UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

WENDER DOS SANTOS LAGOIN

As equações de Navier-Stokes e Semilinear do Calor em espaços de modulação

Campinas

2017

Wender dos Santos Lagoin

As equações de Navier-Stokes e Semilinear do Calor em espaços de modulação

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Wender dos Santos Lagoin e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira.

Campinas

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 130577/2015-4

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

L137e
Lagoin, Wender dos Santos, 1992-
As equações de Navier-Stokes e semilinear do calor em espaços de modulação / Wender dos Santos Lagoin. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Má-colocação (Equações diferenciais parciais). 3. Teorema do ponto fixo. 4. Equação de calor. 5. Boa-colocação local. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas,1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The Navier-Stokes equations and semilinear heat equations in modulation spaces
Palavras-chave em inglês:
Navier-Stokes equations
Ill-posedness (Partial differential equations)
Fixed-point theorem
Heat equation
Local well-posedness
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]
Matheus Correia dos Santos
Maicon José Benvenutti
Data de defesa: 16-02-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de fevereiro de 2017 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof.(a). Dr(a). MATHEUS CORREIA DOS SANTOS

Prof.(a). Dr(a). MAICON JOSÉ BENVENUTTI

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Aos meus pais, Valderia e Antonio e aos meus amigos Fred, Jamieli, Donizetti e Murilo.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar aos membros da coordenação de pós-graduação, por ter me dado a oportunidade de realizar estes estudos de mestrado nesta prestigiosa instituição e com ótimas condições. Agradeço ao meu orientador Lucas C. F. Ferreira, por ter me apresentado esta importante área de pesquisa e pelos seus conselhos não só na elaboração desta dissertação, mas também na vida acadêmica em geral. Agradeço aos meus colegas e amigos, pelo apoio durante esses dois anos e principalmente ao meu grande amigo Fred que me acompanha desde a graduação e sempre me ajudou em todos os aspectos da minha vida pessoal e acadêmica. Agradeço a minha família, dando destaque a minha mãe, pois sem ela não teria conseguido chegar ao final de mais essa etapa na minha carreira. Finalmente, agradeço ao CNPq por ter financiado-me durante todo o curso de mestrado.

Resumo

Nesta dissertação de mestrado, primeiro estudamos algumas propriedades importantes dos espaços de modulação $M^s_{q,\sigma}$, tais como inclusões e estimativas de operadores. Além disso, estudamos resultados de existência e unicidade de solução para as equações de Navier-Stokes(NS) e para a equação do calor semilinear(H) nos espaços $M^s_{q,\sigma}$, dando ênfase ao caso em que o índice de derivação s é negativo, obtendo a boa-colocação no caso $s \geqslant -1$. Na abordagem, consideramos soluções locais e globais em relação ao tempo e usamos o argumento do ponto fixo. Esses resultados estendem os obtidos por Iwabuchi em [13]. Por fim, estudamos dois resultados de má-colocação para (NS) e (H) em $M^s_{q,\sigma}$ para o caso $s < -1$, o que nos dá uma otimalidade para a boa-colocação em relação ao índice de derivação s. Esse trabalho é baseado no artigo [14] de Tsukasa Iwabuchi.

Palavras-chave: Espaços de Modulação; equações de Navier-Stokes; equação do calor semi-linear; soluções locais e globais; boa-colocação; má-colocação.

Abstract

In this master dissertation, first we study some important properties of modulation spaces $M^s_{q,\sigma}$ such as inclusions and estimates for some operators acting in these spaces. In addition we study results about existence and uniqueness of solutions to the Navier-Stokes equations(NS) and nonlinear heat equations(H) in $M^s_{q,\sigma}$, emphasizing the case in which the derivative index s is negative and obtaining a well-posedness result in the case $s \geqslant -1$. In the approach, we consider local and global-in-time solutions and use a fixed point argument. These results extend those obtained by Iwabuchi in [13]. Finally, we study ill-posedness results for (NS) and (H) in $M^s_{q,\sigma}$ for the case $s < -1$, which give us an optimality for well-posedness with respct to the derivative index s. This work is based on the article [14] by Tsukasa Iwabuchi.

Keywords: Modulation spaces; Navier-Stokes equation; semi-linear heat equations; local and global solutions; well-posedness; ill-posedness.

Lista de símbolos

L^p	Espaço de Lebesgue
$\|\cdot\|_p$	Norma dos espaços de Lebesgue L^p
l^p	Espaço das sequências de número reais
$\|\cdot\|_{l^p}$	Norma do espaço das sêquencias de números reais l^p
$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier
$\mathcal{S}$	Classe de Schwartz
$\mathcal{S}'$	Espaço das distribuições temperadas
$suppf$	Suporte da função f
$\mathcal{R}_j$	j-ézima transforamda de Riez
$\mathcal{R}$	Transformada de Riez
$\mathbb{P}$	Operador prejeção de Helmhontz-Leray
$B^s_{q,\sigma}$	Espaços de Besov
$\|\cdot\|_{B^s_{q,\sigma}}$	Norma dos espaços de Besov
$M^s_{q,\sigma}$	Espaços de Modulação
$\|\cdot\|_{M^s_{q,\sigma}}$	Norma dos espaços de modulação
$e^{t\triangle}$	Semigrupo do Calor

Sumário

Introdução

Espaços de modulação foram criados durante o ínicio dos anos oitenta num trabalho pioneiro de H.G. Feichtinger [5], [6]. Logo após sua criação, com a colaboração de K. Gröchenig, foi estabelecida a teoria básica desses espaços de funções. Em constraste com os espaços de Besov, que são definidos pela decomposição diádica de frequência, os espaços de modulação surgem de uma decomposição uniforme de espaços de frequência.

Seu apelo é devido ao fato de que eles podem efetivamente capturar a concentração de uma distribuição de tempo-frequência. Os espaços de modulação são baseados nos espaços de Lebesgue ou Fourier-Lebesgue, porém eles são mais flexisíveis na medida em que permitem um controle separado da regularidade local e do decaimento no infinito de uma função.

A idéia central nessa análise de tempo-frequência é começar com uma função, localizá-la suavemente através de uma função chamada função janela, e em seguida tomar sua transformada de Fourier.

Assim, espaços de modulação capturam a concentração conjunta de tempo-frequência de uma função através de condições apropriadas de decaimento e integrabilidade. Nesta dissertação, vamos estudar algumas propriedades importantes dos espaços de modulação e considerar também dois problemas de Cauchy nesses espaços, os quais iremos destacar a seguir.

Consideraremos inicialmente o problema de Cauchy para as equações de Navier-Stokes

$$(NS)\ \begin{cases} \partial_t u - \triangle u + (u\cdot\nabla)u + \nabla\pi = 0 & ,\ (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ \text{div } u = 0 & ,\ (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & ,\quad x\in\mathbb{R}^n \end{cases},$$

onde $u = u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x)), \dots, u_n(t,x))$ e $\pi = \pi(t,x)$ denotam o campo de velocidades e a pressão do fluido no ponto (t,x), respectivamente, e $u_0(x)$ é a velocidade inicial dada.

Vamos considerar também a equação do calor semilinear

$$(H)\ \begin{cases} \partial_t u - \triangle u = \lambda|u|^{p-1}u & ,\ (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & ,\ x\in\mathbb{R}^n \end{cases},$$

onde $u = u(t,x)$ é uma função escalar, u_0 é a condição inicial dada e $p > 1$ e λ são números reais.

Existe uma rica literatura de boa-colocação de equações diferenciais parciais semilineares nos chamados espaços críticos, isto é, invariantes pela relação de escala da equação. Exemplos destes espaços são espaços de Lebesgue, espaços de Sobolev, espaços de Morrey, espaços de Besov, espaços de Besov-Morrey, BMO^{-1}, entre outros (veja [19] para mais detalhes). Para as equações de Navier-Stokes, em 1964 Fujita e Kato [7] consideraram o problema de Cauchy em $H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^3$. Kato [15] provou a existência de soluções no espaço de Lebesgue $L^n(\mathbb{R}^n)$ e mostrou que a solução existe globalmente no tempo quando a condição inicial é suficientemente pequena. Em 1985, Giga e Miyakawa [10] consideraram o problema de Cauchy em $L^p(\Omega)$ onde Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$. Cannone em [4] e Planchon [21] consideraram soluções globais para condição inicial $u_0 \in B_{q,\infty}^{-1+\frac{3}{q}}(\mathbb{R}^3)$ com $3 < q \leqslant 6$. Koch e Tataru [17] estudaram soluções locais para condição inicial $u_0 \in vmo^{-1}$ e solução global para condições iniciais pequenas $u_0 \in BMO^{-1}$. Miura [20] estudou soluções locais, que são contínuas com relação ao tempo, em gmo^{-1} para condição inicial $u_0 \in vmo^{-1} \cap gmo^{-1}$. Para problemas de Cauchy em espaços de modulação, Wang, Zhao e Guo [25] provaram a existência de solução local para condição inicial $u_0 \in M_{2,1}^0(\mathbb{R}^n)$. No trabalho de Tsukasa Iwabuchi [13], foi obtida a existência de solução local para condição inicial $u_0 \in M_{q,\sigma}^0(\mathbb{R}^n)$, se $1 \leqslant q \leqslant \infty$ e $1 \leqslant \sigma \leqslant \dfrac{n}{n-1}$. Além da existência de solução local, foi obtido também solução global se $q \geqslant n$ e a condição inicial for suficientemente pequena.

Aqui, estudaremos a existência de soluções locais e globais com condição inicial $u_0 \in M_{q,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)$ para alguns valores de s, q, σ. No Teorema 3.1, para as equações de Navier-Stokes, a condição inicial considerada aqui está inclusa nos resultados mostrados por Koch e Tataru [17] em alguns casos, enquanto em outros tal inclusão não está clara. De qualquer forma, mostraremos que o índice de derivação $s = -1$ é ótimo para garantir a boa-colocação, no sentido que (NS) é mal-colocado quando $s < -1$(veja capítulo 4 para mais detalhes).

Os resultados estudados aqui são uma extensão do trabalho feito em [13] e foi baseado no artigo de Tsukasa Iwabichi [14]. Em particular, vamos estudar os efeitos do índice de derivação $s \in \mathbb{R}$ na boa-colocação de (NS). Como já mencionado acima, se a condição inicial do problema (NS) está em $L^n(\mathbb{R}^n)$ e é suficientemente pequena, existe solução global (veja [15]), e o índice $p = n$ do espaço de Lebesgue é crítico, o que é obtido por um argumento de escala para (NS). Por outro lado, em espaços de modulação o comportamento global é controlado pelo índice q no resultado de [13]. Moralmente falando, o comportamento local das soluções é controlado pelos índices s e σ, e o comportamento global é controlado pelo índice q.

Para a equação do calor semilinear (H), com $\lambda = 1$, Fujita [8] provou a não existência de solução global não negativa e não trivial para $p < 1 + \dfrac{2}{n}$ em 1966. Em 1968, Fuijita [9] mostrou também a existência de solução global para $p > 1 + \dfrac{2}{n}$. O caso crítico $p = 1 + \dfrac{2}{n}$ foi estudado por Hayakawa [12] que provou a não existência de solução global não negativa e não trivial para $n = 1, 2$, o que posteriormente foi provado para dimensões gerais por Sirao e Tanaka [28]. Brezis e Friedman [3] provaram a existência de solução local para $p > 1 + \dfrac{2}{n}$ e a não existência de soluções para $p \geqslant 1 + \dfrac{2}{n}$ quando $\lambda = -1$ e a condição inicial é uma Delta de Dirac δ. Assim, os resultados de [14] fornecem uma nova classe de dados iniciais para a boa-colocação de (H).

Esta dissertação está organizada como segue. O Capítulo 1 é composto pela teoria básica necessária para o desenvolvimento do texto. Nele são apresentados definições de espaços de Lebesgue e a partir deles são dadas definições e propriedades de ferramentas importantes como a convolução e a transformada de Fourier. Relembramos também a classe de Schwartz a partir da qual pudemos definir e estudar propriedades das distribuições temperadas e dos multipliers de Fourier. Na Seção 1.5 é introduzido o operador de projeção de Helmholtz-Leray cujas propriedades são úteis na demonstração dos resultados principais deste trabalho. São definidos também os espaços de Besov, usando a decomposição de Littlewood-Paley (Seção 1.6), que são úteis por sua relação com os espaços de modulação. Finalmente, na última seção é enunciado e demonstrado o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que é utilizado na obtenção de soluções brandas das equações (NS) e (H).

O Capítulo 2 é dedicado à definição e estudo de propriedades dos espaços de modulação $M^s_{q,\sigma}$ e dos espaços $l^{s,\sigma}L^r_TL^q$. Para definir esses espaços é necessária a definição de um operador de decomposição $\square_k$, que é definido usando a transformada de Fourier e uma partição da unidade obtida com translações de uma função suave. São provadas inclusões contínuas entre os próprios espaços de modulação e entre os espaços de modulação com outros espaços importantes, tais como os espaços de Lebesgue (Seção 2.1) e os espaços de Besov (Seção 2.3). Além disso, apresentamos propriedades das normas dessas espaços. É introduzido o operador $e^{t\triangle}$(Seção 2.2) para o qual foram provadas estimativas, além de dar algumas relações entre a integração e a ação deste operador nos espaços $l^{s,\sigma}L^r_TL^q$ e $M^s_{q,\sigma}$. Finalmente, na Seção 2.4, obtivemos algumas relações entre os operadores $e^{t\triangle}$, $\square_k$ e $\mathbb{P}$, além de estudar estimativas do operador $\mathbb{P}$ nos espaços de modulação e nos espaços $l^{s,\sigma}L^r_TL^q$.

No Capítulo 3, são apresentadas as demonstrações dos teoremas principais desta dissertação. Na Seção 3.1, é provado a existência e unicidade de solução para as equações de Navier-Stokes e a boa-colocação em $PM^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ para s no intervalo $[-1, \infty)$. É obtida também na Seção 3.2 a existência e unicidade de solução para a equação do calor semilinear (H), impondo algumas condições para a potência p.

Finalmente, no Capítulo 4, mostramos alguns casos de má-colocação em espaços de modulação. Na Seção 4.1, provamos a má-colocação de (NS) em $PM^s_{2,\sigma}(\mathbb{R}^N)$ para $s < -1$, o que nos mostra a otimalidade de s no intervalo $[-1, \infty)$. Já na Seção 4.2 provamos a má-colocação de (H) em $M^s_{2,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ quando a potência p satisfaz $p > \dfrac{-2}{s}$ ou $p > \dfrac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}$.

1 Preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns espaços de funções e propriedades básicas que serão importantes na demonstração dos resultados principais dessa dissertação. Além de apresentar algumas ferramentas que serão essenciais no tratamentos das equações (NS) e (H) como o operador projeção de Helmholtz–Leray. A teoria desenvolvida nesse capítulo é baseada em [23], [16], [11] e [18], que podem ser consultados para mais detalhes.

1.1 Espaços L^p e o operador convolução

Muitas propriedades de funções são expressas em termos do seu nível de integrabilidade. Por isso, é interessante estudarmos espaços de funções cujo módulo elevado a p é integrável. Esses espaços são os espaços de Lebesgue L^p que são definidos a seguir.

Definição 1.1. *Seja $(X, \mathbb{M}, \mu)$ um espaço de medida e $0 < p \leqslant \infty$. O espaço $L^p = L^p(X, \mathbb{M}, \mu)$ é o conjunto de todas as classes de μ-equivalência de funções reais $\mathbb{M}$-mensuráveis f tais que $|f|^p$ é integrável com relação a μ sobre X. Em L^p definimos,*

$$\| f \|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \; se \; 0 < p < \infty$$

e

$$\| f \|_\infty = ess\ sup|f| = \inf\{a \geqslant 0; \mu(\{x \in X; |f(x)| > a\}) = 0\} \; , \; se \; p = \infty.$$

Exemplo 1.1. *Seja $X = \mathbb{Z}^n$, $\mathbb{M} = \wp(\mathbb{Z}^n)$ o conjunto das partes de $\mathbb{Z}^n$ e μ a medida da contagem definida a seguir. Se $E \in \mathbb{M}$ então $\mu(E)$ é o número de elementos de E, caso E seja finito, e $\mu(E) = \infty$ se E é infinito.*

Assim, para $0 < p < \infty$ obtemos o espaço $L^p(\mathbb{Z}^n, \mathbb{M}, \mu)$, o qual denotaremos por $l^p(\mathbb{Z}^n)$, que nada mais é que o espaço de sequências $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ de números reais com índices em $\mathbb{Z}^n$, tais que a norma

$$\| \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n} \|_{l^p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é finita.

Por simplicidade denotaremos $l^p(\mathbb{Z}^n)$ apenas por l^p.

Observação 1.1. *Nesse trabalho, utilizaremos $X = \mathbb{R}^n$, μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{M}$ a σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis. Além disso, por simplicidades denotaremos o espaço $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{M}, \mu)$ por L^p.*

A proposição a seguir nos dá algumas propriedades dos espaços L^p.

Proposição 1.1. *(i)(Desigualde de Holder) Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$ com $p > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1$ e vale a seguinte desigualdade*

$$\| fg \|_1 \leqslant \| f \|_p \| g \|_q \,.$$

(ii)(Desigualdade de Minkowski) Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Se $f, g \in L^p$ então $f + g \in L^p$ e vale

$$\| f + g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p \,.$$

Observação 1.2. *(1) Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $fg \in L^1$ e vale a igualdade de Holder se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha\beta \neq 0$, tais que*

$$\alpha |f|^p = \beta |g|^q \quad \mu - \textit{quase sempre.}$$

(2) A Desigualdade de Minkowski nos mostra que o espaço $(L^p, \| \cdot \|_p)$ é um espaço de Banach, para todo $p \geqslant 1$.

A seguir definiremos o operador convolução que incialmente pode ser definido para funções mensuráveis mais que tem propriedades interessantes nos espaços L^p que serão de grande utilidade nesse trabalho.

Definição 1.2. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Definimos e denotamos o produto de convolução de f e g por*

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \tag{1.1}$$

quando as integrais (1.1) existem.

Proposição 1.2. *Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Valem as seguintes propriedades:*

(a) $\star$ é um operador bilinear e simétrico.

(b) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.

(c) Seja $w \in \mathbb{R}^n$ e considere a translação definida por $\tau_w(f)(x) = f(x - w)$. Então vale

$$\tau_w (f \star g) = \tau_w(f) \star g.$$

(d) Se A é o fecho do conjunto $\{x + y; x \in supp(f), y \in supp(g)\}$ então

$$supp(f \star g) \subset A.$$

Observação 1.3. *O produto de convolução tem um efeito suavizante, ou seja, a convolução tem a regularidade da função mais suave. Por exemplo, sejam $J \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $0 < p \leqslant \infty$. Considere os seguintes espaços de funções:*

$$L^p(J) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; |f|^p \text{ é integrável em } J\}$$

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; f \in L^1(K), \forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto }\}$$

$$C^k_0(\mathbb{R}^n) = \{ \text{ funções de classe } C^k \text{ que tendem a zero no infinito } \}$$

$$C^k_c(\mathbb{R}^n) = \{ \text{ funções de classe } C^k \text{ com suporte compacto em } \mathbb{R}^n\}$$

Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ então $f \star g \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

A seguir daremos algumas propriedades do operador convolução nos espaços de Lebesgue L^p.

Proposição 1.3. *(i) Sejam $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ então $f \star g$ é limitada e uniformemente contínua.*

(ii) Sejam $1 < p, q < \infty$, $f \in L^p$ e $g \in L^q$. Então $f \star g \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

(iii)(Desigualdade de Young) Sejam $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ tais que

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ então $f \star g \in L^r$ e vale

$$\| f \star g \|_r \leqslant \| f \|_p \| g \|_q .$$

1.2 Transforamada de Fourier

O conceito da transformada de Fourier é motivado por duas ideias centrais em análise:

(i) a ideia de expressar funções periódicas genéricas como superposição de ondas básicas (senos e cossenos) que está relacionada com as chamadas séries de Fourier

(ii) a concepção de um operador que transforma diferenciação em multiplicação por polinômios, uma ferramenta de extrema utilidade na resolução de equações diferenciais.

Apesar de historicamente a transformada de Fourier em $\mathbb{R}^n$ ser motivada pelas séries trigonométricas, trataremos aqui apenas o caso $\mathbb{R}^n$, ao invés de trabalhar com funções periódicas. Iniciaremos definindo o conceito para funções em L^1 e a partir daí iremos generalizar para outros espaços mais gerais.

Definição 1.3. *Seja $f \in L^1$. Definimos a transformada de Fourier de f, denotada por $\mathcal{F}f$ ou também por $\hat{f}$, como*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.$$

A proposição a seguir coleciona uma série de propriedades básicas da transformada de Fourier. Em particular, observe sua relação com o operador de convolução e seu caráter especial de transformar diferenciação em multiplicação por polinômios.

Proposição 1.4. *Sejam $f, g \in L^1$. Valem as seguintes propriedades:*

(i) $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ e $\| \mathcal{F}f \|_\infty \leqslant \| f \|_1$.

(ii) $\mathcal{F}(\tau_y f)(\xi) = e^{-2\pi i\xi y}\mathcal{F}f(\xi)$ e $\tau_\eta(\mathcal{F}f)(x) = \mathcal{F}(e^{2\pi i\eta\xi}f)(x)$.

(iii) $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g$.

(iv) Se $x^\alpha f \in L^1$, para $|\alpha| \leqslant k$, então $\mathcal{F}f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e vale

$$\partial^\alpha \mathcal{F}f = \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\alpha f] \ ,$$

onde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$ e $\partial^\alpha \mathcal{F}f = (\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}})\dots(\dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_n}})\mathcal{F}f$, com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup 0)^n$.

(v) Se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha f \in L^1$, $|\alpha| \leqslant k$, e $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, então

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \mathcal{F}f(\xi).$$

Passamos a investigar agora o problema inverso: como obter f a partir de sua transformada de Fourier $\mathcal{F}f$? Definimos para isso a transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}f$, denotado também por $\check{f}$, de uma função f por

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx \ .$$

Antes de passarmos para o teorema da inversão propriamente dito, apresentamos a chamada fórmula de multiplicação para a transformada de Fourier, um resultado simples, porém bastante útil.

Proposição 1.5. *(Fórmula da Multiplicação) Sejam $f, g \in L^1$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\check{g}(x).$$

Teorema 1.1. *(Fórmula da Inversa) Se f e $\mathcal{F}f \in L^1$ então*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi}\mathcal{F}f(\xi)d\xi,$$

em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

Apesar da integral que define a transformada de Fourier não fazer sentido em geral para uma função $f \in L^2$, existe uma maneira simples e elegante de estendermos a teoria para o contexto L^2. O ponto chave para essa extensão é o resultado abaixo, onde assumimos $f \in L^1 \cap L^2$.

Proposição 1.6. *Se* $f \in L^1 \cap L^2$ *então* $\| \mathcal{F}f \|_2 = \| f \|_2$.

Como $L^1 \cap L^2$ é denso em L^2, existe uma única extensão limitada, denotada por $\mathcal{F}$, da transformada de Fourier para o espaço L^2. Continuaremos usando a notação $\mathcal{F}f = \hat{f}$ quando $f \in L^2$.

Teorema 1.2. *(Plancherel) O operador* $\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow L^2$ *é unitário, isométrico e sobrejetivo. Além disso, vale* $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x)$.

Uma vez definida a transformada de Fourier em L^1 e em L^2 podemos estender sua definição para a classe de funções

$$L^1 + L^2 = \{f = f_1 + f_2; f_1 \in L^1 \text{ e } f_2 \in L^2\}.$$

De fato, se $f = f_1 + f_2$ como acima, definimos $\mathcal{F}f = \mathcal{F}f_1 + \mathcal{F}f_2$.

Assim, como $L^p \subset L^1 + L^2$ para $1 \leqslant p \leqslant 2$, conseguimos definir a transformada de Fourier nestes espaços L^p.

Teorema 1.3. *Se* $f \in L^1$ *e* $g \in L^p$, *com* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *então sabemos que* $f \star g \in L^p$ *(pela desigualdade de Young) e vale que*

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}f(x)\mathcal{F}g(x),$$

para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^n$.

Por fim, apresentamos uma das desigualdades clássicas em Análise de Fourier, a chamada desigualdade de Hausdorff-Young.

Teorema 1.4. *(Desigualdade de Hausdorff - Young). Se* $f \in L^p$ *com* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *temos que*

$$\| \mathcal{F}f \|_{p'} \leqslant \| f \|_p \, .$$

1.3 A classe de Schwartz e as distribuições temperadas

No sentido de generalizar a noção da transformada de Fourier para o contexto de distribuições, definiremos primeiramente a classe de funções-teste adequada. Tentativamente, seria interessante pedir que tal classe seja fechada com relação às operações básicas que estamos tratando.

Definição 1.4. *Seja $\mathcal{S}$ o conjunto de funções $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, tais que*

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^{\alpha}\partial^{\beta} f| < \infty,$$

para quaisquer multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, ou seja, é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis, tais que, qualquer derivada decai mais rapidamente do que qualquer polinômio. Este conjunto é conhecido como classe de Schwartz.

A proposição a seguir nos dá algumas propriedades importantes do espaço $\mathcal{S}$ e dos operadores definidos anteriormente nesse espaço.

Proposição 1.7. *(i) O operador $\mathcal{F}$ é um homeomorfismo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.*

(ii) Se $f, g \in \mathcal{S}$ então $f \star g \in \mathcal{S}$.

(iii) O espaço $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto, é denso em $\mathcal{S}$.

O espaço dual $\mathcal{S}'$ formado por todos os funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}$ é chamado espaço das distribuições temperadas. A próxima proposição apresenta uma caracterização das distribuições temperadas.

Proposição 1.8. *Um funcional linear L em $\mathcal{S}$ é uma distribuição temperada se, e somente se, existir uma constante C e inteiros m e l, tais que*

$$|L(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant l, |\beta|\leqslant m} \rho_{\alpha\beta}(\varphi),$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{S}$.

Podemos estender vários conceitos definidos até agora para o conjunto $\mathcal{S}'$ de distribuições temperadas. A seguir, mostraremos como estender os operadores de convolução e a Transformada de Fourier que serão mais utilizados no presente trabalho.

