i \cdot \text{sen}(k\theta))}_{H.I.} \cdot \rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta) \\
 &= \rho^{k+1}(\cos(k\theta) \cdot \cos \theta + i \cos(k\theta) \cdot \text{sen} \theta + i \text{sen}(k\theta) \cdot \cos \theta + i^2 \text{sen}(k\theta) \cdot \text{sen} \theta) \\
 &= \rho^{k+1}(\underbrace{\cos(k\theta) \cdot \cos \theta - \text{sen}(k\theta) \cdot \text{sen} \theta}_{\cos(k\theta+\theta)} + i \underbrace{(\cos(k\theta) \cdot \text{sen} \theta + \text{sen}(k\theta) \cdot \cos \theta)}_{\text{sen}(k\theta+\theta)}) \\
 &= \rho^{k+1}(\cos((k+1)\theta) + i \cdot \text{sen}((k+1)\theta)).
 \end{aligned}$$

Assim, completamos a prova por indução.  $\square$

Ou seja, elevando um número complexo na forma trigonométrica à  $n$ -ésima potência, elevamos o módulo à  $n$ -ésima potência e multiplicamos o argumento por  $n$ .

Podemos estender o teorema anterior, para  $n \in \mathbb{Z}$ . Sejam  $m, n \in \mathbb{Z}$ , onde  $n > 0$  e  $m = -n$ . Então:

$$\begin{aligned}
 z^m &= (\rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta))^m \\
 &= (\rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta))^{-n} \\
 &= \frac{1}{(\rho(\cos \theta + i \cdot \text{sen} \theta))^n} \\
 &= \frac{1(\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0)}{\rho^n(\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta))}.
 \end{aligned}$$

Pela fórmula da divisão, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1(\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0)}{\rho^n(\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta))} &= \frac{1}{\rho^n}(\cos(0 - n\theta) + i \cdot \text{sen}(0 - n\theta)) \\
 &= \rho^{-n}(\cos(-n\theta) + i \cdot \text{sen}(-n\theta)) \\
 &= \rho^m(\cos(m\theta) + i \cdot \text{sen}(m\theta)).
 \end{aligned}$$

Assim, verificamos a validade para o expoente inteiro.

**Exemplo 3.18.** Encontre a parte real e a parte imaginária do número complexo  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{12}$ .

**Resolução:** Inicialmente, escreveremos  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  na forma trigonométrica, calculando o módulo e o argumento:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{1} = 1, \\
 \left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen} \theta &= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

Assim, temos que  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ . Utilizando a fórmula da potenciação, chegamos em:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{12} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{12} \\ &= \cos\left(\frac{12\pi}{6}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{12\pi}{6}\right) \\ &= \cos(2\pi) + i.\text{sen}(2\pi) \\ &= 1 + i.0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $\text{Re}(z) = 1$  e  $\text{Im}(z) = 0$ .

### 3.9.4 Radiciação

**Teorema 3.19.** Esta fórmula é conhecida como 2ª fórmula de De Moivre. Dados o número complexo  $z = \rho(\cos \theta + i.\text{sen} \theta)$ , sendo  $z \neq 0$ , e  $n \in \mathbb{N}$ , sendo  $n \geq 2$ , existem  $n$  raízes enésimas distintas de  $z$ . Uma dessas raízes será  $z_0 = \sqrt[n]{\rho}(\cos \frac{\theta}{n} + i.\text{sen} \frac{\theta}{n})$  e as demais raízes possuem o mesmo módulo de  $z_0$ , mas seus argumentos formarão com o argumento de  $z_0$  uma progressão aritmética (P.A.) de primeiro termo  $\frac{\theta}{n}$  e razão  $\frac{2\pi}{n}$ . Ou seja, sendo  $k \in \mathbb{N}$  e  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , as  $n$  raízes serão

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i.\text{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right).$$

**Demonstração:** Estamos procurando as raízes enésimas de  $z$ . Chamando uma raiz de  $w$ , sabemos que

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z.$$

Sejam  $z = \rho(\cos \theta + i.\text{sen} \theta)$  e  $w = r(\cos \phi + i.\text{sen} \phi)$ . Como  $w^n = z$  temos

$$r^n(\cos(n\phi) + i.\text{sen}(n\phi)) = \rho(\cos \theta + i.\text{sen} \theta).$$

Pela igualdade de dois números complexos, concluímos que  $r^n = \rho$ , ou seja,  $r = \sqrt[n]{\rho}$ , já que  $r > 0$ , e também  $n\phi = \theta + 2k\pi$ , ou seja,  $\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ . Como as funções seno e cosseno são periódicas de período  $2\pi$ , os valores do seno e cosseno de  $\frac{\theta}{n}$  e  $\frac{\theta + 2n\pi}{n}$  são iguais, ou seja, identificamos as  $n$  raízes com  $k \in \mathbb{N}$  e  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .  $\square$

**Observação 3.20.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , sendo  $n \geq 2$ , o número complexo  $z = 0$  possui somente uma raiz, que será  $z_0 = 0$ .

**Observação 3.21.** Quando trabalhamos com números reais e queremos calcular raízes enésimas, nem sempre a quantidade de raízes que encontramos corresponde ao índice da raiz procurada. Por exemplo, em  $\mathbb{R}$ , as raízes quadradas de 1 são 1 e -1, duas raízes. Já as raízes quartas de 1 também são 1 e -1, também duas raízes no cálculo de uma raiz quarta. Quando estendemos para  $\mathbb{C}$ , sempre haverá  $n$  raízes enésimas distintas de um número  $z \neq 0$ . No caso anterior, as raízes quartas de 1 seriam 1, -1,  $i$ ,  $-i$ , ou seja, quatro raízes.

**Exemplo 3.22.** Calcule as raízes cúbicas de  $z = -8i$ , escreva-as na forma algébrica e represente-as no plano de Argand-Gauss.

**Resolução:** Inicialmente, escrevemos  $z = -8i$  na forma trigonométrica como:

$$z = 8 \left( \cos \left( \frac{3\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{3\pi}{2} \right) \right).$$

Utilizando a fórmula da radiciação, encontramos:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{8} \left( \cos \left( \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} \right) \right) \\ &= 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Chamando esta primeira raiz de  $z_0 = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right)$ , as outras duas raízes possuem o mesmo módulo, porém os argumentos estão em P.A. com primeiro termo igual a  $\frac{\pi}{2}$  e razão  $\frac{2\pi}{3}$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i, \\ z_1 &= 2 \left( \cos \left( \frac{7\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{7\pi}{6} \right) \right) = 2 \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{-1}{2} \right) = -\sqrt{3} - i, \\ z_2 &= 2 \left( \cos \left( \frac{11\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left( \frac{11\pi}{6} \right) \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{-1}{2} \right) = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

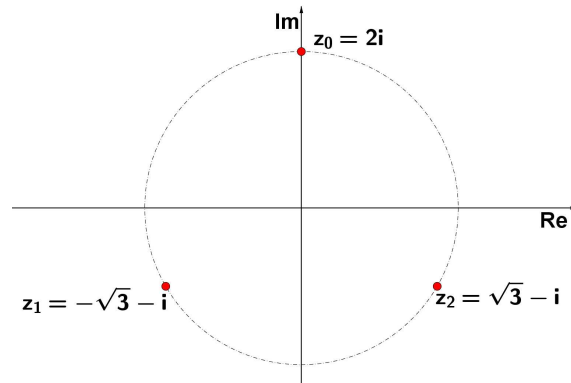


Figura 3.10: Raízes cúbicas de  $z = -8i$

### 3.9.5 Expoente racional

Podemos generalizar os resultados obtidos em Potenciação e Radiciação introduzindo a notação com expoente racional. Sejam  $m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ ,  $z \neq 0$ ,  $z = \rho(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$  e  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , temos que:

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\rho^m} \left( \cos \left( \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) \right) + i \cdot \sin \left( \frac{m}{n} (\theta + 2k\pi) \right) \right).$$

Para verificar essa igualdade, basta escrever  $z^{\frac{m}{n}} = \left( z^{\frac{1}{n}} \right)^m$  e aplicar o teorema de radiciação em  $z$ , seguido do teorema de potenciação em  $z^{\frac{1}{n}}$ .

**Observação 3.23.** Nesta dissertação, limitaremos o estudo até os expoentes racionais<sup>5</sup>.

### 3.10 Raízes da unidade

Como  $1 = \cos 0 + i \cdot \sin 0$ , podemos escrever as raízes enésimas da unidade como:

$$1^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Sendo  $k = 0$ , temos a própria unidade como raiz. Sendo  $k = 1$ , denotaremos a raiz por  $w$ , tal que:

$$w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Aplicando a 1ª Fórmula de De Moivre, temos que as raízes serão:

$$1, w, w^2, w^3, \dots, w^{n-1}.$$

No plano complexo, essas raízes estão sobre uma circunferência de raio 1 e centrada na origem. Para  $n = 2$ , temos as raízes quadradas da unidade que são 1 e  $-1$  e que são extremidades de um diâmetro da circunferência. Para  $n \geq 3$ , as raízes são os vértices do polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência.

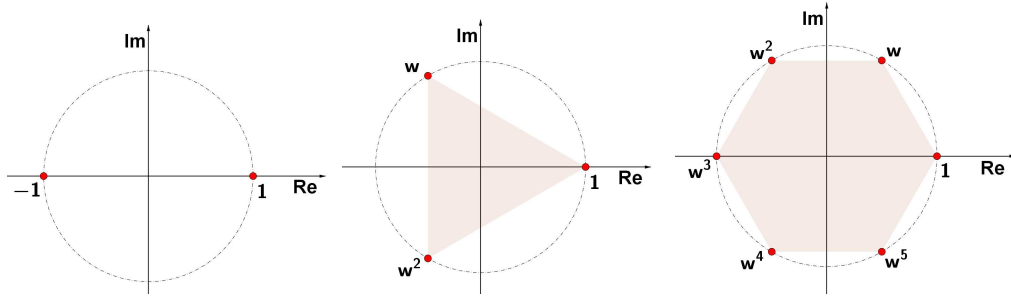


Figura 3.11: Raízes quadradas, cúbicas e sextas da unidade

**Proposição 3.24.** Sejam  $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  e  $z_0$  uma raiz enésima qualquer de  $z = \rho(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ , então  $z_0, z_0w, z_0w^2, \dots, z_0w^{n-1}$  são as  $n$  raízes enésimas de  $z$ .

**Demonstração:** O resultado é imediato, pois multiplicar  $z_0$  por  $w^k$  corresponde a aumentar de  $\frac{2k\pi}{n}$  o argumento de  $z_0$ . Com  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , temos as  $n$  raízes.  $\square$

**Proposição 3.25.** Sejam  $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$  as raízes enésimas da unidade. A soma  $S = 1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}$  vale zero.

**Demonstração:** Sabemos que as  $n$  raízes  $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$  são distintas e que  $w^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ , ou seja,  $w^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = \cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi) = 1$ . Logo:

$$S = 1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}, \quad (3.10.1)$$

$$wS = w + w^2 + w^3 + \dots + w^n. \quad (3.10.2)$$

Subtraindo (3.10.1) de (3.10.2), chegamos em  $wS - S = w^n - 1 = 0$ , ou seja,  $S(w - 1) = 0$ . Como  $w \neq 1$ , chegamos que  $S = 0$ .  $\square$

<sup>5</sup>Para uma generalização com expoentes reais e complexos, veja referência [1] (pp.57 a pp.59).



# Capítulo 4

## Polinômios

### 4.1 Definição

Dados números complexos  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  e  $n \in \mathbb{N}$ , definimos uma função polinomial<sup>6</sup>  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Em relação a  $p$ , temos que:

- os números  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  são os coeficientes;
- $x$  é a variável;
- $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$  são os termos ou monômios;
- $a_0$  é chamado termo independente ou termo constante;
- se  $a_n \neq 0$ , em que  $n$  é o maior expoente de  $x$  dentre os termos, dizemos que  $p$  tem grau  $n$  e escrevemos  $\text{gr}(p) = n$ .

**Observação 4.1.** *Se não forem especificados o domínio e o contradomínio de uma função polinomial  $p$ , ficará convencionado domínio e contra domínio  $\mathbb{C}$ .*

### 4.2 Valor numérico e raiz

Dada a função polinomial  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , sendo  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , chamaremos de valor numérico de  $p$  para  $x = \alpha$  o número  $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$ .

Se  $p(\alpha) = 0$ , dizemos que  $\alpha$  é raiz de  $p(x)$ .

Se  $\alpha = 1$ , temos  $p(1) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$ , que é igual à soma dos coeficientes de  $p$ .

Se  $\alpha = 0$ , temos  $p(0) = a_0$ , que é igual ao termo independente de  $p$ .

---

<sup>6</sup>Consultar referência [6] (pp. 200 a pp.203) para mais detalhes sobre a sutil diferença entre função polinomial e polinômio. Ao longo do texto, trabalharemos como sinônimos.

**Exemplo 4.2.** Considere o polinômio  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , sendo  $p(x) = x^3 + 2ix^2 + 3x$ . Calcule  $p(1)$  e  $p(i)$ .

