SENSIBILIDADE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS PARA ENDOMORFISMOS DO INTERVALO

TESE DE MESTRADO

WALTER FIGUEIREDO MASCARENHAS

ORIENTADOR: MARCO ANTÔNIO TEIXEIRA .

SENSIBILIDADE ÀS CONDIÇÕES INICIAIS

PARA ENDOMORFISMOS DO INTERVALO

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Walter Figueiredo Mascarenhas e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, de de 19

Prof. Dr. ______________________

Marco Antônio Teixeira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Agradecimentos

Agradeço ao Reginaldo pela datilografia e ao Marco Antônio pela orientação nestes quatro anos de Unicamp.

Dedico este trabalho
aos meus pais, irmãos e avós.

RESUMO

Este trabalho trata de sensibilidade às condições iniciais (S.C.I.) para endomorfismos do intervalo. Mais precisamente para endomorfismos f com f' Lipchtzsiana.

Inicialmente são discutidos resultados gerais sobre S.C.I. e sua relação com estabilidade estrutural.

Em seguida é feita uma caracterização topológica de S.C.I. para funções de uma certa classe de endomorfismos unimodais.

Finalmente é exibida uma família a um parâmetro de endomorfismos $\{f_\delta\}$, $\delta \in (0, \delta_o)$, tal que se $\varepsilon \in (0, \delta_o)$ então:

i) Os conjuntos dos $\delta \in (0,\varepsilon)$ para os quais f_δ apresenta S.C.I. tem medida de Lebesgue maior ou igual é

$$\varepsilon(1 - |\log \varepsilon|^{-1}) .$$

ii) Existe um conjunto aberto de $\delta_s \in (0,\varepsilon)$ tais que f_δ não apresenta S.C.I. .

A família f_δ foi apresentada e estudada em [C.E.].

Neste artigo foram usados resultados de [G].

Observamos que a família f_δ não satisfaz as hipóteses de G.

Neste trabalho mostramos que ainda assim, os resultados de [G] podem ser aplicados a f_δ.

ABSTRACT

We consider sensitivity to initial conditions for endomorphisms f of the unit interval such that f' is Lipschitzian. We begin by discussing general results on sensitivity and their relationship to structural stability. Next, a topological characterization for a certain class of unimodal endomorphisms is given. Finally, we exhibit a family $\{f_t\}$, $t \in (0, t_o)$, of one-parameter endomorphisms such that, if $\varepsilon \in (0, t_o)$, then:

a) The set of $t \in (0, \varepsilon)$ for which f_t shows sensitivity to initial conditions has Lebesgue measure greater than or equal to

$$\varepsilon(1 - |\log \varepsilon|^{-1}) \quad .$$

b) There exists an open set of $t \in (0, \varepsilon)$ such that f_t does not show sensitivity to initial conditions.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é discutir sensibilidade às condições iniciais (S.C.I.) para endomorfismos do intervalo. Ou seja desejamos saber, dado um endomorfismo $f : I \to I$, o quanto diferem as órbitas de x e $x + \delta$ para δ pequeno.

Dizemos que x é f-Lyapounov estável se dado $\varepsilon > 0$ existir δ tal que se $|x - y| < \delta$ e $n \in \mathbb{N}$ então $|f^n(x) - f^n(y)| < \varepsilon$.

Caso contrário existiria $\varepsilon > 0$ tal que para todo δ existiriam y e $n \in \mathbb{N}$ com $|x - y| < \delta$ e $|f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon$. Se isto ocorrer x é dito f-Lyapounov instável e f é dita ε-sensível à condição inicial x (f é ε-Sx).

Esta definição é diferente da definição usual de estabilidade à Lyapounov, como apresentada em [M], pelo fato da última se aplicar a compactos f-invariantes e a primeira a pontos. Entretanto no caso do compacto f-invariante ser um ponto as definições coincidem.

Se existir $\varepsilon > 0$ tal que $S(\varepsilon) = |x \in I / f$ é ε-Sx$|$ tem medida maior que zero diremos que f é sensível às condições iniciais (f é S.C.I.).

O conceito de S.C.I., num contexto mais amplo, está ligado às tentativas de formalização do conceito de caos. Em geral a presença de S.C.I. é tida como condição necessária para a ocorrência de caos.

Ainda num contexto mais amplo, o comportamento caótico pode, à princípio, ser resistente à perturbações. Talvez um exemplo disto sejam os pontos homoclínicos.

Entretanto no caso particular de endomorfismos em uma dimensão é pouco provável que este "caos robusto" ocorra. Pois; como provaremos, se uma conjectura de [J] for válida, então o conjunto das f que não é S.C.I. contém um subconjunto aberto e denso em $End^r(I)$. A validade deste resultado será de interesse, por exemplo, para os métodos iterativos usuais da análise numérica, onde sempre se trabalha com aproximações. A grosso modo, a ausência de S.C.I. significa ausência de propagação de erros.

No capítulo I utilizaremos um teorema de Mañé para provar que se os pontos críticos de $f \in \underline{End}_L(I)$ forem f-Lyapounov estáveis então f não é S.C.I. . Em particular se todos pontos críticos de f estiverem nas bacias de atratores então f não é S.C.I. . Este fato relaciona S.C.I. com estabilidade estrutural. Pois, como conseqüência da citada conjectura de [J], temos que se f é estruturalmente estável então todos seus pontos críticos estão nas bacias de atratores. Logo, se a conjectura for válida, estabilidade estrutural implica na ausência de S.C.I. .

No capítulo II abordamos S.C.I. numa classe C de endomorfismos unimodais.

As $f \in C$ vêm como características básicas o fato de serem unimodais e que $|(f^n)'|$ não apresenta mínimos locais positivos.

Esta última propriedade é satisfeita, por exemplo, pelas funções com derivada de Schwartz negativa.

Seguindo basicamente o trabalho de Guckenheimer obtemos uma caracterização topológica de S.C.I. em $\mathcal{C}$. Apesar dos resultados serem praticamente os de [G] as demonstrações aqui apresentadas são originais, pois as provas de [G] são falhas e obscuras.

Além disso provamos que se $f \in \mathcal{C}$ é S.C.I. então existe $\varepsilon > 0$ tal que f é ε-Sx $\forall x \in I$, em particular todo x é f-Lyapounov instável.

Finalmente no terceiro capítulo analisamos uma família a um parâmetro $\{f_\delta\}$, $\delta \in (0,\delta_0)$.

Esta família é de autoria de Collet e Eckmann e apresenta tanto funções com e sem S.C.I. . Provaremos que dado $\varepsilon > 0$ existem conjuntos D e $T(\varepsilon)$ tais que:

i) D, $T(\varepsilon) \subset (0,\varepsilon)$.

ii) É aberto e se $\delta \in D$ então f_δ não é S.C.I. .

iii) $m(T(\varepsilon)) \geqslant \varepsilon(1 - |\log \varepsilon|\ )^{-1})$ e se $\delta \in T(\varepsilon)$ então f_δ é S.C.I. .

CAPÍTULO I

O objetivo deste capítulo é definir sensibilidade com respeito as condições iniciais (S.C.I.) e discutir aspectos gerais deste fenômeno, como por exemplo condições para que ele não ocorra e o quão frequente ele é.

Tal fenômeno está diretamente ligado à "estabilidade no sentido de Lyapounov", ou melhor, veremos que f tem S.C.I. se e só se o conjunto dos pontos que são "f-Lyapounov Estáveis" tem medida total.

Pretendemos estudar os conceitos citados acima no contexto dos endomorfismos diferenciáveis do intervalo $I = [0,1]$ com derivada Lipschitziana, ou mais precisamente em $\text{End}_L(I) = \{ f:I \to I, f$ diferenciável tal que existe k com $|f'(x) - f'(y)| \leq k|x-y|\}$. Desta forma sempre que nos referirmos a $f : I \to I$ estará subentendido, a menos de menção explícita, que $f \in \text{End}_L(I)$.

DEFINIÇÃO 1.1.: Dizemos que f é ε-sensível com relação à condição inicial x (f é ε-Sx) se para todo aberto $V \subset I$ com $x \in V$ existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $m(f^n(V)) > \varepsilon$, onde m é a medida de Lebesgue.

DEFINIÇÃO 1.2.: O ponto x é dito f-Lyapounov estável se dado $\varepsilon > 0$ existe um aberto $V \ni x$ tal que se $y \in V$ e $n \in \mathbb{N}$ então $|f^n(x) - f^n(y)| < \varepsilon$.

Caso contrário dizemos que x é f-Lyapounov instável.

É fácil ver então que x é f-Lyapounov instável se e só se f é ε-Sx para algum $\varepsilon > 0$.

Denotemos então $S_f(\varepsilon) = \{x \in I \mid f \text{ é } \varepsilon\text{-Sx}\}$.

DEFINIÇÃO 1.3.: Diremos que f é sensível com respeito às condições iniciais (f é S.C.I.) se existir $\varepsilon > 0$ tal que $m(S_f(\varepsilon)) > 0$.

Vejamos agora algumas propriedades de $S_f(\varepsilon)$.

PROPRIEDADE 1.4.: $S_f(\varepsilon)$ é compacto.

DEMONSTRAÇÃO : De fato, se $x \in \overline{S_f(\varepsilon)}$ então dada uma vizinhança V de x existe $y \in S_f(\varepsilon) \cap V$. Logo por $y \in S_f(\varepsilon)$ existe $n \in \mathbb{N}$ com $m(f^n(V)) > \varepsilon$. Assim $x \in S_f(\varepsilon)$; daí $S_f(\varepsilon) = \overline{S_f(\varepsilon)}$ e $S_f(\varepsilon)$ é compacto.

PROPRIEDADE 1.5.: $S_f(\varepsilon)$ é f-invariante, ou seja $f(S_f(\varepsilon)) \subset S_f(\varepsilon)$.

DEMONSTRAÇÃO : Se $y \in f(S_f(\varepsilon))$ e V é uma vizinhança de y então tomando $x \in f^{-1}(y) \cap S_f(\varepsilon)$ temos que $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de x. Podemos assim encontrar um aberto $V' \ni x$ com $m(V') < \varepsilon$ e $V' \subset f^{-1}(V)$. Daí como $x \in S_f(\varepsilon)$ existe $n \in \mathbb{N}$ com $m(f^n(V')) > \varepsilon$ e é fácil ver então que $m(f^{n-1}(V)) \geq m(f^n(V')) > \varepsilon$, donde $y \in S_f(\varepsilon)$.

RESUMINDO : $S_f(\varepsilon)$ é um compacto f-invariante.

Outra propriedade evidente é:

PROPRIEDADE 1.6.: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow S_f(\varepsilon_1) \subset S_f(\varepsilon_2)$ e $\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_f(\frac{1}{n})$.

Podemos concluir da Propriedade 1.6. que se f não é S.C.I. então $m(S_f(\frac{1}{n}) = 0\ \forall n$; donde $(S_f(\frac{1}{n}))^c$ é um conjunto aberto e denso e $(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon))^c = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_f(\frac{1}{n}))^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (S_f(\frac{1}{n}))^c$. Neste caso vemos que $(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon))^c$ é intersecção enumerável de conjuntos abertos e densos.

DEFINIÇÃO 1.7.: Dado um espaço topológico τ e um conjunto $A \subset \tau$ com a propriedade acima, ou seja $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ com A_n aberto e denso, é chamado genérico. Os conjuntos genéricos são de bastante interesse quando τ é um espaço de Baire, como I e $End^r(I)$ (que veremos mais adiante).

Voltemos a $(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon))^c$. Pela observação que segue a Definição 1.2. e a definição de $S_f(\varepsilon)$ temos:

PROPOSIÇÃO 1.8.: $(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon))^c$ é conjunto dos pontos f - Lyapounov estáveis.

Se a função f não é S.C.I. então o conjunto $(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon))^c$ além de genérico tem medida total pois:

$$m(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon))^c = 1 - m(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon)) = 1 - m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_f(\tfrac{1}{n})) \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} m(S_f(\tfrac{1}{n})) = 1, \text{pois } \forall n\ m(S_f(\tfrac{1}{n})) = 0.$$

Juntamente com a Proposição 1.8. o parágrafo acima nos leva a seguinte conclusão:

PROPOSIÇÃO 1.9.: Se f não é S.C.I. então o conjunto dos pontos f-Lyapounov estáveis é genérico e tem medida total.

Por outro lado se $m(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon)) > 0$ então existe n tal que $m(S_f(\frac{1}{n})) > 0$ pois $0 < m(\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon)) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_f(\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} m(S_f(\frac{1}{n}))$, já que $S_f(\frac{1}{n}) \subset S_f(\frac{1}{n+1})$. Concluímos assim que:

PROPOSIÇÃO 1.10.: Se o conjunto dos pontos f-Lyapounov instáveis tem medida positiva então f é S.C.I. .

Até o momento não usamos a diferenciabilidade de f. O motivo de nos restringirmos a $End_L(I)$ é que queremos utilizar os resultados de [M].

Em [M] os resultados são enunciados para $f \in End^2(I) = \{f : I \to I$ tal que f é duas vezes derivável e f" é contínua$\}$. É fácil ver que $End_L(I) \not\supseteq End^2(I)$ e assim aparentemente não poderíamos utilizar os resultados de [M] em nosso contexto. Entretanto os resultados lá expostos ainda são válidos em $End_L(I)$ pois as demonstrações se repetem integralmente para este caso. Para o nosso estudo o interesse maior de trabalharmos em $End_L(I)$ ao invés de $End^2(I)$ provém de que o exemplo a ser exibido no capítulo 3 está em $End_L(I) - End^2(I)$.

Um teorema de [M] que usaremos é:

TEOREMA 1.11. [Mañé]: Se $f \in End_L(I)$ e $\Lambda \subset I$ é um compacto f-invariante que não contém pontos críticos então $m(\Lambda) = 0$ ou existe um intervalo $J \subset I$ e um inteiro $n > 0$ tal que $f^n(J) \subset J$, $m(J \cap \Lambda) > 0$ e f^n não tem pontos críticos em J.

OBSERVAÇÃO 1.12.: Um ponto p é dito crítico se $f'(p) = 0$.

No caso de $\Lambda = S_f(\varepsilon)$ o teorema é de particular interesse pois a segunda parte da proposição acima não pode ocorrer e este teorema pode ser reescrito assim:

PROPOSIÇÃO 1.13.: Se $f \in End_L(I)$ e $S_f(\varepsilon)$ não contém pontos críticos então $m(S_f(\varepsilon)) = 0$.

Para a demonstração desta proposição usaremos os dois lemas abaixo que serão provados mais adiante.

LEMA 1.14.: Se $x \in S_f(\delta)$ e $n > 0$, então existe δ_n tal que $x \in S_{f^n}(\delta_n)$; ou seja $\bigcup_{\delta > 0} S_f(\delta) \subset \bigcup_{\delta > 0} S_{f^n}(\delta)$.

LEMA 1.15.: Seja $J \subset I$ um intervalo fechado e limitado e $g: J \to J$ estritamente crescente então $\bigcup_{\delta > 0} S_g(\delta)$ é enumerável.

DEMONSTRAÇÃO DE 1.11.: Basta que provemos que a segunda parte da tese do Teorema 1.13. não pode ocorrer.

Suponhamos então, por absurdo, que isto não fosse verdade. Existiriam então $n > 0$ e um intervalo $J \subset I$ com $m(J \cap S_f(\varepsilon)) > 0$,

$f^n(J) \subset J$ e f^n sem pontos críticos no interior de J. Podemos supor J fechado pois caso contrário tomaríamos $J' = \bar{J}$. Como f^n não tem pontos críticos em intJ então f^n é estritamente monótona em J; podemos supor também f^n crescente pois se não, tomando $n^* = 2n$ temos f^{n^*} como desejado.

Tomemos $g = f^n|J$.

Temos então g como na hipótese do Lema 1.15. e além disso $S_g(\delta) \supset (S_{f^n}(\delta) \cap \text{int}J)$. Pois se $x \in S_{f^n}(\delta) \cap \text{int}J$ e V é uma vizinhança de x em J então $V \cap \text{int}J$ é uma vizinhança de x em I e assim existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m((f^n)^k(V)) > \delta$. Logo $m(g^k(V)) > \delta$ e assim $x \in S_g(\delta)$. Segue-se que $\bigcup_{\varepsilon > 0} S_g(\delta) \supset (\bigcup_{\varepsilon > 0} S_{f^n}(J)) \cap \text{int}J$. Mas pelo Lema 1.14. $\bigcup_{\delta > 0} S_{f^n}(\delta) \supset \bigcup_{\delta > 0} S_f(\delta)$.

Logo

$$\bigcup_{\delta > 0} S_g(\delta) \supset ((\bigcup_{\delta > 0} S_f(\delta)) \cap \text{int}J) \supset (S_f(\varepsilon) \cap \text{int}J).$$

Assim

$$m(\bigcup_{\delta > 0} S_g(\delta)) \geqslant m(S_f(\varepsilon) \cap \text{int}J) = m(S_f(\varepsilon) \cap J) > 0$$

o que é um absurdo pois pelo Lema 1.15. $\bigcup_{\delta > 0} S_g(\delta)$ é enumerável e daí $m(\bigcup_{\delta > 0} S_g(\delta)) = 0$.