(I) Transformada de Fourier: Seja $u \in \mathcal{S}'$. A transformada de Fourier de u, denotada por $\mathcal{F}u = \hat{u}$, é uma distribuição temperada definida por

$$\mathcal{F}u(\varphi) = u(\mathcal{F}\varphi) \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

(II) Operador Convolução: Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $f \in \mathcal{S}$. Se $\tilde{f} := f(-x)$ então o produto de convolução de u e f é uma distribuição temperada definida por

$$u \star f(\varphi) = u(\tilde{f}\varphi(x)) \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Agora, a partir dessas extensões feitas para o espaço das distribuições temperadas, podemos definir um novo espaço de funções.

Definição 1.5. *Seja Ω um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e $0 < p \leqslant \infty$. Definimos o espaço $L_p^{\Omega}(\mathbb{R}^n)$ por*

$$L_p^{\Omega}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p; supp\mathcal{F}f \subset \Omega\}.$$

Por simplicidade, denotaremos $L_p^{\Omega}(\mathbb{R}^n)$ apenas por L_p^{Ω}.

O lema a seguir nos dá uma estimativa importante entre normas dos espaços de Lebesgue para funções em L_p^{Ω}.

Lema 1.1. *Sejam $R > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto com diâmetro menor que $2R$ e $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| f \|_q \leqslant C \| f \|_p \quad , \forall f \in L_p^{\Omega}.$$

1.4 Multipliers de Fourier para os espaços de Lebesgue

Nesta seção, iremos introduzir o conceito de multipliers de Fourier e demonstrar um lema que será útil no desenvolvimento da teoria dos espaços de modulação.

Definição 1.6. *Sejam Ω um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, $0 < p \leqslant \infty$ e $M \in \mathcal{S}'$ tal que $\mathcal{F}^{-1}M \in L^1$. Dizemos que M é um multiplier de Fourier para L_p^{Ω}, se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| \mathcal{F}^{-1}M\mathcal{F}f \|_p \leqslant C \| f \|_p \quad , \forall f \in L_p^{\Omega}.$$

A próxima proposição nos dá uma propriedade interessante dos multiplier de Fourier.

Proposição 1.9. *Seja Ω e Γ subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$. Seja $0 < p \leqslant \infty$ e $\tilde{p} = \min\{1, p\}$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| \mathcal{F}^{-1}[M\mathcal{F}[f]] \|_p \leqslant C \| \mathcal{F}^{-1}M \|_{\tilde{p}} \| f \|_p \ ,$$

para toda $f \in L_p^{\Omega}$ e toda $M \in \mathcal{S}'$ com $\mathcal{F}^{-1}M \in L_{\tilde{p}}^{\Gamma}$.

Para a demonstração do lema central dessa sessão precisamos introduzir um espaço de funções muito utilizado no estudo de edp's.

Definição 1.7. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço normado $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ por*

$$H_2^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{H_2^s} < \infty\},$$

onde a norma $\| \cdot \|_{H_2^s}$ é dada por

$$\| f \|_{H_2^s} = \| (1 + x)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f(x) \|_2 \ .$$

Novamente usaremos a notação H_2^s para indicar $H_2^s(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.4. *(i) Algumas vezes, esses espaços são denotados por $W_2^s = H_2^s$, chamados espaços de Sobolev-Slobockey, se $s \geqslant 0$. Se $s = m \in \mathbb{N}$ então os espaços W_2^s são os espaços de Sobolev usuais, isto é,*

$$W_2^m = \{f \in \mathcal{S}'; \| f \|_{W_2^m} < \infty\},$$

onde

$$\| f \|_{W_2^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \| \partial^\alpha f \|_2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Se $s_0 > s_1$, então vale a seguinte inclusão contínua

$$H_2^{s_0} \subset H_2^{s_1}.$$

Além disso, $H_2^0 = L^2$.

Finalmente, o lema a seguir nos dá uma estimativa para os multipliers de Fourier em espaços de Lebesgue, a qual será útil para a demonstração de algumas estimativas de operadores em espaços de modulação.

Lema 1.2. *Sejam Ω um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e $0 < p \leqslant \infty$. Seja também $\sigma_p = n\left(\frac{1}{\min\{1,p\}} - \frac{1}{2}\right)$. Se $s > \sigma_p$ então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\| \mathcal{F}^{-1} M \mathcal{F} f \|_p \leqslant C \| M \|_{H_2^s} \| f \|_p \tag{1.2}$$

Demonstração: Dividiremos a demonstração em três passos.

Passo 1: Suponhamos inicialmente que (1.2) é válido para $M \in H_2^s$ com

$$suppM \subset \Omega^1 = \{y; \exists x \in \Omega \text{ com } |x - y| \leqslant 1\}. \tag{1.3}$$

Seja $\psi \in S$ com $supp\psi \subset \Omega^1$ e $\psi(x) = 1$ em Ω. Se $M \in H_2^s$ é uma função qualquer então

$$\mathcal{F}^{-1} M \mathcal{F} f = \mathcal{F}^{-1} \psi M \mathcal{F} f \ , \forall f \in L_p^\Omega. \tag{1.4}$$

Agora observe que (1.2) é válido para ψM. Além disso, segue da desigualdade de Holder que existe $C > 0$ tal que

$$\| \psi M \|_{H_2^s} \leqslant C \| M \|_{H_2^s}, \tag{1.5}$$

onde C depende apenas de ψ.

Assim, de (1.4) e (1.5) temos que

$$\begin{aligned} \| \mathcal{F}^{-1} M \mathcal{F} f \|_p &= \| \mathcal{F}^{-1} \psi M \mathcal{F} f \|_p \\ &\leqslant C \| \psi M \|_{H_2^s} \| f \|_p \\ &\leqslant C \| M \|_{H_2^s} \| f \|_p . \end{aligned}$$

Portanto, vale (1.2) para toda $M \in H_2^s$.

Passo 2: Nesse passo provaremos a seguinte afirmação: se $0 < p \leqslant 1$ e $s > \sigma_p$ então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| \mathcal{F}M \|_p \leqslant C \| M \|_{H_2^s} \;, \forall M \in H_2^s. \tag{1.6}$$

Seja $K_0 = \{x; |x| \leqslant 1\}$ e $K_j = \{x; 2^{j-1} \leqslant |x| \leqslant 2^j\}$, para $j = 1, 2, 3, \ldots$. Então, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{F}M \|_p^p &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{K_j} |\mathcal{F}M(x)|^p dx \\
&\leqslant C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jn\frac{2-p}{2}} \left(\int_{K_j} |\mathcal{F}M(x)|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}} \\
&= C \sum_{j=0}^{\infty} \left[2^{j\sigma_p} \left(\int_{K_j} |\mathcal{F}M(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^p \\
&\leqslant C \left[\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js} \int_{K_j} |\mathcal{F}M(x)|^2 dx \right]^{\frac{p}{2}} \\
&\leqslant C \| M \|_{H_2^s}^p \;,
\end{aligned}$$

o que prova (1.6).

Passo 3: Neste último passo, vamos mostrar que a suposição feita no passo 1 é verdadeira, concluindo assim a demontração do lema. Seja $M \in H_2^s$ com $s > \sigma_p$ e $suppM \subset \Omega_1$ conforme (1.3). Se $\tilde{p} = \min\{p, 1\}$ então (1.6) nos garante que $\mathcal{F}^{-1}M \in L_{\tilde{p}}^{\Omega_1}$.

Assim, obtemos (1.2) pela Proposição 1.9 e por (1.6).

■

1.5 A Transformada de Riesz e o operador projeção de Helmholtz-Leray

Nesta seção, vamos definir a transformada de Riesz, tanto na classe de Schwartz como no espaço das distribuições temperadas módulo polinômios. Esta transformada permitirá definir o operador projeção de Helmholtz–Leray, o qual, será utilizado na manipulação das equações de Navier-Stokes.

Começamos com a definição da Transformada de Riesz na classe de Schwartz.

Definição 1.8. *Seja $f \in \mathcal{S}$. Para cada j, $1 \leqslant j \leqslant n$, definimos a transformada de Riesz de f, $\mathcal{R}_j f$, como*

$$\mathcal{R}_j f(x) = c_n p.v. \left\langle \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, f \right\rangle,$$

onde $c_n = \Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{n+1}{2}}$. *Aqui* Γ *é a função gama e p.v. é o valor principal de integrais, de onde segue que*

$$p.v.\left\langle \left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right), f\right\rangle(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geqslant\varepsilon}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)dy.$$

Agora iremos calcular a transformada de Fourier da transformada de Riesz, que será essencial para a definição do operador prejeção de Helmhontz-Leray.

Verifiquemos que $\mathcal{F}(\mathcal{R}_j)(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}$. Usamos essa notação para indicar que

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_j f)(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}f.$$

Observe inicialmente que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-n+1} = (1-n)p.v.\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right),$$

no sentido de distribuições. De fato,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-n+1}, f\right\rangle(y) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-n+1}f(y-x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(1-n)\frac{x_j}{|x|^{n+1}}f(y-x)dx = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}(1-n)\frac{x_j}{|x|^{n+1}}f(y-x)dx \\
&= (1-n)p.v.\left\langle\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right), f\right\rangle(y).
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{R}_j f)(\xi) &= \mathcal{F}\left(c_n p.v.\left\langle\left(\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right), f\right\rangle\right)(\xi) \\
&= c_n\mathcal{F}\left(\frac{1}{1-n}\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-n+1}\right)\mathcal{F}f(\xi) \\
&= \frac{c_n}{1-n}(2\pi i\xi_j)\mathcal{F}(|x|^{-n+1})(\xi)\mathcal{F}f(\xi) \\
&= c_n\frac{2\pi i\xi_j}{1-n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}|\xi|^{-1}\mathcal{F}f(\xi).
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de c_n, obtemos

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_j f)(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}f(\xi).$$

Não podemos simplesmente estender esta definição de Transformada de Riesz ao espaço de distribuições fazendo como usualmente

$$\langle\mathcal{R}_j f, \phi\rangle = \langle f, \mathcal{R}_j\phi\rangle,$$

pois nem sempre $\mathcal{R}_j\phi$ pertence ao espaço $\mathcal{S}$. Para resolver esse problema, inicialmente consideramos o anel de polinômios no corpo dos complexos em n variáveis, o qual denotaremos por $\mathcal{P}$. Agora, podemos superar essa dificuldade dando sentido para a expressão $|\xi|^s\mathcal{F}u$ para $u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$, onde $u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ indica o conjunto das distribuições temperadas módulo $\mathcal{P}$.

Fixemos uma função suave η sobre $\mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\begin{cases} \eta(\xi) = 1 & , \text{ se } |\xi| \geqslant 2 \\ \eta(\xi) = 0 & , \text{ se } |\xi| \leqslant 1. \end{cases}$$

Definimos para cada $s \in \mathbb{R}$, a aplicação $|\xi|^s\mathcal{F}u$ como

$$\langle |\xi|^s\mathcal{F}u, \phi\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle \mathcal{F}u, \eta(\frac{\xi}{\varepsilon})|\xi|^s\phi(\xi) \right\rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$, sempre que o limite existir.

Assim, $|\xi|^s\mathcal{F}u$ é uma distribuição temperada e não depende da escolha de η (para mais detalhes ver [11], p. 259).

Agora podemos definir a transformada de Riesz da seguinte forma.

Definição 1.9. *Sejam $u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ e $1 \leqslant j \leqslant n$. A transforamda de Riesz de u, $\mathcal{R}_ju$, é dada pela sua transformada de Fourier, via a igualdade*

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_ju)(\xi) = \frac{-i\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}u(\xi).$$

Observação 1.5. *Note que $\mathcal{R}_ju \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$, pois$|\xi|^{-1}\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ e $-i\xi_j$ tem crescimente lento.*

Agora já temos todas as ferramentas necessárias para apresentar a projeção de Helmholtz-Leray.

Definição 1.10. *O operador projeção de Helmholtz-Leray $\mathbb{P}$ é definido como*

$$\mathbb{P} = \mathbb{I} + \mathcal{R} \otimes \mathcal{R},$$

onde $\mathbb{I}$ é a identidade sobre $(\mathcal{S}'/\mathcal{P})^n$, $\mathcal{R}$ é um vetor cujas componentes são transformadas de Riesz $\mathcal{R}_j$, com $j = 1, \ldots, n$, e $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} = (\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j)_{i,j}$.

Segue que, para cada $u \in (\mathcal{S}'/\mathcal{P})^n$

$$\mathbb{P}u = u + (\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})u.$$

Aplicando a transformada de Fourie na igualdade acima, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{P}u) &= \mathcal{F}u + \mathcal{F}((\mathcal{R} \otimes \mathcal{R})u) \\ &= \mathcal{F}u + (\mathcal{F}\mathcal{R}_i(\mathcal{R}_j))_{i,j}\mathcal{F}u \\ &= \mathcal{F}u + \left(-i\frac{\xi_i}{|\xi|}\mathcal{F}(\mathcal{R}_j)\right)_{i,j}\mathcal{F}u \\ &= \mathcal{F}u + \left(\left(-i\frac{\xi_i}{|\xi|}\right)\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\right)_{i,j}\mathcal{F}u. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{F}(\mathbb{P}u)(\xi) = \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathcal{F}u(\xi).$$

A proposição a seguir contém algumas propriedades do operador $\mathbb{P}$.

Proposição 1.10. *(i) $\mathbb{P}$ é linear.*

(ii) div $(\mathbb{P}u) = 0$, ou equivalentemente, $\mathcal{F}($ div $(\mathbb{P}u)) = 0$, para toda $u \in (\mathcal{S}'/\mathcal{P})^n$.

(iii) Se $u \in (\mathcal{S}'/\mathcal{P})^n$ satisfaz div $u = 0$ então $\mathbb{P}u = u$, ou equivalentemente, $\mathcal{F}(\mathbb{P}u) = \mathcal{F}u$.

Demonstração: Provaremos apenas os item (ii) e (iii), pois o item (i) segue diretamente da definição de $\mathbb{P}$.

Demonstração de (ii): Vale a identidade

$$\text{div } \mathbb{P} = \text{ div } \mathbb{I} + \text{ div } (\mathcal{R}\otimes\mathcal{R}) = (\partial_k)_{k=1}^n + (\mathcal{R}_k \text{ div } \mathcal{R})_{k=1}^n.$$

Assim, aplicando a transformada de Fourier para cada $k = 1, \ldots, n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial_k) + \mathcal{F}(\mathcal{R}_k div\mathcal{R}) &= -i\xi_k + \left(-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\mathcal{F}(\text{ div } \mathcal{R})\right)\\
&= -i\xi_k + \left(-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\left(\sum_{j=1}^n \mathcal{F}(\partial_j\mathcal{R}_j)\right)\right)\\
&= -i\xi_k + \left(-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\left(\sum_{j=1}^n -i\xi_j\mathcal{F}(\mathcal{R}_j)\right)\right)\\
&= -i\xi_k + \left(-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\left(\sum_{j=1}^n(-i\xi_j)\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\right)\right)\\
&= -i\xi_k + \left(-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\left(\sum_{j=1}^n -\frac{\xi_j^2}{|\xi|}\right)\right)\\
&= -i\xi_k + i\xi_k = 0,
\end{aligned}$$

como desejado.

Demonstração de (iii): Sabemos que

$$\mathcal{F}(\mathbb{P}u) = \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\right)\mathcal{F}u.$$

Então

$$\mathcal{F}(\mathbb{P}u)_k = \mathcal{F}u_k + i\frac{\xi_k}{|\xi|^2}\left(\sum_{j=1}^n -i\xi_j\mathcal{F}u_j\right). \tag{1.7}$$

Entretanto, como div $u = 0$, aplicando a transformada de Fourier, obtemos

$$0 = \mathcal{F}(\text{ div } u) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}(\partial_j u_j) = \sum_{j=1}^n -i\xi_j\mathcal{F}u_j.$$

Substituindo a igualdade acima em (1.7), obtemos o resultado desejado.

■

Observação 1.6. *Podemos tirar algumas conclusões da proposição acima. De (ii) vemos que* $\mathbb{P}$ *aplica* $(\mathcal{S}'/\mathcal{P})^n$ *no subespaço de* $(\mathcal{S}'/\mathcal{P})^n$ *formado por todas as distribuições em* $(\mathcal{S}'/\mathcal{P})^n$ *com divergência nula. Além disso, uma consequência imediata de (iii) é que* $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$*, ou seja,* $\mathbb{P}$ *é um operador projeção.*

Este operador será util para estudar as equações de Navier–Stokes. As suas propriedades em relação a transformada de Fourier nos ajudarão a estabelecer algumas estimativas importantes.

1.6 Decomposição de Littlewood-Paley e os espaços de Besov

Nesta seção iremos obter a decomposição de Littlewood-Paley e a partir dela poderemos definir o espaço de Besov $B^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ que será útil na demonstração de algumas propriedades dos espaços de modulação que serão considerados no próximo capítulo.

Lema 1.3. *Existe uma função* $\phi \in \mathcal{S}$ *satisfazendo:*

(i) $0 \leqslant \mathcal{F}\phi \leqslant 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

(ii) supp$(\mathcal{F}\phi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$.

(iii) Se $\phi_j(\xi) = 2^{jn}\phi(2^j\xi)$ *para cada* $j \in \mathbb{Z}$*, então*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\phi_j(\xi) = 1 \ , \ \forall \in \mathbb{R}^n.$$

Chamaremos a função ϕ *de função base.*

O lema anterior nos permite definir os operadores da decomposição diádica e a partir deles definir a decomposição de Littlewood-Paley.

Definição 1.11. *Seja* $f \in \mathcal{S}'$*. Para cada* $k \in \mathbb{Z}$*, definimos os k-blocos diádicos* Δ_k *e os operadores "cut-off"de frequência* S_k *da seguinte forma*

$$\Delta_k f = \phi_k \star f$$

e

$$S_k f = \sum_{j=-\infty}^{k} \Delta_j f.$$

A partir dos operadores acima obtemos a decomposição a seguir.

Proposição 1.11. *Seja $f \in \mathcal{S}'$. Para qualquer $N \in \mathbb{Z}$, temos que*

$$f = S_N f + \sum_{j \geqslant N} \Delta_j f \ \text{em } \mathcal{S}'.$$

Esta igualdade é chamada decomposição de Littlewood-Paley de f. Além disso, se $\lim_{N\to\infty} S_N f = 0$, obtemos a igualdade

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f,$$

a qual chamamos decomposição homogênea de Littlewood-Paley.

Agora, de posse dos operadores de decomposição, podemos definir os espaços de Besov.

Definição 1.12. *Sejam $1 \leqslant q, \sigma \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Definimos os espaços de Besov $B^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$B^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{B^s_{q,\sigma}} < \infty\},$$

onde

$$\begin{cases} \| f \|_{B^s_{q,\sigma}} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ks\sigma} \| \Delta_k f \|_q^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} & , \ \text{se } \sigma < \infty \\ \| f \|_{B^s_{q,\sigma}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{2^{ks} \| \Delta_k f \|_q\} & , \ \text{se } \sigma = \infty. \end{cases}$$

Por simplicidade, vamos denotar os espaços de Besov $B^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ apenas por $B^s_{q,\sigma}$.

A partir da decomposição de Littlewood-Paley, podemos também definir os espaços de Besov homogêneos que são denotados por $\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Considere o conjunto,

$$\dot{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'; (D^\alpha \mathcal{F} f)(0) = 0, \forall \alpha\} \ .$$

Definição 1.13. *Sejam $1 \leqslant q, \sigma \leqslant \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Definimos os espaços de Besov Homogêneos $\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$\dot{B}^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \dot{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}} < \infty\},$$

onde

$$\begin{cases} \| f \|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}} = \left(\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ks\sigma} \| \Delta_k f \|_q^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} & , \ \text{se } \sigma < \infty \\ \| f \|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{2^{ks} \| \Delta_k f \|_q\} & , \ \text{se } \sigma = \infty. \end{cases}$$

A proposição a seguir nos traz algumas propriedades básicas dos espaços $B^s_{q,\sigma}$.

Proposição 1.12. *(i) $\mathcal{S} \subset B^s_{q,\sigma} \subset \mathcal{S}'$.*

(ii) Se $1 \leqslant q, \sigma < \infty$ então $\mathcal{S}$ é denso em $B^s_{q,\sigma}$.

(iii) Sejam $1 \leqslant q_1, q_2 \leqslant \infty$, $1 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2},$$

então

$$B^{s_1}_{q_1,\sigma} \subset B^{s_2}_{q_2,\sigma}.$$

1.7 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesta seção, iremos tratar do teorema do ponto fixo de Banach. Ele nos dá condições para a existência e unicidade de pontos fixos. Para isso, precisaremos definir o conceito de ponto fixo e contração, o que será feito a seguir.

Definição 1.14. *(i) Seja X um conjunto não vazio. Um ponto fixo de uma aplicação $T : X \to X$ é um elemento $x \in X$ que é aplicado em si mesmo por T, isto é,*

$$Tx = x.$$

(ii) Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $T : X \to X$ é uma contração em X se existe um número real positivo $\alpha < 1$ tal que para todo $x, y \in X$, temos que

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y). \tag{1.8}$$

Teorema 1.5. *Considere um espaço métrico (X, d), $X \neq \varnothing$. Se X é completo e $T : X \to X$ é uma contração em X, então T admite um único ponto fixo.*

Demonstração: Para demonstrarmos a existência de um ponto fixo de T, construíremos uma sequência (x_n) em X que será uma sequência de Cauchy. Como X é completo, segue que (x_n) é convergente, digamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Por fim, mostraremos que x é ponto fixo de T e, além disso, é o único ponto fixo de T.

Escolha $x_0 \in X$ e vamos definir (x_n) por

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_n = T^n x_0, \ldots \tag{1.9}$$

Note que (x_n) é uma sequência de imagens de x_0 sob repetidas aplicações de T. Mostremos que (x_n) é de Cauchy.

Primeiramente, de (1.8) e (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leqslant \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leqslant \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ \ldots &\leqslant d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Utilizando (1.10) e a desigualdade triangular, obtemos para $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$, temos $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Consequentemente, para $n > m$, temos

$$d(x_m, x_n) \leqslant \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \tag{1.11}$$

Agora, note que se $d(x_0, x_1) = 0$ então x_0 é ponto fixo de T e temos a existência do ponto fixo. Analisemos o caso em que $d(x_0, x_1) \neq 0$. Como $0 < \alpha < 1$, então

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \varepsilon. \tag{1.12}$$

De (1.11) e (1.12), segue que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ para } n > m > m_0.$$

Portanto, (x_n) é sequência de Cauchy. Como X é completo segue que $x_m \to x$ para algum $x \in X$.

Mostremos que x é ponto fixo da aplicação T. Da desigualdade triangular e (1.8), temos que

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leqslant d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &\leqslant d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $x_m \to x$, dado $\delta > 0$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, x_m) + \alpha d(x_m, x) < \delta.$$

Logo, $d(x, Tx) < \delta$, $\forall \delta > 0$. Assim, $d(x, Tx) = 0$ e consequentemente $Tx = x$. Isto mostra que x é um ponto fixo de T.

Para mostrar a unicidade do ponto fixo, suponhamos que exista $\tilde{x} \in X$ tal que $T\tilde{x} = \tilde{x}$ e note que, por (1.8),

$$d(x, \tilde{x}) = d(Tx, T\tilde{x}) \leqslant \alpha d(x, \tilde{x}).$$

Logo, $d(x, \tilde{x}) = 0$, pois $\alpha < 1$. Assim, $x = \tilde{x}$.

■

2 Espaços de Modulação

Neste capítulo vamos mostrar algumas propriedades de espaços de modulação e do espaço de funções $l_{\square}^{s,\sigma}(L^r((0,T);L^q(\mathbb{R}^n)))$, e as estimativas para o semigrupo do calor $e^{t\triangle}$ nesses espaços. Por simplicidade, colocamos $l^{s,\sigma}L_T^rL^q := l_{\square}^{s,\sigma}(L^r((0,T);L^q(\mathbb{R}^n)))$ e $\|\cdot\|_{M_{q,\sigma}^s} := \|\cdot\|_{M_{q,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)}$ nas seções a seguir. A constante C denota uma constante estritamente positiva que pode mudar de linha para linha ou mesmo em cada linha.

2.1 Definição e propriedades dos espaços $M_{q,\sigma}^s$, $l^{s,\sigma}L_T^rL^q$

Definição 2.1. *Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\mathrm{supp}\varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leqslant \sqrt{n}\} \ , \ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\xi - k) = 1 \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma partição da unidade por

$$\varphi_k(\xi) = \varphi(\xi - k), \tag{2.1}$$

e o operador

$$\square_k = \mathcal{F}^{-1}\varphi_k\mathcal{F}. \tag{2.2}$$

Para $1 \leqslant q, \sigma \leqslant \infty$ e $-\infty < s < \infty$, definimos o Espaço de Modulação, $M_{q,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)$, como

$$M_{q,\sigma}^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{M_{q,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

onde

$$\| f \|_{M_{q,\sigma}^s(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \square_k f \|_q^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} & , \ 1 \leqslant \sigma < \infty \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^s \| \square_k f \|_q & , \ \sigma = \infty, \end{cases}$$

com o símbolo $\langle k \rangle$ representando o peso $(1 + |k|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Observação 2.1. *(i) Em espaços de modulação, vale a seguinte desigualdade*

$$\| \square_k f \|_{p_1} \leqslant \| \square_k f \|_{p_2} \ , \ k \in \mathbb{Z}^n \ , \ 0 < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty.$$

(ii) Seja χ a função característica do conjunto $\{k \in \mathbb{Z}^n; |k| \leqslant 3\sqrt{n}\}$ e denotemos $\chi(k) = \chi_k$. Nos resultados desse capítulo sempre que utilizarmos χ_k estaremos nos referindo a função assim definida.

A proposição a seguir nos dá algumas inclusões entre espaços de modulação que serão de grande utilidade na demonstração dos resultados principais dessa dissertação.