**Resolução:** Temos:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^3 + 2i \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 + 2i + 3 = 4 + 2i, \\ p(i) &= i^3 + 2i \cdot i^2 + 3 \cdot i = (-i) + 2i \cdot (-1) + 3i = 0. \end{aligned}$$

Assim, verificamos que 1 não é raiz e que  $i$  é raiz de  $p(x)$ .

### 4.3 Polinômios identicamente nulos

**Teorema 4.3.** Se existem  $n + 1$  números complexos distintos que anulam a expressão  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , então  $a_i = 0, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .

**Demonstração:** Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  os  $n + 1$  números complexos distintos que anulam a expressão  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} a_n(x_1)^n + a_{n-1}(x_1)^{n-1} + \dots + a_2(x_1)^2 + a_1 x_1 + a_0 &= 0, \\ a_n(x_2)^n + a_{n-1}(x_2)^{n-1} + \dots + a_2(x_2)^2 + a_1 x_2 + a_0 &= 0, \\ &\vdots \\ a_n(x_n)^n + a_{n-1}(x_n)^{n-1} + \dots + a_2(x_n)^2 + a_1 x_n + a_0 &= 0, \\ a_n(x_{n+1})^n + a_{n-1}(x_{n+1})^{n-1} + \dots + a_2(x_{n+1})^2 + a_1 x_{n+1} + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Este é um sistema linear homogêneo que apresenta  $n+1$  equações e  $n+1$  incógnitas  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ . Os coeficientes para a resolução do sistema formam um determinante Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Como, por hipótese,  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  são valores distintos, o determinante é diferente de zero. Com isso, o sistema linear homogêneo possui solução única, ou seja, a solução trivial  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$ .  $\square$

**Corolário 4.4.** Um polinômio de grau  $n$  possui, no máximo,  $n$  raízes complexas.

**Demonstração:** Seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  um polinômio de grau  $n$ . Suponhamos que esse polinômio possua  $n + 1$  raízes complexas. Pelo teorema anterior,  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$ . Isto é um absurdo, pois como o polinômio é de grau  $n$ ,  $a_n \neq 0$ . Logo, o polinômio possui, no máximo,  $n$  raízes complexas.  $\square$

Um polinômio  $p$  chama-se identicamente nulo quando tem-se que  $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$ . Escreveremos:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \equiv 0.$$

Verificamos que  $p$  possui infinitas raízes, pois todo número complexo é raiz de  $p(x)$ , e, portanto,  $\nexists n \in \mathbb{N}$ , tal que  $n$  seja grau<sup>7</sup> de  $p$ . Com isso, afirmamos que  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$ .

De fato, se houvesse algum  $a_i \neq 0$ , poderíamos definir o grau do polinômio e ele possuiria um número finito de raízes, o que seria um absurdo. Desta forma, também podemos escrever o polinômio identicamente nulo como:

$$p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x^2 + 0x + 0 \equiv 0.$$

## 4.4 Adição, subtração e multiplicação de polinômios

Vamos introduzir uma notação com somatório para facilitar a definição das operações. Considere os polinômios  $p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , tais que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i,$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^n b_i x^i.$$

**Observação 4.5.** *Mesmo que os polinômios não possuam o mesmo grau (suponhamos que  $p$  tenha grau  $n$  e  $q$  tenha grau  $m$ , com  $n > m$ ), podemos completar os coeficientes daquele de menor grau com zeros para efetuar as operações ( $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_n = 0$ ).*

### 4.4.1 Adição e subtração

Dados dois polinômios  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  e  $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ , definimos a soma e a diferença entre  $p$  e  $q$  através de:

$$p(x) \pm q(x) = \sum_{i=0}^n (a_i \pm b_i) x^i$$

**Exemplo 4.6.** *Seendo  $p(x) = 3x^2 - 5x + 2$  e  $q(x) = 2x^3 - 7x + 1$ , efetue  $p(x) + q(x)$  e  $p(x) - q(x)$ .*

**Resolução:** *Temos:*

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x^2 - 5x + 2) + (2x^3 - 7x + 1) \\ &= (0 + 2)x^3 + (3 + 0)x^2 + (-5 - 7)x + (2 + 1) \\ &= 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3. \\ p(x) - q(x) &= (3x^2 - 5x + 2) - (2x^3 - 7x + 1) \\ &= (0 - 2)x^3 + (3 - 0)x^2 + (-5 + 7)x + (2 - 1) \\ &= -2x^3 + 3x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

*Ou ainda, escrevendo os polinômios numa tabela, onde nas primeiras linhas estão cada um dos polinômios, com as potências  $x^i$  em ordem decrescente, e na última linha o resultado da adição, de maneira similar à adição e à subtração de números reais.*

<sup>7</sup>Em algumas situações, definiremos o grau do polinômio identicamente nulo como  $-\infty$ .

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{rrrr}
& 3x^2 & -5x & +2 \\
+ & 2x^3 & -7x & +1 \\
\hline
& 2x^3 & +3x^2 & -12x & +3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\begin{array}{rrrr}
& 3x^2 & -5x & +2 \\
- & (2x^3 & -7x & +1) \\
\hline
& -2x^3 & +3x^2 & +2x & +1
\end{array}
\end{array}$$

**Observação 4.7.** Temos que  $\text{gr}(p + q) \leq \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$ , uma vez que termos com coeficientes opostos podem se anular.

### 4.4.2 Multiplicação

Dados dois polinômios  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  e  $q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ , definimos o produto de  $p$  por  $q$  através de:

$$p(x).q(x) = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$$

onde

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0, \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0, \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \\
&\vdots \\
c_i &= a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0, \\
&\vdots \\
c_{n+m} &= a_n b_m.
\end{aligned}$$

Note que a definição é a que usamos na propriedade distributiva.

**Exemplo 4.8.** Efetue o produto entre  $p(x) = 2x + 1$  e  $q(x) = x^2 - 3x + 1$ .

**Resolução:** Utilizando a definição dada anteriormente, faremos a distributiva:

$$\begin{aligned}
p(x).q(x) &= (2x + 1).(x^2 - 3x + 1) \\
&= 2x^3 - 6x^2 + x^2 + 2x - 3x + 1 \\
&= 2x^3 - 5x^2 - x + 1.
\end{aligned}$$

Logo, temos  $p(x).q(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 1$ .

**Teorema 4.9.** Sejam  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  e  $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ , dois polinômios de graus  $n$  e  $m$ , respectivamente. Afirmamos que

$$\text{gr}(p.q) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$$

**Demonstração:** Como  $p$  tem grau  $n$  e  $q$  tem grau  $m$ , temos que  $a_n \neq 0$  e  $b_m \neq 0$ . Efetuando-se o produto  $p.q$ , pela definição, o termo de variável com maior expoente será  $a_n b_m x^{n+m}$ . Como  $a_n b_m \neq 0$ ,  $\text{gr}(p.q) = n + m = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$ .  $\square$

## 4.5 Polinômios idênticos

Dois polinômios  $p$  e  $q$  são idênticos quando  $p(x) = q(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{C}$ . Neste caso, dizemos que  $p(x) \equiv q(x)$ .

**Teorema 4.10.** *Dados dois polinômios  $p$  e  $q$ , completando com zeros algum  $a_i$  ou  $b_i$  se necessário, podemos escrevê-los da forma  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  e  $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ . Eles são idênticos se todos os seus coeficientes são iguais, ou seja,  $a_i = b_i$ ,  $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .*

**Demonstração:** Como  $p$  e  $q$  são idênticos,  $p(x) = q(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{C}$ , ou seja:

$$p(x) \equiv q(x) \Leftrightarrow p(x) - q(x) \equiv 0$$

Seja  $d(x) = p(x) - q(x)$ , que será identicamente nulo. Como vimos, todos os seus coeficientes devem ser iguais a zero.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 - (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) \equiv 0$$

De onde concluímos que  $a_i - b_i = 0$ ,  $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , ou seja,  $a_i = b_i$ ,  $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ .  $\square$

**Exemplo 4.11.** *Determine  $m, n, p \in \mathbb{C}$  para que*

$$3x^4 + mx(x^2 + 1) + n(x^2 + x + 1) + p \equiv (3x + 9) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$$

**Resolução:** *Desenvolvendo ambos os lados, temos:*

$$\begin{aligned} 3x^4 + mx^3 + mx + nx^2 + nx + n + p &\equiv (3x + 9) \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot (x + 1), \\ 3x^4 + mx^3 + nx^2 + (n + m)x + (n + p) &\equiv (3x^3 + 3x^2 - 15x + 9) \cdot (x + 1), \\ 3x^4 + mx^3 + nx^2 + (n + m)x + (n + p) &\equiv 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 6x + 9. \end{aligned}$$

Pelo teorema anterior, os coeficientes devem ser iguais, ou seja,  $m = 6$ ,  $n = -12$ ,  $n + m = -6$  e  $n + p = 9$ . Da onde concluímos que  $m = 6$ ,  $n = -12$  e  $p = 21$ .

## 4.6 Divisão de polinômios

Dividir o polinômio  $D(x)$  por  $d(x)$ , não identicamente nulo, é obter dois novos polinômios  $q(x)$  e  $r(x)$ , de modo que satisfaçam as seguintes condições  $\forall x \in \mathbb{C}$ :

- $D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
- $0 \leq \text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$  ou  $r(x) \equiv 0$

$D(x)$  será o dividendo,  $d(x)$  o divisor,  $q(x)$  o quociente e  $r(x)$  o resto.

**Observação 4.12.** *Se  $D(x) \equiv d(x) \cdot q(x)$ , ou seja,  $r(x) \equiv 0$ , dizemos que  $D(x)$  é divisível por  $d(x)$  e por  $q(x)$ .*

**Observação 4.13.** Se  $\text{gr}(d(x)) > \text{gr}(D(x))$ , o resultado é imediato, com  $q(x) \equiv 0$  e  $r(x) = D(x)$ .

**Lema 4.14.** Seja  $p(x) = x^n - a^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{C}$ , temos que  $p(x)$  é divisível por  $x - a$ .

**Demonstração:** Basta verificar que  $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ . Fazendo a distributiva do  $x$ , do  $-a$  e cancelando os termos opostos chegamos em:

$$x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x - ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - \dots - a^{n-1}x - a^n = x^n - a^n.$$

Como  $(x - a)$  é um fator de  $p(x)$ , chegamos no resultado.  $\square$

**Teorema 4.15.** Se o número complexo  $k$  é raiz de um polinômio  $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , então  $p(x)$  é divisível por  $(x - k)$ .

**Demonstração:** Como  $p(k) = 0$ , temos que:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(k) \\ &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 - (a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_1k + a_0) \\ &= a_n(x^n - k^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - k^{n-1}) + \dots + a_1(x - k). \end{aligned}$$

Pelo lema anterior, cada uma das parcelas da expressão acima é divisível por  $(x - k)$ , ou seja,  $p(x)$  é divisível por  $(x - k)$  e pode ser expresso por

$$p(x) = (x - k)q(x).$$

$\square$

Generalizando este resultado, dizemos que se  $k_1, k_2, \dots, k_m$  são raízes distintas de um polinômio  $p$  de grau  $n$ , então existe um polinômio  $q$ , de grau  $n - m$ , tal que:

$$p(x) = (x - k_1)(x - k_2) \dots (x - k_m)q(x)$$

### 4.6.1 Método de Descartes

Este método também é conhecido como *método dos coeficientes a determinar*. Ele se baseia na existência e unicidade<sup>8</sup> da divisão de polinômios, além de trabalhar com as propriedades de polinômios idênticos. Vamos ilustrar esse método no exemplo abaixo.

**Exemplo 4.16.** Verificar se o polinômio  $D(x) = x^3 - 1$  é divisível por  $d(x) = x^2 + x + 1$

**Resolução:** Como  $\text{gr}(D(x)) = 3$  e  $\text{gr}(d(x)) = 2$ , para ser divisível, deve existir um polinômio  $q(x) = ax + b$  tal que:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &\equiv (x^2 + x + 1) \cdot (ax + b) \\ &\equiv ax^3 + bx^2 + ax^2 + bx + ax + b \\ &\equiv ax^3 + (a + b)x^2 + (a + b)x + b. \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>Para maiores detalhes, veja referência [6] (pp.205 a pp.207)

Como os coeficientes devem ser iguais, temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ a + b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Logo, como existem  $a$  e  $b$  que cumprem a condição estabelecida, temos que  $D(x) = x^3 - 1$  é divisível por  $d(x) = x^2 + x + 1$ , tal que:

$$x^3 - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x - 1), \forall x \in \mathbb{C}$$

**Exemplo 4.17.** Divida  $D(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$  por  $d(x) = x^2 + x + 2$ .

**Resolução:** Queremos encontrar  $q(x)$  e  $r(x)$ , tais que  $\forall x \in \mathbb{C}$ :

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x^2 + x + 2) \cdot q(x) + r(x)$$

Pelas definições dadas anteriormente, sabemos que  $\text{gr}(q(x)) = 2$  e  $\text{gr}(r(x)) < 2$ , ou seja,  $q(x) = ax^2 + bx + c$  e  $r(x) = dx + e$ , com  $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$ . Utilizando a igualdade polinomial, chegamos em:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 &\equiv (x^2 + x + 2) \cdot (ax^2 + bx + c) + (dx + e) \equiv \\ &ax^4 + (a + b)x^3 + (2a + b + c)x^2 + (2b + c + d)x + (2c + e). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, chegamos em:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ 2a + b + c = 2 \\ 2b + c + d = -1 \\ 2c + e = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \\ d = 3 \\ e = -7 \end{cases}.$$

Logo,  $q(x) = x^2 - 4x + 4$  e  $r(x) = 3x - 7$ .