Façamos então as demonstrações dos lemas.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 1.14.: Seja $s = \max\{1, \sup_{x \in I}\{|f'(x)|\}\}$ (como $f \in \text{End}_L(I)$, $s < +\infty$). Tomemos $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2s^n}$, daí se $x \in S_f(\varepsilon)$ existe k tal que $m(f^{nk}(V)) > \varepsilon_n$. Pois caso contrário dado $j > 0$ se fizermos $j = kn + r$ com $0 \leqslant r < n$ teremos:

$$m(f^j(V)) = m(f^r(f^{kn}(V)) \leqslant \int_{f^{kn}(V)} |(f^r)'(x)|dx \leqslant$$
$$\leqslant m(f^{kn}(V)).\ \sup|(f^r)'| \leqslant \varepsilon_n . s^r = \frac{\varepsilon}{2s^n} . s^r < \varepsilon$$

e assim $x \notin S_f(\varepsilon)$ absurdo. Concluímos assim que deve existir k com $m((f^n)^k(V)) > \varepsilon_n$ donde $x \in S_{f^n}(\varepsilon_n)$ e $S_f(\varepsilon) \subset S_{f^n}(\varepsilon_n)$.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 1.15.: O Lema 1.15. é conseqüência do fato das funções monótonas crescentes do intervalo terem uma dinâmica extremamente simples. Isto é todos pontos se aproximam de pontos fixos. Pois, dado $x \in I, \{g^n(x)\}$ é uma seqüência monótona limitada e $s = \lim_{n\to\infty} g^n(x)$ é um ponto fixo, i.e. $g(s) = s$.

Observemos então que se p não é fixo então $g^n(p) \neq g^m(p)\ \forall m \neq n$. Pois $g(p) > p$ ou $g(p) < p$. No 1º caso temos $p < g(p) p < \ldots < g^n(p)$ já no 2º $p > g(p) \ldots g^n(p)$.

Concluímos daí que se p não é fixo então $p \notin \bigcup_{\delta>0} S_g(\delta)$ Pois dado $\delta > 0$ podemos tomar $n_o > 1$ tal que

$$n > n_o \Rightarrow 0 < |g^{n+1}(p) - g^{n-1}(p)| < \varepsilon.$$

Seja

$$\xi = \min\{|g^{n_o}(p) - g^{n_o+1}(p)|,\ |g^{n_o}(p) - g^{n_o-1}(p)|,\ \tfrac{\delta}{2}\} > 0.$$

Existe $\lambda > 0$ de modo que $x \in (p-\lambda, p+\lambda)$ e $n < n_o \Rightarrow |g^n(p) - g^n(x)| < \xi$. Vemos daí que se $n < n_o$ então

$$m(g^n(p - \lambda, p + \lambda)) < \delta$$

Assim

$$g^{n_o}((p - \lambda, p + \lambda)) \subset (g^{n_o-1}(p), g^{n_o+1}(p)).$$

Logo para $n \geqslant n_o$:

$$g^n((p - \lambda, p + \lambda)) \subset (g^{n-1}(p), g^{n+1}(p)).$$

Assim

$$m(g^n(p - \lambda, p + \lambda)) \leqslant m((g^{n-1}(p), g^{n+1}(p))) =$$
$$= |g^{n-1}(p) - g^{n+1}(p)| < \varepsilon.$$

Resumindo $p \notin S_g(\delta)$.

Falta assim analisar o que ocorre nos pontos fixos. É possível que tenhamos uma quantidade infinita de pontos fixos em $\bigcup_{\varepsilon > 0} S_g(\varepsilon)$, como no gráfico abaixo.

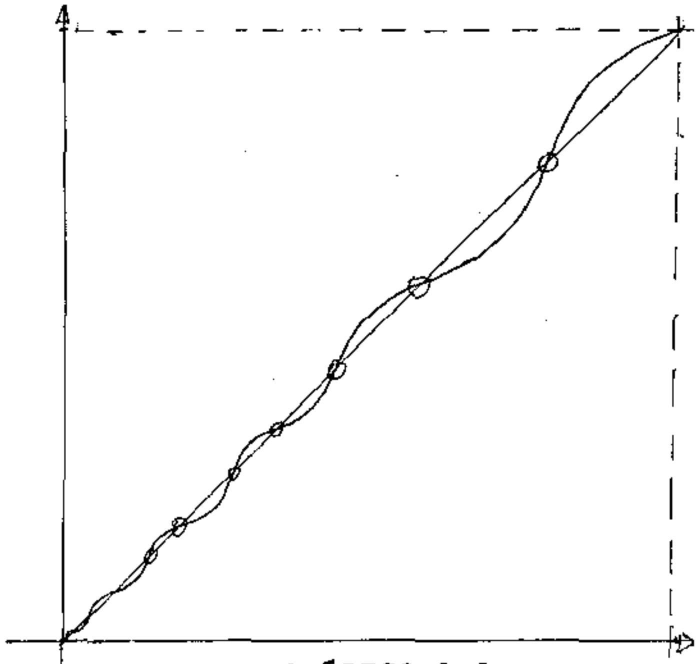


GRÁFICO 1.1.

Entretanto para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto de pontos fixos em $S_g(\varepsilon)$ é finito. Caso contrário tomando um ponto de acumulação p_1 do conjunto dos pontos fixos de $S_g(\varepsilon)$ teríamos que $p \in S_g(\varepsilon)$ pois este é fechado. Existiriam ainda dois pontos fixos p_2 e p_3, distintos de p, com $p_2, p_3 \in S_g(\varepsilon) \cap (p_1 - \frac{\varepsilon}{4}, p_1 + \frac{\varepsilon}{4})$. Permutando os índices se necessário teremos $p_1 < p_2 < p_3$ e $p_3 - p_1 < \varepsilon$. Assim para a vizinhança $V = (p_1, p_3)$ de p_2 teremos $g^n(p_1, p_3) = (g^n(p_1), g^n(p_3)) = (p_1, p_3)$. Logo para todo n temos $m(g^n(V)) = m((p_1, p_3)) < \varepsilon$; o que contraria $p_2 \in S_g(\varepsilon)$.

Portanto para todo n $S_g(\frac{1}{n})$ é finito e assim $\bigcup_{\varepsilon > 0} S_g(\varepsilon) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_g(\frac{1}{n})$ é enumerável.

OBSERVAÇÃO 1.16.: Com uma prova um pouco mais cuidadosa podemos mostrar que se $g : I \to I$ é monótona então $\bigcup_{\varepsilon > 0} S_g(\varepsilon)$ é enumerável.

DEFINIÇÃO 1.17.: $C(f) = \{x \in \tau \mid f'(x) = 0\}$ é o conjunto dos pontos críticos de f.

Fica evidente a partir da Proposição 1.13. que:

COROLÁRIO 1.18.: Se $C(f) \cap (\bigcup_{\varepsilon > 0} S_f(\varepsilon)) = \emptyset$ então f não é S.C.I.. Ou seja se os pontos críticos de f forem f-Lyapounov estáveis então f não é S.C.I..

Uma pergunta que surge naturalmente é o quão freqüente ocorre S.C.I. ou qual o "tamanho" da classe das f que apresentam tal comportamento.

No que se segue mostraremos que se tomarmos em $End_L(I)$ a topologia C^1 então o conjunto das f que não são S.C.I. contém um subconjunto aberto e denso. O mesmo resultado será válido para $End_L(I) \cap C^r = End^r(I)$, $(r \geqslant 2)$, com a topologia C^r se for verdadeira uma conjectura feita em [M]. Esta conjectura implica também na densidade das funções estruturalmente estáveis e que se f é estruturalmente estável então f não tem S.C.I. . Se tomarmos S.C.I. como definição de caos e a conjectura for válida teremos que em nosso contexto não podem ocorrer comportamentos caóticos que persistem por pertubações da função em estudo. Esta é uma situação distinta daquela que aparece no estudo de turbulência, onde surgem comportamentos caóticos estruturalmente estáveis.

Como argumento de que S.C.I. é um fenômemo raro, se considerarmos em $End_L(I)$ a topologia C^1, provaremos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1.19.: Existe um subconjunto A de $End_L(I)$ aberto e denso na topologia C^1 tal que $f \in A \Rightarrow f$ não é S.C.I..

Para que esta proposição faça sentido é necessário que definamos a topologia C^1 em $End_L(I)$.

DEFINIÇÃO 1.20.: A função $d : End_L(I) \times End_L(I) \to \mathbb{R}$ dada por $d(f,g) = \sup_{x \in I} \{\sup\{|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|\}$ é uma métrica e chamamos topologia C^1 a topologia em $End_L(I)$ induzida por esta métrica.

Uma maneira de garantir a estabilidade no sentido de Lyapounov de um ponto é mostrar que ele está na bacia de um atrator. Para formalizar esta afirmação são necessárias as seguintes definições.

DEFINIÇÃO 1.21.: Dizemos que um ponto p é n-periódico se $f^n(p) = p$. Um tal p é dito hiperbólico se $|f^{n'}(p)| \neq 1$. Caso contrário p é chamado não hiperbólico. Pode se verificar que $|f^{n'}(p)| \neq 1$ independe do n para o qual $f^n(p) = p$.

DEFINIÇÃO 1.22.: Se $|(f^n)'(p)| < 1$ então dizemos que p é atrator. Isto se deve ao fato que o conjunto $\omega_s(p) = \{x \in I | \lim_{k\to\infty} f^{nk}(x) = p\}$ é um aberto contendo p, chamado bacia de atração de p, ou simplesmente bacia de p. Observemos também que $\omega_s(p)$ não depende do n para o qual $f^n(p) = p$.

Temos então a proposição:

PROPOSIÇÃO 1.23.: Se $x \in \omega_s(p)$ para algum ponto n-periódico atrator p, então $x \notin \bigcup_{\varepsilon > 0} S_f(\varepsilon)$.

DEMONSTRAÇÃO : Como já vimos no Lema 1.14. $\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon) \subset \bigcup_{\varepsilon>0} S_{f^n}(\varepsilon)$. Logo basta mostrar que $x \notin \bigcup_{\varepsilon>0} S_{f^n}(\varepsilon)$. Assim dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que $g \in (p - \delta, p + \delta) \Rightarrow |(f^n)'(g)| < 1$.

Como $\lim_{k\to\infty} (f^n)^k(x) = p$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{kn}(x) \in (p - \delta, p + \delta)$. Pela continuidade de f existe uma vizinhança V de x tal que se $j < k$ então $m(f^{nj}(V)) < \varepsilon$ e $f^{nk}(V) \subset (p - \delta, p + \delta)$. Além disso

$$f^n((p - \delta, p + \delta)) \subset (p - \delta, p + \delta)$$

pois

$$y \in (p-\delta,\ p+\delta) \Rightarrow d(y,p) < \delta \Rightarrow d(f^n(y),\ f^n(p) = d(f^n(y),\ p) \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\max_{z \in (p-\delta,\ p+\delta)} |f'(z)|\Big) \cdot d(y,p) \leqslant \delta \Rightarrow f^n(y) \in (p-\delta,\ p+\delta).$$

Assim para $j > k$ temos

$$f^{jn}(V) = f^{(j-k)n} \cdot (f^{kn}(V)) \subset f^{(j-k)n}((p-\delta,\ p+\delta)) \subset (p-\delta,\ p+\delta).$$

Portanto $m(f^{nj}(V)) \leqslant 2\delta < \varepsilon$. Concluímos daí que $\forall k, m(f^{nk}((V)) < \varepsilon$. Assim $x \notin S_{f^n}(\varepsilon)$ e temos finalmente que $x \notin \bigcup_{\varepsilon>0} S_{f^n}(\varepsilon)$ e $x \notin \bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon)$.

DEFINIÇÃO 1.24.: Denotaremos por $\Delta(f)$ a união dos conjuntos $w_s(p)$, para p atrator.

PROPOSIÇÃO 1.25.: Se $C(f) \subset \Delta(f)$ então f não é S.C.I. .

DEMONSTRAÇÃO : Pela Proposição 1.23. $C(f) \subset \Delta(f) \Rightarrow C(f) \cap (\bigcup_{\varepsilon>0} S_f(\varepsilon)) = \emptyset$ e pelo Corolário 1.18. f não é S.C.I. .

DEFINIÇÃO 1.26.: $End^r(I)$ é o conjunto das funções $f: I \to I$ r-vezes deriváveis com derivada r-ésima contínua. De maneira análoga a $End_L(I)$, $d : End^r(I) \times End^r(I) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(f,g) = \sup_{x \in I} \{\max\{|f(x) - g(x)|, \ldots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|\}\}$$

é uma métrica e induz a chamada topologia C^r em $End^r(I)$.

Foi provado em [J] que:

TEOREMA 1.25.[JAKOBSON] : Para r = 2

$A^r = \{f \in End^r(I)$ com i) $C(f) \subset \Delta(f)$ e ii) $x \in C(f) \Rightarrow f^n(x) \neq 0\}$

é aberto e denso em $End^1(I)$.

Como $End^2(I) \subset End_L(I)$ temos que A^2 é um conjunto aberto e denso de $End_L(I)$ (Observe que a topologia C^1 em $End_L(I)$ coincide com a topologia induzida em $End_L(I)$ pelo fato de $End_L(I) \subset End^1(I)$).

Como pela Proposição 1.23., $f \in A^2 \Rightarrow$ não é S.C.I. fica assim provada a Proposição 1.19. ou seja existe um conjunto A^2 aberto e denso em $End_L(I)$ com a topologia C^1 tal que $f \in A^2 \rightarrow f$ não é S.C.I. .

A questão que se coloca então é se A^r é denso em $End^r(I)$ para $r \geqslant 2$ (é facil ver que A^r é aberto). Isto faz parte da conjectura citada.

Acredita-se fortemente que este resultado seja verdadeiro, entretanto sua prova é difícil e tem resistido aos ataques de matemáticos experientes como Sullivan e Mañé.

Para finalizar observamos que mesmo com $C(f) \not\subset \Delta(f)$ pode ser que não ocorra S.C.I., como veremos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO II

Neste capítulo discutiremos S.C.I. numa classe especial $\mathcal{C} \subsetneq End_L(I)$. Dentre outras características as funções em $\mathcal{C}$ apresentarão um único ponto crítico c. Veremos que $f \in \mathcal{C}$ é S.C.I. se e só se $c \in S_f(\varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$ e neste caso $S_f(\varepsilon) = I$, ou seja f é ε-sensível a toda condição inicial.

As condições (1) e (4) na definição de $\mathcal{C}$ são supérfluas e são impostas apenas com o intuito de simplificar as demonstrações. A condição (1) é necessária para que definamos a função σ para todo x. Se a condição (1) não fosse exigida seriam necessárias ligeiras modificações nos enunciados e provas de [S], [G] e [Sa]. Caso (4) não fosse exigida o mesmo se daria com as demonstrações e enunciados em [S]. Estas modificações não alterariam entretanto os resultados em relação a S.C.I. que obteremos neste capítulo.

DEFINIÇÃO 2.1.: Chamaremos de $\mathcal{C}$ a classe da $f \in End_L(I)$ que satisfazem as condições c(1)...c(5) abaixo:

c(1): $f(0) = f(1) = 0$

c(2): existe um único $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$ e $c \in (0,1)$, ou seja $C(f) = \{c\} \subset (0,1)$

DEFINIÇÃO 2.2.: Uma função f derivável satisfazendo c(1) e c(2) é dita unimodal.

De c(1) e c(2) vemos que o gráfico de f tem o seguinte aspecto:

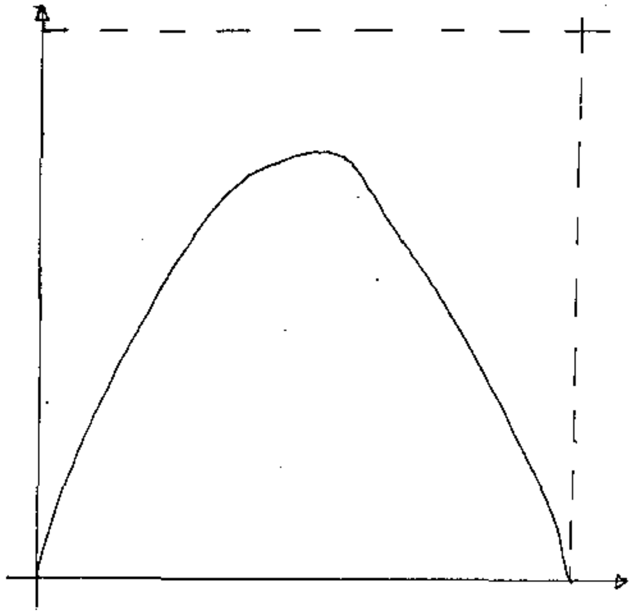


GRÁFICO 2.1. - Exemplo de função unimodal.

Temos daí que se f satisfaz c(1) e c(2) então dado $x \neq c$ existe um único $x' \neq x$ com $f(x') = f(x)$.

DEFINIÇÃO 2.3.: Chamaremos de $\sigma : I \to I$ a função:

$$\sigma(x) = x' \quad \text{e} \quad \sigma(c) = c.$$

É provado em [Sa] que se $x \neq c$ então σ é derivável em x e

$$\sigma'(x) = \left|\frac{f'(x)}{f'(\sigma(x))}\right| = \left|\frac{f'(x)}{f'(x')}\right|$$

Por motivos técnicos que surgem nas provas de [Sa] devemos exigir dos elementos de C as seguintes condições:

c(3): Existe $A > 0$ tal que para $x \neq c$

$$\sigma'(x) = \left|\frac{f'(x)}{f'(x')}\right| > A$$

c(4): $f'(0) > 1$ e

c(5): Dado $n \in \mathbb{N}$ e $[a,b] \subset I$ com $|(f^n)'(x)| \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ então

$$\min_{x \in [a,b]} |(f^n)'(x)| = \min\{|(f^n)'(a)|, |(f^n)'(b)|\}.$$

Segundo [Sa] a condição c(3) é satisfeita se para algum n f é n-vezes derivável em c e $f^{(n)}(c) \neq 0$, onde $f^{(n)}$ significa a n-ésima derivada. Podemos ver assim que a classe das f que satisfazem c(3) é ampla.