Proposição 2.1. *Seja* $1 \leqslant q, q_1, q_2, \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \leqslant \infty$. *Então, temos as seguintes inclusões contínuas:*

(i) Se $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, *então*

$$M^0_{q,\min\{q,q'\}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Se $q_1 \leqslant q_2$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$ *e* $s_1 \geqslant s_2$, *então*

$$M^{s_1}_{q_1,\sigma_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{s_2}_{q_2,\sigma_2}(\mathbb{R}^n).$$

(iii) Se $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$ *e* $s_1 - s_2 > n(\dfrac{1}{\sigma_2} - \dfrac{1}{\sigma_1})$, *então*

$$M^{s_1}_{q,\sigma_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^{s_2}_{q,\sigma_2}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: *Demonstração de (i)* Seja $f \in M^0_{q,\min\{q,q'\}}$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi_k \mathcal{F}f \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}(\square_k f) \\ &= \mathcal{F}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \square_k f\right). \end{aligned}$$

Logo

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \square_k f \ ,$$

e então

$$\| f \|_q \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \| \square_k f \|_q \ .$$

Agora, segue do Lema 1.2 que, para cada k fixo

$$\begin{aligned} \| \square_k f \|_q &\leqslant C \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \| \square_k(\square_{k+l} f) \|_q \ \chi_{k-l} \\ &\leqslant C \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \| \square_{k+l} f \|_q \ \chi_{k-l}. \end{aligned}$$

Tomando a somatória em $k \in \mathbb{Z}^n$, obtemos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \| \square_k f \|_q \leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \| \square_{k+l} f \|_q \ \chi_{k-l} \right).$$

Aplicando a desigualdade de Holder na última equação, chegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \| \square_k f \|_q &\leqslant C \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \| \square_l f \|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \chi_k \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M^0_{q,\min\{q,q'\}}} , \end{aligned}$$

pois, $l^{\min\{q,q'\}} \subset l^q$ e $\chi_k = 0$ para todo $|k| > 3\sqrt{n}$. Assim,

$$\begin{aligned} \| f \|_q &\leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \| \Box_k f \|_q \\ &\leqslant C \| f \|_{M^0_{q,\min\{q,q'\}}} . \end{aligned}$$

Portanto, $M^0_{q,\min\{q,q'\}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração de (ii) Considere o conjunto

$$\Lambda = \{l \in \mathbb{Z}^n; B(l, \sqrt{n}) \cap B(k, \sqrt{n}) \neq \varnothing\}. \tag{2.3}$$

Temos que

$$\| \Box_k f \|_{q_2} \leqslant \sum_{l \in \Lambda} \| \mathcal{F}^{-1} \varphi_k \mathcal{F}(\Box_{k+l} f) \|_{q_2} .$$

Tome $\Omega = \bigcup_{l \in \Lambda} B(l, \sqrt{n})$. Aplicando os Lemas 1.1 e 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \| \Box_k f \|_{q_2} &\leqslant C \sum_{l \in \Lambda} \| \mathcal{F}^{-1} \varphi_k \mathcal{F}(\Box_{k+l} f) \|_{q_1} \\ &\leqslant C \sum_{l \in \Lambda} \| \Box_{k+l} f \|_{q_1} . \end{aligned}$$

Logo, como $s_1 \geqslant s_2$, podemos estimar

$$\langle k \rangle^{s_2} \| \Box_k f \|_{q_2} \leqslant \langle k \rangle^{s_1} \sum_{l \in \Lambda} \| \Box_{k+l} f \|_{q_1} ,$$

e então

$$\| \langle k \rangle^{s_2} \| \Box_k f \|_{q_2} \|_{l^{\sigma_2}} \leqslant \| \langle k \rangle^{s_1} \sum_{l \in \Lambda} \| \Box_{k+l} f \|_{q_1} \|_{l^{\sigma_2}} .$$

Desde que $l^{\sigma_1} \subset l^{\sigma_2}$, para $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$,

$$\| \langle k \rangle^{s_2} \| \Box_k f \|_{q_2} \|_{l^{\sigma_2}} \leqslant C \| \langle k \rangle^{s_1} \sum_{l \in \Lambda} \| \Box_{k+l} f \|_{q_1} \|_{l^{\sigma_1}} .$$

Ou seja,

$$\| f \|_{M^{s_2}_{q_2,\sigma_2}} \leqslant C \| f \|_{M^{s_1}_{q_1,\sigma_1}} .$$

Demonstração de (iii) Pela desigualdade de Holder, temos que

$$\begin{aligned} \| f \|_{M^{s_2}_{q,\sigma_2}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_2 \sigma_2} \| \Box_k f \|_q^{\sigma_2} \right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\langle k \rangle^{s_1} \| \Box_k f \|_q \langle k \rangle^{s_2 - s_1})^{\sigma_2} \right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \\ &\leqslant \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s_1 \sigma_1} \| \Box_k f \|_q^{\sigma_1} \right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{\frac{(s_2 - s_1)\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}} \right)^{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2}} \\ &= \| f \|_{M^{s_1}_{q,\sigma_1}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{\frac{(s_2 - s_1)\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}} \right)^{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2}} . \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{\frac{(s_2-s_1)\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}} \lesssim \sum_{i=0}^{\infty}\langle i\rangle^{n-1+\frac{(s_2-s_1)\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}},$$

e a série do lado direito é convergente para $s_1 - s_2 > n(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1})$. Assim,

$$\| f \|_{M^{s_2}_{q,\sigma_2}} \leqslant C \| f \|_{M^{s_1}_{q,\sigma_1}} .$$

■

Definição 2.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \sigma, r, q \leqslant \infty$ e $0 < T \leqslant \infty$. Definimos o espaço de funções $l^{s,\sigma}_{\square}(L^r((0,T); L^q(\mathbb{R}^n)))$ como*

$$l^{s,\sigma}_{\square}(L^r((0,T); L^q(\mathbb{R}^n))) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n); \| f \|_{l^{s,\sigma}_{\square}(L^r((0,T);L^q(\mathbb{R}^n)))} < \infty\} ,$$

onde

$$\| f \|_{l^{s,\sigma}_{\square}(L^r((0,T);L^q(\mathbb{R}^n)))} = \begin{cases} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{s\sigma} \| \square_k f \|^{\sigma}_{L^r((0,T);L^q(\mathbb{R}^n))}\right)^{\frac{1}{\sigma}} & , 1 \leqslant \sigma < \infty \\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{s} \| \square_k f \|_{L^r((0,T);L^q(\mathbb{R}^n))} & , \sigma = \infty, \end{cases}$$

onde o operador $\square_k$ é definido por (2.2).

Observação 2.2. *Inclusões contínuas como as apresentadas nos ítens (ii) e (iii) da Proposição 2.1 também valem para os espaços $l^{s,\sigma}_{\square}(L^r((0,T); L^q(\mathbb{R}^n)))$. Isto é, sejam $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $T > 0$ e s_j, q_j e σ_j $(j = 1, 2, 3)$ satisfazendo as mesmas condições da Proposição 2.1, segue que*

$$l^{s_1,\sigma_1}L^{r_1}_T L^{q_1} \hookrightarrow l^{s_2,\sigma_2}L^{r_2}_T L^{q_2}.$$

O resultado a seguir nos mostra o comportamento do produto de funções nos espaços $l^{s,\sigma}_{\square}(L^r((0,T); L^q(\mathbb{R}^n)))$.

Proposição 2.2. *Seja $0 < T \leqslant \infty$ e considere $s \geqslant 0$, $1 \leqslant q, r, \sigma, q_j, r_j, \sigma_j \leqslant \infty$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ satisfazendo*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} , \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} , \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} - 1 = \frac{1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_4} - 1.$$

Então existe $C > 0$, tal que, para cada $f \in l^{s,\sigma_1}L^{r_1}_T L^{q_1} \cap l^{0,\sigma_3}L^{r_3}_T L^{q_3}$ e $g \in l^{0,\sigma_2}L^{r_2}_T L^{q_2} \cap l^{s,\sigma_4}L^{r_4}_T L^{q_4}$, temos que

$$\| fg \|_{l^{s,\sigma}L^r_T L^q} \leqslant C \| f \|_{l^{s,\sigma_1}L^{r_1}_T L^{q_1}} \| g \|_{l^{0,\sigma_2}L^{r_2}_T L^{q_2}} + C \| f \|_{l^{0,\sigma_3}L^{r_3}_T L^{q_3}} \| g \|_{l^{s,\sigma_4}L^{r_4}_T L^{q_4}} \quad (2.4)$$

Demonstração: Utilizando a partição da unidade definida em (2.1), obtemos

$$\square_k fg = \sum_{j,l\in\mathbb{Z}^n} \square_k(\square_j f)(\square_l g)\chi_{k-j-l}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\| fg \|_{l^{s,\sigma}L_T^r L^q} &\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{j,l\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^s \| \Box_j f \Box_l g \|_{L_T^r L^q}\ \chi_{k-j-l}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\
&\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{j,l\in\mathbb{Z}^n}(1+|k-j-l|)^s \| \Box_j f \Box_l g \|_{L_T^r L^q}\ \chi_{k-j-l}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\
&+ C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{j,l\in\mathbb{Z}^n}|j|^s \| \Box_j f \Box_l g \|_{L_T^r L^q}\ \chi_{k-j-l}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\
&+ C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{j,l\in\mathbb{Z}^n}|l|^s \| \Box_j f \Box_l g \|_{L_T^r L^q}\ \chi_{k-j-l}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\
&:= C(I+II+III).
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que

$$I \leqslant C \| f \|_{l^{s,\sigma_1}L_T^{r_1}L^{q_1}} \| g \|_{l^{0,\sigma_2}L_T^{r_2}L^{q_2}}$$

$$II \leqslant C \| f \|_{l^{s,\sigma_1}L_T^{r_1}L^{q_1}} \| g \|_{l^{0,\sigma_2}L_T^{r_2}L^{q_2}}$$

$$III \leqslant C \| f \|_{l^{0,\sigma_3}L_T^{r_3}L^{q_3}} \| g \|_{l^{s,\sigma_4}L_T^{r_4}L^{q_4}}$$

Passo 1: Provemos a estimativa I. Aplicando a desigualdade de Holder para os índices r, r_1, r_2 e q, q_1, q_2 obtemos:

$$\begin{aligned}
I &\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{j,l\in\mathbb{Z}^n}(1+|k-j-l|)^s \| \Box_j f \Box_l g \|_{L_T^r L^q}\ \chi_{k-j-l}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\
&\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\| \Box_{k-\mu} f \|_{L_T^{r_1}L^{q_1}} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}(1+|\mu-l|)^s \| \Box_l g \|_{L_T^{r_2}L^{q_2}}\ \chi_{\mu-l}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Young (veja p. 7) duas vezes para os índices $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ e para $\sigma_2, 1$, e utilizando a Proposição 2.1, podemos estimar o lado direito de (2.5) por

$$\begin{aligned}
&C\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\| \Box_\mu f \|^{\sigma_1}_{L_T^{r_1}L^{q_1}}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}\left[\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\| \Box_l g \|_{L_T^{r_2}L^{q_2}}\right)((1+|\mu-l|)^s\chi_{\mu-l})\right]^{\sigma_2}\right)^{\frac{1}{\sigma_2}}\\
&\leqslant C \| f \|_{l^{0,\sigma_1}L_T^{r_1}L^{q_1}} \| g \|_{l^{0,\sigma_2}L_T^{r_2}L^{q_2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|)^s\chi_k\right)\\
&\leqslant C \| f \|_{l^{s,\sigma_1}L_T^{r_1}L^{q_1}} \| g \|_{l^{0,\sigma_2}L_T^{r_2}L^{q_2}}\ .
\end{aligned}$$

Passo 2: Provemos a estimativa II. Aplicando Holder como no passo 1, obtemos

$$II \leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n}(1+|k-\mu|)^s \| \Box_{k-\mu} f \|_{L_T^{r_1}L^{q_1}} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\| \Box_l g \|_{L_T^{r_2}L^{q_2}}\ \chi_{\mu-l}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}. \qquad (2.6)$$

Novamente, aplicando a desigualdade de Young duas vezes, estimamos o termo a direita na desigualdade (2.6) por

$$\begin{aligned} & C \quad \left(\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} (1+|\mu|)^s \parallel \square_\mu f \parallel^{\sigma_1}_{L_T^{r_1} L^{q_1}} \right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \parallel \square_l g \parallel^{\sigma_2}_{L_T^{r_2} L^{q_2}} \right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi_k \right) \\ \leqslant & \quad C \parallel f \parallel_{l^{s,\sigma_1} L_T^{r_1} L^{q_1}} \parallel g \parallel_{l^{0,\sigma_2} L_T^{r_2} L^{q_2}} . \end{aligned}$$

Passo 3: Finalmente, mostremos a estimativa de III. Aplicando Holder para r, r_3, r_4 e q, q_3, q_4, obtemos

$$III \leqslant C \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \parallel \square_{k-\mu} f \parallel_{L_T^{r_3} L^{q_3}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (1+|l|)^s \parallel \square_l g \parallel_{L_T^{r_4} L^{q_4}} \chi_{\mu - l} \right)^{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma}} .$$

Agora, novamente aplicando a desigualdade de Young duas vezes para os índices $\sigma, \sigma_3, \sigma_4$ e $\sigma_4, 1$, leva-nos a

$$\begin{aligned} & C \quad \left(\sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n} \parallel \square_\mu f \parallel^{\sigma_3}_{L_T^{r_3} L^{q_3}} \right)^{\frac{1}{\sigma_3}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} (1+|l|)^s \parallel \square_l g \parallel^{\sigma_4}_{L_T^{r_4} L^{q_4}} \right)^{\frac{1}{\sigma_4}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \chi_k \right) \\ \leqslant & \quad C \parallel f \parallel_{l^{0,\sigma_3} L_T^{r_3} L^{q_3}} \parallel g \parallel_{l^{s,\sigma_4} L_T^{r_4} L^{q_4}} . \end{aligned}$$

Unindo as estimativas provadas nos passos 1 a 3, concluímos o resultado.

■

Observação 2.3. *Em espaços de modulação, vale uma propriedade análoga a demonstrada na proposição acima. Isto é, se q, q_j, σ, σ_j satisfazem as condições da proposição, então vale*

$$\parallel fg \parallel_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant C \parallel f \parallel_{M^s_{q_1,\sigma_1}} \parallel g \parallel_{M^0_{q_2,\sigma_2}} + C \parallel f \parallel_{M^0_{q_3,\sigma_3}} \parallel g \parallel_{M^s_{q_4,\sigma_1}} . \tag{2.7}$$

O lema a seguir contém uma estimativa para convolução em espaços de Lebesgue, que nos será útil para verificar o comportamento do produto de funções nos espaços de modulação com índice de derivação negativo.

Lema 2.1. *Sejam $1 < \sigma, \sigma_1, \sigma_2 < \infty$, $0 \leqslant \alpha < \dfrac{n}{\sigma}$ e $0 \leqslant \beta < n(1 + \dfrac{1}{\sigma} - \dfrac{1}{\sigma_2}) - \alpha$ satisfazendo*

$$\frac{1}{\sigma} - \frac{(\alpha+\beta)}{n} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} - 1 \ e \ \sigma \geqslant \sigma_1.$$

Então, existe $C > 0$ tal que, para toda $f \in L^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\parallel |x|^{-\alpha} ((| \cdot |^{-\beta} f) \star g) \parallel_{L^{\sigma}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \parallel f \parallel_{L^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)} \parallel g \parallel_{L^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)} .$$

Observação 2.4. *(i) A demonstração do Lema 2.1 será feita no apêndice A dessa dissertação.*

(ii) Um resultado similar ao Lema 2.1 pode ser provado para espaços de sequência de maneira análoga ao provado para espaços de Lebesgue. Ou seja, para toda $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \in l^{\sigma_1}(\mathbb{Z}^n)$ e $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \in l^{\sigma_2}(\mathbb{Z}^n)$, temos que

$$\left\| \left\{ \langle k\rangle^{-\alpha} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \frac{a_{k-m}}{\langle k-m\rangle^{\beta}} b_m \right\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \right\|_{l^{\sigma}(\mathbb{Z}^n)} \leqslant C \parallel \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \parallel_{l^{\sigma_1}(\mathbb{Z}^n)} \parallel \{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \parallel_{l^{\sigma_2}(\mathbb{Z}^n)} . \tag{2.8}$$

onde $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \alpha, \beta$ são os mesmos do Lema 2.1. Podemos obter a mesma estimativa com a condição $\sigma \geqslant \sigma_2$ ao ínves de $\sigma \geqslant \sigma_1$.

Agora vamos introduzir uma proposição que é necessária para os caso críticos dos teoremas que serão provados no capítulo 3.

Proposição 2.3. *Seja $0 < T \leqslant \infty$ e considere $1 \leqslant q, q_1, q_2, r, r_1, r_2 \leqslant \infty$, $1 < \sigma, \sigma_1, \sigma_2 < \infty$ e $0 < s < \dfrac{n}{\sigma}$.*

(i) Se

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}\ ,\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\ ,\ \sigma \geqslant \sigma_1 \ \text{e}\ \frac{1}{\sigma} - \frac{s}{n} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} - 1, \tag{2.9}$$

então, existe $C > 0$ tal que para toda $u \in M^0_{q_1,\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in M^0_{q_2,\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\parallel uv \parallel_{M^{-s}_{q,\sigma}} \leqslant C \parallel u \parallel_{M^0_{q_1,\sigma_1}} \parallel v \parallel_{M^0_{q_2,\sigma_2}} . \tag{2.10}$$

Temos também, para toda $u \in l^{0,\sigma_1}L^{r_1}_T L^{q_1}$ e $v \in l^{0,\sigma_2}L^{r_2}_T L^{q_2}$, que

$$\parallel uv \parallel_{l^{-s,\sigma}L^{r}_T L^{q}} \leqslant C \parallel u \parallel_{l^{0,\sigma_1}L^{r_1}_T L^{q_1}} \parallel v \parallel_{l^{0,\sigma_2}L^{r_2}_T L^{q_2}} . \tag{2.11}$$

(ii) Se além das condições de (i), assumirmos também $\sigma \geqslant \sigma_2$, então existe $C > 0$, tal que

$$\parallel uv \parallel_{M^{s}_{q,\sigma}} \leqslant C \parallel u \parallel_{M^s_{q_1,\sigma_1}} \parallel v \parallel_{M^s_{q_2,\sigma_2}} \ ,\ \forall u \in M^s_{q_1,\sigma_1} \ \text{e}\ v \in M^s_{q_2,\sigma_2}. \tag{2.12}$$

Para toda $u \in l^{s,\sigma_1}L^{r_1}_T L^{q_1}$ e $v \in l^{s,\sigma_2}L^{r_2}_T L^{q_2}$, temos também

$$\parallel uv \parallel_{l^{s,\sigma}L^{r}_T L^{q}} \leqslant C \parallel u \parallel_{l^{s,\sigma_1}L^{r_1}_T L^{q_1}} \parallel v \parallel_{l^{s,\sigma_2}L^{r_2}_T L^{q_2}} . \tag{2.13}$$

Demonstração: *Demonstração de (i)* Podemos escrever

$$uv = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} \Box_i u \Box_j v.$$

Note ainda que $\mathcal{F}(\Box_i u \Box_j v) = (\varphi_i \mathcal{F}u \star \varphi_j \mathcal{F}v)$ e $supp(\varphi_i \mathcal{F}u \star \varphi_j \mathcal{F}v) \subset \{\xi / |\xi - i - j| \leqslant 2\sqrt{n}\}$. Assim,

$$\parallel \Box_k uv \parallel_q = \parallel \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} \Box_k(\Box_i u \Box_j v) \parallel_q \leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} \parallel \mathcal{F}^{-1}\varphi_k(\varphi_i \mathcal{F}u \star \varphi_j \mathcal{F}v) \parallel_q \chi_{k-i-j}.$$

Aplicando o lema 1.2, existe $C > 0$, tal que

$$\| \mathcal{F}^{-1}\varphi_k(\varphi_i\mathcal{F}u \star \varphi_j\mathcal{F}v) \|_q \leqslant C(\sup_{l\in\mathbb{Z}^n} \| \varphi_l \|_{H^s}) \| \Box_i u \Box_j v \|_q \leqslant C \| \Box_i u \Box_j v \|_q .$$

Logo,

$$\| \Box_k uv \|_q \leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_i u \Box_j v \|_q \, \chi_{k-j-i} \leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_i u \|_{q_1} \sum_{|j|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-i-j} v \|_{q_2} .$$

Assim,

$$\| uv \|_{M^{-s}_{q\sigma}} \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\langle k \rangle^{-s} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_{k_1} u \|_{q_1} \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{q_2} \right)^{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma}} . \tag{2.14}$$

Agora, considere

$$\alpha = s \ , \ \beta = 0 \ , \ a_k = \| \Box_k u \|_{q_1} \ \ , \ b_k = \| \Box_{k-k_2} v \|_{q_2} \ .$$

Aplicando (2.8), para $m = k - k_1$, temos que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\langle k \rangle^{-s} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_{k_1} u \|_{q_1} \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{q_2} \right)^{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ \leqslant \ & C \left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_{k_1} u \|_{q_1}^{\sigma_1} \right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_2} v \|_{q_2} \right)^{\sigma_2} \right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \\ \leqslant \ & C \| u \|_{M^0_{q_1,\sigma_1}} \| v \|_{M^0_{q_2,\sigma_2}} \end{aligned}$$

Logo, por (2.14), obtemos

$$\| uv \|_{M^{-s}_{q\sigma}} \leqslant C \| u \|_{M^0_{q_1,\sigma_1}} \| v \|_{M^0_{q_2,\sigma_2}} .$$

Para provar (2.11), de maneira análoga ao feito acima, chegamos na desigualdade

$$\| uv \|_{l^{-s,\sigma} L^r_T L^q} \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(\langle k \rangle^{-s} \sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_{k_1} u \|_{L^{r_1}_T L^{q_1}} \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{L^{r_2}_T L^{q_2}} \right)^{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma}} .$$

Daí tomamos

$$\alpha = s \ , \ \beta = 0 \ , \ a_k = \| \Box_{k_1} u \|_{L^{r_1}_T L^{q_1}} \ \ , \ b_k = \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{L^{r_2}_T L^{q_2}} \ ,$$

e aplicamos novamente (2.8) para obter a desigualdade desejada.

Demonstração de (ii) Provaremos (2.12), desde que (2.13) segue de maneira análoga. Temos que

$$\begin{aligned}
\| uv \|_{M^s_{q,\sigma}} &\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\langle k\rangle^s \sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_{k_1} u \|_{q_1} \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{q_2}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&\leqslant C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \langle k_1\rangle^s \| \Box_{k_1} u \|_{q_1} \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{q_2}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&+ C\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_{k_1} u \|_{q_1} \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k-k_1-k_2\rangle^s \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{q_2}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&:= C(I + II),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

pois $\langle k\rangle^s \leqslant C\langle k_1\rangle^s + \langle k-k_1-k_2\rangle^s$. Tomando,

$$\alpha = 0 \ , \ \beta = s \ , \ a_k = \langle k\rangle^s \| \Box_{k-k_2} v \|_{q_2} \ \ , \ b_k = \langle k\rangle^s \| \Box_k u \|_{q_1} \ ,$$

e aplicando (2.8), como $\sigma \geqslant \sigma_1$ e $\sigma \geqslant \sigma_2$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
I &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \langle k_1\rangle^s \| \Box_{k_1} u \|_{q_1} \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \frac{\langle k-k_1-k_2\rangle^s}{\langle k-k_1-k_2\rangle^s} \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{q_2}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&\leqslant C\left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \langle k_1\rangle^{s\sigma_1} \| \Box_{k_1} u \|_{q_1}^{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s\sigma_2}\left(\sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_2} v \|_{q_2}\right)^{\sigma_2}\right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \\
&\leqslant C \| u \|_{M^s_{q_1,\sigma_1}} \| v \|_{M^s_{q_2,\sigma_2}} \ .
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
II &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \frac{\langle k_1\rangle^s}{\langle k_1\rangle^s} \| \Box_{k_1} u \|_{q_1} \sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k-k_1-k_2\rangle^s \| \Box_{k-k_1-k_2} v \|_{q_2}\right)^{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&\leqslant C\left(\sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} \langle k_1\rangle^{s\sigma_1} \| \Box_{k_1} u \|_{q_1}^{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{s\sigma_2}\left(\sum_{|k_2|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_{k-k_2} v \|_{q_2}\right)^{\sigma_2}\right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \\
&\leqslant C \| u \|_{M^s_{q_1,\sigma_1}} \| v \|_{M^s_{q_2,\sigma_2}} \ .
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas acima em (2.15), obtemos o resultado.

■

Corolário 2.1. *(i) Seja* $0 < T \leqslant \infty$ *e considere* $1 \leqslant q, r \leqslant \infty$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \nu, \sigma < \infty$ *e* $0 \leqslant \alpha < \dfrac{n}{\nu}$, *satisfazendo*

$$\frac{1}{\nu} - \frac{\alpha}{n} \leqslant \frac{p}{\sigma} - (p-1) \ , \ 1 \leqslant \sigma \leqslant \nu.$$

Então, existe $C > 0$ tal que, para toda $u \in M^0_{pq,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\| u^p \|_{M^{-\alpha}_{q,\nu}} \leqslant C \| u \|^p_{M^0_{pq,\sigma}} . \tag{2.16}$$

Para toda $u \in l^{0,\sigma} L^{pr}_T L^{pq}$, temos também que

$$\| u^p \|_{l^{-\alpha,\nu} L^r_T L^q} \leqslant C \| u \|^p_{l^{0,\sigma} L^{pr}_T L^{pq}} . \tag{2.17}$$

(ii) Sejam q, r, p, ν, α, T da mesma forma que em (i), e $1 \leqslant \mu < \infty$ satisfazendo

$$\frac{1}{\nu} - \frac{(p-1)\alpha}{n} \leqslant \frac{p}{\mu} - (p-1) \text{ e } 1 \leqslant \mu \leqslant \nu.$$

Então, existe $C > 0$ tal que, para toda $u \in M^\alpha_{pq,\mu}(\mathbb{R}^n)$, vale a estimativa

$$\| u^p \|_{M^\alpha_{q,\nu}} \leqslant C \| u \|^p_{M^\alpha_{pq,\mu}} . \tag{2.18}$$

Temos também que

$$\| u^p \|_{l^{\alpha,\nu} L^r_T L^q} \leqslant C \| u \|^p_{l^{\alpha,\mu} L^{pr}_T L^{pq}} \ , \forall u \in l^{\alpha,\mu} L^{pr}_T L^{pq}. \tag{2.19}$$

2.2 Propriedades do operador $e^{t\triangle}$

Nesta seção vamos provar algumas estimativas do operador $e^{t\triangle}$ nos espaços $M^s_{q,\sigma}$ e $l^{s,\sigma} L^r_T L^q$. Primeiramente, vamos definir formalmente o operador $e^{t\triangle}$.