### 4.6.2 Método da chave

O método da chave segue o mesmo algoritmo da divisão proposto por Euclides entre números inteiros, no qual dado um inteiro, dividendo  $D$ , e um inteiro, divisor  $d \neq 0$ , dividir  $D$  por  $d$  consiste em encontrar inteiros  $q$  e  $r$ , tais que (onde  $0 \leq r < |d|$ ), chamados respectivamente de quociente e resto da divisão, que cumpram  $D = dq + r$ .

Devido à semelhança existente entre a definição de divisão com inteiros e entre polinômios, podemos utilizar um algoritmo semelhante. Sendo  $\text{gr}(D(x)) \geq \text{gr}(d(x))$ , utilizaremos o seguinte procedimento:

1. dividimos o termo de maior grau de  $D(x)$  pelo termo de maior grau de  $d(x)$ , obtendo quociente parcial  $q_1(x)$ ;
2. subtraímos o produto  $q_1(x)$  por  $d(x)$  de  $D(x)$ , obtendo resto parcial  $r_1(x)$ ;

3. se  $\text{gr}(r_1(x)) < \text{gr}(d(x))$ , temos que  $r_1(x) = r(x)$  e que  $q_1(x) = q(x)$ ;
4. se  $\text{gr}(r_1(x)) \geq \text{gr}(d(x))$ , dividimos o termo de maior grau de  $r_1(x)$  pelo termo de maior grau de  $d(x)$ , obtendo um segundo quociente  $q_2(x)$ ;
5. repetimos os passos 2, 3 e 4, aumentando uma unidade nos índices dos quocientes e restos parciais.

Seguiremos esse processo, até que  $\text{gr}(r_k(x)) < \text{gr}(d(x))$ , situação na qual teremos que  $r_k(x) = r(x)$  e que  $q_k(x) = q(x)$ ;

Vejamos a utilização do método da chave no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.18.** *Divida  $D(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$  por  $d(x) = x^2 - x + 1$ , utilizando o método da chave.*

**Resolução:** *Seguindo o passo a passo anterior, temos:*

$$\begin{array}{r|l}
 - \frac{6x^3 - 2x^2 + x + 3}{6x^3 - 6x^2 + 6x} & \frac{x^2 - x + 1}{6x + 4} \\
 \hline
 & 4x^2 - 5x + 3 \\
 - & 4x^2 - 4x + 4 \\
 \hline
 & -x - 1
 \end{array}$$

Assim, chegamos no quociente  $q(x) = 6x + 4$  e resto  $r(x) = -x - 1$ .

### 4.6.3 Divisão por $(x - a)$ e o dispositivo de Briot-Ruffini

A divisão de polinômios com divisores na forma  $(x - a)$  terá grande importância na teoria de equações algébricas. Como vimos, quando  $a$  for raiz de um polinômio, ele será divisível por  $(x - a)$ .

Através da divisão, sabemos que, ao dividir um polinômio de grau  $n$  por  $(x - a)$ , seu quociente terá grau  $n - 1$  e seu resto será da forma  $r(x) = r_0 \in \mathbb{C}$  ou  $r(x) \equiv 0$ . Neste caso, além do Método de Descartes e do Método da Chave, haverá um outro método para obtenção do quociente e do resto.

Consideremos um polinômio  $p$ , de grau  $n$ , tal que  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , que será dividido pelo polinômio  $d(x) = x - a$ . Seja  $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  o quociente de grau  $n - 1$  e  $r(x) = r_0$ , o resto da divisão. Se  $r_0 = 0$ , o resto será o polinômio identicamente nulo.

Pela definição da divisão, temos  $\forall x \in \mathbb{C}$ :

$$p(x) = (x - a)q(x) + r(x).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = \\
 & b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - ab_{n-1}) x^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2}) x^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1) x + (r_0 - ab_0)
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 = b_0 - ab_1 \\ a_0 = r_0 - ab_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 = a_1 + ab_1 \\ r_0 = a_0 + ab_0 \end{cases}.$$

Notemos que o primeiro coeficiente (em ordem decrescente dos expoentes) de  $q(x)$  é igual ao primeiro coeficiente de  $q(x)$ . A partir do segundo coeficiente de  $q(x)$  até o resto da divisão, multiplica-se o coeficiente anterior de  $q(x)$  por  $a$  e soma-se ao coeficiente correspondente de  $p(x)$ .

Podemos resumir essa regra num dispositivo para o cálculo desse tipo de divisão que ficou conhecido como Dispositivo Prático de Briot-Ruffini<sup>9</sup>.

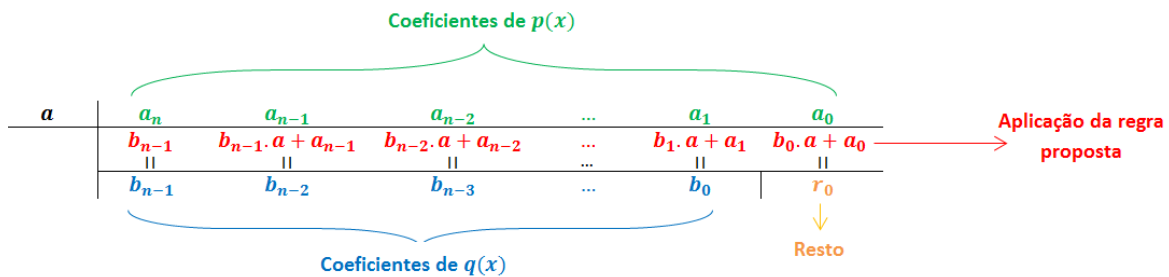


Figura 4.1: Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

Vejamos a aplicação desse dispositivo em um exemplo.

**Exemplo 4.19.** Efetue a divisão de  $p(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 1$  por  $d(x) = x - 2$ .

**Resolução:** Aplicando o algoritmo proposto:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 0 & 3 & -2 & -7 & 1 \\ & 2 & 7 & 12 & 17 & 35 & \\ \hline & 1 & 2 & 7 & 12 & 17 & 35 \end{array}$$

Figura 4.2:  $(x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 1) \div (x - 2)$

<sup>9</sup>Em homenagem ao matemático francês Charles Auguste Briot (1817-1882) e ao matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822). Como Ruffini trabalhou este método antes de Briot, há quem atribua esse trabalho somente a Paolo Ruffini, chamando apenas de "Regra de Ruffini". Há aqueles que preferem citar todos os envolvidos na construção do método, chamando ainda de "Regra de Briot-Ruffini-Horner", incluindo também uma homenagem ao matemático britânico William George Horner (1786-1837).

Com isso, vemos que os coeficientes do quociente de grau 4 são, em ordem decrescente dos expoentes, 1, 2, 7, 12, 17. Isto indica que o quociente será  $q(x) = 1x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 12x + 17$ . O último número do dispositivo é 35, ou seja, o resto será  $r(x) = 35$ .

O dispositivo também pode ser aplicado para divisões onde o divisor é da forma  $d(x) = ax + b$ , com  $a \neq 0$ . Neste caso, ao tirar o  $a$  em evidência do fator  $ax + b$ , podemos escrever:

$$p(x) = (ax + b)q(x) + r(x) \Rightarrow p(x) = \left(x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right)(a \cdot q(x)) + r(x).$$

Ou seja, aplicando o algoritmo proposto através do dispositivo, estaremos achando um quociente que é  $a$  vezes o quociente desejado. Isso é fácil de se resolver ao dividir os coeficientes do "quociente" do dispositivo para achar o quociente correto. Aplicaremos esse resultado no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.20.** Efetue a divisão de  $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 4$  por  $d(x) = 2x - 1$ .

**Resolução:** Inicialmente, escrevemos  $d(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \left(\frac{1}{2}\right)\right)$ . Deste modo, sabemos que, ao aplicar o algoritmo, acharemos um quociente que é o dobro do desejado.

Figura 4.3:  $(2x^3 + x^2 - 5x + 4) \div (2x - 1)$

Com isso, vemos que os coeficientes do quociente de grau 2 são, em ordem decrescente dos expoentes,  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{-4}{2}$ . Isto indica que o quociente será  $q(x) = x^2 + x - 2$ . O último número do dispositivo é 2, ou seja, o resto será  $r(x) = 2$ .

## 4.7 Teorema do Resto

**Teorema 4.21.** O resto da divisão de um polinômio  $p(x)$  por  $x - a$  é igual a  $p(a)$ .

**Demonstração:** Aplicando a definição de divisão, temos  $\forall x \in \mathbb{C}$ :

$$p(x) = q(x)(x - a) + r.$$

Calculando o valor do polinômio  $p(x)$  para  $x = a$ , temos:

$$p(a) = q(a)(a - a) + r = q(a).0 + r = r.$$

Chegamos, assim, no resultado desejado. □

**Corolário 4.22.** O número complexo  $k$  é raiz de um polinômio  $p(x)$  se, e somente se,  $p(x)$  é divisível por  $(x - k)$

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Como  $k$  é raiz de  $p(x)$ , temos que  $p(k) = 0$ . Efetuando a divisão de  $p(x)$  por  $(x - k)$ , temos que  $p(x) = (x - k)q(x) + r$ . Pelo teorema anterior,  $p(k) = 0 \Rightarrow r = 0$ , ou seja,  $p(x) = (x - k)q(x)$ . Assim, vemos que  $p(x)$  é divisível por  $(x - k)$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $p(x)$  é divisível por  $(x - k)$ , ou seja, podemos escrever  $p(x) = (x - k)q(x)$ . Calculando  $p(k)$ , temos  $p(k) = (k - k).q(k) = 0.q(k) = 0$ , concluindo assim que  $k$  é raiz do polinômio  $p(x)$ .  $\square$

Utilizando o Teorema do Resto em conjunto com o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos também uma boa ferramenta para o cálculo do valor numérico de polinômios.

**Exemplo 4.23.** Calcule  $p(1002)$ , sendo  $p(x) = x^4 - 1000x^3 - 2003x^2 - 1003x + 1000$ .

**Resolução:** Em vez de substituirmos  $x = 1002$  e efetuarmos os cálculos trabalhosos das potências, pelo Teorema do Resto, sabemos que  $p(1002)$  é igual ao resto da divisão de  $p(x)$  por  $x - 1002$  e pode ser obtido facilmente pelo dispositivo de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 1002 & 1 & -1000 & -2003 & -1003 & 1000 & \\
 & & 1002 & & & & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & 
 \end{array}$$

Figura 4.4:  $(x^4 - 1000x^3 - 2003x^2 - 1003x + 1000) \div (x - 1002)$

Assim, como o resto é  $-2$ , temos que  $p(1002) = -2$ .

**Exemplo 4.24.** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  os restos da divisão de um polinômio  $p(x)$ , com  $\text{gr}(p(x)) \geq 2$ , por  $(x - x_1)$  e  $(x - x_2)$ , respectivamente, com  $x_1 \neq x_2$ . Determine o resto  $r(x)$  da divisão de  $p(x)$  por  $d(x) = (x - x_1)(x - x_2)$  em função de  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $x_1$  e  $x_2$ .

**Resolução:** Sejam  $q_1(x)$  e  $q_2(x)$  os quocientes da divisão de  $p(x)$  por  $(x - x_1)$  e  $(x - x_2)$ , respectivamente. Assim, temos:

$$p(x) = (x - x_1)q_1(x) + r_1 \Rightarrow p(x_1) = r_1, \quad (4.7.1)$$

$$p(x) = (x - x_2)q_2(x) + r_2 \Rightarrow p(x_2) = r_2. \quad (4.7.2)$$

O resto da divisão de  $p(x)$  por  $d(x) = (x - x_1)(x - x_2)$  é do tipo  $r(x) = ax + b$ , uma vez que  $\text{gr}(d(x)) = 2$ . Chamando o quociente dessa divisão de  $q(x)$ , podemos escrever que:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)q(x) + (ax + b). \quad (4.7.3)$$

Calculando  $p(x_1)$  e  $p(x_2)$  em (4.7.3), encontramos:

$$p(x_1) = (x_1 - x_1)(x_1 - x_2)q(x_1) + (ax_1 + b) \Rightarrow p(x_1) = ax_1 + b, \quad (4.7.4)$$

$$p(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_2)q(x_2) + (ax_2 + b) \Rightarrow p(x_2) = ax_2 + b. \quad (4.7.5)$$

Substituindo (4.7.1) e (4.7.2) em (4.7.4) e (4.7.5), respectivamente, temos:

$$\left. \begin{array}{l} ax_1 + b = r_1 \\ ax_2 + b = r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (x_1 - x_2).a = r_1 - r_2 \Rightarrow a = \frac{r_1 - r_2}{x_1 - x_2}.$$

Substituindo esse valor de  $a$  em (4.7.4), encontramos:

$$\frac{r_1 - r_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1 + b = r_1 \Rightarrow b = \frac{x_1 r_1 - x_2 r_2}{x_1 - x_2}.$$

Assim, chegamos que o resto da divisão de  $p(x)$  por  $d(x)$  é igual a:

$$r(x) = \left( \frac{r_1 - r_2}{x_1 - x_2} \right) x + \left( \frac{x_1 r_1 - x_2 r_2}{x_1 - x_2} \right).$$

**Exemplo 4.25.** Mostre que se um polinômio  $p(x)$ , com  $\text{gr}(p(x)) \geq 2$ , é divisível por  $(x - x_1)$  e por  $(x - x_2)$ , com  $x_1 \neq x_2$ , então ele é divisível por  $(x - x_1)(x - x_2)$ .