A condição c(5) é mais complexa e merece uma discussão mais detalhada. Para esta discussão será interessante introduzir o conceito de derivada de Schwartz:

DEFINIÇÃO 2.4.: Dada $f \in C^3$ e x com $f'(x) \neq 0$ definimos a derivada de Schwartz de f em x, sf(x), como

$$sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

No que se segue ao nos referirmos a $sf(x)$ estaremos admitindo que $f \in C^3$ e $f'(x) \neq 0$. Vejamos algumas propriedades da derivada de Schwartz.

PROPRIEDADE 2.5.: Temos o seguinte resultado para a composição:

$$s(f \circ g)(x) = sf(g(x)) \,.\, (g'(x))^2 + sg(x).$$

A demonstração deste fato é simples aplicação da regra da cadeia e pode ser vista em [Sa].

Como conseqüência imediata da Propriedade 2.5. temos:

PROPRIEDADE 2.6.: Se $sf(g(x)) \leqslant 0$ e $sg(x) \leqslant 0$ então $s(f \circ g)(x) \leqslant 0$.

PROPRIEDADE 2.7.: Se f e g são como em 2.6. e uma das desigualdades é estrita então $s(f \circ g)(x) < 0$.

Convencionaremos f^0 = identidade .

COROLÁRIO 2.8.: Se $sf(f^i(x)) \leqslant 0$ $\forall i = 0,1,\ldots,n-1$ então $sf^n(x) \leqslant 0$. Além disso se uma das desigualdades $sf(f^i(x) \leqslant 0$ for estrita então $sf^n(x) < 0$.

O seguinte resultado e aplicações são apresentadas em [S] e mostram a importância de termos a derivada de Schwartz negativa.

PROPRIEDADE 2.9.: Se $sf(x) < 0$ $\forall x \neq c$ então $|f'|$ não tem mínimos locais positivos.

Ou enunciando de outra forma:

Se $x \in I$ e $\varepsilon > 0$ são tais que $|f'(x)| \leqslant |f'(g)|$ $\forall y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

então

$$|f'(x)| = f'(x) = 0.$$

Como conseqüência temos:

COROLÁRIO 2.10.: Se $sf(x) < 0$ $\forall x \neq c$ então f satisfaz c(5).

DEMONSTRAÇÃO 2.10.: Sejam $[a,b] \subset I$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $(f^n)'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Por 2.8., $sf^n(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$; daí por 2.9., $|(f^n)'(x)|$ não tem mínimo local em (a,b).

Pode-se concluir então que

$$\min_{x \in [a,b]} |(f^n)'(x)| = \min\{|(f^n)'(a)|, |(f^n)'(b)|\}$$

e portanto f satisfaz c(5).

Em [G], [S] e [Sa] a condição c(5) é substituída por c'(5): $sf < 0$. Fazendo isto estamos supondo pelo menos que $f \in C^2$, fato que não ocorre no exemplo que iremos analisar no capítulo 3. Neste exemplo temos também $sf = 0$ em vários pontos e a condição de sf ser estritamente negativa é fundamental na demonstração de 2.9. .

Entretanto $c'(5)$ não é usada com toda sua força em [G], [S] e [Sa]. O que é usado é a implicação $c'(5) \Rightarrow c(5)$ e em seguida o que se usa de fato é $c(5)$. É interessante observar que em [C.E.], ao discutir o exemplo do capítulo 3, os autores utilizam os resultados de [G] e [S] sem verificar se as hipóteses necessárias são satisfeitas.

Podemos ver também que o conjunto das f com $sf < 0$ é aberto em $\mathrm{End}^3(I)$, logo $c(5)$ é uma propriedade satisfeita por uma classe "grande" de funções.

Analisemos agora algumas implicações de $c(5)$.

PROPOSIÇÃO 2.11.: Se $f \in \mathcal{C}$ e p é um ponto n-periódico com $(f^n)'(p) = 1$ então existe δ (positivo ou negativo) tal que $0 < (f^n)'(x) < 1$ se $x \in (p, p + \delta)$.

OBSERVAÇÃO 2.12.: Suporemos

$$(a,b) = (b,a) \quad \text{se} \quad b < a.$$

DEMONSTRAÇÃO 2.11.: Basta que tomemos δ tal que

$$x \in [p - \delta, p + \delta] \Rightarrow (f^n)'(x) \neq 0$$

pois daí em $[p - \delta, p + \delta]$, $|(f^n)'| = (f^n)'$ não apresenta mínimo local sendo portanto estritamente monótona e daí segue-se 2.11..

Podemos ver então que $f^n([p, p + \delta]) \subset [p, p + \delta]$ pois se $\delta > 0$

$$y \in (p, p+\delta) \Rightarrow f^n(y) - f^n(p) = \int_y^p f^{n'}(x)\, dx \Rightarrow$$

$$0 < f^n(y) - f^n(p) \leqslant (y - p) \cdot \max_{x \in (p,\, p+\delta)} f^{n'}(x) = (y - p) < \delta$$

e o caso $\delta < 0$ é análogo.

Além de $f^n([p, p+\delta]) \subset [p, p+\delta]$ não podemos ter outro ponto n-periódico $p^* \in [p, p+\delta]$ pois se p^* fosse tal ponto existiria, pelo teorema do valor médio, $\xi \in (p, p^*) \subset (p, p+\delta)$ com

$$(f^n)'(\xi) = \frac{f^n(p) - f^n(p^*)}{p - p^*} = \frac{p - p^*}{p - p^*} = 1$$

o que contraria 2.11. e temos um absurdo.

Podemos concluir então, de modo análogo ao que foi feito em 1.23., que para todo $x \in (p, p+\delta)$, $\lim_{k \to \infty} f^{kn}(x) = p$.

DEFINIÇÃO 2.12.: Chamamos $\omega_s(p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-2kn}((p, p+\delta))$ de bacia de atração de p ou simplesmente bacia de p. Pode-se demonstrar que $\omega_s(p)$ independe do δ acima.

No caso $(f^n)'(p) = -1$ temos $(f^{2n})'(p) = 1$ e podemos aplicar a mesma argumentação para p e $n^* = 2n$ e definimos $\omega_s(p)$ da maneira parecida.

Podemos provar então de modo inteiramente análogo ao que foi feito em 1.23. que

$$\omega_s(p) \cap \left(\bigcup_{\varepsilon > 0} S_f(\varepsilon) \right) = \emptyset$$

DEFINIÇÃO 2.13.: Seja $f \in C$. Dizemos que um ponto n-periódico é um semi-atrator de f se $|f^{n'}(p)| \leqslant 1$; ou seja se é um atrator ou um ponto não hiperbólico. Pela argumentação acima e por 1.23.. vem:

PROPOSIÇÃO 2.14.: Se p é semi-atrator

$$\omega_s(p) \cap \bigcup_{\varepsilon > 0} S_f(\varepsilon) = \emptyset.$$

Em [S] foi provado que:

PROPOSIÇÃO 2.15.: Se $f \in C$ tem um semi-atrator p então existe um semi-atrator p^* tal que $c \in \omega_s(p^*)$.

Assim 2.14., 2.15., e 1.25. implicam em:

PROPOSIÇÃO 2.16.: Se $f \in C$ tem um semi-atrator então f não é S.C.I. .

Resta então analisar o que ocorre quando f não tem semi-atratores.

Neste caso podemos concluir imediatamente dos resultados de [G] e [Sa] o seguinte:

PROPOSIÇÃO 2.17.: Se $f \in C$ não tem semi-atratores então $f^{-}(c) = \{ x \in I \text{ tal que } f^n(x) = c \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \}$ é denso em I.

Como conseqüência temos:

PROPOSIÇÃO 2.18.: Se $f \in \mathcal{C}$ é S.C.I. então $S_f(\varepsilon) = I$ para algum $\varepsilon > 0$.

DEMONSTRAÇÃO 2.18.: Se f é S.C.I. por 2.16. f não tem semi-atratores logo, por 2.17., $f^-(c)$ é denso em I. Por 1.18. podemos concluir que $c \in S_f(\varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$. Afirmo então que $f^-(c) \subset S_f(\varepsilon)$. De fato se $x \in f^-(c)$ existe n tal que $f^n(x) = c$. Mas c não é periódico, pois caso contrário c seria um atrator (pois $(f^j)'(c) = 0\ \forall j$). Logo $(f^n)'(x) \neq 0$ e portanto dada uma vizinhança V de x, $f^n(V)$ contém uma vizinhança de c. Como $c \in S_f(\varepsilon)$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m(f^k(f^n(V))) > \varepsilon$, logo $m(f^{k+n}(V)) > \varepsilon$ e $x \in S_f(\varepsilon)$. Como $f^-(c) \subset S_f(\varepsilon)$, $f^-(c)$ é denso em I e $S_f(\varepsilon)$ é fechado concluímos que $S_f(\varepsilon) = I$.

Segue também da prova acima que:

COROLÁRIO 2.19.: Se $c \in \bigcup_{\varepsilon > 0} S_f(\varepsilon)$ então f é S.C.I. . Por outro lado por 1.18. vem que se $c \notin \bigcup_{\varepsilon > 0} S_f(\varepsilon)$ então f não é S.C.I. .

Resumindo chegamos a:

PROPOSIÇÃO 2.20.: Uma função $f \in \mathcal{C}$ é S.C.I. se e só se o ponto crítico $c \in S_f(\varepsilon)$ para algum $\varepsilon > 0$. Caso isto ocorra $S_f(\varepsilon) = I$ e todo ponto é f-Lyapounov instável.

Introduzimos agora os conceitos que nos ajudarão a caracterizar S.C.I. na ausência de semi-atratores.

DEFINIÇÃO 2.21.: Se $f^n(p) = p$, $(f^n)'(p) > 1$ e f^n é um homeomorfismo em (p,c) então p é dito n-ponto central (n.p.c.). Se além disso $f^n((p, p')) \subset (p, p')$ então p é dito n-ponto central restritivo (n.p.r.). Se p não for restritivo então p será chamado n-ponto central não restritivo (n.p.~)

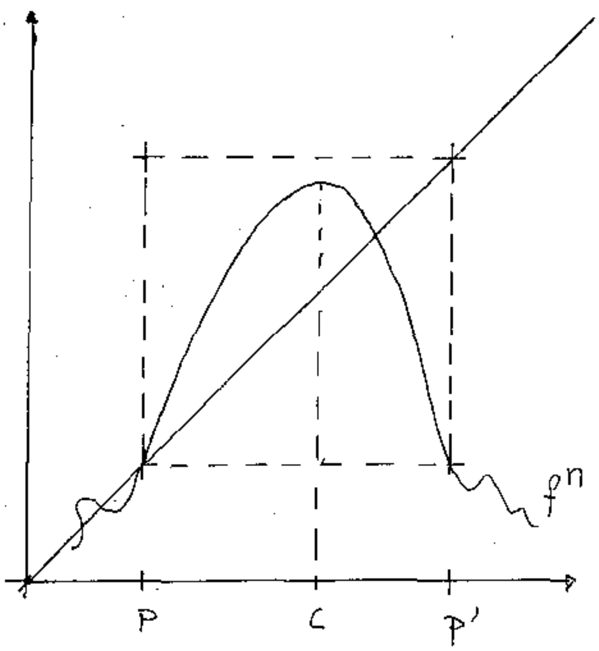


Gráfico 2.2.

p é um n.p.r.

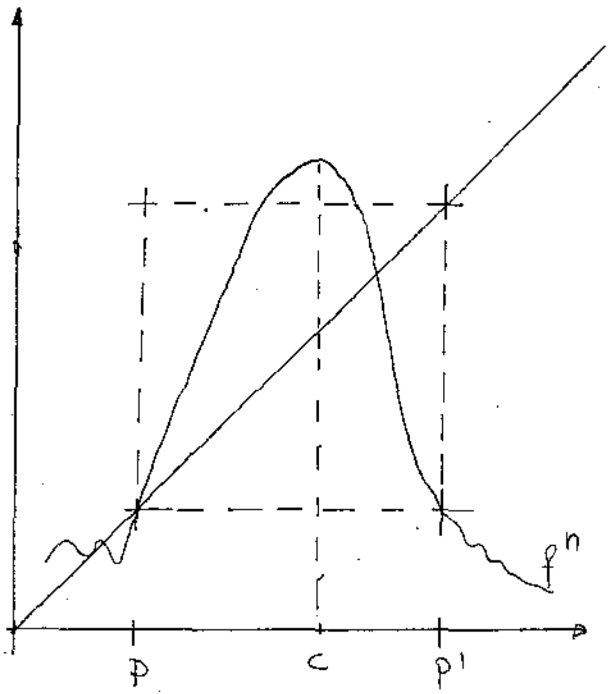


Gráfico 2.3.

p é um n.p.~

Temos assim que se p é um p.c.~ então $p' = \sigma(p)$ é um ponto homoclínico no sentido de Blook [O.O.] ou seja existe um ponto n-periódico p tal que $f^n(p') = p$ e para toda vizinhança V de p existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p' \in f^{kn}(V)$.

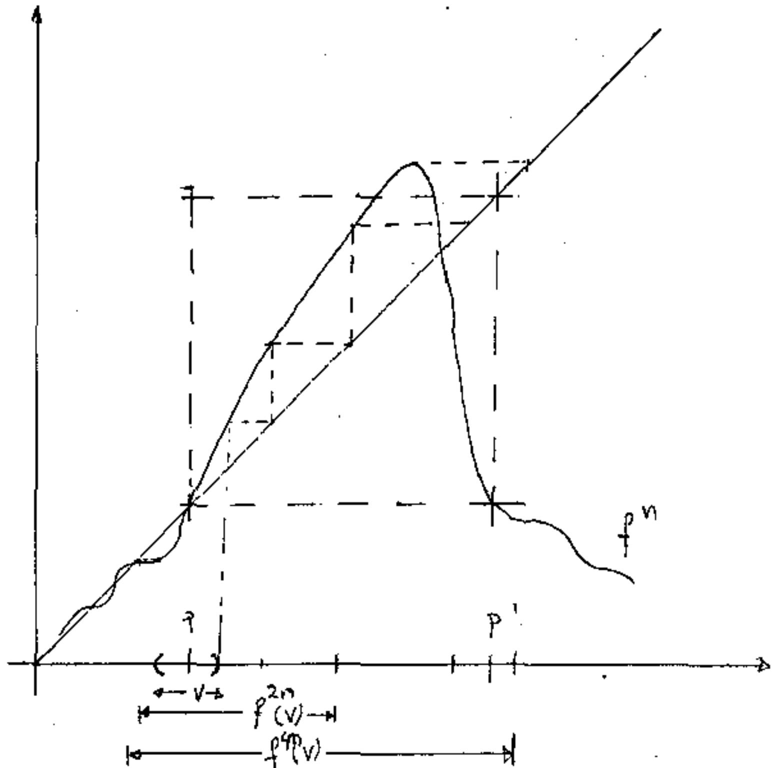


Gráfico 2.4.

A vizinhança V do n.p.~ p vai "aumentando" até atingir p'.

Por [O.O.] a existência de ponto homoclínico de Blook já implica "caos" em vários dos sentidos formais que já se tentou dar a este termo. Se f tem ponto homoclínico temos por exemplo o "caos" de Li e York [L.Y.], ou seja

i) f tem pontos de período arbitrariamente longos.

ii) existe um conjunto não enumerável R de pontos não periódicos satisfazendo:

a) $\forall x,\ y \in R$ com $x \neq y$ $\lim\sup_{n\to\infty} x|f^n(x) - f^n(y)| > 0$

b) $\forall x,\ y \in R$ com $x \neq y$ $\lim\inf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$

c) $\forall x \in R$ e ponto periódico $y \in I$ $\lim\sup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0.$

A existência de um n.p.r. nos garante que

$$m(f^k(p,\ p')) \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} m(f^j(p,\ p')) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

o que contribui para estabilidade no sentido de Lyapounov de c.

Percebemos então que os n.p.~ devem contribuir para S.C.I. enquanto o contrário deve ocorrer em relação aos n.p.r. .

A caracterização de S.C.I. usando n.p.r. e n.p.~ é devida a Guckenheimer em [G]. O interesse desta caracterização é que ela é "topológica" ou seja vale a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2.22.: Se

i) $f,g : I \to I$ são unimodais (ver definição 2.2.) com pontos críticos c_f e c_g respectivamente.

ii) p e n são tais que $f^n(p) = p$ e $f^n|(p,\ c_f)$ é um homeomorfismo.

iii) $h : I \to I$ é um homeomorfismo tal que $h \circ f = g \circ h$ então

$g^n(n(p)) = h(p)$, $h(c_f) = c_g$ e $g^n|(h(p), c_g) = g^n|(h(p), h(c_f))$ é um homeomorfismo.

Além disso p é central se e só se h(p) o for. Neste caso p é restritivo se e só se h(p) o for.

DEFINIÇÃO 2.23.: Sejam f e g : $I \to I$. Se existir um homeomorfismo h : $I \to I$ tal que $h \circ g = f \circ h$ então dizemos que f e g são topologicamente conjugados.

Como conseqüência da caracterização que faremos abaixo seguirá que:

PROPOSIÇÃO 2.24.: Se f e g $\in C$ são topologicamente conjugados então f é S.C.I. se e só se g o for.