Definição 2.3. *Seja $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$G(x) = \frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{4}}.$$

Agora, para cada $\varepsilon > 0$ considere a função $G_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} G(\frac{x}{\varepsilon})$. Definimos o operador $e^{t\triangle}$ por

$$e^{t\triangle}(f) = G_{\sqrt{t}} \star f \ , \forall f \in \mathcal{S}'.$$

Observação 2.5. *(i) Podemos representar o operador $e^{t\triangle}$ como $\mathcal{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}$.*

(ii) O operador $e^{t\triangle}$ comuta com o operador $\square_k$. De fato, seja $f \in \mathcal{S}'$. Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{t\triangle} \square_k f) &= e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}(\square_k f) \\ &= e^{-t|\xi|^2} \varphi_k \mathcal{F} f \\ &= \varphi_k e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F} f \\ &= \varphi_k \mathcal{F}(e^{t\triangle} f) \\ &= \mathcal{F}(\square_k e^{t\triangle} f). \end{aligned}$$

Portanto, $e^{t\triangle} \square_k = \square_k e^{t\triangle}$.

(iii) Seja $1 \leqslant r \leqslant p \leqslant \infty$. Então:

$$\| \nabla^k e^{t\triangle} f \|_p \leqslant t^{\frac{-k}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})} \| f \|_r \quad , \forall f \in L^r.$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [26], p. 35. Note que, se $k = 0$ e $r = p$ obtemos a limitação do operador $e^{t\triangle}$ nos espaços de Lebesgue.

O lema a seguir nos dá uma estimativa para o operador $\Box_k e^{t\triangle}$ nos espaços de Lesbesgue L^p que será utilizada para mostrar várias estimativas de $e^{t\triangle}$ nos espaços de modulação e nos espaços $l^{s,\sigma} L^r_T L^q$.

Lema 2.2. *Seja $1 \leqslant q \leqslant \infty$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo*

$$\| \Box_k f \|_q < \infty \ , \ \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

Então, existem $C, c > 0$ dependendo somente de n, tais que, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$ com $|k| \geqslant 3\sqrt{n}$ e $r \leqslant q$, temos a estimativa

$$\| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q \leqslant C e^{-ct|k|^2} \| \Box_k f \|_r \ .$$

Demonstração: Seja $\psi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} 0 \leqslant \psi_0 \leqslant 1, & \forall \xi \in \mathbb{R}^n \\ \psi_0 = 1, & \text{para } |\xi| \leqslant \sqrt{n} \\ \psi_0 = 0, & \text{para } |\xi| \geqslant 2\sqrt{n}, \end{cases}$$

e defina

$$\psi_k(\xi) = \psi_0(\xi - k) \ , \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } k \in \mathbb{Z}^n.$$

Então, $\varphi_k = \psi_k \varphi_k$ e assim obtemos

$$e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} \varphi_k \mathcal{F} f) = e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} \psi_k \varphi_k \mathcal{F} f) = (e^{-t|\xi|^2} \psi_k)(\varphi_k \mathcal{F} f).$$

Aplicando $\mathcal{F}^{-1}$ em ambos os lados da equação acima, segue que

$$e^{t\triangle}(\Box_k f) = (\mathcal{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \psi_k) \star (\Box_k f),$$

e então

$$\Box_k e^{t\triangle} f = (\mathcal{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \psi_k) \star (\Box_k f).$$

Pelo Lema 1.2, para $s > \dfrac{n}{2}$, temos que

$$\| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q \leqslant C \| \psi_k e^{-t|\xi|^2} \|_{H^s} \| \Box_k f \|_r \ . \tag{2.20}$$

Como o suporte de ψ_k está próximo a $k \in \mathbb{Z}^n$ e distante da origem, existem $C, c > 0$ tais que

$$\| \psi_k e^{-t|\xi|^2} \|_{H^s} \leqslant C e^{-ct|k|^2},$$

o que, junto com (2.20) nos dá a estimativa desejada.

■

As próximas proposições nos darão estimativas do operador $e^{t\triangle}$ nos espaços de modulação e nos espaços $l^{s,\sigma}L_T^rL^q$, as quais serão cruciáis na demonstração dos teoremas principais que serão provados no capítulo 3.

Proposição 2.4. *Sejam $1 \leqslant q, r, \sigma, \nu \leqslant \infty$ e $s, \overline{s} \in \mathbb{R}$.*

(i) Se $q \geqslant r$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| e^{t\triangle} f \|_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \| f \|_{M^s_{r,\sigma}} \quad , \forall f \in M^s_{r,\sigma}. \tag{2.21}$$

(ii) Se $\sigma \leqslant \nu$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| e^{t\triangle} f \|_{M^0_{q,\sigma}} \leqslant C(1+t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})}) \| f \|_{M^0_{q,\nu}} \quad , \forall f \in M^0_{q,\nu}. \tag{2.22}$$

(iii) Se $s \leqslant \overline{s}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\| e^{t\triangle} f \|_{M^{\overline{s}}_{q,\sigma}} \leqslant C(1+t^{-\frac{\overline{s}-s}{2}}) \| f \|_{M^s_{q,\sigma}} \quad , \forall f \in M^s_{q,\sigma}. \tag{2.23}$$

Demonstração:

Demonstração de (i) Primeiramente, note que o operador $e^{t\triangle}$ é um operador limitado de $L^r(\mathbb{R}^n)$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, vale a seguinte estimativa

$$\| \square_k e^{t\triangle} f \|_q \leqslant Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \| f \|_r \quad , \forall k \in \mathbb{Z}^n. \tag{2.24}$$

Vamos analisar duas situações. Se $|k| \leqslant 3\sqrt{n}$, pela limitação do operador $e^{t\triangle}$ nos espaços de Lebesque (ver Observação 2.5), temos que

$$\| \square_k e^{t\triangle} f \|_q = \| e^{t\triangle} \square_k f \|_q \leqslant C \| \square_k f \|_q \ .$$

Agora se $|k| > 3\sqrt{n}$, da estimativa (2.24), obtemos

$$\| \square_k e^{t\triangle} f \|_q \leqslant Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \| f \|_r \ .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\| e^{t\triangle} f \|^\sigma_{M^s_{q,\sigma}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \square_k e^{t\triangle} f \|^\sigma_q \\
&= \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \square_k e^{t\triangle} f \|^\sigma_q + \sum_{|k|>3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \square_k e^{t\triangle} f \|^\sigma_q \\
&\leqslant C \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \square_k f \|^\sigma_r + Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \sum_{|k|>3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \square_k f \|^\sigma_r \\
&\leqslant C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \| f \|^\sigma_{M^s_{r,\sigma}} \ .
\end{aligned}$$

Demonstração de (ii) Note que

$$\begin{aligned} \| e^{t\triangle} f \|_{M^0_{q,\sigma}}^{\sigma} &= \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q^{\sigma} + \sum_{|k|> 3\sqrt{n}} \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q^{\sigma} \\ &:= I + II. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Vamos provar as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} I &\leqslant C \| f \|_{M^0_{q,nu}}^{\sigma} \\ II &\leqslant C \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})\sigma} \| f \|_{M^0_{q,\nu}}^{\sigma} \end{aligned}$$

Primeiramente, tome $\overline{\nu}$ satisfazendo

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\overline{\nu}} + \frac{1}{\nu} - 1.$$

Passo 1: Neste passo, mostramos a estimativa para I. Pela limitação de $e^{t\triangle}$ nos espaços de Lebesgue e aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned} I &\leqslant C \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_k f \|_q^{\sigma} \\ &\leqslant C \left(\sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \Box_k f \|_q^{\nu} \right)^{\frac{\sigma}{\nu}} \left(\sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} 1 \right)^{\frac{\sigma}{\overline{\nu}}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M^0_{q,\nu}}^{\sigma} . \end{aligned}$$

Passo 2: Mostremos agora a estimativa de II. Aplicando o Lema 2.2 e a desigualdade de Young, podemos estimar

$$\begin{aligned} II &\leqslant C \sum_{|k|> 3\sqrt{n}} (e^{-ct|k|^2} \| \Box_k f \|_q)^{\sigma} \\ &\leqslant C \left(\sum_{|k|> 3\sqrt{n}} \| \Box_k f \|_q^{\nu} \right)^{\frac{\sigma}{\nu}} \left(\sum_{|k|> 3\sqrt{n}} e^{-ct\overline{\nu}|k|^2} \right)^{\frac{\sigma}{\overline{\nu}}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M^0_{q,\nu}}^{\sigma} \left(\sum_{|k|> 3\sqrt{n}} e^{-ct\overline{\nu}|k|^2} \right)^{\frac{\sigma}{\overline{\nu}}} . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Agora, note que existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} e^{-ct\overline{\nu}|k|^2} \right)^{\frac{\sigma}{\overline{\nu}}} < C \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})\sigma} .$$

Daí, substituindo a desigualdade acima em (2.26), obtemos

$$II \leqslant C \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})\sigma} \| f \|_{M^0_{q,\nu}}^{\sigma} .$$

Finalmente, substituindo as estimativas para I e II em (2.25), obtemos a estimativa desejada.

Demonstração de (iii) Por simplicidade, vamos considerar $\overline{s} = 0$ e $s \leqslant 0$. Os outros casos seguem da Proposição 2.1.

Na parte de frequência baixa da norma, ou seja, $|k| \leqslant 3\sqrt{n}$, usando a limitação de $e^{t\triangle}$ em $L^q(\mathbb{R}^n)$ (ver Observação 2.5), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q^\sigma &= \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| e^{t\triangle} \Box_k f \|_q^\sigma \\ &\leqslant C \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_k f \|_q^\sigma . \end{aligned} \tag{2.27}$$

Mas,

$$|k| \leqslant 3\sqrt{n} \Rightarrow 1 + |k|^2 \leqslant 1 + 9n \Rightarrow \langle k \rangle \leqslant \sqrt{1+9n} \Rightarrow C\langle k \rangle^{s\sigma} \geqslant 1,$$

para algum $C > 0$. Logo,

$$C\langle k \rangle^{s\sigma} \| \Box_k f \|_q^\sigma \geqslant \| \Box_k f \|_q^\sigma .$$

Substituindo em (2.27), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q^\sigma &\leqslant C \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \Box_k f \|_q^\sigma \\ &\leqslant C \| f \|_{M^s_{q,\sigma}}^\sigma . \end{aligned}$$

Na parte de alta frequência da norma, isto é, $|k| \geqslant 3\sqrt{n}$, como $s \leqslant 0$ então

$$(1 + |k|)^{|s|} \langle k \rangle^s \geqslant 1.$$

e daí, aplicando o Lema 2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q &\leqslant C e^{-ct|k|^2} \| \Box_k f \|_q \\ &\leqslant C(1+|k|)^{|s|} e^{-ct|k|^2} \langle k \rangle^s \| \Box_k f \|_q \\ &\leqslant C t^{\frac{-|s|}{2}} \langle k \rangle^s \| \Box_k f \|_q . \end{aligned}$$

Então, somando em k, chegamos a

$$\begin{aligned} \sum_{|k|>3\sqrt{n}} \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q^\sigma &\leqslant C t^{\frac{-|s|}{2}\sigma} \sum_{|k|>3\sqrt{n}} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \Box_k f \|_q^\sigma \\ &\leqslant C t^{\frac{-|s|}{2}\sigma} \| f \|_{M^s_{q,\sigma}}^\sigma . \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q^\sigma \leqslant C(1 + t^{\frac{-|s|}{2}})^\sigma \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{s\sigma} \| \Box_k f \|_q^\sigma ,$$

e então

$$\| e^{t\triangle} f \|_{M^0_{q,\sigma}} \leqslant C(1 + t^{\frac{-|s|}{2}}) \| f \|_{M^s_{q,\sigma}} .$$

■

Proposição 2.5. *Sejam $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \nu, \sigma < \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Se $\nu < \sigma$, então*

$$\lim_{T \searrow 0} \sup_{t \in (0,T)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \parallel e^{t\triangle} f \parallel_{M^s_{q,\nu}} = 0 \ , \ \forall f \in M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Seja $f \in M^s_{q,\sigma}$. Vamos dividir a demonstração em dois passos.

Passo 1: Primeiramente, vamos introduzir uma aproximação para a função f. Dado $R > 0$, definimos f_R por

$$f_R = \sum_{|k| \leqslant R} \square_k f.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \parallel \square_l (f - f_R) \parallel_q^\sigma &= \parallel \square_l \sum_{|k| \ > R} \square_k f \parallel_q^\sigma \\ &\leqslant C \sum_{|l+k| > R, k \in \Lambda} \parallel \square_{l+k} f \parallel_q^\sigma, \end{aligned}$$

e então

$$\langle l \rangle^{s\sigma} \parallel \square_l (f - f_R) \parallel_q^\sigma \leqslant C \langle l \rangle^{s\sigma} \sum_{|l+k| > R, k \in \Lambda} \parallel \square_{l+k} f \parallel_q^\sigma \ ,$$

onde Λ é o conjunto definido em (2.3). Assim,

$$\parallel f - f_R \parallel_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant C \left(\sum_{|\mu| > R, k \in \Lambda} \langle \mu - k \rangle^{s\sigma} \parallel \square_\mu f \parallel_q^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{2.28}$$

Como $f \in M^s_{q,\sigma}$ e $\sigma < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\left(\sum_{|l| > R} \langle l \rangle^{s\sigma} \parallel \square_l f \parallel_q^\sigma \right)^{\frac{1}{\sigma}} < \varepsilon.$$

Então, de (2.28), obtemos

$$\parallel f - f_R \parallel_{M^s_{q,\sigma}} < \varepsilon.$$

Passo 2: Neste passo, obteremos o resultado desejado a partir da aproximação obtida no Passo 1. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pelo Passo 1, sabemos que existe $R > 0$ tal que

$$\parallel f - f_R \parallel_{M^s_{q,\sigma}} < \varepsilon$$

Assim, aplicando a desigualdade triângular, (2.22) e a limitação do operador $e^{t\triangle}$ nos espaços de Lebesgue, obtemos

$$\begin{aligned} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \parallel e^{t\triangle} f \parallel_{M^s_{q,\nu}} &\leqslant t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \parallel e^{t\triangle}(f - f_R) \parallel_{M^s_{q,\nu}} + t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \parallel e^{t\triangle} f_R \parallel_{M^s_{q,\nu}} \\ &\leqslant C[t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}(1 + t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}) \parallel f - f_R \parallel_{M^s_{q,\sigma}} + t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \parallel e^{t\triangle} f_R \parallel_{M^s_{q,\nu}}] \\ &\leqslant C(1 + t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})})\varepsilon + C t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \parallel f_R \parallel_{M^s_{q,\nu}} . \end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}f_R$ tem suporte na bola de centro na origem e raio $R+\sqrt{n}$, então $f_R \in M^s_{q,\rho}$ para todo $1 \leqslant \rho < \infty$, e então $\| f_R \|_{M^s_{q,\nu}} < \infty$.

Agora, substituindo a estimativa obtida acima no limite que desejamos calcular, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{T\searrow 0} \sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \| e^{t\triangle} f \|_{M^s_{q,\nu}} &\leqslant \lim_{T\searrow 0} \sup_{t\in(0,T)} C(1+t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})})\varepsilon + Ct^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \| f_R \|_{M^s_{q,\nu}} \\ &= C\varepsilon.\end{aligned}$$

Como ε é arbitrário, concluímos o resultado.

■

Proposição 2.6. *Sejam* $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \sigma < \infty$ *e* $0 < \alpha \leqslant 1$. *Então*

(i) $\| e^{t\triangle} f \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \leqslant C(1+T^{\frac{\alpha}{2}}) \| f \|_{M^{-\alpha}_{q,\sigma}}$, $\forall f \in M^{-\alpha}_{q,\sigma}$.

(ii) $\lim_{T\searrow 0} \| e^{t\triangle} f \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} = 0$, $\forall f \in M^{-\alpha}_{q,\sigma}$.

Demonstração:

Demonstração de (i) Vamos analisar separadamente as partes de alta e baixa frequência da norma. Se $|k| \leqslant 3\sqrt{n}$, segue da limitação do operador $e^{t\triangle}$ que

$$\begin{aligned}\| \Box_k e^{t\triangle} f \|_{L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} &= \left(\int_0^T \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leqslant C \| \Box_k f \|_q T^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leqslant C\langle k\rangle^{-\alpha} \| \Box_k f \|_q T^{\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Se $|k| > 3\sqrt{n}$, do lema 2.2, temos que

$$\begin{aligned}\| \Box_k e^{t\triangle} f \|_{L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} &= \left(\int_0^T \| \Box_k e^{t\triangle} f \|_q^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leqslant \left(\int_0^T (e^{-ct|k|^2} \| \Box_k f \|_q)^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leqslant C \| \Box_k f \|_q \left(\int_0^T (e^{-ct|k|^2})^{\frac{2}{\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{C}{|k|^2} \| \Box_k f \|_q .\end{aligned}$$

Mas como $\alpha < 2$, então $|k|^{-2} \leqslant |k|^{-\alpha}$. Assim

$$\| \Box_k e^{t\triangle} f \|_{L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \leqslant C|k|^{-\alpha} \| \Box_k f \|_q . \tag{2.30}$$

De (2.29) e (2.30), obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_k e^{t\triangle} f \|^{\sigma}_{L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} &\leqslant CT^{\frac{\alpha\sigma}{2}} \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k\rangle^{-\alpha\sigma} \| \Box_k f \|_q^{\sigma} + \sum_{|k|>3\sqrt{n}} C|k|^{-\alpha\sigma} \| \Box_k f \|_q^{\sigma} \\ &\leqslant CT^{\frac{\alpha}{2}} \| f \|^{\sigma}_{M^{-\alpha}_{q,\sigma}} + C \| f \|^{\sigma}_{M^{-\alpha}_{q,\sigma}} ,\end{aligned}$$

e então
$$\| e^{t\triangle} f \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \leqslant C(1+T^{\frac{\alpha}{2}}) \| f \|_{M_{q,\sigma}^{-\alpha}} .$$

Demonstração de (ii) Considere a seguinte aproximação de f
$$f_R = \sum_{|k|\leqslant R} \square_k f \text{ com } R>0.$$
Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pelo o que foi feito no Passo 1 da Proposição 2.5, sabemos que existe $R > \sup\{1, 3\sqrt{n}\}$ tal que
$$\| f - f_R \|_{M_{q,\sigma}^{-\alpha}} < \varepsilon.$$
Pela desigualdade triangular, temos que
$$\begin{aligned} \| e^{t\triangle} f \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} &\leqslant \| e^{t\triangle} f_R \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} + \| e^{t\triangle}(f - f_R) \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \\ &:= I + II. \end{aligned} \tag{2.31}$$
Analisemos o termo I. Pela limitação de $e^{t\triangle}$ nos espaços de Lebesgue (ver Observação 2.5), segue que
$$\begin{aligned} \| \square_k e^{t\triangle} f_R \|_{L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} &= \left(\int_0^T \| \square_k e^{t\triangle} f \|_q^{\frac{2}{\alpha}} \, dt \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leqslant CT^{\frac{\alpha}{2}} \| \square_k f \|_q . \end{aligned}$$
Então,
$$\| e^{t\triangle} f_R \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \leqslant CT^{\frac{\alpha}{2}} \| f_R \|_{M_{q,\sigma}^0} .$$
Agora, observe que
$$\begin{aligned} \| f_R \|_{M_{q,\sigma}^0}^{\sigma} &\leqslant \sum_{|k|\leqslant R} \left(\sum_{l\in\Lambda} \| \square_{k+l} f_R \|_q^{\sigma} \right) \\ &\leqslant CR^{\alpha\sigma} \sum_{|k|\leqslant R} \langle k \rangle^{-\alpha\sigma} \left(\sum_{l\in\Lambda} \| \square_{k+l} f_R \|_q^{\sigma} \right) \\ &\leqslant CR^{\alpha\sigma} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k \rangle^{-\alpha\sigma} \| \square_k f_R \|_q^{\sigma} , \end{aligned}$$
e então
$$\| f_R \|_{M_{q,\sigma}^0} \leqslant CR^{\alpha} \| f_R \|_{M_{q,\sigma}^{-\alpha}} .$$
Assim,
$$\| e^{t\triangle} f_R \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \leqslant CR^{\alpha} T^{\frac{\alpha}{2}} \| f_R \|_{M_{q,\sigma}^{-\alpha}} .$$

A seguir, analisemos II. Como $R > 3\sqrt{n}$, então segue do Lema 2.2 que

$$\begin{aligned}
\| \Box_k e^{t\triangle}(f - f_R) \|_{L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} &= \left(\int_0^T \| \Box_k e^{t\triangle}(f - f_R) \|_q^{\frac{2}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_0^T (e^{-ct|k|^2} \| \Box_k (f - f_R) \|_q)^{\frac{2}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leqslant C \| \Box_k (f - f_R) \|_q \left(\int_0^T (e^{-ct|k|^2})^{\frac{2}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{C}{|k|^2} \| \Box_k (f - f_R) \|_q \\
&\leqslant C|k|^{-\alpha} \| \Box_k (f - f_R) \|_q \, .
\end{aligned}$$

Tomando a norma em $l^\sigma(\mathbb{Z}^n)$, temos que

$$\| e^{t\triangle}(f - f_R) \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \leqslant C \| f - f_R \|_{M_{q,\sigma}^{-\alpha}} \, .$$

Assim, substituindo as estimativas de I e II em (2.31), chegamos a

$$\| e^{t\triangle} f \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \leqslant C R^\alpha T^{\frac{\alpha}{2}} \| f_R \|_{M_{q,\sigma}^{-\alpha}} + C \| f - f_R \|_{M_{q,\sigma}^{-\alpha}} \, .$$

Finalmente, tomando $T_0 > 0$, tal que

$$T^{\frac{\alpha}{2}} R^\alpha \| f_R \|_{M_{q,\sigma}^{-\alpha}} \leqslant \varepsilon \ , \ \forall T \leqslant T_0,$$

obtemos

$$\| e^{t\triangle} f \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{2}{\alpha}} L^q} \leqslant 2C\varepsilon \ , \ \forall T \leqslant T_0.$$

■

A proposição a seguir nos fornece estimativas para o termo de Duhamel ligado ao operador $e^{t\triangle}$ nos espaços $M_{q,\sigma}^s$ e $l^{s\sigma} L_T^r L^q$.

Proposição 2.7. *Sejam $0 < T \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leqslant r, q, \sigma \leqslant \infty$.*

(i) Existe $C > 0$ tal que, para toda $f \in l^{s,\sigma} L_T^1 L^q$, temos

$$\sup_{t \in (0,T)} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) d\tau \right\|_{M_{q,\sigma}^s} \leqslant C \| f \|_{l^{s,\sigma} L_T^1 L^q} \, .$$

(ii) Existe $C > 0$ tal que, para toda $f \in l^{s-\frac{2}{r},\sigma} L_T^1 L^q$, temos

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) d\tau \right\|_{l^{s,\sigma} L_T^r L^q} \leqslant C(1 + T^{\frac{1}{r}}) \| f \|_{l^{s-\frac{2}{r},\sigma} L_T^1 L^q} \, .$$

Demonstração:

Demonstração de (i) Como $\Box_k$ e $e^{t\triangle}$ são comutativos e $e^{t\triangle}$ é limitado em espaços de Lebesgue, temos que

$$\begin{aligned}\left\|\Box_k\left(\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}f(\tau)d\tau\right)\right\|_q &\leqslant \int_0^t \| \Box_k e^{(t-\tau)\triangle}f(\tau)\|_q\,d\tau\\ &\leqslant C\int_0^t \|\Box_k f(\tau)\|_q\,d\tau\\ &\leqslant C\int_0^T \|\Box_k f(\tau)\|_q\,d\tau\\ &= C\|\Box_k f\|_{L^1_TL^q}\,.\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $\langle k\rangle^s$ e tomando a norma de $l^\sigma(\mathbb{Z}^n)$, chegamos a

$$\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}f(\tau)d\tau\right\|_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant C\|f\|_{l^{s,\sigma}L^1_TL^q}\quad,\ \forall t\in(0,T),$$

e então

$$\sup_{t\in(0,T)}\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}f(\tau)d\tau\right\|_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant C\|f\|_{l^{s,\sigma}L^1_TL^q}\,.$$

Demonstração de (ii) Vamos tratar as partes de baixa e alta frequência da norma separadamente. Se $|k|\leqslant 3\sqrt{n}$, pela limitação do operador $e^{t\triangle}$, segue que

$$\begin{aligned}\left\|\Box_k\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}f(\tau)d\tau\right\|_{L^r_TL^q} &\leqslant \int_0^t \|\Box_k e^{(t-\tau)\triangle}f(\tau)\|_{L^r_TL^q}\,d\tau\\ &= \int_0^t\left(\int_0^T \|\Box_k e^{(t-\tau)\triangle}f(\tau)\|_q^r\,dt\right)^{\frac{1}{r}}d\tau\\ &\leqslant CT^{\frac{1}{r}}\int_0^t \|\Box_k f(\tau)\|_q\,d\tau\\ &\leqslant CT^{\frac{1}{r}}\int_0^T \|\Box_k f(\tau)\|_q\,d\tau\\ &= CT^{\frac{1}{r}}\|\Box_k f\|_{L^1_TL^q}\\ &\leqslant CT^{\frac{1}{r}}\langle k\rangle^{\frac{-2}{r}}\|\Box_k f\|_{L^1_TL^q}\,.\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\|\Box_k\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}f(\tau)d\tau\right\|_{L^r_TL^q} \leqslant CT^{\frac{1}{r}}\langle k\rangle^{\frac{-r}{2}}\|\Box_k f\|_{L^1_TL^q}\,. \tag{2.32}$$

Agora tratemos a parte de alta frequência. Neste caso, assumindo $|k|>3\sqrt{n}$ e aplicando o

Lema 2.2 e a desigualde de Young, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\Box_k \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) d\tau\right\|_{L_T^r L^q} &\leqslant \int_0^t \| \Box_k e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) \|_{L_T^r L^q} \, d\tau \\
&\leqslant \int_0^t \left(\int_0^T \| \Box_k e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) \|_q^r \, dt\right)^{\frac{1}{r}} d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t \left(\int_0^T (e^{-c(t-\tau)|k|^2} \| \Box_k f(\tau) \|_q)^r dt\right)^{\frac{1}{r}} d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t \left(\| \Box_k f(\tau) \|_q \left(\int_0^T (e^{-c(t-\tau)|k|^2})^r dt\right)^{\frac{1}{r}}\right) d\tau \\
&\leqslant C \left(\int_0^T (e^{-ct|k|^2})^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \int_0^T \| \Box_k f(\tau) \|_q \, d\tau \\
&\leqslant C|k|^{-\frac{2}{r}} \| \Box_k f \|_{L_T^1 L^q} . \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Agora, de (2.32) e (2.33), obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) d\tau\right\|_{l^{s,\sigma} L_T^r L^q}^{\sigma} &\leqslant CT^{\frac{\sigma}{r}} \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k\rangle^{(s-\frac{2}{r})\sigma} \| \Box_k f \|_{L_T^1 L^q}^{\sigma} + C \sum_{|k|>3\sqrt{n}} \langle k\rangle^{(s-\frac{2}{r})\sigma} \| \Box_k f \|_{L_T^1 L^q}^{\sigma} \\
&\leqslant C(1+T^{\frac{1}{r}}) \| f \|_{l^{s-\frac{2}{r},\sigma} L_T^1 L^q}^{\sigma} .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} f(\tau) d\tau\right\|_{l^{s,\sigma} L_T^r L^q} \leqslant C(1+T^{\frac{1}{r}}) \| f \|_{l^{s-\frac{2}{r},\sigma} L_T^1 L^q} .
$$

■

2.3 Relações entre espaços de modulação e alguns espaços de funções importantes

Nesta seção, vamos mostrar algumas relações entres espaços de modulação com índice de derivação negativo e os espaços BMO^{-1}, vmo^{-1} e gmo^{-1} que são definidos a seguir.