**Resolução:** Usando a nomenclatura do exercício anterior, temos  $r_1 = r_2 = 0$ , logo o resto da divisão de  $p(x)$  por  $(x - x_1)(x - x_2)$  será:

$$r(x) = \left( \frac{0 - 0}{x_1 - x_2} \right) x + \left( \frac{x_1 \cdot 0 - x_2 \cdot 0}{x_1 - x_2} \right) = 0.$$

Como  $r(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{C}$ , temos que  $p(x)$  é divisível por  $(x - x_1)(x - x_2)$ .

# Capítulo 5

## Equações Algébricas

### 5.1 Definição

Uma Equação Algébrica ou Equação Polinomial é toda sentença aberta que pode ser escrita da forma  $p(x) = 0$ , onde  $p(x)$  é um polinômio com coeficientes complexos.

**Exemplo 5.1.**  $x^3 + 3x^2 = 4x - x^2 + 1$  é uma Equação Algébrica, pois pode ser escrita da forma  $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ .

#### 5.1.1 Raiz de uma equação algébrica

O número  $r \in \mathbb{C}$  é raiz da equação algébrica  $p(x) = 0$  se, e somente se,  $p(r) = 0$ .

**Exemplo 5.2.** Vemos que 1 é raiz da equação algébrica  $x^3 + 7x^2 - 9x + 1 = 0$ , pois  $1^3 + 7 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 1 = 0$ .

**Observação 5.3.** Quando trabalhamos com o Polinômio Identicamente Nulo,  $p(x) \equiv 0$ , procurávamos um polinômio que tivesse valor numérico zero para todo  $x \in \mathbb{C}$  e concluímos que esse polinômio deveria possuir todos os coeficientes iguais a zero. Quando temos uma equação algébrica  $p(x) = 0$ , estamos interessados, na maioria das vezes, em achar os valores complexos  $x \in \mathbb{C}$  que são as raízes da  $p(x)$  e tornam a equação  $p(x) = 0$  verdadeira.

#### 5.1.2 Conjunto Solução

O Conjunto Solução ou Conjunto Verdade de uma equação algébrica  $p(x) = 0$  é o conjunto de todas, e somente, as raízes da equação, representado por  $S$  ou  $V$ , respectivamente. Simbolicamente, temos  $S = \{r \in \mathbb{C} \mid p(r) = 0\}$  ou  $V = \{r \in \mathbb{C} \mid p(r) = 0\}$ .

Quando vamos resolver uma equação algébrica, estamos procurando seu Conjunto Solução.

### 5.2 Resolução de equações algébricas

Nesta seção, mostraremos os métodos de resolução de equações polinomiais do tipo  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , para  $n \leq 4$ . Para  $n > 4$ , não existem fórmulas

resolutivas gerais, sendo que faremos posteriormente um estudo sobre os coeficientes e raízes para buscar soluções.

### 5.2.1 Polinômio Identicamente Nulo

No caso em que  $p(x)$  é o polinômio identicamente nulo, temos que achar soluções para a equação:

$$0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x^2 + 0x + 0 = 0.$$

Pela definição desse polinômio,  $\forall x \in \mathbb{C}$ , temos que  $p(x) = 0$ . Assim, concluímos que  $S = \mathbb{C}$ .

### 5.2.2 Polinômio Constante

No caso em que  $p(x)$  é um polinômio de grau zero, ou seja, somente o termo independente é diferente de zero, o chamaremos de polinômio constante. Neste caso, temos:

$$0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x^2 + 0x + k = 0.$$

Como  $k \neq 0$ , esta sentença é falsa  $\forall x \in \mathbb{C}$ , ou seja,  $S = \emptyset$ .

### 5.2.3 Polinômio do 1º Grau

Sendo  $p(x) = ax + b$  um polinômio do primeiro grau, a resolução é a seguinte:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Assim, temos que  $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ .

### 5.2.4 Polinômio do 2º Grau

Para  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , um polinômio do segundo grau, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Leftrightarrow && \times 4a \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \Leftrightarrow && + b^2 \\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac &= b^2 \Leftrightarrow \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \Leftrightarrow \\ 2ax + b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Com isso, temos que  $S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$ .

**Observação 5.4.** Chamaremos  $b^2 - 4ac$  de discriminante da equação do 2º grau e denotaremos por  $\Delta$ . Notemos que:

- Se  $\Delta > 0$ , a equação possui duas raízes reais distintas;
- Se  $\Delta = 0$ , a equação possui apenas um valor de  $x$  que satisfaz a equação, sendo igual a  $-\frac{b}{2a}$ ;
- Se  $\Delta < 0$ , a equação possui duas raízes complexas conjugadas e não reais.

### 5.2.5 Polinômios de 3º e 4º Graus

Para polinômios de 3º e 4º graus temos as fórmulas conhecidas como "Fórmula de Cardano" e "Fórmula de Ferrari", respectivamente, embora a fórmula resolutiva de equações do 3º grau não tenha sido desenvolvida por Cardano, mas sim por del Ferro<sup>10</sup> e Tartaglia<sup>11</sup>, sendo posteriormente publicada por ele.

Essa época foi marcada por duelos matemáticos que mobilizavam estudiosos em algumas cidades da Europa, sendo que o desenvolvimento dessas fórmulas está ligado a esse contexto. Ambas buscam, através da manipulação algébrica e substituição de variáveis, exibir as raízes dos polinômios através de somas de radicais.

Começemos com os polinômios do terceiro grau. Seja a equação geral do terceiro grau dada por  $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  (caso o coeficiente  $a_3$  de  $x^3$  seja diferente de 1, dividiremos a equação por  $a_3$  para chegar na equação anterior).

Através de uma mudança de variável, transformamos a equação  $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  em  $y^3 + py + q = 0$ , onde  $x = y - \frac{a_2}{3}$ ,  $p = a_1 - \frac{(a_2)^2}{3}$  e  $q = \frac{2(a_2)^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0$ . Sendo  $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ , as três raízes de  $y^3 + py + q = 0$  serão:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ y_2 &= w \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ y_3 &= w^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{aligned}$$

Para polinômios do quarto grau, é utilizada uma substituição de variável semelhante, a fim de eliminar o termo cúbico e completar quadrados.

No ensino médio, essas fórmulas não são apresentadas. Ao invés disso, são apresentados métodos para a redução do grau de uma equação algébrica, conforme faremos a seguir. Sendo assim, não apresentaremos a demonstração da fórmula de Cardano e nem a fórmula de Ferrari<sup>12</sup>.

<sup>10</sup>Scipione del Ferro (1465-1526), matemático italiano

<sup>11</sup>Niccolò Fontana (1500-1557), matemático italiano.

<sup>12</sup>Para uma demonstração da fórmula de Cardano e mais de detalhes da fórmula de Ferrari, veja [5] (pp. 173 a pp.175).

### 5.2.6 Polinômios de grau $\geq 5$

Por muitos anos, após o surgimento das fórmulas de Cardano e Ferrari, muitos matemáticos tentaram criar fórmulas que resolvessem equações de grau maiores ou iguais a 5. Em 1824, Abel demonstrou que uma equação do 5º grau não poderia ser resolvida através de fórmulas envolvendo radicais.

Em 1829, Galois demonstrou que a impossibilidade descoberta por Abel se estendia a todas as equações polinomiais de grau maior que 4. Embora não existam tais fórmulas, existem maneiras de descobrirmos raízes dessas equações algebricamente (conforme veremos a seguir) e por métodos numéricos, que se tornaram muito importantes com o auxílio dos computadores<sup>13</sup>.

## 5.3 Reduzindo o grau de uma equação algébrica

**Teorema 5.5.** *Se um polinômio  $p$  pode ser escrito como o produto de  $p = p_1 p_2$  de dois polinômios  $p_1$  e  $p_2$ , então o complexo  $k$  é raiz de  $p$  se, e somente se,  $k$  é raiz de  $p_1$  ou raiz de  $p_2$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $k$  seja raiz de  $p_1$ , assim  $p_1(k) = 0$ . Como  $p(x) = p_1(x)p_2(x)$ , temos que  $p(k) = p_1(k)p_2(k) = 0 \cdot p_2(k) = 0$ , ou seja,  $k$  é raiz de  $p(x)$ . Suponhamos que  $k$  seja raiz de  $p_2$ , assim  $p_2(k) = 0$ . Como  $p(x) = p_1(x)p_2(x)$ , temos que  $p(k) = p_1(k)p_2(k) = p_1(k) \cdot 0 = 0$ , ou seja,  $k$  é raiz de  $p(x)$ . Assim, se  $k$  é raiz de  $p_1$  ou  $p_2$ , temos que  $k$  é raiz de  $p$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $k$  seja raiz de  $p$ , assim  $p(k) = 0$ . Como  $p(x) = p_1(x)p_2(x)$ , temos que  $p(k) = p_1(k)p_2(k) = 0$ , ou seja,  $p_1(k) = 0$  ou  $p_2(k) = 0$ . Assim, se  $k$  é raiz de  $p$ , temos que  $k$  é raiz de  $p_1$  ou raiz de  $p_2$ .  $\square$

Conforme vimos, se  $a$  é raiz de um polinômio  $p$  de grau  $n$ , então  $p$  é divisível por  $(x - a)$ . Deste modo, podemos escrever  $p(x) = (x - a)q(x)$ , onde  $q(x)$  é um polinômio de grau  $n - 1$ . Pelo teorema anterior, um número será raiz de  $p(x)$  se, e somente se, ele for raiz de  $(x - a)$  ou raiz de  $q(x)$ , ou seja, se, e somente se, ele for igual a  $a$  ou se for raiz de  $q(x)$ .

Se encontrarmos uma raiz  $a$  de  $p(x)$ , podemos efetuar a divisão deste polinômio por  $(x - a)$  e, em seguida, procurar as outras raízes no quociente  $q(x)$ .

**Exemplo 5.6.** *Resolver a equação  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ .*

**Resolução:** *Percebendo que a soma dos coeficientes é nula, sabemos que 1 é raiz da equação. Fazendo a divisão de  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  por  $(x - 1)$ , encontraremos um polinômio de grau 2 que terá como raízes as outras raízes da equação cúbica.*

---

<sup>13</sup>Não abordaremos tais métodos, mas veja em [2] um aprofundamento nesse assunto.



$$\begin{array}{r}
 1 \overline{) 1x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \\
 \underline{1x^3 - 1x^2} \phantom{+ 11x - 6} \\
 2x^2 + 11x - 6 \\
 \underline{2x^2 - 2x} \phantom{- 6} \\
 13x - 6 \\
 \underline{13x - 13} \\
 7
 \end{array}$$

Figura 5.1:  $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \div (x - 1)$

De acordo com os coeficientes 1,  $-5$  e  $6$ , o quociente será  $x^2 - 5x + 6$ . Logo, as outras raízes são encontradas resolvendo  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , que dá como solução os números  $2$  e  $3$ . Assim,  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Rightarrow S = \{1, 2, 3\}$ .

## 5.4 Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.) é de extrema importância para o trabalho das equações algébricas. A demonstração algébrica desse teorema necessita de conceitos de Análise, sendo que sua demonstração se baseia na continuidade das funções polinomiais complexas.

Podemos encontrar também as demonstrações analítica e topológica, mas todas tratam de conceitos que são trabalhados após o ensino básico. Assumiremos o teorema como verdadeiro, sem demonstração<sup>14</sup>.

**Teorema 5.7. T.F.A.** No universo dos números complexos, toda equação algébrica, de grau maior ou igual a  $1$ , admite pelo menos uma raiz.

## 5.5 Teorema da Decomposição

**Teorema 5.8.** Todo polinômio  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , com  $a_n \neq 0$ , pode ser decomposto e fatorado da seguinte forma  $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$ , onde  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , são raízes complexas de  $p(x)$  (podendo haver raízes repetidas). Exceto pela ordem dos fatores, esta fatoração é única.

**Demonstração: (Existência)** De acordo com o T.F.A., a equação  $p(x) = 0$  tem pelo menos uma raiz  $r_1$ . Dividindo  $p(x)$  por  $(x - r_1)$ , chegamos em  $p(x) = (x - r_1)q_1(x)$ , onde  $q_1(x)$  é um polinômio de grau  $n - 1$  e coeficiente inicial  $a_n$ . Se  $n - 1 \geq 1$ , a equação  $q_1(x) = 0$  tem pelo menos uma raiz  $r_2$  e, utilizando mesmo que foi feito anteriormente, podemos escrever  $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)q_2(x)$ , onde  $q_2(x)$  é um polinômio de grau  $n - 2$  e coeficiente inicial  $a_n$ . Após  $n$  aplicações sucessivas do T.F.A., chegamos em  $p(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)q_n(x)$ , onde  $q_n(x)$  é um polinômio de grau  $n - n = 0$  com coeficiente  $a_n$ , ou seja, o polinômio constante  $q_n(x) = a_n$ . Logo, temos  $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$ .