Em [G] a proposição 2.22. é explorada "comparando" as funções de C com a família $f_\mu = \frac{\mu}{2} - \mu|x - \frac{1}{2}|$, $\mu \in [0,2]$.

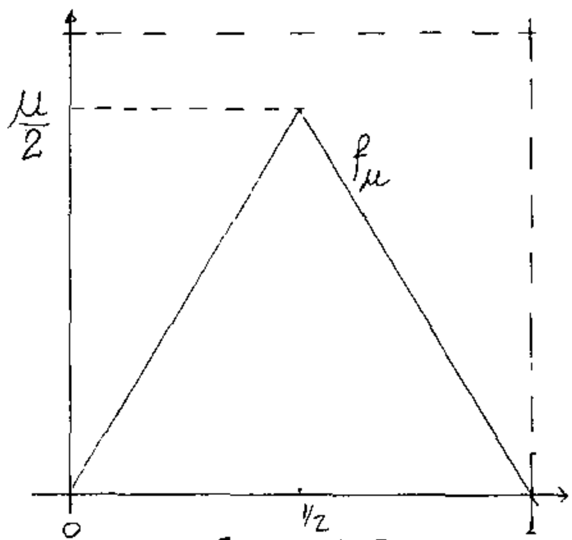


Gráfico 2.5.

Exemplo de membro na família f_μ.

Esta comparação foge um pouco ao que pretendemos neste trabalho. Assim citaremos apenas o resultado que lá é enunciado:

TEOREMA 2.25. [Guckenheimer]: Seja $f \in \mathcal{C}$ então f é S.C.I. se e só se existe um subintervalo $J \subset I$ e $n > 0$ tal que $f^n(J) \subset J$ e $f^n(J)$ é topologicamente conjugado a $g_\mu(x) = \frac{\mu}{2} - \mu|x - \frac{1}{2}|$ com $\mu \in (\sqrt{2}, 2]$.

Voltemos então a caracterização de S.C.I. em $\mathcal{C}$.

Vamos mostrar inicialmente um resultado relativo a abundância de pontos centrais.

PROPOSIÇÃO 2.26. [Guckenheimer]: Se f não tem semi-atratores e U é uma vizinhança de c então existe um ponto central em U. Em outras palavras existe uma seqüência de pontos centrais convergindo para c.

DEMONSTRAÇÃO 2.26.: Podemos supor $V = (x, x')$ para algum x. Por 2.17. $(x, x') \cap f^{-}(c) \neq \emptyset$, o que é equivalente à $c \in \bigcup_{i=1}^{\infty} f^i((x, x'))$. Tomando então $n = \min\{i \geq 1$ tal que $c \in f^i((x, x'))\}$ e z o ponto de $f^{-n}(c) \cap (x, x')$ mais próximo de c teremos que se $j < n$ então $c \notin f^j(x, x')$, $f^n(z) = c$ e se $y \in (z, z')$ então $f^n(y) \neq c$. De forma análoga podemos encontrar $t \in (z, z')$ e $k > n$ tal que $f^k(t) = c$ e se $j < k$ $c \notin f^j((z, z'))$. Temos então que t e t' são os únicos pontos y tais que $f^k(y) = c$ pois caso contrário pelo teorema de Rolle existiria $y \in (z, z')$, $y \neq c$ tal que

$(f^k)'(y) = 0$ e assim $f^j(y) = c$ para algum $j < k$ o que contraria a minimalidade de k. Podemos ver também que f^k não tem pontos críticos distintos de c em (z, z').

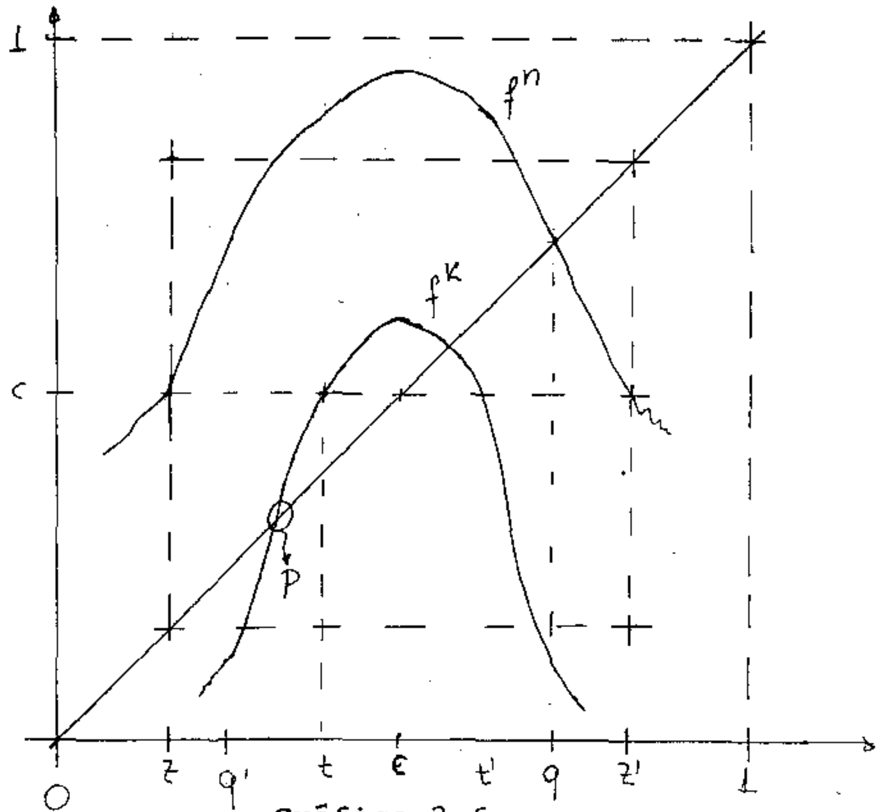


Gráfico 2.6.

Além disso, como $f^n(z) - z = c - z$ e $f^n(z') - z' = c - z'$ tem sinais opostos, existe $q \in (z,z')$ tal que $f^n(q) = q$.

Se existir um outro q^* com esta propriedade teremos $q \in (z,c)$ e $q^* \in (c,z')$ ou vice versa. Caso contrário existiria $\xi \in (q,q^*)$ tal que

$$|(f^n)'(\xi)| = \frac{|f^n(q) - f^n(q^*)|}{|q - q^*|} = 1$$

Como não existem semi atratores então $(f^n)'(q) > 1$ e $f^{n'}(q^*) > 1$. Daí como no intervalo $[q,q^*]$ não existem pontos críticos de f^n teríamos uma contradição com c(5) pois

$$\min_{x \in [q,q^*]} |(f^n)'(x)| \leqslant |(f^n)'(\xi)| = 1 < \min\{|(f^n)'(q)|, |(f^n)'(q^*)|\} > 1.$$

Mas se $q \in (z,c)$ e $q^* \in (c,z')$ para algum dos dois $(f^n)'$ é positiva, logo temos um ponto central em (x, x').

Suponhamos então que q é o único $y \in (z, z')$ com $f^n(y) = y$. Daí se $f^j(q) \in (z, z')$ para algum $j < n$ então.

$$f^n(f^j(q)) = f^j(f^n(q)) = f^j(q).$$

Pela unicidade de q, $f^j(q) = q$. Tomando então $j > 0$ mínimo tal que $f^j(q) = q$ teremos que j divide n $(j|n)$ pois caso contrário $n = tj + r$ com $0 < r < j$ e daí

$$f^n(q) = q = f^{tj+r}(q) = f^r(f^{tj}(q)) = f^r(q);$$

o que contraria a minimalidade de j. Como $j|n$ e $j < n$ devemos ter $j \leqslant \frac{n}{2}$. Logo $2j \leqslant n$, $f^{2j}(q) = q$, e $(f^{2j})'(q) = ((f^j)'(q))^2 > 0$ e $f^{2j}|[q,c]$ é um homeomorfismo pois $[q,c] \subset [z,c]$ ou $[z',c]$. Assim se $f^j(q) \in (z,z')$ para algum $j < n$ então q é um $2j$-central; o que queríamos demonstrar.

Podemos então supor que $f^j(q) \notin (z, z')$ $\forall j < n$.

Seguem-se então duas hipóteses:

1º) $2n \leq k$

2º) $n < k < 2n$

Na 1º hipótese f^{2n} tem c como único ponto crítico em (z,z'). Como $(f^{2n})'(q) = ((f^n)'(q))^2 > 0$ e não existem semi atratores então $f^{2n'}(q) > 1$ e temos um 2n-ponto central.

Na 2º hipótese temos $n < k < 2n$, logo $k - n < n$ e portanto $f^k(q) = f^{k-n}(q) \notin (z, z')$ [veja o gráfico 2.6.] .

Temos agora duas possibilidades análogas:

2.1. $f^k(c) > c$

2.2. $f^k(c) < c$

Analisemos a 1ª:

Como $f^k(c) > c$ e $f^k(t) = c = f^k(t')$ $(t < t')$ temos que f^k é crescente em (t,c), logo f^k é crescente em (z,c). Além disso q ou $q' \in (z,c)$. Suponhamos que $q \in (z,c)$.

Daí como $f^k(q') = f^k(q) \notin (z,z')$ temos que $f^k(q) < z$. Assim $f^k(q) < q$ e isto junto com $f^k(c) > c$ nos diz que existe $p \in (z,c)$ tal que $f^k(p) = p$. Portanto p é k-ponto central pois $(f^k)'(p) > 0$.

A segunda possibilidade é idêntica.

Terminamos assim a prova de 2.26...

Temos agora duas possibilidades :

1ª) A seqüência $\{p_n\}$ de pontos centrais convergindo para c é composta, para n grande, apenas de pontos não restritivos.

2ª) $\{p_n\}$ tem uma subseqüência de pontos restritivos convergindo para c.

Veremos que no primeiro caso f é S.C.I. enquanto no segundo não.

Na primeira hipótese tomando uma vizinhança $U = (p_n\ ,\ p_n')$ onde não temos pontos restritivos devemos ter o gráfico:

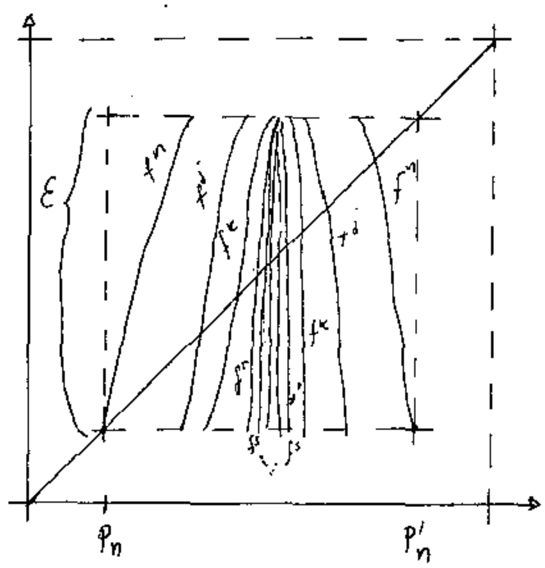


GRÁFICO 2.7.

e no segundo caso teremos:

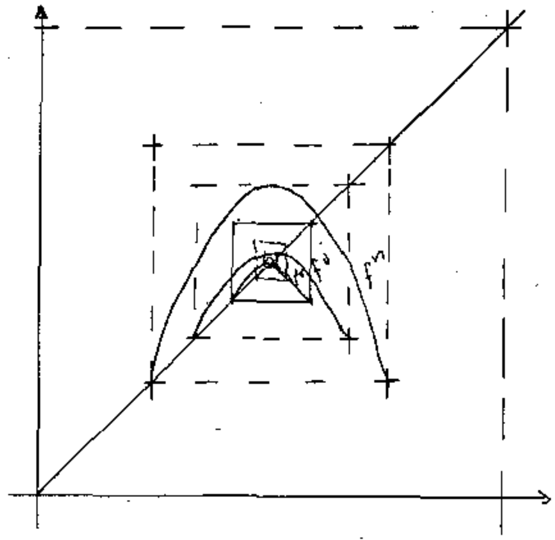


GRÁFICO 2.8.

Temos então as proposições:

PROPOSIÇÃO 2.27.: Se existe uma vizinhança U de c em que não e-xistem pontos centrais restritivos então f é S.C.I. .

DEMONSTRAÇÃO: Como conseqüência de 2.26. existe um n-ponto central restritivo $p \in U$ com $p' \subset U$. Podemos supor ainda que se q é um ponto n-periódico $\in (p, p')$ então $f^k(c) \neq q \forall k \in \mathbb{N}$, pois se $f^k(c) = q$ ocorresse para algum q, diminuindo U de modo que

$$U \cap \{f(c), \ldots, f^{k-1}(c), q, f(q), \ldots, f^{n-1}(q)\} = \emptyset$$

chegaríamos a condição desejada.

Como $(f^n)(p) > 1$ existem δ e $\varepsilon > 0$ tais que $|x - p| < \delta \Rightarrow |(f^n)'(x)| > 1 + \varepsilon$. Daí $p \in S_f(\delta)$ pois tomando um aberto $(p - \xi, p + \xi)$ contendo p teremos que se k é tal que $|f^{kn}(p - \delta) - p| < \delta$ então

$$d(f^{(k+1)n}(p + \delta), p) = d(f^{(k+1)n}(p + \delta), f^{kn}(p)) =$$

$$(f^n)'(\xi) . d(f^{kn}(p + \delta), p) \geqslant (1 + \varepsilon) d(f^{kn}(p + \delta, p) .$$

Logo se para todo $j < k$

$$d(f^{jn}(p + \delta), p) < \delta$$

então

$$d(f^{kn}(p + \delta), p) > (1 + \varepsilon)^{k-1}\delta.$$

É fácil ver que para k suficientemente grande devemos ter então $d(f^{kn}(p + \delta), p) > \delta$. Tomando o primeiro k com esta propriedade temos:

$$m(f^{kn}(p-\delta, p+\delta)| \geqslant m(f^{kn}(p, p+\delta)) = d(f^{kn}(p+\delta), f^{kn}(p)) > \delta.$$

Além disso se x é tal que $f^k(x) = p$ para algum k então $x \in S_f(\delta)$ pois dada uma vizinhança V de x temos que $f^k(V)$ contém um intervalo da forma $[p, p + \lambda)$ ou $(p - \lambda, p]$ pois f^k tem no máximo 2^k pontos críticos. Pela argumentação acima existe m tal que $f^m(V) \geqslant f^{m-k}([p, p+\lambda)) > \delta$ e daí $x \in S_f(\delta)$. Segue-se daí que $f^-(p) = \{x \in I \text{ com } f^k(x) = p \text{ para algum } k\} \subset S_f(\delta)$.

Como $S_f(\delta)$ é fechado $\alpha(p) = \overline{f^-(p)} \subset S_f(\delta)$. Vem assim que se $c \in \alpha(p)$ então f tem S.C.I. . Isto realmente deve ocorrer segundo veremos abaixo.

LEMA 2.28.: Se f e p são como acima então $c \in \alpha(p)$.

DEMONSTRAÇÃO 2.28.: De fato, se isto não ocorresse existiria $x < c$ tal que $(x, x') \cap \alpha(p) = 0$. Tomando z como o ínfimo de tais x mostraremos que z é um ponto central restritivo, o que contraria nossa suposição a respeito de U na hipótese de 2.27. .

Por 2.17. existem $m \in \mathbb{N}$ e $z \in (x, x')$ tais que $f^m(z) = c$. Daí para todo $y \in (x,x']$ temos $f^m(y) \in [x,x']$ pois se existisse $y \in (x, x']$ com $f^m(y) \notin [x, x']$, suponhamos $f^m(y) < x$, como x é ínfimo existiria $h \in [f^m(y), x) \cap f^-(p)$, teríamos daí, como $f^m(z) = c > h$ e $f^m(y) < h$, $r \in (y,z) \subset (x, x')$ com $f^m(r) = h$ mas daí como $h \in f^-(p)$, $r \in f^-(p)$ absurdo.

Em particular $f^m(x) \in [x, x']$. Não podemos ter também $f^m(x) \in (x, x')$ pois neste caso existiria uma vizinhança V de x com $f^m(V) \subset (x, x')$ tomando então $y \in (V \cap f^-(p))$ teríamos $f^m(y) \in (x, x')$ mas $y \in f^-(p) \Rightarrow f^m(y) \in f^-(p)$, pois p é periódico; e isto nos leva a um absurdo. Concluímos portanto que $f^m(x) \in \{x, x'\}$. Trocando x por x' se necessário podemos assumir que $f^m(x) = x$. Como $f^m([x, x']) \subset [x, x']$ devemos ter $(f^n)'(x) > 0$. Da suposição sobre U vem que $f^m(c) \notin \{x, x'\}$. Logo

$$f^m((x, x')) = f^m((x, c)) \subset (x, x').$$

Portanto x é restritivo, o que é absurdo. Isto demonstra o Lema 2.28. e em conseqüência a proposição 2.27. .

O próximo passo é provar que se temos uma seqüência $\{p_k\}$ de n_k-pontos centrais restritivos convergindo para c então f não é S.C.I. . Provaremos inicialmente o Lema 2.29. que diz que se $f^j((p_k, p_k')) \cap (p_k, p_k') \neq \emptyset$ para algum $j < n_k$ então f tem um semi-atrator e portanto não é S.C.I. .