Definição 2.4. *Seja f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$ e $T>0$. Definimos*

$$
\| f \|_{BMO_T^{-1}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<R^2<T} \left(\frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} \int_0^{R^2} |e^{\tau\triangle} f(y)|^2 d\tau dy\right)^{\frac{1}{2}},
$$

onde $|B(x,R)|$ é a medida de Lebesgue de $B(x,R)$ em $\mathbb{R}^n$. Então, podemos definir os seguintes espaços de funções:

$$
BMO^{-1} = \{f \in S'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{BMO^{-1}} := \| f \|_{BMO_\infty^{-1}} < \infty\},
$$

$$bmo^{-1} = \{f \in S'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{bmo^{-1}} := \| f \|_{BMO_1^{-1}} < \infty\},$$
$$vmo^{-1} = \{f \in bmo^{-1}; \lim_{T \searrow 0} \| f \|_{BMO_T^{-1}} < \infty\},$$
$$gmo^{-1} = \{f \in bmo^{-1}; \lim_{t \searrow 0} e^{t\triangle} f = f \text{ em } bmo^{-1}\}.$$

O lema a seguir mostra a continuidade do operador $e^{t\triangle}$ nos espaços de modulação, o que será de utilidade para mostrarmos as relações entre eles e os espaços definidos acima.

Lema 2.3. *Seja* $1 \leqslant q, \sigma \leqslant \infty$ *e* $s \in \mathbb{R}$. *Se* $\sigma < \infty$ *então*

$$\lim_{t \to 0} \| e^{t\triangle} f - f \|_{M^s_{q,\sigma}} = 0, \forall f \in M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Considere a seguinte aproximação de f. Para $R > 0$, definimos

$$f_R = \sum_{|k| \leqslant R} \square_k f.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\| f_R - f \|_{M^s_{q,\sigma}} < \varepsilon.$$

Logo, da desigualdade triangular e da Proposição 2.4, obtemos

$$\begin{aligned} \| e^{t\triangle} f - f \|_{M^s_{q,\sigma}} &\leqslant \| e^{t\triangle} f_R - f_R \|_{M^s_{q,\sigma}} + \| e^{t\triangle}(f_R - f) \|_{M^s_{q,\sigma}} + \| f_R - f \|_{M^s_{q,\sigma}} \\ &\leqslant \| e^{t\triangle} f_R - f_R \|_{M^s_{q,\sigma}} + 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Agora, usaremos ψ_k como definida no Lema 2.2. Temos que

$$\begin{aligned} \square_k e^{t\triangle} f_R - \square_k f_R &= e^{t\triangle}(\square_k f_R) - \square_k f_R \\ &= \mathcal{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \psi_k \varphi_k \mathcal{F} f_R - \mathcal{F}^{-1} \psi_k \varphi_k \mathcal{F} f_R \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\psi_k (e^{-t|\xi|^2} \varphi_k \mathcal{F} f_R - \varphi_k \mathcal{F} f_R)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\psi_k \varphi_k \mathcal{F} f_R (e^{-t|\xi|^2} - 1)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[(\psi_k (e^{-t|\xi|^2} - 1)(\varphi_k \mathcal{F} f_R)] \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\psi_k (e^{-t|\xi|^2} - 1)] \star (\square_k f_R). \end{aligned}$$

Assim, aplicando o Lema 1.2 para $\mu > \dfrac{n}{2}$, chegamos a

$$\begin{aligned} \| \square_k e^{t\triangle} f_R - f_R \|_q &= \| (\mathcal{F}^{-1}[\psi_k (e^{-t|\xi|^2} - 1)]) \star (\square_k f_R) \|_q \\ &\leqslant C \| \psi_k(\cdot)(e^{-t|\cdot|^2} - 1) \|_{H^\mu} \| \square_k f_R \|_q . \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t \searrow 0} \| \psi_k(\cdot)(e^{-t|\cdot|^2} - 1) \|_{H^\mu} = 0,$$

então existe $t_0 > 0$ tal que, para todo $t < t_0$, temos que

$$\| e^{t\triangle} f_{R_2} - f_{R_2} \|_{M^s_{q,\sigma}} < \varepsilon. \tag{2.35}$$

Assim, unindo (2.34) e (2.35) obtemos o resultado desejado.

■

Proposição 2.8. *Seja $s \in \mathbb{R}$ e $\sigma \geqslant 1$. Temos as inclusões*

$$M^{-1}_{q,1}(\mathbb{R}^n) \subset vmo^{-1} \cap gmo^{-1} \ \ se\ 1 \leqslant q \leqslant \infty\ , \tag{2.36}$$

$$M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) \subset BMO^{-1},\ se\ 1 \leqslant q \leqslant n\ \ e\ \ s = \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \leqslant 0. \tag{2.37}$$

Demonstração: Pela Proposição 2.1 é suficiente provar (2.36) para o caso $q = \infty$ e (2.37) para o caso $q = n$. Primeiramente, para mostrar (2.36) mostraremos a seguinte inclusão contínua

$$M^{-1}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow bmo^{-1}.$$

Dado $f \in M^{-1}_{\infty,1}$, usando a partição da unidade definida em (2.1), obtemos

$$\| f \|_{bmo^{-1}} \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_k f \|_{bmo^{-1}}\ . \tag{2.38}$$

Se $|k| \leqslant 3\sqrt{n}$, da limitação do operador $e^{t\triangle}$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\begin{aligned}
\| \Box_k f \|_{bmo^{-1}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<R^2<1} \left(\frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} \int_0^{R^2} |e^{\tau\triangle}\Box_k f(y)|^2 d\tau dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<R^2<1} \left(\frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} dy \int_0^{R^2} \| e^{\tau\triangle}\Box_k f \|^2_{L^\infty} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<R^2<1} \left(\frac{R^2 \| \Box_k f \|^2_{L^\infty}}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \| \Box_k f \|_{L^\infty} \\
&\leqslant C\langle k\rangle^{-1} \| \Box_k f \|_{L^\infty}\ .
\end{aligned}$$

Agora, se $|k| > 3\sqrt{n}$, usando o Lema 2.2, temos que

$$\begin{aligned}
\| \Box_k f \|_{bmo^{-1}} &\leqslant C \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<R^2<1} \left(\frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)} dy \int_0^{R^2} e^{-c\tau|k|^2} \| \Box_k f \|^2_{L^\infty} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \| \Box_k f \|_{L^\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<R^2<1} \left(\int_0^{R^2} e^{-c\tau|k|^2} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C\langle k\rangle^{-1} \| \Box_k f \|_{L^\infty}\ .
\end{aligned}$$

Assim, substituindo as estimativas em (2.38), chegamos a

$$\begin{aligned}
\| f \|_{bmo^{-1}} &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_k f \|_{bmo^{-1}} \\
&= \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_k f \|_{bmo^{-1}} + \sum_{|k|>3\sqrt{n}} \| \Box_k f \|_{bmo^{-1}} \\
&\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{-1} \| \Box_k f \|_{L^\infty} \\
&= C \| f \|_{M^{-1}_{\infty,1}} .
\end{aligned}$$

Segue que, $M^{-1}_{\infty,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow bmo^{-1}$.

O fato de $f \in vmo^{-1}$ segue de maneira análoga ao item (ii) da Proposição 2.6. Para obter $f \in gmo^{-1}$, segue do Lema 2.3 e da inclusão provada acima. Assim, concluímos (2.36).

Para provar (2.37), vamos usar a inclusão contínua

$$B^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\infty}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow BMO^{-1}.$$

Então é suficiente provar que

$$M^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\sigma}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\infty}(\mathbb{R}^n), \tag{2.39}$$

pois $\dfrac{\sigma}{\sigma-1} \geqslant n$ e $M^s_{n,\sigma}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ a decomposição de Littlewood-Paley e $\psi = 1 - \sum\limits_{j\geqslant 1} \phi_j$. Note que, dado $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\mathcal{F}(\psi \star \Box_k f) = \mathcal{F}\psi\mathcal{F}(\Box_k f) = \mathcal{F}\psi\varphi_k\mathcal{F}f.$$

Como $supp\mathcal{F}\psi \subset \{\frac{1}{2} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$ então $\mathcal{F}(\psi \star \Box_k f) \equiv 0$, para todo $|k| \geqslant 3\sqrt{n}$. Daí, segue que

$$\| \psi \star \Box_k f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = 0 \ , \ \text{ quando } |k| \geqslant 3\sqrt{n}.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\| \psi \star f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} &\leqslant \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \psi \star \Box_k f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&\leqslant \| \psi \|_1 \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_k f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&\leqslant C \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \| \Box_k f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&\leqslant C \sum_{|k|\leqslant 3\sqrt{n}} \langle k\rangle^s \| \Box_k f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
&\leqslant C \| f \|_{M^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\sigma}} .
\end{aligned}$$

Para cada $j \geqslant 1$, considere os conjuntos

$$E_j = \begin{cases} \{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi| \leqslant 2^{n+10}\} & , \text{ se } j = 1, \ldots, n \\ \{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{j-10} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+10}\} & , \text{ se } j = n+1, n+2, \ldots. \end{cases}$$

Note que

$$\mathcal{F}(\phi_j \star \square_k f) = \mathcal{F}\phi_j \varphi_k \mathcal{F} f.$$

Como $supp\mathcal{F}\phi_j \subset \{2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{j+1}\}$ então $\mathcal{F}(\phi_j \star \square_k f) \equiv 0$, para todo $k \in \mathbb{R}^n - E_j$. Assim, da desigualdade de Young e da Proposição 2.1, segue que

$$\begin{aligned} \| \phi_j \star f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} &\leqslant \| \phi_j \star \left(\sum_{k \in E_j} \square_k f \right) \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &\leqslant C \left\| \sum_{k \in E_j} \square_k f \right\|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &\leqslant C \sum_{k \in E_j} \| \square_k f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} . \end{aligned}$$

Agora, observe que para cada $j \geqslant 1$, existe $C > 0$, que não depende de j, tal que $C|k|^s \geqslant 2^{js}$. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} 2^{js} \| \phi_j \star f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} &\leqslant C \sum_{k \in E_j} 2^{js} \| \square_k f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &\leqslant C \sum_{k \in E_j} |k|^s \| \square_k f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\sigma}} \quad , \forall j \geqslant 1. \end{aligned}$$

Assim, pela definição de supremo, temos que

$$\begin{aligned} \| f \|_{B^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\infty}} &= \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \| \phi_j \star f \|_{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &\leqslant C \| f \|_{M^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\sigma}} . \end{aligned}$$

Portanto, obtemos (2.39).

■

2.4 A limitação do operador $\mathbb{P}$ e sua relação com outros operadores

Nesta seção, iremos mostrar um tipo de limitação para o operador $\mathbb{P}$ em Espaços de Modulação e sua relação com alguns operadores utilizados nessa dissertação. Para isso, usaremos propriedades já conhecidas desse operador em espaços clássicos como os espaços de Besov homogêneos.

A proposição a seguir mostra a comutatividade entre os operadores $\mathbb{P}$ e $\square_k$ e $\mathbb{P}$ e $e^{t\triangle}$.

Proposição 2.9. *O operador $\mathbb{P}$ comuta com os operadores $\Box_k$ e $e^{t\triangle}$.*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{S}'$ uma distribuição qualquer. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Box_k \mathbb{P} f) &= \varphi_k \mathcal{F}(\mathbb{P} f) \\
&= \varphi_k \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\right) \mathcal{F} f \\
&= \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\right) (\varphi_k \mathcal{F} f) \\
&= \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\right) \mathcal{F}(\Box_k f) \\
&= \mathcal{F}(\mathbb{P} \Box_k f).
\end{aligned}$$

Assim, $\Box_k \mathbb{P} = \mathbb{P} \Box_k$. Agora, note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbb{P} e^{t\triangle} f) &= \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\right) \mathcal{F}(e^{t\triangle} f) \\
&= \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\right) e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F} f \\
&= e^{-t|\xi|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}\right) \mathcal{F} f \\
&= e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F}(\mathbb{P} f) = \mathcal{F}(e^{t\triangle} \mathbb{P} f).
\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{P} e^{t\triangle} = e^{t\triangle} \mathbb{P}$.

■

O lema a seguir nos mostra uma estimativa para o operador $\mathbb{P}$ nos espaços de Lebsgue L^p.

Lema 2.4. *Sejam $1 \leqslant q \leqslant \infty$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

(i) Se $|k| \leqslant 3\sqrt{n}$ e $\| \Box_k f \|_q < \infty$, temos a estimativa

$$\| \Box_k \nabla \mathbb{P} f \|_q \leqslant C \| \Box_k f \|_q ,$$

onde $C > 0$ é uma constante universal.

(ii) Se $|k| \geqslant 3\sqrt{n}$ e $\| \Box_k f \|_q < \infty$, temos a estimativa

$$\| \Box_k \mathbb{P} f \|_q \leqslant C \| \Box_k f \|_q ,$$

onde $C > 0$ é uma constante universal.

Demonstração:

Demonstração de (i) Vamos utilizar os espaços de Besov homogêneos $\dot{B}^0_{q,1}(\mathbb{R}^n)$. Considere novamente a decomposição de Littlewood-Paley $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Como o operador $\mathbb{P}$ é limitado em espaços de Besov homgêneos e vale o mergulho

$$\dot{B}^0_{q,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), (\text{ Ver [2], p. 147})$$

então segue que

$$\begin{aligned}
\| \Box_k \nabla \mathbb{P} f \|_q &\leqslant C \| \Box_k \nabla \mathbb{P} f \|_{\dot{B}^0_{q,1}} \\
&\leqslant C \| \Box_k f \|_{\dot{B}^0_{q,1}} \\
&\leqslant C \sum_{-\infty<j\leqslant n} 2^j \| \phi_j \star (\Box_k f) \|_q \\
&\leqslant C \| \Box_k f \|_q ,
\end{aligned}$$

o que nos dá a estimativa desejada.

Pode-se provar (ii) de maneira análoga ao item (i), utilizando a limitação do operador $\mathbb{P}$ em espaços de Besov homogêneos.

■

Encerramos este capítulo com mais duas estimativas para o operador $\mathbb{P}$. Elas seguem diretamente do Lema 2.4.

Corolário 2.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant r, q, \sigma \leqslant \infty$ e $T > 0$. Então existe $C > 0$, tal que*

$$\| \nabla \mathbb{P} f \|_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant C \| f \|_{M^{s+1}_{q,\sigma}} \quad , \text{ se } f \in M^{s+1}_{q,\sigma}$$

$$\| \nabla \mathbb{P} f \|_{l^{s,\sigma} L^r_T L^q} \leqslant C \| f \|_{l^{s+1,\sigma} L^r_T L^q} \quad , \text{ se } f \in l^{s+1,\sigma} L^r_T L^q$$

■

3 O Problema de Cauchy para as equações de Navier-Stokes e a equação do calor semilinear em espaços de modulação

Neste capítulo, vamos demonstrar os resultados principais dessa dissertação, os quais consistem em três teoremas de existência e unicidade de solução em espaços de modulação para os problemas (NS) e (H).

3.1 Existência e unicidade para as equações de Navier-Stokes

Nesta seção vamos considerar o problema de Cauchy (NS). Note que aplicando o operador projeção de Helmholtz-Leray $\mathbb{P}$ no sistema (NS), obtemos

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\partial_t u) - \mathbb{P}(\triangle u) + \mathbb{P}((u \cdot \nabla)u) + \mathbb{P}(\nabla \pi) = 0 \\ \mathbb{P}(u(0,x)) = \mathbb{P}(u_0(x)) = u_0 \end{cases}.$$

Pelas propriedades do operador $\mathbb{P}$ provadas no Capítulo 1, e utilizando o princípio de Duhamel, vemos que se u é solução desse novo sistema, então u satisfaz a equação integral

$$u(t) = e^{t\triangle}u_0 - \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(u \otimes u)d\tau. \tag{3.1}$$

onde div $u_0 = 0$ e $\otimes$ denota o produto tensorial. Soluções de (3.1) são chamadas soluções brandas das equações de Navier-Stokes (NS).

Para iniciar o estudo da equação integral acima, vamos definir um espaço de funções derivado dos espaços de modulação, no qual consideraremos a condição inicial do problema (NS).

Definição 3.1. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leqslant q, \sigma \leqslant \infty$. Definimos o espaço $PM^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ por*

$$PM^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) = \{u \in [M^s_{q,\sigma}]^n;\ div\ u = 0\ em\ \mathcal{S}'\}$$

$$\| u \|_{PM^s_{q,\sigma}} = \sum_{j=1}^n \| u_j \|_{M^s_{q,\sigma}}\ ,$$

onde $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Denotaremos $PM^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ apenas por $PM^s_{q,\sigma}$.

Teorema 3.1. *Sejam $n \geqslant 2$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \sigma < \infty$ e $\dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \leqslant s$. Então para toda $u_0 \in PM^s_{q,\sigma}$, existe $T > 0$ tal que (3.1) tem solução única em X_T, onde*

$$X_T = \{u \in [C([0,T], M^s_{q,\sigma})]^n; \| u \|_{X_T} < \infty\ ,\ \ div\ u = 0\},$$

com

$$\| u \|_{X_T} = \sup_{t \in (0,T)} \| u(t) \|_{M^s_{q,\sigma}} + \| u \|_Z$$

e

$$\| u \|_Z = \begin{cases} \| u \|_{l^{0,1} L^2_T L^q}, & se\ s = -1 \\ \sup_{t \in (0,T)} t^{\frac{|s|}{2}} \| u(t) \|_{M^0_{q,\sigma}}, & se\ -1 < s < 0 \\ \sup_{t \in (0,T)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\sigma})} \| u(t) \|_{M^s_{q,\nu}}, & se\ s = \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \geqslant 0\ ou\ 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{n(\sigma-1)-n}{\sigma} \\ 0, & em\ caso\ contrário\ , \end{cases}$$

onde ν é um número real satisfazendo

$$\frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\nu} < \frac{1}{\sigma} + \frac{n(\sigma-1) - \sigma s}{2\sigma n}.$$

Além disso, sejam $u, v \in X_T$ soluções de (3.1) com condições iniciais u_0, v_0 respctivamente, então vale:

$$\| u - v \|_{X_T} \longrightarrow 0 \ quando\ \| u_0 - v_0 \|_{PM^s_{q,\sigma}} \longrightarrow 0.$$

Mais ainda, se $q \leqslant n$ e o dado inicial u_0 é suficientemente pequeno, a solução existe globalmente no tempo.

Para $u \in [C([0,T], M^s_{q,\sigma})]^n$, definimos

$$\| u \|_Y := \sup_{t \in (0,T)} \| u(t) \|_{M^s_{q,\sigma}}$$

e

$$\Psi(u)(t) = e^{t\triangle} u_0 - \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u) d\tau.$$

Relembre a norma $\| \cdot \|_Z$ como definida no Teorema 3.1. Agora, apresentaremos um lema que contém estimativas para a parte bilinear da equação (3.1) nos espaços $M^s_{q,\sigma}$ e $l^{s,\sigma} L^r_T L^q$, as quais serão essenciais na demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.1. *Sejam $n \geqslant 2$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \sigma < \infty$ e $\dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \leqslant s$.*

(i) Se $s = -1$, então existe $C > 0$, tal que

$$\| \Psi(u) \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} + C \| u \|^2_Z \tag{3.2}$$

e

$$\| \Psi(u) \|_Z \leqslant \| e^{t\triangle} u_0 \|_Z + C(1 + T^{\frac{1}{2}}) \| u \|^2_Z\ . \tag{3.3}$$

(ii) Se $-1 < s < 0$, então existem $C > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e $\beta_1, \beta_2 \geqslant 0$, tais que

$$\| \Psi(u) \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} + C(T^{\alpha_1} + T^{\beta_1}) \| u \|^2_Z \tag{3.4}$$

e

$$\| \Psi(u) \|_Z \leqslant \| e^{t\triangle} u_0 \|_Z + C(T^{\alpha_2} + T^{\beta_2}) \| u \|_Z^2 \ . \tag{3.5}$$

(iii) Se $s = \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \geqslant 0$ *ou* $0 \leqslant s \leqslant \dfrac{n(\sigma-1)-n}{\sigma}$ *então, existem* $C > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ *e* $\beta_1, \beta_2 \geqslant 0$, *tais que*

$$\| \Psi(u) \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} + C(T^{\alpha_1} + T^{\beta_1}) \| u \|_Z^2 \tag{3.6}$$

e

$$\| \Psi(u) \|_Z \leqslant \| e^{t\triangle} u_0 \|_Z + C(T^{\alpha_2} + T^{\beta_2}) \| u \|_Z^2 \ . \tag{3.7}$$

Demonstração:

Demonstração de (i) Pelas condições do lema, concluímos que neste caso $\sigma = 1$. Na norma $\| \cdot \|_Y$, usando (2.22) (ver p. 32), obtemos

$$\| e^{t\triangle} u_0 \|_Y \leqslant \sup_{t \in (0,T)} C(1 + t^0) \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} = C \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} \ .$$

Agora, usando o Corolário 2.2 e as Proposições 2.7, 2.2 e 2.1 (ver pp. 22,24,38 e 46), podemos estimar

$$\left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u) d\tau \right\|_{M^{-1}_{q,1}} \leqslant C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} (u \otimes u) d\tau \right\|_{M^0_{q,1}}, \ \forall t \in (0,T),$$

e então

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u) d\tau \right\|_Y &\leqslant C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} (u \otimes u) d\tau \right\|_Y \\ &\leqslant C \| u \otimes u \|_{l^{0,1} L^1_T L^q} \\ &\leqslant C \| u \|^2_{l^{0,1} L^2_T L^{2q}} \\ &\leqslant C \| u \|^2_{l^{0,1} L^2_T L^q} \\ &= C \| u \|_Z^2 \ . \end{aligned}$$

Assim, obtemos (3.2). Para a norma $\| \cdot \|_Z$, aplicamos o Corolário 2.2 e as Proposições 2.7 e 2.1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u) d\tau \right\|_Z &= \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u) d\tau \right\|_{l^{0,1} L^2_T L^q} \\ &\leqslant C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} (u \otimes u) d\tau \right\|_{l^{1,1} L^2_T L^q} \\ &\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{2}}) \| u \otimes u \|_{l^{0,1} L^1_T L^q} \\ &\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{2}}) \| u \|_Z^2 \ , \end{aligned}$$

o que implica (3.3).

Demonstração de (ii) Trataremos o caso $-1 < s < 0$. Pelas condições do lema, temos

$$\sigma > 2 \ , \ n \geqslant 2 \text{ e } s \geqslant \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1.$$

Considere um número real ν satisfazendo,

$$\frac{1}{\nu} = \frac{2}{\sigma} - 1.$$

Na norma $\| \cdot \|_Y$, aplicamos o Corolário 2.2 e as estimativas (2.22) e (2.23) (ver p. 32), e por fim as Proposições 2.2 e 2.1 (ver pp. 22 e 24), para obter

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u) d\tau \right\|_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} (u \otimes u) d\tau \right\|_{M^{s+1}_{q,\sigma}} \\
&\leqslant C \int_0^t \| \, e^{(t-\tau)\triangle}(u\otimes u) \, \|_{M^{s+1}_{q,\sigma}} \, d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{s+1}{2} - n(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})} \, \| \, u \otimes u \, \|_{M^0_{q,\nu}} \, d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t (\| \, u \, \|_{M^0_{2q,\sigma}} \| \, u \, \|_{M^0_{2q,\sigma}} + \| \, u \, \|_{M^0_{2q,\sigma}} \| \, u \, \|_{M^0_{2q,\sigma}})(1+(t-\tau)^{-\frac{s+1}{2} - n(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) d\tau \\
&= C \int_0^t \| \, u \, \|^2_{M^0_{2q,\sigma}} \, (1+(t-\tau)^{-\frac{s+1}{2} - n(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t \| \, u \, \|^2_{M^0_{q,\sigma}} \, (1+(t-\tau)^{-\frac{s+1}{2} - n(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) d\tau \\
&\leqslant C \, \| \, u \, \|^2_Z \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{s+1}{2} - n(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \tau^s d\tau \\
&\leqslant C \, \| \, u \, \|^2_Z \int_0^t (1+\tau^{-\frac{s+1}{2} - n(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \tau^s d\tau \\
&\leqslant C \, \| \, u \, \|^2_Z \, (T^{s+1} + T^{1-\frac{s+1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu}) + s}).
\end{aligned}$$

Agora, tomamos $\alpha_1 = s+1$ e $\beta_1 = \dfrac{s+1}{2} - \dfrac{n}{2}(\dfrac{1}{\sigma} - \dfrac{1}{\nu})$. Note que $\alpha_1 > 0$ e $\beta_1 \geqslant 0$, pois $s \geqslant \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1$ e $-1 < s < 0$. Logo, obtemos (3.4).