**(Unicidade)** Suponhamos que  $p(x)$  possua duas decomposições distintas  $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$  e  $p(x) = a'_n(x - r'_1)(x - r'_2) \dots (x - r'_n)$ . Comparando os termos de maior grau de ambas as expressões, chegamos que  $a_n = a'_n$ . Assim,  $\forall x \in \mathbb{C}$ :

$$(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) = (x - r'_1)(x - r'_2) \dots (x - r'_n).$$

<sup>14</sup>Para uma demonstração do T.F.A. ver referência [1] (pp.118).

Tomando  $x = r_1$ , obtemos:

$$0 = (x - r'_1)(x - r'_2) \dots (x - r'_n).$$

Ou seja, pelo menos um dos números  $r'_1, \dots, r'_n$  é igual a  $r_1$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $r_1 = r'_1$ . Deste modo, na igualdade:

$$(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) = (x - r'_1)(x - r'_2) \dots (x - r'_n),$$

os fatores  $(x - r_1)$  e  $(x - r'_1)$  são iguais. Fazendo o cancelamento desses termos, chegamos em:

$$(x - r_2) \dots (x - r_n) = (x - r'_2) \dots (x - r'_n).$$

Repetindo esse argumento  $n$  vezes, faremos o cancelamento de cada termo correspondente, concluindo que  $r_1 = r'_1, r_2 = r'_2, \dots, r_n = r'_n$ , ou seja, exceto pela ordem dos fatores, esta fatoração é única.  $\square$

### 5.5.1 Raízes múltiplas

O número  $r \in \mathbb{C}$  é raiz múltipla da equação  $p(x) = 0$  com multiplicidade  $m$  se, e somente se:

$$p(x) = (x - r)^m \cdot q(x) \text{ e } q(r) \neq 0.$$

- Se  $m = 1$ ,  $r$  é um raiz simples de  $p$ ;
- Se  $m = 2$ ,  $r$  é um raiz dupla de  $p$ ;
- Se  $m = 3$ ,  $r$  é um raiz tripla de  $p$ ;
- $\vdots$
- E assim sucessivamente.

**Teorema 5.9.** *Se as raízes complexas de um polinômio de grau  $n$ ,  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , forem  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , com  $p \leq n$ , distintas duas a duas, cada uma com multiplicidade  $m_1, m_2, \dots, m_p$ , respectivamente, temos que  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ .*

**Demonstração:** Pelo teorema da decomposição, temos que  $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$ , podendo haver repetições entre as raízes. Como, no enunciado, temos que as raízes são  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , distintas duas a duas, as raízes  $r_{p+1}, r_{p+2}, \dots, r_n$  são repetidas. Agrupando os fatores iguais numa só potência, temos que:

$$p(x) = a_n(x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \dots (x - r_p)^{m_p}$$

onde  $m_1, m_2, \dots, m_p$  são as multiplicidades das raízes  $r_1, r_2, \dots, r_p$ , respectivamente. Como o polinômio tem grau  $n$ , segue que  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ .  $\square$

## 5.6 Relações de Girard

As "relações de Girard"<sup>15</sup> são relações estabelecidas entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes. Elas se baseiam na igualdade entre a forma desenvolvida e a forma fatorada de um polinômio, comparando seus coeficientes.

Considere um polinômio de grau  $n$ , que pode ser escrito como  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$ , onde  $r_1, r_2, \dots, r_n$  são as raízes de  $p(x)$  (podendo haver repetição). Vamos estudar abaixo as fórmulas para  $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$  e depois generalizar para um valor arbitrário de  $n$ .

### 5.6.1 Polinômios de grau 2

Temos  $\forall x \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - r_1)(x - r_2) \\ &= a(x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2) \\ &= ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1 r_2. \end{aligned}$$

Como os polinômios são idênticos, igualamos os coeficientes:

$$\begin{cases} b = -a(r_1 + r_2) \\ c = ar_1 r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

### 5.6.2 Polinômios de grau 3

Temos  $\forall x \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \\ &= a(x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)x - r_1 r_2 r_3) \\ &= ax^3 - a(r_1 + r_2 + r_3)x^2 + a(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)x - ar_1 r_2 r_3. \end{aligned}$$

Como os polinômios são idênticos, igualamos os coeficientes:

$$\begin{cases} b = -a(r_1 + r_2 + r_3) \\ c = a(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) \\ d = -ar_1 r_2 r_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}.$$

### 5.6.3 Polinômios de grau 4

Temos  $\forall x \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4) \\ &= a(x^4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 + (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4)x^2 \\ &\quad - (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4)x + r_1 r_2 r_3 r_4) \end{aligned}$$

---

<sup>15</sup>Albert Girard (1595-1632), matemático francês.

$$= ax^4 - a(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 + a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2 - a(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)x + ar_1r_2r_3r_4.$$

Como os polinômios são idênticos, igualamos os coeficientes:

$$\begin{cases} b = -a(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\ c = a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) \\ d = -a(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4) \\ e = ar_1r_2r_3r_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{c}{a} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{d}{a} \\ r_1r_2r_3r_4 = \frac{e}{a} \end{cases}.$$

#### 5.6.4 Polinômios de grau n

Sejam  $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ , a forma desenvolvida de  $p(x)$  e  $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_n)$ , a sua forma fatorada, com  $r_1, r_2, \dots, r_n$  as raízes do polinômio. Analisando os casos específicos anteriores, percebemos que o coeficiente de  $x^n$  será  $a_n$ , tanto na forma desenvolvida, quanto na fatorada.

Em seguida, formamos o termo em  $x^{n-1}$ , obtido fazendo a distributiva na forma fatorada, multiplicando  $x$  em cada fator, exceto em um deles. Teremos:

$$a_n(-r_1 - r_2 - \dots - r_n)x^{n-1} = -a_n \underbrace{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)}_{S_1} x^{n-1} = -a_n S_1 x^{n-1},$$

onde  $S_1$  denota a soma das raízes de  $p$ .

Para formar o termo com  $x^{n-2}$ , fazemos o mesmo de antes, mas agora escolhendo apenas duas raízes na distributiva. Assim:

$$\begin{aligned} a_n((-r_1)(-r_2) + (-r_2)(-r_3) + \dots + (-r_{n-1})(-r_n))x^{n-2} \\ = a_n \underbrace{(r_1r_2 + r_2r_3 + \dots + r_{n-1}r_n)}_{S_2} x^{n-2} = a_n S_2 x^{n-2}. \end{aligned}$$

Na formação do termo  $x^{n-k}$ , escolheremos  $k$  fatores da forma  $(-r_1)(-r_2)\dots(-r_k)$  e, sendo  $S_k$  a soma dos produtos das raízes de  $p$ , tomadas  $k$  a  $k$ , teremos:

$$a_n(-1)^k S_k x^{n-k}.$$

O termo independente será formado com o produto das  $n$  raízes, sendo  $a_0$  dado por:

$$a_n(-r_1)(-r_2)\dots(-r_n) = a_n(-1)^n \underbrace{r_1r_2\dots r_n}_{S_n} = a_n(-1)^n S_n.$$

Desta forma, chegamos à conclusão de que:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n-k}x^{n-k} + \dots + a_0 \\ &= a_nx^n - a_n S_1 x^{n-1} + \dots + a_n(-1)^k S_k x^{n-k} + \dots + a_n(-1)^n S_n, \end{aligned}$$

de onde tiramos as relações:

$$\begin{cases} S_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ S_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \vdots \\ S_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ \vdots \\ S_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Juntamente com algumas relações auxiliares, as relações de Girard formam uma ferramenta muito útil para descobrirmos o conjunto solução de algumas equações. Vejamos alguns exemplos que ilustram esse fato.

**Exemplo 5.10.** Resolver a equação  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ , sabendo que uma raiz é igual à soma das outras duas.

**Resolução:** Sendo  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  as raízes da equação, pelas relações de Girard, temos  $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{(-4)}{1} = 4$ . Pelo enunciado, tomaremos  $r_1 + r_2 = r_3$ , ou seja,  $r_3 + r_3 = 4 \Rightarrow r_3 = 2$ . Sabendo que 2 é uma raiz da equação, utilizamos o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ & 2 & -4 & -6 & 0 \end{array}$$

Figura 5.2:  $(x^3 - 4x^2 + x + 6) \div (x - 2)$

As outras raízes vêm do quociente  $x^2 - 2x - 3$ , que serão iguais a 3 e  $-1$ . Assim, chegamos que:

$$S = \{-1, 2, 3\}.$$

**Exemplo 5.11.** Resolver a equação  $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$ , sabendo que suas raízes formam uma progressão aritmética.

**Resolução:** Sendo  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  as raízes da equação, as denotaremos respectivamente por  $a - r$ ,  $a$  e  $a + r$ , uma vez que elas estão em P.A. Pelas relações de Girard, temos  $r_1 + r_2 + r_3 = a - r + a + a + r = 3a = -\frac{(-12)}{1} = 12 \Rightarrow a = 4$ . Sabendo que 4 é uma raiz da equação, utilizamos o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -12 & 44 & -48 \\ & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ & 4 & -32 & 12 & 0 \end{array}$$

Figura 5.3:  $(x^3 - 12x^2 + 44x - 48) \div (x - 4)$

As outras raízes vêm do quociente  $x^2 - 8x + 12$ , que serão iguais a 2 e 6. Assim, chegamos que:

$$S = \{2, 4, 6\}.$$

**Exemplo 5.12.** Resolver a equação  $x^3 + 7x^2 - 21x - 27 = 0$ , sabendo que suas raízes formam uma progressão geométrica.

**Resolução:** Sendo  $r_1, r_2$  e  $r_3$  as raízes da equação, as denotaremos respectivamente por  $\frac{a}{q}$ ,  $a$  e  $aq$ , uma vez que elas estão em P.G. Pelas relações de Girard, temos  $r_1 r_2 r_3 = \frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = a^3 = -\frac{(-27)}{1} = 27 \Rightarrow a = 3$ . Sabendo que 3 é uma raiz da equação, utilizamos o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 7 & -21 & -27 \\ & & 3 & 12 & -27 \\ \hline & 1 & 10 & 9 & 0 \end{array}$$

Figura 5.4:  $(x^3 + 7x^2 - 21x - 27) \div (x - 3)$

As outras raízes vêm do quociente  $x^2 + 10x + 9$ , que serão iguais a  $-1$  e  $-9$ . Assim, chegamos que:

$$S = \{-1, 3, -9\}.$$

**Exemplo 5.13.** Formar uma equação do 4º grau com coeficientes inteiros cujas raízes sejam 1, 1,  $\frac{1}{2}$  e  $-1$ .

**Resolução:** Com a notação utilizada nas relações de Girard, temos que uma equação do 4º grau pode ser escrita como:

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

onde

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + (-1) = \frac{3}{2}, \\ S_2 &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}, \\ S_3 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{3}{2}, \\ S_4 &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, chegamos em:

$$x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

Para escrever os coeficientes inteiros, multiplicamos a equação por 2:

$$2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0.$$

## 5.7 Equações algébricas com coeficientes reais

Muitos problemas que são resolvidos através de equações algébricas, embora estejam definidos para coeficientes complexos, se limitam a coeficientes reais, racionais ou inteiros. Vamos estudar algumas consequências para as raízes desses polinômios, quando nos restringimos a esses casos.

Uma primeira consequência, como já vimos, é que mesmo com coeficientes reais, podem haver raízes complexas não reais. Por exemplo, a equação algébrica  $x^2 + 1 = 0$  possui coeficientes reais e raízes  $i$  e  $-i$ .

### 5.7.1 Raízes complexas

**Lema 5.14.** *Sejam  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , dois números complexos com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Então  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$  e  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ .*

**Demonstração:** Para a soma, temos:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} \\ &= \overline{a - bi + c - di} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

Para a multiplicação:

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} \\ &= \overline{(a - bi) \cdot (c - di)} \\ &= \overline{ac - bd - (ad + bc)i} \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

□

**Observação 5.15.** *Generalizando o Lema acima, podemos demonstrar por indução que dado  $a \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos:*

$$a(\overline{z})^n = a \cdot \underbrace{\overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \dots \cdot \overline{z}}_{n \text{ vezes}} = \overline{a \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z} = \overline{az^n}.$$

**Teorema 5.16.** *Se o complexo  $a + bi$  é uma raiz complexa não real de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu complexo conjugado  $a - bi$  também é raiz da equação com a mesma multiplicidade.*

**Demonstração:** A partir do Lema e observação anteriores, como uma equação algébrica é do tipo  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , envolvendo apenas soma, potências e multiplicação por um número real, temos que:

$$p(a - bi) = p(\overline{a + bi}) = \overline{p(a + bi)} = \overline{0} = 0.$$

Deste modo, se  $z = a + bi$  é raiz de uma equação algébrica,  $\overline{z} = a - bi$  também será.