Em seguida assumindo

$$f^j((p_k, p_k') \cap (p_k, p_k') = \emptyset$$

se $j < n_k$, $p_{k+1} \in (p_k, p_k')$ e $n_{k+1} > n_k$ mostraremos que

$$M_k = \max_{j \in \mathbb{N}} m(f^j((p_k, p_k'))$$

tende a zero quando $k \to \infty$. Segue daí que c é f-Lyapounov estável e por 2.20. f não é S.C.I. .

Para provar que $M_k \to 0$ mostraremos que $i \geqslant j$ e $t \in \mathbb{N}$ então $f^t((p_i, p_i')) \subset f^h((p_j, p_j'))$ para algum $0 \leqslant h < n_j$. Além disso $t \equiv h(\text{mód } n_j)$. Daqui já podemos concluir que

$$M_i \leqslant M_j = \max_{0 \leqslant h < n_j} m(f^h((p_j, p_j')))\,.$$

Como $\{M_k\}$ é uma seqüência decrescente para provarmos que $M_k \to 0$ basta que mostremos que $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{M_k\} = 0$. É mais ou menos isto que fazemos no Lema 2.32. quando é visto que para todo k existe k' tal que $M_{k'} < \frac{2}{3} M_k$.

Passemos então as demonstrações.

LEMA 2.29.: Se p é um n.p.r.; n mínimo com esta propriedade, e para algum k, $0 < k < n$, temos $f^k([p, p']) \cap (p, p') \neq \emptyset$ então f tem um semi-atrator.

Segue-se de 2.16. que f como na hipótese de 2.29. não é S.C.I. .

DEMONSTRAÇÃO 2.29.: Mostremos inicialmente que se para algum k, $0 < k < n$, $f^n(p) \in (p, p')$ então f tem um semi-atrator.

Como $k < n$ e $f^n|[p,c]$ é um homeomorfismo, por p ser central, temos que $f^k(x) \neq c$ $\forall x \in [p, p']$.

Temos então duas hipóteses:

i) $f^k(c) \in [p, p']$ e

ii) $f^k(c) \notin [p, p']$

Se i) então temos i.1 $f^k(c) \in [p,c]$ e i.2 $f^k(c) \in [c, p']$:

i.1) Se $f^k(c) \in [p,c]$ então $f^k(p) \in [p,c]$ pois senão $f^k(p) \in [c,p]$ e existe $x \in [p,c]$ com $f^k(x) = c$, que é absurdo. Logo se $f^k(c) \in [p,c]$ então $f^k([p,c]) = [f^k(p), f^k(c)] \subset [p,c]$.

i.2) Se $f^k(c) \in [c,p']$ por argumentação análoga $f^k([c,p']) = [f^k(c), f^k(p')] = [f^k(c), f^k(p)] \subset [c,p']$.

Em ambos casos existe um intervalo $[c,d]$ com $f^k([c,d]) \subset [c,d]$ e $f^k|[c,d]$ um homeomorfismo.

Logo $f^{2k}([c,d]) \subset [c,d]$ e f^{2k} é estritamente crescente. Pela prova de 1.15. temos um semi-atrator em $[c,d]$.

Se ii) podemos supor k mínimo ou seja $k<j<n \Rightarrow f^j(p) \notin (p,p')$. Como $f^k(c) \notin [p,p']$ e $f^k(p) \in (p,p')$ existe $q \in (p,p')$ com $f^k(q) \in \{p,p'\}$. Por p ser central $f^n(q) \in (p,p')$.

Logo $f^{n-k}(f^k(q)) = f^{n-k}(p) = f^{n-k}(p') \in (p,p')$. Assim pela minimalidade de k temos $n-k \geqslant$ daí $n \geqslant 2k$. (★)

Tomemos então $A = \{x \in I | c \notin [x,p]$ e $\exists\, i \leqslant k$ com $f^i(x) = c\}$. Como A é finito existe um elemento s de A mais próximo de c. É fácil ver então que $(s,p] \cap A = \emptyset$. Daí $f^k|[s,p]$ é um homeomorfismo. Como $f^k[p,c]$ é um homeomorfismo $f^k|[s,c]$ é um homeomorfismo.

Além disso pelo modo como s foi escolhido $c \notin f^k((s,p])$. Como $c \notin f^k([p,c]$ e $c \notin f^k((s,p])$. Temos então que $f^k([s,c]) = [f^k(s), f^k(c)]$ e $c \notin f^k([s,c]) = [f^k(s), f^k(c)]$.

Surgem assim duas possibilidades:

ii.1) $f^k(c) \notin [s,s']$

ii.2) $f^k(c) \in [s,s']$

ii.1) Se a primeira delas ocorrer $f^k(c) \notin [s,s']$ logo como $f^k(p) \in (p,p') \subset [s,s']$ existe $d \in [p,c]$ com $f^k(d) \in \{s,s'\}$. Pelo modo como escolhemos s existe $0 < j \leq k$ tal que $f^j(s) = c$. Logo $f^{j+k}(d) = f^j(s) = c$ e assim $j+k \geq n$ pois $d \in [p,c]$ e daí $2k \geq n$. Por (*) $2k = n$ e $j = k$.

Mas daí como $f^k(p) \in (p,p')$ e $f^k(c) \notin (c,c') = \emptyset$. Os subconjuntos

$$B = \{x \in [p,p'] \text{ tal que } f^k(x) \in (x,x')\}$$

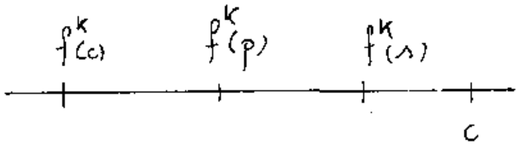
$$\tilde{B} = \{x \in [p,p') \text{ tal que } f^k(x) \notin (x,x')\}$$

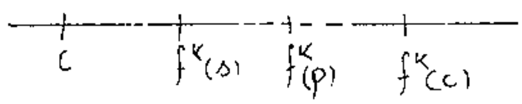
são abertos não vazios. Pela conexidade de $[p,p']$ existe $y \in [p,p']$ com $f^k(y) \in \{y,y'\}$. Trocando y por y' se preciso podemos supor $f^k(y) = y$. Logo $f^{2k}(y) = f^k(y) = y \Rightarrow f^n(y) = y$. Além disso $f^{n'}(y) = ((f^k)'(y))^2 > 0$. Como $(f^n)'(p) \neq 0$. Temos que $c \notin [p,y] \subset [p,p']$. Logo f^n não tem pontos críticos em $[p,y]$. Como $f^k(p) \neq p$ então $p \neq y$. Segue do teorema do valor médio que existe $z \in [p,y]$ com

$$(f^n)'(y) = \frac{f^n(y) - f^n(p)}{y - p} = \frac{y - p}{y - p} = 1.$$

Segue então da propriedade c(5) que $\min\{(f^n)'(y), (f^n)'(p)\} \leq 1$. Portanto ou p ou y é um semi-atrator.

ii.2) Suponhamos então que ii.2 ocorra. Devemos ter $f^k(s) \in [f^k(p), c]$ pois, como já vimos, $c \notin [f^k(p), f^k(s)]$, $f^k(p) \in [f^k(s), f^k(c)]$, $c \notin [f^k(p), f^k(c)]$ e $f^k(p) \notin [c, f^k(p)]$ pela hipótese ii.. Ou seja devemos ter uma das ordens seguintes





Portanto $f^k(s) \in (p,p') \subset [s,s']$. Como $f^k(c) \in [s,s']$, $f^k([s,s']) = f^k[s,c] = [f^k(s), f^k(c)] \subset [s,s']$. Por $c \notin f^k([s,s']) = f^k[s,c]$ teremos $f^k([s,s']) \subset [s,c]$ ou $f^k([s,s']) \subset [c,s']$. No primeiro caso $f^k([s,c]) \subset [s,c]$, no segundo $f^k([s',c]) \subset [s',c]$. Por argumento já usado o fato $f^k(J) \subset J$, $J = [s,c]$ ou $[s',c]$ implica na existência de semi-atratores.

Demonstramos portanto que se $f^k(p) \in (p,p')$ para algum

$0 < k < n$ então f tem um semi-atrator.

Mostremos agora que se $f^k(c) \in (p,p')$ para algum $0 < k < n$ então temos um semi-atrator.

Suponhamos que $f^k(c) \in (p,p')$, com $k < n$. Daí $f^k(p) \neq p$ pois neste caso $f^k(p,p') = f^k((p,c]) \subset [f^k(p), f^k(c)] = [p,f^k(c)] \subset [p,p')$ e portanto p é um k.p.r. o que contraria a minimalidade de n. Também não podemos ter $f^k(p) = p'$ pois neste caso

$$f^k(p') = p' \Rightarrow f^{nk}(p') = p' \Rightarrow f^{nk}(p) = p'$$

mas $f^{nk}(p) = f^{nk}(p) = p$. Logo $f^k(p) \notin [p,p']$. Existe portanto $d \in (p,p')$ com $f^k(d) \in \{p,p'\}$. Como p é central $f^n(d) \in (p,p')$. Assim $f^{n-k}(f^k(d)) = f^{n-k}(p) = f^{n-k}(p') \in (p,p')$ e saímos no caso analisado anteriormente pois $0 < n-k < n$ e $f^{n-k}(p) \in (p,p')$.

Para finalizar observemos então que se

$$f^k([p,p']) = [f^k(p), f^k(c)] \cap (p,p') \neq \emptyset$$

então $f^k(p) \in (p,p')$ ou $f^k(c) \in (p,p')$ pois $(p,p') \notin [f^k(p), f^k(c)]$, já que $c \notin [f^k(p), f^k(c)]$. Portanto se $[f^k(p), f^k(c)] \cap (p,p') \neq \emptyset$ teremos um semi atrator.

Como conseqüência de 2.29. temos:

COROLÁRIO 2.30.: Se f, p e n são como em 2.29. e $f^j((p,p')) \cap f^k((p,p')) \neq \emptyset$ então $k \equiv j \pmod{n}$ ou f tem um semi-atrator.

DEMONSTRAÇÃO : Como $f^n((p,p')) \subset (p,p')$ tomando $\bar{j} \in [0,n]$ com $j \equiv \bar{j}$ (mód n) e $\bar{k}$ análogo teremos

$$f^j((p,p')) \subset f^{\bar{j}}((p,p')) \quad e \quad f^k(p,p') \subset f^{\bar{k}}(p,p').$$

Portanto $f^{\bar{j}}((p,p')) \cap f^{\bar{k}}((p,p')) \neq \emptyset$. Se $k \not\equiv j$ (mód n) então $\bar{k} > \bar{j}$ ou $\bar{k} < \bar{j}$. Suponhamos $\bar{k} > \bar{j}$. Tomando então $d \in f^{\bar{j}}((p,p')) \cap f^{\bar{k}}((p,p'))$ temos $d = f^k(a) = f^j(b)$ daí $f^{n-k}(d) = f^n(a) = f^{n-k+j}(b)$. Como $f^n(a) \in (p,p')$ por p ser central $f^{n-k+j}(b) \in (p,p')$ e $n-k+j < n$ logo pelo Lema 2.29. f apresenta um semi-atrator.

Usando este lema demonstraremos:

PROPOSIÇÃO 2.31.: Se existe uma seqüência de pontos centrais restritivos convergindo para c então f não é S.C.I. .

DEMONSTRAÇÃO 2.31.: Chamemos $\{p_k\}$ a sequência e n_k o menor dos n para os quais p_k é n.p.r. . Podemos supor que $k > j \Rightarrow p_k \in (p_j, p_j')$.

Se f tiver um semi-atrator então f não é S.C.I. por 2.16.. Segue então do Corolário 2.30. que se para algum $k > 0$ existirem j e t com $j \not\equiv t$ (mód n_k) e $f^j((p_k,p_k')) \cap f^t((p_k,p_k')) \neq \emptyset$ então f tem um semi-atrator e não é S.C.I. .

Suporemos daqui em diante que f não tem semi-atratores. Em particular:

$$f^j((p_k,p_k')) \cap f^t((p_k,p_k')) \neq \emptyset \Rightarrow j \equiv t \ (\text{mód } n_k).$$

Teremos ainda que

$$i \geqslant j \Rightarrow \ i \geqslant j \Rightarrow \ f^h((p_i,p_i')) \subset f^h((p_j,p_j')).$$

Daí se $h = q \ . \ n_j + r$, com $0 \leqslant r < n_j$, então

$$f^h((p_i,\ p_i')) \subset f^r(f^{qn_j}((p_j,p_j'))) \subset f^r((p_j,p_j'))$$

já que $f^{n_j}((p_j,p_j')) \subset (p_j,p_j')$. Vemos assim que se $i \geqslant j$ e $h \in \mathbb{N}$ existe $0 \leqslant r < n_j$ tal que

$$h \equiv r \ (\text{mód } n_j) \quad \text{e} \quad f^h((p_i,p_i')) \subset f^r((p_j,p_j')).$$

Façamos então $M_k = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \{m(f^j((p_k,p_k')))\}$. Pelo parágrafo anterior

$$M_k = \max_{0 \leqslant j < k} \{m(f^j((p_k,p_k')))\}.$$

É fácil ver também que $M_{k+1} \leqslant M_k$.

Afirmo que vale o lema a seguir, que será provado mais abaixo.

LEMA 2.32.: Dado $j \in \{0,\ldots,n_k - 1\}$ existe s_j tal que se $i \geqslant s_j$ e $h \equiv j$ (mód n_k) então $m(f^h((p_i,p_i'))) < \frac{2}{3} M_k$.

Vejamos como 2.32. $\Rightarrow$ 2.31. .

Dado $k \in \mathbb{N}$ existe, por 2.32., para cada $j \in \{0,\ldots,n_k - 1\}$, m_j tal que $i \geq s_j$ e $h \equiv j \pmod{n_k} \Rightarrow m(f^h((p_i,p_i'))) < \frac{2}{3} M_k$. Tomando então $s_k = \max\limits_{0 \leq j < n_k - 1} s_j$ teremos para $i > s_k$ e $h \in \mathbb{N}$ que $m(f^h((p_i,p_i'))) < \frac{2}{3} M_k$ pois escolhendo $j \in \{0,\ldots,n_k-1\}$ tal que $h \equiv j \pmod{n_k}$ temos que $i > s_j$ e assim $m(f^h((p_i,p_i'))) > \frac{2}{3} M_k$.

Segue assim que $i > s_k \Rightarrow M_i < \frac{2}{3} M_k$. Podemos concluir então que $M_k \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja k_o tal que $k \geq k_o \Rightarrow M_k < \varepsilon$.

Tomando $V = (p_{k_o}, p_{k_o}')$ vem que $m(f^n(V)) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Logo $c \notin S_f(\varepsilon)$. Assim $c \notin \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} S_f(\varepsilon)$. Por 2.18. f não é S.C.I..

Provaremos o Lema 2.32. .

DEMONSTRAÇÃO 2.32.: Se 2.32. não fosse verdadeiro existiriam duas seqüências $\{h_i\}$ e $\{k_i\}$ com $h_i \equiv j \pmod{n_k}$, $m(f^{h_i}((p_{k_i}, p_{k_i}'))) \geq \frac{2}{3} M_k$. Podemos supor $h_i \in \{0,\ldots,n_{k_i} - i\}$ pois caso contrário temos $h_j' \in \{0,\ldots,n_{k_i} - i\}$ tal que $f^{h_i}((p_{k_i}, p_{k_i}')) \subset f^{h_i'}((p_{k_i}, p_{k_i}'))$ logo $m(f^{h_i'}((p_{k_i}, p_{k_i}'))) \geq \frac{2}{3} M_k$. Além disso fazendo $h_i' \equiv t \pmod{n_k}$ com $t \in \{0,\ldots,n_k - 1\}$ temos $f^{h_i'}((p_{k_i}, p_{k_i}')) \subset f^t(p_k, p_k')$.

Como $f^{h_i}((p_{k_i}, p_{k_i}')) \subset f^j((p_k, p_k'))$, pois $h_i \equiv j \pmod{n_k}$ e $0 \leq j < n_k$, vemos que

$$f^t((p_k, p_k')) \cap f^j((p_k, p_k')) \supset f^{h_i}((p_{k_i}, p_{k_i}')) \neq \emptyset.$$

Logo $t \equiv j \pmod{n_k}$. Mas $0 \leqslant t,j < n_k - 1$. Assim $t = j$ e a substituição $h_j \to h'_j$ é lícita.

Devemos ter

$$f^{h_i}(p_{k_i}, p'_{k_i})) \cap f^{h_t}((p_{k_t}, p'_{k_t})) \neq \emptyset.$$

Caso contrário

$$m(f^{h_i}((p_{k_i}, p'_{k_i})) \cup f^{h_t}((p_{k_t}, p'_{k_t}))) \geqslant \frac{2}{3}M_k + \frac{2}{3}M_k = \frac{4}{3}M_k > M_k$$

o que não pode ocorrer pois

$$f^{h_i}((p_{k_i}, p'_{k_i})) \cup f^{h_i}((p_{k_t}, p'_{k_t})) \subset f^j((p_k, p'_k))$$

e

$$m(f^j((p_k, p'_k))) \leqslant M_k.$$

Segue então que se $i > t$

$$f^{h_i}((p_{k_i}, p'_{k_i})) \subset f^{h_t}((p_{k_t}, p'_{k_t}))$$

pois existe $r \in \{0,\dots,n_{h_t} - 1\}$ tal que

$$f^{h_i}((p_{k_i}, p'_{k_i})) \subset f^r((p_{k_t}, p'_{k_t})).$$

Logo

$$f^{r}((p_{k_t},p'_{k_t})) \cap f^{h_t}((p_{k_t},p'_{k_t})) \supset f^{h_i}((p_{k_i},p'_{k_i})) \cap f^{h_t}((p_{k_t},p'_{k_t})) \neq \emptyset.$$

Assim $r \equiv h_j (\text{mód } n_{k_t})$. Como $0 \leqslant r,\ h_t < n_{k_t} - 1$ vem que $r = h_t$ e $f^{h_i}((p_{k_i},p'_{k_i})) \subset f^{h_t}((p_{k_t},p'_{k_t}))$.