Na norma $\| \cdot \|_Z$, aplicando o Corolário 2.2, as estimativas (2.22), e (2.23), e as Proposições 2.2 e 2.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
t^{\frac{|s|}{2}} \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u) d\tau \right\|_{M^0_{q,\sigma}} &\leqslant C t^{\frac{|s|}{2}} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} (u \otimes u) d\tau \right\|_{M^1_{q,\sigma}} \\
&\leqslant C t^{\frac{|s|}{2}} \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \, \| \, u \otimes u \, \|_{M^0_{q,\nu}} \, d\tau \\
&\leqslant C t^{\frac{|s|}{2}} \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \, \| \, u \, \|^2_{M^0_{2q,\sigma}} \, d\tau \\
&\leqslant C \, \| \, u \, \|^2_Z \, t^{\frac{|s|}{2}} \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \tau^s d\tau \\
&\leqslant C \, \| \, u \, \|^2_Z \, t^{\frac{|s|}{2}} (t^{s+1} + t^{\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu}) + s}).
\end{aligned}$$

Logo, tomamos $\alpha_2 = 1 + s + \dfrac{|s|}{2}$ e $\beta_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2}(\dfrac{1}{\sigma} - \dfrac{1}{\nu}) + s + \dfrac{|s|}{2}$, e então $\alpha_1 > 0$ e $\beta_2 \geqslant 0$ e obtemos (3.5).

Demonstração de (iii) Seja $\tilde{\nu}$ satisfazendo

$$\frac{1}{\tilde{\nu}} - \frac{s}{n} = \frac{2}{\nu} - 1. \tag{3.8}$$

Pelas condições do lema para s, σ, ν, temos $\sigma < \tilde{\nu} < \infty$. Para a norma $\| \cdot \|_Y$, aplicamos o Corolário 2.2 (ver p. 46) e as estimativas (2.22), (2.23) (ver p. 32), e obtemos

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(u\otimes u)d\tau \right\|_{M^s_{q,\sigma}} &\leqslant C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(u\otimes u)d\tau \right\|_{M^{s+1}_{q,\sigma}} \\ &\leqslant C \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u\otimes u \parallel_{M^s_{q,\tilde{\nu}}} d\tau.\end{aligned}$$

Agora, pela relação (3.8), aplicamos (2.12) (ver p. 27) e a Proposição 2.1 (ver p. 30), para estimar

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(u\otimes u)d\tau \right\|_{M^s_{q,\sigma}} &\leqslant C \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u \parallel^2_{M^s_{2q,\nu}} d\tau \\ &\leqslant C \parallel u \parallel_Z^2 \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})})\tau^{-n(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}d\tau \\ &\leqslant C \parallel u \parallel_Z^2 (T^{1-n(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} + T^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})-n(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}).\end{aligned}$$

Tome $\alpha_1 = 1 - n(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma})$ e $\beta_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2}(\dfrac{1}{\sigma} - \dfrac{1}{\tilde{\nu}}) - n(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma})$. Note que $\alpha_1 > 0$ e $\beta_1 \geqslant 0$, pois $s = \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \geqslant 0$ ou $0 \leqslant s \leqslant \dfrac{n(\sigma-1)-n}{\sigma}$. Assim, obtemos a primeira estimativa.

Para a norma $\| \cdot \|_Z$, temos que

$$\begin{aligned}t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(u\otimes u)d\tau \right\|_{M^s_{q,\nu}} &\leqslant t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(u\otimes u)d\tau \right\|_{M^{s+1}_{q,\nu}} \\ &\leqslant t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})} \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}) \parallel u\otimes u \parallel_{M^s_{q,\tilde{\nu}}} d\tau \\ &\leqslant C \parallel u \parallel_Z^2 \, t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})})\tau^{-n(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}d\tau \\ &\leqslant C \parallel u \parallel_Z^2 \, t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}(t^{1-n(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} + t^{\frac{1}{2}-n(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}).\end{aligned}$$

Daí, tomamos $\alpha_2 = 1 - \dfrac{n}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma})$ e $\beta_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\tilde{\nu}}) - \dfrac{n}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma})$ e temos $\alpha_2 > 0$ e $\beta \geqslant 0$ pelas condições de $\sigma, \nu, \tilde{\nu}$. Logo, obtemos (3.7).

■

3.1.1 Demonstração do Teorema 3.1

Agora, de posse do Lema 3.1 estamos prontos para demonstrar o Teorema 3.1. Note que encontrar uma solução única para (3.1) é equivalente a mostrar que o operador

Ψ, definido no Lema 3.1, tem um único ponto fixo. Então, precisamos encontrar condições para que o operador Ψ seja uma contração, obtendo assim, através do Teorema do Ponto Fixo de Banach, a solução da equação (3.1). Vamos analisar os quatro casos da definição da norma $\| \cdot \|_Z$ separadamente.

Passo 1: Caso $s = -1$.

Pela Proposição 2.6 (ver p. 36), vemos que a norma $\| e^{t\triangle} u_0 \|_Z$ é pequena para T suficientemente pequeno, que depende de cada u_0 e não pode ser tomado dependendo apenas da norma de u_0. Assim, a seguir vamos definir um espaço métrico conveniente onde poderemos aplicar o Teorema do Ponto fixo de Banach e obter a solução desejada.

Seja $\varepsilon > 0$. Logo, existe $T > 0$ tal que

$$\| e^{t\triangle} u_0 \|_Z < \varepsilon \text{ e } 4C(1 + T^{\frac{1}{2}})\varepsilon < 1$$

Definimos o espaço

$$X_T = \{u \in [C([0,T], M^{-1}_{q,1})]^n ; \| u \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} + \varepsilon \ , \ \| u \|_Z \leqslant 2\varepsilon \ , \ \operatorname{div} u = 0\},$$

munido da métrica

$$d(u,v) = \| u - v \|_Y + \| u - v \|_Z \ .$$

Precisamos mostrar que Ψ é uma contração em (X_T, d). Note primeiramente que as estimativas (3.2) e (3.3), provadas no Lema 3.1, garantem que $\Psi(X_T) \subset X_T$. Falta provarmos que existe $0 \leqslant \beta < 1$ tal que

$$d(\Psi(u), \Psi(v)) \leqslant \beta d(u,v) \ , \forall u, v \in X_T.$$

Analisando primeiramente a norma $\| \cdot \|_Y$, temos que

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M^{-1}_{q,1}} &= \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u - v \otimes v) d\tau \right\|_{M^{-1}_{q,1}} \\
&= \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}((u + v) \otimes (u - v)) d\tau \right\|_{M^{-1}_{q,1}} \\
&\leqslant C \left(\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} ((u - v) \otimes u) d\tau \right\|_{M^{0}_{q,1}} + \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} ((u - v) \otimes v) d\tau \right\|_{M^{0}_{q,1}} \right) \\
&\leqslant C \| (u - v) \otimes u \|_{l^{0,1} L^1_T L^q} + C \| (u - v) \otimes v \|_{l^{0,1} L^1_T L^q} \\
&\leqslant C \| u - v \|_{l^{0,1} L^2_T L^{2q}} \| u \|_{l^{0,1} L^2_T L^{2q}} + C \| u - v \|_{l^{0,1} L^2_T L^{2q}} \| v \|_{l^{0,1} L^2_T L^{2q}} \\
&\leqslant C(\| u \|_Z + \| v \|_Z) \| u - v \|_Z \ .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_Y \leqslant C(\| u \|_Z + \| v \|_Z) \| u - v \|_Z \ .$$

Agora, analisemos a norma $\|\cdot\|_Z$. Temos que

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_Z &= \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(u\otimes u - v\otimes v)d\tau \right\|_{l^{0,1}L^1_T L^q} \\
&\leqslant \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(u\otimes u - v\otimes v)d\tau \right\|_{l^{1,1}L^1_T L^q} \\
&\leqslant C(1+T^{\frac{1}{2}})(\| (u-v)\otimes u \|_{l^{0,1}L^1_T L^q} + C \| (u-v)\otimes v \|_{l^{0,1}L^1_T L^q}) \\
&\leqslant C(1+T^{\frac{1}{2}})(\| u-v \|_{l^{0,1}L^2_T L^{2q}} \| u \|_{l^{0,1}L^2_T L^{2q}} + \| u-v \|_{l^{0,1}L^2_T L^{2q}} \| v \|_{l^{0,1}L^2_T L^{2q}}) \\
&\leqslant C(1+T^{\frac{1}{2}})(\| u \|_Z + \| v \|_Z) \| u-v \|_Z .
\end{aligned}$$

Segue que

$$d(\Psi(u),\Psi(v)) \leqslant 4C(1+T^{\frac{1}{2}})\varepsilon d(u,v)$$

Portanto, concluímos que Ψ é contração e assim obtemos a solução desejada.

Agora, mostraremos a existência do tempo T dependendo somente da norma de u_0, quando a norma de u_0 é pequena. Aplicando a Proposição 2.6, podemos estimar

$$\| e^{t\triangle}u_0 \|_Z \leqslant C(1+T^{\frac{1}{2}}) \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} .$$

De maniera análoga a (3.2) e (3.3), provamos a existência de $C_0 > 0$ tal que

$$\| \Psi(u) \|_{X_T} \leqslant C_0(1+T^{\frac{1}{2}}) \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} + C_0(1+T^{\frac{1}{2}}) \| u \|^2_{X_T} \tag{3.9}$$

e

$$\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{X_T} \leqslant C_0(1+T^{\frac{1}{2}})(\| u \|_{X_T} + \| v \|_{X_T}) \| u-v \|_{X_T} . \tag{3.10}$$

Seja u_0 e $T > 0$ satisfazendo

$$\| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} < \frac{1}{8C_0^2} \text{ e } 8C_0^2(1+T^{\frac{1}{2}})^2 \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} \leqslant 1. \tag{3.11}$$

Definamos o espaço métrico

$$X_T = \{u \in [C([0,T], M^{-1}_{q,1})]^n ; \| u \|_{X_T} \leqslant 2C_0(1+T^{\frac{1}{2}}) \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} \ , \ \text{div } u = 0\}, \tag{3.12}$$

munido com a métrica

$$d(u,v) = \| u-v \|_{X_T}$$

Se u e v estão neste espaço, obtemos de (3.9) e (3.10) que

$$\| \Psi(u) \|_{X_T} \leqslant 2C_0(1+T^{\frac{1}{2}}) \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} \text{ e } d(\Psi(u),\Psi(v)) \leqslant \frac{1}{2}$$

Assim, Ψ é contração e podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, encontrando assim $u \in X_T$ ponto fixo de Ψ que será a única solução branda de (NS) em X_T. Note que da maneira que foi escolhido T, ele é válido para qualquer u_0 satifazendo as condições (3.11).

Passo 2: Trataremos o caso $-1 < s < 0$.

Se $s = \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1$ podemos provar a existência de T dependendo de cada u_0. De fato, dada $\varepsilon > 0$ segue da Proposição 2.5 (ver p. 35) que existe $T > 0$ sastisfazendo

$$\| e^{t\triangle}u_0 \|_Z < \varepsilon \text{ e } 8C\varepsilon(T^{\alpha_1} + T^{\beta_1})(T^{\alpha_2} + T^{\beta_2}) \leqslant 1.$$

onde α_j, β_j $(j = 1, 2)$ são os encontrados em (3.4) e (3.5).

Considere o espaço métrico

$$X_T = \{u \in [C([0,T], M^s_{q,\sigma})]^n; \| u \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} + \varepsilon \ , \ \| u \|_Z \leqslant 2\varepsilon \ , \ \text{div } u = 0\},$$

munido com a métrica

$$d(u,v) = \| u - v \|_Y + \| u - v \|_Z \ .$$

Note que as estimativas (3.4) e (3.5), provadas no Lema 3.1, garantem que $\Psi(X_T) \subset X_T$. A seguir, mostraremos que Ψ é contração em X_T.

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M^s_{q,\sigma}} &= \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(u \otimes u - v \otimes v) d\tau \right\|_{M^s_{q,\sigma}} \\
&= \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}((u+v) \otimes (u-v)) d\tau \right\|_{M^s_{q,\sigma}} \\
&\leqslant C \int_0^t \| e^{(t-\tau)\triangle}((u+v) \otimes (u-v)) \|_{M^{s+1}_{q,\sigma}} \\
&\leqslant C \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{s+1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \| (u-v) \otimes (u+v) \|_{M^0_{q,\nu}} d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{s+1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})})(2 \| u - v \|_{M^0_{2q,\sigma}} 2 \| u + v \|_{M^0_{2q,\sigma}}) d\tau \\
&\leqslant C \| u - v \|_Z (\| u \|_Z + \| v \|_Z) \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{s+1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \tau^s d\tau \\
&\leqslant C(T^{\alpha_1} + T^{\beta_1}) \| u - v \|_Z (\| u \|_Z + \| v \|_Z).
\end{aligned}$$

Agora, analizando a norma $\| \cdot \|_Z$, temos que

$$\begin{aligned}
t^{\frac{|s|}{2}} \| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M^0_{q,\sigma}} &= t^{\frac{|s|}{2}} \left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(u \otimes u - v \otimes v) d\tau \right\|_{M^0_{q,\sigma}} \\
&\leqslant Ct^{\frac{|s|}{2}} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(u \otimes u - v \otimes v) d\tau \right\|_{M^1_{q,\sigma}} \\
&\leqslant Ct^{\frac{|s|}{2}} \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \| (u-v) \otimes (u+v) \|_{M^0_{q,\nu}} d\tau \\
&\leqslant Ct^{\frac{|s|}{2}} \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \| u - v \|_{M^0_{2q,\sigma}} \| u + v \|_{M^0_{2q,\sigma}} d\tau \\
&\leqslant C \| u - v \|_Z (\| u \|_Z + \| v \|_Z) t^{|s|} 2 \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \tau^s d\tau \\
&\leqslant CT^{\frac{|s|}{2}} (T^{s+1} + T^{\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\nu})}) \| u - v \|_Z (\| u \|_Z + \| v \|_Z).
\end{aligned}$$

Assim,

$$d(\Psi(u), \Psi(v)) \leqslant 4C\varepsilon(T^{\alpha_1} + T^{\beta_1})(T^{\alpha_2} + T^{\beta_2})d(u, v) \leqslant \frac{1}{2}d(u, v).$$

Agora se $s > \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1$, podemos mostrar a existência de um tempo $T > 0$ dependendo somente da norma de u_0. Se a norma de u_0 for pequena a existência de T é obitida de maneira análoga ao passo 1 utilizando que

$$\| e^{t\triangle}u_0 \|_Z \leqslant C(1 + T^{\frac{|s|}{2}}) \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} .$$

Mostremos o caso em que a norma de u_0 é grande. De maneira análoga a (3.4) e (3.5), podemos provar a existência de C_0, α, $\beta > 0$ tais que

$$\| \Psi(u) \|_{X_T} \leqslant C_0(1 + T^{\frac{|s|}{2}}) \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} + C_0(T^\alpha + T^\beta) \| u \|^2_Z \tag{3.13}$$

e

$$\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{X_T} \leqslant C_0(T^\alpha + T^\beta)(\| u \|_{X_T} + \| v \|_{X_T}) \| u - v \|_{X_T} . \tag{3.14}$$

Agora, tome $T > 0$ satisfazendo

$$T \leqslant 1 \text{ e } 12C_0^2(T^\alpha + T^\beta) \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant 1, \tag{3.15}$$

e definamos o espaço métrico

$$E = \{u \in [C([0, T], M^s_{q,\sigma})]^n; \| u \|_{X_T} \leqslant 3C_0 \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}}\}$$

com a métrica

$$d(u, v) = \| u - v \|_Y + \| u - v \|_Z$$

Se u, v estão nesse espaço, então as desigualdades (3.13) a (3.15) nos garantem que

$$\| \Psi(u) \|_{X_T} \leqslant 3C_0 \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} \text{ e } d(\Psi(u), \Psi(v)) \leqslant \frac{1}{2}d(u, v).$$

Assim, basta aplicarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach para obtermos um ponto fixo $u \in E$ que é a única solução branda de (NS) em E. Isto nos fornece a solução desejada.

Passo 3: Trataremos o caso $s = \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \geqslant 0$ ou $0 \leqslant s \leqslant \dfrac{n(\sigma-1)-n}{\sigma}$.

Se $s = \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1$, segue que $\beta_1 = \beta_2 = 0$ e T pode ser tomado dependendo de cada u_0 como foi feito no Passo 2. Agora, no caso em que $s > \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1$, segue que $\beta_1, \beta_2 > 0$ e assim T pode ser tomado dependendo apenas da norma de u_0, analogamente a parte final do Passo 2.

Passo 4: Neste caso, usando (2.22) (ver p. 32), o primeiro termo de $\Psi(u)$ pode ser estimado como

$$\| e^{t\triangle}u_0 \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} .$$

Seja $\tilde{\nu}$ satisfazendo

$$\sigma < \tilde{\nu} < \infty \text{ e } \frac{1}{\tilde{\nu}} - \frac{s}{n} = \frac{2}{\sigma} - 1.$$

Aplicando o Corolário 2.2 (ver p. 46), as desigualdades (2.22), (2.23), (2.12) (ver p. 32) e a Proposição 2.1 (ver p. 21), obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(u \otimes u) d\tau \right\|_{M^s_{q,\sigma}} &\leqslant C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(u \otimes u) d\tau \right\|_{M^{s+1}_{q,\sigma}} \\
&\leqslant C \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u \otimes u \parallel_{M^s_{q,\tilde{\nu}}} d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u \parallel^2_{M^s_{2q,\sigma}} d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^2_Y \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tilde{\nu}})}) \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^2_Y (T + T^{\frac{1}{2} - \frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tilde{\nu}})}).
\end{aligned}$$

Aqui a integrabilidade é garantida por $s > \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1$ e a condição $\nu < \infty$ é satisfeita pois $s > \dfrac{n(\sigma-1)-n}{\sigma}$.

O tempo $T > 0$ pode ser tomado dependendo apenas da norma de u_0. Podemos mostrar, de maneira análoga a estimativa acima, que existem $C_0, \alpha, \beta > 0$ tais que

$$\parallel \Psi(u) \parallel_Y \leqslant C_0 \parallel u_0 \parallel_{M^s_{q,\sigma}} + C_0(T^\alpha + T^\beta) \parallel u \parallel^2_y$$

e

$$\parallel \Psi(u) - \Psi(v) \parallel_Y \leqslant C_0(\parallel u \parallel_Y + \parallel v \parallel_Y)(T^\alpha + T^\beta) \parallel u - v \parallel_Y . \tag{3.16}$$

Assim, tome $T > 0$ satisfazendo

$$T \leqslant 1 \text{ e } 12C_0^2(T^\alpha + T^\beta) \parallel u_0 \parallel_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant 1. \tag{3.17}$$

Defina o espaço métrico

$$X_T = \{u \in [C([0,T], M^s_{q,\sigma})]^n; \parallel u \parallel_Y \leqslant 3C_0 \parallel u_0 \parallel_{M^s_{q,\sigma}}\},$$

com a métrica

$$d(u,v) = \parallel u - v \parallel_Y .$$

Dessa forma, Ψ é uma contração e podemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para obter a solução desejada.

■

Observação 3.1. *(i) Se* $s > \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1$ *ou a norma de* u_0 *for pequena, podemos tomar a existência de* $T > 0$ *dependendo apenas do tamanho da norma de* u_0*, como foi provado na demontração acima.*

(ii)(Dependência contínua dos dados iniciais)

Fixe $u_0 \in PM^s_{q,\sigma}$ *e considere* $T > 0$ *dependendo apenas da norma de* u_0*,o qual provamos a existência no Teorema 3.1, desde que* $s > \dfrac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1$.

Primeiramente vamos considerar o caso $s = -1$. *Relembre o espaço* X_T *definido em* (3.12) *na demonstração do Teorema 3.1. Sejam* v_1 *e* v_2 *dados iniciais satisfazendo*

$$\| v_1 \|_{M^{-1}_{q,1}}, \| v_2 \|_{M^{-1}_{q,1}} \leqslant \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}}$$

Logo, segue que, se w_1 *e* w_2 *são soluções da equação* (3.1) *para os dados iniciais* v_1 *e* v_2*, respectivamente, ou seja*

$$w_1 = e^{t\triangle}v_1 - \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(w_1 \otimes w_1)d\tau$$

e

$$w_2 = e^{t\triangle}v_2 - \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(w_2 \otimes w_2)d\tau,$$

então $w_1, w_2 \in X_T$.

Assim, aplicando a desigualdade triângular e as estimativas (3.10), (2.21) *e* (3.11) *(ver pp. 32 e 53), obtemos*

$$\begin{aligned}
\| w_1 - w_2 \|_{X_T} &\leqslant \| e^{t\triangle}(v_1 - v_2) \|_{X_T} + C_0(1 + T^{\frac{1}{2}})(\| w_1 \|_{X_T} + \| w_2 \|_{X_T}) \| w_1 - w_2 \|_{X_T} \\
&\leqslant C_0^2(1 + T^{\frac{1}{2}})^2 \| v_1 - v_2 \|_{M^{-1}_{q,1}} + C_0^2(1 + T^{\frac{1}{2}})^2 \| u_0 \|_{M^{-1}_{q,1}} \| w_1 - w_2 \|_{X_T} \\
&\leqslant C \| v_1 - v_2 \|_{M^{-1}_{q,1}} + \frac{1}{2} \| w_1 - w_2 \|_{X_T} \ ,
\end{aligned}$$

e então

$$\| w_1 - w_2 \|_{X_T} \leqslant C \| v_1 - v_2 \|_{M^{-1}_{q,1}}$$

Portanto, concluímos que a solução de (3.1) *é contínua com relação aos dados iniciais.*

Para os casos

$$-1 < s < 0 \ e \ s = \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \ ou \ 0 \leqslant s \leqslant \frac{n(\sigma-1)-n}{\sigma},$$

de maneira análoga, utilizando as estimativas (3.14) *e* (3.15) *provamos a dependência contínua dos dados iniciais. No último caso, feito no Passo 4 da demonstração do teorema 3.1, provamos o resultado utilizando as estimativas* (3.16) *e* (3.17).

(iii) O domínio de s *no intervalo* $[-1, \infty)$ *é otimo. De fato, podemos mostrar má-colocação para as equações de Navier-Stokes em* $PM^s_{2,\sigma}$ *para* $s < -1$ *e* $1 \leqslant \sigma < \infty$ *, o que será feito no cápitulo 4 dessa dissertação.*

(iv) Em alguns casos, podemos mostrar que a condição inicial no Teorema 3.1 está inclusa nos resultados apresentados em [17] ou [20]. Se o índice de derivação é $s = -1$*, temos* $\sigma = 1$ *e*

$$M^{-1}_{q,1}(\mathbb{R}^n) \subset vmo^{-1} \cap gmo^{-1} \ se \ 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{3.18}$$

Além disso, se $s = -1$, a condição inicial u_0 para soluções locais está inclusa no resultado de Miura [20] que provou a existência de solução local para $u_0 \in vmo^{-1} \cap gmo^{-1}$. Para soluções globais, temos

$$M^s_{q,\sigma}(\mathbb{R}^n) \subset BMO^{-1} \text{ , se } -1 \leqslant s \leqslant 0 \text{ , } s = \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 \text{ e } 1 \leqslant q \leqslant n. \tag{3.19}$$

Mais ainda, se $-1 \leqslant s \leqslant 0$, a condição inicial está inclusa nos resultados de Koch e Tataru [17] que provou a existência de solução global para $u_0 \in BMO^{-1}$.

As inclusões (3.18) e (3.19) foram provadas no capítulo 2 dessa disertação. Nós não conhecemos tais relações para o caso $s = \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 > -1$ para soluções locais, e o caso $s = \frac{n(\sigma-1)}{\sigma} - 1 > 0$ para soluções globais.

(v) As soluções globais do Teorema 3.1 são obtidas pelo efeito de suavização do propagador $e^{t\triangle}$. De fato, a solução $u(t)$ obtida no teorema é pequena no espaço de Lebesgue $L^n(\mathbb{R}^n)$, se $0 < t \leqslant 1$ e a condição inicial u_0 é suficientemente pequena. Assim, a solução $u(t)$ existe globalmente no tempo por resultado provado por Kato em [15]. Além disso, obtemos também que a norma $\| u(t) \|_q$ decaí como $t^{-\frac{(1-\frac{n}{q})}{2}}$, e a norma $\| \nabla u(t) \|_q$ decaí como $t^{-(1-\frac{n}{2q})}$, quando $t \to \infty$, incluindo o caso $q = \infty$.

3.2 Existência e unicidade para a equação do calor semilinear

Nesta seção estudaremos o problema de Cauchy (H). Sem perda de generalidade, vamos considerar $\lambda = 1$. Além disso, como temos dificuldades para trabalhar com p sendo um número real em espaços de modulação, vamos tomar p como um número natural similarmente a resultados em [13], [24], [25]. Aplicando a transformada de Fourier no sistema (H), obtemos o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\partial_t u) - \mathcal{F}(\triangle u) = \mathcal{F}(|u|^{p-1}u) & , (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \mathcal{F}u(0,x) = \mathcal{F}u_0(x) & , x \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \partial_t(\mathcal{F}u) - (\sum_{j=1}^{n} -\xi_j^2)\mathcal{F}u = \mathcal{F}(|u|^{p-1}u) & , (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \\ \mathcal{F}u(0,x) = \mathcal{F}u_0(x) & , x \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

que tem como solução

$$\mathcal{F}u(t,\xi) = e^{-\xi^2 t}\mathcal{F}u_0(\xi) + \int_0^t e^{-\xi^2(t-s)}\mathcal{F}(|u|^{p-1}u)(s,\xi)ds.$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa na equação acima, obtemos que se u é solução de (H), então u satisfaz a seguinte equação integral

$$u = e^{t\triangle}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\triangle}|u|^{p-1}u ds.$$

Se considerarmos o termo não linear sendo $|u|^{p-1}u$ para a equação do calor (H), pode-se tratar o problema com a condição de $p-1$ sendo um número par. Se $p-1$ for um número real qualquer, a não-linearidade $|u|^{p-1}$ não é no geral uma função suave o que dificultado o tratamento da equação. Logo , vamos assumir que $p-1$ é um número par e assim vamos considerar a seguinte equação integral

$$(u)(t) = e^{t\triangle}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}u^p d\tau \tag{3.20}$$

A seguir vamos enunciar os resultados principais dessa seção, os quais a demonstração será feita em conjunto.