Para verificar a mesma multiplicidade, dividiremos  $p(x)$  por:

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Como o divisor tem coeficientes reais, o quociente também terá. Assim, 'eliminamos' duas raízes de  $p(x)$ , sendo que  $a + bi$  e  $a - bi$  estarão ambas presentes ou ausentes como raízes do novo polinômio. Concluimos, então, que as raízes  $a + bi$  e  $a - bi$  ocorrem o mesmo número de vezes.  $\square$

**Corolário 5.17.** *Equações algébricas de grau ímpar com coeficientes reais sempre possuem, pelo menos, uma raiz real.*

**Demonstração:** Pelo teorema anterior, as raízes não reais ocorrem aos pares, mas as equações de grau ímpar possuem um número ímpar de raízes, ou seja, uma dessas raízes é real.  $\square$

### 5.7.2 Raízes irracionais

**Teorema 5.18.** *Se  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{c} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  e  $a + b\sqrt{c}$  é raiz de uma equação algébrica de coeficientes racionais, então  $a - b\sqrt{c}$  também é. Além disso, elas possuem a mesma multiplicidade.*

**Demonstração:** A demonstração é análoga à demonstração feita no teorema de raízes complexas.  $\square$

### 5.7.3 Raízes reais

O teorema a seguir é conhecido como Teorema do Anulamento ou Teorema de Bolzano<sup>16</sup>. Ele não é válido apenas para polinômios, mas para funções contínuas em intervalos fechados. Sua demonstração usa conceitos de limites e não será apresentada<sup>17</sup>.

**Teorema 5.19.** *Seja  $p(x)$  uma função polinomial de coeficientes reais e  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , com  $x_1 < x_2$ . Se  $p(x_1) \cdot p(x_2) \leq 0$ , então a equação algébrica  $p(x) = 0$  terá pelo menos uma raiz real  $r$ , tal que  $r \in [x_1; x_2]$ .*

### 5.7.4 Raízes racionais

**Teorema 5.20.** *Se o número racional  $\frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si, for raiz da equação  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , com  $a_i \in \mathbb{Z}$  e  $a_n \neq 0$ , então  $p$  é divisor de  $a_0$  e  $q$  é divisor de  $a_n$ .*

**Demonstração:** Como  $\frac{p}{q}$  é raiz da equação, temos:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_2 \cdot \frac{p^2}{q^2} + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

<sup>16</sup>Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), matemático, teólogo e filósofo da antiga Boémia, atual República Checa.

<sup>17</sup>Para uma demonstração do Teorema de Bolzano, ver referência [4] (pp.511).



$$a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1}.q + \dots + a_2.p^2.q^{n-2} + a_1.p.q^{n-1} + a_0.q^n = 0.$$

Isolando  $a_n.p^n$ , temos:

$$\begin{aligned} a_n.p^n &= -a_{n-1}.p^{n-1}.q - \dots - a_2.p^2.q^{n-2} - a_1.p.q^{n-1} - a_0.q^n \\ &= q \underbrace{(-a_{n-1}.p^{n-1} - \dots - a_2.p^2.q^{n-3} - a_1.p.q^{n-2} - a_0.q^{n-1})}_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= q.k. \end{aligned}$$

Isolando  $a_0.q^n$ , temos:

$$\begin{aligned} a_0.q^n &= -a_n.p^n - a_{n-1}.p^{n-1}.q - \dots - a_2.p^2.q^{n-2} - a_1.p.q^{n-1} \\ &= p \underbrace{(-a_n.p^{n-1} - a_{n-1}.p^{n-2}.q - \dots - a_2.p.q^{n-2} - a_1.q^{n-1})}_{l \in \mathbb{Z}} \\ &= p.l. \end{aligned}$$

Assim, chegamos em:

$$\begin{cases} a_n.p^n = q.k \\ a_0.q^n = p.l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \text{ é divisor de } a_n.p^n \\ p \text{ é divisor de } a_0.q^n \end{cases}.$$

Como  $p$  e  $q$  são primos entre si, concluímos que  $q$  divide  $a_n$  e  $p$  divide  $a_0$ .  $\square$

**Exemplo 5.21.** Sabendo-se que  $i$  é raiz da equação algébrica  $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$ , encontre seu conjunto-solução e escreva a equação como um produto de polinômios com coeficientes reais.

**Resolução:** Como  $i$  é raiz da equação, pelo teorema das raízes complexas, sabemos que  $-i$  também é raiz. Efetuando a divisão de  $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6$  por  $(x - i)$  e por  $(x + i)$ , encontraremos um quociente de grau 2 com as outras duas raízes da equação. Utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini para as divisões sucessivas, temos:

|      |   |          |          |      |   |  |
|------|---|----------|----------|------|---|--|
| $i$  | 1 | -5       | 7        | -5   | 6 |  |
| $-i$ | 1 | $-5 + i$ | $6 - 5i$ | $6i$ | 0 |  |
|      | 1 | -5       | 6        | 0    | 0 |  |

Figura 5.5: Divisão por  $(x - i)$  e por  $(x + i)$

Assim, o quociente é igual a  $x^2 - 5x + 6$ , que possui como raízes 2 e 3. Chegamos no conjunto solução:

$$S = \{i, -i, 2, 3\}.$$

Para escrever como um produto de polinômios com coeficientes reais, utilizaremos a forma fatorada:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow \\ (x + i)(x - i)(x - 2)(x - 3) = 0 &\Leftrightarrow \\ (x^2 + 1)(x - 2)(x - 3) = 0. \end{aligned}$$

Assim, temos a equação na forma solicitada.

**Exemplo 5.22.** Sabendo-se que  $i$  e  $\sqrt{3}$  são raízes da equação  $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$ , encontre seu conjunto solução.

**Resolução:** Utilizando o Teorema das Raízes Complexas e o Teorema das Raízes Irracionais, sabemos que se  $i$  e  $\sqrt{3}$  são raízes,  $-i$  e  $-\sqrt{3}$  também são. Temos, portanto, 4 raízes e chamaremos a 5ª raiz de  $\alpha$ . Pelas Relações de Girard, temos que a soma das raízes é igual a:

$$i + (-i) + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) + \alpha = -\frac{(-1)}{1} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Assim, encontramos o Conjunto Solução formado por:  $S = \{i, -i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1\}$ .

### 5.7.5 Gráficos de funções polinomiais reais

A partir do estudo de polinômios e equações algébricas, podemos ter uma ideia mais clara de como esboçar gráficos de funções polinomiais.

Neste ponto, já supomos conhecidas as propriedades de funções polinomiais constantes, de 1º e 2º graus<sup>18</sup>. Uma abordagem completa sobre gráficos de funções é trabalhada num curso de cálculo<sup>19</sup>, sendo que neste ponto, faremos um comentário superficial a respeito de algumas propriedades relacionadas, principalmente, com as raízes de uma função polinomial com coeficientes reais.

Deste modo, trabalharemos com funções do tipo  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , com  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq i \leq n$ .

Se tivermos uma raiz real  $x_1$ , teremos o intercepto do gráfico com o eixo das abscissas neste ponto  $x_1$ , uma vez que  $p(x_1) = 0$ . Se tivermos uma raiz  $x_1$  de multiplicidade ímpar  $k$ , ao escrevermos  $p(x)$  na forma fatorada, teremos um fator  $(x - x_1)^k$ , que possui sinais contrários para  $x < x_1$  e  $x > x_1$ .

Como consequência, o gráfico da função polinomial "atravessa" o eixo  $x$  em raízes de multiplicidade ímpar.

**Exemplo 5.23.** Na figura 5.6, temos o gráfico do polinômio  $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ . Escrevendo-o em sua forma fatorada, temos que:

$$p(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2).$$

Veja que todas as raízes tem multiplicidade ímpar e o gráfico "atravessa" o eixo  $x$  nesses pontos.

<sup>18</sup>Para um maior detalhamento desse assunto, veja [7] (Cap. 5 e Cap. 6).

<sup>19</sup>Veja [4] (pp.257 a pp.271).

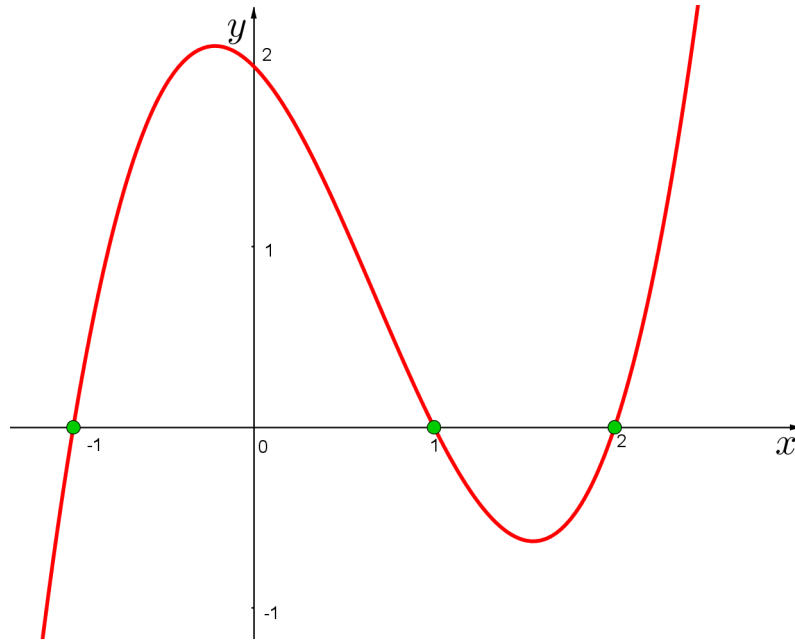


Figura 5.6: Gráfico de  $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

No caso de termos uma raiz real  $x_2$ , de multiplicidade par  $m$ , ao escrevermos  $p(x)$  na forma fatorada, teremos um fator  $(x - x_2)^m$ , que possui o mesmo sinal para  $x < x_2$  e  $x > x_2$ .

Como consequência, o gráfico da função polinomial "rebate" no eixo  $x$  em raízes de multiplicidade par.

**Exemplo 5.24.** Na figura 5.7, temos o gráfico do polinômio  $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ . Escrevendo-o em sua forma fatorada, temos que:

$$p(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 1) = (x + 1)(x - 1)^2.$$

Note que  $-1$  é uma raiz de multiplicidade ímpar e o gráfico "atravessa" o eixo  $x$  nesse ponto, enquanto  $1$  é uma raiz de multiplicidade par e o gráfico "rebate" no eixo  $x$  nesse ponto.

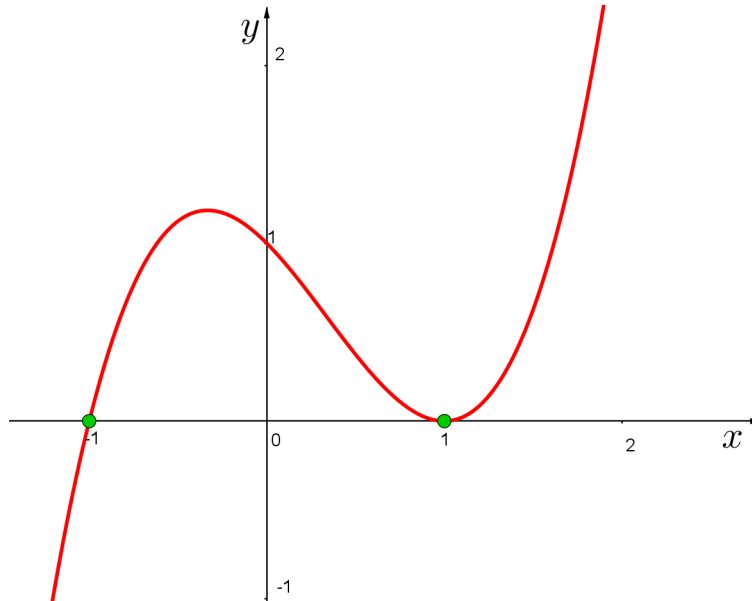


Figura 5.7: Gráfico de  $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Pontos de inflexão, máximos e mínimos globais e locais, assíntotas verticais e horizontais necessitam de uma teoria com limites e derivadas. Como já foi dito, não faremos este estudo. Porém, o uso de algum software de geometria dinâmica<sup>20</sup> pode ajudar na compreensão de alguns exercícios, mesmo que não haja o conhecimento de cálculo.

Vejamos a seguir um exemplo em que o uso desse tipo de software ajuda na resolução do problema.

**Exemplo 5.25.** Resolva a equação  $4x^4 - 21x^3 + 18x^2 + 19x - 6 = 0$ .

**Resolução:** Como todos os coeficientes são inteiros, utilizamos o Teorema das Raízes Racionais para limitar as possíveis raízes racionais dessa equação.

Divisores de 4 =  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ .

Divisores de -6 =  $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ .

Possíveis raízes racionais =  $\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 6\right\}$ .