Em resumo se $A_i = f^{h_i}((p_{k_i},p'_{k_i})$ então

$$A_{i+1} \subset A_i \quad \text{e} \quad m(A_i) \geqslant \frac{2}{3} M_k.$$

Mas daí $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ é um intervalo com $m(A) \geqslant \frac{2}{3} M_k > 0$.

Como estamos admitindo que f não tem semi-atratores segue de 2.17 que existe $d \in \operatorname{Int} A$ e $t \in \mathbb{N}$ tais que $f^t(d) = c$. Por c não ser periódico (senão seria um atrator), $(f^t)'(d) \neq 0$. Logo $f^t(A)$ contém uma vizinhança de c. Como $p_k \to c$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p_{k_i} \in \operatorname{int} f^t(A)$. Além disso $A \subset f^{k_i}((p_{k_i},p'_{k_i})) = A_i$. Assim $p_{k_i} \in \operatorname{int}(f^{k_i+t}((p_{k_i},p'_{k_i})))$. Daí $f^{k_i+t}((p_{k_i},p'_{k_i})) \cap (p_{k_i},p'_{k_i}) \neq \emptyset$ donde $k_i + t \equiv 0 \ (\text{mód } n_{k_i})$. Fazendo então $k_i + t = s.n_{k_i}$ vem que:

$$p_{k_i} \in \operatorname{int}(f^{s.n_{k_i}}(p_{k_i},p'_{k_i})) \subset (p_{k_i},p'_{k_i})$$

o que é claramente absurdo. Portanto 2.32 . deve ser verdadeiro.

CAPÍTULO 3

O objetivo deste capítulo é estudar S.C.I. para uma família a um parâmetro $\{f_\delta\}, \delta \in (0,\delta_o]$, com $\{f_\delta\} \subset C$.

Um fato interessante que ocorre com a família f_δ é que ela apresenta tanto funções com e sem S.C.I. em abundância.

Mostraremos que o conjunto dos δ tais que f_δ é S.C.I. contém um subconjunto $\tau(\delta_o)$ com $m(\tau(\delta_o)) \geq \delta_o(1 - |\log\delta_o|^{-1})$. Assim a medida relativa de $\tau(\delta_o)$, $\overline{m}(\tau(\delta_o))$, é:

$$\overline{m}(\tau(\delta_o)) = \frac{m(\tau(\delta_o))}{m((0,\delta_o))} = \frac{m(\tau(\delta_o))}{\delta_o} \geq 1 - |\log\delta_o|^{-1}$$

que tende a 1 quando δ_o tende a zero.

Por outro lado provaremos que:

PROPOSIÇÃO 3.1.: Existe uma seqüência $\{\delta_n\} \subset \mathbb{R}$, com $\delta_n \to 0$, tal que f_{δ_n} tem ponto crítico periódico. Existe também uma seqüência $\{\varepsilon_n\}$, com $\delta_n > \varepsilon_n > 0$, tal que se $\delta \in (\delta_n - \varepsilon_n, \delta_n + \varepsilon_n)$ então f_δ tem uma órbita periódica atratora.

Por 2.16. se $\delta \in (\delta_n - \varepsilon_n, \delta_n + \varepsilon_n)$ então f_δ não é S.C.I. .

Tal família f_δ foi apresentada e estudada em [C.E].

Neste artigo foi demonstrado, através de muitos cálculos e trabalho duro, o seguinte resultado:

TEOREMA 3.2.[Collet e Eckmann]: Dado $\delta_o > 0$ existe um conjunto $\tau(\delta_o)$ tal que

i) Se $\delta \in \tau(\delta_o)$ então f_δ não tem semi-atratores.

ii) Se $\delta \in \tau(\delta_o)$ então f_δ não tem pontos restritivos centrais.

iii) $m(\tau(\delta_o)) \geq \delta_o(1 - |\log\delta_o|^{-1})$.

Além disso foram usados os resultados de [G] para provar que se $\delta \in \tau(\delta_o)$ então f_δ não é S.C.I. .

Observamos porém que a família f_δ não satisfaz as hipóteses de [G]. No que se segue corrigimos este lapso mostrando que:

PROPOSIÇÃO 3.3.: Se $\delta \in (0,1/2]$ então $f_\delta \in C$.

Pelos resultados contidos no capítulo 2 e pela proposição acima a proposição 2.27. permanece válida para $\{f_\delta\}$. Daí podemos concluir que se $\delta \in \tau(\delta_o)$ então f_δ não é S.C.I. .

Em [C.E.] também não foi apresentada a seqüência de intervalos $(\delta_n - \varepsilon_n, \delta_n + \varepsilon_n)$ pois os autores estavam interessados apenas na abundância de S.C.I. e não no entrelaçamento "S.C.I." - "não S.C.I." .

Os membros de f_δ tem o seguinte gráfico

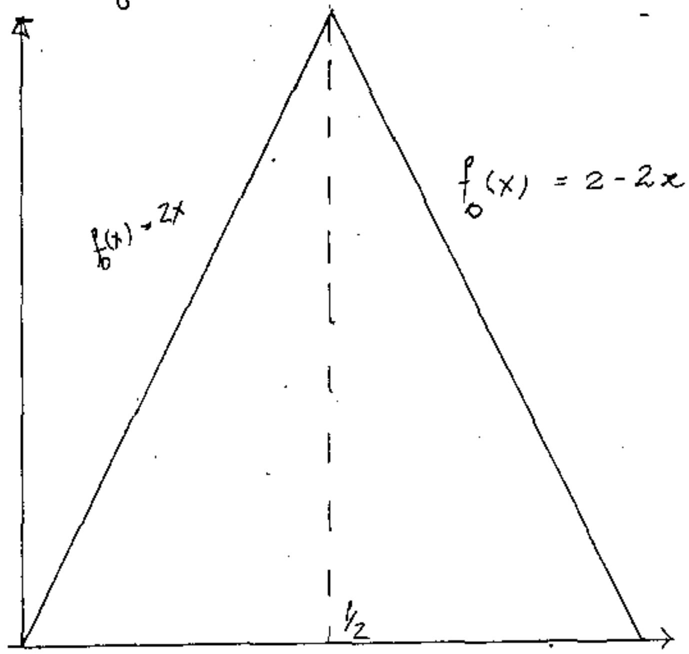


GRÁFICO 3.1.

f_δ, $\delta = 0$.

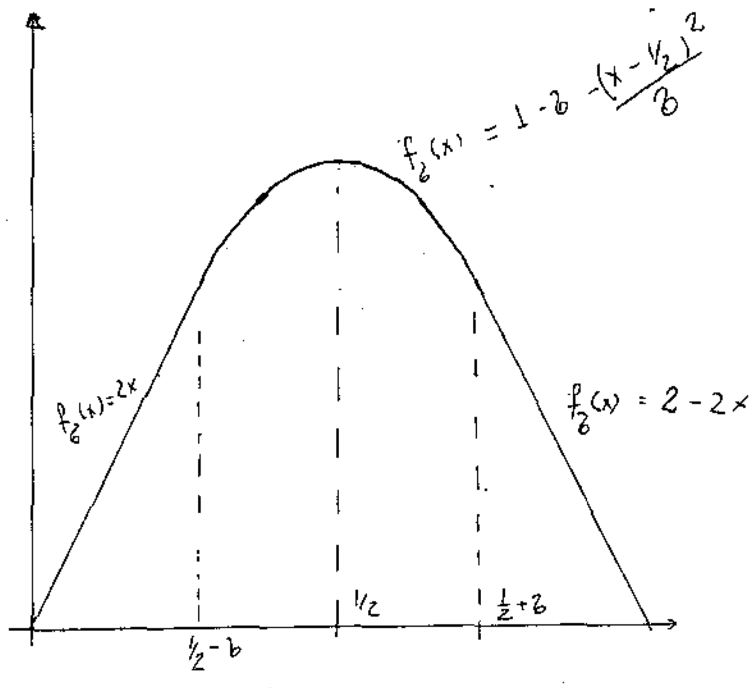


GRÁFICO 3.2.

f_δ, $\delta \neq 0$.

Passemos então a construção das seqüências $\{\delta_n\}$ e $\{\varepsilon_n\}$.

Para $\delta = 0$ temos $f_\delta^n(c) = 0$, se $n \geq 2$.

Dado então $\varepsilon > 0$ deve existir $n \geq 2$ tal que $f_\varepsilon^n(c)$. Caso contrário $f_\varepsilon^n(c) \in [0,1/2]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Porém, como em $[0,1/2]$ $f_\varepsilon(x) > x$, a seqüência $\{f_\varepsilon^n(c)\}_{n\geq 2}$ é crescente. Tomando então $s = \lim_{n\to\infty} f_\varepsilon^n(c)$ teríamos $f_\varepsilon(s) = \lim_{n\to\infty} f_\varepsilon^{n+1}(c) = s$ e $s \in [0,1/2]$. Logo s é um ponto fixo de f_ε em $[0,1/2]$. Então necessariamente $s=0$. Mas isto é absurdo pois $s \geq f_\varepsilon^n(c) \forall n \geq 2$. Em particular $f_\varepsilon^2(c) = 0$, que implica $\varepsilon = 0$.

Tomemos então $n \geq 2$ tal que $f_\varepsilon^n(c) > 1/2$. Como $f_\delta^n(c)$ varia continuamente com δ e $f_\varepsilon^n(c) > c > f_o^n(c) = 0$ existe $\delta(\varepsilon) \in (0,\varepsilon)$ tal que $f_{\delta(\varepsilon)}^n(c) = c$. É fácil ver então que a seqüência $\delta_n = \delta(\varepsilon)$ é como desejado.

Como para δ_n a órbita de c é periódica atratora, pois $(f_{\delta_n}^k)'(c) = 0$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$, e como a existência de órbitas atratoras é preservada por pequenas perturbações, é possível construir a seqüência ε_n.

De fato, como f_δ' varia continuamente com δ temos que $(f_\delta^k)'$ varia continuamente com δ. Logo podemos escolher $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$|\delta_n - \delta| < \varepsilon_1 \Rightarrow \sup_{x\in I} |(f_\delta^k)'(x) - (f_{\delta_n}^k)'(x)| < 1/2 \ ;$$

onde $f_{\delta_n}^k(c) = 0$.

Como $(f_{\delta_n}^k)'(x)$ é contínua em x e $(f_{\delta_n}^k)'(c)=0$ existe $\varepsilon_2 > 0$,

$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, tal que $|x - c| < \varepsilon_2 \Rightarrow |(f^k_{\delta_n})'(x)| < 1/2$.

Mas $f^k_{\delta_n}(x) = f^k_{\delta_n}(c) + (f^k_{\delta_n})'(c) \,.\, (x - c) + \rho(x)(x-c)$, com $\lim_{x\to c} \rho(x) = 0$. Ou seja $f^k_{\delta_n}(c) = c + \rho(x)(x - c)$.

Já que $\lim_{x\to c} \rho(x) = 0$ existe $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$, tal que

$$|x - c| \leqslant \varepsilon_3 \Rightarrow |\rho(x)| < 1/2.$$

Daí

$$f^k_{\delta_n}(c - \varepsilon_3) = c - \rho(x) \,.\, \varepsilon_3 > c - 1/2\ \varepsilon_3 = (c - \varepsilon_3) + 1/2\ \varepsilon_3$$

e

$$f^k_{\delta_n}(c + \varepsilon_3) = c + \rho(x) \,.\, \varepsilon_3 < c + 1/2\ \varepsilon_3 = (c + \varepsilon_3) - 1/2\ \varepsilon_3.$$

Por $f^k_{\delta_n}$ variar continuamente com δ existe $\varepsilon_n > 0$ tal que se $|\delta - \delta_n| < \varepsilon_n$ então $\sup_{x\in I} |f^k_\delta(x) - f^k_\delta(x)| < 1/2\ \varepsilon_3$.

Assim se $|\delta - \delta_n| < \varepsilon_n$ então

i) $\quad |f^k_\delta(c - \varepsilon_3) - f^k_{\delta_n}(c - \varepsilon_3)| < 1/2\ \varepsilon_3$ ou seja

$$f^k_\delta(c - \varepsilon_3) - f^k_{\delta_n}(c - \varepsilon_3) > - 1/2\ \varepsilon_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^n_\delta(c - \varepsilon_3) > - 1/2\ \varepsilon_3 + (c - \varepsilon_3) + 1/2 + \varepsilon_3 > c - \varepsilon_3$$

de forma parecida $f_\delta^k(c + \varepsilon_3) < c + \varepsilon_3$.

ii) Se

$$x \in (c - \varepsilon_3, c + \varepsilon_3) \subset (c - \varepsilon_2, c + \varepsilon_2) \subset (c - \varepsilon_1, c + \varepsilon_1)$$

então $|(f_\delta^k)'(x) - f(f_{\delta_n}^k)'(x)| < 1/2$. Como $|(f_{\delta_n}^k)'(x)| < 1/2$ temos $|(f_\delta^k)'(x)| < 1$.

De i) segue f_δ^k tem um ponto fixo p em $(c - \varepsilon_3; c + \varepsilon_3)$. De ii) vem que $|(f_\delta^k)'(p)| < 1$. Portanto p é um ponto periódico atrator e os ε_n são como desejávamos. Fica assim provado 3.1. .

Agora vamos discutir a proposição 3.3. .

É fácil ver que se $\delta > 0$ então $f_\delta \in End_L(I)$ e que c(1), c(2) e c(4) são satisfeitas.

Quanto a c(3) basta que observemos que $f_\delta'(x') = -f_\delta'(x)$ e para $A = 1/2$

$$\left|\frac{f_\delta'(x)}{f_\delta'(x')}\right| = 1 > A > 0.$$

Portanto para provarmos que $\{f_\delta\}_{\delta>0} \subset C$ basta que mostremos que se $\delta > 0$ então f_δ satisfaz c(5). Em outras palavras devemos provar que se $\delta > 0$ e vale a hipótese 3.4.:

HIPÓTESE 3.4.: Se $[a,b] \subset I$ e $n \in \mathbb{N}$ são tais que $1/2 \notin f_\delta^j([a,b])$

$\forall\ j = 0,1,\ldots,n-1.$

Então vale a igualdade 3.5.:

(3.5.) $$\min_{x\in[a,b]} \{|(f_\delta^n)'(x)|\} = \min\{|(f_\delta^n)'(a)|,\ |(f_\delta^n)'(b)|\}.$$

Daqui em diante assumiremos sempre que $\delta > 0$. Para simplificar a notação escreveremos f em vez de f_δ, quando ficar evidente a qual δ nos referirmos.

A prova que as f_δ satisfazem c(5) usa a mesma idéia da derivada de Schwartz negativa. São necessários, porém, alguns cuidados, pois f_δ não tem derivada segunda em $1/2 - \delta$ e em $1/2 + \delta$. A idéia da prova é contornar este problema redefinindo f_δ numa vizinhança de $1/2 - \delta$ ou $1/2 + \delta$. Aplicando a propriedade da derivada de Schwartz negativa à nova função obteremos resultados sobre a função original.

Calculemos inicialmente a derivada de Schwartz de f_δ em $x \in I - \{1/2,\ 1/2 - \delta,\ 1/2 + \delta\}$.

Se $x \in (1/2 - \delta,\ 1/2 + \delta)$ então

$$f_\delta(x) = 1 - \delta - \frac{(x - 1/2)^2}{\delta}$$

daí

$$f_\delta'(x) = \frac{2(x - 1/2)}{\delta} \quad e \quad f_\delta''(x) = \frac{2}{\delta} \quad e \quad f_\delta'''(x) = 0$$

logo

$$Sf_\delta(x) = \frac{f'''_\delta(x)}{f'_\delta(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''_\delta(x)}{f'_\delta(x)}\right)^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(x-1/2)}\right)^2 < 0 .$$

Se $x \in I - [1/2 - \delta, \frac{1}{2} + \delta]$ então $f(x) = 2x$ ou $1 - 2x$.

Em ambos os casos $f''(x) = f'''(x) = 0$ e assim $sf(x) = 0$.

Analisemos então o que ocorre com um intervalo (a,b) tal que

$$f^i((a,b)) \cap \{\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2}\} = \emptyset \qquad \forall\ i = 0,1,\dots,n-1 .$$

Com esta hipótese sf^n está bem definida em (a,b) e por 2.8. $sf^n \leq 0$. Temos agora duas possibilidades:

i) $sf^n(x) < 0 \quad \forall\ x \in (a,b)$.

ii) $sf^n(x) = 0$ para algum $x \in (a,b)$.

Se para algum $i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}$ e $x \in (a,b)$ tivermos $f^i(x) \in (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$ então $f^i((a,b)) \subset (\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$, pois $\{\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\} \cap f^i((a,b)) = \emptyset$.

Daí $sf(f^i(y)) < 0 \quad \forall\ y \in (a,b)$. Por 2.8. $sf^n < 0$ em (a,b) e vale (i) .

Por outro lado se $sf^n(x) = 0$ para algum $x \in (a,b)$ então por 2.8. $sf(f^i(x)) = 0$, $\forall\ i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}$.