Teorema 3.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1 \leqslant \sigma < \infty$ e $p \in \mathbb{N}$.*

(i) Sejam s, σ e p satisfazendo

$$-1 \leqslant s < 0 \ , \ 1 \leqslant p \leqslant \min\{1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}, \frac{2}{-s}\} \text{ e } p < \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}.$$

Então para, toda $u_0 \in M^s_{q,\sigma}$, existe $T > 0$ tal que (H) tem uma única solução em X_T, onde

$$X_T = \{u \in C([0,T], M^s_{q\sigma}); \| u \|_{X_T} < \infty\}$$

e

$$\| u \|_{X_T} = \sup_{t \in (0,T)} \| u(t) \|_{M^s_{q,\sigma}} + \| u \|_Z$$

com

$$\| u \|_Z = \begin{cases} \| u \|_{l^{0,\sigma} L^p_T L^q}, & \text{se } s = \dfrac{-2}{p} \\ \sup\limits_{t \in (0,T)} t^{\frac{|s|}{2} + \frac{n}{2}(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\sigma})} \| u(t) \|_{M^0_{q,\nu}}, & \text{se } \dfrac{-2}{p} < s < 0 \end{cases},$$

onde ν é número real arbitrário satisfazendo,

$$\nu \leqslant \sigma \text{ e } \frac{p-1}{p} < \frac{1}{\nu} < \frac{1}{\sigma} + \frac{2+ps}{pn}.$$

(ii) Sejam s, σ e p satisfazendo

$$s \geqslant 0 \text{ e } 1 < p \leqslant 1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}.$$

Então, para toda $u_0 \in M^s_{q,\sigma}$, existe $T > 0$ tal que (H) tem uma única solução em X_T, onde

$$X_T = \{u \in C([0,T], M^s_{q,\sigma}); \| u \|_{X_T} < \infty\}$$

e

$$\| u \|_{X_T} = \sup_{t \in (0,T)} \| u(t) \|_{M^s_{q,\sigma}} + \| u \|_Z$$

com

$$\| u \|_Z = \begin{cases} \sup\limits_{t\in(0,T)} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} \| u(t) \|_{M^s_{q,\sigma}}, & se\ p = 1 + \dfrac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}\ ou\ p \geqslant 1 + \dfrac{n}{n(\sigma-1)-\sigma s} \\ 0, & em\ caso\ contrário \end{cases},$$

onde ν é um número real satisfazendo,

$$\frac{p-1}{p}(1-\frac{s}{n}) < \frac{1}{\nu} < \frac{1}{\sigma} + \frac{(p-1)[n(\sigma-1)-\sigma s]}{p\sigma n}.$$

Em (i) e (ii), se $u, v \in X_T$ são soluções para dados iniciais u_0 e v_0, respectivamente segue que

$$\| u - v \|_{X_T} \longrightarrow 0\ ,\ quando\ \| u_0 - v_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} \longrightarrow 0.$$

Mais ainda, se $p \geqslant 1 + \frac{2q}{n} > 1 + \frac{2}{n}$ e u_0 é suficientemente pequeno, a solição existe globalmente no tempo.

Teorema 3.3. *Sejam $n = 1, p = 2$ e $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Então para toda $u_0 \in M^{-1}_{q,2}(\mathbb{R})$ existe $T > 0$ tal que (H) tem solução única u em X_T, onde*

$$X_T = \{u \in C([0,T], M^{-1}_{q,2}(\mathbb{R})); \| u \|_{X_T} < \infty\}$$

e

$$\| u \|_{X_T} = \sup_{t\in(0,T)} \| u(t) \|_{M^{-1}_{q,2}} + \| u \|_{l^{0,2}L^2_T L^q}\ .$$

Além disso, se $u, v \in X_T$ são soluções para dados iniciais u_0 e v_0, respectivamente, segue que

$$\| u - v \|_{X_T} \longrightarrow 0\ ,\ quando\ \| u_0 - v_0 \|_{M^{-1}_{q,2}} \longrightarrow 0.$$

Mais ainda, se $p \geqslant 1 + 2q > 3$ e u_0 é suficientemente pequeno, a solição existe globalmente no tempo.

Para cada $u \in C([0,T], M^s_{q,\sigma})$, defina

$$\| u \|_Y = \sup_{t\in(0,T)} \| u(t) \|_{M^s_{q,\sigma}}$$

e

$$\Psi(u)(t) = e^{t\triangle}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau,$$

e considere a norma $\| \cdot \|_Z$ como definida nos Teoremas 3.2 e 3.3. Antes de provarmos os teoremas enunciados acima, vamos introduzir um lema que nos dá estimativas para a parte bilinear da equação (3.20).

Lema 3.2. *(i) Sejam s, σ e p satisfazendo*

$$-1 \leqslant s < 0 \ , \ 1 \leqslant p \leqslant \min\{1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1) - \sigma s}, \frac{2}{-s}\} \ e \ p < \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}.$$

Então, existem $C, \alpha > 0$ e $\beta \geqslant 0$ tais que

$$\| \Psi(u) \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} + C(T^\alpha + T^\beta) \| u \|_Z^p \tag{3.21}$$

e

$$\| \Psi(u) \|_Z \leqslant \| e^{t\triangle} u_0 \|_Z + C(T^\alpha + T^\beta) \| u \|_Z^p \ . \tag{3.22}$$

(ii) Sejam s, σ e p satisfazendo

$$s \geqslant 0 \ e \ 1 < p \leqslant 1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}.$$

Então, existem $C, \alpha > 0$ e $\beta \geqslant 0$ tais que

$$\| \Psi(u) \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} + C(T^\alpha + T^\beta) \| u \|_Z^p \tag{3.23}$$

e

$$\| \Psi(u) \|_Z \leqslant \| e^{t\triangle} u_0 \|_Z + C(T^\alpha + T^\beta) \| u \|_Z^p \ . \tag{3.24}$$

Demonstração:

Demonstração de (i) Vamos separar a demonstração deste item em dois passos. No passo 1 vamos considerar o caso $s = \frac{-2}{p}$ e no passo 2 o caso $\frac{-2}{p} < s < 0$.

Passo 1: Primeiramente suponhamos $s > \frac{-n}{\sigma}$. Neste caso,

$$\frac{1}{\sigma} - \frac{2}{pn} \leqslant \frac{p}{\sigma} - (p-1).$$

Na norma $\| \cdot \|_Y$, aplicando a Proposição 2.7 (ver p. 38), a desigualdade (2.17) (ver p. 30) e a Proposição 2.1 (ver p. 21), obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau \right\|_{M^{\frac{-2}{p}}_{q,\sigma}} &\leqslant C \| u^p \|_{l^{\frac{-2}{p},\sigma} L^1_T L^q} \\ &\leqslant C \| u \|_{l^{0,\sigma} L^p_T L^{pq}} \\ &\leqslant C \| u \|_{l^{0,\sigma} L^p_T L^q} \\ &= C \| u \|_Z \ . \end{aligned}$$

Na norma $\| \cdot \|_Z$, pela Proposição 2.7, desigualdade (2.17) e Proposição 2.1, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau \right\|_{l^{0\sigma} L^p_T L^q} &\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| u^p \|_{l^{\frac{-2}{p},\sigma} L^1_T L^q} \\ &\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| u \|^p_{l^{0,\sigma} L^p_T L^{pq}} \\ &\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| u \|_Z^p \ . \end{aligned}$$

Logo, tomando $\alpha = \dfrac{1}{p}$ e $\beta = 0$ obtemos, (3.23) e (3.24). Agora, suponha $s < \dfrac{-n}{\sigma}$ e assim, das condições do lema, devemos ter $\sigma \leqslant \dfrac{p}{p-1}$.

Na norma $\| \cdot \|_Y$, aplicando as Proposições 2.1, 2.7 e a desigualdade (2.17), temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau \right\|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} &\leqslant C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau \right\|_{M_{q,\infty}^0} \\
&\leqslant C \| u^p \|_{l^{0,\infty} L_T^1 L^q} \\
&\leqslant C \| u \|^p_{l^{0,\frac{p}{p-1}} L_T^p L^{pq}} \\
&\leqslant C \| u \|^p_{l^{0,\sigma} L_T^p L^q} \\
&= C \| u \|_Z^p .
\end{aligned}$$

Na norma $\| \cdot \|_Z$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau \right\|_{l^{0,\sigma} L_T^p L^q} &\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| u^p \|_{l^{\frac{-2}{p},\sigma} L_T^p L^q} \\
&\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| u^p \|_{l^{0,\infty} L_T^1 L^q} \\
&\leqslant C \| u \|^p_{l^{0,\frac{p}{p-1}} L_T^p L^{pq}} \\
&\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| u \|_Z^p .
\end{aligned}$$

Assim, tomando $\alpha = \dfrac{1}{p}$ e $\beta = 0$, conseguimos (3.23) e (3.24). Finalmente, consideremos $s = \dfrac{-n}{\sigma}$. Pelas condições do lema, tem-se $n = 1$, $s = -1$, $\sigma = 1$ e $p = 2$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^2 d\tau \right\|_{M_{q,1}^{-1}} &\leqslant C \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^2 d\tau \right\|_{M_{q,1}^0} \\
&\leqslant C \| u^2 \|_{l^{0,1} L_T^1 L^q} \\
&\leqslant C \| u \|^2_{l^{0,1} L_T^2 L^{2q}} \\
&\leqslant C \| u \|_Z^2 .
\end{aligned}$$

Para a norma $\| \cdot \|_Z$, segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau \right\|_{l^{0,1} L_T^2 L^q} &\leqslant C(1 + T) \| u^2 \|_{l^{-1,1} L_T^1 L^q} \\
&\leqslant C(1 + T) \| u \|_{l^{0,1} L_T^2 L^{2q}} \\
&\leqslant C(1 + T) \| u \|_Z^2 .
\end{aligned}$$

Logo, tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, obtemos as estimativas desejadas.

Passo 2: Suponhamos inicialmente $s > \dfrac{-n}{\sigma}$. Seja $\tilde{\nu}$ satisfazendo

$$\nu \leqslant \tilde{\nu} \text{ e } \frac{1}{\tilde{\nu}} - \frac{|s|}{n} \leqslant \frac{p}{\nu} - (p-1).$$

Se $\sigma < \tilde{\nu}$, das desigualdades (2.22) (ver p. 32), (2.16) (ver p. 30) e da Proposição 2.1, segue que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}u^p d\tau\right\|_{M^s_{q,\sigma}} &\leqslant C\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u^p \parallel_{M^s_{q,\tilde{\nu}}} d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u \parallel^p_{M^0_{pq,\nu}} d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u \parallel^p_{M^0_{q,\nu}} d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Z \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})})\tau^{-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Z (t^{1-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} + t^{1-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}).
\end{aligned}$$

Logo, tomamos $\alpha = 1 - \dfrac{p|s|}{2} - \dfrac{pn}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma})$ e $\beta = 1 - \dfrac{p|s|}{2} - \dfrac{pn}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma}) - \dfrac{n}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma})$, obtemos (3.23).

Se $\sigma \geqslant \tilde{\nu}$ de maneira análoga, aplicando a Proposição 2.1 e as desigualdades (2.22) e (2.16) obtemos a estimativa.

Na norma $\| \cdot \|_Z$, das desigualdades (2.22), (2.23), (2.16) e da Proposição 2.1, temos que

$$\begin{aligned}
&t^{\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}u^p d\tau\right\|_{M^0_{q,\nu}} \leqslant Ct^{\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{|s|}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u^p \parallel_{M^{-|s|}_{q,\tilde{\nu}}} d\tau \\
&\leqslant Ct^{\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{|s|}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u \parallel^p_{M^0_{pq,\nu}} d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Z t^{\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{|s|}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})})\tau^{-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Z (t^{1+\frac{|s|}{2}-\frac{p|s|}{2}-\frac{(p-1)n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} + t^{1-\frac{p|s|}{2}-\frac{(p-1)n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}).
\end{aligned}$$

Assim, tomando $\alpha = 1 + \dfrac{|s|}{2} - \dfrac{p|s|}{2} - \dfrac{(p-1)n}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma})$ e $\beta = 1 - \dfrac{p|s|}{2} - \dfrac{(p-1)n}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma}) - \dfrac{n}{2}(\dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\sigma})$, obtemos (3.24).

De maneira análoga ao feito acima, mostramos as estimativas (3.23) e (3.24) para o caso $s \leqslant \dfrac{-n}{\sigma}$.

Demonstração de (ii) Seja $\tilde{\nu}$ satisfazendo

$$\frac{1}{\tilde{\nu}} - \frac{(p-1)s}{n} = \frac{p}{\nu} - (p-1).$$

Pelas condições para s, σ e ν no lema, obtemos que $\sigma < \tilde{\nu} < \infty$.

Na norma $\|\cdot\|_Y$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau\right\|_{M^s_{q,\sigma}} &\leqslant C\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\tilde{\nu}}-\frac{1}{\sigma})}) \parallel u \parallel^p_{M^s_{pq,\nu}} d\tau \\
&\leqslant C\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\tilde{\nu}}-\frac{1}{\sigma})}) \parallel u \parallel^p_{M^0_{q,\nu}} d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Z \int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\tilde{\nu}}-\frac{1}{\sigma})})\tau^{-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Z (t^{1-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} + t^{1-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})+\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}).
\end{aligned}$$

Logo, obtemos (3.23). Na norma $\|\cdot\|_Z$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
&t^{\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau\right\|_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant Ct^{\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u^p \parallel_{M^s_{q,\tilde{\nu}}} d\tau \\
&\leqslant Ct^{\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})}) \parallel u \parallel^p_{M^s_{pq,\nu}} d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Z t^{\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}\int_0^t (1+(t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})})\tau^{-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Z (t^{1-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})+\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})} + t^{1+\frac{|s|}{2}+\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})-\frac{n}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\tilde{\nu}})-\frac{p|s|}{2}-\frac{pn}{2}(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\sigma})}).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos (3.24).

$\blacksquare$

3.2.1 Demonstração dos Teoremas 3.2 e 3.3

Iremos fazer a demonstração em 4 passos. No passo 1 vamos considerar o caso $s = \dfrac{-2}{p}$ em (i) do Teorema 3.2 e o Teorema 3.3 juntos. Em seguida, trataremos (i) do Teorema 3.2 para o caso $\dfrac{-2}{p} < s < 0$ no Passo 2, (ii) do Teorema 3.2 para o caso $s \geqslant 1$ e $p = 1 + \dfrac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}$ ou $p \geqslant 1 + \dfrac{n}{n(\sigma-1)-\sigma s}$ no Passo 3, e o último caso no Passo 4.

Passo 1: Da Proposição 2.6 (ver p. 36), $\parallel e^{t\triangle}u_0 \parallel_Z$ é pequeno quando $T > 0$ é suficientemente pequeno, onde T depende de cada u_0. Seja $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ satisfazendo

$$\parallel e^{t\triangle}u_0 \parallel_Z < \varepsilon \text{ e } C(1+T^{\frac{1}{p}})2^p\varepsilon^{p-1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Consideramos o espaço métrico

$$X_T = \{u \in C([0,T], M^s_{q,\sigma}); \parallel u \parallel_Y \leqslant C \parallel u_0 \parallel_{M^{-1}_{q,1}} + \varepsilon\ ,\ \parallel u \parallel_Z \leqslant 2\varepsilon\},$$

munido com a métrica

$$d(u,v) = \parallel u-v \parallel_Y + \parallel u-v \parallel_Z .$$

Assim, das desigualdades provadas no item (i) do Lema 3.2, segue que $\Psi(X_T) \subset X_T$ e vamos provar também que Ψ é uma contração. Analisaremos apenas o caso $s > \dfrac{-n}{\sigma}$, pois os outros saem de maneira análoga.

Na norma $\| \cdot \|_Y$, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} &= \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(u^p - v^p) d\tau \right\|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} \\
&= \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(u - v)(u^{p-1} + v^{p-1}) d\tau \right\|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} \\
&\leqslant C \quad \| (u-v)(u^{p-1} + v^{p-1}) \|_{l^{\frac{-2}{p},\sigma} L_T^1 L^q} \\
&\leqslant C \| u - v \|_{l^{0,\sigma} L_T^p L^{2q}} \| u^{p-1} + v^{p-1} \|_{l^{0,\sigma} L_T^{\frac{p}{p-1}} L^{2q}} \\
&\leqslant C \| u - v \|_Z (\| u \|_Z^{p-1} + \| v \|_Z^{p-1}).
\end{aligned}$$

Agora, na norma $\| \cdot \|_Z$, segue que

$$\begin{aligned}
\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_Z &= \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(u^p - v^p) d\tau \right\|_{l^{0,\sigma} L_T^p L^q} \\
&\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| (u-v)(u^{p-1} + v^{p-1}) \|_{l^{\frac{-2}{p},\sigma} L_T^1 L^q} \\
&\leqslant C(1 + T^{\frac{1}{p}})(\| u \|_Z^{p-1} + \| v \|_Z^{p-1}) \| u - v \|_Z .
\end{aligned}$$

Assim, chegamos a estimativa

$$d(\Psi(u), \Psi(v)) \leqslant C(T^\alpha + T^\beta)(\| u \|_Z^{p-1} + \| v \|_Z^{p-1}) d(u,v) \leqslant \frac{1}{2} d(u,v).$$

Logo, aplicando o Teorema do Ponto Fixo de Banach obtemos u ponto fixo de Ψ em X_T que será a única solução da equação (3.20) em X_T. Obtemos assim a solução desejada.

Agora mostremos a existência de $T > 0$ dependendo somente da norma de u_0, quando a norma de u_0 for pequena. Pela proposição 2.6, temos que

$$\| e^{t\triangle} u_0 \|_Z = \| e^{t\triangle} u_0 \|_{l^{0,\sigma} L_T^p L^q} \leqslant C(1 + T^{\frac{2}{p}}) \| u_0 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} .$$

De maneira similar ao feito acima, mostramos a existência de $C_0 > 0$ tal que

$$\| \Psi(u) \|_{X_T} \leqslant C_0(1 + T^{\frac{2}{p}}) \| u_0 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} + C_0(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| u \|_{X_T}^p$$

e

$$\| \Psi(u) - \Psi(u) \|_{X_T} \leqslant C_0(1 + T^{\frac{1}{p}})(\| u \|_{X_T}^{p-1} + \| v \|_{X_T}^{p-1}) \| u - v \|_{X_T} . \tag{3.25}$$

Sejam u_0 e $T > 0$ satisfazendo

$$\| u_0 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} < \frac{1}{2^{p-1} C_0^p} \text{ e } 2^{p-1} C_0^p (1 + T^{\frac{1}{p}})^p \| u_0 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}}^{p-1} \leqslant 1. \tag{3.26}$$

Agora consideremos o espaço métrico

$$\{u \in C([0,T], M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}); \| u \|_{X_T} \leqslant 2C_0(1+T^{\frac{1}{p}}) \| u_0 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}}\}, \tag{3.27}$$

com a métrica

$$d(u,v) = \| u - v \|_{X_T} .$$

Assim, se u, v estão nesse espaço, segue que

$$\| \Psi(u) \|_{X_T} \leqslant 3C_0(1+T^{\frac{1}{p}}) \| u_0 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}}$$

e

$$\| \Psi(u) - \Psi(v) \|_{X_T} \leqslant \frac{1}{2} \| u - v \|_{X_T} .$$

Logo, obtemos a solução desejada através do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Passo 2: Aplicando a Proposição 2.5, $\| e^{t\triangle}u_0 \|_Z$ é pequena para $T > 0$ suficientemente pequeno, onde T depende de cada u_0. Tome $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ satisfazendo

$$\| e^{t\triangle}u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} < \varepsilon \text{ e } C(T^\alpha + T^\beta)2^p\varepsilon^{p-1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Definimos o espaço métrico

$$X_T = \{u \in C([0,T], M^s_{q,\sigma}); \| u \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} + \varepsilon \ , \ \| u \|_Z \leqslant 2\varepsilon\},$$

munido da métrica

$$d(u,v) = \| u - v \|_Y + \| u - v \|_Z .$$

Assim, das desigualdades (3.23) e (3.24), provadas no Lema 3.2, segue que $\Psi(X_T) \subset X_T$. Além disso, de maneira análoga ao feito no Passo 1, obtemos

$$d(\Psi(u), \Psi(v)) \leqslant C(\| u \|_Z^{p-1} + \| v \|_Z^{p-1})(T^\alpha + T^\beta)d(u,v) \leqslant \frac{1}{2}d(u,v)$$

Então, Ψ é uma contração em X_T e assim obtemos a solução desejada através do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Agora, note que se

$$p < \min\{1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}, \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}, \frac{2}{-s}\},$$

teremos $\alpha, \beta > 0$ e então podemos tomar $T > 0$ dependendo somente da norma de u_0, como feito também no Passo 2 do Teorema 3.1.

Passo 3: De posse das estimativas (3.23) e (3.24), mostradas no Lema 3.2, a obtenção da solução segue de maneira análoga aos Passos 1 e 2.

Passo 4: No passo 4, vamos mostrar que existe $C, \alpha > 0$ tais que,

$$\| \Psi(u) \|_Y \leqslant C \| u_0 \|_{M^s_{q,\sigma}} + CT^\alpha \| u \|_Y^p . \tag{3.28}$$

Seja ν satisfazendo

$$\sigma < \nu < \infty \ , \ \frac{1}{\nu} - \frac{s(p-1)}{n} = \frac{p}{\sigma} - (p-1).$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} u^p d\tau \right\|_{M^s_{q,\sigma}} &\leqslant C \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})}) \parallel u^p \parallel_{M^s_{q,\nu}} d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})}) \parallel u \parallel^p_{M^s_{pq,\sigma}} d\tau \\
&\leqslant C \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})}) \parallel u \parallel^p_{M^s_{q,\sigma}} \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Y \int_0^t (1 + (t-\tau)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})}) d\tau \\
&\leqslant C \parallel u \parallel^p_Y (T + T^{1-\frac{n}{2}(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\nu})}).
\end{aligned}$$

Note que $\nu < \infty$, pois $p < 1 + \dfrac{n}{n(\sigma-1)-\sigma s}$. Assim, obtemos (3.28).

Seja $T > 0$ satisfazendo

$$C^p T^\alpha 2^p \parallel u_0 \parallel^{p-1}_{M^s_{q,\sigma}} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.29}$$

Agora consideremos o espaço métrico

$$X_T = \{u \in C([0,T], M^s_{q,\sigma}); \parallel u \parallel_Y \leqslant 2C \parallel u_0 \parallel_{M^s_{q,\sigma}}\},$$

munido da métrica

$$d(u,v) = \parallel u - v \parallel_Y .$$

Logo, se u, v estão nesse espaço, por (3.28), podemos estimar

$$\parallel \Psi(u) \parallel_Y \leqslant 2C \parallel u_0 \parallel_{M^s_{q,\sigma}}$$

e

$$\parallel \Psi(u) - \Psi(v) \parallel_Y \leqslant \frac{1}{2} \parallel u - v \parallel_Y . \tag{3.30}$$

Agora, usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, obtemos um único ponto fixo de Ψ em X_T que é a solução que buscamos.

■

Observação 3.2. *(i) Em (ii) do Teorema 3.2, o limite superior de* $p = 1 + \dfrac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}$ *parece ser ótimo devido as seguintes inclusões contínuas. Para* $1 \leqslant \sigma \leqslant 2$*, temos que*

$$M^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\sigma}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\frac{\sigma}{\sigma-1}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n) \ , \ se \ \frac{s}{n} = \frac{\sigma-1}{\sigma} - \frac{1}{r}.$$

Para $2 \leqslant \sigma \leqslant \infty$*, temos que*

$$H^{s,\frac{\sigma}{\sigma-1}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^s_{\frac{\sigma}{\sigma-1},\sigma}(\mathbb{R}^n),$$

$$H^{s,\frac{\sigma}{\sigma-1}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n), \text{ se } \frac{s}{n} = \frac{r-1}{r} - \frac{1}{\sigma}.$$

Para ambos os casos, temos

$$1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s} = 1 + \frac{2r}{n}$$

e o lado direito é obtido pela invariância de escala de $L^r(\mathbb{R}^n)$. Para isso, é necessário que p satisfaça $p \leqslant 1 + \frac{2r}{n}$ para obter a solução local se a condição inicial está em $L^r(\mathbb{R}^n)$, que foi provado por Weissler [27].

(ii) Em (i) do Teorema 3.2, as condições $p < \frac{-2}{s}$ e $p < \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}$ são necessárias para a existência de ν. E as condições $p = \frac{-2}{s}$ e $p = \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}$ são ótimas. De fato, podemos mostrar a má-colocação para (H) em $M^s_{2,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ se

$$p > \frac{-2}{s} \text{ ou } p > \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}, \tag{3.31}$$

o que será objeto de estudo do capítulo 4 dessa dissertação. Além disso, o caso

$$-1 \leqslant s < 0 \ , \ 1 < p \leqslant \min\{1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}, \frac{-2}{s}\} \text{ e } p = \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}, \tag{3.32}$$

não é tratado no Teorema 3.2. Contudo, podemos tratar um caso específico, que é o teorema 3.3.

(iii) O Teorema 3.3 nos fornece um exemplo típico. Seja $u_0 \in M^{-1}_{2,2}(\mathbb{R})$, então obtemos uma solução local de (H) pelo Teorema 3.3 e o índice de derivação $s = -1$ é ótimo por (ii) dessa observação. Ou seja, se o índice de derivação $s < -1$, (H) é má-colocada em $M^s_{2,2}(\mathbb{R})$.

(iv) A existência do tempo $T > 0$ não pode ser tomada dependendo apenas da norma da condição inicial u_0. Em nossa demonstração dos Teoremas 3.2 e 3.3, a existência do tempo T pode ser tomada dependendo somente da norma de u_0 quando

$$p < \min\{1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s} \ , \ p = \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s} \ , \ \frac{2}{-s}\}. \tag{3.33}$$

ou quando a norma de u_0 for pequena.

(v)(Dependência contínua dos dados iniciais)

Fixe $u_0 \in PM^s_{q,\sigma}$ e considere $T > 0$ dependêndo apenas da norma de u_0,o qual provamos a existência nos teoremas 3.2 e 3.3, desde que (3.33) seja satisfeito.

Primeiramente vamos considerar o caso $s = -\frac{2}{p}$. Relembre o espaço X_T definido em (3.27) na demonstração dos teoremas 3.2 e 3.3. Sejam v_1 e v_2 dados iniciais satisfazendo

$$\| v_1 \|_{M^{-\frac{2}{p}}_{q,\sigma}}, \| v_2 \|_{M^{-\frac{2}{p}}_{q,\sigma}} \leqslant \| u_0 \|_{M^{-\frac{2}{p}}_{q,\sigma}}$$

Logo, segue que, se w_1 e w_2 são soluções da equação (3.20) para os dados iniciais v_1 e v_2, respectivamente, ou seja

$$w_1 = e^{t\triangle}v_1 + \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} w_1^p d\tau$$

e

$$w_2 = e^{t\triangle}v_2 + \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle} w_2^p d\tau,$$

então $w_1, w_2 \in X_T$.