Mesmo com o Dispositivo Prático de Briot-Ruffini, temos 16 possíveis raízes para serem testadas, o que traria um trabalho muito grande. Escolheremos o caminho de utilizar um software de geometria dinâmica para nos auxiliar na resolução. Plotando o gráfico de  $p(x) = 4x^4 - 21x^3 + 18x^2 + 19x - 6$  no Geogebra, encontramos:

<sup>20</sup>Utilizamos o Geogebra. Veja mais em [3].



Figura 5.8: Gráfico de  $p(x) = 4x^4 - 21x^3 + 18x^2 + 19x - 6$

Como o polinômio é do 4º grau, visivelmente, há 4 raízes reais simples, pelas interseções do gráfico com o eixo  $x$ . O gráfico parece passar pelo ponto  $(2, 0)$ . Se isso for verdade, teremos resto 0 na divisão de  $p(x)$  por  $(x - 2)$ . Utilizaremos o dispositivo de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 4 & -21 & 18 & 19 & -6 \\
 2 & & 4 & -13 & -8 & 3 & 0
 \end{array}$$

Diagram illustrating the Briot-Ruffini division of  $p(x) = 4x^4 - 21x^3 + 18x^2 + 19x - 6$  by  $(x - 2)$ . The quotient is  $4x^3 - 13x^2 - 8x + 3$  and the remainder is 0. Red arrows and a '+' sign indicate the multiplication of the divisor by the quotient terms. A red 'x' is placed below the first term of the quotient.

Figura 5.9:  $(4x^4 - 21x^3 + 18x^2 + 19x - 6) \div (x - 2)$

Com isso, chegamos que 2 é, de fato, raiz da equação, que agora pode ser expressa por  $(x - 2)(4x^3 - 13x^2 - 8x + 3) = 0$ .

Ainda nos limitando pelo conjunto das raízes racionais e pelos locais de interseção do gráfico com o eixo  $x$ , vemos que duas possíveis raízes podem ser  $\frac{1}{4}$  e  $-\frac{3}{4}$ . Utilizando, novamente o dispositivo de Briot-Ruffini para efetuar a divisão de  $4x^3 - 13x^2 - 8x + 3$  por  $(x - \frac{1}{4})$  e por  $(x + \frac{3}{4})$ , temos:

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{4} & 4 & -13 & -8 & 3 \\ & 4 & -12 & -11 & \frac{1}{4} \end{array}$$

Figura 5.10:  $(4x^3 - 13x^2 - 8x + 3) \div (x - \frac{1}{4})$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{3}{4} & 4 & -13 & -8 & 3 \\ & 4 & -16 & 4 & 0 \end{array}$$

Figura 5.11:  $(4x^3 - 13x^2 - 8x + 3) \div (x + \frac{3}{4})$

Ou seja,  $\frac{1}{4}$  não é raiz, mas  $-\frac{3}{4}$  é raiz da equação, que agora pode ser expressa por  $(x - 2)(x + \frac{3}{4})(4x^2 + 16x + 4) = 0$ . As outras duas raízes vêm de  $4x^2 + 16x + 4$ , que são  $2 + \sqrt{3}$  e  $2 - \sqrt{3}$ . Note que essas raízes verificam o Teorema das Raízes Irracionais.

Assim, chegamos em:

$$S = \left\{ 2, -\frac{3}{4}, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3} \right\}.$$

## Capítulo 6

### Exercícios de Aplicação

Nesta seção, faremos a resolução de vários exercícios, a fim de que possam ser usados para um aprofundamento dos assuntos estudados. Os exercícios foram retirados das provas de vestibulares de várias universidades e as fontes serão indicadas no início de cada exercício.

**Exercício 6.1. (Unicamp)** Considere o polinômio cúbico  $p(x) = x^3 - 3x + a$ , onde  $a$  é um número real.

**a.** No caso em que  $p(1) = 0$ , determine os valores de  $x$  para os quais a matriz  $A$  abaixo não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

**b.** Seja  $b$  um número real não nulo e  $i$  a unidade imaginária, isto é,  $i^2 = -1$ . Se o número complexo  $z = 2 + bi$  é raiz de  $p(x)$ , determine o valor de  $|z|$ .

**Resolução: a.** Como  $p(1) = 0$ , temos que:

$$p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + a = 0 \iff a = 2.$$

Para que a matriz  $A$  não seja invertível, seu determinante deve ser igual a zero. Com isso, substituindo  $a = 2$  na matriz e calculando seu determinante, chegamos em:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0 \iff x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Como a expressão coincide com  $p(x) = 0$  para  $a = 2$  e  $p(1) = 0$ , sabemos que 1 é raiz de  $p(x)$ . Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, encontramos:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & & & & \\ & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Figura 6.1:  $(x^3 - 3x + 2) \div (x - 1)$

As outras raízes de  $x^3 - 3x + 2 = 0$ , serão as raízes de  $x^2 + x - 2 = 0$ , que são 1 e  $-2$ . Assim, os valores de  $x$  para os quais a matriz  $A$  não é invertível são 1 e  $-2$ .

**b.** Como  $p(x)$  é um polinômio com coeficientes reais, se  $z = 2 + bi$  é raiz de  $p(x)$ , então  $\bar{z} = 2 - bi$  também é. Chamaremos a terceira raiz de  $k$ . Pelas Relações de Girard, pela soma das raízes, temos que:

$$z + \bar{z} + k = \frac{-0}{1} \implies 2 + bi + 2 - bi + k = 0 \implies k = -4.$$

Sabendo-se que  $k = -4$  é uma raiz de  $p(x)$ , podemos descobrir o valor de  $a$ , fazendo  $p(-4) = 0$ . Com efeito:

$$p(-4) = (-4)^3 - 3(-4) + a = 0 \iff a = 52.$$

Para achar as outras raízes de  $p(x)$ , basta aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -3 & 52 \\ & 1 & -4 & 13 & 0 \end{array}$$

Figura 6.2:  $(x^3 - 3x + 52) \div (x + 4)$

As outras raízes de  $x^3 - 3x + 52 = 0$ , serão as raízes de  $x^2 - 4x + 13 = 0$ , que são  $2 + 3i$  e  $2 - 3i$ . Com isso, concluímos que  $z = 2 + 3i$  ou  $z = 2 - 3i$ . Como são raízes conjugadas, possuem o mesmo módulo.

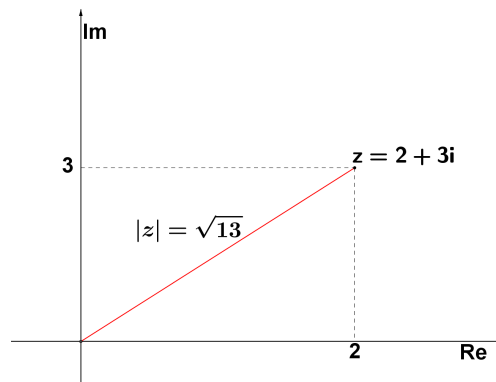


Figura 6.3: Módulo de  $z = 2 + 3i$

Desta forma, concluímos que o valor de  $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ .

**Exercício 6.2. (UERJ)** Observe o gráfico da função polinomial de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$ .



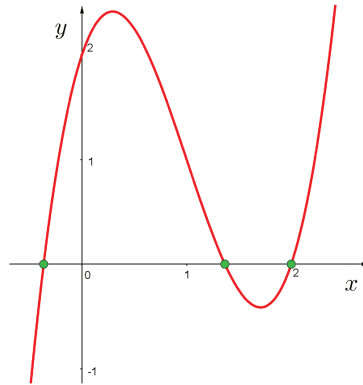


Figura 6.4:  $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$

Determine o conjunto solução da inequação  $P(x) > 0$ .

**Resolução:** Pelo gráfico, o número 2 aparenta ser uma raiz de  $P(x)$ . Para comprovar isso, utilizamos o dispositivo de Briott-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -6 & 3 & 2 \\ & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Figura 6.5:  $(2x^3 - 6x^2 + 3x + 2) \div (x - 2)$

O resto 0 comprova que o número 2 é raiz de  $P(x)$ . As outras raízes podem ser descobertas resolvendo a equação  $2x^2 - 2x - 1 = 0$ , de onde encontramos  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$  e  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ . Esses dois valores são os outros interceptos do gráfico com o eixo  $x$ .

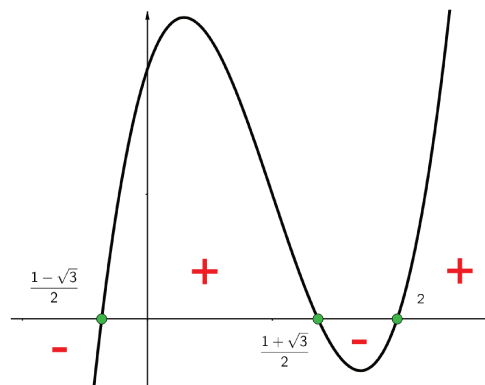


Figura 6.6: Estudo do sinal de  $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$

Fazendo o estudo do sinal de  $P(x)$ , verificamos que  $P(x) > 0$  para  $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$  ou  $x > 2$ . Portanto, o conjunto solução de  $2x^3 - 6x^2 + 3x + 2 > 0$  é igual a  $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x > 2 \right\}$ .

**Exercício 6.3. (Fuvest)** Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do polinômio  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  são reais. Sabendo que  $-1$  e  $1 + \alpha i$ , com  $\alpha > 0$ , são raízes da equação  $p(x) = 0$  e que o resto da divisão de  $p(x)$  por  $(x - 1)$  é 8, determine:

**a.** o valor de  $\alpha$ ;

**b.** o quociente de  $p(x)$  por  $(x + 1)$ .

**Dado:**  $i$  é a unidade imaginária,  $i^2 = -1$ .

**Resolução: a.** Como os coeficientes do polinômio são reais, se  $1 + \alpha i$  é raiz de  $p(x)$ , então  $1 - \alpha i$  também será. Utilizando as Relações de Girard, pela soma das raízes chegamos em:

$$-1 + 1 + \alpha i + 1 - \alpha i = \frac{-a}{1} \iff a = -1.$$

Como o resto da divisão de  $p(x)$  por  $(x - 1)$  é 8, pelo Teorema do Resto,  $p(1) = 8$ . Como  $-1$  é raiz de  $p(x)$ ,  $p(-1) = 0$ .

$$\begin{cases} p(1) = 8 \\ p(-1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b + c = 8 \\ -b + c = 2 \end{cases}.$$

De onde, concluímos que  $b = 3$  e  $c = 5$ . Para descobrir o valor de  $\alpha$ , basta dividir  $p(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$  por  $x + 1$ , usando o dispositivo de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

Figura 6.7:  $(x^3 - x^2 + 3x + 5) \div (x + 1)$

As outras raízes são descobertas resolvendo  $x^2 - 2x + 5 = 0$ , sendo elas iguais a  $1 + 2i$  e  $1 - 2i$ . Como  $\alpha > 0$ , temos que  $\alpha = 2$ .

**b.** Para determinar o quociente da divisão de  $p(x)$  por  $(x + 1)$ , basta observarmos no dispositivo de Briot-Ruffini da Figura 6.6, que os coeficientes do polinômio de 2º grau que é o quociente são 1,  $-2$  e 5. Portanto, o quociente será  $x^2 - 2x + 5$ .

**Exercício 6.4. (UFPE)** Encontre o menor inteiro positivo  $n$ , tal que a potência  $(\sqrt{3} + i)^n$  seja um número real.

**Resolução:** Para podermos aplicar a 1ª Fórmula de De Moivre, devemos escrever  $z = \sqrt{3} + i$  na forma trigonométrica. Representando  $z$  no Plano de Argand-Gauss, encontramos  $|z| = \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ ,  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ , de onde concluímos que  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

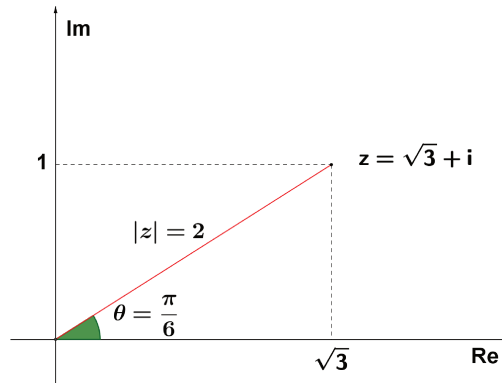


Figura 6.8: Representação de  $z = \sqrt{3} + i$  no Plano Complexo

Escrevendo  $z$  na forma trigonométrica, chegamos em  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)$ . Agora podemos aplicar a 1ª Fórmula de De Moivre, chegando em:

$$z^n = 2^n \left( \cos \frac{n\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{n\pi}{6} \right).$$

Para que  $z^n$  seja um número real, sua parte imaginária deve valer zero. Sendo assim, temos:

$$\sin \frac{n\pi}{6} = 0 \implies \frac{n\pi}{6} = k\pi.$$

onde  $k \in \mathbb{Z}$ . Como procuramos o menor inteiro positivo  $n$ , tomamos  $k = 1$ , da onde concluímos que  $n = 6$ .

**Exercício 6.5. (Unesp)** Identifique o lugar geométrico das imagens dos números complexos  $z$ , tais que  $|z| + |3z| = 12$ .