Portanto

$$f^i(x) \in I - [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta] \quad , \quad \forall\ i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N} .$$

De forma análoga ao feito acima

$$f^i((a,b)) \subset I - [\frac{1}{2} - b, \frac{1}{2} - \delta] \quad \forall\ i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}$$

e daí $|(f^n)'(y)| = 2^n$ = cte. , $\forall\, y \in (a,b)$. Mas $(f^n)'$ é contínua e $0 \notin (f^n)'((a,b))$ pela hipótese sobre (a,b) e n. Logo $(f^n)' \equiv \pm$ cte. $\neq 0$ em (a,b). Daí $(f^n)'' \equiv (f^n)''' \equiv 0$ e assim $sf^n \equiv 0$ em (a,b).

Resumindo temos o lema:

LEMA 3.6.: Se (a,b) e n são tais que

$$f^i((a,b)) \cap \{1/2 - \delta,\ 1/2 + \delta,\ c\} = \emptyset \quad \forall\, i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}.$$

então temos duas possibilidades:

a) $sf^n(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

b) $sf^n(x) = 0$ para algum $x \in (a,b)$.

Que são equivalentes respectivamente a :

a') $sf^n(x) < 0$ para algum $x \in (a,b)$.

a") Existe $i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}$ com $f^i((a,b)) \cap (1/2-\delta, 1/2+\delta) \neq \emptyset$.

a"') Existe $i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}$ com $f^i((a,b)) \subset (1/2-\delta, 1/2+\delta)$.

b') $sf^n(x) \equiv 0$ em (a,b).

b") Para todo $i = 0,1,\dots,n-1$ $f^i(a,b) \cap [1/2-\delta,\ 1/2+\delta] = \emptyset$.

b"') Para todo $i = 0,\dots,n-1$ $f^i(a,b) \subset (1/2-\delta,\ 1/2+\delta)$.

b^{iv}) $|(f^n)'(x)| \equiv 2^n$ em (a,b).

b^{v}) $|(f^n)'(x)|$ é constante em (a,b).

Temos agora o Lema:

LEMA 3.7.: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $[a,b] \subset I$ como em 3.4. .

Se, $\forall\ i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}, f_\delta^i([a,b]) \cap \{1/2 - \delta,\ 1/2 + \delta\} = \emptyset$ então vale 3.5. .

DEMONSTRAÇÃO: Pelo lema anterior temos duas hipóteses:

a) $sf < 0$. Neste caso o resultado segue de 2.10. ,

b^{iv}) $|(f^n)'(x)| \equiv 2$ em (a,b), donde $|(f^n)'(a)| = |(f^n)'(b)| =$

$= \min\limits_{x\in[a,b]} \{(f^n)'(x)\} = 2^n$ e vale 3.5. .

Provado 3.7. resta analisar o que ocorre se $f^i([a,b]) \cap \cap \{1/2 - \delta,\ 1/2 + \delta\} \neq \emptyset$ para algum $i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}$.

Façamos $A = \{x \in [a,b] \ / \ f^i(x) \in \{1/2 - \delta,\ 1/2 + \delta\}$ para algum $i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}\}$.

Mostramos agora que basta analisarmos o caso em que A é unitário e seu único elemento é ponto de mínimo de $|(f^n)'(x)|$ em $[a,b]$.

Suponhamos que tivéssemos provado a proposição 3.8.:

PROPOSIÇÃO 3.8.: Se $A = \{x_o\}$ e $|(f^n)'(x_o)| = \min\limits_{x\in[a,b]} \{|(f^n)'(x)|\}$ então 3.5. vale.

No caso geral tomando x^* tal que $|(f^n)'(x^*)| = \min\limits_{x\in[a,b]} |(f^n)'(x)|$ teríamos que se $x^* \in \{a,b\}$ então vale 3.5. . Caso contrário existiriam $\varepsilon_o > 0$ e $\rho_o > 0$ de modo que $[x^* - \varepsilon_o, x^*) \cup (x^*, x^* + \rho] \cap \cap A = \emptyset$, pois A é finito, e $[x^* - \varepsilon_o,\ x^* + \rho] \subset [a,b]$.

Se ε e ρ são como ε_o e ρ_o acima o conjunto A^* correspondente a n e $[x^* - \varepsilon, x^* + \rho]$ é no máximo o unitário $\{x^*\}$.

Na situação $x^* \in A$ temos $A^* = \{x^*\}$ e pela proposição 3.8. temos a igualdade 3.9.:

$$\min_{x \in [x^*-\varepsilon, x^*+\rho]} |(f^n)'(x)| = \min\{|(f^n)'(x^*-\varepsilon)|, |(f^n)'(x^*+\rho)|\} = |(f^n)'(x^*)|.$$

A igualdade 3.9. seria válida mesmo se $x^* \notin A$ pois daí estamos na situação do lema 3.7. .

Assim $|(f^n)'(x)|$ deve ser constante em $[x_o^* - \varepsilon, x^*]$ ou em $[x^*, x^* + \rho]$. Caso contrário existiriam $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o)$ e $\rho \in (0,\rho_o)$ tais que $|(f^n)'(x^* - \varepsilon)|$ e $|(f^n)'(x^* + \rho)|$ são maiores que $|(f^n)'(x^*)|$, contrariando 3.9. .

Logo pelo lema 3.6. $|(f^n)|'(x) \equiv 2^n$ em $[x_o^* - \varepsilon, x^*]$ ou em $[x^*; x^* + \rho]$. Daí $|(f^n)'(x^*)| = 2^n = \max_{x \in [0,1]} |(f^n)'(x)|$ e então

$$\min_{x \in [a,b]} |(f^n)'(x)| = |(f^n)'(x^*)| = 2^n = \min\{|(f^n)'(a)|, |(f^n)'(b)|\}$$

e vale 3.5. .

Resta portanto analisar o caso em que A é unitário e seu único ponto x_o é ponto de mínimo de $|(f^n)'|$ em $[a,b]$.

Ou seja $A = \{x \in [a,b] \mid f^i(x) \in \{1/2 - \delta, 1/2 + \delta\}$ para algum $i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}\} = \{x_o\}$ e $|(f^n)'(x_o)| = \min_{x \in [a,b]} |(f^n)'(x)|$.

A análise se complica quando existem dois i e j $\in [0,n-1] \cap \mathbb{N}$ tais que $f_\delta^i(x_o)$ e $f_\delta^j(x_o)$ pertencem a $\{1/2 - \delta, 1/2 + \delta\}$. Felizmente o conjunto dos δ para os quais isto pode acontecer é finito. Isto se deve ao fato que se $f_\delta^i(x_o)$ e $f_\delta^j(x_o)$ pertecem a

$\{1/2 - \delta,\ 1/2 + \delta\}$ e $i > j$ então $f_\delta^{i-j}(f_\delta^i(x_o)) = f_\delta^i(x_o)$, e esta última igualdade corresponde a uma das equações polinomiais, de grau maior que zero, $f_\delta^i(1/2 + (-1)^k\delta) = 1/2 + (-1)^s\delta$ com $i = 0,\ldots,n-1$ e $k;s = 0;1$. Como estas equações são em número finito temos a finitude dos δ "ruins". A idéia então é resolver o problema para os δ "bons" e depois aproximar os δ "ruins" por δ "bons". Admitamos então 3.10.:

(3.10.) Existe um único $i \in [0,n-1] \cap \mathbb{N}$ tal que $f^i(x_o) \in \{1/2 - \delta,\ 1/2 + \delta\}$.

Então a desigualdade 3.11. abaixo não pode acontecer:

(3.11.) $$|(f^n)'(x_o)| < \min\{|(f^n)'(a)|,\ |(f^n)'(b)|\}\ .$$

Suponhamos, por contradição, que 3.11. fosse verdadeira.

Neste caso não poderíamos ter $|(f^n)'(x)|$ constante em nenhum intervalo de forma $[d,x_o]$, com $d < x_o$ ou $d > x_o$, pois por 3.6. isto implica em $|(f^n)'(x_o)| = 2^n = \max\limits_{x\in[0,1]} |(f^n)'(x)|$, o que contraria 3.11. .

Temos também que $f^{i+1}(x_o)$ não é ponto de máximo local de $|(f^{n-i-1})'|$. Se isto ocorresse como:

$$|(f^n)'(x)| = |(f^i)'(x)|\ .\ |f'(f^i(x))|\ .\ |(f^{n-i-1})'(f^{i+1}(x))|,$$

$$|f'(f^i(x))| = 2 = \max_{x\in I} |(f'(x))|$$

e x_o é mínimo local de $|(f^n)'(x)|$ então x_o seria mínimo local de $|(f^i)'|$. Mas para todo $k \in [0, i-1] \cap \mathbb{N}$ temos

$$f^k((a,b)) \cap \{1/2-\delta,\ 1/2+\delta\} = \emptyset ,$$

pela unicidade de i.

Assim para ρ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequenas e pelo Lema 3.7. aplicado a i e $[x_o - \varepsilon,\ x_o + \rho]$ teríamos:

$$|(f^i)'(x_o)| = \min_{x\in[x_o-\varepsilon, x_o+\rho]} |(f^i)'(x)| = \min\{|(f^i)'(x_o-\varepsilon)|,\ |(f^i)'(x_o+\rho)|\} .$$

Por argumento já usado logo após 3.9. temos $|(f^i)'| \equiv 2^i$ em (a,b). Daí teremos que :

$$|(f^n)'(x)| = 2^i \,.\, |(f^{n-i})'(f^i(x))| = 2^i |f'(f^i(x))| \,.\, |(f^{n-i-1})'(f^{i+1}(x))|.$$

Assim $f^i(x_o)$ seria mínimo local de $|(f^{n-i})'|$. Como $f^{i+1}(x_o)$ é máximo local de $|(f^{n-i-1})'|$ e $|f'(f^i(x_o))| = 2 = \max_{x\in I}|f(x)|$ temos que $f^i(x_o)$ é também máximo local de $|(f^{n-1})'|$.

Do fato de $f^i(x_o)$ ser máximo e mínimo local vem que $|(f^{n-i})'|$ é constante em uma vizinhança de $f^i(x_o)$.

O mesmo deve então se dar com $|(f^n)'|$ numa vizinhança de x_o pois $(f^n)'(x) = (f^{n-i})'(f^i(x)) \,.\, (f^i)'(x)$.

Isto nos leva a um absurdo pois já vimos que se valer 3.11. então $|(f^n)'|$ não pode ser constante em nenhuma vizinhança de x_o.

Além disso $|(f^{n-i-1})'|$ não tem mínimos locais em (a,b). Se isto ocorresse por 2.8. existiria $x \in f^{i+1}((a,b))$ tal que $sf^{n-i-1}(x) = 0$. Daí por 3.5. $|(f^{n-i-1})'| \equiv 2^{n-i-1}$ em $f^{i+1}((a,b))$ e então $f^{i+1}(x_o)$ seria máximo local de $|(f^{n-i-1})'|$, que como já vimos não pode ocorrer.

Como $|(f^{n-i-1})'|$ não tem mínimos locais em $f^{i+1}((a,b))$, $|(f^{n-i-1})'|$ tem quando muito um máximo local neste intervalo. Pois se x e y são máximos locais então em $[x,y]$ existe um mínimo local.

Das observações acima vem que podemos escolher $\rho, \varepsilon > 0$ de modo que

i) $|(f^n)'(x_o)| < \min\{|(f^n)'(x_o - \varepsilon)|, |(f^n)'(x_o + \rho)|\}$.

ii) $(x_o - \varepsilon, x_o + \rho) \subset (a,b)$.

iii) $f^j(x_o-\varepsilon, x_o+\rho) \cap f^i(x_o-\varepsilon, x_o+\rho)) = \emptyset$ se $i \neq j$; onde $f^i(x_o) \in \{1/2-\delta, 1/2+\delta\}$ e $0 \leqslant j < n$.

iv) $|(f^{n-i-1})'|$ não tem máximos locais em $f^{i+1}((x_o-\varepsilon, x_o+\rho))$.

De (iv) e de $|(f^{n-i-1})'|$ não ter mínimos locais em $f^{i+1}((a,b))$ segue que $|(f^{n-i-1})'|$ é monotona em $f^{i+1}((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))$.

Temos que analisar agora quatro situações:

1) $f^i(x_o) = 1/2 - \delta$ e $|(f^{n-i-1})'|$ é crescente em (a,b) .

2) $f^i(x_o) = 1/2 + \delta$ e $|(f^{n-i-1})'|$ é crescente em (a,b) .

3) $f^i(x_o) = 1/2 - \delta$ e $|(f^{n-i-1})'|$ é decrescente em (a,b) .

4) $f^i(x_o) = 1/2 + \delta$ e $|(f^{n-i-1})'|$ é decrescente em (a,b) .

Em cada uma delas fazemos a perturbação correspondente ao respectivo gráfico abaixo :

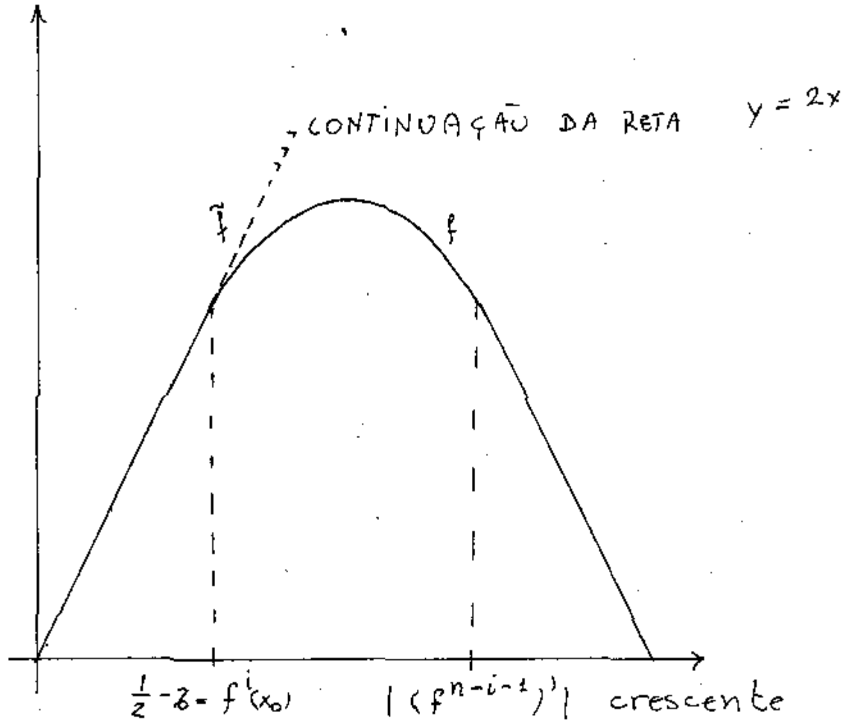


GRÁFICO 3.3.

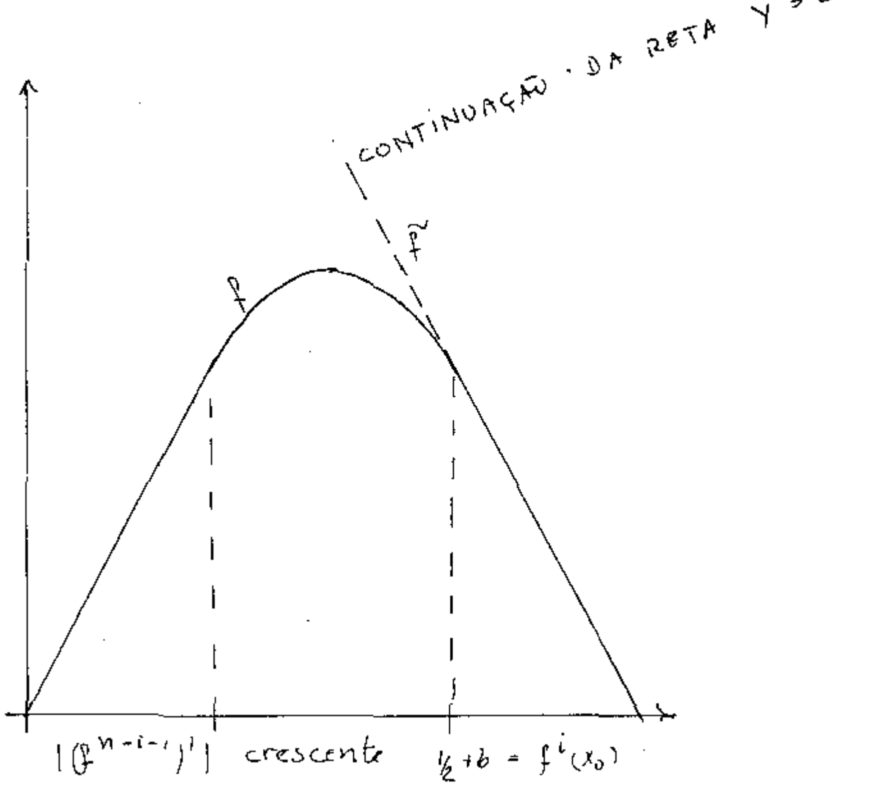


GRÁFICO 3.4.