Assim, aplicando a desigualdade triângular e as estimativas (3.25), (2.21) e (3.26) (ver pp. 32 e 65), obtemos

$$\begin{aligned} \| w_1 - w_2 \|_{X_T} &\leqslant \| e^{t\triangle}(v_1 - v_2) \|_{X_T} + C_0(1 + T^{\frac{1}{p}})(\| u \|_{X_T}^{p-1} + \| v \|_{X_T}^{p-1}) \| w_1 - w_2 \|_{X_T} \\ &\leqslant C_0(1 + T^{\frac{1}{p}}) \| v_1 - v_2 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} + 2^p C_0^p (1 + T^{\frac{1}{p}})^p \| u_0 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}}^{p-1} \| w_1 - w_2 \|_{X_T} \\ &\leqslant C \| v_1 - v_2 \|_{M_{q,\sigma}^{\frac{-2}{p}}} + \frac{1}{2} \| w_1 - w_2 \|_{X_T} , \end{aligned}$$

e então

$$\| w_1 - w_2 \|_{X_T} \leqslant C \| v_1 - v_2 \|_{M_{q,\sigma}^{-\frac{2}{p}}}$$

Portante, concluímos que a solução de (3.20) é contínua com relação aos dados iniciais.

Para os casos

$$-\frac{2}{p} < s < 0 \text{ e } p = 1 + \frac{2\sigma}{n(\sigma-1) - \sigma s} \text{ ou } p \geqslant 1 + \frac{n}{n(\sigma-1) - \sigma s},$$

de maneira análoga, utilizando as estimativas (3.25) e (3.26) provamos a dependência contínua dos dados iniciais. No último caso, feito no Passo 4 da demonstração dos teorema 3.2 e 3.3, provamos o resultado utilizando as estimativas (3.29) e (3.30).

4 Alguns casos de má colocação em espaços de modulação

4.1 Má-colocação para (NS) em $PM^s_{2,\sigma}(\mathbb{R}^n)$

Nesta seção, vamos mostrar a má colocação do problema (NS) no espaço $PM^s_{2,\sigma}(\mathbb{R}^n)$ com $s < -1$ e $1 \leqslant \sigma < \infty$. Para isso, vamos mostrar que a dependência contínua da condição inicial falha nesse caso.

Note que é suficiente provarmos que o mapa de $(PM^{-1}_{2,1}, \|\cdot\|_{PM^{-1}_{2,1}})$ para $(C([0,1], M^{-1}_{2,1}), \|\cdot\|_{C([0,1],M^{-1}_{2,1})})$ definido por

$$\Theta : f \longmapsto \int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(e^{t\triangle}f) \otimes (e^{t\triangle}f))d\tau.$$

é descontínuo.

Observe que podemos tomar a existência de $T > 0$ sendo maior que 1 se a condição inicial for suficientemente pequena. Suponha que o mapa Θ é contínuo.

Assim, como Θ é bilinear e contínuo então é uma aplicação limitada, ou seja, existe $C > 0$, tal que

$$\frac{\left\|\int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(e^{t\triangle}f) \otimes (e^{t\triangle}f))d\tau\right\|_{C([0,1],M^{-1}_{2,1})}}{\| f \|_{M^{-1}_{2,\sigma}} \| f \|_{PM^{-1}_{2,\sigma}}} \leqslant C \ , \forall f \in PM^{-1}_{2,\sigma}.$$

Então,

$$\sup_{t\in(0,1)} \left\|\int_0^t \nabla e^{(t-\tau)\triangle}\mathbb{P}(e^{t\triangle}f) \otimes (e^{t\triangle}f))d\tau\right\|_{M^{-1}_{2,\sigma}} \leqslant C \| f \|^2_{PM^{-1}_{2,\sigma}} .$$

Se a dimensão do espaço é par, definimos a j-ézima componente de $\mathcal{F}f$ por

$$(-1)^{j-1}\xi_j^{-1}\{\chi(\xi - Ne_1) + \chi(-\xi - Ne_1) + \chi(\xi + Ne_2) + \chi(-\xi + Ne_2)\}. \tag{4.1}$$

para $j = 1, \ldots, n$, onde N é um número natural grande qualquer, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ e χ é a função característica cujo suporte é o seguinte conjunto

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n; 1 \leqslant \xi_j \leqslant 2 \text{ se } j \text{ é ímpar }, -2 \leqslant \xi_j \leqslant -1 \text{ se } j \text{ é par }\}.$$

Assim, segue que div $f = 0$. Então, temos que

$$\| f \|_{M^s_{2,\sigma}} \leqslant CN^{2s}. \tag{4.2}$$

Por outro lado, tomando $t = \dfrac{1}{N^2}$, obtemos

$$\left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(e^{t\triangle} f) \otimes (e^{t\triangle} f)) d\tau \right\|_{M^s_{2,\sigma}} \geqslant CN^{-2}. \tag{4.3}$$

De fato, pelo Teorema de Plancherel e da desigualdade de Housdorff-Young (ver p. 9), temos que

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(e^{t\triangle} f) \otimes (e^{t\triangle} f)) d\tau \right\|_{M^s_{2,\sigma}} \geqslant \left\| \square_0 \int_0^{\frac{1}{N^2}} \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(e^{t\triangle} f) \otimes (e^{t\triangle} f)) d\tau \right\|_{L^2} \\
&\geqslant \left\| \varphi_0 \mathcal{F} \left(\int_0^{\frac{1}{N^2}} \nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(e^{t\triangle} f) \otimes (e^{t\triangle} f)) \right) d\tau \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} \varphi_0 \mathcal{F} \left(\nabla e^{(t-\tau)\triangle} \mathbb{P}(e^{t\triangle} f) \otimes (e^{t\triangle} f)) \right) d\tau \right\|_{L^2} \\
&\geqslant \left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} \varphi_0 \sum_{j=1}^n \xi_j e^{-(\frac{1}{N^2}-\tau)|\xi|^2} \left(1 - \frac{\xi_1}{|\xi|^2} \sum_{l=1}^n \xi_l \right) \mathcal{F}[(e^{\tau\triangle} f_j)(e^{\tau\triangle} f_1)] d\tau \right\|_{L^2},
\end{aligned}$$

onde f_j denota a j-ézima componente de f, e a última desigualdade é obtida considerando apenas a primeira coordenada da transformada de Fourier. Por simplicidade, definimos

$$F(\tau, \xi) := \varphi_0(\xi) \sum_{j=}^n \xi_j e^{-(\frac{1}{N^2}-\tau)|\xi|^2} \left(1 - \frac{\xi_1}{|\xi|^2} \sum_{l=1}^n \xi_l \right) \mathcal{F}[(e^{\tau\triangle} f_j)(e^{\tau\triangle} f_1)].$$

Se tomarmos $\xi_0 = (10^{-2}, 10^{-1}, 0, \ldots, 0)$, temos $F(\tau, \xi_0) \neq 0$, para todo $\tau \in [0, \frac{1}{N^2}]$. Assim, existe $\delta > 0$ independente de N e um aberto $E \subset \mathbb{R}^n$ com $\xi_0 \in E$, tal que

$$|F(\tau, \xi)| > \delta \ , \ \forall \tau \in [0, \frac{1}{N^2}] \ , \ \forall \xi \in E.$$

Assim,

$$\left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} F(\tau, \xi) d\tau \right\| \geqslant \frac{\delta}{2} \left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} d\tau \right\|_{L^2(E)} = \frac{\delta |E|}{2N^2}.$$

Logo, obtemos (4.3).

Agora, note que de (4.2) e (4.3) obtemos uma contradição. Portanto, o operador Θ não é contínuo e assim concluímos a má-colocação de (NS) nessas condições.

Se a dimensão do espaço é ímpar, definimos a j-ézima componente de $\mathcal{F}(f)$ como

$$\begin{cases} 2^{-1}\xi_j^{-1}\{\chi(\xi - Ne_1) + \chi(-\xi - Ne_1) + \chi(\xi + Ne_2) + \chi(-\xi + Ne_2))\}, & \text{se } j = 1, 3 \\ (-1)^{j-1}\xi_j^{-1}\{\chi(\xi - Ne_1) + \chi(-\xi - Ne_1) + \chi(\xi + Ne_2) + \chi(-\xi + Ne_2))\}, & \text{em caso contrário} \end{cases}.$$

A diferença nesse caso é a forma de garantir que $\operatorname{div} f = 0$. Fazendo $G(\xi) = \chi(\xi - Ne_1) + \chi(-\xi - Ne_1) + \chi(\xi + Ne_2) + \chi(-\xi + Ne_2))$, temos que

$$\begin{cases} \partial_j f_j = i2^{-1}\mathcal{F}^{-1}G & , \text{ se } j = 1, 3 \\ \partial_j f_j = i(-1)^{j-1}\mathcal{F}^{-1}G & , \text{ se } j = 2, 4, \ldots, n \end{cases}.$$

Assim, $\operatorname{div} f = 0$ e podemos tratar esse caso de maneira análoga ao caso de dimensão par.

4.2 Má-colocação para (H) em $M^s_{2,\sigma}(\mathbb{R}^n)$

No Teorema 3.3 demonstrado no cápitulo 3, consideramos relações entre p, s e σ que foram importantes para mostrar a existência da solução e principalmente a boa colocação da mesma. Nesta seção, iremos provar que essas condições são ótimas, ou seja, que para os casos

$$p > \frac{2}{-s} \text{ ou } p > \frac{(n+2)\sigma}{n(\sigma - 1) - \sigma s},$$

a boa-colocação de (H) falha em $M^s_{2,\sigma}$.

Assumimos que o mapa de $(M_{2,1}^{-\frac{2}{p}}, \| \cdot \|_{M^s_{2,\sigma}})$ para $(C([0,1], M_{2,\sigma}^{-\frac{2}{p}}), \| \cdot \|_{C([0,1], M_{2,\sigma}^{-\frac{2}{p}})}$) definido por

$$\Theta : f \longmapsto \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle} f)^p d\tau,$$

é contínuo.

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(e^{(\tau\triangle} f)^p d\tau &= \int_0^t e^{t-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle} f) \cdots (e^{\tau\triangle} f) d\tau \\ &= \int_0^t e^{t-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle} f) \otimes \ldots \otimes (e^{\tau\triangle}) d\tau. \end{aligned}$$

Logo, Θ é multilinear e então segue da continuidade que existe $C > 0$, tal que

$$\sup_{t\in(0,t)} \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle} f)^p d\tau \right\|_{M^s_{2,\sigma}} \leqslant C \parallel f \parallel^p_{M^s_{2,\sigma}} . \tag{4.4}$$

Consideremos primeiramente o caso $p > \dfrac{-2}{s}$. Seja $\mathcal{F}(f)$ definida por

$$\mathcal{F}f = \chi(\xi - Ne_1) + \chi(\xi + (p-1)Ne_1),$$

onde N é um número natural grande, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ e χ é a função característica cujo suporte é o conjunto

$$E = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n; -1 \leqslant \xi_j \leqslant 1 \ , \ j = 1, \ldots, n\}.$$

Assim, obtemos

$$\parallel f \parallel^p_{M^s_{2,\sigma}} \leqslant CN^{ps}. \tag{4.5}$$

Por outro lado, tomando $t = \dfrac{1}{N^2}$, temos que

$$\left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} e^{(\frac{1}{N^2}-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle}f)^p d\tau \right\|_{M^s_{2,\sigma}} \geqslant CN^{-2}. \tag{4.6}$$

De fato, da Desigualdade de Housdorff-Young, podemos estimar

$$\left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} e^{(\frac{1}{N^2}-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle}f)^p d\tau \right\|_{M^s_{2,\sigma}} \geqslant \left\| \mathcal{F}\left(\int_0^{\frac{1}{N^2}} e^{(\frac{1}{N^2}-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle}f)^p d\tau \right) \right\|_{M^s_{2,\sigma}}$$

Por simplicidade, escrevemos $\chi_N(\xi) = \chi(\xi - Ne_1)$. Se $\tau \in [0, \dfrac{1}{N^2}]$ e $\xi \in E$, existe $C > 0$ idependente de N, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\int_0^{\frac{1}{N^2}} e^{(\frac{1}{N^2}-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle}f)^p d\tau \right)(\xi) &\geqslant \int_0^{\frac{1}{N^2}} e^{-(\frac{1}{N^2}-\tau)|\xi|^2}(e^{-\tau|\xi|^2}\chi_N(\xi) \star \cdots \star e^{-\tau|\xi|^2}\chi_N(\xi))d\tau \\ &\geqslant C\int_0^{\frac{1}{N^2}} (\chi_N \star \cdots \star \chi_N \star \chi_{(p-1)N})(\xi)d\tau \\ &\geqslant CN^{-2}(\chi_N \star \cdots \star \chi_N \star \chi_{(p-1)N})(\xi). \end{aligned}$$

Como a medida de Lebesgue do suporte de $supp\chi_N$ e $supp\chi_{(p-1)N}$ são iguais a medida de E, obtemos (4.6).

Assim, de (4.4) a (4.6), obtemos uma contradição. Portanto concluímos, a má colocação nesse caso.

Agora vamos trabalhar o caso $p > \dfrac{p(n+2)\sigma}{n(\sigma-1)-\sigma s}$. Seja $\mathcal{F}(f)$ definida por

$$\mathcal{F}(f) = \chi(100N^{-1}(\xi - Ne_1)) + \chi(100N^{-1}(\xi + (p-1)Ne_1)).$$

Então, temos que

$$\| f \|^p_{M^s_{2,\sigma}} \leqslant CN^{ps+\frac{pn}{\sigma}}. \tag{4.7}$$

Por outro lado, tomando $t = \dfrac{1}{N^2}$, obtemos

$$\left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} e^{(\frac{1}{N^2}-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle}f)^p d\tau \right\|_{M^s_{2,\sigma}} \geqslant CN^{-2+(p-1)n}. \tag{4.8}$$

De fato, de maneira análoga a prova de (4.6), podemos estimar

$$\left\| \int_0^{\frac{1}{N^2}} e^{(\frac{1}{N^2}-\tau)\triangle}(e^{\tau\triangle}f)^p d\tau \right\|_{M^s_{2,\sigma}} \geqslant CN^2 \, \| (\tilde{\chi}_N \star \cdots \star \tilde{\chi}_N \star \tilde{\chi}_{-(p-1)N}) \|_{L^2(E)} \,, \tag{4.9}$$

onde $\tilde{\chi_N}(\xi) = \chi(100N^{-1}(\xi - Ne_1))$. Neste caso, a medida de Lebesgue de $supp\tilde{\chi_N}$ e $supp\tilde{\chi}_{-(p-1)N}$ é $100^n N^{-n}$ vezes a medida de E. Daí, obtemos

$$\| (\tilde{\chi}_N \star \cdots \star \tilde{\chi}_N \star \tilde{\chi}_{-(p-1)N}) \|_{L^2(E)} \geqslant CN^{(p-1)n} \tag{4.10}$$

De (4.9) e (4.10) obtemos (4.8). Portanto, temos uma contradição e assim concluímos a má-colocação nesse caso.

5 Conclusões

Este trabalho, possibilita ao autor e ao leitor o contato com alguns conceitos básicos da análise como transformada de Fourier, distribuições temperadas e multipliers de Fourier, que são de grande utilidade no estudo de equações diferenciais. O estudo dos espaços de modulação permite que nos familharizemos com espaços obtidos através de operadores de decomposição e a trabalhar com as normas desses espaços, que é o caso também dos espaços de Besov, para citar mais um exemplo.

Vale ressaltar que os resultados estudados nesta dissertação estendem os resultados obtidos por Tsukasa Iwabuchi em [13], dando ênfase aos espaços de modulação com índice de derivação negativa. Além disso, para soluções locais, se $s = -1$, a condição inicial u_0 está inclusa no resultado de Miura [20] que provou a existência de solução local para $u_0 \in vmo^{-1} \cap gmo^{-1}$. No caso de soluções globais, se $-1 \leqslant s \leqslant 0$, a condição inicial está inclusa nos resultados de Koch e Tataru [17] que provou a existência de solução global para $u_0 \in BMO^{-1}$.

Finalmente, os casos de má-colocação provados nesse trabalho nos dão condições de otimalidade para o índice de derivação s dos espaços $M^s_{q,\sigma}$ no caso das equações de Navier-Stokes, e para a potência p no caso da equação do calor semilinear.

Referências

1 BENNETH, C.; SHARPLEY, R. Interpolation of operators. *Pure Appl. Math*, v. 129, p. Academic Press,Inc.,Boston,MA, 1988.

2 BERGH, J.; LöFSTRöM, J. *Interpolation Spaces: An introduction*. 1. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1976.

3 BREZIS, H. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions. *J. Math. Pure Appl.*, v. 62, p. 73–97, 1983.

4 CANNONE, M. A generalization of a theorem by kato on navier-stokes equations. *Rev. Mat. Iberoamericana*, v. 13, p. 515–541, 1997.

5 FEICHTINGER, K. G. H. G. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decomposition, i. *J. Funct. Anal.*, v. 86, p. 307–340, 1989.

6 FEICHTINGER, K. G. H. G. Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decomposition, ii. *Monatash. Math.*, v. 108, p. 129–148, 1989.

7 FUJITA, H.; KATO, T. On the navier-stokes initial value problem i. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, v. 16, p. 269–315, 1964.

8 FUJITA, H. On the blowing up of solutions of the chauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, v. 13, p. 109–124, 1966.

9 FUIJTA, H. On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations. *Proc. Sympos. Pure Math.*, v. 18, p. 105–113, 1968.

10 GIGA, Y.; MIYAKAWA, T. Solutions in l^r of the navier-stokes initial value problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, v. 89, p. 267–281, 1985.

11 GRAFAKOS, L. *Classical Fourier Analysis*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 2008.

12 HAYAKAWA, K. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. *Proc. Japan Acad.*, v. 49, p. 503–505, 1973.

13 IWABUCHI, T. Well-posedness for nonlinear heat equations and navier-stokes equations in modulation spaces. *preprint*.

14 IWABUCHI, T. Navier-stokes equations and nonlinear heat equations in modulation spaces with negative derivative indices. *J. Differential Equations*, v. 248, p. 1972–2002, 2010.

15 KATO, T. Strong l^p-solutions of the navier-stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Math. Z.*, v. 187, p. 471–480, 1984.

16 KESAVAN, S. *Topics in functional analysis and Applications*. 1. ed. [S.l.]: New Age International(P) Lmt.,Publishers, 1989.

17 KOCH, H.; TATARU, D. Well-posedness for navier-stokes equations. *Adv. Math.*, v. 157, p. 22–35, 2001.

18 KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. 1. ed. [S.l.]: John Wiley and Sons, 1978.

19 LEMARIé-RIEUSSET, P. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. 1. ed. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 1960.

20 MIURA, H. Remarks on uniqueness of mild solutions to the navier-stokes equations. *J. Funct. Anal.*, v. 218, p. 110–129, 2005.

21 PLANCHON, F. Global strong solutions in sobolev or lebesgue spaces to the incompressible navier-stokes equations in $\mathbb{R}^3$. *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire*, v. 13, p. 319–336, 1996.

22 TOFT, J. Continuity properties for modulation spaces,with applications to pseudo-differential calculus, i. *J. Funct. Anal.*, v. 207, p. 399–429, 2004.

23 TRIEBEL, H. *Theory of function spaces*. 1. ed. [S.l.]: Birkhäuser Verlag, 1983.

24 WANG, B.; HUDZIK, H. The global cauchy problem for nls and nlkg with small rough data. *J. Differential Equations*, v. 232, p. 36–73, 2007.

25 WANG, L. Z. B.; GUO, B. Isometric decomposition operators, function spaces $e^{\lambda}_{p,q}$ and applications to nonlinear evolution equations. *J. Funct. Anal.*, v. 233, p. 1–39, 2006.

26 WANG, B. et al. *Harmonic Analysis Method for Nonlinear Evolution Equations, I*. 1. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011.

27 WEISSLER, F. Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in l^p. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 29, p. 79–102, 1980.

28 KOBAYASHI T. SIRAO, H. T. K. On the growing up problem for semilinear heat equations. *J. Math. Soc. Japan*, v. 29, p. 407–424, 1977.

Apêndices

APÊNDICE A – Demonstração do Lema 2.1

Para provar o Lema 2.1, vamos utilizar a teoria de espaços de Marcinkiewicz (também conhecido como L^p-fraco ou espaços de Lorentz, ver mais detalhes em [1]). A seguir introduziremos algumas notações. Definimos o rearranjo não-crescente de uma função mensurável f em $\mathbb{R}^n$ por

$$f^*(\lambda) = \inf\{t > 0; m_f(t) \leqslant \lambda\},$$

onde $m_f(t)$ é a função distribuição de f, a qual é definida pela medida de Lebesgue do conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > t\}.$$

Seja f^{**} definida por

$$f^{**}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f^*(\mu)d\mu.$$

Assim, para $1 \leqslant \sigma \leqslant \infty$, o espaço de Marcinkiewicz $L^{\sigma,\infty}(\mathbb{R}^n)$ é dado por

$$L^{\sigma,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \| f \|_{L^{\sigma,\infty}} < \infty\},$$

onde

$$\| f \|_{L^{\sigma,\infty}} = \sup_{\lambda \geqslant 0} \lambda^{\frac{1}{\sigma}} f^{**}(\lambda).$$

Agora, iremos provar um lema auxiliar que mostra algumas estimativas com peso nos espaços de Marcinkiewicz e que será útil na prova do Lema 2.1.

Lema A.1. *Sejam* $1 \leqslant \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \nu \leqslant \infty$, $0 \leqslant \alpha < \dfrac{n}{\sigma}$ *e* $\beta \geqslant 0$.

(i) Se $\dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{\nu} + \dfrac{\alpha}{n}$, *existe* $C > 0$ *tal que para toda* $f \in L^{\nu,\infty}$ *temos*

$$\| |x|^{-\alpha} f \|_{L^{\sigma,\infty}} \leqslant C \| f \|_{L^{\nu,\infty}} .$$

(ii) Se $\beta < n\left(1 + \dfrac{1}{\sigma} - \dfrac{1}{\sigma_2}\right) - \alpha$ *e* $\dfrac{1}{\sigma} - \dfrac{(\alpha+\beta)}{n} = \dfrac{1}{\sigma_1} + \dfrac{1}{\sigma_2} - 1$, *existe* $C > 0$, *tal que*

$$\| |x|^{-\alpha}(|\cdot|^{-\beta} f) \star g \|_{L^{\sigma,\infty}} \leqslant C \| f \|_{L^{\sigma_1,\infty}} \| g \|_{L^{\sigma_2,\infty}} \quad , \forall f \in L^{\sigma_1,\infty} \text{ e } g \in L^{\sigma_2,\infty}.$$

Demonstração:

Demonstração de (i) Para $\lambda > 0$ existe $E_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, cuja medida de Lebesgue é λ, tal que

$$\begin{aligned}
(|x|^{-\alpha} f)^{**}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\int_{E_\lambda} |x|^{-\alpha} f(x)dx \\
&\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda (|x|^{-\alpha})^*(\eta) f^*(\eta)d\eta \\
&\leqslant \frac{C}{\lambda}\int_0^\lambda \eta^{-\frac{\alpha}{n}}\eta^{-\frac{1}{\nu}}d\eta \sup_{\mu>0}\mu^{\frac{1}{\nu}} f^*(\mu) \\
&\leqslant C\lambda^{-\frac{1}{\sigma}}\sup_{\mu>0}\mu^{\frac{1}{\nu}} f^*(\mu) \leqslant C\lambda^{-\frac{1}{\sigma}}\sup_{\mu>0}\mu^{\frac{1}{\nu}} f^{**}(\mu).
\end{aligned}$$

Multiplicando por $\lambda^{\frac{1}{\sigma}}$, obtemos

$$\lambda^{\frac{1}{\sigma}}(|x|^{-\alpha} f)^{**}(\lambda) \leqslant C\sup_{\mu>0}\mu^{\frac{1}{\nu}} f^{**}(\mu).$$

Assim, $\| \, |x|^{-\alpha} f \, \|_{L^{\sigma,\infty}} \leqslant C \, \| \, f \, \|_{L^{\nu,\infty}}$.

Demonstração de (ii) Pelo item (i), temos que

$$\| \, |x|^{-\alpha}(|\cdot|^\beta f) \star g \, \|_{L^{\sigma,\infty}} \leqslant C \, \| \, |\cdot|^\beta f \star g \, \|_{L^{\sigma,\infty}} \, .$$

Daí, aplicando a estimativa da convolução em espaços de Marcinkiewiz, obtemos

$$\| \, |x|^{-\alpha}(|\cdot|^\beta f) \star g \, \|_{L^{\sigma,\infty}} \leqslant C \, \| \, |\cdot|^\beta f \, \|_{L^{\sigma_1,\infty}} \| \, g \, \|_{L^{\sigma_2,\infty}} \, .$$

Finalmente, aplicando (i) novamente, obtemos o resultado desejado.

■

Agora, de posse deste resultado, podemos finalmente demonstrar o Lemma 2.1. Aplicando (ii) do lema anterior e a inclusão de Lebesgue em espaços de Marcinkiewiz, obtemos

$$\begin{aligned}
\| \, |x|^{-\alpha}(|\cdot| - \beta f) \star g \, \|_{L^{\nu,\infty}} &\leqslant C \, \| \, f \, \|_{L^{\sigma_1,\infty}} \| \, g \, \|_{L^{\sigma_2,\infty}} \\
&\leqslant C \, \| \, f \, \|_{\sigma_1} \| \, g \, \|_{\sigma_2} \, .
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Para $g \in L^{\sigma_2}(\mathbb{R}^n)$ fixo, vamos definir o operador $T : L^{\nu_1} \longrightarrow L^{\nu,\infty}(\mathbb{R}^n)$ por

$$T(f)(x) = |x|^{-\alpha}(|\cdot|^{-\beta} \star g)(x)$$

De (A.1), temos que T é limitado. Escolhendo $\nu = \nu^{(1)}, \nu^{(2)}$ e $\nu_1 = \nu_1^{(1)}, \nu_1^{(2)}$, respectivamente, satisfazendo

$$\nu^{(1)} < \sigma < \nu^{(2)} \, , \, \nu_1 < \sigma_1 < \nu_1^{(2)} \text{ e } \nu^{(j)} \leqslant \nu_1^{(j)},$$

podemos aplicar o Teorema de Interpolação de Marcinkiewiz (ver [1], p. 216) e obter que T pode ser estendido para um operador limitado de $L^{\sigma_1}(\mathbb{R}^n)$ para $L^\sigma(\mathbb{R}^n)$. Portanto, obtemos o resultado desejado.