**Resolução:** Notemos que  $|3z| = 3 \cdot |z|$ , uma vez que sendo  $z = a + bi$ , com  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $3z = 3a + 3bi$ , temos:

$$|3z| = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = \sqrt{9a^2 + 9b^2} = \sqrt{9(a^2 + b^2)} = 3 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \cdot |z|.$$

Desta forma,  $|z| + |3z| = 12 \implies |z| + 3 \cdot |z| = 12 \implies 4 \cdot |z| = 12 \implies |z| = 3$ . E, com isso:

$$|z| = 3 \implies \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \implies a^2 + b^2 = 9.$$

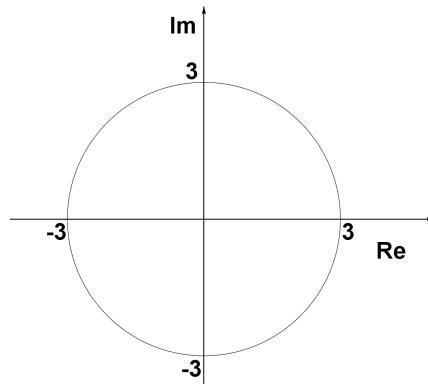


Figura 6.9:  $a^2 + b^2 = 9$

Portanto, o lugar geométrico das imagens dos números complexos  $z$ , que cumprem essa condição é uma circunferência de raio 3 centrada na origem do Plano Complexo.

**Exercício 6.6. (Unicamp)** Considere o polinômio  $p(x) = x^2 - 11x + k + 2$ , em que  $x$  é a variável real e  $k$  um parâmetro fixo, também real.

**a.** Para que valor do parâmetro  $k$  o resto do quociente de  $p(x)$  por  $x - 1$  é igual a 3?

**b.** Supondo, agora,  $k = 4$ , e sabendo que  $a$  e  $b$  são raízes de  $p(x)$ , calcule o valor de  $\sin\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right)$ .

**Resolução: a.** Pelo Teorema do Resto, para que o resto do quociente de  $p(x)$  por  $x - 1$  seja igual a 3, devemos ter que  $p(1) = 3$ . Ou seja,

$$p(1) = 1^2 - 11 \cdot 1 + k + 2 = 3 \iff k = 11.$$

Desta forma, devemos ter  $k = 11$ .

**b.** Para calcularmos o valor de  $\sin\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right)$ , vamos somar dentro dos parênteses, fazendo:

$$\sin\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right) = \sin\left(\frac{b\pi}{ab} + \frac{a\pi}{ab}\right) = \sin\left(\frac{(a+b)\pi}{ab}\right).$$

Com isso, precisamos apenas descobrir o valor de  $a + b$  e  $ab$ , que são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação  $x^2 - 11x + 6 = 0$ . Pelas Relações de Girard, temos que:

$$\begin{cases} a + b = \frac{-(-11)}{1} \\ ab = \frac{6}{1} \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = 11 \\ ab = 6 \end{cases}.$$

Desta forma, chegamos em:

$$\sin\left(\frac{(a+b)\pi}{ab}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Portanto,  $\sin\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}\right) = \frac{1}{2}$ .

**Exercício 6.7. (ITA)** Sejam  $a, b$  e  $c$  números reais com  $a \neq 0$ .

**a.** Mostre que a mudança  $x + \frac{1}{x} = z$  transforma a equação  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  numa equação do segundo grau.

**b.** Determine todas as raízes da equação  $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ .

**Resolução: a.** Se  $x + \frac{1}{x} = z$ , então  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = z^2$ , de onde concluímos que  $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$ . Como  $x = 0$  não é raiz da equação, podemos dividir  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  por  $x^2$ , obtendo  $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$ , ou seja,

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \implies a(z^2 - 2) + bz + c = 0 \implies az^2 + bz + c - 2a = 0.$$

Com isso, chegamos em uma equação do segundo grau.

**b.** Fazendo a mudança de variável sugerida no item anterior, podemos transformar a equação numa equação do segundo grau. Seja  $x + \frac{1}{x} = z$ , então:

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0 \implies z^2 + 3z - 2 - 2 = 0 \implies z^2 + 3z - 4 = 0.$$

Nesta última equação, encontramos como raízes  $z = -4$  ou  $z = 1$ . Como  $x + \frac{1}{x} = z$ , temos duas possibilidades:

$$x + \frac{1}{x} = -4 \implies x^2 + 4x + 1 = 0 \implies x = -2 + \sqrt{3} \text{ ou } x = -2 - \sqrt{3}$$

ou então

$$x + \frac{1}{x} = 1 \implies x^2 - x + 1 = 0 \implies x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Assim, as raízes da equação  $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$  são  $x = -2 + \sqrt{3}$ ,  $x = -2 - \sqrt{3}$ ,  $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$  e  $x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ .

**Exercício 6.8. (UFJF)** Considere o polinômio  $p(x) = 16x^5 - 48x^4 - 40x^3 + 120x^2 + 9x - 27$ .

**a.** Sabendo que o  $p(x)$  possui uma raiz  $r$  natural menor que 5, determine  $r$ .

**b.** Determine o polinômio  $q(x) = \frac{p(x)}{x-r}$ .

**c.** Determine todas as raízes de  $q(x)$ , especificando suas multiplicidades.

**Resolução: a.** Pelo Teorema das Raízes Racionais, sabemos que  $r$  deve ser um divisor de  $-27$ . Como  $r$  é natural e menor que 5, então  $r = 1$  ou  $r = 3$ . Calculando  $p(1)$ , encontramos  $p(1) = 16 - 48 - 40 + 120 + 9 - 27 = 30$ , ou seja, 1 não é raiz de  $p(x)$ . Vamos testar  $r = 3$  usando o dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 16 & -48 & -40 & 120 & 9 & -27 \\ & 48 & 0 & -40 & 0 & 27 & 0 \\ \hline & 16 & 0 & -40 & 0 & 36 & 0 \end{array}$$

Figura 6.10:  $(16x^5 - 48x^4 - 40x^3 + 120x^2 + 9x - 27) \div (x - 3)$

Como o resto é igual a zero, de fato,  $r = 3$  é raiz da equação.

**b.** O polinômio  $q(x) = \frac{p(x)}{x-3}$  é o quociente cujos coeficientes são mostrados no dispositivo anterior, ou seja,  $q(x) = 16x^4 - 40x^2 + 9$ .

**c.** Para encontrar as raízes de  $q(x)$ , podemos fazer a mudança de variável  $x^2 = m$  e chegarmos na equação  $16m^2 - 40m + 9 = 0$ , que possui como raízes  $m = \frac{1}{4}$  e  $m = \frac{9}{4}$ . Como  $x^2 = m$ , temos que  $x^2 = \frac{1}{4}$  ou  $x^2 = \frac{9}{4}$ , da onde concluímos que as quatro raízes simples de  $q(x)$  são  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$  e  $-\frac{3}{2}$ .

**Exercício 6.9. (FGV)** Seja  $f$  uma função que, a cada número complexo  $z$ , associa  $f(z) = i \cdot z$ , onde  $i$  é a unidade imaginária. Determine os complexos  $z$  de módulo igual a 4 e tais que  $f(z) = \bar{z}$ , onde  $\bar{z}$  é o conjugado de  $z$ .

**Resolução:** Seja  $z = a + bi$ , então  $\bar{z} = a - bi$ . Como  $f(z) = i \cdot z$ , temos que:

$$i \cdot z = \bar{z} \implies i \cdot (a + bi) = a - bi \implies ai - b = a - bi \implies a = -b.$$

Como o módulo de  $z$  é igual a 4,  $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$ . Substituindo  $a = -b$  e elevando ambos os membros da equação ao quadrado, temos:

$$(-b)^2 + b^2 = 16 \implies 2b^2 = 16 \implies b^2 = 8 \implies b = \pm 2\sqrt{2}.$$

Desta forma, concluímos que os possíveis valores de  $z$  que cumprem a condição solicitada são  $z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$  ou  $z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ .

**Exercício 6.10. (IME)** Seja  $z$  um número complexo tal que  $\frac{2z}{\bar{z}i}$  possui argumento igual a  $\frac{3\pi}{4}$  e  $\log_3(2z + 2\bar{z} + 1) = 2$ . Determine o número complexo  $z$ .

**Resolução:** Seja  $z = a + bi$ . Da igualdade  $\log_3(2z + 2\bar{z} + 1) = 2$ , tiramos:

$$\log_3(2(a + bi) + 2(a - bi) + 1) = 2 \implies \log_3(4a + 1) = 2 \implies 4a + 1 = 3^2 \implies a = 2.$$

Então  $z$  é da forma  $z = 2 + bi$ . Podemos escrever  $\frac{2z}{\bar{z}i}$  como  $\frac{4 + 2bi}{(2 - bi)i}$  e fazendo a divisão chegamos em:

$$\frac{4 + 2bi}{(2 - bi)i} = \frac{4 + 2bi}{b + 2i} \cdot \frac{b - 2i}{b - 2i} = \frac{8b}{b^2 + 4} + \left( \frac{2b^2 - 8}{b^2 + 4} \right) i.$$

Como  $\arg \frac{2z}{\bar{z}i} = \frac{3\pi}{4}$ , temos que:

$$\frac{\frac{2b^2 - 8}{b^2 + 4}}{\frac{8b}{b^2 + 4}} = -1 \implies \frac{2b^2 - 8}{8b} = -1 \implies b^2 + 4b - 4 = 0.$$

Desta forma, concluimos que  $b = -2 + 2\sqrt{2}$  ou  $b = -2 - 2\sqrt{2}$ . Como o argumento de  $\frac{2z}{\bar{z}i}$  é igual a  $\frac{3\pi}{4}$ , seu afixo está no segundo quadrante, ou seja, sua parte real é negativa e sua parte imaginária positiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{8b}{b^2+4} < 0 \\ \frac{2b^2-8}{b^2+4} > 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} 8b < 0 \\ 2b^2 - 8 > 0 \end{array} \right\} \implies b < -2 \implies b = -2 - 2\sqrt{2}.$$

Portanto,  $z = 2 - (2 + 2\sqrt{2})i$ .

## Capítulo 7

### Considerações Finais

A maioria dos livros de ensino superior mostram a construção dos números complexos a partir das definições de operações de soma e multiplicação com pares ordenados para, em seguida, apresentar o que seria o número imaginário " $i$ " e a forma algébrica dos números complexos. No ensino médio, a construção utilizando esse caminho, na maioria dos casos, é inviável, uma vez que os alunos em salas muito heterogêneas não possuem maturidade suficiente para trabalhar a partir dessas definições.

Ao longo desta dissertação, foi proposta a construção da teoria com um enfoque no ensino médio, que visava a definição do número imaginário " $i$ ", para, posteriormente, serem apresentadas as operações, com base nas experiências com os números reais já conhecidas pelos alunos. As maneiras diferentes de enxergar o número complexo na forma algébrica, forma trigonométrica ou como par ordenado, complementaram a teoria.

Desde a introdução dos problemas matemáticos trabalhados no ensino fundamental, boa parte dos alunos se interessam pela resolução de equações. Quando são passadas apenas fórmulas e métodos, muitos perdem esse interesse. Isso culmina no ensino médio, quando querem apenas decorar fórmulas para "o que cai na prova" e "o que cai no vestibular".

Além disso, ensinar números complexos, polinômios e equações algébricas no ensino médio não é uma tarefa fácil. São assuntos de pouca aplicação prática nas atividades do dia a dia da maioria das profissões e, no final desta etapa de ensino, grande parte dos alunos possuem apenas esta visão mais prática sobre aquilo que estão aprendendo.

Um desafio que encontramos nesse momento é o de fazer a construção desses conteúdos, não nos limitando apenas a passar as fórmulas para resolver alguns problemas específicos, mas relacionando com outras teorias que já foram estudadas e também abrindo horizontes para quem quiser se aprofundar no ensino superior.

Passar a visão de que a matemática possui diversas aplicações é necessário, mas não é suficiente. A teoria, por si só, também não motiva a maioria. Embora tenhamos mais trabalho, devemos sempre fazer conexões entre o que já foi estudado, aquilo que estamos nos propondo a ensinar e o que ainda pode ser desenvolvido a partir disso no futuro, seja em novas teorias do ensino médio ou no ensino superior.



Fazer com que os alunos vejam essas conexões é importante para que não ensinemos apenas conteúdos deslocados, consigamos motivá-los a quererem continuar aprendendo e contribuamos para melhorar o ensino de matemática em nosso país.

## Referências Bibliográficas

- [1] CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. McGraw-Hill do Brasil e Editora da USP, São Paulo, 1975.
- [2] CUNHA, M. C. C. *Métodos Numéricos*, 2<sup>a</sup> ed. Editora Unicamp, Campinas, 2000.
- [3] GEOGEBRA. Dynamic mathematics e science for learning and teaching, 2001. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>. Acesso em: 20 jan. 2016.
- [4] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*, 5<sup>a</sup> ed., vol. 1. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.
- [5] HEFEZ, A., AND VILLELA, M. L. T. *Polinômios e Equações Algébricas*, 1<sup>a</sup> ed. SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [6] LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*, 6<sup>a</sup> ed., vol. 3. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [7] LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*, 6<sup>a</sup> ed., vol. 1. SBM, Rio de Janeiro, 2006.