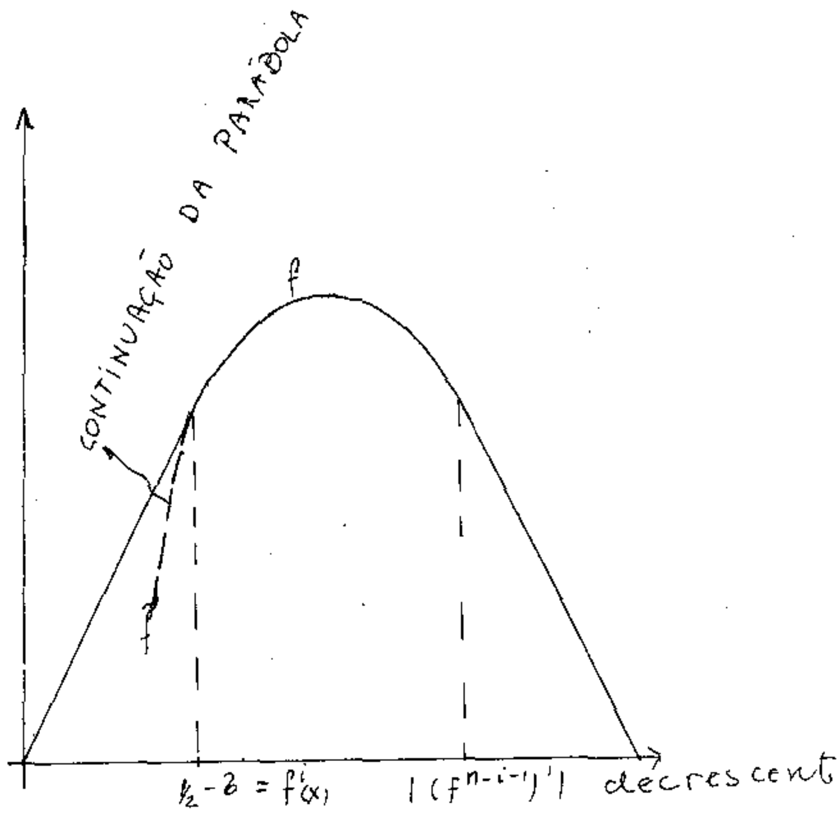


GRÁFICO 3.5.

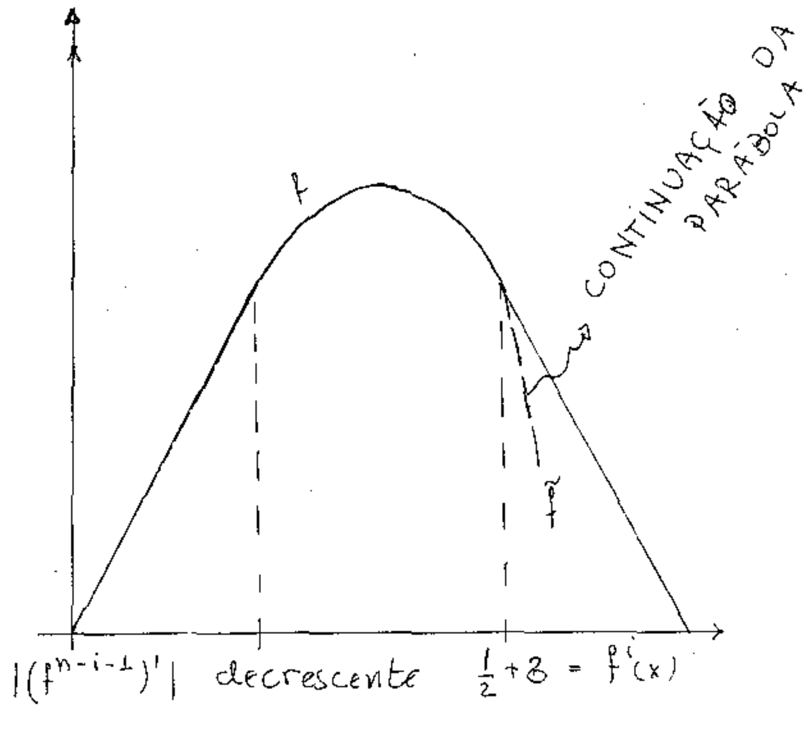


GRÁFICO 3.6.

Analisaremos apenas o caso (1), os demais são análogos.

Pela propriedade (iii) se fizermos a perturbação apenas em $f^i((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))$ não alteraremos f nos intervalos $f^j((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))$, com $j \neq i$. Logo f^i restrita a $(x_o - \varepsilon, x_o + \rho)$ e f^{n-i-1} restrita a $f^{i+1}((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))$ ficam inalteradas.

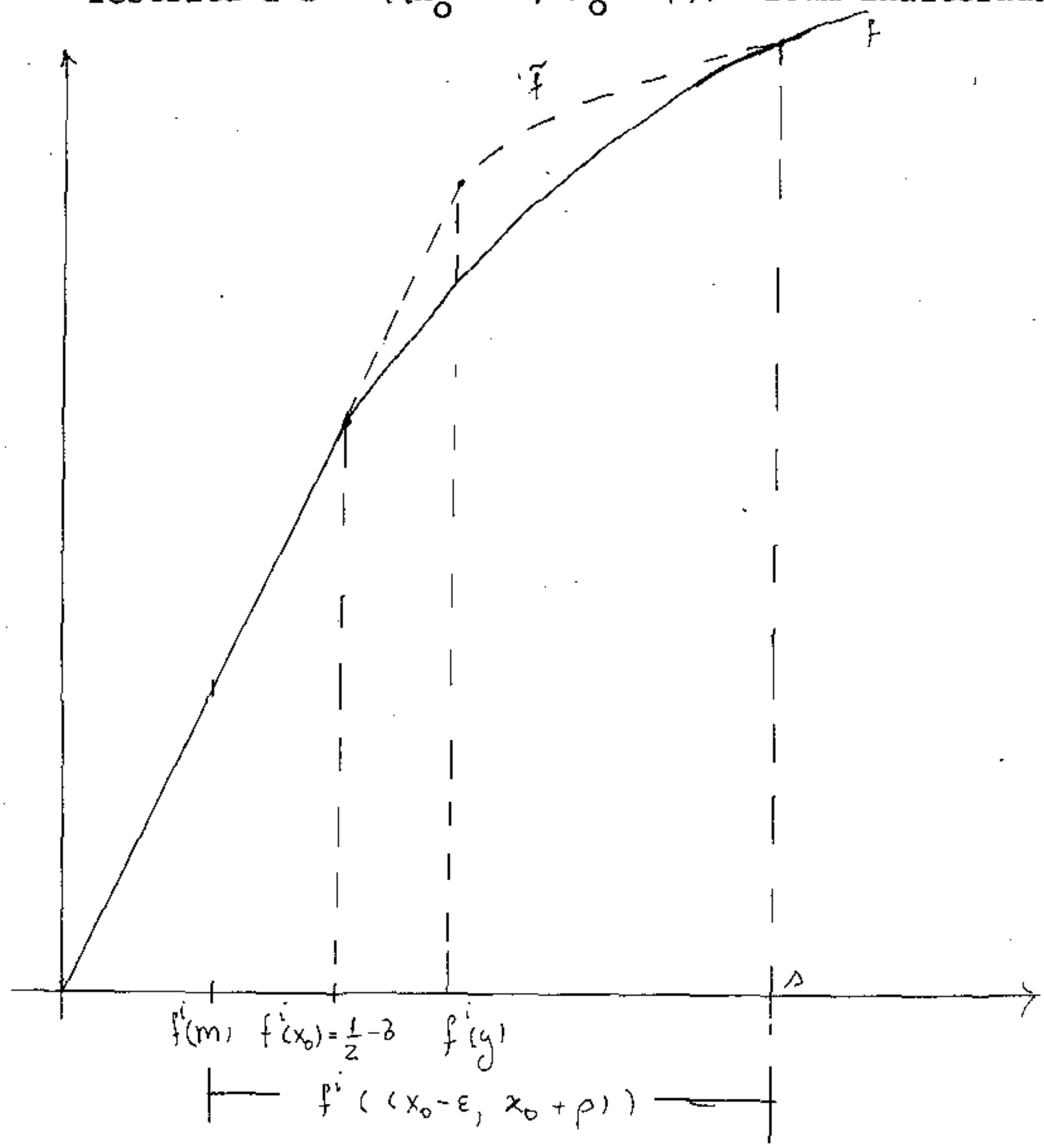


GRÁFICO 3.7.

No gráfico acima fica clara a idéia da perturbação. Tomamos $y \in (x_o - \varepsilon, x_o + \rho)$ tal que $f^i(y) \in (f^i(x_o), s)$, onde s é o extremo superior de $f^i((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))$, e tal que $f^i(y) < f(s)$.

Definimos então $\tilde{f}$ como:

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{se } x \leqslant f^i(x_o) \text{ ou } x \geqslant s \\ \tilde{f}(x) = 2x & \text{se } x \in (f^i(x_o), f^i(y)) \\ \tilde{f}(x) \text{ é uma função } C^\infty \text{ em } [f^i(y), s] & \text{que torna } \tilde{f} \text{ diferenciável.} \end{cases}$$

A forma como $\tilde{f}$ é definida em $[f^i(x), s]$ não importa.

Chamemos então de m o extremo de $(x_o - \varepsilon, x_o + \rho)$ tal que $x_o \in (m, y)$.

Se $x \in [m, x_o]$ então $f^i(x) \in [f^i(m), f^i(x_o)]$ e neste intervalo $f = \tilde{f}$. Logo $f^{i+1}(x) = f(f^i(x)) = \tilde{f}(f^i(x)) = \tilde{f}((\tilde{f})^i)(x) = \tilde{f}^{i+1}(x)$. Assim $\tilde{f}^j \equiv \tilde{f}^j$ em $[m, x_o]$, $\forall\, j = 0 \ldots n$.

Daí para $x \in [m, x_o]$

$$|(f^n)'(x)| = |(\tilde{f}')'(x)| \leqslant |(f^n)'(x_o)| = |(\tilde{f}^n)'(x_o)| \;.$$

Se $x \in [x_o, y]$ então $f^i(x) \in [f^i(x_o), f^i(y)]$.

Logo $\tilde{f}(f^i(x)) \geqslant f(f^i(x))$. Assim, como estamos analisando a hipótese 1,

$$|(f^{n-i-1})'(f^{i+1}(x))| \leqslant |(f^{n-i-1})'(\tilde{f}(f^i(x)))| = |(\tilde{f}^{n-i-1})'(\tilde{f}^{i+1}(x))|$$

Portanto

$$|(\tilde{f}^n)'(x)| = |(\tilde{f}^i)'(x)| . |(\tilde{f})'(f^i(x))| . |(\tilde{f}^{n-i-1})'(\tilde{f}^{i+1}(x))| \geqslant$$

$$\geqslant |(f^i)'(x)| . 2 . |(f^{n-i-1})'(f^{i+1}(x))| \geqslant$$

$$\geqslant |(f^i)'(x)| . |f'(f^i(x))| . |(f^{n-i-1})'(f^{i+1}(x))|$$

$$= |(f^n)'(x)| \geqslant |(f^n)'(x^*)| = |(\tilde{f}^n)'(x^*)| .$$

Resumindo:

$$|(\tilde{f}^n)'(x)| \geqslant |(\tilde{f}^n)'(x_o)| .$$

Segue assim que x_o é mínimo local de $|(\tilde{f}^n)'|$ restrita a $[m,y]$.

Entretanto, segundo mostramos abaixo, $s\tilde{f}^n < 0$ em $[m,y]$, isto por 2.10. nos dá um absurdo, logo (1) não pode ocorrer.

A análise de que (2), (3) e (4) não ocorrem é parecida e temos que 3.11. é falso e

$$\min_{x \in [a,b]} |(f^n)'(x)| = |(f^n)'(x^*)| = \min\{|f^{n'}(a)|, |f^{n'}(b)|\} .$$

Mostremos então que $s\tilde{f}^n < 0$ em $[m,y]$.

Como $|(f^n)'(x_o)| < \min\{|(f^n)'(a)|, |(f^n)'(b)|\}$ por nossa hipótese 3.11. de redução ao absurdo temos $|(f^n)'(x_o)| < 2^n$, logo existe k tal que $f^k(x_o) \in (1/2 - \delta, 1/2 + \delta)$.

Daí $f^k(x_o - \varepsilon, x_o + \rho) \subset (1/2 - \delta, 1/2 + \delta)$ pois

$$f^k((x_o - \varepsilon, x_o + \rho)) \cap \{1/2 - \delta, 1/2 + \delta\} = \emptyset .$$

Como $f(f^i((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))) = \tilde{f}(f^i((x_o - \varepsilon, x_o + \rho)))$ temos que os conjuntos $f^j((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))$ e $\tilde{f}^j((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))$ coincidem para todo $j \in [0,n] \cap \mathbb{N}$. Logo dado $x \in [m,y]$ temos $\tilde{f}^k(x) = f^k(\bar{x})$ para algum $\bar{x} \in (x_o - \varepsilon, x_o + \rho)$. Daí $s\tilde{f}(\tilde{f}^k(x)) = s\tilde{f}(f^k(\bar{x})) = sf(f^k(\bar{x}))$, pois $f \equiv \tilde{f}$ em $f^k((x_o - \varepsilon, x_o + \rho))$ já que, como $f^k(x_o) \in (1/2 - \delta, 1/2 + \delta)$, $i \neq k$.

Portanto $s\tilde{f}(\tilde{f}^k(x)) < 0$. Além disso $s\tilde{f}(\tilde{f}^i(x))=0$ e se $j \neq i,k$, então $s\tilde{f}(\tilde{f}^j(x)) = sf(\tilde{f}^j(x)) \leqslant 0$. Podemos assim concluir de 2.8. que $s\tilde{f}^n < 0$ em $[m,y]$.

Resumindo mostramos que se $f_\delta^j(1/2 \pm \delta) \notin \{1/2 - \delta, 1/2 + \delta\}$ para todo $j \in [0, n - 1] \cap \mathbb{N}$ então vale 3.5. .

Já vimos que o conjunto dos δ para os quais a condição $f^j(1/2 \pm \delta) \notin \{1/2 - \delta, 1/2 + \delta\}$ e $j \in [0, n - 1] \cap \mathbb{N}$ é violada é finito.

Dado então δ qualquer admitamos que tivéssemos a desigualdade 3.12. abaixo:

$$(3.12) \quad |(f_\delta^n)'(x^*)| = \min_{x \in [a,b]} |(f_\delta^n)'(x)| < \min\{|(f_\delta^n)'(a)|, |(f_\delta^n)'(b)|\} .$$

Fazendo

$$\varepsilon = \min\{|(f_\delta^n)'(a), |(f_\delta^n)'(b)|\} - |(f_\delta^n)'(b)|$$

teríamos, por $(f_\delta^{n'})$ variar continuamente com δ, para ρ "bom" suficientemente próximo de δ, que

$$|(f_\delta^n)'(x^*) - (f_\rho^n)'(x^*)| < \varepsilon/3 \quad ,$$

$$|(f_\delta^n)'(a) - (f_\rho^n)'(a)| < \varepsilon/3 \quad ,$$

$$|(f_\delta^n)'(b) - (f_\rho^n)'(b)| < \varepsilon/3 \quad \text{e}$$

$$(f_\rho^n)'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$$

pois $(f_\delta^n)'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$ e $[a,b]$ é compacto.

Porém daí

$$|(f_\rho^n)'(x^*)| \leqslant |(f_\delta^n)'(x^*)| + \varepsilon/3 \leqslant$$

$$\leqslant \min\{|(f_\delta^n)'(a)|, |(f_\delta^n)'(b)|\} + \varepsilon/3 =$$

$$= \min\{|(f_\delta^n)'(a)| + \varepsilon/3, |(f_\delta^n)'(b)| + \varepsilon/3\} \leqslant$$

$$\leqslant \min\{|(f_\rho^n)'(a)|, |(f_\rho^n)'(b)|\} \ .$$

ou

$$\min_{x\in[a,b]} |(f_\rho^n)'(x)| \leqslant |(f^n)'(x^*)| \leqslant \min\{|(f^n)'(a)|, |(f^n)'(b)|\}$$

e

$$(f_\rho^n)'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \ .$$

Isto contraria o que demonstramos sobre ρ. Portanto devemos ter

$$\min_{x\in[a,b]} |(f_\delta^n)'(x)| = |(f_\delta^n)'(x^*)| = \min\{|(f^n)'(a)|, |(f^n)'(b)|\} \ .$$

Com isto fica provado que se $\delta \in (0,\delta_o)$ então f_δ satisfaz c(5) e que $f_\delta \in \mathcal{C}$.

BIBLIOGRAFIA

[C. E.] COLLET, J. and ECKMANN, J. P. . On the abundance of Aperiodic Behavior for maps on the interval. Commun. Math. Phys. 73, 2, 115 - 157(1980).

[G] GUCKENHEIMER, JOHN. Commun. Math. Phys. 73, 2, 115-157 (1980).

[J] JACOBSON, M. V. . On smooth maps of the circle into itself. Math. U.S.S.R. Sbornik 14(1971) 161 - 185.

[L. Y.] LI, TIEN-YEN, and YORKE, JAMES A. . Period Three implies chaos, Amer. Math. Monthly 82(1975) pp. 885 - 992.

[M] MAÑÉ, RICARDO . Hiperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics, Preprint IMPA.

[Mi] MILNOR, JOHN. On the concept of Attractor, Commun. Math. Phys. 99, 177 - 195(1985).

[O. O.] OONO, YOSHITSUGO and OSIKAWA, MOTOSIGE. Chaos in nonlinear diference equations I. Progress in theoretical Physics, vol. 64, nº 1, July 1.980. 54 - 67.

[Sa] SALDANHA; NICOLAU CORÇÃO. Intervalos errantes e infinitos atratores para funções do intervalo. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, 1984.

[S] SINGER; DAVID. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval. SIAM J. APPL. MATH., vol. 35, nº 2 Sept. 78, pp. 261 - 267.